

Известия

ISSN 1026-3519

Российской академии наук

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



НАУКА
— 1727 —

2024

3

СОДЕРЖАНИЕ

Тензорно нелинейные вязкоупругие модели максвелловского типа: виброползучесть и ретчеттинг <i>Д. В. Георгиевский</i>	3
К определению двумерного закона изменения плотности в функционально-градиентной упругой пластине <i>В. В. Дударев, Р. М. Мнухин</i>	12
Упруго-пластический анализ круговой трубы, вывернутой наизнанку <i>Г. М. Севастьянов</i>	34
Анализ конструктивной безопасности сооружений при учете процессов прогрессирующего разрушения <i>Ж. Ы. Маматов, А. А. Абдыкалыков, Н. У. Шамшиев</i>	51
О собственных движениях плоской конструкции типа Коссера <i>Г. Л. Бровко, В. В. Кожухов, Е. Д. Мартынова</i>	67
Факторы устойчивости скважин в коллекторах подземных хранилищ газа <i>Д. М. Климов, В. И. Карев, Ю. Ф. Коваленко, К. Б. Устинов</i>	85
О критерии прочности соединения пластин внахлест <i>В. В. Глаголев, А. И. Лутхов</i>	101
Резонансные вращения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на круговой орбите <i>Н. И. Амелькин</i>	112
Движение изменяемого тела в силовом поле, зависящем от времени <i>А. А. Буров, В. И. Никонов</i>	136
Теорема о дополнительной энергии для закритически деформируемых тонких композитных пластин <i>С. В. Селюгин</i>	148
Моделирование скольжения системы неровностей по границе вязкоупругого полупространства с покрытием <i>Ф. И. Степанов, Е. В. Торская</i>	164

Клетки и фигуры Ная для атермических гемитропных, изотропных и ультраизотропных микрополярных упругих тел <i>Е. Ю. Крылова, Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев</i>	183
Отрицательная ползучесть монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов <i>А. И. Епишин, Д. С. Лисовенко</i>	199

УДК 539.3

ТЕНЗОРНО НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЯЗКОУПРУГИЕ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА: ВИБРОПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕТЧЕТТИНГ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{a, b, c,*}

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^cМосковский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 18.10.2023 г.

После доработки 27.10.2023 г.

Принята к публикации 30.10.2023 г.

Некоторые эффекты напряженно-деформированного состояния, такие как виброползучесть, ускорение ползучести и ретчеттинг, наблюдаемые и изучаемые в экспериментальной механике деформируемого твердого тела, предлагается моделировать на основе определяющих соотношений, реализуемых в тензорно нелинейных вязкоупругих моделях максвелловского типа. Привлекается аппарат изотропных тензор-функций, зависящих от двух симметричных тензорных аргументов. Приводятся примеры сложного напряженного состояния в трубчатом образце, когда имеет место существенный непропорциональный рост во времени осевой компоненты деформации при совместном действии постоянной осевой и колебательной сдвиговой нагрузок по сравнению со случаем действия только осевой нагрузки. Вводятся понятия обобщенного и комбинированного ретчеттинга в условиях сложного напряженного состояния.

Ключевые слова: изотропная тензор-функция, инвариант, материальная функция, вязкоупругость, среда максвелловского типа, виброползучесть, ретчеттинг

DOI: 10.31857/S1026351924030017, EDN: UIKYFM

1. Определяющие соотношения в виде изотропных функций двух тензорных аргументов. В линейной теории вязкоупругости известны две базовые одномерные модели, состоящие из различным образом соединенных друг с другом элементарных упругого и вязкого элементов, – модели Фойгта и Максвелла. В дифференциальных определяющих соотношениях модели Фойгта напряжение является линейной комбинацией деформации, в силу структуры модели совпадающей у двух элементов, и скорости деформации. В модели Максвелла скорость деформации есть линейная комбинация напряжения, совпадающего в упругом и вязком звеньях, и скорости напряжения.

В трехмерной изотропной теории вязкоупругости [1] говорят о средах фойгтовского типа, если в их дифференциальных определяющих соотношениях тензор напряжений σ является некоторой изотропной, вообще говоря, нелинейной функцией двух тензорных аргументов – тензоров деформации ε и скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$. Соответственно дифференциальные определяющие соотношения сред максвелловского типа связывают в виде изотропной нелинейной функции тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$ с тензорами напряжений σ и скоростей напряжений $\dot{\sigma}$. Естественно, предполагается, что в каждый момент времени тензоры σ и $\dot{\sigma}$ локально независимы.

Известно [2, 3], что в трехмерном пространстве наиболее общее представление изотропной тензор-функции двух аргументов, связывающей симметричный тензор второго ранга (в данном случае $\dot{\varepsilon}$) с двумя симметричными тензорами второго ранга (σ и $\dot{\sigma}$), следующее:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & K_0 \mathbf{I} + K_1 \sigma + K_2 \dot{\sigma} + K_3 \sigma^2 + K_4 \dot{\sigma}^2 + K_5 (\sigma \cdot \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \cdot \sigma) + \\ & + K_6 (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \cdot \sigma^2) + K_7 (\sigma \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma) + K_8 (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma^2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга, а девять скалярных материальных функций K_0, \dots, K_8 зависят от десяти функционально независимых инвариантов:

$$\begin{aligned} I_1 = \text{tr } \sigma, \quad I_2 = \dot{I}_1 = \text{tr } \dot{\sigma}, \quad I_3 = \sqrt{\text{tr } \sigma^2}, \quad I_4 = \sqrt{\text{tr } \dot{\sigma}^2}, \quad I_5 = \sqrt[3]{\text{tr } \sigma^3}, \\ I_6 = \sqrt[3]{\text{tr } \dot{\sigma}^3}, \quad I_7 = \sqrt{\text{tr } (\sigma \cdot \dot{\sigma})}, \quad I_8 = \sqrt[3]{\text{tr } (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma})}, \\ I_9 = \sqrt[3]{\text{tr } (\sigma \cdot \dot{\sigma}^2)}, \quad I_{10} = \sqrt[4]{\text{tr } (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma}^2)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

среди которых последние четыре совместные. Точка над тензором означает его инвариантную, или объективную, производную по времени, такую что соотношение (1.1) остается инвариантным относительно вращений. Такой производной является, например, вращательная производная Яуманна, часто используемая в гидродинамике неньютоновских жидкостей [4, 5]:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \sigma + \sigma \cdot \omega - \omega \cdot \sigma, \quad (1.3)$$

где \mathbf{v} – вектор скорости, ω – тензор вихря. Однако в отличие от гидромеханических приложений будем рассматривать деформирование вязкоупругой среды, в котором скорости и все компоненты градиента скоростей настолько малы, что нелинейными слагаемыми в (1.3) можно пренебречь по сравнению с частной производной по времени.

Представления функций двух тензорных аргументов, сходные по структуре с (1.1), (1.2), неоднократно использовались в задачах и приложениях механики деформируемого твердого тела при моделировании различных проявлений тензорной нелинейности в поведении сплошных сред под нагрузкой [6–9].

Остановимся на весьма частном виде тензор-функции (1.1), позволяющем тем не менее качественно отразить некоторые эффекты

напряженно-деформированного состояния (НДС), о которых пойдет речь ниже. Пусть в (1.1)

$$K_0(I_1, I_2) = \frac{I_1}{k_{01}} + \frac{I_2}{k_{02}}, \quad K_1 \equiv \frac{1}{k_1}, \quad K_2 \equiv \frac{1}{k_2}, \quad K_7 \equiv \frac{\tau}{k_7^3}, \quad (1.4)$$

где k_{01} , k_{02} , k_1 , k_2 , k_7 и τ – постоянные коэффициенты (материальные константы), характеризующие выбранную вязкоупругую среду, причем k_{01} и k_1 имеют размерность динамической вязкости, k_{02} , k_2 и k_7 – модулей упругости, а τ – времени. Остальные помимо (1.4) материальные функции K_i в (1.1) положим тождественно нулевыми. Тогда определяющее соотношение (1.1) запишется следующим образом:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{\text{lin}}(\sigma, \dot{\sigma}) + \dot{\varepsilon}_{\text{nl}}(\sigma, \dot{\sigma}), \quad (1.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\text{lin}} = \left(\frac{I_1}{k_{01}} + \frac{I_2}{k_{02}} \right) \mathbf{I} + \frac{\sigma}{k_1} + \frac{\dot{\sigma}}{k_2}, \quad \dot{\varepsilon}_{\text{nl}} = \frac{\tau}{k_7^3} (\sigma \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma), \quad (1.6)$$

где $\dot{\varepsilon}_{\text{lin}}(\sigma, \dot{\sigma})$ – физически линейный дифференциальный оператор, соответствующий трехмерной линейной модели Максвелла, а $\dot{\varepsilon}_{\text{nl}}(\sigma, \dot{\sigma})$ – тензорно нелинейная составляющая скоростей деформаций, характеризуемая модулем k_7 и временем релаксации τ . Заметим, что и оператор $\dot{\varepsilon}_{\text{nl}}$ в (1.6), и вся сумма (1.5) формально тензорно линейны по первому аргументу σ при любом втором аргументе $\dot{\sigma}$.

Разлагая тензоры $\dot{\varepsilon}$, σ и $\dot{\sigma}$ на девиаторные и шаровые составляющие

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3} \dot{\theta} \mathbf{I}, \quad \sigma = \mathbf{s} + \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{3} I_2 \mathbf{I}, \quad (1.7)$$

соотношения (1.5), (1.6) можно представить в виде:

$$\dot{\theta} = \left(\frac{3}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} \right) I_1 + \left(\frac{3}{k_{02}} + \frac{1}{k_2} \right) I_2 + \frac{2\tau}{k_7^3} I_9^3, \quad (1.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{s}}{k_1} + \frac{\dot{\mathbf{s}}}{k_2} + \frac{\tau}{k_7^3} \left(\sigma \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma - \frac{2}{3} I_9^3 \mathbf{I} \right), \quad (1.9)$$

$$I_9^3 = \text{tr}(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}}^2) + \frac{1}{3} I_1 \text{tr} \dot{\mathbf{s}}^2 + \frac{2}{3} I_2 \text{tr}(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}}) + \frac{1}{9} I_1 I_2^2 \quad (1.10)$$

Из (1.8) видно, что несжимаемость среды эквивалентна равенству бесконечности всех коэффициентов k_{01} , k_{02} , k_1 , k_2 и k_7 . Из-за тензорной нелинейности модели девиаторные и шаровые части скоростей деформаций одновременно зависят и от девиаторных, и от шаровых частей напряжений, а не по раздельности, как в скалярно нелинейных изотропных моделях.

2. Тензорно нелинейные (ортогональные) эффе́кты НДС. Возьмем длинный трубчатый образец постоянного круглого кольцевого сечения, материал которого удовлетворяет определяющим соотношениям (1.5), (1.6), и будем

производить различные выборочные процессы его нагружения во времени. Пусть в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , связанной с осью z образца, ненулевые физические компоненты тензоров σ и $\dot{\sigma}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} = \sigma_0(\mathbf{x})h(t), \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \\ \dot{\sigma}_{\theta z} = \dot{\sigma}_{z\theta} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t,\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $h(t)$ – функция Хевисайда, $\sigma_0(\mathbf{x}) > 0$, $\tau_0(\mathbf{x})$ и $\tau_1(\mathbf{x})$ – не зависящие от t функции, обеспечивающие выполнение уравнений равновесия стержня и условий совместности в напряжениях. Для напряженного состояния (2.1) инварианты I_1 и I_2 , входящие в (1.6), (1.8)–(1.10), следующие:

$$I_1 = \sigma_0, \quad I_2 \equiv 0. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в соотношения (1.5) и (1.6), выпишем ненулевые компоненты скоростей деформаций при $t > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{zz} = \left(\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} + \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \cos^2 \omega t \right) \sigma_0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\sigma_0}{k_{01}}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta z} = \dot{\varepsilon}_{z\theta} = (\tau_0 + \tau_1 \sin \omega t) \left(\frac{1}{k_1} + \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \cos^2 \omega t \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Наличие ненулевого коэффициента τ/k_7^3 приводит к тому, что осевая компонента $\dot{\varepsilon}_{zz}$ явно зависит от частоты ω и амплитуды τ_1 крутильных (θz) -колебаний. Относительное влияние параметров ω и τ_1 на осевую скорость деформации характеризуется безразмерным отношением:

$$\sup_t \left| \frac{\dot{\varepsilon}_{nl\,zz}}{\dot{\varepsilon}_{lin\,zz}} \right| = \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \left(\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} \right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Даже при малой амплитуде τ_1 крутильной (θz) -колебательной нагрузки (2.1) ($\tau_1 \ll \sigma_0$) отношение (2.4) может достичь конечной величины за счет высокой частоты вибрации ω . Показателен случай, когда линейные динамические вязкости k_{01} и k_1 равны бесконечности, т.е. $\dot{\varepsilon}_{lin\,zz} = 0$ и линейная составляющая осевой деформации образца постоянна. Тогда наличие $\dot{\varepsilon}_{nl\,zz}$ в (1.5) приводит к нарастанию осевой деформации по пульсирующему закону:

$$\varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}(0) + \frac{\tau}{2k_7^3} \omega \tau_1^2 \sigma_0 (2\omega t + \sin 2\omega t). \quad (2.5)$$

Заметим, что в (2.4) и в (2.5) не входит присутствующая в (2.1) функция $\tau_0(\mathbf{x})$ – среднее по периоду колебаний крутильное напряжение $\sigma_{\theta z}$. Это говорит о том, что на дополнительный, вызванный тензорной нелинейностью, рост осевой деформации не влияет, с нулевым или с ненулевым средним осуществляется вибрационный (θz) -процесс на основном фоне растяжения стержня вдоль оси z .

Аналогично (2.4) для компоненты $\dot{\varepsilon}_{\theta z}$ имеем:

$$\sup_t \left| \frac{\dot{\varepsilon}_{nl \theta z}}{\dot{\varepsilon}_{iin \theta z}} \right| = \frac{2\tau k_1}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2. \quad (2.6)$$

В экспериментальной механике деформируемого твердого тела известны близкие к описанным выше эффекты поведения материалов под нагрузкой, реализуемые в сложном напряженном состоянии и называемые ортогональными эффектами НДС [8]. Кратко перечислим некоторые из них.

1) В работе [10] в испытаниях трубчатых образцов из алюминиевых сплавов Д16Т и АД1 наблюдалось резкое возрастание скорости ползучести при добавлении к статическому напряжению вибрационного напряжения малой относительной амплитуды. Этот эффект, названный гораздо ранее виброползучестью [11], проявляется только в тех случаях, когда вид напряженного состояния при совместном действии статического и динамического напряжений отличается от вида статического напряженного состояния. В работе [10] предложена модель для описания полученных экспериментальных данных, в которой фигурирует кинетический параметр. В качестве количественной меры этого параметра используется величина угла поворота вектора максимального главного напряжения при добавлении малых вибраций к основному напряженному состоянию.

2) Известны эксперименты [12], в которых немонотонные (периодические) нагрузки приводят к так называемому ускорению ползучести. Эти эксперименты не удается объяснить главными теориями вязкоупругости, т.е. теориями, основанными на однократных интегралах. В работе [13] показывается, что ускорение ползучести с вполне допустимой точностью можно моделировать на основе нелинейных определяющих соотношений теории вязкоупругости [14], имеющих в трехмерном случае следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \int_0^t A_{ijklmn}(t, \tau) Q_{mn}(\tau, \varepsilon) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

где Q_{mn} – mn -ая компонента тензора \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \left(\mathbf{I} - \alpha \int_0^\tau \mathbf{q}(\tau, \tau_1) : \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 \right)^{-1} \quad (2.8)$$

В (2.7) и (2.8) $\mathbf{A}(t, \tau)$ – тензор шестого ранга внешних ядер релаксации, $\mathbf{q}(t, \tau)$ – тензор четвертого ранга внутренних ядер релаксации, α – по модулю меньший единицы параметр, по которому можно вести разложение дроби в (2.8) в степенной ряд. Нулевое приближение этого разложения соответствует линейной теории вязкоупругости.

3) На протяжении последних трех десятилетий много работ посвящено ретчеттингу – одностороннему накоплению деформации в материале при его циклическом нагружении. В работах [9, 15] содержатся некоторые обзоры таких работ, а также предлагается вариант классификации проявлений ретчеттинга в зависимости от степени сложности всего процесса деформирования. Обращает на себя внимание то, что единое устоявшееся определение термина “ретчеттинг” пока не сложилось. Некоторые понимают его только в узком

смысле и связывают с движением (“дрейфом”) петли гистерезиса при действии циклической нагрузки в ортогональном основному процессу направлении. Другие же не привязываются к моделированию ретчеттинга исключительно с позиций теории упругопластических процессов, трактуя данное понятие значительно шире.

3. Обобщенный ретчеттинг. Реализуем теперь другое, отличающееся от (2.1), напряженное состояние в трубчатом образце:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sigma_0(\mathbf{x})h(t), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \\ \dot{\sigma}_{rz} &= \dot{\sigma}_{zr} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Различие состоит в том, что на фоне той же самой постоянной по времени осевой нагрузки $\sigma_0(\mathbf{x})$ происходят не (θz) -колебания, а продольные сдвиговые (rz) -колебания с некоторым средним $\tau_0(\mathbf{x})$.

Подстановка (3.1) в определяющие соотношения (1.5), (1.6) приводит к тому, что выражения для осевых компонент $\dot{\epsilon}_{zz}$, $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$ и $\dot{\epsilon}_{rr}$ останутся такими же, как и в (2.3), среди сдвиговых отличной от нуля будет только $\dot{\epsilon}_{rz}$, причем вид ее будет такой же, как $\dot{\epsilon}_{\theta z}$ в (2.3). Выражения (2.4) и (2.5) со всеми выводами из них остаются в силе.

Таким образом, явление дополнительного нарастания во времени осевой деформации при действии сдвиговой колебательной нагрузки имеет место не только при классическом ретчеттинге, когда этой сдвиговой нагрузкой служат крутильные (θz) -колебания сечений, но и в случае продольных сдвиговых (rz) -вибраций цилиндрических слоев трубчатого образца. Совпадение соответствующих компонент тензоров скоростей деформаций не только качественное, но и, как было выше установлено, количественное.

Аналогичная картина наблюдается, когда в качестве основной ненулевой фоновой нагрузки выбирается внутреннее давление с компонентой напряжений σ_{rr} (а следовательно, в силу уравнений равновесия и $\sigma_{\theta\theta}$):

$$\sigma_{rr} = \sigma_0(\mathbf{x})h(t), \quad \sigma_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}_0(\mathbf{x})h(t), \quad (3.2)$$

а в качестве ненулевой колебательной сдвиговой либо σ_{rz} :

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \quad \dot{\sigma}_{rz} = \dot{\sigma}_{zr} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t \quad (3.3)$$

либо $\sigma_{r\theta}$:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \quad \dot{\sigma}_{r\theta} = \dot{\sigma}_{\theta r} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t. \quad (3.4)$$

Тогда происходит пульсирующее нарастание радиальной деформации ϵ_{rr} по аналогичным (2.3) и (2.5) законам:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \left(\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} + \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \cos^2 \omega t \right) \sigma_0, \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{rr}(t) = \epsilon_{rr}(0) + \frac{\tau}{2k_7^3} \omega \tau_1^2 \sigma_0 (2\omega t + \sin 2\omega t), \quad k_{01} = k_1 = \infty. \quad (3.6)$$

Совокупность описанных тензорно нелинейных эффектов, проявляющихся при формально разной геометрии НДС, уместно назвать термином “обобщенный ретчеттинг”. Он заключается в существенном непропорциональном росте во времени компоненты $\varepsilon_{\alpha\alpha}(t)$ деформаций при совместном действии постоянной $\sigma_{\alpha\alpha}$ и колебательной сдвиговой $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ нагрузок (даже если амплитуда колебаний мала) по сравнению со случаем действия только нагрузки $\sigma_{\alpha\alpha}$. Здесь ($\alpha\alpha$) и ($\alpha\beta$) – диагональная и внедиагональная физические компоненты тензоров в ортогональной криволинейной системе координат (в рассмотренном случае в цилиндрической). Данный рост $\varepsilon_{\alpha\alpha}(t)$ не зависит от среднего по периоду колебаний значения $\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$, но зависит от амплитуды и частоты вибрации.

4. Комбинированный ретчеттинг. Пусть во взятом выше трубчатом образце реализуется сложное напряженное состояние довольно общего комбинированного вида:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{x})h(t), \quad \alpha = z, \theta, r, \\ \sigma_{\theta z} &= \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\sin\omega_1 t, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{rz}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\sin\omega_2 t, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\sin\omega_3 t, \\ \dot{\sigma}_{\theta z} &= \dot{\sigma}_{z\theta} = \omega_1 \sigma_{\theta z}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\cos\omega_1 t, \quad \dot{\sigma}_{rz} = \dot{\sigma}_{zr} = \omega_2 \sigma_{rz}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\cos\omega_2 t, \\ \dot{\sigma}_{r\theta} &= \dot{\sigma}_{\theta r} = \omega_3 \sigma_{r\theta}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\cos\omega_3 t,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 – вообще говоря, не связанные друг с другом частоты вибраций сдвиговых нагрузок, а амплитуды $\sigma_{\theta z}^{(1)}$, $\sigma_{rz}^{(1)}$ и $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ много меньше характерных значений $\sigma_{\alpha\alpha}$. Средние за период колебания сдвиговые напряжения для простоты положены нулевыми.

Вычислим на основе определяющих соотношений (1.5), (1.6) диагональные компоненты $\dot{\varepsilon}_{nl\,zz}$ и $\dot{\varepsilon}_{nl\,rr}$:

$$\dot{\varepsilon}_{nl\,zz} = \frac{2\tau}{k_7^3} \left[\begin{aligned} &\sigma_{zz} \left(\omega_1^2 \sigma_{\theta z}^{(1)2} \cos^2 \omega_1 t + \omega_2^2 \sigma_{rz}^{(1)2} \cos^2 \omega_2 t \right) + \\ &+ \sigma_{\theta z}^{(1)} \sigma_{rz}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} \omega_3 \cos \omega_3 t \left(\omega_2 \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t + \omega_1 \sin \omega_2 t \cos \omega_1 t \right) \end{aligned} \right], \tag{4.2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{nl\,rr} = \frac{2\tau}{k_7^3} \left[\begin{aligned} &\sigma_{rr} \left(\omega_2^2 \sigma_{rz}^{(1)2} \cos^2 \omega_2 t + \omega_3^2 \sigma_{r\theta}^{(1)2} \cos^2 \omega_3 t \right) + \\ &+ \sigma_{\theta z}^{(1)} \sigma_{rz}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} \omega_1 \cos \omega_1 t \left(\omega_2 \sin \omega_3 t \cos \omega_2 t + \omega_3 \sin \omega_2 t \cos \omega_3 t \right) \end{aligned} \right]. \tag{4.3}$$

Второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках в (4.2), имеет более высокий порядок малости чем первое слагаемое. Такая же ситуация имеет место и в отношении равенства (4.3). Таким образом, главные части тензорно нелинейных добавок (4.2) и (4.3) к диагональным компонентам скоростей деформаций обусловлены наличием (θz)-, (rz)-сдвигов для $\dot{\varepsilon}_{zz}$ и (rz)-, ($r\theta$)-сдвигов для $\dot{\varepsilon}_{rr}$ и зависят от них аддитивно. Назовем тензорно нелинейное НДС в трубчатом образце, описывающееся соотношениями (4.1)–(4.3), комбинированным ретчеттингом.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.
3. *Spencer A.J.M.* Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.-Y. London, 1971. P. 239–353. [Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.]
4. *Astarita G., Marrucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. Maidenhead, UK: McGraw-Hill Book, 1974. [Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.]
5. *Пухначев В.В.* Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51. Вып. 4. С. 116–126.
6. *Георгиевский Д.В.* О потенциальных изотропных тензор-функциях двух тензорных аргументов в МДТТ // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 220–224.
7. *Агахи К.А., Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // Изв. Тульского ГУ. Сер. Естественные науки. 2013. № 2 (2). С. 10–16.
8. *Георгиевский Д.В.* Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые “ортогональные эффекты” напряженно-деформированного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 21–26. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040042>
9. *Васин Р.А., Георгиевский Д.В., Чистяков П.В.* Тенденции и возможные подходы к математическому моделированию ретчеттинга // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 38–47.
10. *Локощенко А.М.* Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 111–120.
11. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* О виброползучести // Инженер. журн. Механика твердого тела. 1966. № 3. С. 141–143.
12. *Самарин А.П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1979. 84 с.
13. *Анисимов А.Б.* Об эффекте “ускорения ползучести” в теории вязкоупругости // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2007. № 1. С. 57–61.
14. *Победра Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 18–29.
15. *Васин Р.А., Быля О.И., Чистяков П.В.* О некоторых тенденциях в исследовании ретчеттинга // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2021. № 2. С. 57–60.

TENSOR NONLINEAR VISCOELASTIC MODELS BY MAXWELL-TYPE: VIBROCREEP AND RATCHETING

D. V. Georgievskii^{a, b, c,*}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

^c*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Some effects of the stress-strain state, such as vibrocreep, creep acceleration and ratcheting, observed and studied in experimental mechanics of a deformable solid, are proposed to be modeled on the basis of constitutive relations implemented in tensor nonlinear viscoelastic Maxwell-type models. The apparatus of isotropic tensor functions depending on two symmetric tensor arguments is involved. Examples of a complex stress state in a tubular specimen are given, when there is a significant disproportionate increase in time of the axial component of strain under the combined action of constant axial and vibrational shear loads compared with the case of the action of only axial load. The concepts of generalized and combined ratcheting are introduced in conditions of a complex stress state.

Keywords: isotropic tensor function, invariant, material function, viscoelasticity, Maxwellian-type medium, vibration creep, ratcheting

REFERENCES

1. *Ilyushin A.A., Pobedria B.E.* Foundations of mathematical theory of thermoviscoelasticity. Moscow: Nauka, 1970. (In Russian)
2. *Lokhim V.V., Sedov L.I.* Nonlinear tensor functions of several tensor variables // Journal of Applied Math. and Mech. 1963. V. 27. № 3. P. 597–629.
3. *Spencer A.J.M.* Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.-Y. London, 1971. P. 239–353.
4. *Astarita G., Marruci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. Maidenhead, UK: McGraw-Hill Book, 1974.
5. *Pukhnachev V.V.* Mathematical model of an incompressible viscoelastic Maxwell medium // Journal of Applied Mech. And Technical Phys. 2010. V. 51. № 4. P. 546–554.
6. *Georgievskii D.V.* On potential isotropic tensor functions of two tensor arguments in mechanics of solids // Mechanics of Solids. 2010. V. 45. № 3. P. 493–496.
7. *Agakhi K.A., Georgievskii D.V.* Tensor nonlinear constitutive relations of the isotropic theory of creep with tensor measure of damage // Proc. Tula State Univ. Ser. Natural sciences. 2013. № 2 (2). P. 10–16. (In Russian)
8. *Georgievskii D.V.* Nonlinear tensor functions of two arguments and some “orthogonal effects” of the stress-strain state // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 5. P. 619–623.
9. *Vasin R.A., Georgievskii D.V., Chistyakov P.V.* Trends and possible approaches to mathematical modeling of ratcheting // Elasticity and unelasticity. Moscow: Moscow State Univ. Press, 2021. P. 38–47. (In Russian)
10. *Lokoshchenko A.M.* Vibrocreep of metals in uniaxial and complex stress states // Mechanics of Solids. 2014. V. 49. № 4. P. 453–460.
11. *Lokoshchenko A.M., Shesterilov S.A.* On vibrocreep // Engineering J. 1966. № 3. P. 141–143. (In Russian)
12. *Samarin A.P.* Equations of state of materials with complex rheological properties. Kuybyshev: Kuybyshev Univ. Press, 1979. (In Russian)
13. *Anisimov A.B.* The effect of “creep acceleration” in the theory of viscoelasticity // Moscow Univ. Mechanics Bull. 2007. V. 62. № 1. P. 21–24.
14. *Pobedria B.E.* Mathematical theory of nonlinear viscoelasticity // Elasticity and unelasticity. Moscow: Moscow State Univ. Press, 1973. V. 3. P. 95–173. (In Russian)
15. *Vasin R.A., Bylya O.I., Chistyakov P.V.* Some trends in ratcheting research // Moscow Univ. Mechanics Bull. 2021. V. 76. № 2. P. 61–4.

УДК 539.4

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДВУМЕРНОГО ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ ПЛОТНОСТИ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

© 2024 г. В. В. Дударев^{a, *}, Р. М. Мнухин^{a, **}

^a *Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича,
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

^{*}*e-mail: dudarev_vv@mail.ru, **e-mail: romamnuhin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 31.01.2023 г.

После доработки 03.11.2023 г.

Принята к публикации 12.11.2023 г.

В работе на основе общей постановки задачи об установившихся колебаниях неоднородного упругого изотропного тела сформулирована прямая задача о планарных колебаниях прямоугольной пластины в рамках плоского напряженного состояния. Левая грань пластины жестко закреплена, на правой приложена осциллирующая растягивающая нагрузка. Свойства функционально-градиентного материала пластины описываются двумерными законами изменения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности. Для общности рассмотрения приведена безразмерная постановка задачи. Решение прямой задачи об определении поля перемещений получено с помощью метода конечных элементов. Показано влияние каждой характеристики материала на поле перемещений и значения первой резонансной частоты. Проведен анализ полученных результатов. Рассмотрена обратная задача об определении закона изменения плотности по данным о значениях компонент поля перемещений при фиксированной частоте. Для снижения погрешности вычисления производных от таблично-заданных функций двух переменных предложен подход, основанный на сплайн-аппроксимации и алгоритме локально взвешенной регрессии. Представлены примеры реконструкции законов различного вида, демонстрирующие возможность использования этого подхода.

Ключевые слова: пластина, функционально-градиентный материал, метод конечных элементов, обратная задача, идентификация, плотность

DOI: 10.31857/S1026351924030022, EDN: UIKMUU

1. Введение. Развитие новых технологий производства позволяет создавать новые неоднородные материалы, свойства которых изменяются по пространственным координатам. К таким материалам относятся в том числе функционально-градиентные материалы (ФГМ). Благодаря переменным свойствам они находят применение в различных областях науки

и техники, таких как автомобилестроение и машиностроение (конструкционные элементы), аэрокосмическая промышленность (защитные покрытия), биомедицина (протезы и импланты) и т.д. [1–3]. Основным преимуществом таких материалов по сравнению с классическими композитами в виде сэндвич-панелей является более низкая вероятность возникновения расслоения и трещин [4, 5]. Подобные дефекты могут возникать на этапе производства, а также в результате воздействия эксплуатационных механических или температурных нагрузок.

В настоящее время [6, 7] широко используются многофазные ФГМ, которые описываются переменными свойствами, позволяющими осуществлять переход от одного материала в другой по всему объему. Они обычно создаются в процессе порошковой металлургии, когда требуемый состав порошка укладывается слой за слоем с последующим уплотнением и спеканием. В свою очередь, формирование фаз ФГМ зависит от условий их обработки (скорости охлаждения и процесса термообработки). Поскольку процесс производства является сложным, то следует проверять соответствие проектных свойств реальным.

Одной из важных задач является анализ акустических свойств неоднородных пластин, которые широко используются как конструкционные элементы. В статье [8] исследована задача о свободных колебаниях функционально-градиентной пластины с круговым отверстием. Переменные свойства изменяются по толщине по правилу осреднения Мори–Танаки. Решение построено с помощью метода Рэлея–Ритца. Получены значения собственных частот, исследовано влияние механических свойств пластины и размера отверстия на компоненты полей перемещений. Равновесие тонкой упругой неоднородной пластины рассмотрено в работе [9]. Определяющие уравнения получены с помощью асимптотического подхода. Проведено сравнение данных, полученных на основе моделей Кирхгофа–Лява и Тимошенко–Рейсснера. В статье [10] с помощью метода суперпозиции получены аналитические решения для задачи о свободных колебаниях толстой ортотропной пластины. Сформулированная краевая задача сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены пластинки со свободными и жестко закрепленными границами. В статье [11] на основе метода динамической жесткости исследована задача о свободных колебаниях пластины. Свойства материала изменяются по толщине согласно степенному закону. Проведен анализ различных геометрических и материальных параметров на значения собственных частот. В работе [12] получено решение трехмерной задачи теории упругости для однонаправленно армированных композитных пластин в виде рядов. Построены графики смещений и напряжений. Показано, что значительное увеличение жесткости может быть достигнуто благодаря выбору специальной ориентации волокон и значения градиента свойств. В монографии [13] рассмотрены задачи для пластин и оболочек из ФГМ в рамках нелинейной теории упругости.

Помимо изгибных колебаний пластин продолжают исследования их вынужденных и свободных планарных колебаний. В статье [14] представлен обзор более 230 работ, посвященных разработкам аналитических решений

для задач о собственных колебаниях прямоугольных пластин. При этом такие решения могут быть получены только для определенных типов граничных условий [15–19]. В статье [20] на основе метода Чебышева–Ритца рассмотрены свободные планарные колебания слоистых композитных пластин с криволинейными границами. Проведен анализ влияния структуры, геометрии и вида граничных условий на значения собственных частот. Некоторые результаты сравниваются с данными, полученными с помощью МКЭ. В работе [21] рассматривается задача о планарных колебаниях неоднородной кольцевой области. Свойства материала изменяются по радиальному направлению. Решение построено с помощью усовершенствованного метода Фурье. Представлены значения собственных частот для различных соотношений внешнего и внутреннего радиусов, параметра градиентности и условий закрепления. Точность расчетов продемонстрирована путем сравнения с результатами для однородной области [22]. В работе [23] проведено исследование планарных колебаний ортотропных полых, сплошных круговых пластин и пластин в виде секторов окружностей. В статье [24] с помощью полуаналитического решения исследованы планарные свободные колебания неоднородных пористых пластин. Рассмотрены два вида неоднородности, когда свойства изменяются по толщине или в плоскости пластины. Проведено сравнение некоторых данных с результатами натурного эксперимента. Среди других работ, в которых представлены экспериментальные данные для однородных пластин, можно отметить статьи [25–27].

Изучение задач идентификации характеристик упругих функционально-градиентных пластин нашло отражение в современных работах. Статьи [28, 29] посвящены неразрушающей идентификации остаточных напряжений в тонких ФГ пластинах. В первой работе в рамках акустического метода решение обратной задачи сведено к реализации итерационного процесса, представлены численные результаты восстановления. Во второй работе поле остаточных напряжений описывается с помощью функции напряжения Эри. Решение также сведено к итеративной процедуре, основанной на модальном анализе чувствительности. Исследовано влияние зашумления на процедуру реконструкции. Идентификация жесткости пластин осуществлена в работах [30, 31], а в статьях [32–34] представлены результаты восстановления нескольких механических характеристик. Например, в работе [32] проводится реконструкция цилиндрической жесткости и плотности неоднородной круглой пластины по дополнительной информации о ее акустическом отклике. Решение построено на основе проекционного метода. В статье [31] предложена процедура идентификации направлений ортотропии и изгибной жесткости. Также авторами осуществлена регуляризация задачи для преодоления высокой чувствительности к зашумлению входных данных.

При исследовании обратных коэффициентных задач в рамках линейной теории упругости в качестве входной информации обычно используются данные, измеряемые внутри области (первая постановка) или на части ее поверхности (вторая постановка) [35]. С практической точки зрения задачи во второй постановке более удобны в реализации при проведении эксперимента, но требуют использования специальных методов, так как являются существенно

нелинейными. Для них также характерно более выраженное проявление некорректности. Идентификация искомых двумерных законов изменения из широкого класса функций требует существенных вычислительных затрат [36, 37]. При этом одним из способов снижения таких затрат является сужение класса искомых законов, например до полиномиальных, и задача сводится к отысканию конечного числа параметров [38]. Для задач в первой постановке на практике не для всех исследуемых объектов возможно реализовать съем необходимых данных. Такие задачи являются линейными, поэтому для их решения обычно не требуется использования сложных методов и привлечения специальных численных схем. С другой стороны, их рассмотрение позволяет выявить важные особенности для исследования задач во второй постановке.

В настоящей работе рассматривается задача об установившихся планарных колебаниях функционально-градиентной упругой пластины. Механические свойства описываются модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и плотностью, изменяющимися по двум координатам. Влияние переменных свойств на акустические характеристики анализируется на основе ранее апробированного подхода с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Сформулирована и решена обратная задача об определении закона изменения плотности по данным о поле смещений, измеренном в конечном наборе точек при фиксированной частоте.

2. Прямая задача. Общая постановка задачи об установившихся колебаниях изотропного тела из неоднородного материала может быть записана в виде [39, 40]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \mathbf{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{u}|_{S_u} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{S_\sigma} = \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши, ρ — переменная плотность, ω — круговая частота колебаний, \mathbf{u} — вектор смещений, λ и μ — параметры Ламе, изменяющиеся по пространственным координатам, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформации, \mathbf{I} — единичный тензор, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали, $S = S_u \cup S_\sigma$ — поверхность тела, \mathbf{P} — амплитуда вектора внешней нагрузки.

На основе этой постановки рассмотрим задачу об установившихся планарных колебаниях прямоугольной пластины малой толщины $2h$ в рамках обобщенного плоского напряженного состояния. Левая грань жестко закреплена, на правой приложена нагрузка. Ширина пластины — b , длина — l . Срединную плоскость пластины примем за координатную плоскость Ox_1x_2 , тогда нулевыми являются следующие компоненты тензора напряжений $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$. Компоненты вектора смещений u_1, u_2 являются функциями двух координат $u_1 = u_1(x_1, x_2), u_2 = u_2(x_1, x_2)$.

Пластина изготовлена из ФГМ, переменные свойства которого описываются модулем Юнга $E(x_1, x_2)$, коэффициентом Пуассона $\nu(x_1, x_2)$ и плотностью $\rho(x_1, x_2)$. Уравнения установившихся колебаний и граничные условия после отделения временного множителя примут вид:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\
& \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \rho\omega^2 u_2 = 0, \\
& u_1 = u_2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \in [0, b], \\
& \sigma_{11} = P, \quad \sigma_{12} = 0, \quad x_1 = l, \quad x_2 \in [0, b], \\
& \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad x_1 \in [0, l], \quad x_2 = 0, b,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22})$, $\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11})$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$, $\varepsilon_{22} = u_{2,2}$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0.5(u_{1,2} + u_{2,1})$. Здесь для краткости записи принято обозначение частной производной $\partial F / \partial x_i = F_{,i}$.

Для удобства рассмотрения перейдем к безразмерной постановке задачи:

$$\begin{aligned}
& S_{11,1} + S_{21,2} + \kappa^2 r w_1 = 0, \\
& S_{12,1} + S_{22,2} + \kappa^2 r w_2 = 0, \\
& w_1 = w_2 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 \in [0, k], \\
& S_{11} = p, \quad S_{12} = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 \in [0, k], \\
& S_{21} = 0, \quad S_{22} = 0, \quad \xi_1 \in [0, 1], \quad \xi_2 = 0, k.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Определяющие соотношения в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
& S_{11} = \frac{g}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad S_{22} = \frac{g}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad S_{12} = S_{21} = \frac{g}{1+\nu}\varepsilon_{12}, \\
& \varepsilon_{11} = w_{1,1}, \quad \varepsilon_{22} = w_{2,2}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0.5(w_{1,2} + w_{2,1}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $x_i = l\xi_i$, $\xi_1 \in [0, 1]$, $\xi_2 \in [0, k]$, $\sigma_{ij} = E_* S_{ij}$, $u_i = l w_i$, $E = E_* g(\xi_1, \xi_2)$, $\nu = \nu(\xi_1, \xi_2)$, $\rho = \rho_* r(\xi_1, \xi_2)$, E_* , ρ_* — характерные значения соответствующих величин, $\kappa^2 = \rho_* \omega^2 l^2 / E_*$ — безразмерная частота колебаний, $k = b/l$ — параметр, характеризующий отношение ширины пластины к ее длине. С учетом линейности задачи значение безразмерной нагрузки выбрано следующим $p = P/E_* = 1$.

3. Анализ чувствительности. Следует отметить, что для общего случая неоднородности механических характеристик и вида граничных условий решение рассматриваемой задачи может быть построено только численно. Для построения такого решения воспользуемся МКЭ, который является одним из универсальных методов исследования и моделирования поведения объектов конечных размеров. Отметим, что ранее в работах [41, 42] был проведен анализ влияния переменных свойств материала на основные акустические характеристики радиально-неоднородного цилиндра и дана сравнительная оценка точности решений, полученных в КЭ-пакете FlexPDE и с помощью метода, основанного на разложении в ряды. В данной работе в качестве конкретного

Таблица 1. Значения параметров четырех веществ

№ п/п	Вещество	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³
1	SiC	410	0.14	3210
2	Al ₂ O ₃	370	0.22	3900
3	Ti ₆ Al ₄ V	113.8	0.342	4430
4	Al 1100	69	0.33	2710

примера будем рассматривать ФГМ, состоящий из смеси четырех веществ. Переменные свойства такого материала могут быть описаны с помощью двумерных законов смеси [43]:

$$\begin{aligned}
 f_E(\xi_1, \xi_2) &= E_1V_1(\xi_1, \xi_2) + E_2V_2(\xi_1, \xi_2) + E_3V_3(\xi_1, \xi_2) + E_4V_4(\xi_1, \xi_2), \\
 f_\nu(\xi_1, \xi_2) &= \nu_1V_1(\xi_1, \xi_2) + \nu_2V_2(\xi_1, \xi_2) + \nu_3V_3(\xi_1, \xi_2) + \nu_4V_4(\xi_1, \xi_2), \\
 f_\rho(\xi_1, \xi_2) &= \rho_1V_1(\xi_1, \xi_2) + \rho_2V_2(\xi_1, \xi_2) + \rho_3V_3(\xi_1, \xi_2) + \rho_4V_4(\xi_1, \xi_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где введены функции

$$\begin{aligned}
 V_1(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1^n) \left(1 - \left(\frac{\xi_2}{k} \right)^m \right), & V_2(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_1^n) \left(\frac{\xi_2}{k} \right)^m, \\
 V_3(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1^n \left(1 - \left(\frac{\xi_2}{k} \right)^m \right), & V_4(\xi_1, \xi_2) &= \xi_1^n \left(\frac{\xi_2}{k} \right)^m.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Положительные параметры n и m характеризуют степень градиентности свойств по координатам ξ_1 и ξ_2 соответственно; E_i , ν_i , ρ_i , $i = \overline{1,4}$ — безразмерные значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности соответствующего i -го вещества.

В качестве четырех веществ возьмем следующие: керамики SiC (вещество 1), Al₂O₃ (вещество 2), которые достигают 100% своей концентрации соответственно в точках (0,0) и (0, k) на левой грани области, и металлы Ti6Al4V (вещество 3), Al 1100 (вещество 4), которые достигают 100% своей концентрации соответственно в точках (1,0) и (1, k) на правой границе. Значения модуля Юнга E , коэффициента Пуассона ν и плотности ρ взяты из открытых данных, размещенных на сайте <http://www.matweb.com> (см. табл. 1). Характерные значения модуля Юнга и плотности выбраны следующими: $E_* = 100$ ГПа, $\rho_* = 1000$ кг/м³.

Проведем анализ влияния амплитудных значений модуля Юнга, коэффициента Пуассона и плотности на изменение компонент поля перемещений w_i . Для этого, по аналогии с работой [42], введем в рассмотрение функции:

$$\begin{aligned}
 g_d(\xi_1, \xi_2) &= (1 + d) \cdot f_E(\xi_1, \xi_2), \\
 \nu_d(\xi_1, \xi_2) &= (1 + d) \cdot f_\nu(\xi_1, \xi_2), \\
 r_d(\xi_1, \xi_2) &= (1 + d) \cdot f_\rho(\xi_1, \xi_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

где параметр $d = 0.001, 0.01, 0.1$ описывает амплитудные значения. Для исследования влияния конкретной характеристики соответствующий ей закон выбирался из (3.2) при $n = m = 1$, а два других фиксировались при значении $d = 0$. Для удобства оценки изменения значений компонент поля перемещений введены функции:

$$\delta_{\xi_1} = \frac{|w_1 - w_1^0|}{\max_M |w_1^0|} \cdot 100\%, \quad \delta_{\xi_2} = \frac{|w_2 - w_2^0|}{\max_M |w_2^0|} \cdot 100\%, \quad (3.4)$$

где $M = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 | \xi_1 \in [0, 1], \xi_2 \in [0, k]\}$ — область рассмотрения, w_1^0, w_2^0 — компоненты поля перемещений, соответствующего законам (3.3) при $d = 0, n = m = 1$. Анализ результатов расчетов показал, что наибольшее изменение поля перемещений наблюдалось при изменении амплитудных значений модуля Юнга E , наименьшее — коэффициента Пуассона ν . На рис. 1, 2 для примера изображены графики функций $\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}$, соответствующие функции $r_d(\xi_1, \xi_2), d = 0.1$. Максимальные значения $\max \delta_{\xi_1} = 8.6\%, \delta_{\xi_2} = 6.94\%$. Для приведенных данных значение безразмерной частоты выбиралось до первого резонанса $\kappa = 1.0$. Также были проанализированы аналогичные графики для $g_d(\xi_1, \xi_2)$ ($\max \delta_{\xi_1} = 17.8\%, \max \delta_{\xi_2} = 12.6\%$) и $\nu_d(\xi_1, \xi_2)$ ($\max \delta_{\xi_1} = 0.12\%, \max \delta_{\xi_2} = 7.77\%$). Для демонстрации изменения значений первой безразмерной резонансной частоты κ в зависимости от значений d для каждой из характеристик в табл. 2 приведены соответствующие данные. При $d = 0$ и $n = m = 1$ первый резонанс возникает при $\kappa \approx 1.39744$. Следует отметить, что здесь точность вычислений в пакете FlexPDE задавалась с помощью служебного параметра $\text{errlim} = 10^{-6}$.

Из приведенных графических и численных данных можно сделать вывод, что амплитудные значения модуля Юнга и плотности оказывают более существенное влияние на значения компонент поля перемещений и первой резонансной частоты, чем соответствующие значения коэффициента Пуассона.

Для выявления влияния функции изменения плотности выберем законы g и ν в виде линейных функций $g(\xi_1, \xi_2) = f_E(\xi_1, \xi_2), \nu(\xi_1, \xi_2) = f_\nu(\xi_1, \xi_2)$ ($n = m = 1$), а r — в виде кубической функции $r(\xi_1, \xi_2) = f_\rho(\xi_1, \xi_2)$ ($n = m = 3$). На рис. 3, 4 показаны графики $\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}$, которые были получены для такого модельного вычислительного эксперимента. Максимальные значения этих функций ($\max \delta_{\xi_1} = 4.49\%, \max \delta_{\xi_2} = 16.1\%$) показывают, что закон изменения безразмерной функции плотности $r(\xi_1, \xi_2)$ также может оказывать существенное влияние на поле перемещений.

Таблица 2. Значения первой безразмерной резонансной частоты κ при различных значениях параметра d и одной из изменяемых функций g_d, ν_d, r_d

d	g_d	ν_d	r_d
0.001	1.39813	1.39743	1.39674
0.01	1.40441	1.39741	1.39050
0.1	1.46564	1.39718	1.33240



Рис. 1. График функции δ_{ϵ_1} для $d=1, n=m=1$, соответствующие амплитудному изменению функции r_d .



Рис. 2. График функции δ_{ϵ_2} для $d=1, n=m=1$, соответствующие амплитудному изменению функции r_d .

4. Исследование обратной задачи. Одними из наиболее востребованных методов диагностики свойств материала являются неразрушающие подходы [35]. Рассмотрим коэффициентную обратную задачу (ОЗ) о реконструкции закона изменения плотности. В качестве входной информации используются данные о компонентах поля перемещений, измеренные в конечном наборе точек области M при фиксированной частоте κ [35, 44]. При этом предполагается, что законы изменения модуля Юнга и коэффициента Пуассона являются известными. Например, они могут быть определены из эксперимента на растяжение статической нагрузкой по данным о деформациях, полученных с помощью оптического метода корреляции цифровых изображений (digital image correlation) (см., например, его применение в работах [45–47]).



Рис. 3. График функции δ_{ϵ_1} для f_ρ при $n = m = 3$.

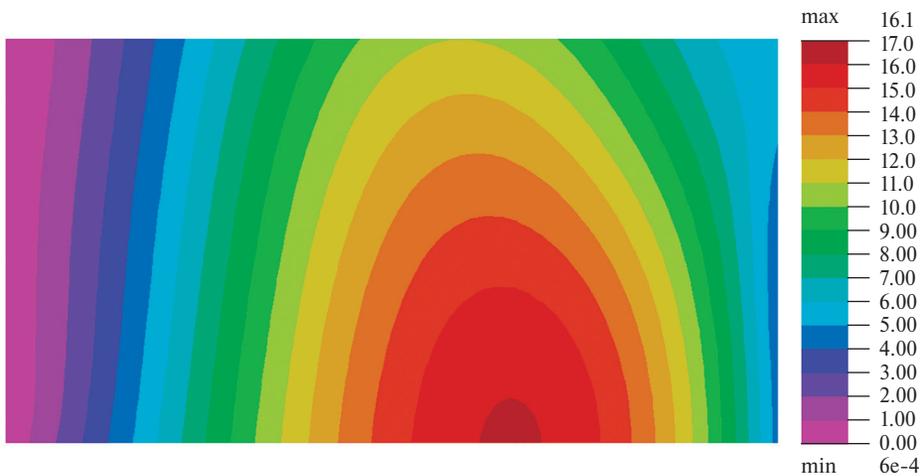


Рис. 4. График функции δ_{ϵ_2} для f_ρ при $n = m = 3$.

Следует отметить, что в некоторых прикладных теориях для ФГМ коэффициент Пуассона полагается постоянным [48, 49].

Обратимся к векторному уравнению движения (2.1). Видно, что относительно ρ оно является линейным и имеет единственное решение для ненулевых полей смещения $\mathbf{u} \neq 0$:

$$\rho_{rec} = -\frac{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}}{\omega^2 |\mathbf{u}|^2}. \quad (4.1)$$

Запись в таком общем виде позволяет исследовать соответствующие одномерные, двумерные и трехмерные обратные задачи. Для рассматриваемого случая полученное решение может быть записано в виде:

$$r_{rec} = -\frac{(S_{11,1} + S_{21,2}) \cdot w_1 + (S_{12,1} + S_{22,2}) \cdot w_2}{\kappa^2 \cdot (w_1^2 + w_2^2)} \quad (4.2)$$

и использовано для всех точек области, где $w_1^2 + w_2^2 \neq 0$.

Докажем, что полученное решение удовлетворяет обоим уравнениям движения. Подставим (4.2) в уравнения (2.3):

$$\begin{aligned} S_{11,1} + S_{21,2} - \kappa^2 \cdot \frac{(S_{11,1} + S_{21,2}) \cdot w_1 + (S_{12,1} + S_{22,2}) \cdot w_2}{\kappa^2 \cdot (w_1^2 + w_2^2)} \cdot w_1 &= 0, \\ S_{12,1} + S_{22,2} - \kappa^2 \cdot \frac{(S_{11,1} + S_{21,2}) \cdot w_1 + (S_{12,1} + S_{22,2}) \cdot w_2}{\kappa^2 \cdot (w_1^2 + w_2^2)} \cdot w_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

После упрощения получаем:

$$\begin{aligned} w_2 \cdot ((S_{11,1} + S_{21,2}) \cdot w_2 - (S_{12,1} + S_{22,2}) \cdot w_1) &= 0, \\ w_1 \cdot ((S_{12,1} + S_{22,2}) \cdot w_1 - (S_{11,1} + S_{21,2}) \cdot w_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Покажем, что $(S_{11,1} + S_{21,2}) \cdot w_2 - (S_{12,1} + S_{22,2}) \cdot w_1$, присутствующее в обоих выражениях, равно нулю. Для этого достаточно обратиться к исходной системе (2.4), умножить первое уравнение на w_2 , второе на w_1 и вычесть одно из другого.

При выборе частоты колебаний до первого резонанса с учетом вида нагружения w_1 будет принимать нулевые значения только на заземленной грани. При этом w_2 помимо левой грани будет обращаться в ноль еще и в других точках рассматриваемой области. Таким образом, при выборе частоты до первого резонанса выражение $w_1^2 + w_2^2$, стоящее в знаменателе формулы (4.2), будет обращаться в ноль только в точках, которые принадлежат жестко заземленной грани.

Основная сложность решения (4.2) состоит в численной реализации, а именно — вычислении первых и вторых производных от таблично-заданных функций w_1, w_2 . Как известно, задача вычисления производных является в общем случае некорректной [35]. Например, в статье [50] для преодоления этой проблемы решение схожей задачи об определении параметров Ламе неоднородной пластины было построено на основе слабой постановки и процедуры интегрирования по частям. В настоящей работе на основе алгоритма локально взвешенной регрессии LOWESS (Locally Weighted Scatterplot Smoothing) и сплайн-аппроксимации предложен следующий подход, который моделирует численный эксперимент по решению задачи, и состоит из нескольких этапов:

1. Расчет поля перемещений, соответствующего заданному точному закону изменения искомой функции r_{ex} в пакете FlexPDE.

2. Моделирование входной информации путем вычисления значений функций w_1, w_2 в точках (ξ_{1i}, ξ_{2j}) , $\xi_{1i} = (i-1)h_{\xi_1}$, $h_{\xi_1} = 1/(n_{\xi_1} - 1)$, $i = 1 \dots n_{\xi_1}$, $\xi_{2j} = (j-1)h_{\xi_2}$, $h_{\xi_2} = 1/(m_{\xi_2} - 1)$, $j = 1 \dots m_{\xi_2}$.

3. Построение интерполяционных функций w_1^s, w_2^s по соответствующим входным данным с помощью радиальной базисной функции.

4. Определение значений компонент тензора напряжений согласно закону Гука (2.4) в узловых точках (ξ_{1i}, ξ_{2j}) .

5. Для “сглаживания” полученных значений компонент тензора напряжений используется алгоритм локально взвешенной регрессии LOWESS (Locally Weighted Scatterplot Smoothing) [51], реализованный в пакете Maple.

6. Далее по значениям в узловых точках (ξ_{1i}, ξ_{2j}) строятся интерполяционные функции S_{11}^s, S_{12}^s и численно определяются первые производные $S_{11,1}^s, S_{12,2}^s$.

7. С помощью полученных функций согласно решению (4.2) вычисляются значения искомого закона изменения плотности r_{rec} .

Для проведения вычислительных экспериментов в качестве законов изменения модуля Юнга и коэффициента Пуассона выбраны константы $g = 2.407$, $\nu = 0.258$, которые получены путем осреднения линейных законов (3.1) по площади области M . Для удобства положим $h_{\xi_1} = h_{\xi_2}$, тогда при заданном параметре $k = 0.5$ число узловых точек по каждой из координат будет удовлетворять равенству $n_{\xi_1} = 2m_{\xi_2}$. Здесь при проведении расчетов выбраны $n_{\xi_1} = 2m_{\xi_2} = 40$. Поскольку наибольшее влияние переменных свойств материала на акустические характеристики проявляется вблизи резонанса, то значение параметра $\kappa = 1.2$ выбрано вблизи первого резонанса. Выбор такой частоты обусловлен более удобной реализацией на практике, более существенным влиянием переменных свойств на поля смещения и отсутствием дополнительных точек, в которых $w_1^2 + w_2^2 = 0$ за исключением точек на защемленной грани. Значения параметров алгоритма LOWESS во всех приведенных примерах были заданы следующими: $fitorder = 1$ (степень полинома, используемого в каждой локальной регрессии), $bandwidth = 0.05$ (доля точек входных данных, используемых в каждой локальной регрессии), $iters = 2$ (количество итераций при сглаживании данных одной независимой переменной). Значение параметра $bandwidth$ выбиралось близким к минимальному с учетом величины шага разбиения области (количества узлов сетки).

Поскольку переменные свойства ФГМ могут быть описаны с помощью различных видов законов [52], то далее представлены примеры вычислительных экспериментов, проведенных для нескольких функций.

Пример 1. Восстанавливаемая функция — квадратичная $r_{ex}(\xi_1, \xi_2) = f_{\rho}(\xi_1, \xi_2)$ (см. закон (5) при $n = m = 2$). На рис. 5 показаны графики функций S_{11}^s и S_{12}^s , которые имеют особенности у границ области. Поэтому здесь и далее реконструкция осуществляется на подобласти $M^* = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 | \xi_1 \in [0.1, 0.9], \xi_2 \in [0.1, 0.4]\}$.

На рис. 6–8, демонстрирующих точность реконструкции, сплошной поверхностью обозначается график точного закона $r_{ex}(\xi_1, \xi_2)$, а в виде черной сетки — восстановленный закон $r_{rec}(\xi_1, \xi_2)$. Также для удобства анализа распределения относительной погрешности реконструкции приведены графики функции δ_{ρ} :

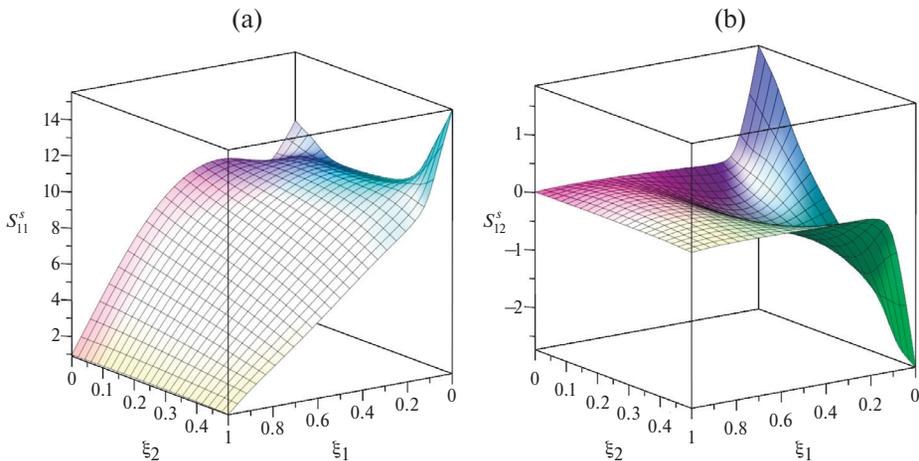


Рис. 5. Графики сплайнов компонент тензора напряжений: (a) S_{11}^s ; (b) S_{12}^s .

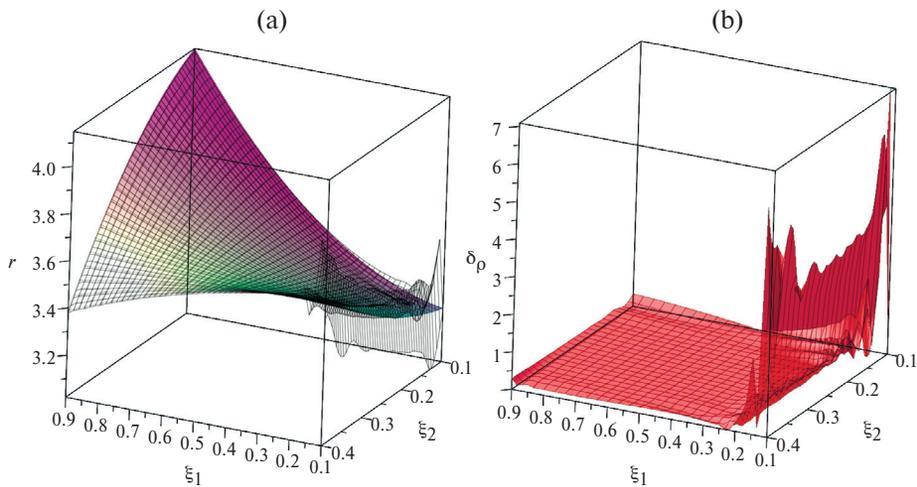


Рис. 6. (a) графики точной квадратичной функции $r_{ex}(\xi_1, \xi_2) = f_\rho(\xi_1, \xi_2)$ при $n = m = 2$ (сплошная поверхность) и восстановленной функции $r_{rec}(\xi_1, \xi_2)$ (сетка); (b) график функции относительной погрешности $\delta_\rho(\xi_1, \xi_2)$.

$$\delta_\rho = \frac{|r_{ex} - r_{rec}|}{\max_M |r_{ex}|} \cdot 100\%. \quad (4.5)$$

На рис. 6 представлены графики точной и восстановленной квадратичной функции, погрешность не превосходит 7.1%.

Пример 2. Восстанавливаемая функция — экспоненциальный закон $r_{ex}(\xi_1, \xi_2) = 0.5(e^{\xi_1} + e^{4\xi_2})$. На рис. 7 показаны соответствующие графики, $\max \delta_\rho \leq 7.8\%$.

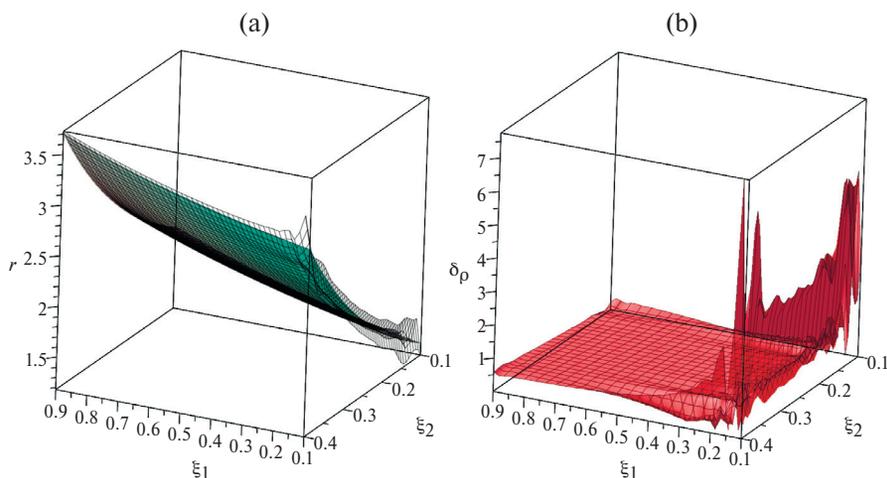


Рис. 7. (а) графики точной экспоненциальной функции $r_{ex}(\xi_1, \xi_2) = 0.5(e^{\xi_1} + e^{4\xi_2})$ (сплошная поверхность) и восстановленной функции $r_{rec}(\xi_1, \xi_2)$ (сетка); (б) график функции относительной погрешности $\delta_\rho(\xi_1, \xi_2)$.

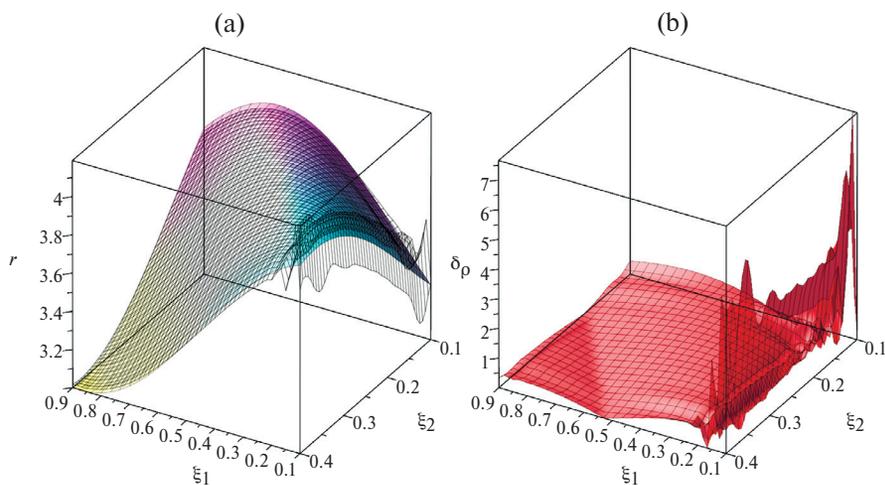


Рис. 8. (а) графики точной тригонометрической функции $r_{ex}(\xi_1, \xi_2) = 3.5 - 0.5 \times \cos(1.2\pi(\xi_1 + \xi_2))$ (сплошная поверхность) и восстановленной функции $r_{rec}(\xi_1, \xi_2)$ (сетка); (б) график функции относительной погрешности $\delta_\rho(\xi_1, \xi_2)$.

Пример 3. Восстанавливаемая функция — тригонометрический закон $r_{ex}(\xi_1, \xi_2) = 3.5 - 0.5\cos(1.2\pi(\xi_1 + 2\xi_2))$. Результаты восстановления представлены на рис. 8, относительная погрешность не превосходит 7.7%.

Как известно, для рассматриваемой задачи имеется особенность численного решения в окрестности заделки. Для уменьшения влияния этой

особенности при моделировании входных данных на основе решения прямой задачи в представленных вычислительных экспериментах была увеличена плотность расчетной сетки в окрестности заделки. Для этого был использован служебный параметр *mesh_density* в пакете FlexPDE, позволяющий сгущать сетку по заданному правилу, в частности было задано $mesh_density = 50/(\xi_1 + 0.1)$.

Поскольку анализ чувствительности показал влияние различных законов изменения плотности на значения безразмерной компоненты поля перемещения w_1 менее 5%, то исследование влияния погрешности входных данных проведено для уровня шума 0.1%, изменяющегося по закону $w_i^{noise}(\xi_{1i}, \xi_{2j}) = w_i^{exact}(\xi_{1i}, \xi_{2j})(1 + 0.001 \cdot \Delta)$, где $\Delta \in [-1, 1]$ — случайная величина. Погрешность реконструкции для функции из примера 1 составила не более 9.96%, примера 2 — 14.68%, примера 3 — 11.9%. При значении параметра $bandwidth = 0.1$ погрешность реконструкции на удалении от заделки для функции из примера 1 составила не более 4.65%, примера 2 — 5.53%, примера 3 — 5.42%. Такая нелинейная зависимость погрешности реконструкции от погрешности входных данных характерна для некорректных задач.

Также был проведен анализ влияния количества значений входных данных n_{ξ_1} и m_{ξ_2} на результаты реконструкции двумерного закона плотности $r(\xi_1, \xi_2)$. Анализ показал, что для успешной идентификации с погрешностью менее 10% требуется снимать смещения не менее чем в 40 узловых точках по координате ξ_1 и 20 узловых точках по ξ_2 . При повышении количества узловых значений входных данных до $n_{\xi_1} = 100$ и $m_{\xi_2} = 50$ погрешность реконструкции составляет не более 0.5% на рассматриваемой области M^* .

Из представленных данных видно, что разработанный подход для решения коэффициентной обратной задачи об определении двумерного закона изменения плотности по данным о поле смещения может быть эффективно использован для различных видов искомой функции.

5. Заключение. В рамках проведенного исследования сформулирована и решена с помощью МКЭ прямая задача об установившихся планарных колебаниях упругой изотропной пластины, изготовленной из ФГМ. Показано влияние каждой из переменных характеристик на поле перемещений и значения первой резонансной частоты. Выявлено, что закон изменения коэффициента Пуассона оказывает наименьшее влияние по сравнению с модулем Юнга и плотностью. Сформулирована новая коэффициентная обратная задача об определении двумерного закона изменения плотности по данным о значениях компонент поля перемещений, измеренных в конечном наборе точек при фиксированной частоте. Предложен подход для решения этой задачи, основанный на сплайн-аппроксимации и алгоритме локально взвешенной регрессии. Проведена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующих возможности использования предложенного подхода для восстановления различных непрерывных законов изменения плотности.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>, в Южном федеральном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kieback B., Neubrand A., Riedel H.* Processing techniques for functionally graded materials // *Mater. Sci. Eng. A.* 2003. V. 362. № 1–2. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
2. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // *Applied materials today.* 2016. V. 5. P. 223–245. <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
3. Функционально-градиентные композиционные строительные материалы и конструкции. / Селяев В.П., Карташов В.А., Клементьев В.Д., Лазарев А.Л. Саранск: Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, 2005. 160 с.
4. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials. London: IOM Communications Ltd, 1998. 165 p.
5. *Birman V., Byrd L.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* 2007. V. 60. № 5. P. 195–216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
6. *Saleh B. et al.* 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges // *Composites, Part B.* 2020. V. 201. Article number 108376. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
7. *Boggarapu V. et al.* State of the art in functionally graded materials // *Compos. Struct.* 2021. V. 262. Article number 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
8. *Asemi K., Ashrafi H., Shariyat M.* Three-dimensional stress and free vibration analyses of functionally graded plates with circular holes by the use of the graded finite element method // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57. № 4. P. 690–700. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040131>
9. *Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 2. С. 32–45. <https://doi.org/10.3103/S0025654417020042>
10. *Панков С.О.* Новые аналитические решения для задач колебания толстых пластин // *Вестник ПНИПУ. Механика.* 2019. № 4. С. 145–156. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.14>
11. *Kumar S., Jana P.* Accurate solution for free vibration behaviour of stepped FGM plates implementing the dynamic stiffness method // *Structures.* 2022. V. 45. P. 1971–1989. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.10.035>
12. *Ravindran A., Bhaskar K.* Three-dimensional analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity // *Int. J. Mech. Sci.* 2019. V. 160. P. 386–396. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.07.004>
13. *Shen H.S.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. Boca Raton: CRC press, 2016. 280 p. <https://doi.org/10.1201/9781420092578>
14. *Xing Y., Li G., Yuan Y.* A review of the analytical solution methods for the eigenvalue problems of rectangular plates // *Int. J. Mech. Sci.* 2022. V. 221. P. 107171. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107171>
15. *Xing Y.F., Liu B.* Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates // *Int. J. Mech. Sci.* 2009. V. 51. № 3. P. 246–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>

16. *Du J. et al.* An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges // *J. Sound Vib.* 2007. V. 306. № 3-5. P. 908–927. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>
17. *Gorman D.J.* Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported // *J. Sound Vib.* 2006. V. 294. № 1–2. P. 131–161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>
18. *Gorman D.J.* Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition // *J. Sound Vib.* 2004. V. 272. № 3–5. P. 831–851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8)
19. *Bardell N.S., Langley R.S., Dunsdon J.M.* On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates // *J. Sound Vib.* 1996. V. 191. № 3. P. 459–467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>
20. *Zhao T. et al.* Free in-plane vibration of irregular laminated plate with curved edges based on boundary-type Chebyshev–Ritz method // *Thin-Walled Structures.* 2023. V. 190. P. 110977. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110977>
21. *Lyu P., Du J., Liu Z., Zhang P.* Free in-plane vibration analysis of elastically restrained annular panels made of functionally graded material // *Compos. Struct.* 2017. V. 178. P. 246–259. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.065>
22. *Irie T., Yamada G., Muramoto Y.* Natural frequencies of in-plane vibration of annular plates // *J Sound Vib.* 1984. V. 97. № 1. P. 171–175. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90479-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90479-6)
23. *Wang Q., Shi D., Liang Q., e Ahad F.* A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions // *Appl. Math. Model.* 2016. V. 40. № 21-22. P. 9228–9253. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.005>
24. *Chen Z., Qin B., Zhong R., Wang Q.* Free in-plane vibration analysis of elastically restrained functionally graded porous plates with porosity distributions in the thickness and in-plane directions // *Eur. Phys. J. Plus.* 2022. V. 137. № 1. P. 158. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02153-w>
25. *Arreola-Lucas A., Franco-Villafane J.A., Baez G., Mendez-Sanchez R.A.* In-plane vibrations of a rectangular plate: Plane wave expansion modelling and experiment // *J. Sound Vib.* 2015. V. 342. P. 168–176. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.12.043>
26. *Schaadt K., Simon G., Ellegaard C.* Ultrasound resonances in a rectangular plate described by random matrices // *Phys. Scr.* 2001. V. 2001. № T90. P. 231. <https://doi.org/10.1238/Physica.Topical.090a00231>
27. *Larsson D.* In-plane modal testing of a free isotropic rectangular plate // *Exp. Mech.* 1997. V. 37. № 3. P. 339–343. <https://doi.org/10.1007/BF02317428>
28. *Nedin R., Vatulyan A.* Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // *Int. J. Solids Struct.* 2013. V. 50. № 13. P. 2107–2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>
29. *Huang C., Wang L., Wang K.* Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis // *Int. J. Solids Struct.* 2022. V. 236–237. Article number 111350. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111350>
30. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В.* Реконструкция жесткости неоднородной упругой пластины // *Акустический журнал.* 2016. Т. 62. № 3. С. 369–374. <https://doi.org/10.7868/S0320791916030059>

31. *Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocail J.* Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions // *J. Sound Vib.* 2017. V. 404. P. 31–46. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.037>
32. *Богачев И.В.* Совместная идентификация механических характеристик функционально-градиентных пластин в рамках моделей Кирхгофа и Тимошенко // *Вестник ПНИПУ. Механика.* 2021. № 4. С. 19–28. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.03>
33. *Lopes H., dos Santos J., Katunin A.* Identification of material properties of a laminated plate from measurements of natural frequencies and modal rotations // *Procedia Struct. Integr.* 2019. V. 17. P. 971–978. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.129>
34. *Rodrigues A., dos Santos J., Lopes H.* Identification of material properties of green laminate composite plates using bio-inspired optimization algorithms // *Procedia Struct. Integr.* 2022. V. 37. P. 684–691. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.138>
35. *Ватульян А.О.* Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
36. *Васильев М.П., Ягола А.Г.* Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма I рода // *Вычислительные методы и программирование.* 2003. Т. 4. № 1. С. 323–326.
37. *Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г.* Использование многопроцессорных систем для решения обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма I-го рода // *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2012. Т. 18. № 1. С. 222–234.
38. *Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Advances in modeling and identification of prestresses in modern materials // *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications.* 2022. V. 155. P. 357–374. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_19
39. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Ленанд, 2014. 367 с.
40. *Калинчук В.В., Беляикова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
41. *Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 382. Article number 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
42. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *Int. J. Mech. Mater. Des.* 2021. V. 17. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>
43. *Asgari M., Akhlaghi M.* Natural frequency analysis of 2D FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equation // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2011. V. 30. № 2. P. 72–81. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2010.10.002>
44. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2020. V. 81. Article number 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>
45. *Lindstrom S.B. et al.* Integrated digital image correlation for mechanical characterization of carbon fiber-reinforced polymer plates // *Compos. Struct.* 2023. V. 305. P. 116501. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116501>

46. *Rokos O., Peerlings R.H.J., Hoefnagels J.P.M., Geers M.G.D.* Integrated digital image correlation for micro-mechanical parameter identification in multiscale experiments // *Int. J. Solids Struct.* 2023. V. 267. P. 112130. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112130>
47. *Koohbor B. et al.* Through thickness elastic profile determination of functionally graded materials // *Exp. Mech.* 2015. V. 55. № 8. P. 1427–1440. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0043-z>
48. *Tutuncu N.* Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties // *Eng. Struct.* 2007. V. 29. № 9. P. 2032–2035. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.12.003>
49. *Nejad M.Z., Jabbari M., Ghannad M.* Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading // *Int. J. Eng. Sci.* 2015. V. 89. P. 86–99. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.12.004>
50. *Romano A.J., Shirron J.J., Bucaro J.A.* On the noninvasive determination of material parameters from a knowledge of elastic displacements theory and numerical simulation // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 1998. V. 45. № 3. P. 751–759. <https://doi.org/10.1109/58.677725>
51. *Cleveland W.S.* Robust locally weighted regression and smoothing Scatterplots // *J. Am. Stat. Assoc.* 1979. V. 74. № 368. P. 829–836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
52. *Marzavan S., Nastasescu V.* Displacement calculus of the functionally graded plates by finite element method // *Alex. Eng. J.* 2022. V. 61. № 12. P. 12075–12090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.06.004>

ON THE RECONSTRUCTION OF A TWO-DIMENSIONAL DENSITY OF A FUNCTIONALLY GRADED ELASTIC PLATE

V. V. Dudarev^{a, *}, R. M. Mnukhin^{a, *}

^a*Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I.I. Vorovich, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

e-mail: dudarev_vv@mail.ru* *e-mail: romamnuhin@yandex.ru*

Abstract – In this article, the in-plane vibrations of a rectangular plate within the framework of a plane stress is formulated based on the general formulation of steady-state vibrations of an inhomogeneous elastic isotropic body. The left side of the plate is rigidly fixed, vibrations are forced by tensile load applied at the right side. The properties of the functionally graded material are described by two-dimensional variation laws (Young's modulus, Poisson's ratio and density). A dimensionless problem formulation is given. The direct problem solution of the displacement field determination is obtained using the finite element method. The effect of material characteristics on the displacement field and the value of the first resonance are shown. An analysis of the obtained results is carried out. The inverse problem of density determination from displacement field data for a fixed frequency is considered. To reduce the error in calculating two-variable table functions derivatives, an approach based on spline approximation and a locally weighted

regression algorithm is proposed. Reconstruction examples of different laws are presented to demonstrate the possibility of using this approach.

Keywords: plate, functionally graded material, finite element method, inverse problem, identification, density

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kieback B., Neubrand A., Riedel H.* Processing techniques for functionally graded materials // *Mater. Sci. Eng., A*. 2003. V. 362. № 1–2.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1)
2. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // *Applied materials today*. 2016. V. 5. P. 223–245.
<https://doi.org/10.1016/j.apmt.2016.10.001>
3. Functionally graded composite building materials and structures. / *Selyaev V.P., Kartashov B.A., Klementyev V.D., Lazarev A.L.* Saransk: Mordovskij gosudarstvennyj universitet im. N. P. Ogareva. 2005. 160 p. [in Russian]
4. *Suresh S., Mortensen A.* Fundamentals of Functionally Graded Materials. London: IOM Communications Ltd. 1998. 165 p.
5. *Birman V., Byrd L.* Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* 2007. V. 60. № 5. P. 195–216.
<https://doi.org/10.1115/1.2777164>
6. 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges / *Saleh B. [et al.]* // *Composites, Part B*. 2020. V. 201. Article number 108376. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108376>
7. State of the art in functionally graded materials / *Boggarapu V. [et al.]* // *Compos. Struct.* 2021. V. 262. Article number 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
8. *Asemi K., Ashrafi H., Shariyat M.* Three-dimensional stress and free vibration analyses of functionally graded plates with circular holes by the use of the graded finite element method // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57. № 4. P. 690–700.
<https://doi.org/10.1134/S0021894416040131>
9. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-Dimensional Model of a Plate Made of an Anisotropic Inhomogeneous Material // *Mechanics of Solids*. 2017. V. 52. № 2. P. 144–154.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417020042>
10. *Papkov S.O.* New analytical solutions for vibration problem of thick plates // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019. № 4. P. 145–156.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.14> [in Russian]
11. *Kumar S., Jana P.* Accurate solution for free vibration behaviour of stepped FGM plates implementing the dynamic stiffness method // *Structures*. 2022. V. 45. P. 1971–1989.
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.10.035>
12. *Ravindran A., Bhaskar K.* Three-dimensional analysis of composite FGM rectangular plates with in-plane heterogeneity // *Int. J. Mech. Sci.* 2019. V. 160. P. 386–396.
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.07.004>
13. *Shen H.S.* Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. Boca Raton: CRC press. 2016. 280 p.
<https://doi.org/10.1201/9781420092578>

14. *Xing Y., Li G., Yuan Y.* A review of the analytical solution methods for the eigenvalue problems of rectangular plates // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022. V. 221. P. 107171. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107171>
15. *Xing Y.F., Liu B.* Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2009. V. 51. № 3. P. 246–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>
16. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges / *Du J. [et al.]* // *Journal of Sound and Vibration*. 2007. V. 306. № 3. P. 908–927. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>
17. *Gorman D.J.* Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. V. 294. № 1. P. 131–161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>
18. *Gorman D.J.* Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition // *Journal of Sound and Vibration*. 2004. V. 272. № 3. P. 831–851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8)
19. *Bardell N.S., Langley R.S., Dunsdon J.M.* On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates // *Journal of Sound and Vibration*. 1996. V. 191. № 3. P. 459–467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>
20. *Zhao T. et al.* Free in-plane vibration of irregular laminated plate with curved edges based on boundary-type Chebyshev–Ritz method // *Thin-Walled Structures*. 2023. V. 190. P. 110977. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110977>
21. *Lyu P., Du J., Liu Z., Zhang P.* Free in-plane vibration analysis of elastically restrained annular panels made of functionally graded material // *Composite Structures*. 2017. V. 178. P. 246–259. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.06.065>
22. *Irie T., Yamada G., Muramoto Y.* Natural frequencies of in-plane vibration of annular plates // *Journal of Sound and Vibration*. 1984. V. 97. № 1. P. 171–175. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90479-6](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90479-6)
23. *Wang Q., Shi D., Liang Q., e Ahad F.* A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions // *Applied Mathematical Modelling*. 2016. V. 40. № 21. P. 9228–9253. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.005>
24. *Chen Z., Qin B., Zhong R., Wang Q.* Free in-plane vibration analysis of elastically restrained functionally graded porous plates with porosity distributions in the thickness and in-plane directions // *The European Physical Journal Plus*. 2022. V. 137. № 1. P. 158. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02153-w>
25. *Arreola-Lucas A., Franco-Villafane J.A., Baez G., Mendez-Sanchez R.A.* In-plane vibrations of a rectangular plate: Plane wave expansion modelling and experiment // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. V. 342. P. 168–176. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.12.043>
26. *Schaadt K., Simon G., Ellegaard C.* Ultrasound resonances in a rectangular plate described by random matrices // *Physica Scripta*. 2001. — jan. V. 2001. № T90. P. 231. <https://doi.org/10.1238/Physica.Topical.090a00231>
27. *Larsson D.* In-plane modal testing of a free isotropic rectangular plate // *Experimental Mechanics*. 1997. V. 37. № 3. P. 339–343. <https://doi.org/10.1007/BF02317428>
28. *Nedin R., Vatulyan A.* Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // *Int. J. Solids Struct*. 2013. V. 50. № 13. P. 2107–2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>

29. *Huang C., Wang L., Wang K.* Residual stress identification in thin plates based on modal data and sensitivity analysis // *Int. J. Solids Struct.* 2022. V. 236–237. Article number 111350. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111350>.
30. *Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Yavruan O.V.* Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate // *Acoustical Physics.* 2016. V. 62. № 3. С. 377–382. <https://doi.org/10.1134/S1063771016030052>.
31. *Ablitzer F., Pezerat C., Lascoup B., Brocail J.* Identification of the flexural stiffness parameters of an orthotropic plate from the local dynamic equilibrium without a priori knowledge of the principal directions // *J. Sound Vib.* 2017. V. 404. P. 31–46. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.037>.
32. *Bogachev I.V.* Simultaneous identification of mechanical properties of functionally graded plates under the Kirchhoff and Tymoshenko models // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2021. № 4. P. 19–28. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.4.03> [in Russian]
33. *Lopes H., dos Santos J., Katunin A.* Identification of material properties of a laminated plate from measurements of natural frequencies and modal rotations // *Procedia Struct. Integr.* 2019. V. 17. P. 971–978. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.129>.
34. *Rodrigues A., dos Santos J., Lopes H.* Identification of material properties of green laminate composite plates using bio-inspired optimization algorithms // *Procedia Struct. Integr.* 2022. V. 37. P. 684–691. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.01.138>.
35. *Vatulyan A.O.* Coefficient inverse problems of mechanics. Moscow: Fizmatlit. 2019. 272 p. [in Russian].
36. *Vasilyev M.P., Yagola A.G.* The solution of two-dimensional Fredholm integral equations of the first kind with multiprocessor systems // *Numerical Methods and Programming.* 2003. V. 4. № 1. P. 323–326 [in Russian].
37. *Luk'yanenko D.V., Yagola A.G.* Application of multiprocessor systems for solving inverse problems leading to Fredholm integral equations of the first kind // *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN.* 2012. V. 18. № 1. P. 222–234 [in Russian].
38. *Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Advances in Modeling and Identification of Prestresses in Modern Materials // *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications.* 2022. P. 357–374.
39. *Lomakin V.A.* Theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Lenand. 2014. 367 p. [in Russian].
40. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Surface dynamics of inhomogeneous media. Moscow: Fizmatlit. 2009. 312 p. [in Russian].
41. *Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // *Appl. Math. Comput.* 2020. V. 382. Article number 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
42. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M.* Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // *Int. J. Mech. Mater. Des.* 2021. V. 17. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>.
43. *Asgari M., Akhlaghi M.* Natural frequency analysis of 2D FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equation // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2011. V. 30. P. 72–81. doi: 10.1016/j.euromechsol.2010.10.002.
44. *Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D.* Identification of the Lamé parameters of an inhomogeneous pipe based on the displacement field data // *Eur. J. Mech. A/Solids.* 2020. V. 81. Article number 103939. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103939>

45. *Lindstrom S.B. et al.* Integrated digital image correlation for mechanical characterization of carbon fiber-reinforced polymer plates // *Composite Structures*. 2023. V. 305. P. 116501. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116501>
46. *Rokos O., Peerlings R.H.J., Hoefnagels J.P.M., Geers M.G.D.* Integrated digital image correlation for micro-mechanical parameter identification in multiscale experiments // *International Journal of Solids and Structures*. 2023. V. 267. P. 112130. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112130>
47. *Koohbor B. et al.* Through Thickness Elastic Profile Determination of Functionally Graded Materials // *Experimental Mechanics*. 2015. V. 55. № 8. P. 1427–1440. <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0043-z>
48. *Tutuncu N.* Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties // *Eng. Struct.* 2007. V. 29. P. 2032–2035. doi: 10.1016/j.engstruct.2006.12.003.
49. *Nejad M.Z., Jabbari M., Ghannad M.* Elastic analysis of axially functionally graded rotating thick cylinder with variable thickness under non-uniform arbitrarily pressure loading // *Int. J. Eng. Sci.* 2015. V. 89. P. 86–99. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.12.004>
50. *Romano A.J., Shirron J.J., Bucaro J.A.* On the noninvasive determination of material parameters from a knowledge of elastic displacements theory and numerical simulation // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 1998. V. 45. № 3. P. 751–759. <https://doi.org/10.1109/58.677725>
51. *Cleveland W.S.* Robust locally weighted regression and smoothing Scatterplots // *J. Am. Stat. Assoc.* 1979. V. 74. № 368. P. 829–836. <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
52. *Marzavan S., Nastasescu V.* Displacement calculus of the functionally graded plates by finite element method // *Alex. Eng. J.* 2022. V. 61. № 12. P. 12075–12090. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.06.004>

УДК 539.3

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРУГОВОЙ ТРУБЫ, ВЫВЕРНУТОЙ НАИЗНАНКУ

© 2024 г. Г. М. Севастьянов^{a,*}

^aИнститут машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН,
Комсомольск-на-Амуре, Россия

* e-mail: akela.86@mail.ru

Поступила в редакцию 19.06.2023 г.

После доработки 17.07.2023 г.

Принята к публикации 12.11.2023 г.

В работе приведено аналитическое решение задачи о круговой трубе, вывернутой наизнанку в жесткой обойме. Получены формулы для величины радиального напряжения, которое отвечает за сцепление между трубой и обоймой. Решение получено для произвольного несжимаемого гиперупругого материала с упругим потенциалом, который зависит только от первого инварианта левого тензора деформаций Коши–Грина (различные обобщения неогуковского тела) или от второго инварианта логарифмического тензора Генки (различные обобщения несжимаемого материала Генки). Решение учитывает возникновение пластического течения в областях, прилегающих к боковым поверхностям трубы. Рассмотрен как идеально-пластический, так и изотропно упрочняющийся материал общего вида. Для последнего приведена схема решения, в частном случае линейно-упрочняющегося материала получено решение в замкнутом виде. Для идеально-пластического материала решение в замкнутом виде получено для неогуковского тела, несжимаемого материала Генки и для материала Гента.

Ключевые слова: гиперупругость, пластичность, выворачивание трубы, модель Гента

DOI: 10.31857/S1026351924030039, EDN: UHILGM

1. Введение. Выворачивание наизнанку гиперупругой трубы – одно из универсальных решений в нелинейной теории упругости [1–3], то есть решение этой задачи может быть построено для произвольного упругого потенциала несжимаемой среды. Упомянем здесь также исследование [4], в котором рассмотрено выворачивание полый упругой сферы. Ряд исследований посвящен проблеме свободно вывернутой трубы, то есть когда боковые поверхности трубы свободны от напряжений [5, 6]. Эти исследования обусловлены использованием деформации такого типа в различных энергетических демпферах и абсорберах. В частности, в работе [7] проведен

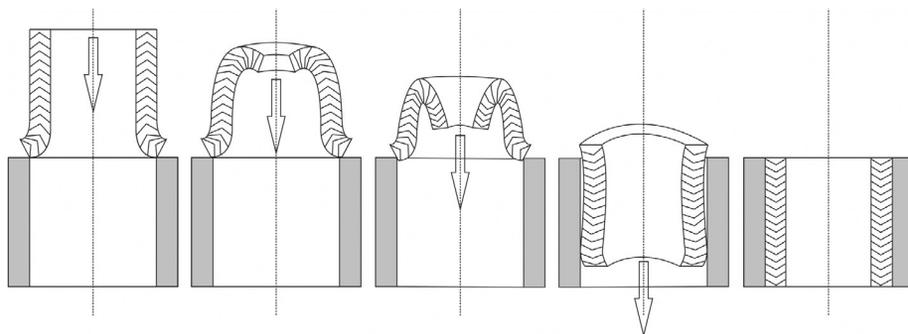


Рис. 1. Выворачивание трубы в жесткой обойме.

анализ упруго-пластического деформирования тонкостенных труб при их выворачивании наизнанку в рамках деформационной теории пластичности Генки, основное внимание уделено определению необходимого для выворачивания осевого усилия.

Выворачивание труб (преимущественно из полимерных материалов) может служить для создания многослойных конструкций, когда внутри жесткой внешней трубы с той или иной целью создается покрытие (рис. 1).

В этом случае ключевыми характеристиками реализующегося напряженного состояния будет натяг между слоями конструкции (величина радиального напряжения на контактной границе), а также величина тангенциального напряжения на внутренней (свободной) поверхности вывернутой трубы, поскольку считается, что создание значительных сжимающих тангенциальных напряжений положительно сказывается на эксплуатации труб под давлением [8].

Нетрудно понять, что максимальная величина тангенциального напряжения на свободной поверхности ограничена пределом текучести материала. То есть максимальный эффект от создания сжимающих тангенциальных напряжений достигается в случае пластического деформирования материала. Этой задаче и посвящено представленное исследование.

2. Модель материала. Мы рассматриваем два варианта задания упругих соотношений материала: один с использованием модели обобщенного неогуковского материала, когда упругий потенциал есть функция только первого инварианта левого тензора (упругой) деформации Коши–Грина $\mathbf{V}^e = (\mathbf{F}^e)(\mathbf{F}^e)^T$, \mathbf{F}^e есть упругая часть градиента деформации \mathbf{F} ; второй с использованием обобщений несжимаемого материала Генки, когда упругий потенциал есть функция только второго инварианта тензора (упругой) деформации Генки $\mathbf{h}^e = \ln(\mathbf{B}^e)^{1/2}$. Здесь везде индекс “e” означает “упругую часть” соответствующего тензора (подробнее о разделении деформации на упругую и пластическую составляющие см. раздел 6; здесь укажем только, что упругая часть деформации должна совпадать с полной при отсутствии пластического течения). Для инвариантов тензоров подразумеваются определения $I_1(\mathbf{A}) = \text{tr } \mathbf{A}$, $2I_2(\mathbf{A}) = \text{tr}^2 \mathbf{A} - \text{tr } \mathbf{A}^2$.

Итак, упругий закон несжимаемого изотропного тела задан в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}^e}\mathbf{B}^e = -p\mathbf{I} + 2w_B\mathbf{B}^e, \quad (2.1)$$

где $W = W(I_1(\mathbf{B}^e))$ есть упругий потенциал (удельная по массе свободная энергия Гельмгольца), $w_B = w_B(I_1(\mathbf{B}^e)) = dW/dI_1(\mathbf{B}^e) > 0$; или же в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{h}^e} = -p\mathbf{I} - w_h\mathbf{h}^e, \quad (2.2)$$

где $W = W(I_2(\mathbf{h}^e))$ есть упругий потенциал, $w_h = w_h(I_2(\mathbf{h}^e)) = dW/dI_2(\mathbf{h}^e) < 0$. В формулах выше p есть скалярная функция добавочного гидростатического давления, обусловленная ограничением несжимаемости материала. При отсутствии деформации $\mathbf{B}^e = \mathbf{I}$, $\mathbf{h}^e = \mathbf{0}$ и функция свободной энергии должна удовлетворять равенствам $W|_{\mathbf{B}^e=\mathbf{I}} = W(I_1(\mathbf{B}^e)|_{\mathbf{B}^e=\mathbf{I}}) = W(3) = 0$ или $W|_{\mathbf{h}^e=\mathbf{0}} = W(I_2(\mathbf{h}^e)|_{\mathbf{h}^e=\mathbf{0}}) = W(0) = 0$. Рассматриваются только упругие потенциалы, представляющие собой функции тензоров обратимых деформаций. Независимость свободной энергии от пластической деформации является распространенным допущением для изотропных пластически несжимаемых материалов [9–12].

Пластическое течение в материале связывается с выполнением условия Треска:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_s$$

где σ_1 и σ_3 есть наибольшее и наименьшее главные напряжения, τ_s – предел текучести материала на сдвиг.

3. Кинематика выворачивания круговой трубы в условиях плоской деформации. С точностью до жестких вращений связь координат материальных точек в начальном состоянии R, θ, Z с координатами в актуальном (деформированном) состоянии r, φ, z есть [2, 3, 6, 7]:

$$R = R(r), \quad \theta = \varphi, \quad Z = z,$$

т.е. подразумевается, что цилиндрическая труба вывернута так, что ее длина осталась неизменной за счет внешних ограничений; при свободном выворачивании происходит увеличение длины трубы вместе с утоньшением стенки и увеличением ее внутреннего диаметра [6]). Задачи о радиальной деформации цилиндрического или сферического слоя – одни из наиболее простых среди упруго-пластических задач и часто имеют замкнутое решение даже в нелинейной постановке [13–16].

Итак, указанная кинематика приводит к тому, что тензора деформации диагональные; ненулевые компоненты левого тензора Коши–Грина $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ есть

$$B_{rr} = (R')^{-2}, \quad B_{\varphi\varphi} = \left(\frac{R}{r}\right)^{-2}, \quad B_{zz} = 1, \quad (3.1)$$

а логарифмического тензора Генки $\mathbf{h} = \ln \mathbf{B}^{1/2}$

$$h_{rr} = -\ln|R'|, \quad h_{\varphi\varphi} = -\ln\frac{R}{r}, \quad h_{zz} = 0, \quad (3.2)$$

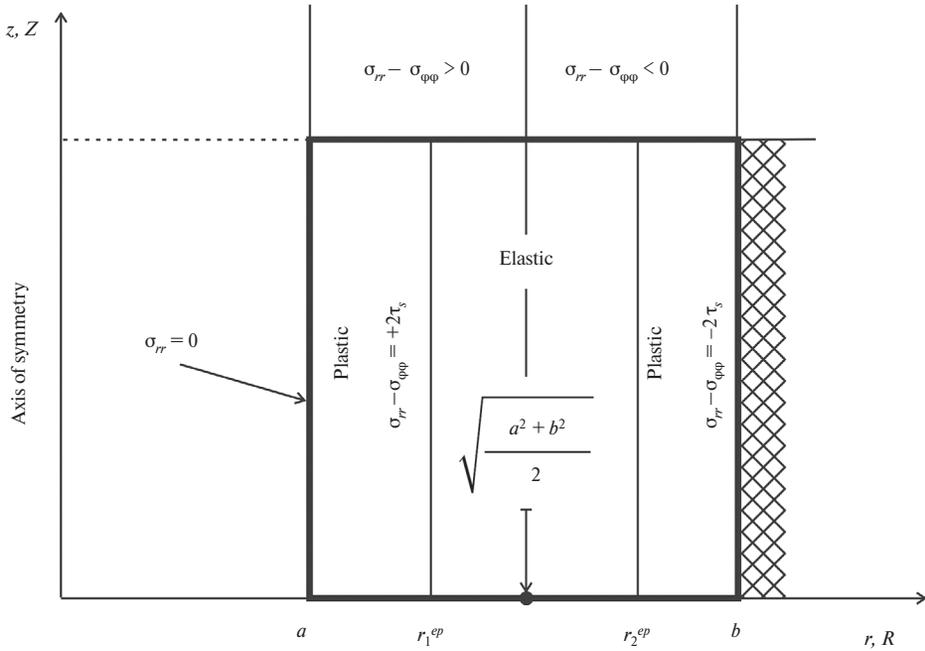


Рис. 2. Расчетная область (вывернутая труба).

здесь $R' = dR/dr$. Условие несжимаемости $\text{tr} \mathbf{h} = 0$ или $\det \mathbf{B} = 1$ приводит к дифференциальному уравнению $R'(R/r) = -1$, откуда $R = (k - r^2)^{1/2}$, где константа $k = a^2 + b^2$ удовлетворяет кинематическим граничным условиям $R(a) = b$, $R(b) = a$ (см. рис. 2).

Введем замену переменных:

$$x = \frac{2r^2}{a^2 + b^2} - 1, \quad r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}(1+x), \quad -1 < -\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \leq x \leq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} < 1. \quad (3.3)$$

Тогда

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}(1-x), \quad \frac{R}{r} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{и} \quad R' = -\frac{r}{R} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (3.4)$$

Инварианты тензоров деформации в новых обозначениях:

$$I_1(\mathbf{B}) = (R')^{-2} + \left(\frac{R}{r}\right)^{-2} + 1 = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1, \quad (3.5)$$

$$I_2(\mathbf{h}) = -\frac{1}{2} \left(\ln^2 |R'| + \ln^2 \frac{R}{r} \right) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}.$$

4. Интегрирование уравнений. 4.1. *Упругое ядро.* В области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$ (см. рис. 2) нет пластического течения, тензоры полных и упругих деформаций тождественны, $\mathbf{h}^e = \mathbf{h}$, $\mathbf{V}^e = \mathbf{V}$. С учетом замены (3.3) правило дифференцирования сложных функций дает:

$$\frac{d}{dr} = \frac{dx}{dr} \frac{d}{dx} = 2\sqrt{\frac{2(1+x)}{a^2 + b^2}} \frac{d}{dx}.$$

Тогда уравнение равновесия $r(d\sigma_{rr}/dr) + \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 0$ принимает вид:

$$2(1+x) \frac{d\sigma_{rr}}{dx} = -(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}). \quad (4.1)$$

Разность координатных напряжений может быть выражена как

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2w_B \cdot (B_{rr}^e - B_{\varphi\varphi}^e)$$

в случае использования упругого закона (2.1); или

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -w_h \cdot (h_{rr}^e - h_{\varphi\varphi}^e),$$

если используется упругий закон (2.2).

Или же с учетом равенств (3.1), (3.2), (3.4):

- для упругого закона (2.1) $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2w_B \cdot \left[\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} \right],$

- для упругого закона (2.2) $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -w_h \ln \frac{1-x}{1+x}.$

Интегрируя уравнение равновесия в упругой области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$:

- для упругого закона (2.1)

$$\sigma_{rr} = \int_{x_1^{ep}}^x \frac{w_B(\xi)}{1+\xi} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) d\xi + C, \quad (4.2)$$

- для упругого закона (2.2)

$$\sigma_{rr} = \int_{x_1^{ep}}^x \frac{w_h(\xi)}{2(1+\xi)} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} d\xi + C, \quad (4.3)$$

где $x_1^{ep} = 2(r_1^{ep})^2/(a^2 + b^2) - 1$, константа интегрирования C определяется из условия непрерывности радиального напряжения на упруго-пластической границе $r = r_1^{ep}$; $w_B(x)$ и $w_h(x)$, как указано ранее, есть функции инвариантов

$$I_1(\mathbf{V}^e) = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1 \text{ и } I_2(\mathbf{h}^e) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x} \text{ соответственно.}$$

4.2. *Внутренняя пластическая область* $r \in [a, r_1^{ep}]$. Здесь условие пластичности Треска выполняется в виде $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\tau_s$, следовательно, радиальное напряжение в этой области, удовлетворяющее уравнению равновесия (4.1) с граничным условием

$$\sigma_{rr} \Big|_{x=-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}} = 0,$$

имеет выражение

$$\sigma_{rr} = -\tau_s \ln \frac{(1+x)(a^2+b^2)}{2a^2}.$$

Тогда константа интегрирования в формулах (4.2), (4.3) есть $C = -\tau_s \ln \left[\frac{(1+x_1^{ep})(a^2+b^2)}{(2a^2)} \right]$.

4.3. *Внешняя пластическая область* $r \in [r_1^{ep}, b]$. Здесь условие пластичности Треска выполняется в виде $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = -2\tau_s$. Уравнение равновесия (4.1) интегрируется в виде:

$$\sigma_{rr} = \tau_s \ln(1+x) + K. \quad (4.4)$$

Константа интегрирования K обеспечивает непрерывность радиального напряжения на упруго-пластической границе $r = r_2^{ep}$:

$$K = \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} w_B(\xi) \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} - \frac{1-\xi}{1+\xi} \right) d\xi - \tau_s \ln \frac{(1+x_1^{ep})(1+x_2^{ep})(a^2+b^2)}{2a^2} \quad (4.5)$$

для упругого закона (2.1) и

$$K = \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{w_h(\xi)}{2(1+\xi)} \ln \frac{1-\xi}{1+\xi} d\xi - \tau_s \ln \frac{(1+x_1^{ep})(1+x_2^{ep})(a^2+b^2)}{2a^2} \quad (4.6)$$

для упругого закона (2.2).

4.4. *Положение упруго-пластических границ.* Из упругого анализа в области $r \in (r_1^{ep}, r_2^{ep})$ имеем на упруго-пластических границах следующие равенства.

Для упругого закона (2.1):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_1^{ep}} &= 2\tau_s = 2w_B \Big|_{x=x_1^{ep}} \cdot \left[\frac{1-x_1^{ep}}{1+x_1^{ep}} - \frac{1+x_1^{ep}}{1-x_1^{ep}} \right], \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_2^{ep}} &= -2\tau_s = 2w_B \Big|_{x=x_2^{ep}} \cdot \left[\frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}} - \frac{1+x_2^{ep}}{1-x_2^{ep}} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для упругого закона (2.2):

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_1^{ep}} &= 2\tau_s = -w_h \Big|_{x=x_1^{ep}} \ln \frac{1-x_1^{ep}}{1+x_1^{ep}}, \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \Big|_{r=r_2^{ep}} &= -2\tau_s = -w_h \Big|_{x=x_2^{ep}} \ln \frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эти уравнения определяют значения x_1^{ep} и x_2^{ep} как функции от механических параметров материала. Из (4.7), (4.8) следует, что $x_1^{ep} = -x_2^{ep} < 0$.

Если по (4.7), (4.8) оказывается, что

$$x_2^{ep} \geq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}, \quad (4.9)$$

то упругое ядро занимает всю толщину трубы, которая после выворачивания деформирована чисто упруго. Безразмерная ширина упругой области определяется как

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{1 + x_2^{ep}}{2}} - \sqrt{\frac{1 + x_1^{ep}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + x_2^{ep}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - x_2^{ep}}{2}}.$$

Из (4.7), (4.8) следует, что ширина упругой зоны ненулевая, то есть упругое ядро всегда присутствует в вывернутой трубе. Это отличает представленную постановку задачи от исследования [7], которое подразумевает, что труба целиком находится в пластическом состоянии.

Таким образом, по (4.4)–(4.6) натяг $-\sigma_{rr}(b)/\tau_s$ можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых S_g зависит только от геометрической характеристики вывернутой трубы – соотношения ее диаметров $\delta = a/b < 1$, вторая, S_m – только от механических характеристик материала:

$$-\sigma_{rr}(b)/\tau_s = S_g + S_m,$$

где $S_g(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2} > 0$ и

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[(1 + x_1^{ep})(1 + x_2^{ep}) \right] + \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{w_B(\xi)}{\tau_s} \left(\frac{1 - \xi}{1 + \xi} - \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \frac{d\xi}{1 + \xi} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \left[\frac{w_B(-\xi)}{1 - \xi} - \frac{w_B(\xi)}{1 + \xi} \right] \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} - \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right) \frac{d\xi}{\tau_s} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + 8 \int_0^{x_2^{ep}} \frac{w_B(\xi)}{\tau_s} \left(\frac{\xi}{1 - \xi^2} \right)^2 d\xi \end{aligned} \quad (4.10)$$

для упругого закона (2.1),

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[(1 + x_1^{ep})(1 + x_2^{ep}) \right] + \int_{x_1^{ep}}^{x_2^{ep}} \frac{-w_h(\xi)}{2\tau_s} \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \frac{d\xi}{1 + \xi} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \left[\frac{-w_h(-\xi)}{1 - \xi} - \frac{-w_h(\xi)}{1 + \xi} \right] \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} \frac{d\xi}{2\tau_s} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \int_0^{x_2^{ep}} \frac{-w_h(\xi)}{\tau_s} \frac{\xi}{1 - \xi^2} \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} d\xi \end{aligned} \quad (4.11)$$

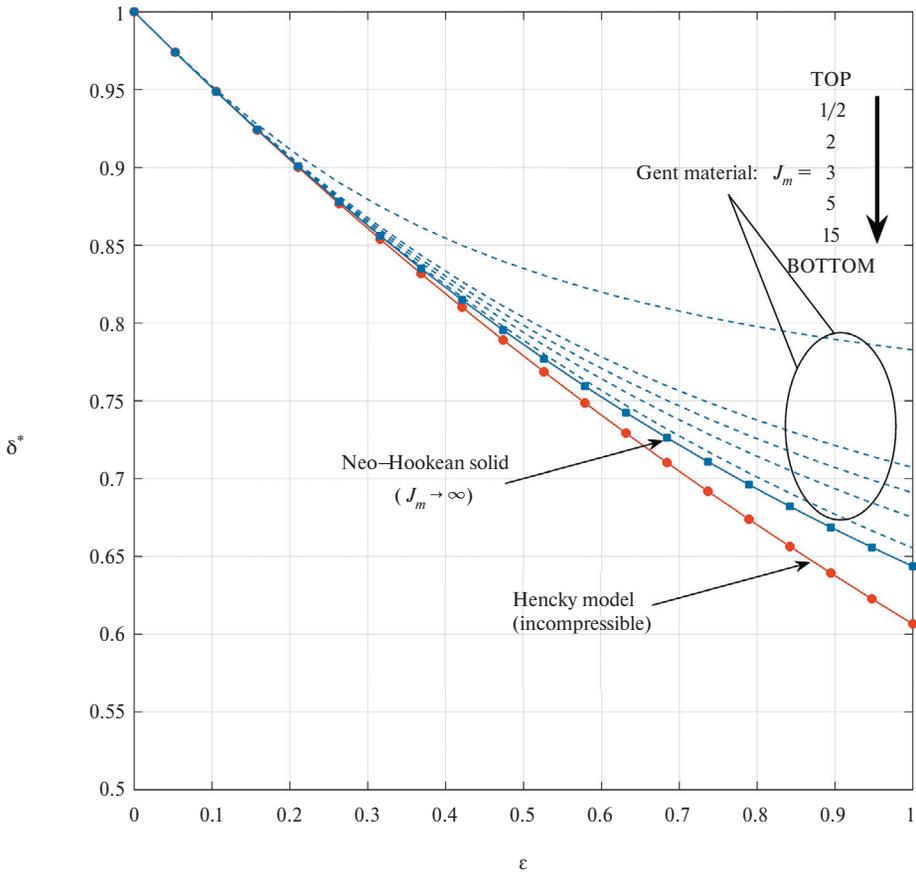


Рис. 3. Предельная величина геометрического параметра для упругих моделей Генки, неогукковского тела и Гента: если $\delta = a/b \geq \delta^*$, то вывернутая труба деформирована упруго, если $\delta = a/b < \delta^*$, то упруго-пластически.

для упругого закона (2.2). Здесь, как уже упоминалось, $w_B(x)$ и $w_h(x)$ есть функции инвариантов

$$I_1(\mathbf{B}^e) = \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} + 1 \text{ и } I_2(\mathbf{h}^e) = -\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1-x}{1+x}$$

соответственно. В выражениях выше учтено, что $x_1^{ep} = -x_2^{ep} \leq 0$ и указанные инварианты есть четные функции x .

5. Частные случаи. Введем механический параметр $\varepsilon = \tau_s/\mu$, где μ – нелинейный аналог модуля сдвига.

5.1. Несжимаемый материал Генки. Модель Генки задается упругим потенциалом:

$$W = -2\mu I_2(\mathbf{h}^e), \quad w_h = \frac{dW}{dI_2(\mathbf{h}^e)} = -2\mu = \text{const.}$$

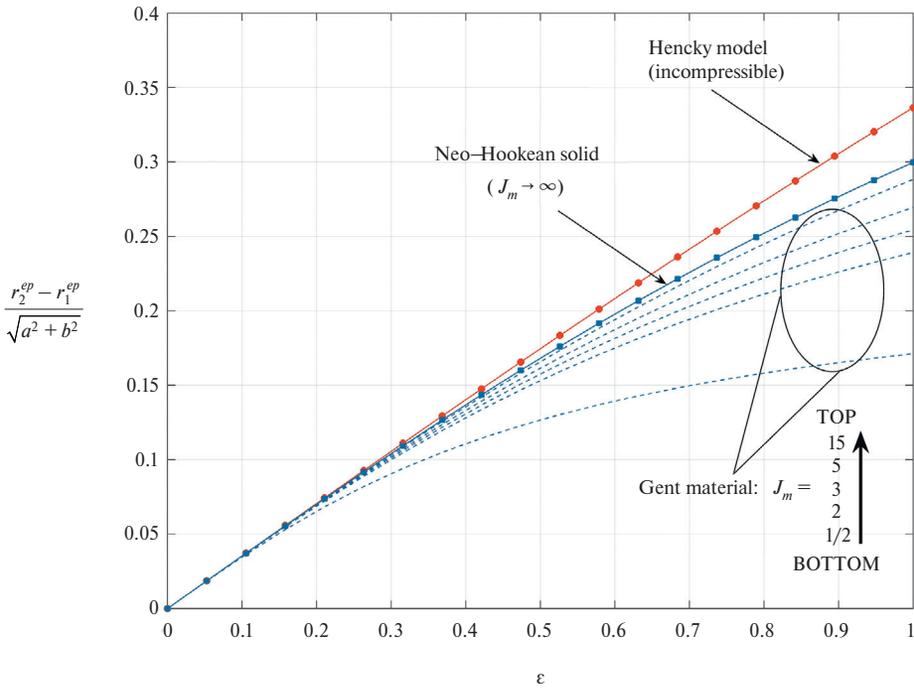


Рис. 4. Ширина упругой зоны.

Уравнения (4.8) приводят к следующим выражениям: $x_2^{ep} = (1 - e^{-\varepsilon}) / (1 + e^{-\varepsilon})$, $x_1^{ep} = -x_2^{ep}$. Ограничение (4.9) приводит к неравенству $\delta < \delta^* = e^{-\varepsilon/2}$, при выполнении которого труба деформирована упругопластически. Безразмерная ширина упругой зоны:

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1 - e^{-\varepsilon/2}}{\sqrt{1 + e^{-\varepsilon}}}.$$

По (4.11):

$$\begin{aligned} S_m &= -\varepsilon - 2 \ln \frac{1 + e^{-\varepsilon}}{2} + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{(1-e^{-\varepsilon})/(1+e^{-\varepsilon})} \frac{\xi}{1-\xi^2} \ln \frac{1+\xi}{1-\xi} d\xi = \\ &= \ln 4 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\pi^2}{12} + \text{Li}_2(-e^{-\varepsilon}) \right] < 0, \end{aligned}$$

где $\text{Li}_2(\zeta) = -\int_0^\zeta \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

5.2. Неогукковский материал. Модель неогукковского тела задается упругим потенциалом:

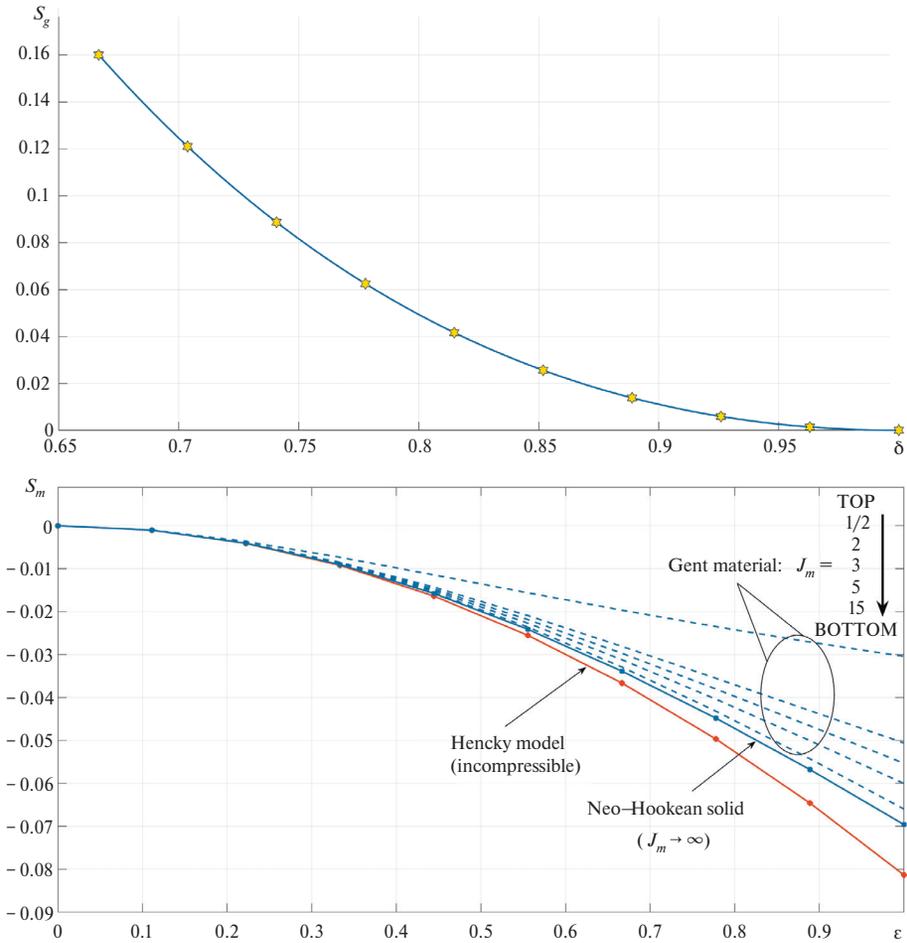


Рис. 5. Величина натяга есть сумма “геометрического” и “механического” слагаемых $-\sigma_{rr}(b)/\tau_s = S_g + S_m$; $S_m = S_m(\epsilon)$, $\epsilon = \tau_s/\mu$, $S_g = S_g(\delta)$, $\delta = a/b$.

$$W = \frac{\mu}{2} [I_1(\mathbf{B}^e) - 3], \quad w_B = \frac{dW}{dI_1(\mathbf{B}^e)} = \frac{\mu}{2} = \text{const.}$$

Уравнения (4.7) приводят к следующим выражениям: $x_2^{ep} = \sqrt{1 + \epsilon^{-2}} - \epsilon^{-1}$, $x_1^{ep} = -x_2^{ep}$. Ограничение (4.9) приводит к неравенству $\delta < \delta^* = \sqrt{\sqrt{\epsilon^2 + 1} - \epsilon}$, при выполнении которого труба деформирована упругопластически. Безразмерная ширина упругой зоны:

$$\frac{r_2^{ep} - r_1^{ep}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon - 1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{2\epsilon}} - \sqrt{\frac{\epsilon - \sqrt{1 + \epsilon^2} + 1}{2\epsilon}}.$$

По (4.10):

$$S_m = -\ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{2} + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^{\sqrt{1+\varepsilon^2}-\varepsilon^{-1}} \left(\frac{\xi}{1-\xi^2} \right)^2 d\xi = 1 - \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1}{2} - \varepsilon^{-1} \ln(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2}) < 0.$$

5.3. Упругий материал Гента. Модель Гента [17] с упругим потенциалом

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{I_1(\mathbf{B}^e) - 3}{J_m} \right),$$

где $J_m = (I_1(\mathbf{B}^e))_{\max} - 3$ есть константа материала, $(I_1(\mathbf{B}^e))_{\max}$ есть предельное значение первого инварианта левого тензора Коши–Грина,

$$w_B = \frac{dW}{dI_1(\mathbf{B}^e)} = \frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - [I_1(\mathbf{B}^e) - 3]}$$

описывает полимерные материалы с ограниченной растяжимостью полимерных цепей.

Уравнения (4.7) с учетом (3.5) приводят к следующим выражениям:

$$x_2^{ep} = \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2(1+4/J_m)}-1}{\varepsilon(1+4/J_m)}, \quad x_1^{ep} = -x_2^{ep}. \quad (5.1)$$

Ограничение (4.9) приводит к неравенству

$$\delta < \delta^* = \frac{\sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon+1} - \sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon^2+1}}{\sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon-1} + \sqrt{(1+4/J_m)\varepsilon^2+1}},$$

при выполнении которого труба деформирована упругопластически. При $J_m \rightarrow \infty$ это неравенство совпадает с неравенством, полученным для неогукковского материала $\delta < \delta^* = \sqrt{\varepsilon^2+1} - \varepsilon$.

Формула (4.10) с учетом (3.5) дает:

$$\begin{aligned} S_m &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{4}{\varepsilon} \int_0^{x_2^{ep}} \frac{\xi^2}{1-\xi^2} \frac{d\xi}{1-(1+4/J_m)\xi^2} = \\ &= \ln \left[1 - (x_2^{ep})^2 \right] + \frac{J_m}{\varepsilon} \left[\frac{\operatorname{arth} \left(x_2^{ep} \sqrt{1+4/J_m} \right)}{\sqrt{1+4/J_m}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x_2^{ep}}{1+x_2^{ep}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь x_2^{ep} определяется по формуле (5.1).

На рис. 3 представлены графики $\delta^*(\varepsilon)$ для всех трех моделей. При $\delta \geq \delta^*$ вывернутая труба деформирована чисто упруго, при $\delta < \delta^*$ – упругопластически.

Безразмерная ширина упругой области приведена на рис. 4 как функция от механического параметра $\varepsilon = \tau_s/\mu$. Чем шире диапазон упругих деформаций материала (т.е. чем выше $\varepsilon = \tau_s/\mu$), тем шире упругая область в вывернутой

трубе и меньше натяг. Предельная величина натяга при $\varepsilon \rightarrow 0$ (т.е. $\varepsilon \rightarrow 0$) есть $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{rr}(b)/\tau_s = S_g$, что совпадает с решением для жестко-пластического материала.

Действительно, в вывернутой трубе из жестко-пластического материала в области $r \in [a, (a^2 + b^2)/2]$ $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\tau_s$, а в области $r \in [(a^2 + b^2)/2, b]$ $\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} = 2\tau_s$; интегрируя уравнение равновесия с учетом непрерывности σ_{rr} на границе между областями, имеем:

$$\sigma_{rr}(b) = -2\tau_s \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right] = -2\tau_s \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2}.$$

Для материала Гента, чем выше ограничение растяжимости полимерных цепей (т.е., чем ниже параметр модели J_m), тем меньше упругая область в вывернутой трубе и тем выше натяг при одной и той же величине параметра $\varepsilon = \tau_s/\mu$.

На рис. 5 представлены графики функций $S_g = S_g(\delta)$ и $S_m = S_m(\varepsilon)$, в сумме составляющих натяг между вывернутой трубой и облоймой.

6. Учет изотропного деформационного упрочнения материала в пластических областях. Зависимость предела текучести от накопленной пластической деформации может существенно сказываться на напряженном состоянии, особенно при больших деформациях. Корректный подход к учету эффекта упрочнения подразумевает введение в модель законов упрочнения вида $\tau_s = \tau_s(q)$, основанных на параметре накопленной пластической деформации q , который определяется интегрированием дифференциального уравнения $\dot{q} = \sqrt{(2/3)\text{tr}(\mathbf{D}^p)^2}$ по всему пути деформирования. Здесь точка над символом означает материальную производную по времени, \mathbf{D}^p – тензор скорости пластической деформации.

В представленной задаче путь деформирования, приводящий к выворачиванию трубы, как и в соответствующей задаче нелинейной теории упругости, остается вне рассмотрения. Мы имеем дело только с начальным и конечным положением точек материала в пространстве. Для учета эффектов упрочнения в этом случае можно использовать вместо накопленной пластической деформации параметр интенсивности пластической деформации [7], который может быть введен, например, определением $h_{\text{int}} = (h_1^p - h_3^p)/2$, где h_1^p и h_3^p – наибольшее и наименьшее собственные значения логарифмического тензора пластической деформации \mathbf{h}^p .

Здесь требуется указать разделение деформаций на упругую и пластическую составляющие. Используя мультипликативное разложение градиента деформации $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ и учитывая, что все тензорные величины в рассматриваемой задаче диагональные, можно записать:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^T (\mathbf{F}^e)^T = \mathbf{F}^e (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^p (\mathbf{F}^p)^T = \mathbf{B}^e \mathbf{B}^p,$$

$$\mathbf{h} = \ln \mathbf{B}^{1/2} = \ln (\mathbf{B}^e)^{1/2} + \ln (\mathbf{B}^p)^{1/2} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^p.$$

Далее, поскольку мы используем пластический потенциал Треска, можно заключить, что осевая компонента скорости пластической деформации, соответствующая промежуточному главному напряжению, отсутствует, $D_{zz}^p = 0$, следовательно, $h_{zz}^p = 0$ и $h_{rr}^p = -h_{\varphi\varphi}^p$. Тогда $h_{\text{int}} = -h_{\varphi\varphi}^p > 0$ во внутренней пластической области $r \in [a, r_1^{ep}]$ и $h_{\text{int}} = h_{\varphi\varphi}^p > 0$ во внешней пластической области $r \in [r_2^{ep}, b]$. Приравнявая разницу главных напряжений, выраженную с использованием условия текучести и с использованием упругого закона (2.1), имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} &= \begin{cases} +2\tau_s(h_{\text{int}}), & r \in [a, r_1^{ep}] \\ -2\tau_s(h_{\text{int}}), & r \in [r_2^{ep}, b] \end{cases} = \\ &= -w_h \cdot (h_{rr}^e - h_{\varphi\varphi}^e) = 2w_h h_{\varphi\varphi}^e = 2w_h \cdot (h_{\varphi\varphi} - h_{\varphi\varphi}^p) = \\ &= \begin{cases} +2w_h \cdot \left(h_{\text{int}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), & r \in [a, r_1^{ep}]; \\ -2w_h \cdot \left(h_{\text{int}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right), & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_h &= w_h(I_2(\mathbf{h}^e)), \\ I_2(\mathbf{h}^e) &= -(1/2) \text{tr} \mathbf{h}^e{}^2 = -(h_{\varphi\varphi}^e)^2 = -(h_{\varphi\varphi} - h_{\varphi\varphi}^p)^2 = \\ &= \begin{cases} -\left(h_{\text{int}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right)^2, & r \in [a, r_1^{ep}]; \\ -\left(h_{\text{int}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \right)^2, & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases} \end{aligned}$$

Из (6.1) с учетом последних равенств можно выразить интенсивность пластической деформации h_{int} как функцию переменной x . И далее в обеих пластических областях можно проинтегрировать уравнения равновесия (4.1) и получить в конечном итоге искомый натяг. Интегрирование в упругой области, равно как и определение положения упруго-пластических границ, остаются такими же, как и в предыдущих разделах для идеально-пластического (неупрочняемого) материала.

В качестве примера рассмотрим несжимаемый материал, линейно-упрочняющийся в пластическом диапазоне с функцией упрочнения $\tau_s(h_{\text{int}}) = \tau_{s0}(1 + \chi h_{\text{int}})$, τ_{s0} и χ – материальные константы, и описывающийся законом Генки в упругом диапазоне. По (6.1) с $w_h = -2\mu$ имеем:

$$h_{\text{int}} = \begin{cases} \frac{\ln[(1-x)/(1+x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu}, & r \in [a, r_1^{ep}], \\ \frac{\ln[(1+x)/(1-x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu}, & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интенсивность пластической деформации максимальна на боковых поверхностях трубы при

$$x = \pm \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2}, \text{ а именно } h_{\text{int}}^{\text{max}} = \frac{2\mu \ln \delta^{-1} - \tau_{s0}}{2\mu + \chi \tau_{s0}}.$$

Уравнение равновесия в пластических областях:

$$2(1+x) \frac{d\sigma_{rr}}{dx} = \begin{cases} -2\tau_{s0} \left(1 + \chi \frac{\ln[(1-x)/(1+x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu} \right), & r \in [a, r_1^{ep}], \\ +2\tau_{s0} \left(1 + \chi \frac{\ln[(1+x)/(1-x)] - \tau_{s0}/\mu}{2 + \chi \tau_{s0}/\mu} \right), & r \in [r_2^{ep}, b]. \end{cases}$$

Интегрируя уравнение равновесия по всей расчетной области, можно получить величину натяга:

$$-\frac{\sigma_{rr}|_{r=b}}{\tau_{s0}} = \frac{S_g + S_m - \chi\Phi}{1 + \chi\varepsilon/2},$$

$$S_g(\delta) = 2 \ln \frac{\delta + \delta^{-1}}{2} > 0, \quad S_m(\varepsilon) = \ln 4 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{\varepsilon} \left[\frac{\pi^2}{12} + \text{Li}_2(-e^{-\varepsilon}) \right] < 0,$$

$$\Phi(\delta) = \text{Li}_2 \frac{1}{1 + \delta^2} - \frac{\pi^2}{12} - \ln^2 \delta + \frac{1}{2} \ln^2(1 + \delta^2) < 0.$$

При $\chi = 0$ это выражение совпадает с результатом предыдущего раздела для неупрочняющегося материала $-\sigma_{rr}|_{r=b}/\tau_{s0} = S_g + S_m$, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow \infty$) можно получить с помощью правила Лопитала выражение натяга $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{rr}|_{r=b}/\tau_{s0} = S_g - \chi\Phi$, который соответствует жестко-пластическому материалу. Увеличение параметра упрочнения ведет к увеличению натяга.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1949. V. 242. P. 173–195. <https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
2. Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber I: Eversion of a tube // Proceedings of the Physical Society. Section B. 1952. V. 65 (2). P. 118–121. <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/2/305>
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

4. *Ericksen J.L.* Inversion of a perfectly elastic spherical shell // *ZAMM*. 1955. V. 35. № 9–10. P. 382–385.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19550350909>
5. *Orr A.* The eversion and bifurcation of elastic cylinders. PhD Thesis. University of Glasgow, 1995.
6. *Baaser H., Nedjar B., Martin R.J., Neff P.* Eversion of tubes: Comparison of material models. In: *Constitutive Models for Rubber X*. CRC Press, 2017.
<http://dx.doi.org/10.1201/9781315223278-20>
7. *Gao X.-L., Atluri S.N.* An exact finite deformation elasto-plastic solution for the outside-in free eversion problem of a tube of elastic linear-hardening material // *IMA J. Appl. Math.* 1997. V. 58. № 3. P. 259–275.
<https://doi.org/10.1093/imamat/58.3.259>
8. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *J. Press. Vessel Technol.* 2018. V. 140. № 5. 050802.
<https://doi.org/10.1115/1.4039206>
9. *Левунас В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 228 с.
10. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 311 с.
11. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л.* Моделирование больших упруговязкопластических деформаций с учетом теплофизических эффектов // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 4. С. 107–120.
12. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *Int. J. Plast.* 2016. V. 84. P. 33–57.
<https://doi.org/10.1016/j.jplas.2016.04.017>
13. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // *ПММ*. 2003. Т. 67. № 2. С. 315–325.
14. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Расчет толщины стенки трубопровода под внутренним давлением при произвольном законе упрочнения // *Деформация и разрушение материалов*. 2011. № 9. С. 15–20.
15. *Александров С.Е., Гольдштейн Р.В.* Напряженно-деформированное состояние в упругопластической цилиндрической трубе со свободными торцами. 1. Общее решение // *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 5. С. 67–76.
16. *Sevastianov G.M.* Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material // *Eur. J. Mech. A Solids*. 2021. V. 87. 104223.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104223>
17. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1996. V. 69. № 1. P. 59–61.
<https://doi.org/10.5254/1.3538357>

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF A CIRCULAR PIPE
TURNED INSIDE OUTG. M. Sevastyanov^{a, *}^a*Institute of Machinery and Metallurgy, KhFRC FEBRAS, Komsomolsk-on-Amur*^{*}*e-mail: akela.86@mail.ru*

Abstract – The paper presents an analytical solution to the problem of a circular pipe turned inside out in a rigid gasket. Formulas were obtained for the magnitude of the radial stress, which is responsible for the adhesion between the pipe and the gasket. The solution is obtained for an arbitrary incompressible hyperelastic material with a hyperelastic potential that depends only on the first invariant of the left Cauchy – Green deformation tensor (various generalizations of the neo-Hookean solid) or on the second invariant of the logarithmic Hencky strain tensor (various generalizations of the incompressible Hencky material). The solution takes into account the occurrence of plastic flow in areas adjacent to the lateral surfaces of the pipe. Both ideally plastic and isotropically hardening materials of a general type are considered. For the latter, a solution scheme is given; in the particular case of a linearly hardening material, a closed-form solution is obtained. For the perfect plasticity model, a closed-form solution was obtained for the neo-Hookean solid, for an incompressible Hencky material, and for the Gent material.

Keywords: hyperelasticity, plasticity, pipe eversion, Gent model

REFERENCES

1. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* 1949. Vol. 242. P. 173–195. <https://doi.org/10.1098/rsta.1949.0009>
2. Gent A.N., Rivlin R.S. Experiments on the mechanics of rubber. I: Eversion of a tube // *Proceedings of the Physical Society. Section B.* 1952. Vol. 65 (2). P. 118–121. <https://doi.org/10.1088/0370-1301/65/2/305>
3. Lurie A.I. *Nonlinear theory of elasticity.* † North Holland, New York, 1990.
4. Ericksen J.L. Inversion of a perfectly elastic spherical shell // *ZAMM.* 1955. V. 35 (9–10). P. 382–385. <https://doi.org/10.1002/zamm.19550350909>
5. Orr A. *The eversion and bifurcation of elastic cylinders.* PhD Thesis. University of Glasgow, 1995.
6. Baaser H., Nedjar B., Martin R.J., Neff P. Eversion of tubes: Comparison of material models. In: *Constitutive Models for Rubber X.* CRC Press, 2017. <http://dx.doi.org/10.1201/9781315223278-20>
7. Gao X.-L., Atluri S.N. An exact finite deformation elasto-plastic solution for the outside-in free eversion problem of a tube of elastic linear-hardening material // *IMA Journal of Applied Mathematics.* 1997. Vol. 58. P. 259–275. <https://doi.org/10.1093/imamat/58.3.259>

8. *Shufen R., Dixit U.S.* A review of theoretical and experimental research on various autofrettage processes // *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2018. V. 140. № 5. 050802. <https://doi.org/10.1115/1.4039206>
9. *Levitas V.I.* Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. Nova Science Publishers, New York. 1996
10. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V.* Large irreversible deformations and elastic aftereffects. Dal'nauka, Vladivostok, 2013 (*in Russian*)
11. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L.* Modeling of large elastoviscoplastic deformations with thermophysical effects taken into account // *Mechanics of Solids*. 2010. V. 45. P. 583–594. <https://doi.org/10.3103/S0025654410040084>
12. *Feng B., Levitas V.I., Hemley R.J.* Large elastoplasticity under static megabar pressures: Formulation and application to compression of samples in diamond anvil cells // *International Journal of Plasticity*. 2016. Vol. 84. P. 33–57. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.04.017>
13. *Burenin A.A., Kovtanyuk L.V., Polonik M.V.* The forming of one-dimensional residual strain field in the vicinity of a cylindrical continuum defect in an elastic-plastic medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003. V. 67 (2). P. 315–325 (*in Russian*)
14. *Aleksandrov S.E., Goldstein R.V.* Calculation of the wall thickness of a pipeline under internal pressure with an arbitrary hardening law // *Deformation and Fracture of Materials*. 2011. P. 15–20 (*in Russian*)
15. *Aleksandrov S.E., Goldstein R.V.* Stress-strain state in an elastoplastic cylindrical tube with free ends. I. General solution // *Mechanics of Solids*. 2013. V. 48. P. 537–545. <https://doi.org/10.3103/S0025654413050099>
16. *Sevastyanov G.M.* Adiabatic heating effect in elastic-plastic contraction / expansion of spherical cavity in isotropic incompressible material // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2021. V. 87. 104223. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104223>
17. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // *Rubber Chemistry and Technology*. 1996. V. 69 (1). P. 59–61. <https://doi.org/10.5254/1.3538357>

УДК 539.3

АНАЛИЗ КОНСТРУКТИВНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ СООРУЖЕНИЙ ПРИ УЧЕТЕ ПРОЦЕССОВ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО РАЗРУШЕНИЯ

© 2024 г. Ж. Ы. Маматов^{а,*}, А. А. Абдыкалыков^а, Н. У. Шамшиев^а

*^аКыргызский государственный технический университет
им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызстан*

**e-mail: mamatov-zh@kstu.kg*

Поступила в редакцию 04.10.2023 г.

После доработки 25.10.2023 г.

Принята к публикации 28.11.2023 г.

Рассмотрены причины возникновения отказов, следствием которых можно считать прогрессирующие обрушения сооружений и учет конструктивной безопасности в более расширенных представлениях, чем при оценке по первой и второй группам предельных состояний для малоэтажных зданий, построенных из местных материалов.

Ключевые слова: прогрессирующие обрушения, несущая способность, эксплуатационная пригодность, конструктивная безопасность, живучесть, предельные состояния, сейсмические нагрузки, местные материалы, землетрясение.

DOI: 10.31857/S1026351924030046, EDN: UIGLBO

1. Введение. Исследование процессов конструктивной безопасности в традиционной форме можно считать не отвечающим современным вызовам. Отсутствие соответствующих нормативных документов приводит к тому, что разрабатываемые новации можно отнести к запроектным воздействиям [1]. Подобные воздействия часто приводят к неожиданным отказам сооружений, которые обуславливают экономический ущерб и, как правило, гибель людей. В последнее время при проектировании многоэлементных систем решаются противодействия каскадному развитию отказов, недопущению прогрессирующего разрушения. В нормах США и Канады введено понятие “целостности” (integrity) сооружения [2]. В работе [3] отмечается, что представляется уместным наряду с понятиями “несущая способность” и “эксплуатационная пригодность” ввести понятия “живучесть” [4, 5] и определить еще одну группу предельных состояний. Предлагаемая [3] третья группа предельных состояний (по живучести) включает предельные состояния, характеризующиеся лавинообразным развитием отказов, приводящих к полному выходу из строя элементов системы. Условия обеспечения надежности заключаются в том, чтобы расчетные значения нагрузок или вызванных ими усилий, напряжений, деформаций, перемещений

не превышали соответствующих им предельных значений, устанавливаемых нормами проектирования конструкций.

Анализ причины возникновения отказов, следствием которых можно считать прогрессирующие обрушения сооружений, определяют актуальность и практическое приложение постановки задач конструктивной безопасности в более широких представлениях, чем при оценке по первой и второй группам предельных состояний.

В продолжение сказанному заметим, что сооружение проектируется так, чтобы были обеспечены определенные рабочие параметры. Однако реальное положение не дает возможности гарантировать полное соответствие возводимого объекта проектируемым характеристикам. Понятно, что заранее ничего нельзя сказать о степени нарушения такого соответствия, однако в определенной мере можно предусмотреть чувствительность конструкции к дефектам как исходного состояния, так и накапливаемым в процессе эксплуатации.

Современная концепция приемлемого риска реальности разрушения строительных объектов при неординарных запроектных воздействиях позволяет привлекать для аналитического моделирования теорию повреждаемости сооружений. Последняя может качественно и количественно оценить неразрушаемость сооружения в течение всего расчетного эксплуатационного промежутка времени, включая внезапные запроектные воздействия.

Таким образом, накопленный уровень знаний в области статики и динамики сооружений позволяет перейти от общих концептуальных положений живучести конструкций к моделированию процессов деформирования и разрушения в рамках методов нелинейной динамики [6–8] с обеспечением не только конструктивной безопасности, но и живучести объектов.

2. Постановка задачи. Следуя работе [9], полагаем, что моделирование реальной, нелинейной физико-механической системы динамического типа начинается с введения координат состояния $\eta_i (i \in \overline{1, \kappa})$, называемых параметрами порядка. К ним добавляется дополнительное множество параметров F_i , имитирующих отклик на изменение параметров η_i и представляющих собой внешние воздействия. Кроме того, предполагается наличие параметров β_i , ответственных за дефекты (несовершенства) исходного состояния системы и развивающиеся в процессе ее эксплуатации.

Принимая во внимание вышесказанное, рассмотрим задачу моделирования несущей способности строительного объекта, которая ассоциируется с нелинейной динамической физико-механической системой.

Текущее состояние системы представляем в виде диссипативной среды, которой соответствует потенциальная функция вида:

$$\Phi = \Phi(F, \eta, \beta), \quad (2.1)$$

где, как принято выше, F , η – силовой и деформационно-временной факторы, β – параметр повреждаемости или несовершенства.

Далее полагаем, что в процессе эксплуатации сооружения проходит ряд состояний, заметное изменение которых осуществляется путем смен диссипативных структур с появлением структур более высокого порядка и сложности. Подобный подход был использован при моделировании

деформационного поведения горных пород и бетона с учетом запредельной ветви [8–11]. В частности была разработана математическая модель [12–16] для анализа способности распространения и удельной энергии горизонтально поляризованных сдвиговых поверхностных волн (SH-волн) в многослойных пластинах.

При таком подходе вполне реально отождествлять деформационное поведение объекта с необратимыми процессами, завершающимися исчерпанием несущей способности.

Возводимые сооружения можно рассматривать как структурно-неоднородные объекты, которые в соответствии с классификацией пространственно-временных диссипативных структур [17] могут считаться локализованными пространственными образованиями, устойчиво существующими в диссипативных неравновесных средах. Именно поэтому, как уже отмечалось выше, процесс снижения несущей способности можно рассматривать как иерархию переходов из одного устойчивого состояния в новое, совершаемое в критических точках.

По сути, в процессе эксплуатации в объектах возникают синергетические эффекты [7, 18], причем при медленном характере внешнего воздействия их можно отнести к самоорганизации через управляющие параметры β_i . Приведенные рассуждения свидетельствуют о полезности привлечения при детерминированном моделировании методов математической теории катастроф [19].

3. Динамическая модель. При формулировке модели градиацию процесса эксплуатации будем рассматривать как дискретную марковскую процедуру [20], в соответствии с которой последующие воздействия обусловлены лишь предыдущими событиями и не зависят от предшествующей истории нарушения.

Другими словами, представляя потенциальную функцию (2.1) как суперпозицию потенциала $\Phi_p(F, \eta)$, ответственного за предшествующие состояния, и возмущения $S(F, \eta, \beta)$, учитывающего накопившиеся повреждения (несовершенства) текущего состояния, имеем:

$$\Phi(F, \eta, \beta) = \Phi(F, \eta) + S(\eta, \beta). \quad (3.1)$$

Потенциальную функцию $\Phi_p(F, \eta)$ можно считать отвечающей некоторой на данный момент совершенной системе, для которой вблизи состояния равновесия возможно разложение в ряд Тейлора вида:

$$\Phi_p(F, \eta) = \Phi_0 + \Phi_1 \eta + \frac{1}{2} \Phi_2 \eta^2 + \frac{1}{3!} \Phi_3 \eta^3 + \dots \quad (3.2)$$

В общем случае выбор параметра порядка η осуществляется так, чтобы совершенная система имела состояние равновесия при $\eta = 0$. Тогда должно иметь место равенство

$$\frac{d\Phi_p(F, \eta)}{d\eta} = \Phi_1 + \Phi_2 \eta + \frac{1}{2} \Phi_3 \eta^2 + \dots = 0. \quad (3.3)$$

Таким образом, приходим к условию $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$.

Если предположить, что нагрузка F приближается к расчетной ($F \rightarrow F$), то потенциальная функция $\Phi = \Phi(F, \eta)$ запишется в виде:

$$\Phi_p(F, \eta) = \frac{1}{2}(F - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3 + \dots \quad (3.4)$$

В выражении (2.4) произведена смена масштабов по осям F и η .

Далее считаем, что слагаемыми четвертой и более высоких степеней можно пренебречь.

Критические точки, соответствующие (3.4), определяются их соотношением:

$$\frac{d}{d\eta} = 0 = \eta[(F_c - F) + \eta]. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.5) дает два корня:

$$\eta_1 = 0; \eta_2 = F - F_c. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что для совершенной системы смена состояний происходит в момент, когда критические точки η_1 и η_2 проходят одна через другую.

Возмущение $S(\eta, \beta)$ представим в виде морсовского разложения [19]. Имеем:

$$S(\eta, \beta) = \beta_1\eta + \frac{1}{2}\beta_2\eta^2 + \frac{1}{3}\beta_3\eta^3 + \dots \quad (3.7)$$

Формула (3.7), как ясно из работы [10], может быть представлена в канонической форме [6] посредством соответствующей нелинейной замены. Такая замена возможна математически, но с физической точки зрения она приведет к сложной нелинейной связи между силовой составляющей F и параметрами несовершенства β_i .

Поэтому, следуя работе [19], отбросим в (3.7) все члены, кроме линейного.

Тогда потенциальная функция $\Phi(F, \eta, \beta)$ (3.1), моделирующая несовершенную систему, запишется так:

$$\Phi(F, \eta, \beta) = \beta_1\eta + \frac{1}{2}(F - F)\eta^2 + \frac{1}{3}\eta^3. \quad (3.8)$$

Критические точки отвечают равновесному состоянию и определяются условием:

$$\frac{d\Phi}{d\eta} = \beta_1 + (F - F)\eta + \eta^2 = 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) с точки зрения теории катастроф можно рассматривать как двумерное многообразие, заключенное в пространство $|R|^3$ с координатными осями η , F , β_1 . Состояния равновесия будут найдены для каждого $\beta_1 = \text{const}$.

Отметим, что поведение несовершенной системы зависит от знака параметра несовершенства $\beta = \beta_1$. Из решения уравнения (3.9)

$$\eta_{1,2} = -\frac{F - F}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{F - F}{2}\right)^2 - \beta} \quad (3.10)$$

видно, что при $\beta < 0$ существуют две критические точки, а при $\beta > 0$ имеется область, в которой функция (3.8) вообще не имеет критических точек. Последнее имеет место при выполнении условия:

$$\left(\frac{F_? - F}{2}\right)^2 - \beta < 0. \quad (3.11)$$

Проанализируем полученные результаты:

1. Условие $\beta \leq 0$ означает существование локально устойчивого равновесия при всех значениях внешнего воздействия и, следовательно, приводит к установлению некоторого критерия, характеризующего безопасность эксплуатации строительного объекта. Например, система предполагается безопасной, если при критическом нагружении F_c переменные состояния (параметр порядка) превышают некоторое предписанное безопасное значение κ : $|\eta| > \kappa$.

2. При $\beta = \beta_1 > 0$ необходимость в подобной оценке отпадает, поскольку при $F = F_c$ устойчивое состояние равновесия перестает существовать. Здесь становится понятным, что чувствительность к накапливаемым несовершенствам слабо зависит от параметров β_1, β_2, \dots , а сильно — от $\beta_1 = \beta$. Поэтому принятое выше решение исключить все возмущения, кроме линейного (3.8), можно считать объективным.

3. Для несовершенных объектов, описываемых потенциальной функцией (3.8), при достижении внешних воздействий критического показателя F_c естественно предположить появление динамических флуктуаций, существенно снижающих несущую способность. Например, сейсмический фактор может привести при $F = F_c$ к переходу системы через потенциальный барьер. По существу, динамические воздействия могут привести устойчивый случай $\beta < 0$ к потере устойчивости. Эти переходы из устойчивого состояния в неустойчивое при динамических воздействиях сопровождаются возникновением запроектных решений [1] в форме появления “странных аттракторов” [21]. Последнее требует отдельного рассмотрения.

4. О взаимосвязи несовершенства и повреждаемости. При постановке задачи исследования деформационного поведения строительного объекта было введено предположение об иерархичности состояний его в форме смены типа устойчивости. Наиболее чувствительной составляющей потенциальной функции (3.8) к возможным флуктуирующим воздействиям можно считать параметр несовершенства β . Поскольку рассматриваемый подход для моделирования необратимых процессов, сопровождающих эксплуатацию сооружений, относится к синергетическому, то решающее значение придается процессу управления указанным параметром. Вполне очевидно, что параметр несовершенства β можно считать вероятностной характеристикой.

С другой стороны, за последнее тридцатилетие получила значительное развитие механика разрушения, основанная на концепции накопления повреждений [22, 23]. Интегральная характеристика процесса накопления повреждений названа параметром повреждаемости.

Отметим, что пионерским здесь следует считать исследование [22], в котором впервые была введена мера повреждаемости (скалярная функция ψ).

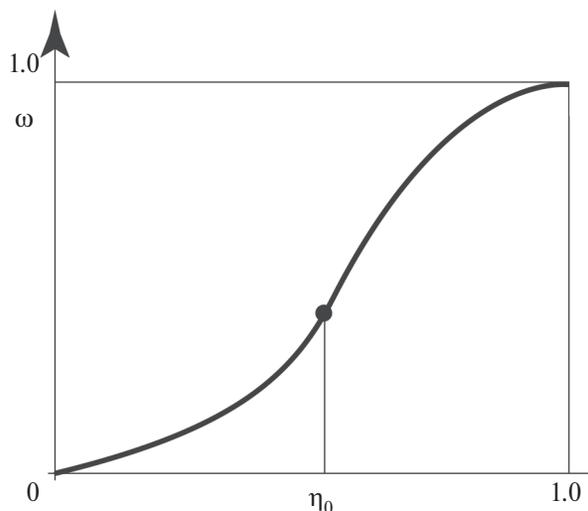


Рис. 1. Зависимость параметра повреждаемости ω от параметра порядка η .

Предполагалось, что функция ψ принимает нулевое значение при разрушении и равняется единице при полном отсутствии ψ несовершенств. В работе [23] предложен параметр ψ , определяемый через функции ψ зависимости $\omega = 1 - \psi$.

Параметр ω назван параметром повреждаемости и оказался более востребованным, чем параметр сплошности ψ .

Введение параметра повреждаемости ω позволяет ограничить на величину параметра порядка $\eta \in (0,1)$. Связь процесса эксплуатации сооружения, ассоциируемого с развитием размытого фазового превращения, позволяет схематично представить зависимость $\omega = \omega(\eta)$ в форме кривой логистического [6] типа (рис. 1).

Характер поведения функции $\omega = \omega(\eta)$ предусматривает наличие точки перегиба при $\eta = \eta_0$, отвечающей за смену типа устойчивости, заложенную в модели (3.6).

Введением параметра повреждаемости утверждается, что разрушение строительного объекта не является мгновенным актом и представляет собой процесс, подготавливаемый с самого начала эксплуатации за счет накопления несовершенств β . В зависимости от характеристики объекта параметр несовершенства β может принимать любые значения, для установления которого одного условия равновесия (3.9) недостаточно. Поэтому целесообразной представляется разработка системы эволюционных уравнений, связывающих внешние воздействия и несовершенства с повреждаемостью. Наиболее сложной можно считать задачу о формулировке граничных условий для параметра несовершенства β . Указанные условия удобно записать для параметра повреждаемости ω , кинетически выразив его через параметр несовершенства β и, как следствие, через силовые воздействия посредством уравнения (3.9).

5. Эволюционное уравнение для параметра повреждаемости. При синергетической концепции поведения сооружения для изучения эволюции параметра повреждаемости ω приемлем подход, описываемый в неравновесной статистической механике уравнением Фоккера–Планка [18, 24]. Последнее, как известно [25], получено для Марковских процессов, заложенных в модели.

Для одномерного случая нестационарное уравнение Фоккера–Планка представлено [24] в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \eta}(\gamma \eta \omega) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(Q \omega). \quad (5.1)$$

Здесь параметр повреждаемости $\omega = \omega(\eta, t)$ – функция распределения плотности вероятности γ [18] для обобщенной координаты η (параметр порядка); обозначим через $R = \gamma \eta$ – коэффициент сноса или “дрейфа” [25]; $Q = Q(\eta)$ – коэффициент диффузии, γ – коэффициент трения, t – время.

Заметим, что дифференциальное уравнение (5.1) описывает [25] монотонную необратимую эволюцию любого начального распределения плотности ω к равновесному состоянию. Средний член уравнения (5.1) считается ответственным за процессы торможения (задержки) и называется динамическим трением.

Рассмотрим стационарный вариант уравнения Фоккера–Планка [26], ассоциируемого с условием неразрывности. Это означает, что в процессе эксплуатации сооружения не наблюдаются эффекты разрушительного свойства [20].

Легко увидеть, что стационарный вариант уравнения (5.1) представляется в форме:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\gamma \eta \omega + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (Q \omega) \right] = 0. \quad (5.2)$$

Первый интеграл уравнения (5.2) при положении естественных граничных условий ($\omega|_{\eta \rightarrow \pm \infty} = 0$) приводится к виду:

$$\frac{1}{2} Q \frac{d\omega}{d\eta} = R \omega. \quad (5.3)$$

Здесь принято условие постоянства коэффициента диффузии, которое можно считать вполне логичным.

Интегрируя уравнение (5.3), получим:

$$\omega(\eta) = A \exp\left(-\frac{2\bar{\Phi}(\eta)}{Q}\right), \quad (5.4)$$

где

$$\bar{\Phi}(\eta) = - \int_{\eta_0}^{\eta} R(\eta) d\eta \quad (5.5)$$

имеет смысл потенциала.

Нормировочный множитель A удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) d\eta = 1. \quad (5.6)$$

Потенциальность $\bar{\Phi}(\eta)$ приводит к необходимости анализировать процесс с позиций равновесия градиентных динамических систем [19]. Это предполагает, что эксплуатация сооружения представляется существенно нелинейным процессом, поэтому можно принять функцию $\bar{\Phi}(\eta)$ в виде элементарной кастраффы типа сборки [19]. Имеем:

$$\bar{\Phi}(\eta) = \frac{a_0}{2} \eta^2 + \frac{b_0}{4} \eta^4, \quad (5.7)$$

где a_0, b_0 – неизвестные константы, подлежащие определению.

Принятие потенциала $\bar{\Phi}(\eta)$ в форме (5.7) позволяет антиградиент (коэффициент сноса) записать в таком виде:

$$R(\eta) = -a_0 \eta - b_0 \eta^3. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.8) в уравнение (5.3), после интегрирования которого будем иметь:

$$\omega = A \exp \left[\frac{1}{Q} \left(-a_0 \eta^2 - \frac{1}{2} b_0 \eta^4 \right) \right], \quad (5.9)$$

где A – постоянная интегрирования.

Дифференцируя (5.9) по времени t , получим:

$$\frac{d\omega}{dt} = A \exp \left[-\frac{1}{Q} \left(a_0 \eta^2 + \frac{1}{2} b_0 \eta^4 \right) \right] \left[-\frac{2}{Q} \left(a_0 \eta + 2b_0 \eta^3 \right) \frac{d\eta}{dt} \right].$$

Учитывая (5.9), вместо последнего уравнения получим:

$$\frac{d \ln \omega}{dt} = -\frac{2}{Q} \left(a_0 \eta + 2b_0 \eta^3 \right) \frac{d\eta}{dt}. \quad (5.10)$$

Дифференциальное уравнение (5.10), после определения входящих в него материальных функций, можно рассматривать как эволюционное, характеризующее изменчивость параметра повреждаемости во времени.

Остановимся на определении материальных констант.

Рассмотрим уравнение (5.9), после подстановки его в условие нормировки интеграл (5.6) переписывается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \exp \left[-\frac{1}{Q} \left(a_0 \eta^2 + \frac{1}{2} b_0 \eta^4 \right) \right] d\eta = 1. \quad (5.11)$$

Вычисление с использованием [27] интеграл (5.11) дает:

$$A \left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} \exp \lambda \kappa_{1/4}(\lambda) = 1, \quad (5.12)$$

где обозначено $m = a_0/b_0$; $\lambda = a_0 m / (4Q)$; $\kappa_{1/4}(\lambda)$ – модифицированная функция Ханкеля.

Вполне естественно, принимается условие (рис. 1)

$$\frac{d^2 \omega}{d\eta^2} \Big|_{\eta=\eta_0} = 0, \quad (5.13)$$

следствием которого является уравнение:

$$\frac{2b_0}{Q} (m\eta_0 + \eta_0^3)^2 - \eta_0 - 3\eta_0^2 = 0. \quad (5.14)$$

Кроме этого, очевидно, что

$$\omega \Big|_{\eta=1} = 1 \quad (5.15)$$

или

$$\exp \left[-\frac{b_0}{2Q} \left(2\frac{a_0}{b_0} + 1 \right) \right] = 1. \quad (5.16)$$

Последнее условие можно переписать так:

$$\ln \left(\frac{1}{A} \right) = -\frac{b_0}{2Q} (2m + 1). \quad (5.17)$$

Таким образом, получены три уравнения (5.2), (5.4), (5.7), связывающие параметры A , a_0 , b_0/Q , необходимые для определения вида функции повреждаемости (5.9).

Установим теперь связь между параметрами повреждаемости ω и несовершенства β . При этом учитываем, что начальным условиям отвечают значения:

$$\omega_{/\eta=\eta^*} = \omega^*, \quad \beta_{/\eta=\eta^*} = \beta^*,$$

где β^* – параметр, отвечающий за начальные несовершенства при значении параметра порядка $\eta = \eta^*$.

Полагаем, что на изменение параметра повреждаемости ω на малое значение $d\omega$ параметр несовершенства β откликается на величину, пропорциональную β . Поэтому можно положить, что

$$d\beta = -\beta K(\omega, \omega^*) d\omega, \quad (5.18)$$

где $K(\omega, \omega^*)$ – ядро, убывающее с ростом ω и ω^* .

Решение дифференциального уравнения (5.18), подобно как в работе [10], представим в виде:

$$\beta(\omega) = \beta_* Q(\omega, \omega_*), \quad (5.19)$$

причем

$$Q(\omega) = \exp \left[- \int_0^{\omega} K(\omega - \omega_*) d\omega \right]. \quad (5.20)$$

Ядро оператора (5.20) примем в форме:

$$K(\omega - \omega_*) = \frac{1 - n}{(\omega - \omega_*)^n} \quad (5.21)$$

где n – постоянная величина.

После подстановки уравнения (5.21) в формулу (5.20) при $\omega_* = 0$ и вычисления интеграла получим:

$$Q(\omega) = \exp[-\omega^{1-n}]. \quad (5.22)$$

С учетом (5.22) решение (5.19) запишется следующим образом:

$$\beta(\omega) = \beta_* \exp[-\omega^{1-n}]. \quad (5.23)$$

Обратимся теперь к условию равновесия (3.9)

$$\left(\frac{d\Phi}{d\eta} = \beta_1 + (F - F)\eta + \eta^2 = 0 \right),$$

которое, полагая $\beta_1 = \beta$, переписывается так:

$$F - F_C = \frac{\beta}{\eta} + \eta. \quad (5.24)$$

Уравнение (5.24), если положить $\beta = \beta_*$, позволяет установить связь между начальными несовершенствами и изменением эксплуатационных характеристик в форме:

$$\beta_* = (F - F_C)\eta_* - \eta_*^2. \quad (5.25)$$

Понятно, что начальному значению параметра несовершенства β_* соответствует начальный параметр порядка η_* . При переходе материала в запредельную область сопутствует смена типа устойчивости, обусловленная сильными структурными флуктуациями. Поэтому появление на графике $\beta \sim \eta$ точки перегиба, соответствующей пределу прочности материала ($\eta = \eta_0$), вполне предсказуемо.

В связи со сказанным уточнится зависимость параметра несовершенства от параметра порядка (рис. 2).

6. Определение материальных функций. Вернемся к рассмотрению уравнений (5.2), (5.4), (5.6), решение которых дает возможность установления материальных функций, существенно зависящих от параметра порядка $\eta = \eta_0$, соответствующего смене типа устойчивости.

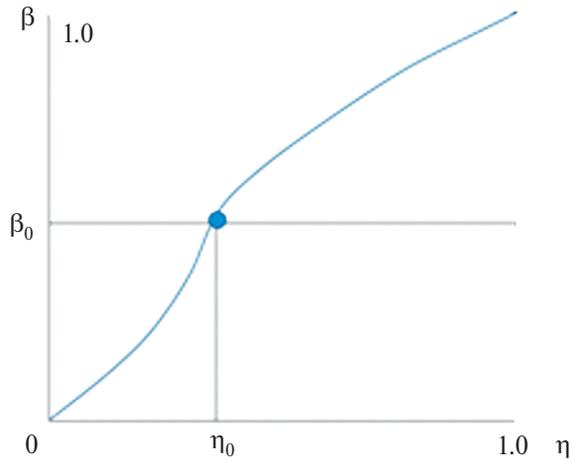


Рис. 2. Зависимость параметра несовершенства β от параметра порядка η .

Уравнение (5.14) дает возможность установить связь между величинами ϵ_0/Q и m в виде:

$$\frac{\epsilon_0}{Q} = \frac{\eta_0 + 3\eta_0^2}{2(m\eta_0 + \eta_0^3)}. \quad (6.1)$$

Результаты расчетов должны быть представлены в ϵ_0/Q от m при различных значениях η_0 .

Формула (5.9) с учетом введенных обозначений может быть записана так:

$$\omega = \exp\left[-\frac{\epsilon_0}{2Q}(2m\eta^2 + \eta^4)\right]. \quad (6.2)$$

При $\eta = \eta_0$ получим:

$$\omega(\eta_0) = \exp\left[-\frac{\epsilon_0}{2Q}(2m\eta_0^2 + \eta_0^4)\right]. \quad (6.3)$$

Напомним, что параметр ϵ_0/Q , A , m являются функциями параметра порядка $\eta = \eta_0$.

Равенство (5.12) разрешим относительно величины $1/A$. Имеем:

$$\frac{1}{A} = \sqrt{\frac{m}{2}} \exp \lambda \kappa_{1/4}(\lambda), \quad (6.4)$$

где, как и выше,

$$\lambda = \frac{a_0 m}{4Q}. \quad (6.5)$$

С другой стороны, на основании (5.17) можем записать:

$$\ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{b_0}{2Q}(2m+1). \quad (6.6)$$

Приравняв правые части (6.4) и (6.6) друг другу, получим трансцендентное уравнение:

$$\lambda + \frac{b_0}{2Q}(2m+1) + \ln\sqrt{\frac{m}{2}} + \ln\kappa_{1/4}(\lambda) = 0 \quad (6.7)$$

или

$$\frac{b_0 m^2}{4Q} + \frac{b_0}{2Q}(2m+1) + \ln\sqrt{\frac{m}{2}} + \ln\kappa_{1/4}\left(\frac{b_0 m^2}{4Q}\right) = 0. \quad (6.8)$$

Перейдем теперь к уловию (5.23), которое перепишем так:

$$\ln\frac{\beta(\omega)}{\beta_*} = -\omega^{1-n}, \quad (6.9)$$

где $\omega = \omega_0$ определяется формулой (6.3).

Далее полагаем

$$\lg\left[\ln\frac{\beta(\omega)}{\beta_*}\right] = (1-n)\lg(-\omega). \quad (6.10)$$

Совершенно очевидно, что показатель степени $n = n(\eta_0)$.

Алгоритм решения задачи по определению материальных функций – следующий. После нахождения материальных функций могут быть построены зависимости $\beta - \eta$ и, как следствие, сделаны выводы о влиянии начальных и последующих несовершенств на эксплуатационные характеристики строительных объектов вплоть до исчерпания несущей способности. Здесь необходимо отметить, что разработанная концепция прогрессирующего разрушения может применяться и для других объектов, например при создании элементов конструкций с заданной диссипацией энергии или заданным порогом разрушения (см. [28–30]).

1. На основании соотношения (6.1) осуществляется построение графиков материальных функций, определяются зависимости b_0/Q от m при разных значениях $\eta_0 \in (0,1)$ и осуществляется их аппроксимация.

2. Наиболее технически сложным будет решение с использованием (6.7) трансцендентного уравнения (6.8) относительно параметра m .

3. При известном параметре m по формуле (6.6) определяется $A = A(\eta_0)$.

4. Вычисляется $\omega(\eta_0)$ по формуле (6.3).

5. При заданной разнице $F - F_c$ и параметре η_* устанавливается β_* .

6. При известной разнице $F - F_c$ и величине $\eta = \eta_0$ вычисляется значение $\beta = \beta(\eta_0)$.

7. Далее, используя (6.10), устанавливается $n = n(\eta_0)$.

Выводы. Показано, что живучесть инженерных сооружений может быть смоделирована потенциальной функцией, зависящей от силовой составляющей F . Текущее состояние объекта связано с критическими точками потенциальной функции. При этом устойчивость состояния определяется с привлечением морсовской характеристики потенциала в критической точке, а критическая нагрузка, которую может выдержать сооружение, — вырождением критических точек. Следовательно, изучение статического поведения объекта, находящегося под нагрузкой, и его чувствительность к несовершенству тесно связано с теорией катастроф.

Выбор вида потенциальной функции обусловлен, как показано выше, соображениями физического характера. Это позволило универсализировать возмущающую составляющую потенциальной функции, использованной для определения чувствительности критической нагрузки к несовершенствам любых типов.

Заметим, что в настоящем исследовании речь идет об объектах, принимаемых как единое целое. При рассмотрении сооружения как дискретного (составного) объекта делаем чувствительность к несовершенствам более жесткой, особенно при динамических воздействиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бондаренко В.М., Ключева Н.В., Пискунов А.В.* Прикладная диссипативная теория конструктивной безопасности железобетона // Известия Орел ГТУ. Серия Строительство, транспорт. 2009. № 1/21. С. 8–18.
2. Design of buildings to resist progressive collapse. United Facilities Criteria (UFC)-4-023-03. 2005. 139 p.
3. *Мкртычев О.В., Райзер В.Д.* Теория надежности в проектировании строительных конструкций. Монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 908 с.
4. *Перельмутер А.В.* Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций. Киев.: Изд. УкрНИИпроектстальконструкция. 1999. 210 с.
5. *Райзер В.Д.* Оценка риска при проектировании сооружений // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2007. № 4. С. 15–18.
6. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. М.: КомКнига, 2005. 312 с.
7. *Китаева Д.А., Пазылов Ш.Т., Рудаев Я.И.* О приложениях методов нелинейной динамики в механике материалов // Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов. 2007. № 15. С. 46–70.
8. *Рудаев Я.И.* Элементы нелинейной динамики в механике материалов и конструкций // Вестник КРСУ. 2017. Т. 17. № 1. с. 42–51.
9. *Маматов Ж.Ы.* О необратимой деформации горных пород // Проблемы естественно-технических наук, информационных технологий и управления на современном этапе. Бишкек: Изд-во КГУСТА, 2003. с. 222–232.
10. *Рудаев Я.И., Китаева Д.А., Мамадалиева М.А.* Моделирование деформационного поведения горных пород // Записки горного института. 2016. Т. 222. С. 816–822.
11. *Adigamov N.S., Rudayev Ya.J.* Education of state allowing for loss strength of materials // J. Min. Sci. 1999. V. 35. № 4. P. 353–360.

12. *Djeran-Maigre I. et al.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
13. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
14. *Kuznetsov S.V.* On the operator of the theory of cracks // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1996. V. 323. P. 427–432.
15. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations of media with arbitrary anisotropy // *Quart. Appl. Math.* 2005. V. 63 (3). P. 455–467.
<https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
16. *Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.* 2015. V. 61(3). P. 356–367.
<https://doi.org/10.1134/S1063771015030112>
17. Нелинейные волны, структуры и бифуркации / Ред. А.В. Гапонов-Греков, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1983. 263 с.
18. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: ЛЕНАНД, 2014. 320 с.
19. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Ч. I. М.: Мир, 1984. 285 с.
20. *Райзер В.Д.* Теория надежности сооружений. М.: АСВ, 2010. 384 с.
21. *Хайтун С.Д.* Механика и необратимость. М.: Янус, 1996. 448 с.
22. *Качанов Л.М.* О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. ОТН.* 1958. № 8. С. 26–31.
23. *Работнов Ю.Н.* О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ.* 1963. № 2. С. 113–123.
24. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. 399 с.
25. *Богачев В.И., Крылов Н., Рекнер М., Шапошников С.В.* Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2003.
26. *Кириллов А., Шапошников С.В., Богачев В.И.* Стационарное уравнение Фоккера–Планка с потенциалом // *ДАН РФ.* 2014. Т. 454. № 2. С. 131–137.
<http://doi.org/10.1134/S1064562414010074>
27. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. СПб.: БХВ – Петербург, 2011. 1232 с.
28. *Li S. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Comp. Geotech.* 2019. V. 109. P. 69–81.
<https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2019.01.019>
29. *Li S. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2020. V. 24. P. 2400–2421.
<https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>
30. *Cairns D.S. et al.* Progressive damage analysis and testing of composite laminates with fiber waves // *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.* 2016. V. 90. P. 51–61.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.03.005>

ANALYSIS OF STRUCTURAL SAFETY OF STRUCTURES WHEN ACCOUNTING PROCESSES OF PROGRESSIVE DESTRUCTION**Zh. Y. Mamatov^{a, *}, A. A. Abdykalykov^a, N. U. Shamshiev^a**^a*Kyrgyz State Technical University n.a. I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyzstan*^{*}*e-mail: mamatov-zh@kstu.kg*

Abstract – The reasons for the occurrence of failures are considered, the consequence of which can be considered the progressive collapse of structures and the consideration of structural safety in more expanded concepts than when assessing the first and second groups of limit states for low-rise buildings built from local materials.

Keywords: progressive collapses, bearing capacity, serviceability, structural safety, survivability, limit states, seismic loads, local materials, earthquake

REFERENCES

1. *Klyueva N.V., Bondarenko V.M., Piskunov A.V.* Applied dissipative theory of structural safety of reinforced concrete // *Izvestia Orel State Technical University. Series "construction, transport"*. № 1/21, 2009. p. 8–18.
2. Design of Buildings to Resist Progressive Collapse United Facilities Criteria (UFC)-4-023-03. 2005. 139 pp.
3. *Mkrtychev O.V., Raiser V.D.* Reliability theory in the design of building structures. Monograph. M.: Publishing House ASV. 2016. 908 pp.
4. *Perelmuter A.V.* Selected problems of reliability and safety of building structures. Kiev: Publishing house. UkrNIIproektstakonstruksiya. 1999. 210 pp.
5. *Raiser V.D.* Risk assessment in the design of structures // *Earthquake-resistant construction. Safety of structures*. 2007. P. 15–18.
6. *Malinetsky G.G.* Mathematical foundations of synergetics. M.: KomKniga, 2005. 312 p.
7. *Kitaeva D.A., Pazylov Sh.T., Rudaev Ya.I.* On applications of nonlinear dynamics methods in the mechanics of materials // *Bulletin of the Perm State Technical University. Mathematical modeling of systems and processes*. № 15. 2007. P. 46–70.
8. *Rudaev Ya.I.* Elements of nonlinear dynamics in the mechanics of materials and structures // *Bulletin of KRSU*. V.17, № 1. 2017. P. 42–51.
9. *Mamatov Zh.Y.* On irreversible deformation of rocks // *Problems of natural sciences, information technologies and management at the present stage*. Bishkek. Publishing house KSUCTA. 2003. P. 222–232.
10. *Rudaev Ya.I., Kitaeva D.A., Mamadalieva M.A.* Modeling the deformation behavior of rocks // *Notes of the Mining Institute*, V. 222. 2016. P. 816–822.
11. *Adigamov N.S., Rudayev Ya.J.* Education of state allowing for loss strength of materials // *Journal of Mining Science*, V. 35. № 4. 1999. P. 353–360.
12. *Djeran-Maigre I. et al.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60(2). P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>

13. *Ilyashenko A.V. et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
14. *Kuznetsov S.V.* On the operator of the theory of cracks // C. R. Acad. Sci. Paris. 1996. V. 323. P. 427–432.
15. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations of media with arbitrary anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63 (3). P. 455–467.
<https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X>
16. *Terentjeva E.O. et al.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61 (3). P. 356–367.
<https://doi.org/10.1134/S1063771015030112>
17. Nonlinear waves, structures and bifurcations / Ed. A.V. Gaponov-Grekov, M.I. Rabinovich. M.: Nauka. 1983. 263 p.
18. *Haken G.* Information and self-organization. Macroscopic approach to complex systems. – M.: LENAND. 2014. 320 p.
19. *Gilmore R.* Applied theory of disasters. Part I. M.: Mir. 1984. 285 p.
20. *Raiser V.D.* Theory of reliability of structures. M.: ASV. 2010. 384 p.
21. *Khaitun S.D.* Mechanics and irreversibility. M.: Janus. 1996. 448 p.
22. *Kachanov L.M.* On the time of destruction under creep conditions // Izv. USSR Academy of Sciences, OTN. № 8. 1958.
23. *Rabotnov Yu.N.* On fracture due to creep // PMTF. № 2, 1963. P. 113–123.
24. *Balescu R.* Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics, V. 2. M.: Mir. 1978. 399 p.
25. *Bogachov V.I., Krylov N., Rekner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker-Planck–Kolmogorov equation. 2003. Izhevsk: Scientific Research Center Regular and Chaotic Dynamics
26. *Kirillov A., Shaposhnikov S.V., Bogachev V.I.* Stationary Fokker-Planck equation with potential // DAN RF, V. 454. № 2. 2014. P. 131–137.
27. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Tables of integrals, sums, series and products. – St. Petersburg: BHV-Petersburg. 2011. 1232 p.
28. *Li S. et al.* Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // Comp. Geotech. 2019. V. 109. P. 69–81.
29. *Li S. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // Eur. J. Environ. Civ. Eng. 2020. V. 24. P. 2400–2421.
30. *Cairns D.S. et al.* Progressive damage analysis and testing of composite laminates with fiber waves // Compos. Part A Appl. Sci. Manuf. 2016. V. 90. P. 51–61.

УДК 534.12

О СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ТИПА КОССЕРА

©2024 г. Г. Л. Бровко^{а, *}, В. В. Кожухов^{а, **}, Е. Д. Мартынова^а

^аМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: glb@mech.math.msu.su, **e-mail: vladislav.kozhukhov@student.msu.ru

Поступила в редакцию 16.11.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принята к публикации 09.12.2023 г.

Исследована задача о собственных колебаниях плоской полосы в рамках анизотропной континуальной двумерной модели среды Коссера в предположении о малости движений (деформаций) и при отсутствии внешних сил и моментов. Обнаружено, что каждому волновому числу соответствуют две собственные частоты, найдены собственные формы колебаний и связь между ними. Сделан вывод, что при колебаниях с меньшей из двух частот повороты включений сопутствуют продольному смещению полосы, а при колебаниях с более высокой частотой — препятствуют. Полученные результаты проиллюстрированы на примере модели среды с конкретными значениями параметров. На графиках представлены зависимости собственных частот, фазовых и групповых скоростей от волнового числа, изучено их асимптотическое поведение.

Ключевые слова: структурное моделирование, среда Коссера, собственные колебания

DOI: 10.31857/S1026351924030054, EDN: UIEYYV

1. Введение. Научное наследие А.А. Ильюшина [1–3] является важной частью российской (советской) науки и истории. Объединяя теоретические исследования с тонко поставленными опытными наблюдениями, при больших организаторских способностях, Алексею Антоновичу удалось решить сложнейшие технические проблемы XX в., достигнуть существенного продвижения в науке. С его именем связан необычайно широкий спектр исследуемых задач и проблем [3–5], в частности фундаментальные исследования, направленные на развитие основ моделирования и методики описания сложных структур и сред [3, 4, 6, 7].

А.А. Ильюшин обратил внимание на проблемы феноменологического описания сложных сред, уделил особое внимание топологии микроструктуры представительного объема и возможным внутренним взаимодействиям

частиц среды, включая моментные [4, 6, 7]. Подходы и методы, разработанные Алексеем Антоновичем, нашли своё применение и развитие в работах его учеников, научной школы и в последние годы активно используются исследователями: при построении моментных теорий [8, 9], моделей гетерогенных сред с разнотипными фазами [10], в том числе с различными степенями свободы [11–14], в построении уравнений состояния нелокальных сред [15, 16] и др.

Метод механического моделирования, предложенный в работе [17], был реализован в исследовании процессов в теплообменниках атомных электростанций, в построении неклассических моделей сплошной среды [9, 13, 14, 18]. Продолжая работу по изучению неклассических моделей сред, с учетом интереса в отечественной и зарубежной литературе [19–21] к данному типу, нами было решено вернуться к более детальному изучению модели, рассмотренной в работе [9], на примере задачи о собственных колебаниях конструкции типа Коссера при отсутствии внешних сил и моментов.

2. Постановка задачи. В плоских движениях при малых деформациях и поворотах система уравнений (относительно неизвестных перемещений и угла поворота), описывающих плоские движения коссеровского континуума (осредненной модели исходной дискретной конструкции), имеет вид [9]:

$$\begin{aligned}
 & E_{\text{mat}_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + [G_{\text{mat}} + 2(G_r - G_{\text{mix}})] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
 & + G_{\text{mat}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \rho f_{\text{ex}_1} = 0, \\
 & E_{\text{mat}_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + [G_{\text{mat}} + 2(G_r + G_{\text{mix}})] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
 & + G_{\text{mat}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2(G_r + G_{\text{mix}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \rho f_{\text{ex}_2} = 0, \\
 & H_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi - \\
 & - 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \rho g_{\text{ex}_3} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где j – массовая плотность момента инерции включений относительно оси Ox_3 , ρ – средняя плотность массы ячейки (принимается в качестве массовой плотности модели среды в актуальной конфигурации), $f_{\text{ex}_1}, f_{\text{ex}_2}, g_{\text{ex}_3}$ – соответствующие проекции внешних сил и моментов, $E_{\text{mat}_1} = E_1 b_1 \Delta l_1 / \Delta l_2$, $E_{\text{mat}_2} = E_2 b_2 \Delta l_2 / \Delta l_1$, $G_{\text{mat}} = 2C_{fr} / (\Delta l_1 \Delta l_2)$, $G_r = (C_1 + C_2) / (2\Delta l_1 \Delta l_2)$, $G_{\text{mix}} = (C_1 - C_2) / (2\Delta l_1 \Delta l_2)$, $H_1 = D_1 \Delta l_1 / \Delta l_2$, $H_2 = D_2 \Delta l_2 / \Delta l_1$ – константы плоской модели среды, отвечающие свойствам исходной дискретной конструкции, а именно здесь $C_{fr} = (2/(E_1 b_1^3 \Delta l_1^2)) + (2/(E_1 b_1^3 \Delta l_1^2))^{-1}$ – жесткость каркаса на сдвиг, C_i – жесткость упругого шарнира крепления диска–включения

к полустержню i -го направления ($i = 1, 2$), D_i – жесткость ременной передачи i -го направления, E_i – модуль Юнга материала стержня i -ого направления, b_i – отношение толщины в плане к длине i -ого стержня, Δl_i – длина i -го стержня на ячейке. Будем считать все указанные здесь константы дискретной конструкции положительными числами.

3. Частные случаи плоских движений, неограниченной рассматриваемой среды при отсутствии внешних сил и моментов. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях конструкции (континуальной модели) при отсутствии внешних сил и моментов в плоскости Ox_1x_2 , где x_1 направлена горизонтально.

Случай 1. Пусть перемещения и повороты включений зависят только от времени, т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 4G_r \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{u}_0, \\ \varphi &= A_1 \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где \mathbf{v}_0 , \mathbf{u}_0 , A_1 и A_2 задаются начальными условиями.

Случай 2. Теперь пусть перемещения и повороты включений зависят от времени и координаты x_1 , т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, t)$ и $\varphi = \varphi(x_1, t)$, кроме того, потребуем, чтобы $u_2 = 0$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} E_{\text{mat}_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 0, \\ H_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Разрешая эту систему, получим:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= f_1(x_1 - a_1 t) + f_2(x_1 + a_1 t), \\ \varphi(x_1, t) &= A_1 \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции, $a_1 \equiv (E_{\text{mat}_1}/\rho)^{1/2}$ – скорость распространения продольных волн.

Случай 3. Пусть перемещения зависят от времени и координаты x_1 , т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, t)$, а повороты включений зависят от времени и координаты x_2 , т.е. $\varphi = \varphi(x_2, t)$, кроме того, потребуем, чтобы $u_2 = 0$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} E_{\text{mat}_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0, \\ H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая систему, получим:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= f_1(x_1 - a_1 t) + f_2(x_1 + a_1 t) + C_1 \frac{\rho j}{4G_r} \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + C_2 \frac{\rho j}{4G_r} \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t, \\ \varphi(x_2, t) &= \left(A_1 + \frac{C_1}{2(G_r - G_{\text{mix}})} x_2 \right) \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + \\ &+ \left(A_2 + \frac{C_2}{2(G_r - G_{\text{mix}})} x_2 \right) \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если $\varphi(\infty, t) < \infty$, то $C_1 = C_2 = 0$ в (3.6), а значит, выражения для φ и u_1 совпадают с (3.4).

Случай 4. Рассмотрим одномерные плоские сдвиговые движения среды при отсутствии внешних сил и моментов. Будем считать, что $\mathbf{u} = (u_1(x_2, t), 0, 0)$ и $\varphi = \varphi(x_2, t)$. Для краткости далее под x и u будем понимать x_2 и u_1 . С учетом сказанного система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} N_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_c \varphi - N_b \frac{\partial u}{\partial x} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $N_a \equiv G_{\text{mat}} + 2(G_r - G_{\text{mix}})$, $N_b \equiv 2(G_r - G_{\text{mix}})$, $N_c \equiv 4G_r$.

Решение системы уравнений (3.7) ищем в виде пары функций [22]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_1 \cos(px + \omega t) + A_2 \sin(px + \omega t), \\ \varphi(x, t) &= B_1 \cos(px + \omega t) + B_2 \sin(px + \omega t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставим выражение (3.8) в (3.7):

$$\begin{aligned}
 & \cos(px + \omega t)(-N_a p^2 A_1 + \rho \omega^2 A_1 + N_b p B_2) + \\
 & + \sin(px + \omega t)(-N_b p B_1 - p^2 N_a A_2 + \rho A_2 \omega^2) = 0, \\
 & \cos(px + \omega t)(-H_2 p^2 B_1 - N_c B_1 - p N_b A_2 + \rho j \omega^2 B_1) + \\
 & + \sin(px + \omega t)(N_b p A_1 - H_2 p^2 B_2 - N_c B_2 + \rho j \omega^2 B_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Так как равенства выполняются при любых x и t , получаем системы уравнений для A_1 , B_2 и A_2 , B_1 :

$$\begin{aligned}
 & (-N_a p^2 + \rho \omega^2) A_1 + N_b p B_2 = 0, \\
 & N_b p A_1 - (H_2 p^2 + N_c - \rho j \omega^2) B_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 & -(p^2 N_a - \rho \omega^2) A_2 - N_b p B_1 = 0, \\
 & -p N_b A_2 - (H_2 p^2 + N_c - \rho j \omega^2) B_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Нетривиальное решение каждой из этих систем существует при условии

$$\det \begin{pmatrix} -N_a p^2 + \rho \omega^2 & p N_b \\ p N_b & -N_c - H_2 p^2 + j \rho \omega^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.12}$$

Откуда

$$j \rho^2 \omega^4 - (p^2 H_2 + N_c + j p^2 N_a) \rho \omega^2 + p^2 N_a N_c + H_2 p^4 N_a - p^2 N_b^2 = 0. \tag{3.13}$$

Введя следующие обозначения $a \equiv j \rho^2$, $b \equiv (-j \rho p^2 N_a - \rho N_c - H_2 p^2 \rho)$, $c \equiv p^2 N_a N_c + H_2 p^4 N_a - p^2 N_b^2$, (3.13) перепишем в виде:

$$a \omega^4 + b \omega^2 + c = 0. \tag{3.14}$$

Заметим, что старший член уравнения (3.14) всегда положителен, член при ω^2 отрицателен, если

$$\frac{1}{2}(N_c + H_2 p^2 / (j p^2)) + G_{\text{mat}} + 2G_r > G_{\text{mix}},$$

а свободный член (3.14) положителен при $p^2 N_a N_c + H_2 p^4 N_a > p^2 N_b^2$. Уравнение (3.14) имеет положительный дискриминант как квадратное уравнение относительно ω^2 при $(j p^2 N_a + N_c + H_2 p^2)^2 > 4 j p^2 (N_a N_c + H_2 p^2 N_a - N_b^2)$. Если все эти условия выполнены, тогда положительные корни (3.13) можно записать в виде

$$\omega_{1,2}(p) = \sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}} \tag{3.15}$$

Примем без ограничения общности в (3.15), что $0 < \omega_1(p) < \omega_2(p)$. При $p \rightarrow \infty$ и предположении, что $H_2 > j N_a$, корень ω_1 имеет асимптоту $p \sqrt{N_a} / \rho$, а корень ω_2 имеет асимптоту $p \sqrt{H_2} / (j \rho)$.

В терминах фазовой скорости ($v_\phi \equiv \omega/p$) решение (3.15) может быть переформулировано:

$$v_{\phi_{1,2}} = \sqrt{-\frac{b}{2ap^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2ap^2}\right)^2 - \frac{c}{ap^4}}}. \quad (3.16)$$

Корни (3.15) можно записать в виде групповой скорости волны, когда $v_g \equiv \partial\omega/\partial p$. Фазовая и групповая скорости волны имеют две одинаковые асимптоты при $p \rightarrow \infty$, а именно: $(N_a/\rho)^{1/2}$ для v_{g_1} , v_{ϕ_1} и $(H_2/(j\rho))^{1/2}$ для v_{g_2} , v_{ϕ_2} .

Соответственно уравнения движения (3.7) имеют два решения вида (3.8):

$$\begin{aligned} u_i &= A_{1i} \cos(px + \omega_i t) + A_{2i} \sin(px + \omega_i t), \\ \varphi_i &= B_{1i} \cos(px + \omega_i t) + B_{2i} \sin(px + \omega_i t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $i = 1, 2$, причем A_{1i} , B_{2i} находятся из системы (3.10) при $\omega = \omega_i$, а A_{2i} , B_{1i} — из системы (3.11) при $\omega = \omega_i$. Из этих систем получим:

$$B_{1i} = A_{2i} \varkappa_i, \quad (3.18)$$

$$B_{2i} = -A_{1i} \varkappa_i,$$

где

$$\varkappa_i \equiv -\frac{\rho\omega_i^2 - p^2 N_a}{pN_b} = \frac{pN_b}{-N_c - H_2 p^2 + j\rho\omega_i^2}. \quad (3.19)$$

Проанализируем величины \varkappa_1 и \varkappa_2 . Введем обозначение $\xi = H_2 p^2 + N_c$ и подставим (3.15) в (3.19), тогда

$$\begin{aligned} \frac{\rho\omega_1^2 - p^2 N_a}{pN_b} &= \frac{\xi - j\rho p N_a - \sqrt{(\xi - j\rho p N_a)^2 + 4j\rho p^2 N_b}}{-2j\rho p N_b}, \\ \frac{\rho\omega_2^2 - p^2 N_a}{pN_b} &= \frac{\xi - j\rho p N_a + \sqrt{(\xi - j\rho p N_a)^2 + 4j\rho p^2 N_b}}{-2j\rho p N_b}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa_1}{p} &= -\frac{\rho\omega_1^2 - p^2 N_a}{p^2 N_b} < \frac{1}{p^2 N_b} (\xi - j\rho p N_a - |\xi - j\rho p N_a|) \leq 0, \\ \frac{\varkappa_2}{p} &= -\frac{\rho\omega_2^2 - p^2 N_a}{p^2 N_b} > \frac{1}{p^2 N_b} (\xi - j\rho p N_a + |\xi - j\rho p N_a|) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Следовательно, $\varkappa_1/p < 0$, $\varkappa_2/p > 0$ при $N_b > 0$. Кроме того, заметим, что если умножить \varkappa_1 (ω_1 подставляем в левую часть (3.19)) на \varkappa_2 (ω_2 подставляем в правую часть (3.19)), то подобные множители сократятся, и в итоге получим

$$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = -\frac{1}{j}, \quad (3.22)$$

что означает существование связи между параметрами \varkappa_1 и \varkappa_2 .

Аналогичный результат может быть получен в работе [12]:

$$\tilde{a}_1 = -\frac{\tilde{J}}{\tilde{\rho}} \cdot (\tilde{a}_2)^{-1}, \tag{3.23}$$

где $\tilde{\rho}$ – удельная плотность массы конструкции, \tilde{J} – удельный момент инерции включений, \tilde{a}_i – соответствует введенному обозначению в работе [12].

Учитывая соотношения (3.17) и (3.18) получим:

$$\begin{aligned} u_i &= A_{1i} \cos(px + \omega_i t) + A_{2i} \sin(px + \omega_i t), \\ \varphi_i &= \varkappa_i (A_{2i} \cos(px + \omega_i t) - A_{1i} \sin(px + \omega_i t)). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Отсюда легко заметить, что

$$\varphi_i(x, t) = \frac{\varkappa_i}{p} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} = \frac{\varkappa_i}{\omega_i} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}. \tag{3.25}$$

Из (3.22) и соотношения (3.25) следует, что при движениях с меньшей частотой $\text{sign}(\varphi_1(x, t)) = -\text{sign}(\partial u_1(x, t) / \partial x)$, и значит, повороты включений сонаправлены со смещением полосы, а при движениях с большей частотой $\text{sign}(\varphi_2(x, t)) = \text{sign}(\partial u_2(x, t) / \partial x)$, направление поворота включений противоположно смещению полосы.

Система уравнений (3.7) является линейной относительно $u(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ и однородной. Следовательно, линейные комбинации функций $u_i(x, t)$ и $\varphi_i(x, t)$ из (3.24), соответствующие разным p и i , также являются решениями системы.

4. Моделирование сдвига полосы. Применим полученный выше результат для изучения собственных колебаний бесконечной в направлении оси Ox_1 полосы ширины l (рис. 1). Сохраняя введенные выше обозначения, зададим граничные условия при $x=0$ и $x=l$ положим $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = 0$, а также потребуем, чтобы $\partial\varphi/\partial x(0, t) = 0$ и $\partial\varphi/\partial x(l, t) = 0$.

Для данных граничных условий будем искать решение (3.7) в виде суммы двух выражений вида (3.24): первое соответствует волновому числу p , второе $-p$. Для удобства записи далее опустим индекс i , помня, что волновым

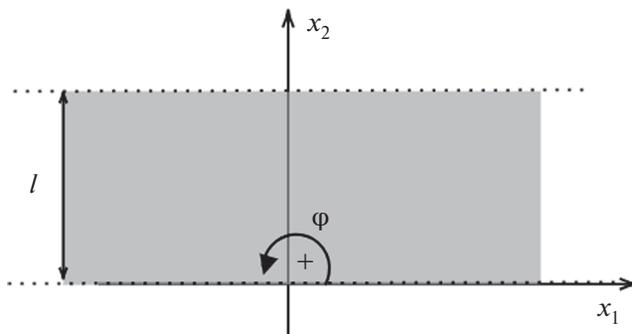


Рис. 1. Рассматриваемая бесконечная полоса в отсчетной конфигурации.

числам $\pm p$ по формулам (3.15) соответствуют частоты ω_1 и ω_2 , $\omega_1(p) = \omega_1(-p)$ и $\omega_2(p) = \omega_2(-p)$. Тогда

$$u(x, t) = \cos(\omega t)(A_1 \cos px + A_2 \sin px + B_1 \cos px - B_2 \sin px) + \sin(\omega t)(-A_1 \sin px + A_2 \cos px + B_1 \sin px + B_2 \cos px), \quad (4.1)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{\varkappa}{p} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Учитывая первую пару граничных условий, получим:

$$\begin{aligned} A_1 \cos pl + A_2 \sin pl + B_1 \cos pl - B_2 \sin pl &= 0, \\ -A_1 \sin pl + A_2 \cos pl + B_1 \sin pl + B_2 \cos pl &= 0, \\ A_1 + B_1 &= 0, \\ A_2 + B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= -B_1, \\ A_2 &= -B_2, \\ 2B_1 \sin pl &= 0, \\ 2B_2 \sin pl &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нетривиальное решение этой системы получается при

$$p = p^{(k)} = \frac{\pi k}{l}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

В случае, когда $k = 0$, решение системы уравнений (3.7) с учетом граничных условий имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ \varphi &= A_1 \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Также отметим, что из (3.15) при $p = 0$

$$\omega_1^{(0)} = 0, \quad \omega_2^{(0)} = \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}}. \quad (4.6)$$

Вторая пара граничных условий также будет выполняться при волновых числах (4.4), поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varkappa}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\varkappa p u(x, t). \quad (4.7)$$

Таким образом, собственные сдвиговые колебания полосы из рассматриваемого материала Коссера при заданных граничных условиях описываются функциями:

$$u_i^{(k)}(x,t) = \sin(p^{(k)}x)(A_{1i}^{(k)}\sin\omega_i^{(k)}t + A_{2i}^{(k)}\cos\omega_i^{(k)}t),$$

$$\varphi^{(k)}(x,t) = \frac{k_i^{(k)}}{p^{(k)}} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}. \tag{4.8}$$

Общее решение рассматриваемой задачи можно записать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^2 \sum_k \sin(p^{(k)}x) (A_{1i}^{(k)}\sin\omega_i^{(k)}t + A_{2i}^{(k)}\cos\omega_i^{(k)}t),$$

$$\varphi(x,t) = \sum_{i=1}^2 \sum_k \frac{\gamma_i^{(k)}}{p^{(k)}} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}, \tag{4.9}$$

где $A_{1i}^{(k)}, A_{2i}^{(k)}$ – произвольные константы ($i = 1, 2$).

Если $A_{1i}^{(k)}, A_{2i}^{(k)}$ – ненулевые константы, то движение (4.9) определяется не двумя различными $\gamma_i^{(k)}$, а зависит лишь от одной из них, так как по формуле (3.22) можно выразить одну через другую.

5. Пример численного расчета конструкции. Выбор числовых значений констант параметров модели очень деликатное дело, особенно в связи с рассмотрением неклассических сред. В ряде работ такие константы определяются из эксперимента [23], [24], в других работах числовые значения констант выбираются на основе теоретических предположений, аналогий между классическими и неклассическими средами [10], [12], [14], [18], [22], [24–31]. В качестве примера возьмем следующие значения параметров модели [9]: $G_{mat} = 6 \cdot 10^7$ [Па/м], $G_r = 3 \cdot 10^7$ [Па/м], $H_2 = 99$ [Па/м], $\rho = 2259$ [кг/м³], $j = 9.99 \cdot 10^{-3}$ [м²], $G_{mix} = 0$ [Па/м]. На рис. 2 изображены зависимости собственных частот среды от параметра k , определяющего волновое число (черная сплошная линия). Здесь и далее на графиках: для областей, где рассматриваемый параметр не определен, примем серую заливку, асимптоты функций обозначаются серым штрихом, а сами функции черными сплошными линиями (значения функции дискретны и определены при натуральных k). На бесконечности верхняя ветвь, соответствующая ω_2 , ведет себя как $p(H_2/(j\rho))^{1/2}$ (серая пунктирная линия), а нижняя ветвь, соответствующая ω_1 , – как $p(N_a/\rho)^{1/2}$. Из графика видно, что при $k=0$, частоты ω_1, ω_2 достигают минимальных значений.

На рис. 3 изображена фазовая скорость от параметра k (черная сплошная линия). Ветвь, соответствующая ω_2 , расположена выше ветви, соответствующей ω_1 . Ветвь $v_{\omega_2}^{(k)}$ на бесконечности подходит к своей асимптоте сверху $(H_2/(j\rho))^{1/2}$, ветвь $v_{\omega_1}^{(k)}$ на бесконечности – к $(N_a/\rho)^{1/2}$ сверху. Отметим, что область изменения $v_{\omega_1}^{(k)}$ распадается на три части: ветвь $v_{\omega_2}^{(k)}$ ограничена сверху значением при $k=1$ (на рис. 3, б черная пунктирная линия) и асимптотой на бесконечности (серая пунктирная линия), аналогично $v_{\omega_1}^{(k)}$ со своими значениями.

На рис. 4 показана зависимость групповой скорости от волнового числа (черная сплошная линия). При этом ветвь, соответствующая ω_2 при $k=1$, расположена ниже ветви, соответствующей ω_1 . Однако на бесконечности ветвь, соответствующая ω_2 , расположена выше ветви, соответствующей ω_1 . Обратим

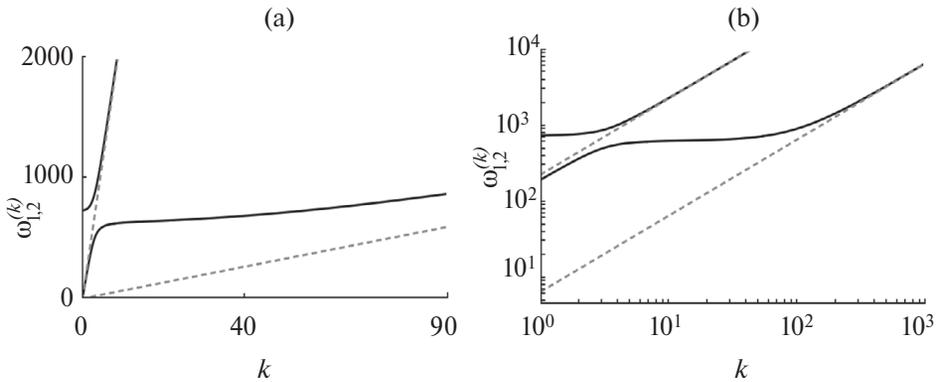


Рис. 2. Графики зависимости собственных частот от k : (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

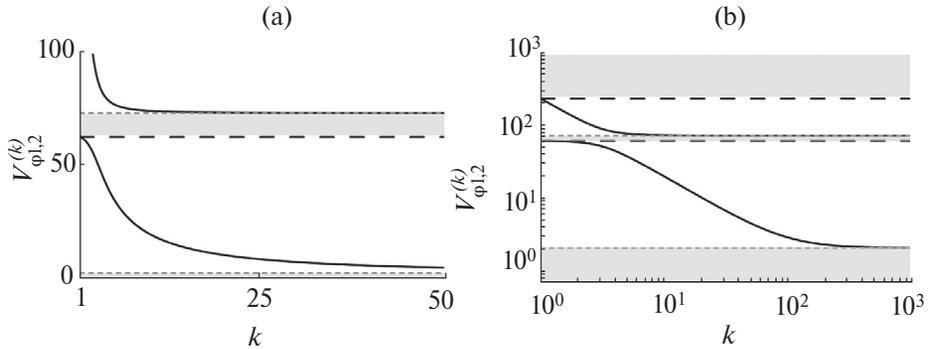


Рис. 3. Графики зависимости фазовых скоростей от k : (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

внимание, что ветвь $v_{g_2}^{(k)}$ на бесконечности подходит к своей асимптоте снизу $(H_2/(j\rho))^{1/2}$, как и $v_{g_1}^{(k)}$ к $(N_a/\rho)^{1/2}$ тоже снизу, однако последняя вначале пересекает асимптоту, имеет точку перегиба и только после этого уходит на бесконечность снизу к своей асимптоте. Особенно отчетливо это видно в логарифмическом масштабе на рис. 4, б.

Заметим, что параметр H_2 входит в выражение для асимптоты ω_2 . Предположим, что $H_2 = 0$. Это соответствует тому, что у исходной конструкции отсутствует жесткость ременной передачи в направлении x_2 . У собственных частот появляется область, где значение $\omega_1^{(k)}$ не определено (рис. 5). Кроме того, видно, что все собственные частоты $\omega_1^{(k)}$ расположены ниже $\omega_2^{(k)}$. Асимптотой у ветви, соответствующей $\omega_2^{(k)}$, является прямая $p\sqrt{N_a/\rho}$, а у ветви низкой частоты асимптотой является комбинация констант $\sqrt{N_a N_c - N_b^2}/\sqrt{j\rho N_a}$.

Ветвь фазовой скорости $v_{\phi_1}^{(k)}$ асимптотически приближается к нулю сверху при стремлении k к бесконечности (рис. 6). Асимптотой для $v_{\phi_2}^{(k)}$ является $\sqrt{N_a/\rho}$. При этом область изменения $v_{\phi_i}^{(k)}$ распадается на две части.

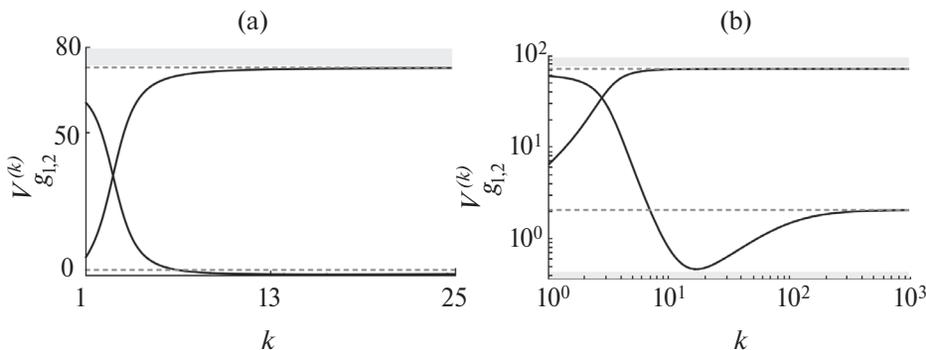


Рис. 4. Графики зависимости групповых скоростей от k : (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

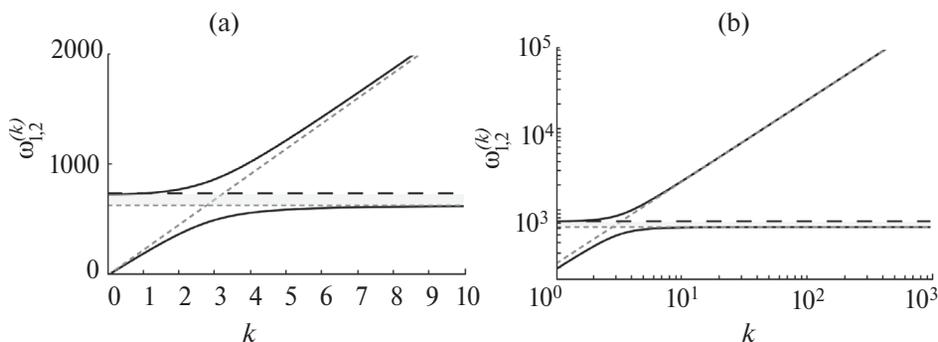


Рис. 5. Графики зависимости собственных частот от k при $H_2=0$: (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

Аналогичным образом ведет себя групповая скорость $v_{g_i}^{(k)}$ (рис. 7). При стремлении волнового числа к бесконечности ветвь $v_{g_1}^{(k)}$ асимптотически приближается к нулю сверху, а ветвь $v_{g_2}^{(k)}$ имеет асимптоту $\sqrt{N_a/\rho}$, приближаясь к ней снизу.

Рассмотрим движения, соответствующие первой моде колебаний с $k=1$, положив для наглядности $A_{2i}^{(k)}=0$ ($i=1, 2$). В этом случае существуют ровно две формы колебаний. Примем $A_{11}^{(1)}=0.0872$ для первой формы колебаний с частотой $\omega_1^{(1)}$, а для второй формы колебаний с частотой $\omega_2^{(1)}$ примем $A_{12}^{(1)}=0.0872$. Согласно (4.9) получим для первой и второй форм колебаний:

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= A_{11}^{(1)} \sin(\pi x/l) \sin \omega_1^{(1)} t, & \varphi_1^{(1)} &= \varkappa_1^{(1)} A_{11}^{(1)} \cos(\pi x/l) \sin \omega_1^{(1)} t, \\ u_2^{(1)} &= A_{12}^{(1)} \sin(\pi x/l) \sin \omega_2^{(1)} t, & \varphi_2^{(1)} &= \varkappa_2^{(1)} A_{12}^{(1)} \cos(\pi x/l) \sin \omega_2^{(1)} t. \end{aligned} \tag{5.1}$$

На рис. 8, а и 9, а изображены перемещения в зависимости от поперечной координаты и времени t в соответствии с (5.1). На рис. 8, б и 9, б изображены повороты включений. Первая форма колебаний (с низкой частотой – ω_1) соответствует поворотам включений, которые сопутствуют продольному

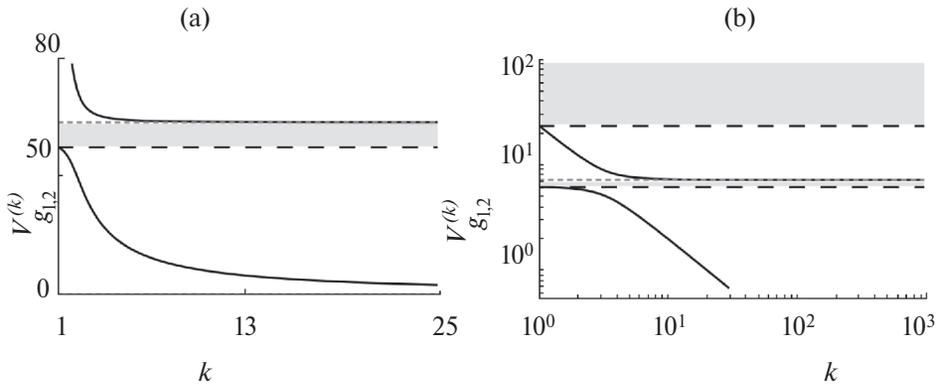


Рис. 6. Графики зависимости фазовых скоростей от k при $H_2=0$: (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

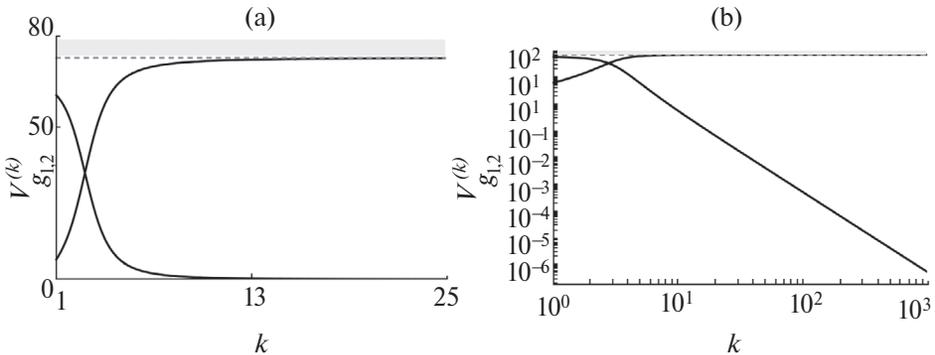


Рис. 7. Графики зависимости групповых скоростей от k при $H_2=0$: (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

смещению полосы. Вторая форма (с высокой частотой — ω_2) соответствует «встречным» (противоположным по знаку) поворотам включений.

Таким образом можно сделать вывод, что при колебаниях с низкой частотой включения «содействуют» продольному смещению полосы, а при колебаниях с более высокой частотой — «препятствуют». Схематически это изображено на рис. 10, где черными стрелками обозначены повороты включений, серыми стрелками направления перемещения точек полосы. Математически данный эффект объясняется тем, что $\gamma_i^{(k)}$ связаны друг с другом и отличаются знаком, поэтому в (5.1) $\varphi_i^{(k)}$ всегда разного знака.

5. Заключение. В работе продолжено развитие структурного (механического) метода моделирования сложных свойств сопротивления материалов деформированию, предложенного А.А. Ильюшиным [17]. Решена задача о собственных колебаниях бесконечной полосы, механические свойства которой описываются моделью [9].

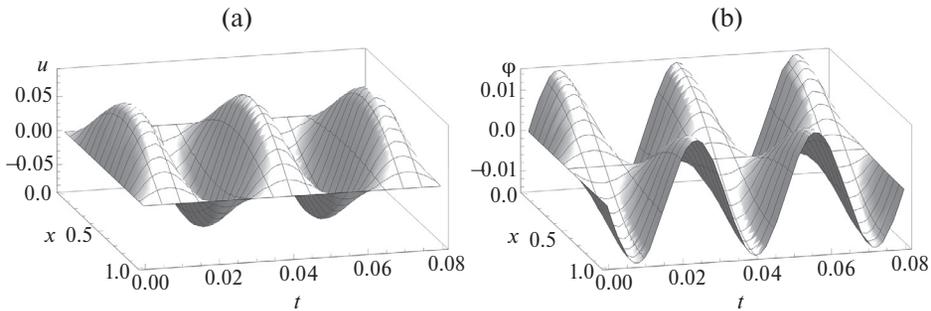


Рис. 8. Первая форма колебаний: (а) перемещения $u_1^{(1)}$ в зависимости от времени t , (б) повороты $\varphi_1^{(1)}$ в зависимости от времени t .

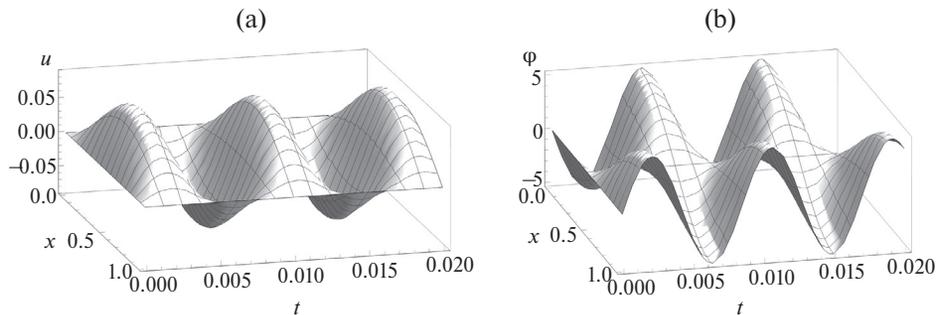


Рис. 9. Вторая форма колебаний: (а) перемещения $u_2^{(1)}$ в зависимости от времени t , (б) повороты $\varphi_2^{(1)}$ в зависимости от времени t .

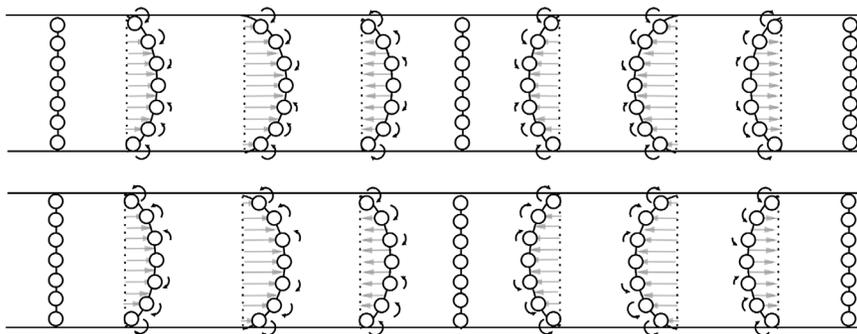


Рис. 10. Формы колебания полосы в зависимости от частоты (верхний рисунок – с частотой ω_1 , нижний рисунок – с частотой ω_2).

Получен общий вид решения в предположении, что функции u_1 и φ зависят только от координаты x_2 и времени t , а перемещения u_2 отсутствуют. Формулы (4.9) показывают существенную особенность решения, состоящую в том, что каждому волновому числу, определяемому числом k , соответствуют ровно две частоты и две формы колебаний.

Проведены численные расчеты для конкретной конструкции. На графиках в линейном и логарифмическом масштабах представлены зависимости собственных частот, фазовых и групповых скоростей от волнового числа, указаны соответствующие особенности, в том числе асимптотическое поведение. Показано, что при $H_2 = 0$ на графиках появляются области, через которые не проходят дисперсионные кривые. Отмечено, что групповая скорость низкой собственной частоты стремится к нулю при больших значениях параметра k , в отличие от случая, когда $H_2 \neq 0$.

Приведены рисунки, иллюстрирующие первую моду колебаний в зависимости от времени. Рассмотрено поведение полосы и включений при каждой из частот, сделан вывод, что при колебаниях с низкой частотой включения сопутствуют продольному смещению полосы, а при колебаниях с более высокой частотой — препятствуют. В случае, когда $A_i^{(k)}$ — ненулевые константы, показано, что собственные движения конструкции определяется не двумя различными $\mathcal{H}_i^{(k)}$, а зависят лишь от одного из них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексей Антонович Ильюшин (к семидесятилетию со дня рождения) // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1981. № 1. С. 104.
2. Кийко И.А. Алексей Антонович Ильюшин (2.0. 01.11–31.05. 98) // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1999. № 3. С. 63–65.
3. Бровко Г.Л., Быков Д.Л., Васин Р.А. и др. Научное наследие А.А. Ильюшина и развитие его идей в механике // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 5–18.
4. Ильюшин А.А. Динамика // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1994. № 3. С. 79–87.
5. Алексей Антонович Ильюшин (к 100-летию со дня рождения) // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2010. № 6. С. 198–203.
6. Ильюшин А.А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 6–14.
7. Ильюшин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54–61.
8. Бровко Г.Л. Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссера // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 55–63.
9. Бровко Г.Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 75–91.
10. Бровко Г.Л. Модели и задачи для наполненных пористых сред // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 6. С. 33–44.
11. Атоян А.А., Саркисян С.О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 2. С. 18–33.
12. Бровко Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 22–36.

13. Бровка Г.Л., Кузичев С.А. Устойчивость вынужденных крутильных колебаний оснащенного стержня // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 1. С. 57–62.
14. Иванова О.А. О предельных формах равновесия модели одномерного континуума Коссера с пластическими свойствами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 1. С. 52–68.
15. Кантор М.М., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 96–110.
16. Саркисян С.О. Микрополярная стержневая модель для нанокристаллического материала, состоящего из линейных цепочек атомов // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 4. С. 14–20.
17. Бровка Г.Л., Ильюшин А.А. Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1993. № 2. С. 83–91.
18. Иванова О.А. Модель оснащенного стержня с вязкоупругими внутренними взаимодействиями // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 1. С. 70–81.
19. Carta G., Jones I.S., Movchan N.V. et al. “Deflecting elastic prism” and unidirectional localisation for waves in chiral elastic systems // Scientific reports. 2017. V. 7. № 1. P. 1–11. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-00054-6>
20. Carta G., Nieves M.J., Jones I.S. et al. Elastic chiral waveguides with gyro-hinges // Quart. J. Mech. Applied Math. 2018. V. 71. № 2. P. 157–185. <https://doi.org/10.1093/qjmath/hby001>
21. Garau M., Nieves M.J., Carta G., Brun M. Transient response of a gyro-elastic structured medium: Unidirectional waveforms and cloaking // Int. J. Eng. Sci. 2019. V. 143. P. 115–141. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.05.007>
22. De Borst R., Sluys L.J. Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 90. № 1–3. P. 805–827. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90185-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90185-9)
23. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with microstructure. 1995. V. 70. P. 1–25.
24. Sadati S.M., Naghibi S.E., Shiva A. et al. Mechanics of continuum manipulators, a comparative study of five methods with experiments. 2017. P. 686–702. https://doi.org/10.1007/978-3-319-64107-2_56
25. Wang J., Rubin M.B., Dong H. A nonlinear Cosserat interphase model for residual stresses in an inclusion and the interphase that bonds it to an infinite matrix // Int. J. Solids Struct. 2015. V. 62. P. 186–206. <https://doi.org/10.1016/j.ijsostr.2015.02.028>
26. Suiker A.S.J., De Borst R., Chang C.S. Micro-mechanical modelling of granular material. Part 2: Plane wave propagation in infinite media // Acta Mechanica. 2001. V. 149. № 1. P. 181–200. <https://doi.org/10.1007/bf01261671>
27. Madeo A., Neff P., Ghiba I.-D. et al. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2015. V. 27. № 4. P. 551–570. <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0329-2>

28. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bulletin of the Seismological Society of America. 2009. V. 99. № 2B. P. 1423–1428. <https://doi.org/10.1785/0120080154>
29. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // Math. Mech. Solids. 2016. V. 21. № 1. P. 73–93. <https://doi.org/10.1177/1081286515577042>
30. Abreu R., Thomas C., Durand S. Effect of observed micropolar motions on wave propagation in deep Earth minerals // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2018. V. 276. P. 215–225. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.04.006>
31. Xiu Chenxi, Chu Xihua, Wang Jiao et al. A micromechanics-based micromorphic model for granular materials and prediction on dispersion behaviors // Granular Matter. 2020. V. 22. № 4. P. 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10035-020-01044-8>

ON PROPER MOTIONS OF THE FLAT COSSERAT TYPE STRUCTURE

G. L. Brovko^{a, *}, V. V Kozhukhov^{a, **}, E. D. Martynova^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Abstract – The problem of natural vibrations of a flat strip of anisotropic two-dimensional Cosserat medium under the assumption of small deformations and in the absence of external forces and moments is investigated. It is shown that two natural frequencies correspond to each wave number. The natural forms of oscillations and the relationship between them are found. It is concluded that at oscillations with the lower of the two frequencies the inclusion rotations accompany the longitudinal displacement of the strip, and at oscillations with a higher frequency they prevent it. The obtained results are illustrated on the example of a medium model with specific parameter values. The plots show the dependences of natural frequencies, phase and group velocities on the wave number, and their asymptotic behavior is studied.

Keywords: structural modeling, Cosserat medium, natural vibrations

REFERENCES

1. Alexei Antonovich Ilyushin (to the seventieth anniversary of his birth) // Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 1981. № 1. P. 104.
2. Kiyko I.A. Alexei Antonovich Ilyushin (2.0. 01.11-31.05. 98) // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1999. № 3. P. 63–65.
3. Brovko G.L., Bykov D.L., Vasin R.A. et al. Scientific Heritage of A.A. Ilyushin and Development of His Ideas in Mechanics // Izv. RAS. MTT. 2011. № 1. P. 5–18.
4. Ilyushin A.A. Dynamics // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1994. № 3. P. 79–87.
5. Alexei Antonovich Ilyushin (to the 100th anniversary of his birth) // Bulletin of Tyumen State University. Physico-mathematical modeling. Oil, gas, energetica. 2010. № 6. P. 198–203.

6. *Ilyushin A.A.* Non-symmetry of strain and stress tensors in continuum mechanics // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1996. № 5. P. 6–14.
7. *Ilyushin A.A., Lomakin V.A.* Moment theories in mechanics of solid deformable bodies // Strength and Plasticity. Moscow: Nauka. 1971. P. 54–61.
8. *Brovko G.L.* Modeling of inhomogeneous media of complex structure and Cosserat continuum (in Russian) // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1996. № 5. P. 55–63.
9. *Brovko G.L.* About one structural model of the Cosserat medium (in Russian) // Izv. RAS. MTT. 2002. № 1. P. 75–91.
10. *Brovko G.L.* Models and problems for filled porous media // Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2010. № 6. P. 33–44.
11. *Atoyan A.A., Sarkisyan S.O.* Study of free vibrations of micropolar elastic thin plates // Dokl. of NAS of Armenia. 2004. T. 104. № 2. P. 18–33.
12. *Brovko G.L., Ivanova O.A.* Modeling of properties and motions of an inhomogeneous one-dimensional continuum of a complex microstructure of the Cosserat type (in Russian) // Izv. RAS. MTT. 2008. № 1. P. 22–36.
13. *Brovko G.L., Kuzichev S.A.* Stability of the forced torsional oscillations of the equipped rod (in Russian) // Moscow University Vestnik. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2010. № 1. P. 57–62.
14. *Ivanova O.A.* About limit forms of equilibrium of the model of one-dimensional Cosserat continuum with plastic properties // Mechanics of composite materials and structures. 2017. T. 23. № 1. P. 52–68.
15. *Kantor M.M., Nikabadze M.U., Ulukhanyan A.R.* Equations of motion and physical boundary conditions of the micropolar theory of thin bodies with two small dimensions // Izv. RAS. MTT. 2013. № 3. P. 96–110.
16. *Sarkisyan S.O.* Micropolar rod model for nanocrystalline material consisting of linear chains of atoms // Physical Mesomechanics. 2016. V. 19. № 4. P. 14–20.
17. *Brovko G.L., Ilyushin A.A.* About one plane model of perforated plates (in Russian) // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1993. № 2. P. 83–91.
18. *Ivanova O.A.* Model of the equipped rod with viscoelastic internal interactions // Mechanics of composite materials and structures. 2018. V. 24. № 1. P. 70–81.
19. *Carta G., Jones I.S., Movchan N.V. et al.* “Deflecting elastic prism” and unidirectional localisation for waves in chiral elastic systems // Scientific reports. 2017. V. 7. № 1. P. 1–11. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-00054-6>
20. *Carta G., Nieves M.J., Jones I.S. et al.* Elastic chiral waveguides with gyro-hinges // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2018. V. 71. № 2. P. 157–185. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hby001>
21. *Garau M., Nieves M.J., Carta G., Brun M.* Transient response of a gyro-elastic structured medium: Unidirectional waveforms and cloaking // International Journal of Engineering Science. 2019. V. 143. P. 115–141. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.05.007>
22. *De Borst R., Sluys L.J.* Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. V. 90. № 1–3. P. 805–827. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90185-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90185-9)
23. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with microstructure. 1995. V. 70. P. 1–25.

24. *Sadati S.M., Naghibi S.E., Shiva A. et al.* Mechanics of continuum manipulators, a comparative study of five methods with experiments. 2017. P. 686–702.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-64107-2>
25. *Wang J. Rubin M.B., Dong H.* A nonlinear Cosserat interphase model for residual stresses in an inclusion and the interphase that bonds it to an infinite matrix // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 62. P. 186–206.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.028>.
26. *Suiker A.S.J., De Borst R., Chang C.S.* Micro-mechanical modelling of granular material. Part 2: Plane wave propagation in infinite media // *Acta Mechanica*. 2001. V. 149. № 1. P. 181–200. <https://doi.org/10.1007/bf01261671>
27. *Madeo A., Neff P., Ghiba I.-D. et al.* Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2015. V. 27. № 4. P. 551–570.
<https://doi.org/10.1007/s00161-013-0329-2>
28. *Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C.* Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2009. V. 99. № 2B. P. 1423–1428.
<https://doi.org/10.1785/0120080154>
29. *Grekova E.F.* Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. V. 21. № 1. P. 73–93.
<https://doi.org/10.1177/1081286515577042>
30. *Abreu R., Thomas C., Durand S.* Effect of observed micropolar motions on wave propagation in deep Earth minerals // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2018. V. 276. P. 215–225. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.04.006>
31. *Xiu Chenxi, Chu Xihua, Wang Jiao et al.* A micromechanics-based micromorphic model for granular materials and prediction on dispersion behaviors // *Granular Matter*. 2020. V. 22. № 4. P. 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10035-020-01044-8>

УДК 539.3

ФАКТОРЫ УСТОЙЧИВОСТИ СКВАЖИН В КОЛЛЕКТОРАХ ПОДЗЕМНЫХ ХРАНИЛИЩ ГАЗА

© 2024 г. Д. М. Климов^а, В. И. Карев^а *,
Ю. Ф. Коваленко^а, К. Б. Устинов^а

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: wikarev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 07.11.2023 г.

После доработки 07.12.2023 г.

Принята к публикации 09.12.2023 г.

Сохранение целостности скважин и предотвращение процессов пескопроявления являются одними из ключевых проблем эксплуатации подземных хранилищ газа. Ранее авторами была выдвинута гипотеза, что ключевую роль в процессах разрушения и пескопроявлений играет изменение пластового давления в залежи в целом, поскольку именно оно оказывает решающее влияние на величину напряжений, действующих в окрестности скважин. Это отличается от точки зрения многих исследователей, связывающих эти негативные процессы с изменением напряженного состояния в призабойной зоне пласта, вызванного депрессией/репрессией в скважинах. Основной целью работы является исследование влияния неравнокомпонентности исходного напряженного состояния, а также упругой и прочностной анизотропии пород коллектора на устойчивость скважин. Показано, что наличие неравнокомпонентности исходного напряженного состояния и упругой анизотропии может приводить к концентрациям напряжения на контуре скважины, существенно отличающимся от изотропного случая. Также показано, что при наличии прочностной анизотропии может наблюдаться изменение местоположения точек начала разрушения скважины. Выполненные расчеты подтверждены экспериментальными исследованиями, проведенными на породах Увязовского подземного хранилища газа в условиях истинно трехосного независимого нагружения.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, геомеханическое моделирование, истинно трехосные испытания

DOI: 10.31857/S1026351924030065, EDN: UIBDFM

1. Введение. Подземное хранилище газа (ПХГ) – это комплекс инженерно-технических сооружений в пластах-коллекторах геологических структур, предназначенных для закачки, хранения и последующего отбора газа. Режимы эксплуатации ПХГ существенно отличаются от режимов эксплуатации месторождений углеводородов. В первую очередь это связано с циклическим сезонным изменением пластового давления в коллекторах ПХГ

при закачке/отборе газа. Причем колебания пластового давления в состояниях минимальной и максимальной насыщенности составляют десятки процентов от среднего пластового давления.

Ранее [1] авторами была выдвинута гипотеза, что ключевую роль в процессах разрушения и пескопроявлений играет изменение пластового давления в залежи в целом, поскольку именно оно оказывает решающее влияние на величину напряжений, действующих в окрестности скважин. Это отличается от точки зрения многих исследователей, связывающих эти негативные процессы с изменением напряженного состояния в призабойной зоне пласта, вызванного депрессией/репрессией в скважинах [2, 3]. Настоящая работа продолжает исследование авторов [1], причем акцент делается на влияние таких факторов, как неравнокомпонентность исходного напряженного состояния и прочностная анизотропия пород коллектора.

Эффективность эксплуатации ПХГ определяется продуктивностью эксплуатационных скважин в циклах отбора и их приемистостью в циклах закачки газа, а также длительностью межремонтного периода, величина которого в основном связана с интенсивностью разрушения призабойной зоны пласта (ПЗП), которая приводит к выносу песка в скважину, кольматации и абразивному износу подземного и наземного оборудования.

Основная гипотеза возникновения пескопроявления, принятая многими исследователями, связана с напряженно-деформированным состоянием горной породы в ПЗП [4–11]. Ее разрушение происходит, когда напряжения в этой области превышают предел прочности горной породы. Для предотвращения пескопроявлений применяются пескозадерживающие фильтры разной конструкции и различные способы укрепления породы в ПЗП с помощью химических растворов. Однако все эти способы приводят к ухудшению качества скважин – их продуктивности и приемистости. В этой связи в качестве основного направления предупреждения разрушения ПЗП обычно предлагается снижение депрессии в скважинах.

Однако геомеханический анализ и данные натурных наблюдений, проведенные для ряда подземных хранилищ газа, показали, что ключевую роль в процессах разрушения коллектора играет другой фактор, а именно изменение пластового давления в залежи в целом, поскольку именно оно оказывает решающее влияние на величину напряжений, действующих в окрестности скважин, особенно на стадии максимального отбора газа.

Расчеты показали, что в результате изменения пластового давления исходное напряженное состояние в пласте, даже предполагаемое изначально равномерным сжатием, становится неравнокомпонентным – при этом эффективные вертикальные и горизонтальные напряжения от горного давления будут различны. Следствием этого является существенное увеличение касательных напряжений, действующих в окрестности скважин.

Основной целью настоящей работы является исследование влияния неравнокомпонентности исходного напряженного состояния, а также упругой и прочностной анизотропии пород коллектора на устойчивость скважин.

2. Напряженное состояние вокруг горизонтальной скважины. Рассмотрим напряженное состояние вокруг горизонтальной скважины, расположенной

в горизонтальном пласте-коллекторе. Исходное напряженное состояние массива в общем случае определяется шестью константами – шестью компонентами тензора напряжений либо тремя главными напряжениями и тремя углами (например, углами Эйлера), определяющими направления действий главных напряжений относительно вертикали и сторон горизонта. Для коллекторов нефтяных и газовых месторождений, при отсутствии активной тектоники, наличие “ловушек” из непроницаемых пластичных пород, собственно и обуславливающих формирование месторождений флюидов, должно приводить к релаксации касательных напряжений в массиве, что позволяет предположить близость исходного напряженного состояния к равнокомпонентному сжатию [12, 13]. Тем не менее в настоящее время возобладал подход, основанный на умозрительном предположении о неравнокомпонентности исходного напряженного состояния с одним из главных напряжений, действующим в вертикальном направлении. Итак, предположим, что исходное напряженное состояние определяется главными напряжениями $\sigma_1 = \sigma_2 = q_1$, $\sigma_3 = q_3$, последнее из которых действует в вертикальном направлении. Соответственно для исходных эффективных напряжений, действующих в грунтовом скелете пласта, имеем:

$$s_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 + (1 - \delta) p_0 \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

где δ – доля площадок контактов относительно всей поверхности зерна грунтового скелета [12], p_0 – начальное пластовое давление. В литературе часто уравнение (2.1) записывается через коэффициент Био α , связанный с коэффициентом δ как $\alpha + \delta = 1$. Здесь и далее сжимающие напряжения считаются отрицательными, давление – положительным. На контуре скважины с открытым забоем действует радиальное эффективное напряжение $s_{rr}^0 = -p_0 \delta$. Окружные напряжения на контуре рассматриваемой скважины в случае упругой изотропии породы определяется из решения задачи Кирша [14], (см. также, например, [15, 16]). Для эффективных напряжений в используемых обозначениях решение записывается в виде:

$$s_{\theta\theta}^0 = s_1 + s_3 - s_{rr}^w + 2(s_1 - s_3) \cos 2\theta. \quad (2.2)$$

Здесь θ – угол, отсчитываемый от вертикали; s_{rr}^w – напряжения на контуре скважины. Выражая эффективные напряжения через полные, получаем:

$$s_{\theta\theta}^0 = q_1 + q_3 - p_0(2 - \delta) + 2(q_1 - q_3) \cos 2\theta. \quad (2.3)$$

Напряжения $s_{\theta\theta}^0, s_{xx}^0, s_{rr}^0$ являются главными. Напряжение $s_{\theta\theta}^0$, максимальное по абсолютной величине, имеет экстремумы в точках $\theta = \pi n/2$, $n = 0, 1, 2, 3$, соответствующих боковым и верхней/нижней точкам контура скважины.

Заметим, что в случае произвольной ориентации скважины относительно главных осей тензора напряжений исходного поля, т.е. при наличии всех шести компонент s_{ij}^0 , напряжения на контуре скважины определяются из суперпозиции решений плоской и антиплоской задач. Для линейного изотропного случая соответствующие формулы приведены в работах [17, 18]. Для рассматриваемого случая порупругости в используемых обозначениях на контуре скважины аналогичные формулы записываются в виде:

$$\begin{aligned}
s_{\theta\theta}^0 &= s_{zz}^\infty + s_{yy}^\infty - s_{rr}^w - 2(s_{zz}^\infty - s_{yy}^\infty) \cos 2\theta - 4s_{yz}^\infty \sin 2\theta, \\
s_{xx}^0 &= s_{xx}^\infty - 2\nu(s_{zz}^\infty - s_{yy}^\infty) \cos 2\theta - 4\nu s_{yz}^\infty \sin 2\theta, \\
s_{\theta x}^0 &= 2s_{xz}^\infty \sin \theta - 2s_{xy}^\infty \cos \theta, \\
s_{rr}^0 &= s_{rr}^w, \\
s_{rx}^0 &= s_{r\theta}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона; ось x направлена вдоль оси горизонтальной скважины, ось z – вертикально, ось y лежит в горизонтальной плоскости.

Величины главных напряжений определяются по стандартным формулам, например [15]:

$$\begin{aligned}
s_{1,2}^0 &= \frac{s_{\theta\theta}^0 + s_{xx}^0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(s_{\theta\theta}^0 - s_{xx}^0)^2 + 4s_{\theta x}^0{}^2}, \\
s_3^0 &= s_{rr}^0 = s_{rr}^w.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Если одно из главных исходных напряжений вертикально (нормально плоскости, в которой находится скважина), что соответствует $s_{xz}^\infty = s_{yz}^\infty = 0$, то формулы упрощаются:

$$\begin{aligned}
s_{\theta\theta}^0 &= s_{zz}^\infty + s_{yy}^\infty - s_{rr}^w - 2(s_{zz}^\infty - s_{yy}^\infty) \cos 2\theta, \\
s_{xx}^0 &= s_{xx}^\infty - 2\nu(s_{zz}^\infty - s_{yy}^\infty) \cos 2\theta, \\
s_{\theta x}^0 &= -2s_{xy}^\infty \cos \theta, \\
s_{rr}^0 &= s_{rr}^w, \\
s_{rx}^0 &= s_{r\theta}^0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Анализ выражения (2.5) с подстановкой (2.6) показывает, что присутствие касательных напряжений s_{xy}^∞ не приводит к смещению экстремумов напряжений $s_{1,2}^0$ от точек $\theta = \pi n/2$, соответствующих боковым и верхней/нижней точкам контура скважины, что, очевидно, не будет иметь места для общего случая (2.4).

При наличии деформационной анизотропии ситуация усложняется: окружные напряжения, даже при равнокомпонентном исходном напряженном состоянии в общем случае не остаются постоянными вдоль контура скважины. В случае плоской деформации (как и плоского напряженного состояния), как показано Лехницким [19], для тел с произвольной геометрией и граничными условиями в напряжениях распределение напряжений определяется двумя независимыми безразмерными параметрами, составленными из компонент тензора упругости (податливости):

$$n = \sqrt{\frac{2\beta_{13} + \beta_{44}}{\beta_{11}} + 2k}, \quad k = \sqrt{\frac{\beta_{33}}{\beta_{11}}}, \tag{2.7}$$

где β_{ij} – коэффициенты податливости в уравнении закона Гука, записанного для условий плоской деформации и трансверсальной изотропии, характерной для осадочных пород,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \beta_{11}\sigma_{xx} + \beta_{13}\sigma_{zz}, \\ \varepsilon_{zz} &= \beta_{13}\sigma_{xx} + \beta_{33}\sigma_{zz}, \\ 2\varepsilon_{xz} &= \beta_{44}\sigma_{xz},\end{aligned}\tag{2.8}$$

Если массив подвержен действию всестороннего равнокомпонентного сжатия q , концентрация окружающих напряжений на контуре определяется теми же параметрами (2.7), причем, как показано в работах [19, 20], при равенстве нулю комбинации

$$k_A = \frac{\beta_{11} + \beta_{33} - 2\beta_{13}}{\beta_{44}}\tag{2.9}$$

концентрация напряжений оказывается равной 2 всюду на контуре, что соответствует изотропному случаю. В этой связи именно данный параметр удобно выбрать в качестве степени анизотропии, в отличие от обычно принимаемого параметра – отношения упругих модулей (например, [21]), слабо влияющего на концентрацию напряжений, вызванную анизотропией [22]. На важность параметра (2.9) указывалось в работах [23, 24]. Отметим, что параметр k_A имеет физический смысл: сочетание упругих характеристик, приводящее к $k_A = 0$, соответствует одному из частных случаев, рассмотренных де Сен-Венаном [25], для которых зависимость упругих модулей от ориентации в пространстве имеет наиболее простой вид.

Для $k_A < 1$ наибольшие концентрации напряжений оказываются в боковых и верхней/нижней точках контура скважины, равные соответственно [19]

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q} = 1 + \frac{n-1}{k}, \quad \frac{\sigma_{\theta\theta}}{q} = 1 + n - k,$$

и наименьшие в точках контура вблизи $\theta = \pi/4$. Для $k_A > 1$ максимумы и минимумы меняются местами. Точное выражение для величины концентрации напряжения весьма громоздко, асимптотическое выражение приведено в работе [22].

Как отмечалось в работе [21], для большинства пород параметр (2.9) слабо отличается от единицы. Поэтому наличие упругой анизотропии может не учитываться при расчете напряженного состояния вблизи скважины в большинстве случаев. Однако в случае отклонения параметра от единицы неучет анизотропии может приводить к существенным погрешностям. Так, для передотита [21] значения концентрации напряжений в боковых и верхней/нижней точках концентрации напряжений (2.10) становятся отличными от 2 и оказываются равными 2.2 и 2.26 соответственно.

Для неравнокомпонентного исходного напряженного состояния концентрации напряжений определяется двумя параметрами, при этом параметр k_A , хотя и оказывает весьма существенное влияние на концентрацию напряжений, уже не является однозначно определяющим.

Для случая несовпадения оси скважины с одним из главных исходных напряжений, подобно изотропному случаю, решение записывается как сумма решений плоской и антиплоской задач. Первая часть дается по-прежнему решением [19], обобщение для учета антиплоской части было сделано в работе [26]. Данное решение достаточно громоздко, поэтому для практических целей может быть использовано приближенное решение [27], обеспечивающее достаточную степень точности для не слишком выраженной анизотропии.

Вернемся к рассмотрению случая упругой изотропии. При изменении порового давления в пласте в процессе закачки/отбора газа происходит изменение напряженного состояния пласта. При этом характер изменения граничных условий определяется его геометрией. На боковых (вертикальных) поверхностях ввиду большой протяженности пласта в своей плоскости граничные условия соответствуют постоянству нормальных (горизонтальных) смещений $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$ (оси 1 и 2 ориентированы в горизонтальной плоскости пласта). На горизонтальных поверхностях постоянными сохраняются вертикальные напряжения $\Delta \sigma_3 = 0$. Подставляя эти граничные условия в систему уравнений теории упругости и пренебрегая влиянием градиента порового давления в процессе откачки-закачки [1], получаем для изменений главных эффективных напряжений в пласте и радиальных напряжений на контуре скважины от изменения пластового давления Δp_{pl} ($\Delta p_{pl} < 0$ при пластовом давлении ниже начального $\Delta p_{pl} < p_0$, $\Delta p_{pl} > 0$ при пластовом давлении выше начального $\Delta p_{pl} > p_0$):

$$\Delta s_1 = \Delta s_2 = \frac{\nu}{1-\nu}(1-\delta)\Delta p_{pl}, \Delta s_3 = (1-\delta)\Delta p_{pl}, \Delta s_{rr} = -\Delta p_{pl}\delta. \quad (2.11)$$

Более точное решение можно также получить из рассмотрения деформации уплощенного включения [28], при этом поправка, однако, будет иметь порядок квадрата отношения толщины пласта к его протяженности.

Таким образом, мы видим, что изменение порового давления в пласте ПХГ приводит к изменению эффективных напряжений, такому, что соотношение между приращениями горизонтальных и вертикальных эффективных напряжений определяется согласно известной формуле Динника. В данном случае использование формулы Динника представляется логически оправданным, поскольку циклы закачки/отбора газа в ПХГ осуществляется обычно сезонно, и за такие промежутки времени напряжения релаксировать очевидно не успевают. Перенесение же данного рассмотрения на временные интервалы, сопоставимые с геологическими (даже при отсутствии влияния тектонических напряжений), едва ли оправданно, поскольку данные временные интервалы существенно превосходят характерные времена релаксации напряжений в горных породах.

Изменение окружных напряжений на контуре скважины записываются аналогично (2.2) с заменой исходных напряжений на их приращения:

$$\Delta s_{\theta\theta} = \Delta s_1 + \Delta s_3 - \Delta s_{rr} + 2(\Delta s_1 - \Delta s_3)\cos 2\theta. \quad (2.12)$$

Подстановка (2.11) в (2.12) дает:

$$\Delta s_{\theta\theta} = \left(1 + \frac{\nu}{1-\nu}(1-\delta)\right) \Delta p_{pl} - 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} (1-\delta) \Delta p_{pl} \cos 2\theta. \quad (2.13)$$

Отметим, что изменение напряжений в циклах закачки/отбора газа описывается достаточно простой формулой, поскольку не зависит от исходного напряженного состояния.

Полные эффективные напряжения определяются суммой (2.3) и (2.13):

$$s_{\theta\theta} = q_1 + q_3 + p_0(2-\delta) - 2(q_3 - q_1) \cos 2\theta + \left(1 + \frac{\nu}{1-\nu}(1-\delta)\right) \Delta p_{pl} - 2 \frac{1-2\nu}{1-\nu} (1-\delta) \Delta p_{pl} \cos 2\theta. \quad (2.14)$$

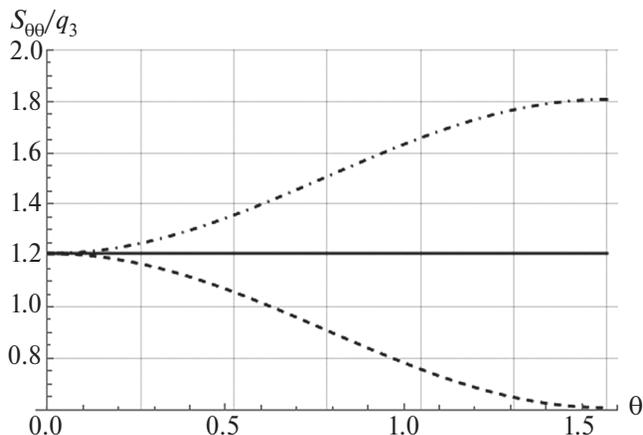
3. Результаты численных расчетов. Распределения окружных напряжений, нормированных на величину вертикального напряжения, для ряда случаев представлены на рис. 1, где принято

$$q_3 = -1, q_1 = \eta q_3, p_0 = 0.44, \nu = 0.2, \delta = 0.2,$$

где η – коэффициент бокового распора. Величина Δp_{pl} принимается равной 0, 0.25 и -0.25 для условий гидростатического давления, максимальной закачки и максимального отбора газа соответственно. Из приведенных графиков видно, что уменьшение пластового давления в процессе отбора газа существенно повышает действующие на контуре горизонтальной скважины кольцевые напряжения $s_{\theta\theta}$, которые достигают максимума в боковой точке при $\theta = \pi/2$.

При отсутствии прочностной анизотропии разрушения следует опасаться в точках контура с максимальными по абсолютному значению напряжениями (2.13). При наличии прочностной анизотропии, как обусловленной наличием площадок ослабления, связанных с напластованием, так и атипичного типа, характерных для высокопористых слабых пород [29, 30], начала разрушения следует опасаться в точках контура, где действующие напряжения превысят предел прочности, зависящий от угла θ .

(a)



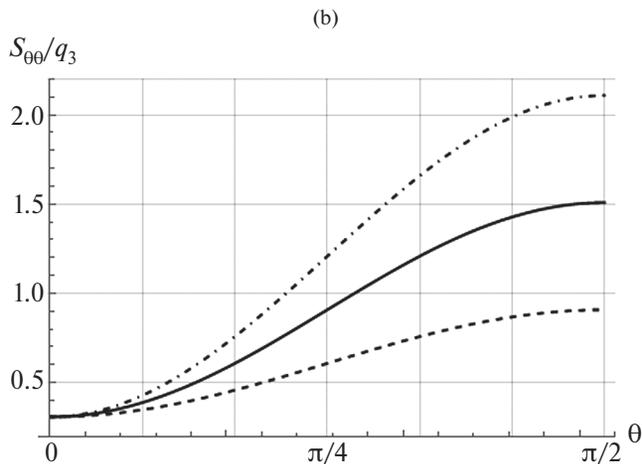


Рис. 1. Зависимости окружных напряжений на контуре горизонтальной скважины, нормированных на значение вертикального напряжения, от угла, отсчитываемого от вертикали; а) при равнокомпонентном исходном напряженном состоянии массива, б) при коэффициенте бокового распора 0.7; сплошные линии – при гидростатическом пластовом давлении; пунктирные линии – при максимальной закачке; штрих-пунктирные линии – при максимальном отборе газа.

На основании выполненных расчетов были составлены программы нагружения образцов пород из коллекторов ряда ПХГ, по которым на установке ИСТНН было выполнено физическое моделирование деформационных процессов, протекающих в призабойной зоне пластов ПХГ при циклическом изменении пластового давления в процессе закачки/отбора газа. В результате для конкретных месторождений были определены максимально допустимые депрессии на забое скважин, не приводящие к разрушению породы в их окрестности и выносу песка в скважину.

4. Экспериментальные исследования. Для примера ниже приведены результаты испытания двух образцов песчаника У1 и У2 из коллектора Увязовского ПХГ. Образцы были изготовлены из одного куска керна, отобранного с глубины 760 м. Гидростатическое пластовое давление составляет 7.6 МПа, максимальное пластовое давление в конце этапа закачки газа согласно проекту эксплуатации месторождения – 10.5 МПа, минимальное пластовое давление в конце этапа отбора газа – 6.5 МПа.

Эксперименты выполнялись на Испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН), созданной в ИПМех РАН [31]. Установка ИСТНН представляет собой уникальный исследовательский комплекс для изучения деформационных, прочностных и фильтрационных характеристик горных пород в условиях истинно трехосного независимого нагружения. Установка ИСТНН позволяет нагружать образцы горных пород в форме куба с ребром 40 мм по любым траекториям нагружения независимо и одновременно по каждой из трех осей.

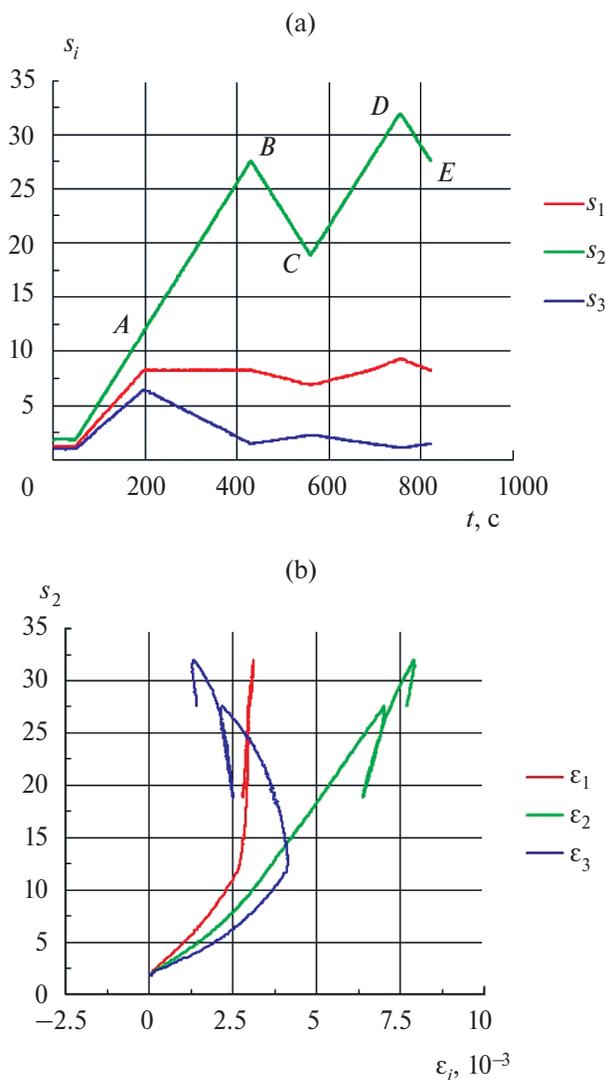


Рис. 2. а) программа испытания образца У1; б) кривые деформирования образца У1.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости от времени t [с] напряжений s_1, s_2, s_3 [МПа], прикладываемых в ходе опыта к образцам по осям нагружения 1, 2, 3 установки ИСТНН, (а), и кривые деформирования (б) в ходе нагружения образцов по программам, отвечающих изменению напряжений на контуре горизонтальной скважины. При составлении программ нагружения принималось, что исходное природное напряженное состояние в пласте является неравномерным, так что $q_1 = \eta_1 q_3$, $q_2 = \eta_2 q_3$, где q_3 действует в вертикальном направлении и является максимальным, а q_1 и q_2 — максимальное и минимальное

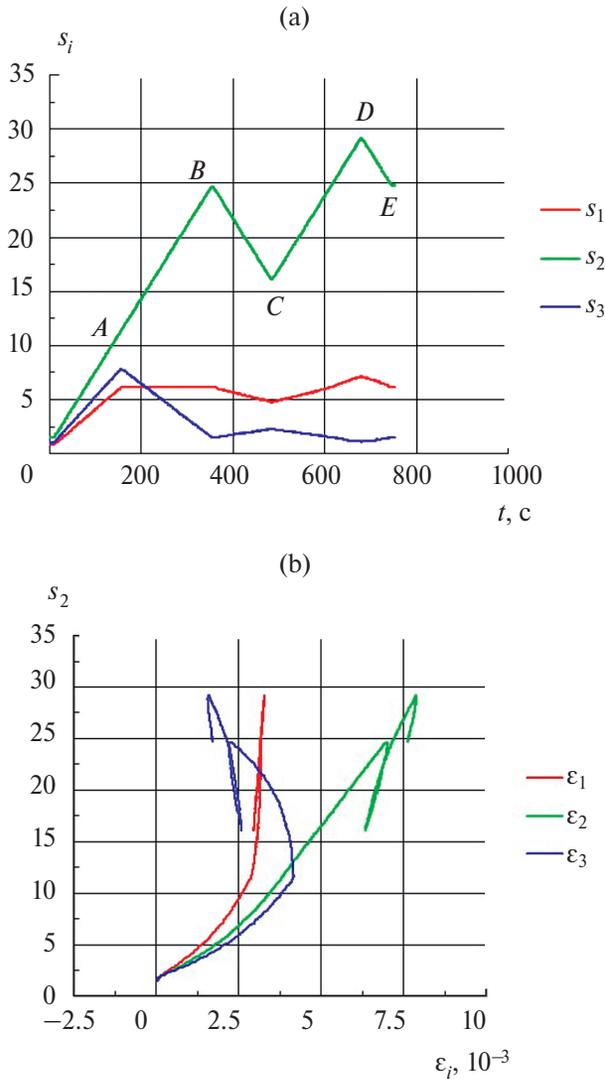


Рис. 3. а) программа испытания образца У3; б) кривые деформирования образца У3.

горизонтальные исходные природные напряжения, причем $\eta_1 = 0.8$; $\eta_1 = 0.7$. В приведенных выше соотношениях принималось $\nu = 0.2$, $\delta = 0.2$.

При испытании образцов У1 и У2 моделировалось изменение напряженного состояния в боковой точке вертикального сечения горизонтальной скважины в ходе одного цикла изменения пластового давления при закачке/отборе газа. В этой точке, отвечающей углу $\theta = \pi/2$ в соотношении (2), кольцевые напряжения s_θ достигают максимума. Разница в двух опытах заключалась в том, что при испытании образца У1 моделировалась горизонтальная

скважина, направление которой совпадало с направлением максимального горизонтального природного напряжения q_1 , а при испытании образца У2 – горизонтальная скважина, направление которой совпадало с направлением минимального горизонтального природного напряжения q_2 .

Напряжения s_1 , s_2 , s_3 , изображенные на рис. 2 и 3, отвечают напряжениям $|s_z|$, $|s_\theta|$, $|s_r|$, действующим на контуре горизонтальной скважины.

В опытах нагружение образцов осуществлялось управлением по напряжениям со скоростью 0.03 МПа/с по каждой из осей установки.

В программе нагружения точка А соответствует напряжениям в пласте до пробуривания скважины; точка В соответствует напряжениям на контуре скважины, когда скважина пробурена и заполнена технической водой; точка С – конец закачки газа в пласт; точка D – конец отбора газа; точка E – давление в пласте равно начальному.

Из рис. 2,а и 3,а видно, что при проводке горизонтальной скважины вдоль направления действия максимального горизонтального природного напряжения, возникающие на ее контуре напряжения больше, чем при проводке скважины вдоль минимального горизонтального природного напряжения. Отсюда следует важный практический вывод, что для уменьшения рисков разрушения породы в окрестности горизонтальных скважин направление их проводки должно быть близко к направлению действия минимального горизонтального природного напряжения.

На рис. 4 приведена программа нагружения образца из коллектора Увязовского ПХГ, составленная для случая равнокомпонентного исходного природного напряжения в пласте. Из его сравнения с рис. 2,а и 3,а видно, что неравнокомпонентное исходное напряженное состояние значительно повышает действующие на контуре горизонтальной скважины напряжения, тем

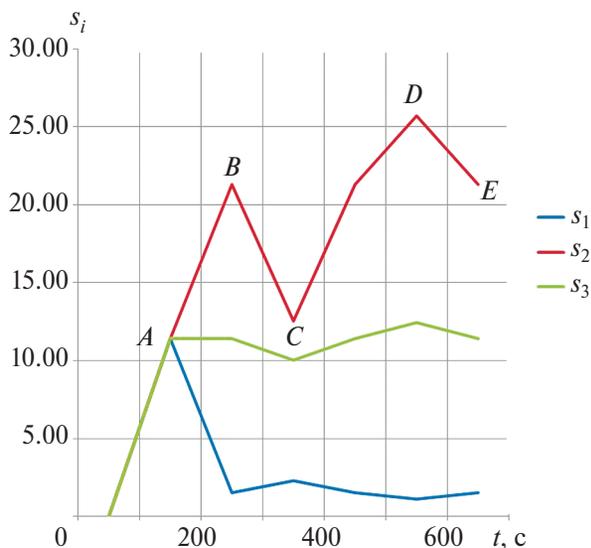


Рис. 4. Программа нагружения образца из Увязовского ПХГ при равнокомпонентном природном напряжении.

самым увеличивая вероятность разрушения породы в ее окрестности и риски пескопроявления.

Выводы. Проведенные на основе геомеханического анализа исследования показали, что в результате изменения пластового давления исходное напряженное состояние в пласте, даже в случае изначально равномерного сжатия становится неравнокомпонентным. Следствием этого является существенное увеличение напряжений, действующих в окрестности скважин, могущее привести к разрушению ее стенок и выносу песка в скважину. Этот факт необходимо учитывать при выборе режимов эксплуатации скважин для снижения риска пескопроявлений.

Выполненные на установке ИСТНН эксперименты по физическому моделированию деформационных и фильтрационных процессов, происходящих в окрестности горизонтальных скважин Увязовского ПХГ при циклическом изменении пластового давления при закачке/отборе газа, подтвердили, что источником разрушения породы в ПЗП в первую очередь является перераспределение напряжений от горного давления в глубине пласта при изменении пластового давления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 22-11-00273.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карев В.И., Королев Д.С., Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б.* Геомеханическое и физическое моделирование деформационных процессов в пластах подземного хранилища газа при циклическом изменении пластового давления // Газовая промышленность. 2020. Спецвыпуск № 4 (808). С. 46–52.
2. *Пятахин М.В.* Геомеханические проблемы при эксплуатации скважин. М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2012. 266 с.
3. *Morita N.* Field and laboratory verification of sand-production prediction models // SPE Drilling & Completion. 1994. V. 9. № 4. P. 227–235.
<https://doi.org/10.2118/27341-PA>
4. *Башкатов А.Д.* Предупреждение пескования скважин. М.: Недра, 1981. 176 с.
5. *Врачев В.В., Шафаренко Е.Н., Шустров В.П.* Пескопроявление при эксплуатации ПХГ // Газовая промышленность. 1999. № 11. С. 62.
6. *Гасумов Р.А., Варягов С.А., Серебряков Е.П.* Причины разрушения неустойчивых коллекторов и способы удаления песчаных пробок из скважин // Проблемы капитального ремонта скважин и эксплуатации ПХГ: сб. науч. тр. СевКавНИПИгаз. Ставрополь: РИЦ ООО “СевКавНИПИгаз”, 2001. Вып. 34. С. 5–13.
7. *Динков А.В., Ланчаков Г.А.* Способ эксплуатации скважин, вскрывающих коллектора, сложенные песками и слабосцементированными песчаниками // Проблемы освоения месторождений Уренгойского комплекса: сб. науч. тр. М.: Недра, 1998. С. 330–342.
8. *Жуковский К.А., Ахметов А.А., Шарипов В.Н.* Причина пескопроявлений при добыче газа и методы их ликвидации, применяемые на Уренгойском месторождении // Проблемы освоения месторождений Уренгойского комплекса: сб. науч. тр. М.: Недра, 1998. С. 323–329.
9. *Захаров А.А., Шашков Г. Я.* Прогнозная оценка состояния призабойных зон пластов со слабосцементированными коллекторами газовых и газоконденсатных

- месторождений // Проблемы капитального ремонта скважин и эксплуатации ПХГ: сб. науч. тр. СевКавНИПИгаз. Ставрополь: РИЦ ООО "СевКавНИПИгаз", 2003. Вып. 39. С. 82–86.
10. *Мартос В.Н.* Методы борьбы с выносом песка // Обзор зарубежной литературы: серия Добыча. М.: ВНИИОУЭНГ, 1973. 112 с.
 11. *Алиев З.С., Андреев С.А., Власенко А.П.* Технологический режим работы газовых скважин. М.: Недра, 1978. 279 с.
 12. *Желтов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Известия Академии наук СССР. Отд. техн. наук. 1955. № 5. С. 3–41.
 13. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K.* Geomechanics of oil and gas wells. Springer. 2020 184 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>
 14. *E.G. Kirsch,* Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. 1898. V. 42. P. 797–807.
 15. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
 16. *Jaeger J.C., Cook N.G.W., Zimmerman R.W.* Fundamentals of rock mechanics. Malden, Mass., Oxford: Blackwell, MyiLibrary, 2007. 475 p.
 17. *Hiramatsu Y., Oka Y.,* Analysis of stress around a circular shaft or drift excavated in ground in a three dimensional stress state // J. Mining and Metallurgy Institute of Japan. 1962. V. 78. P. 93–98.
 18. *Hiramatsu Y., Oka Y.,* Determination of the stress in rock unaffected by boreholes or drifts, from measured strains or deformations // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1968. V. 5. № 4. P. 337–353.
 19. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
 20. *Лехницкий С.Г., Солдатов В.В.* Влияние положения эллиптического отверстия на концентрацию напряжений в растягиваемой ортотропной пластинке // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. 1961. № 1. С. 3–8.
 21. *Батугин С.А., Ниренбург Р.К.* Приближенная зависимость между упругими константами горных пород и параметры анизотропии // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1972. № 1. С. 7–11.
 22. *Журавлев А.Б., Устинов К.Б.* О величинах, характеризующих степень упругой анизотропии трансверсально-изотропных горных пород; роль сдвигового модуля. // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 129–140. <http://doi.org/10.1134/S0572329919040123>
 23. *Gassmann F.* Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media // Pure and Appl. Geoph. 1964. V. 58. P. 63–112.
 24. *Аннин Б.Д.* Трансверсально-изотропная модель геоматериалов // Сиб. журн. индустр. матем. 2009. 12. № 3. С. 5–14.
 25. *De Saint-Venant.* Mémoire sur la distribution des *élasticités* autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope (Deuxième article) // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1863. V. 8. P. 257–430.
 26. *Amadei B.* Rock Anisotropy and the theory of stress measurements, lecture notes in engineering Edition, Lecture notes in engineering, Springer Verlag, 1983. 500 p.
 27. *Mitouana A., Prioul R.* Closed-form approximations to borehole stresses for weakly triclinic elastic media // Int. J. Solids Struct. 2018. V. 147. P. 126–145. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.018>

28. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague-Boston. 1982. 494 p.
29. *Коваленко Ю.Ф., Устинов К.Б., Карев В.И.* Геомеханический анализ образования вывалов на стенках скважин // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 6. С. 148–163.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060125>
30. *Устинов К.Б., Карев В.И., Коваленко Ю.Ф., Барков С.О., Химуля В.В., Шевцов Н.И.* Экспериментальное исследование влияния анизотропии на ориентацию вывалов в скважинах // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 21–35.
<http://doi.org/10.31857/S0572329922600384>
31. *Karev V.I., Kovalenko Yu.F.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production // True Triaxial Testing of Rocks. Leiden: CRC Press/Balkema, 2013. P. 301–310.

FACTORS OF STABILITY OF WELLS IN RESERVOIRS OF UNDERGROUND GAS STORAGE FACILITIES

D. M. Klimov, V. I. Karev, Yu. F. Kovalenko, K. B. Ustinov

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

**e-mail: wikarev@ipmnet.ru*

Abstract – Preserving the integrity of wells and preventing sand production processes are among the key problems in the operation of underground gas storage facilities. Previously, the authors have stated that a key role in the processes of destruction and sand production is played by changes in formation pressure in the reservoir as a whole, since it has a decisive influence on the magnitude of the stresses acting in the vicinity of the wells. This thesis differs from the point of view of many researchers who associate these negative processes with a change in the stress state in the bottomhole zone of the formation caused by drawdown/overbalance in wells. The main goal of the article is to study the influence of unequal components of the initial stress state, as well as elastic and strength anisotropy of reservoir rocks on the stability of wells. It is shown that the presence of unequal components of the initial stress state and elastic anisotropy can lead to stress concentrations on the well contour that differ significantly from the isotropic case. It is also shown that in the presence of strength anisotropy, a change in the location of the points of the beginning of well destruction can be observed. The calculations performed have been confirmed by experimental studies carried out on rocks of the Uvyazovsky underground gas storage facility under conditions of true triaxial independent loading.

Keywords: stress-strain state, geomechanical modeling, true triaxial tests.

REFERENCES

1. *Karev V.I., Korolev D.S., Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B.* Geomechanical and physical modeling of deformation processes in the layers of an underground gas storage facility

- during cyclic changes in reservoir pressure // Gas Industry. 2020. Special issue 4 (808). P. 46–52. (In Russian)
2. *Pyatahin M.V.* Geomechanical problems during well operation. M.: GASPROM VNIIGAS, 2012. 266 p. (In Russian)
 3. *Morita N.* Field and Laboratory Verification of Sand-Production Prediction Models.- SPE Drilling & Completion, December 1994. P. 227–235. <https://doi.org/10.2118/27341-PA>
 4. *Bashkatov A. D.* Prevention of well sand production. M.: Nedra, 1981. (In Russian)
 5. *Vrachev V.V., Shafarenko E.N., Shustrov V.P.* Sand development during operation of UGS // Gas Industry. 1999. № 11. P. 62. (In Russian)
 6. *Gasumov R. A., Varyagov S. A., Serebryakov E. P.* Causes of destruction of unstable reservoirs and methods of removing sand plugs from wells // Problems of capital repairs of wells and operation of underground gas storage facilities: Collection of articles. Scientific tr. SevKavNIPigaz. Stavropol: RIC LLC “SevKavNIPigaz” 2001. 34. P. 5–13. (In Russian)
 7. *Dinkov A.V., Lanchakov G.A.* Method of exploitation of wells opening reservoirs composed of sands and weakly cemented sandstones // Problems of development of fields of the Urengoy complex: collection scientific tr. M. Nedra. 1998. P. 330–342. (In Russian)
 8. *Zhukovskij K.A., Akhmetov A.A., Sharipov V.N.* The cause of sand deposits during gas production and methods of their elimination used at the Urengoy field // Problems of development of fields of the Urengoy complex: collection. scientific tr. M. Nedra 1998. P. 323–329. (In Russian)
 9. *Zakharov A.A., Shashkov G.Ya.* Predictive assessment of the state of bottomhole zones of formations with weakly cemented reservoirs of gas and gas condensate fields // Problems of capital repairs of wells and operation of underground gas storage facilities: collection. scientific tr. SevKavNIPigaz. Stavropol: RIC LLC “SevKavNIPigaz”. 2003. V. 39. P. 82–86. (In Russian)
 10. *Martos V.N.* Methods of combating sand removal // Review of foreign literature: Extraction series. M.: VNIIOUENG, 1973. (In Russian)
 11. *Aliiev Z.S., Andreev S.A., Vlasenko A.P.* Technological operating mode of gas wells. M.: Nedra, 1978. (In Russian)
 12. *Zheltoy YU.P., Khristianovich S.A.* On hydraulic fracturing of an oil-bearing formation // Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Dept. tech. Sci. 1955. № 5. P. 3–41. (In Russian)
 13. *Karev V., Kovalenko Y., Ustinov K.* Geomechanics of Oil and Gas Wells. Springer. 2020 184 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-26608-0>
 14. *Kirsch E.G.* Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. 1898. V. 42. P. 797–807.
 15. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity, third ed., McGraw-Hill, 1970.
 16. *Jaeger J.C., Cook N.G.W., Zimmerman R.W.* Fundamentals of rock mechanics. Malden, Mass., Oxford: Blackwell, MyiLibrary, 2007. 475 p.
 17. *Y. Hiramatsu, Y. Oka,* Analysis of stress around a circular shaft or drift excavated in ground in a three dimensional stress state, Journal of Mining and Metallurgy Institute of Japan. 1962. V. 78. P. 93–98.
 18. *Y. Hiramatsu, Y. Oka,* Determination of the stress in rock unaffected by boreholes or drifts, from measured strains or deformations, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1968. V. 5. № 4. P. 337–353.
 19. *Lekhnitskii S.R.* Theory of Elasticity of An Anisotropic Body, Dover Publications Ins, Mineola, NY, 1981.

20. *Lekhnickij S.G., Soldatov V.V.* Influence of the position of an elliptical hole on the stress concentration in a stretched orthotropic plate. *Izv. Academy of Sciences of the USSR, OTN, Mechanics and mechanical engineering*. 1961. № 1. P. 3–8. (In Russian)
21. *Batugin S.A., Nirenburg R.K.* Approximate relationship between the elastic constants of rocks and anisotropy parameters // *Physico-technical problems of mining minerals*. 1972. № 1. P. 7–11. (In Russian)
22. *Zhuravlev A.B., Ustinov K.B.* On Values Characterizing the Degree of Elastic Anisotropy of Transversely Isotropic Rocks; Role of Shear Modulus // *Mech. Solids*. 54 (6). P. 958–967. <https://doi.org/10.1134/s0572329919040123>.
23. *Gassmann F.* Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media // *Pure and Appl. Geoph.* 1964. 58. P. 63–112.
24. *Annin B.D.* Transversal isotropic model of geomaterials // *Sib. J. Industrial Math.* 2009. V. 12. № 3. P. 5–14. (In Russian)
25. *De Saint-Venant* Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contecture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope (Deuxième article) // *Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 8. 1863. P. 257–430.
26. *Amadei B.* Rock Anisotropy and the theory of stress measurements, lecture notes in engineering Edition, Lecture notes in engineering. Springer Verlag, 1983.
27. *Mimouna A., Prioul R.* Closed-form approximations to borehole stresses for weakly triclinic elastic media // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. V. 147. P. 126–145.
28. *Mura T.* *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague-Boston. 1982.
29. *Kovalenko Yu.F., Ustinov K.B., Karev V.I.*, Geomechanical Analysis of the Wellbore Wall Breakouts Formation. *Mech. Solids*. 2022. V. 57. № 6. P. 1403–1415. <https://doi.org/10.3103/s0025654422060243>
30. *Ustinov K.B., Karev V.I., Kovalenko Yu.F., Barkov S.O., Khimulia V.V., Shevtsov N.I.* Experimental Study of the Effect of Anisotropy on the Orientation of Breakouts in Wells. *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 3. P. 685–696. <https://doi.org/10.3103/s0025654422600799>
31. *Karev V.I., Kovalenko Yu.F.* Triaxial loading system as a tool for solving geotechnical problems of oil and gas production // *True Triaxial Testing of Rocks*. Leiden: CRC Press/Balkema, 2013. P. 301–310.

УДК. 539.374

О КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ СОЕДИНЕНИЯ ПЛАСТИН ВНАХЛЕСТ

© 2024 г. В. В. Глаголев^{а, *}, А. И. Лутхов^{а, **}

^аТулский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: vadim@tsu.tula.ru, **e-mail: tip460@mail.ru

Поступила в редакцию 30.11.2023 г.

После доработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 18.12.2023 г.

На основе экспериментальных данных разрушения адгезионного слоя, сопрягающего по заданному участку две пластины, и соответствующего расчетной схеме известного аналитического решения рассматриваются варианты критерия разрушения, учитывающего гидростатическое давление и инвариантные составляющие упругой энергии. Исследуются одно- и двухпараметрические критерии, в которых произведения энергии деформации объема и формы на толщину слоя формируют критический поток удельной упругой энергии. Показано, что разрыхление тонкого адгезионного слоя при квазилинейном отношении энергии деформации объема двухпараметрическом критерии наиболее точно описывает критическое состояние.

Ключевые слова: линейный параметр, энергетическое произведение, энергии деформации объема и формы, соединение внахлест

DOI: 10.31857/S1026351924030079, EDN: UIBBNN

1. Введение. Прогнозирование прочности адгезионных соединений внахлест (single-lap joints (SLJ)) связано с определенной моделью представления адгезионного слоя и его взаимодействия с сопрягаемыми материалами. Как правило адгезионные слои имеют реальные толщины при существенных различиях в механических свойствах с несущими слоями композита. В этом случае по границам сопряжения в рамках решения дву- и трехмерных задач линейной теории упругости возможны сингулярные напряжения [1–3]. Одним из подходов решения соответствующих задач, наряду с методами механики квазихрупкого разрушения [4–6], является метод конечных элементов [7], который может быть рассмотрен в совокупности с когезионными элементами [8, 9], использующими билинейный закон распределения взаимодействия в когезионной зоне. Отмечено, что различные законы когезионного взаимодействия существенно влияют на распределение напряженно-деформированного состояния [10].

Наряду с решениями дву- и трехмерных задач для оценки напряженного состояния в адгезионных слоях применяются аналитические решения, построенные на упрощающих гипотезах теории пластин. Аналитические решения нахождения напряженного состояния в адгезионном слое конечной толщины рассмотрены в работах [11–13]. Сравнение ряда моделей приведено в [14]. Отличительной особенностью данных решений является регулярное распределение поля напряжений по длине адгезива при его конечной толщине. Отмечено хорошее соответствие решения [12] конечно-элементному решению двумерной задачи [15], где в адгезионном слое наряду со сдвиговыми напряжениями присутствуют и отрывные напряжения.

В работе [16] для нахождения критического состояния упругого адгезионного слоя при смешанной моде нагружения I+II предложено учитывать влияние гидростатического давления и инвариантных составляющих упругой энергии в критическом состоянии. Отмечено, что влияние гидростатического давления на переход в пластическое состояние рассматривалось в рамках различных критериев [17–21], связанных со вторым инвариантом тензора напряжений или максимальными касательными напряжениями, и исследовалось экспериментально [22]. Критерий работы [16] основывался на представлении J-интеграла при хрупком разрушении слоя конечной толщины в виде произведения толщины слоя и накопленной упругой энергии [23] и включал в себя один параметр разупрочнения. При малой толщине адгезионного слоя, относительно толщин сопрягаемых несущих материалов, предполагалось совпадение критического значения J-интеграла в виде [23] экспериментально найденным значениям J-интегралов для мод нагружения I (G_{IC}) и II (G_{IIC}), по которым рассчитывался параметр разупрочнения для состояния нормального разрыва адгезива. В этом случае критические значения J-интегралов для смешанных мод нагружения I+II (G_{I+IIC}) лежат в диапазоне от G_{IC} до G_{IIC} . Однако для ряда случаев экспериментальные значения G_{I+IIC} могут быть меньше значения G_{IC} [24]. В данной работе предполагается рассмотреть двухпараметрические критерии разрушения тонкого адгезионного слоя при смешанной моде нагружения, где параметры определяются из анализа критического состояния нормального разрыва и смешанной моды нагружения адгезионного слоя, а также значений G_{IC} и G_{IIC} . Смешанная мода нагружения рассматривалась в рамках четырех SLJ соединений согласно экспериментальным данным работы [25]. При этом данные одного эксперимента использовались для нахождения параметров конкретного адгезива, а для других экспериментов проверялась корректность критериев. Для нахождения напряженного состояния в слое использовалось аналитическое решение [15], полученное в рамках теории изгиба пластин для сопрягаемых слоев материалов.

2. Постановка задачи. На рис. 1 две одинаковых пластины 1 и 2 сопрягаются адгезивом 3 на участке длиной l . Правый торец пластины 2 жестко закреплён от перемещений, а на левый действует горизонтальная сила $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_1$.

Решение [15] для средних по толщине слоя напряжений, предполагая слой изотропным, запишем в следующем виде:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{Q_1}{8c} \left[\frac{\beta c}{h} (1+3K) \frac{\cosh(\beta X/h)}{\sinh(\beta c/h)} + 3(1-K) \right]. \quad (2.1)$$

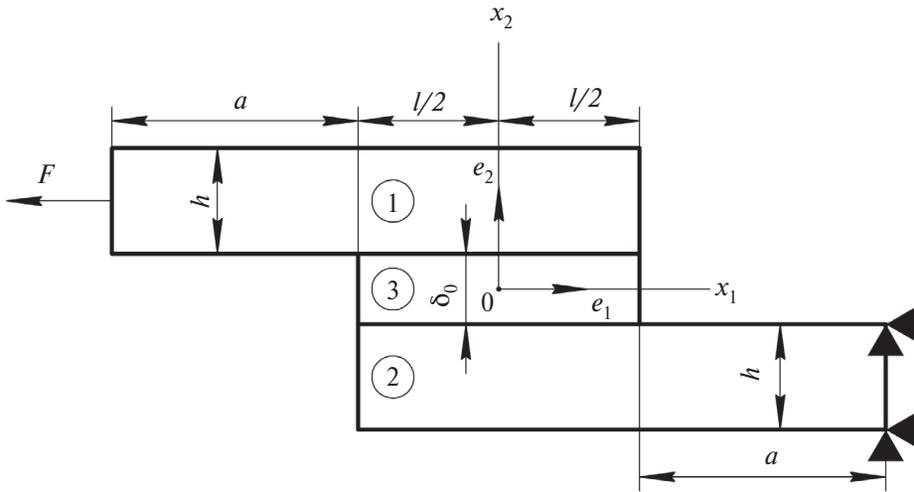


Рис. 1. Схема нагружения SLJ соединения.

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{Q_1 h}{c^2 \Delta} \left[\left(R_2 \lambda^2 \frac{K}{2} + \lambda K' \cosh \lambda \cos \lambda \right) \cosh \frac{\lambda X}{c} \cos \frac{\lambda X}{c} + \left(R_1 \lambda^2 \frac{K}{2} + \lambda K' \sinh \lambda \sin \lambda \right) \sinh \frac{\lambda X}{c} \sin \frac{\lambda X}{c} \right], \quad (2.2)$$

где

$$X \in [-0.5l; 0.5l], \quad w = \sqrt{\frac{E_3 l^2}{E h \delta_0}}, \quad c = 0.5l.$$

$$K = \frac{\cosh(U_2 c) \sinh(U_1 a)}{\sinh(U_1 a) \cosh(U_2 c) + 2\sqrt{2} \cosh(U_1 a) \sinh(U_2 c)},$$

$$U_1 = \frac{2}{h} \sqrt{(1-\nu^2) \frac{3F}{E h B}}, \quad U_2 = \frac{\sqrt{2} U_1}{4}, \quad K' = K c U_1, \quad \beta = 2 \sqrt{\frac{E_3 h}{E \delta_0}}, \quad \gamma = \left(\frac{6 E_3 h}{E \delta_0} \right)^{1/4},$$

...

$$R_1 = \frac{\cosh(\lambda l) \sin(\lambda l)}{\cosh(\lambda l) \cos(\lambda l) + \sinh(\lambda l) \sin(\lambda l)}, \quad R_2 = \frac{\cosh(\lambda l) \sin(\lambda l)}{\cosh(\lambda l) \cos(\lambda l) - \sinh(\lambda l) \sin(\lambda l)}$$

$$\Delta = 0.5(\sinh(2\lambda) + \sin(2\lambda)), \quad Q_1 = F/B,$$

где E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона пластин; E_3 – модуль упругости адгезионного слоя; B – ширина пластины в направлении, ортогональном плоскости $x_1 O x_2$.

Согласно работе [25], для материала пластин 1 и 2 использовался алюминиевый сплав Al6082-T651 со следующими механическими характеристиками $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$. Для материала адгезива была выбрана смола Araldite AV138 с механическими свойствами из работы [26] $E_3 = 4.89$ ГПа. Критические значения для J-интегралов смолы рассматриваются согласно заявленным производителем и экспериментальным данным работы [24] $G_{IC} = 200(140)$ Н/м до $G_{IIIC} = 380(352)$ Н/м, где значения в скобках брались из статьи [24]. Общая длина образца $2a + l$ бралась постоянной, равной 180 мм, $B = 25$ мм, длина сопрягаемого адгезивом участка изменялась от $l = 12.5$ мм до $l = 50$ мм с приращением $\Delta l = 12.5$ мм, толщина пластин $h = 3$ мм, толщина слоя $\delta_0 = 0.2$ мм. Значения внешней критической нагрузки при рассматриваемых длинах сопряжения равнялись соответственно: $F_1 = 5900$ Н, $F_2 = 7100$ Н, $F_3 = 8500$ Н, $F_4 = 9300$ Н, где индекс определяет порядковый номер эксперимента для определенной длины сопрягаемого адгезивом участка.

3. Формулировка двухпараметрического критерия. Предельное состояние адгезионного слоя рассмотрено в рамках следующих критериев:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\beta \hat{\phi}^\sigma + \hat{\phi}^\tau + \gamma \text{sign}(\bar{\sigma}) \hat{\phi}^\sigma \hat{\phi}^\tau = G_{IIIC}, \quad (3.1)$$

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\hat{a}_1 \hat{\phi}^\sigma + \hat{\phi}^\tau + \tilde{a}_1 \text{sign}(\bar{\sigma}) (\hat{\phi}^\sigma)^2 = G_{IIIC}, \quad (3.2)$$

где $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^\sigma + \bar{\varphi}^\tau = (3\bar{\sigma}^2 + \bar{\tau}^2)/(2E_3)$ – представление средней по толщине адгезива плотности энергии упругой энергии через инвариантные составляющие плотности энергии объема и формы при нулевом коэффициенте Пуассона; $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33})/3$ – гидростатическое давление; $\bar{\tau}^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$ – свертка девиаторных составляющих тензора средних напряжений в слое;

$$\hat{\phi}^\sigma = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (\delta_0 \bar{\varphi}^\sigma), \quad \hat{\phi}^\tau = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} (\delta_0 \bar{\varphi}^\tau) -$$

предельные значения энергетических произведений объема и формы, которые будем предполагать независимыми величинами от параметра δ_0 ; β , β_1 , γ , γ_1 – параметры, учитывающие “разрыхление” адгезива.

Критерий (3.1) является квазилинейным, а критерий (3.2) предполагает квадратичную зависимость относительно энергетического произведения объема.

В критическом состоянии моды II, когда $\bar{\varphi}_{IIIC}^\sigma = 0$, из (3.1) и (3.2) приходим к тождеству: $\hat{\phi}_{IIIC}^\tau = G_{IIIC}$. Для критического состояния моды I из (3.1) имеем:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\beta \hat{\phi}_{IC}^\sigma + \hat{\phi}_{IC}^\tau + \gamma \text{sign}(\bar{\sigma}) \hat{\phi}_{IC}^\sigma \hat{\phi}_{IC}^\tau = G_{IIIC}, \quad (3.3)$$

а для критического состояния смешанной моды I+II:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma}))\beta \hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma + \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau + \gamma \text{sign}(\bar{\sigma}) \hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau = G_{IIIC}. \quad (3.4)$$

Приняв во внимание, что при нагружении по моде I и смешанной моде I+II гидростатическое напряжение положительно, а $\hat{\phi}_{IC}^\sigma + \hat{\phi}_{IC}^\tau = G_{IIIC}$, $\hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma + \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau = G_{I+II,C}$ из (3.3) и (3.4) приходим к системе линейных уравнений относительно параметров “разрыхления”:

$$\beta \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} + \gamma \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{IC}^{\tau} = G_{IIIC} - G_{IC}, \quad (3.5)$$

$$\beta \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} + \gamma \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} = G_{IIIC} - G_{I+II,C}. \quad (3.6)$$

Решение системы (3.5) и (3.6) запишем в виде:

$$\beta = \frac{\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} (G_{IIIC} - G_{IC}) - \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{IC}^{\tau} (G_{IIIC} - G_{I+II,C})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}, \quad (3.7)$$

$$\gamma = \frac{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{I+II,C}) - \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{IC})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\tau} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}. \quad (3.8)$$

Аналогичным образом определяем постоянные в критерии (3.2):

$$\beta_1 = \frac{\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{IC}) - \hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{IC}^{\tau} (G_{IIIC} - G_{I+II,C})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}, \quad (3.9)$$

$$\gamma_1 = \frac{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{I+II,C}) - \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (G_{IIIC} - G_{IC})}{\hat{\phi}_{IC}^{\sigma} \hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} (\hat{\phi}_{I+II,C}^{\sigma} - \hat{\phi}_{IC}^{\tau})}. \quad (3.10)$$

Наряду с критериями (3.1) и (3.2) из работы [16] приведен однопараметрический критерий разрушения адгезионного слоя:

$$(1 + \text{sign}(\bar{\sigma})\beta') \hat{\phi}^{\sigma} + \hat{\phi}^{\tau} = G_{IIIC}, \quad (3.11)$$

где $\beta' = (G_{IIIC} - G_{IC}) / \hat{\phi}_{IC}^{\sigma}$ – параметр, характеризующий “разрыхление” адгезива.

Для нахождения постоянных $\beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1, \beta'$ необходимы данные критических значений J-интегралов для мод нагружения I, II. Кроме того, при нахождении $\beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1$ необходимы значения предельных энергетических произведений энергий объема и формы для критической внешней нагрузки при нагружении по моде I и смешанной моде I+II. Для постоянной β' наряду с характеристиками G_{IC} и G_{IIIC} достаточно знание предельного значения энергетического произведения энергии объема для критической внешней нагрузки при нагружении адгезива по моде I.

4. Нахождение критических состояний. Для нахождения напряженного состояния в тонком адгезионном слое при его смешанной моде нагружения воспользуемся решением [12] (2.1), (2.2). При определении энергетических произведений при нормальном разрыве адгезива принимаем решение в рамках теории пластин, полученное в работе [27] на основе деформирования ДКБ-образца, консоли которого сопрягаются адгезивом толщиной δ_0 . В силу того, что в решении [12] отсутствуют напряжения вдоль оси Ox_1 , напряженное состояние в адгезиве при нормальном разрыве будет определяться одной компонентой тензора напряжений. Значение напряжения в вершине адгезионного слоя будет равно:

$$\bar{\sigma}_{22} = \frac{2(Q_2)\sqrt{6(1+\nu)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E}} \left(\frac{a_1}{h} \sqrt{(1-\nu)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad (4.1)$$

где a_1, h – длина свободной консоли и ее толщина в ДКБ-образце.

Решение (4.1) получено при допущении $\delta_0/h \ll 1$ и приводит к следующему значению для J-интеграла:

$$G_I = \frac{\bar{\sigma}_{22}^2}{2E_3} \delta_0 = \frac{12Q_2^2(1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \left(\frac{h}{a}\right)\right)^2, \quad (4.2)$$

которое совпадает с выражением, полученным в работах [28, 29], и предполагает существование относительно малого значения толщины слоя, при котором значения энергетических произведений не зависят от толщины слоя. Для случая рассматриваемого диапазона малых значений относительных толщин слоя напряжение на его торце в критическом состоянии при нормальном разрыве может быть найдено в виде:

$$\bar{\sigma}_{22} = \sqrt{\frac{2G_{IC}E_3}{\delta_0}}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) приходим к выражениям для энергетических произведений при нормальном разрыве слоя: $\hat{\phi}_{IC}^\sigma = G_{IC}/3$, $\hat{\phi}_{IC}^\tau = 2G_{IC}/3$. В этом случае параметр разупрочнения в (3.11) будет равен $\beta' = 3(G_{IIIC}/G_{IC} - 1)$.

Для нахождения значений (3.7)–(3.10) воспользуемся решениями (2.1), (2.2) для нахождения величин $\hat{\phi}_{I+II,C}^\sigma, \hat{\phi}_{I+II,C}^\tau$ с учетом критической нагрузки F^1 . При этом будем использовать как толщину адгезива, заданную в экспериментальном образце, так и толщину на два порядка меньшую при значениях G_{IC} и G_{IIIC} согласно заявленным производителем и работы [24]. Рассмотрим погрешности $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ выполнения критериев (3.1), (3.2), (3.11) в виде отношения расчетного значения правой части соответствующего критерия к величине G_{IIIC} . Результаты расчетов при значении линейного параметра δ_0 , равном 200 мкм, поместим в табл. 1, а для величины, равной 2 мкм, в табл. 2. Значения в скобках соответствуют величинам G_{IC} и G_{IIIC} , полученным в работе [24].

Таблица 1. Погрешности выполнения критериев разрушения при $\delta_0 = 200$ мкм

F (Н)	5900	7100	8500	9300
Δ_1	1	1.01(0.99)	1.03(0.96)	0.96(0.98)
Δ_2	1	1.05(1.06)	1.14(1.16)	1.06(0.99)
Δ_3	1.41(1.81)	1.46(1.87)	1.55(1.97)	1.46(1.84)

И результатов табл. 1 и табл. 2 видим, что двухпараметрические критерии наиболее близки к экспериментальным данным по сравнению с однопараметрическим критерием. При этом квазилинейный относительно энергии деформации объема двухпараметрический критерий (3.1) имеет меньшую

Таблица 2. Погрешности выполнения критериев разрушения при $\delta_0 = 2$ мкм

F (Н)	5900	7100	8500	9300
Δ_1	1	1.02(0.99)	1.05(0.99)	1.02(0.99)
Δ_2	1	1.04(1.04)	1.11(1.11)	1.05(1.01)
Δ_3	1.23(1.58)	1.27(1.62)	1.34(1.69)	1.27(1.58)

погрешность по сравнению с критерием (3.2), которая при определенных данных критических значений J -интегралов не превосходит 1%. Уменьшение значения линейного параметра стабилизирует расчетные значения и уменьшает погрешность, что оказалось более существенным для однопараметрического критерия.

5. Заключение. Рассмотрены двухпараметрические критерии, учитывающие влияние инвариантных составляющих плотности упругой энергии и гидростатическое давление на разрушение тонких адгезионных слоев. На основе аналитического решения и критических значений J -интегралов для моды I и II адгезива Araldite AV138 найдены коэффициенты для предложенных критериев. По известным данным разрушения SLJ соединений проведено тестирование предложенных критериев для смешанной моды нагружения I+II. Показано их хорошее соответствие экспериментальным результатам, при этом квазилинейный относительно плотности энергии деформации объема критерий наиболее близко описывает критическое состояние.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Steven R.A., Stefan H. Strength prediction of beams with bi-material butt-joints // Eng. Fract. Mech. 2003. V. 70. № 12. P. 1491–1507. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00149-2](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00149-2)
2. Labossiere P.E.W., Dunn M.L. Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49. № 3. P. 609–634. [https://doi.org/10.1016/s0022-5096\(00\)00043-0](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(00)00043-0)
3. Wu Z., Tian S., Hua Y., Gu X. On the interfacial strength of bonded scarf joints // Eng. Fract. Mech. 2014. V. 131. P. 142–149. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.07.026>
4. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. Случай сдвиговой трещины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 2. С. 131–142. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.2.09>
5. Ustinov K.B., Massabo R., Lisovenko D.S. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // Engineering Failure Analysis. 2020. V. 110. 104410. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
6. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского университета, 2001. 632 с.
7. Nakano N., Sekiguchi Y., Sawa T. FEM stress analysis and strength prediction of scarf adhesive joints under static bending moments // Int. J. Adhes. Adhes. 2013. V. 44. P. 166–173. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.010>

8. *Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M.* Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the simulations // *The Journal of Adhesion*. 2012. V. 88 № 4–6. P. 513–533. <https://doi.org/10.1080/00218464.2012.660834>
9. *De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M.* Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 51. № 5 P. 1123–1131. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009>
10. *Panettieri E., Fanteria D., Danzi F.* Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Compos. Struct.* 2016. V. 137. P. 140–147. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.018>
11. *Volkersen O.* Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung*. 1938. V. 15. P. 41–47.
12. *Goland M., Reissner E.* The stresses in cemented joints // *J. Appl. Mech.* 1944. V. 11. № 1. P. 17–27. <https://doi.org/10.1115/1.4009336>
13. *Adams R.D., Peppiatt N.A.* Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // *J. Strain Anal.* 1974. V. 9. № 3. P. 185–196. <https://doi.org/10.1243/03093247V093185>
14. *da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K.* Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009. V. 29. № 3. P. 331–341. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007>
15. *Carpenter W.C.* Goland and Reissner were correct // *J. Strain Anal. Eng. Design.* 1989. V. 24. № 3. P. 185–187. <https://doi.org/10.1243/03093247V243185>
16. *Глаголев В.В., Маркин А.А.* Предельные состояния адгезионных слоев при комбинированном нагружении // *Изв. РАН. МТТ*. 2023. № 6. С. 39–46. <https://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
17. *Novozhilov V.V.* On plastic cavitation // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. V. 29. № 4. P. 811–819. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90090-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90090-0)
18. *Prandtl L.* Spannungsverteilung in plastischen korpern // *Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech.* 1924. P. 43–54.
19. *Guest J.J.* Yield surface in combined stress // *Phil. Mag. Ser.7*. 1940. V. 30. P. 349–369.
20. *Schleicher F.* Der spannungszustand an der flie遝grenze (Plastizitatsbedingung) // *ZAMM*. 1926. V. 6. № 3. P. 199–216. <https://doi.org/10.1002/zamm.19260060303>
21. *Толоконников Л.А., Толоконников О.Л., Султанов И.С.* Осесимметричные пластические деформации при условии пластичности, зависящем от гидростатического напряжения // *Прикладная механика*. 1976. Т. XII. № 8. С. 43–48.
22. *Толоконников О.Л.* Установка для испытаний трубчатых образцов материалов в среде высокого давления // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1985. № 3. С. 185–188.
23. *Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A.* Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>
24. *Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G.* Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *Int. J. Fract.* 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
25. *Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J.* Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // *Int. J. Fract.* 2021. V. 232. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00594-z>
26. *De Sousa C.C.R.G., Campilho R.D.S.G., Marques E.A.S., Costa M., da Silva L.F.M.* Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L*. 2017. V. 231. № 1–2. P. 210–223.

- <https://doi.org/10.1177/1464420716675746>
27. *Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.* On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // PNRPU Mechanics Bulletin. 2022. № 3. P. 116–124. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
 28. *Bruno D., Greco F., Lonetti P.* Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // Mech. Adv. Mater. Struct. 2005. V. 12. № 4. P. 285–304. <https://doi.org/10.1080/15376490590953563>
 29. *Bruno D., Greco F.* Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // Int. J. Solids Struct. 2001. V. 38. № 50–51. P. 9149–9177. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00179-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00179-2)

ON THE CRITERION OF STRENGTH OF SINGLE-LAP PLATE JOINTS

V. V. Glagolev^{a, *}, A. I. Lutkhov^{a, **}

^a Tula State University, Tula, Russia

*e-mail: vadim@tsu.tula.ru, **e-mail: tip460@mail.ru

Abstract – On the basis of experimental data on the fracture of an adhesive layer mating two plates along a given section and the known analytical solution corresponding to the calculation scheme, variants of the fracture criterion that take into account hydrostatic pressure and invariant components of elastic energy are considered. One- and two-parameter criteria are investigated, in which the products of volume and shape deformation energy per layer thickness form the critical flow of elastic energy density. It is shown that the loosening of a thin adhesive layer under a two-parameter criterion quasilinear with respect to the volume strain energy most accurately describes the critical state.

Keywords: linear parameter, energy product, volume and shape deformation energies, single-lap joint

REFERENCES

1. *Steven R.A., Stefan H.* Strength prediction of beams with bi-material butt-joints // Eng. Fract. Mech. 2003. V. 70. № 12. P. 1491–1507. [https://doi.org/10.1016/s0013-7944\(02\)00149-2](https://doi.org/10.1016/s0013-7944(02)00149-2)
2. *Labossiere P.E.W., Dunn M.L.* Fracture initiation at three-dimensional bimaterial interface corners // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49. № 3. P. 609–634. [https://doi.org/10.1016/s0022-5096\(00\)00043-0](https://doi.org/10.1016/s0022-5096(00)00043-0)
3. *Wu Z., Tian S., Hua Y., Gu X.* On the interfacial strength of bonded scarf joints // Eng. Fract. Mech. 2014. V. 131. P. 142–149. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.07.026>
4. *Ustinov K.B.* On delamination of a stripe along the boundary between two elastic layers. Part 2. Case of shear crack // PNRPU Mechanics Bulletin. 2016. № 2. P. 131–142. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.2.09>

5. *Ustinov K.B., Massabo R., Lisovenko D.S.* Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip. Analytical solution // *Engineering Failure Analysis*. 2020. V. 110. 104410. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104410>
6. *Astafiev V.I., Radayev Y.N., Stepanova L.V.* Non-linear fracture mechanics. Samara: Samara State University publishing house, 2001. 632 p.
7. *Nakano N., Sekiguchi Y., Sawa T.* FEM stress analysis and strength prediction of scarf adhesive joints under static bending moments // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2013. V. 44. P. 166–173. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.010>
8. *Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M.* Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the simulations // *The Journal of Adhesion*. 2012. V. 88(4-6). P. 513–533. <https://doi.org/10.1080/00218464.2012.660834>
9. *De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M.* Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading // *Int. J. Solids Struct.* 2014. V. 5. P. 1123–1131. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.0>
10. *Panettieri E., Fanteria D., Danzi F.* Delaminations growth in compression after impact test simulations: Influence of cohesive elements parameters on numerical results // *Composite Structures*. 2016. V. 137. P. 140–147. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.018>
11. *Volkersen O.* Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten nietverbindungen mit konstanten laschenquerschnitten // *Luftfahrtforschung*. 1938. V. 15. P. 41–47.
12. *Goland M., Reissner E.* The stresses in cemented joints // *J. Appl. Mech.* 1944. V. 11 (1). P. 17–27. <https://doi.org/10.1115/1.4009336>
13. *Adams R.D., Peppiatt N.A.* Stress analysis of adhesive-bonded lap joints // *Journal of Strain Analysis*. 1974. V. 9. № 3. P. 185–196. <https://doi.org/10.1243/03093247V093185>
14. *da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K.* Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study // *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009. V. 29 (3). P. 331–341. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007>
15. *Carpenter W.C.* Goland and Reissner were correct // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1989. V. 24. № 3. P. 185–187. <https://doi.org/10.1243/03093247V243185>
16. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Limit states of adhesive layers under combined loading // *Mechanics of Solid*. 2023. № 6. P. 39–46. <https://doi.org/10.31857/S0572329923600019>
17. *Novozhilov V.V.* On plastic cavitation // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. V. 29(4). P. 811–819. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90090-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90090-0)
18. *Prandtl L.* Spannungsverteilung in plastischen korpern // *Proc. 1st Internat. Congr. Appl. Mech.* 1924. P. 43–54.
19. *Guest J.J.* Yield surface in combined stress // *Phil. Mag. Ser. 7*. 1940. V. 30. P. 349–369.
20. *Schleicher F.* Der spannungszustand an der fließgrenze (Plastizitätsbedingung) // *ZAMM*. 1926. V. 6 (3). P. 199–216.
21. *Tolokonnikov L.A., Tolokonnikov O.L., Sultanov I.S.* Axisymmetric plastic deformations under the condition of plasticity depending on hydrostatic stress // *International applied mechanics*. 1976. V. XII. № 8. P. 43–48.
22. *Tolokonnikov O.L.* Installation for testing tubular samples of materials in a high-pressure environment // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*. 1985. № 3. P. 185–188.
23. *Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A.* Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>

24. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *Int. J. Fract.* 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
25. Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints // *Int. J. Fract.* 2021. V. 232. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00594-z>
26. De Sousa C.C.R.G., Campilho R.D.S.G., Marques E.A.S., Costa M., da Silva L.F.M. Overview of different strength prediction techniques for single-lap bonded joints // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part L.* 2017. V. 231. P. 210–223. <https://doi.org/10.1177/1464420716675746>
27. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // *PNRPU Mechanics Bulletin.* 2022. № 3. P. 116–124. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
28. Bruno D., Greco F., Lonetti P. Computation of energy release rate and mode separation in delaminated composite plates by using plate and interface variables // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2005. V. 12. № 4. P. 285–304. <https://doi.org/10.1080/15376490590953563>
29. Bruno D., Greco F. Mixed-mode delamination in plates: a refined approach // *Int. J. Solids Struct.* 2001. V. 38. № 50–51. P. 9149–9177. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00179-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00179-2)

УДК 531.36

РЕЗОНАНСНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА С ШАРОВЫМ ДЕМПФЕРОМ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

© 2024 г. Н. И. Амелькин^{а, *}

^аМосковский физико-технический институт, Москва, Россия

*e-mail: namelkin@mail.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г.

После доработки 16.12.2023 г.

Принята к публикации 18.12.2023 г.

Для спутника с шаровым демпфером изучается влияние внутренней диссипации на вращательное движение в центральном гравитационном поле. Получены уравнения вращательного движения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите. Для случая круговой орбиты с использованием метода осреднения исследованы пространственные резонансные вращения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером.

Ключевые слова: гравитационное поле, спутник с шаровым демпфером, метод осреднения, эволюционные уравнения, пространственные резонансные вращения на круговой орбите

DOI: 10.31857/S1026351924030082, EDN: UHYFQF

1. Введение. Данная работа является продолжением работ автора [1–8] по исследованию влияния внутренней диссипации на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле. В указанных работах для случая круговой орбиты подробно исследованы стационарные вращения спутника с демпфером и построены осредненные уравнения второго приближения, описывающие эволюцию вращательного движения спутника, в том числе и для случая, когда спутник (планета Земля) движется в поле двух притягивающих центров (Солнца и Луны) [7]. В работе [8] исследованы плоские резонансные и нерезонансные вращения спутника с демпфером на эллиптической орбите.

В данной работе исследуются резонансные эффекты в пространственных вращениях спутника с демпфером в гравитационном поле. Наличие таких эффектов обнаружено по результатам численного интегрирования уравнений движения спутника как на круговой, так и на эллиптической орбите. Эти резонансные эффекты обусловлены синхронизацией между вращательным движением спутника и движением его центра масс, причем проявляются они своеобразно: каждое резонансное вращение спутника с демпфером в гравитационном поле представляет собой

эволюционирующий процесс, в котором величина угловой скорости спутника на протяжении всего процесса остается практически неизменной, кратной угловой скорости орбитального базиса, а ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты.

Следует отметить, что анализ пространственных резонансных вращений спутника с демпфером представляет собой существенно более сложную задачу, чем анализ нерезонансных вращений. Здесь для аналитического обоснования существования и устойчивости резонансных вращений приходится использовать переменные, в которых уравнения движения спутника гораздо сложнее, чем те уравнения, с помощью которых исследовались нерезонансные вращение.

2. Уравнения вращательного движения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите в проекциях на оси базиса Кенига. Рассматривается спутник (планета, как спутник Солнца), состоящий из несущего твердого тела (оболочки) и внутреннего ядра, представляющего собой однородный шар, при относительных перемещениях которого возникает демпфирующий момент сил. Пусть $Oe_1e_2e_3$ – связанный с оболочкой базис главных центральных осей инерции всего спутника. Обозначим через $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ главный центральный тензор инерции всего спутника, а через I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси.

Действующий на спутник гравитационный момент определяется формулой [9]:

$$\mathbf{M}_g = 3k \mathbf{R} \times \mathbf{J} \mathbf{R} / R^5, \quad (2.1)$$

где $k = \gamma M$ – постоянная тяготения, γ – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела (Солнца), \mathbf{R} – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения с центром масс спутника.

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ вектор абсолютной угловой скорости оболочки, а через $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости демпфера. Полагаем, что действующий на демпфер диссипативный момент сил пропорционален относительной угловой скорости демпфера и определяется формулой:

$$\mathbf{M}_d = -\tilde{\mu} I (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mu}$ – коэффициент вязкого трения между оболочкой и демпфером.

Пусть центр масс спутника движется по эллиптической орбите. Оси базиса Кенига $Oi_1i_2i_3$ выберем так, чтобы ось i_3 совпадала с нормалью к плоскости орбиты, а ось i_1 – с направлением на перигецентр орбиты. Обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{R}/R$ единичный вектор, сонаправленный с радиус-вектором центра масс спутника, а через ν – истинную аномалию – угол между векторами \mathbf{r} и i_1 (рис. 1). Тогда будем иметь $\mathbf{r} = i_1 \cos \nu + i_2 \sin \nu$.

В качестве безразмерного времени будем использовать среднюю аномалию $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 – средняя угловая скорость орбитального базиса, определяемая формулой:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{a^3} \right)^{1/2} = \left(\frac{k(1-e^2)^3}{p^3} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

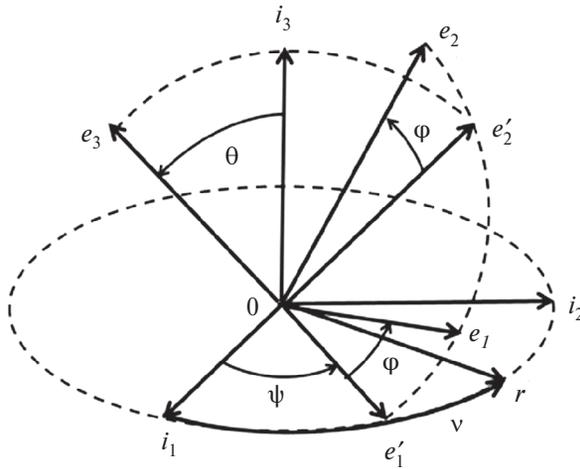


Рис. 1. Углы Эйлера.

здесь a – большая полуось орбиты спутника, p – параметр, e – эксцентриситет. Введем переменные \mathbf{U} , \mathbf{W} , \mathbf{L} и \mathbf{K} согласно формулам:

$$\mathbf{U} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_0}, \quad \mathbf{W} = \frac{\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}}{\omega_0}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\mathbf{U}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{I}\mathbf{W}, \tag{2.4}$$

где \mathbf{U} – безразмерная угловая скорость оболочки, \mathbf{W} – безразмерная относительная угловая скорость демпфера, \mathbf{L} – приведенный кинетический момент переносного движения спутника, \mathbf{K} – приведенный кинетический момент относительного движения демпфера. Обозначим штрихом производную по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. Используя теорему об изменении кинетического момента для всего спутника и для демпфера, получим динамические уравнения вращательного движения спутника в следующем виде:

$$\mathbf{L}' + \mathbf{I}\mathbf{W}' = \mathbf{m}_g, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{W}' + \mathbf{U}' = -\mu\mathbf{W}, \quad \mu = \tilde{\mu}/\omega_0, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{m}_g = \mathbf{M}_g/\omega_0^2$ – приведенный гравитационный момент, а μ – безразмерный коэффициент вязкого трения.

Закон изменения истинной аномалии описывается уравнением:

$$v' = \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \tag{2.7}$$

Ниже будем рассматривать случай динамически симметричного спутника, “сплюснутого” вдоль оси симметрии: $A = B < C$. Пусть $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ – единичный вектор оси симметрии. В этом случае гравитационный момент \mathbf{m}_g записывается в виде:

$$\mathbf{m}_g = 3(C - A)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})\mathbf{r} \times \mathbf{e} \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e^2} \right)^3, \tag{2.8}$$

а связь между векторами \mathbf{U} и \mathbf{L} выражается формулой:

$$\mathbf{L} = A\mathbf{U} + (C - A)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \Rightarrow (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}) = C(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}). \quad (2.9)$$

На основании этой формулы, учитывая уравнение движения оси симметрии

$$\mathbf{e}' = \mathbf{U} \times \mathbf{e}, \quad (2.10)$$

получим

$$\mathbf{L}' = A\mathbf{U}' + (C - A)[(\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e}] \Rightarrow (\mathbf{L}' \cdot \mathbf{e}) = C(\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}). \quad (2.11)$$

Из уравнений (2.5), (2.6) вследствие взаимной ортогональности векторов \mathbf{m}_g (2.8) и \mathbf{e} следует

$$\mathbf{L}' - I\mathbf{U}' = \mathbf{m}_g + \mu I\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{L}' \cdot \mathbf{e} - I\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e} = \mu I\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}. \quad (2.12)$$

Отсюда на основании формул (2.11) получаем:

$$(C - I)\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e} = \mu I\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}, \quad (2.13)$$

а уравнения (2.5), (2.6) приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{A - I} \left(\mathbf{m}_g + (A - C)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu I \frac{(A - C)(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})}{C - I} \mathbf{e} + \mu I\mathbf{W} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{W}' = -\frac{1}{A - I} \left(\mathbf{m}_g + (A - C)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu I \frac{(A - C)(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})}{C - I} \mathbf{e} + \mu A\mathbf{W} \right). \quad (2.15)$$

Определив безразмерные параметры ε и γ , характеризующие геометрию масс спутника, формулами

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A - I}, \quad \gamma = \frac{I}{A - I} \quad (2.16)$$

получим из (2.14), (2.15) следующую систему уравнений:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{m} - \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu\gamma\mathbf{W} - \varepsilon\mu\gamma \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}}{1 + \varepsilon} = \mathbf{M}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{W}' = -\mathbf{m} + \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} - \mu(1 + \gamma)\mathbf{W} + \varepsilon\mu\gamma \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}}{1 + \varepsilon} = -\mathbf{M} - \mu\mathbf{W}, \quad (2.18)$$

где \mathbf{m} – безразмерный гравитационный момент, определяемый формулой:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{m}_g}{A - I} = 3\varepsilon(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})\mathbf{r} \times \mathbf{e} \left(\frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.17), (2.18), (2.10) и (2.7) записаны в проекциях на оси базиса Кенига. Они образуют замкнутую систему относительно переменных \mathbf{U} , \mathbf{W} , \mathbf{e} и ν . При этом вектор \mathbf{U} задает направление оси вращения оболочки спутника и величину ее безразмерной угловой скорости.

В проекциях на оси базиса Резаля $O\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$, задаваемого углами Эйлера ψ и θ (рис. 1), уравнения (2.17), (2.18) и (2.10) записываются в виде следующей системы [4]:

В работе [4] по результатам численного интегрирования точных уравнений (2.20) для динамически симметричного спутника были обнаружены на круговой орбите асимптотически устойчивые пространственные резонансные режимы вращательного движения 2:1. Характерной особенностью этих резонансных вращений является то, что для них величина угловой скорости спутника остается с точностью до $O(\varepsilon)$ неизменной, равной удвоенной угловой скорости орбитального базиса, а ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты. Как будет показано ниже, для симметричного спутника на круговой орбите существуют и асимптотически устойчивые пространственные резонансные вращения 1:1, для которых величина угловой скорости спутника с точностью до $O(\varepsilon)$ равна угловой скорости орбитального базиса.

Ниже проводится аналитическое исследование условий существования и устойчивости указанных резонансных вращений спутника, а также анализ поведения спутника в режимах резонансного вращение.

3. Уравнения вращательного движения спутника с демпфером в переменных Белецкого—Чернуосько. Для анализа резонансных вращений спутника будем использовать уравнения (2.17), (2.18), (2.10), в которых состояние оболочки спутника будем описывать переменными Белецкого—Чернуосько [9]. В этих переменных положение вектора \mathbf{U} относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ задается согласно рис. 2, а величиной U , углом нутации ρ и углом прецессии σ , а положение оси симметрии спутника e относительно определяемого вектором \mathbf{U} базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$ задается углами Эйлера θ и ψ (рис. 2, б). В качестве остальных переменных для рассматриваемой системы будем использовать проекции W_1, W_2, W_3 вектора \mathbf{W} на оси базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$.

Очевидно, что все возможные состояния системы можно описать, рассматривая значения переменных U и ρ в диапазонах

$$U \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq \pi. \quad (3.1)$$

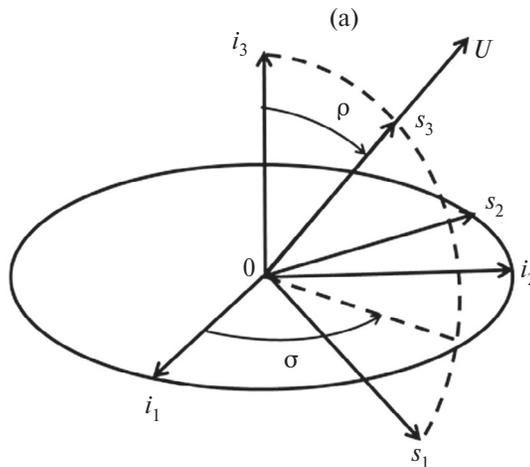


Рис. 2 (начало). Переменные Белецкого—Чернуосько.

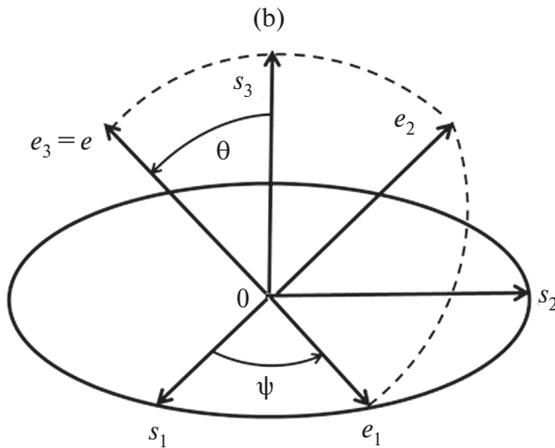


Рис. 2 (окончание). Переменные Белешко–Черноушко.

Базис $Os_1s_2s_3$ вращается относительно базиса Кенига с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_s = \sigma' \mathbf{i}_3 + \rho' \mathbf{s}_2 = -\sigma' \sin \rho \mathbf{s}_1 + \rho' \mathbf{s}_2 + \sigma' \cos \rho \mathbf{s}_3, \quad (3.2)$$

а проекции векторов \mathbf{U} и \mathbf{W} на оси этого базиса выражаются формулами

$$\mathbf{U} = U \mathbf{s}_3, \quad \mathbf{W} = W_1 \mathbf{s}_1 + W_2 \mathbf{s}_2 + W_3 \mathbf{s}_3. \quad (3.3)$$

В проекциях на оси базиса $Os_1s_2s_3$ уравнения (2.17) и (2.18) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma' \sin \rho \\ \rho' \\ \sigma' \cos \rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' U \\ \sigma' U \sin \rho \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{W}' &= \begin{pmatrix} W_1' \\ W_2' \\ W_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma' \sin \rho \\ \rho' \\ \sigma' \cos \rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} W_1' + W_3 \rho' - W_2 \sigma' \cos \rho \\ W_2' + W_1 \sigma' \cos \rho + W_3 \sigma' \sin \rho \\ W_3' - W_2 \sigma' \sin \rho - W_1 \rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 + \mu \gamma W_1 \\ M_2 + \mu \gamma W_2 \\ M_3 + \mu \gamma W_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

здесь M_k — проекции правых частей уравнений (2.17) на оси базиса $Os_1s_2s_3$. Разрешив эти уравнения относительно производных, получим следующую систему:

$$\rho' = M_1/U, \quad (3.4)$$

$$\sigma' = M_2/(U \sin \rho), \quad (3.5)$$

$$U' = M_3, \quad (3.6)$$

$$W_1' = (-W_3 M_1 + W_2 M_2 \operatorname{ctg} \rho)/U - M_1 - \mu W_1, \quad (3.7)$$

$$W_2' = -(W_1 M_2 \operatorname{ctg} \rho + W_3 M_2)/U - M_2 - \mu W_2, \quad (3.8)$$

$$W_3' = (W_1 M_1 + W_2 M_2)/U - M_3 - \mu W_3. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом на основании формулы

$$\mathbf{e} = \psi \mathbf{s}_1 - \theta \mathbf{s}_2 + \psi \mathbf{s}_3$$

проецируя векторное уравнение (2.10) на оси базиса $Os_1s_2s_3$, получим после несложных преобразований следующие уравнения, описывающие поведение углов Эйлера ψ и θ :

$$\theta' = (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi)/U, \quad (3.10)$$

$$\psi' = U - (\operatorname{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) + M_2 \operatorname{ctg} \rho)/U. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.4)–(3.11) в сочетании с уравнением (2.7) образуют замкнутую систему относительно переменных ρ , σ , U , ψ , θ , W_1 , W_2 , W_3 и v .

Заметим, что в силу условия (2.22) последнее слагаемое в выражении для вектора \mathbf{M} (2.17) мало по сравнению с предпоследним, т.е.

$$\varepsilon \mu \gamma |(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|/(1 + \varepsilon) \ll \mu \gamma |\mathbf{W}|.$$

Ниже при построении осредненных уравнений первого приближения этим слагаемым можно пренебречь и использовать для вектора \mathbf{M} следующую формулу:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} - \varepsilon (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu \gamma \mathbf{W}. \quad (3.12)$$

В проекциях на оси базиса $Os_1s_2s_3$ вектор (3.12) запишется в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} - \varepsilon U^2 \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \gamma \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

а проекции вектора \mathbf{m} (2.19) выражаются через силовую функцию

$$\begin{aligned} V = & -\frac{3\varepsilon}{16} f(v) \left[2 \sin 2\theta \sin \rho \left[(1 + \cos \rho) \sin(\psi - 2s) - (1 - \cos \rho) \sin(\psi + 2s) \right] + \right. \\ & + \sin^2 \theta \left[4 - (1 + \cos \rho)^2 \cos 2(\psi - s) - (1 - \cos \rho)^2 \cos 2(\psi + s) \right] + \\ & \left. + 2 \sin^2 \rho \left[(3 \cos^2 \theta - 1)(1 + \cos 2s) + \sin^2 \theta \cos 2\psi \right] + 2 \sin 2\rho \sin 2\theta \sin \psi \right], \quad (3.14) \end{aligned}$$

по формулам [9]

$$m_1 = \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin \rho} \frac{\partial V}{\partial s}, \quad m_2 = \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad m_3 = \frac{\partial V}{\partial \psi}. \quad (3.15)$$

Здесь

$$s = v - \sigma. \quad (3.16)$$

Заметим, что проекции (3.15) гравитационного момента на оси базиса $O s_1 s_2 s_3$ могут быть вычислены и непосредственно на основе формулы (2.19).

4. Резонансные вращения спутника на круговой орбите. Резонанс 2:1. Для случая круговой орбиты будем иметь $s = \tau - \sigma$, $f = 1$.

Оценим сначала значения компонента вектора \mathbf{W} в режиме медленной эволюции, которая наступает после окончания переходных процессов (при достаточно больших значениях τ). На основании уравнения (2.18) получим для производной по τ от функции W^2 следующее выражение:

$$(W^2)' = -2\mu(1 + \gamma)W^2 - 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{W}) + 2\varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})[(\mathbf{U} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{W}] + 2\varepsilon\mu\gamma \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})^2}{1 + \varepsilon}. \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что если $\mu \gg \varepsilon$, то в режиме медленной эволюции все компоненты вектора \mathbf{W} , а следовательно, и все компоненты вектора \mathbf{M} (3.12), будут ограниченными функциями малого параметра ε :

$$W_k = O(\varepsilon), \quad M_k = O(\varepsilon); \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

В свою очередь, из уравнений (3.4)–(3.11) при учете (4.2) следует, что при $U \gg \varepsilon$ в режиме медленной эволюции переменные τ и ψ будут “быстрыми”, а остальные переменные – “медленными” (скорость изменения этих переменных будет ограниченной функцией ε).

Для анализа резонансных вращений спутника будем использовать метод осреднения [10, 11]. В процедуре этого метода сначала ищется зависящее явно от “быстрых” переменных τ и ψ решение системы, получаемой линеаризацией уравнений (3.4)–(3.11). Затем это решение подставляется в нелинейные уравнения и после осреднения получают эволюционные уравнения.

Из уравнений (3.4)–(3.11) и формул (3.14)–(3.16) следует, что в решениях линеаризованной системы будут фигурировать гармонические функции вида:

$$\frac{a_1 \cos(\psi \pm 2s) + b_1 \sin(\psi \pm 2s)}{\psi' \pm 2s'}, \quad \frac{a_2 \cos 2(\psi \pm s) + b_2 \sin 2(\psi \pm s)}{\psi' \pm s'},$$

$$\frac{a_3 \cos 2s + b_3 \sin 2s}{s'}, \quad \frac{a_4 \cos \psi + b_4 \sin \psi}{\psi'}, \quad \frac{a_5 \cos 2\psi + b_5 \sin 2\psi}{\psi'}.$$

Резонансным вращениям спутника будут соответствовать движения, для которых средние по времени τ значения некоторых из знаменателей в записанных выражениях обращаются в нуль. Сначала выясним, для каких из этих знаменателей указанное условие заведомо не выполняется. Средние по времени τ значения переменных будем обозначать угловыми скобками.

Из уравнений (3.5) и (3.11) при учете (4.2) следует, что при $U \gg \varepsilon$ выполняются следующие неравенства:

$$\langle \psi' \rangle = U + O(\varepsilon) > 0, \quad \langle s' \rangle = 1 + O(\varepsilon) > 0,$$

$$\langle \psi' + 2s' \rangle = 2 + O(\varepsilon) > 0, \quad \langle \psi' + s' \rangle = 1 + O(\varepsilon) > 0.$$

Таким образом, в диапазоне значений $U \gg \varepsilon$ резонансные вращения спутника возможны только при выполнении следующих двух резонансных соотношений:

$$\langle \psi' - 2s' \rangle = \langle \psi' + 2\sigma' \rangle - 2 = 0 \Rightarrow U = 2 + O(\varepsilon), \quad (4.3)$$

$$\langle \psi' - s' \rangle = \langle \psi' + \sigma' \rangle - 1 = 0 \Rightarrow U = 1 + O(\varepsilon). \quad (4.4)$$

Исследуем сначала вращения спутника, для которых выполняется резонансное соотношение (4.3). Выше такие вращения были названы резонансами 2:1, поскольку для них угловая скорость спутника близка к удвоенной угловой скорости орбитального базиса.

Введем новую переменную X согласно формуле

$$X = \psi - 2(\tau - \sigma). \quad (4.5)$$

Резонансное соотношение (4.3) будет выполняться для тех движений спутника, где среднее значение переменной X остается неизменным. При этом для резонансных вращений 2:1 будет иметь место такая синхронизация между движением центра масс и вращательным движением спутника, при которой за один оборот центра масс спутника относительно базиса $Os_1s_2s_3$ ось симметрии спутника e совершает ровно два оборота вокруг вектора угловой скорости \mathbf{U} (см. рис. 2, 3).

Согласно (3.5) и (3.11) уравнение, описывающее поведение переменной X , записывается в виде:

$$X' = U - 2 - \text{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) / U + M_2 (2 - \cos \rho) / (U \sin \rho). \quad (4.6)$$

Уравнения (3.4)–(3.11), (4.6) заменой $2(\tau - \sigma) = \psi - X$ приводятся к автономной системе в переменных $\rho, U, W_1, W_2, W_3, \theta, X, \psi$. Далее усредним эти уравнения по “быстрой” переменной ψ , а интересующие нас резонансные вращения спутника будем искать среди стационарных по переменным $U, W_1, W_2, W_3, \theta, X$ решений (положений равновесия) осредненной системы при фиксированном значении переменной ρ .

В указанных переменных вычисленные по формулам (3.15) проекции гравитационного момента \mathbf{m} (2.19) на оси базиса $Os_1s_2s_3$ выражаются в виде:

$$\begin{aligned} m_1 = \frac{3\varepsilon}{8} \{ & \sin 2\theta (1 + \cos \rho) (2 - \cos \rho) \cos X - 2 \sin 2\theta \cos^2 \rho \cos \psi + \\ & + \sin^2 \theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin(\psi + X) - 2 \sin \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin(\psi - X) + \\ & + \sin 2\rho \sin^2 \theta \sin 2\psi + \sin 2\theta (1 - \cos \rho) (2 + \cos \rho) \cos(2\psi - X) - \\ & - \sin^2 \theta \sin \rho (1 - \cos \rho) \sin(3\psi - X) \}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$m_2 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ \sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta) + \sin 2\theta(1 + \cos\rho)(1 - 2\cos\rho)\sin X - \right. \\ \left. - 2\sin 2\theta \cos 2\rho \sin \psi - \sin^2 \theta \sin \rho(1 + \cos\rho)\cos(\psi + X) + \right. \\ \left. + \sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta)\cos(\psi - X) - \sin^2 \theta \sin 2\rho \cos 2\psi + \right. \\ \left. + (1 - \cos\rho)[\sin 2\theta(1 + 2\cos\rho)\sin(2\psi - X) + \sin^2 \theta \sin \rho \cos(3\psi - X)] \right\}, \quad (4.8)$$

$$m_3 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ -\sin 2\theta \sin \rho(1 + \cos\rho)\cos X - \sin^2 \theta(1 + \cos\rho)^2 \sin(\psi + X) - \right. \\ \left. - \sin 2\rho \sin 2\theta \cos \psi + \sin 2\theta \sin \rho(1 - \cos\rho)\cos(2\psi - X) + \right. \\ \left. + 2\sin^2 \theta \sin^2 \rho \sin 2\psi - \sin^2 \theta(1 - \cos\rho)^2 \sin(3\psi - X) \right\}. \quad (4.9)$$

Проведем теперь осреднение уравнений (3.4)–(3.11) и (4.6) по быстрой переменной ψ . Обозначив средние по ψ чертой сверху, получим на основании формул (4.7)–(4.9)

$$\bar{m}_1 = 3\varepsilon \cos X \sin 2\theta(1 + \cos\rho)(2 - \cos\rho)/8, \quad (4.10)$$

$$\bar{m}_2 = 3\varepsilon (\sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta) + \sin 2\theta \sin X(1 + \cos\rho)(1 - 2\cos\rho))/8, \quad (4.11)$$

$$\bar{m}_3 = -3\varepsilon \cos X \sin 2\theta \sin \rho(1 + \cos\rho)/8. \quad (4.12)$$

При учете формул (4.2) осредненные по ψ уравнения (3.4)–(3.9) запишутся в виде:

$$\rho' = (\bar{m}_1 + \mu\gamma W_1)/U, \quad \sigma' = (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)/(U \sin \rho), \quad (4.13)$$

$$W_1' = -\mu(1 + \gamma)W_1 - \bar{m}_1 + O(\varepsilon^2), \quad W_2' = -\mu(1 + \gamma)W_2 - \bar{m}_2 + O(\varepsilon^2), \quad (4.14)$$

$$W_3' = -\mu(1 + \gamma)W_3 - \bar{m}_3 + O(\varepsilon^2), \quad U' = \mu\gamma W_3 + \bar{m}_3 + O(\varepsilon^2). \quad (4.15)$$

В правых частях уравнений (3.10), (3.11) и (4.6) фигурируют функции $M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi$ и $M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi$. Для вычисления их среднего по ψ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ необходимо в поведении вектора \mathbf{M} (3.12) определить осцилляционные составляющие \mathbf{M}_ψ , содержащие гармоники вида:

$$\mathbf{M}_\psi = \mathbf{a}(\rho, \theta) \cos \psi + \mathbf{b}(\rho, \theta) \sin \psi. \quad (4.16)$$

Согласно (3.12) и (3.13) вектор \mathbf{M}_ψ выражается формулой:

$$\mathbf{M}_\psi = \mathbf{m}_\psi - \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu\gamma \mathbf{W}_\psi; \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} = U^2 \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

где \mathbf{m}_ψ и \mathbf{W}_ψ – слагаемые векторов \mathbf{m} и \mathbf{W} , содержащие гармоники вида (4.16).

Осцилляционные составляющие \mathbf{W}_ψ вектора \mathbf{W} определяются с точностью до $O(\varepsilon^2)$ решениями уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \psi} \psi' = \boldsymbol{\alpha} \cos \psi + \boldsymbol{\beta} \sin \psi - \mu(1 + \gamma) \mathbf{W}, \quad (4.18)$$

которое получается из уравнения (2.18) отбрасыванием в его правой части членов второго порядка малости по ε . Здесь

$$\boldsymbol{\alpha} \cos \psi + \boldsymbol{\beta} \sin \psi = -\mathbf{m}_\psi + \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{U} \times \mathbf{e}. \quad (4.19)$$

При учете уравнения (3.11) решение уравнения (4.18) описывается с точностью до $O(\varepsilon^2)$ следующей формулой:

$$\mathbf{W}_\psi = \frac{\mu(1 + \gamma)\boldsymbol{\alpha} - U\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \cos \psi + \frac{U\boldsymbol{\alpha} + \mu(1 + \gamma)\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin \psi. \quad (4.20)$$

Искомый вектор \mathbf{M}_ψ выражается формулой

$$\mathbf{M}_\psi = -\boldsymbol{\alpha} \cos \psi - \boldsymbol{\beta} \sin \psi + \mu\gamma \mathbf{W}_\psi \quad (4.21)$$

и записывается в следующем виде:

$$\mathbf{M}_\psi = - \left(\frac{[U^2 + \mu^2(1 + \gamma)]\boldsymbol{\alpha} + \mu\gamma U\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \cos \psi + \frac{[U^2 + \mu^2(1 + \gamma)]\boldsymbol{\alpha} - \mu\gamma U\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin \psi \right). \quad (4.22)$$

На основании формулы (4.22) получим:

$$\langle M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) + \frac{\mu\gamma U(\alpha_1 + \beta_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right), \quad (4.23)$$

$$\langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) + \frac{\mu\gamma U(\beta_1 - \alpha_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right). \quad (4.24)$$

Для компонент векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ на основании формул (4.7), (4.8), (4.17) и (4.19) получим следующие выражения:

$$\alpha_1 = 3\varepsilon \left\{ 2 \sin 2\theta (\cos^2 \rho + 2U^2/3) - \sin \rho [2(1 - 3 \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (1 + \cos \rho)] \sin X \right\} / 8,$$

$$\beta_1 = 3\varepsilon \cos X \sin \rho \left[2(1 - 3 \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta (1 + \cos \rho) \right] / 8,$$

$$\alpha_2 = 3\varepsilon \cos X \sin \rho \left[\sin^2 \theta (1 + \cos \rho) - 2 \cos \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) \right] / 8,$$

$$\beta_2 = 3\varepsilon \left\{ 2 \sin 2\theta (\cos 2\rho + 2U^2/3) - \sin \rho [2 \cos \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (1 + \cos \rho)] \sin X \right\} / 8.$$

Отсюда находим

$$\alpha_2 - \beta_1 = 3\varepsilon \cos^2 \theta \cos X \sin \rho (1 + \cos \rho) / 2,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 3\varepsilon \left(\sin 2\theta (4U^2/3 + 3\cos^2\rho - 1) + 2\cos 2\theta \sin X \sin \rho (1 + \cos \rho) \right) / 4.$$

После подстановки этих выражений в формулы (4.23) и (4.24) осредненные по ψ уравнения (4.6) и (3.10) запишутся в следующем виде:

$$X' = F_X = U - 2 + (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)(2 - \cos \rho) / (U \sin \rho) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2U} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) - \frac{\mu\gamma U(\alpha_2 - \beta_1)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.25)$$

$$\theta' = F_\theta = -\frac{3\varepsilon}{4U} \frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin \rho (1 + \cos \rho) \cos^2 \theta \cos X - \frac{3\varepsilon}{8} \mu\gamma \frac{\sin 2\theta (4U^2/3 + 3\cos^2\rho - 1) + 2\cos 2\theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin X}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.26)$$

Стационарные решения (положения равновесия) системы (4.14), (4.15), (4.25), (4.26) по переменным $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X$ при фиксированном ρ описываются следующей системой уравнений:

$$W_1^* = -\frac{3\varepsilon \sin 2\theta^* \cos X^* (1 + \cos \rho)(2 - \cos \rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\varepsilon^2), \quad (4.27)$$

$$W_2^* = -\frac{3\varepsilon \sin 2\rho(1 - 3\cos^2\theta^*) + \sin 2\theta^* \sin X^* (1 + \cos \rho)(1 - 2\cos \rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\varepsilon^2), \quad (4.28)$$

$$W_3^* = \frac{3\varepsilon \sin 2\theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\varepsilon^2). \quad (4.29)$$

$$\sin 2\theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) = O(\varepsilon), \quad (4.30)$$

$$U^* = 2 + O(\varepsilon), \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & (4 + \mu^2(1 + \gamma)) \cos^2 \theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) + \\ & + \mu\gamma \left(\sin 2\theta^* (13/3 + 3\cos^2\rho) + 2\cos 2\theta^* \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) \right) = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Если значения угла нутации ρ удовлетворяют условию

$$\sin \rho (1 + \cos \rho) \gg \varepsilon, \quad (4.33)$$

то с точностью до $O(\varepsilon)$ стационарные решения для X^* и q^* в уравнениях (4.27)–(4.32) описываются формулами:

$$\cos X^* = 0, \quad \operatorname{tg} 2\theta^* = -\frac{2\sin \rho (1 + \cos \rho)}{13/3 + 3\cos^2\rho} \sin X^*. \quad (4.34)$$

Вопрос об устойчивости найденных стационарных решений сводится к исследованию корней характеристического уравнения системы (4.14), (4.15), (4.25), (4.26), линеаризованной в окрестности положений равновесия. Матрица этой системы на решениях (4.27)–(4.32), (4.34) выражается следующей формулой:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mu(1+\gamma) & 0 & 0 & 0 & O(\varepsilon) & 0 \\ 0 & -\mu(1+\gamma) & 0 & 0 & 0 & O(\varepsilon) \\ 0 & 0 & -\mu(1+\gamma) & 0 & \varepsilon f_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\gamma & 0 & -\varepsilon f_3 & 0 \\ 0 & \mu\gamma \frac{2-\cos\rho}{2\sin\rho} & 0 & 1 & \varepsilon f_{xx} & O(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \varepsilon f_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Здесь

$$\varepsilon f_3 = -\frac{\partial \bar{m}_3}{\partial X} = -\frac{3\varepsilon}{8} \sin 2\theta^* \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho), \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon f_{\theta\theta} &= \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{3\varepsilon}{4} \mu\gamma \frac{\cos 2\theta^* (13/3 + 3\cos^2 \rho) - 2\sin 2\theta^* \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho)}{4 + \mu^2 (1 + \gamma)^2}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\varepsilon f_{xx} = \frac{\partial F_X}{\partial X} = \frac{3\varepsilon \mu\gamma \operatorname{ctg} \theta^* \cos^2 \theta^*}{4(4 + \mu^2 (1 + \gamma)^2)} \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho). \quad (4.38)$$

Характеристический полином матрицы (4.35), в коэффициентах которого учтены только главные члены разложения по ε , записывается в виде:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\mu(1+\gamma) + \lambda)^2 (\lambda - \varepsilon f_\theta) \times \\ &\times (\lambda^3 + \lambda^2 \mu(1+\gamma) + \lambda \varepsilon (f_3 - \mu(1+\gamma) f_{xx}) + \mu \varepsilon f_3). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Отсюда на основании формул (4.36), (4.38) и критерия Рауса–Гурвица заключаем, что те из стационарных решений, для которых $f_3 > 0$ и $f_\theta < 0$, асимптотически устойчивы, а решения, для которых $f_3 < 0$ либо $f_\theta > 0$, неустойчивы.

Из условий $f_3 > 0$, $f_\theta < 0$ и формул (4.34), (4.36)–(4.38) следует, что асимптотически устойчивым положениям равновесия осредненной системы отвечают те из решений (4.27)–(4.32), для которых

$$\sin X^* = -1, \quad \operatorname{tg} 2\theta^* = \frac{2\sin\rho(1+\cos\rho)}{13/3+3\cos^2\rho}; \quad \sin 2\theta^* > 0. \quad (4.40)$$

По теореме Н.Н. Боголюбова [10, 11] асимптотически устойчивым положениям равновесия осредненной системы соответствуют асимптотически устойчивые периодические решения исходной (точной) системы.

Для устойчивых решений полином (4.39) имеет три вещественных корня:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu^2(1 + \gamma), \quad \lambda_3 = \varepsilon f_{\theta\theta} = -\frac{3\varepsilon}{4} \mu \gamma \frac{(13/3 + 3 \cos^2 \rho) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta^*}}{4 + \mu^2(1 + \gamma)^2}, \quad (4.41)$$

а вещественные части остальных корней при $\mu \gg \varepsilon$ выражаются формулами:

$$\operatorname{Re}(\lambda_4) = -\mu(1 + \gamma) + O(\varepsilon), \quad \operatorname{Re}(\lambda_{5,6}) = -3\varepsilon \gamma \frac{\sin \rho(1 + \cos \rho) \sin 2\theta^*}{16\mu(1 + \gamma)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.42)$$

Из этих формул следует, что при $\mu \gg \varepsilon$ и $\gamma \gg \varepsilon$ вещественные части всех корней характеристического полинома ограничены сверху неравенствами:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) < -a\varepsilon, \quad a \gg \varepsilon; \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (4.43)$$

Обратимся теперь к первому из уравнений (4.13). Из него и формул (4.10), (4.27), (4.40) следует, что в окрестности асимптотически устойчивых стационарных решений системы (4.14), (4.15), (4.25), (4.26) поведение переменной ρ описывается уравнением $\rho' = O(\varepsilon^2)$. Отсюда при учете соотношений (4.43) получаем, что переменная ρ является “медленной” по сравнению с переменными $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X$. Следовательно, применима теорема А.Н. Тихонова [12] об условиях редукции в системе дифференциальных уравнений с малым параметром, согласно которой систему дифференциальных уравнений (4.14), (4.15), (4.25), (4.26) можно заменить системой алгебраических уравнений (4.27)–(4.32), (4.40) и решать их совместно с дифференциальным уравнением (4.13).

Стационарные решения, описываемые формулами (4.27)–(4.32), (4.40), являются функциями переменной ρ . После подстановки этих решений в первое из уравнений (4.13) получается дифференциальное уравнение $\rho' = f(\rho)$, описывающее эволюцию переменной ρ , где $f(\rho)$ будет ограниченной функцией ε^2 .

По мере медленного изменения переменной ρ меняются, вообще говоря, и значения переменных $W_1^*(\rho), W_2^*(\rho), W_3^*(\rho), U^*(\rho), \theta^*(\rho), X^*(\rho)$. Поэтому рассматриваемые пространственные резонансные вращения спутника представляют собой эволюционирующий (неустановившийся) процесс. В этом процессе угол θ между осью вращения и осью симметрии спутника согласно второй из формул (4.40) не зависит от значений параметров μ, γ, ε . Он зависит только от величины угла нутации ρ и может достигать значений $\theta_{\max} \approx 0.25$. При этом угловая скорость спутника на резонансном вращении согласно формуле (4.31) будет с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадать со значением $U^* = 2$, а значение переменной X (4.5), отвечающей за синхронизацию между вращательным движением спутника и движением его центра масс, согласно первой из формул (4.40) с точностью до $O(\varepsilon)$ будет совпадать со значением $X^* = -\pi/2$.

Согласно формулам (4.27)–(4.29) в режиме резонансного вращения относительная угловая скорость демпфера будет ограниченной функцией малого параметра ε , как и в случае нерезонансного вращения.

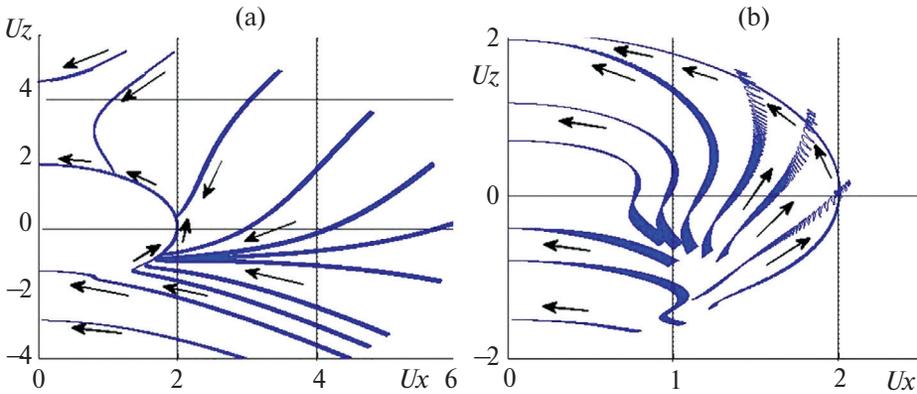


Рис. 3. Фазовые траектории.

Прецессия оси вращения спутника описывается вторым из уравнений (4.13). Для устойчивого резонансного вращения спутника в силу формул (4.11), (4.28) и (4.40) это уравнение принимает следующий вид:

$$\sigma' = -\frac{3\varepsilon}{8} \left(\frac{\cos \rho (1 + 3 \cos 2\theta^*)}{(1 + \gamma)U} + \frac{\sin 2\theta^* (1 + \cos \rho)(1 - 2 \cos \rho)}{(1 + \gamma)U \sin \rho} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (4.44)$$

Для нерезонансного движения спутника прецессия оси вращения описывается в переменных σ , ρ аналогичным (2.25) уравнением:

$$\sigma' = -\frac{3\varepsilon \cos \rho}{2(1 + \gamma)U} + O(\varepsilon^2). \quad (4.45)$$

Из формул (4.44) и (4.45) следует, что для одних и тех же значений угла нутации ρ скорости прецессии в резонансном и нерезонансном вращении спутника могут отличаться на величину порядка ε , сопоставимую с (4.45).

Оценим границы интервалов значений угла нутации ρ , в пределах которых существуют резонансные вращения 2:1 для динамически симметричного спутника. Положим, что в правой части уравнения (4.30) $O(\varepsilon) = a\varepsilon$, где $a \neq 0$ – некоторая ограниченная величина. Тогда получим уравнение:

$$\sin 2\theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) = a\varepsilon.$$

Это уравнение не имеет решений, если $\sin \rho (1 + \cos \rho) < |a|\varepsilon$, т.е. для следующих значений ρ из интервала $(0, \pi)$: $2\rho < \varepsilon|a|$, $(\pi - \rho)^3 < 2\varepsilon|a|$.

Таким образом, интервал значений угла нутации ρ , где существуют резонансные вращения 2:1, описывается формулой:

$$\rho_1 < \rho < \pi - \rho_2, \text{ где } \rho_1 \sim \varepsilon, \rho_2 \sim \varepsilon^{1/3}. \quad (4.46)$$

Из формулы (4.46) следует, что нет резонансных вращений для значений ρ , близких к нулю и близких к π . При этом, поскольку $\rho_2 \gg \rho_1$, то примыкающий к π интервал $(\pi - \rho_2, \pi)$, где нет резонансных вращений, имеет гораздо большие размеры, чем примыкающий к нулю интервал $(0, \rho_1)$.

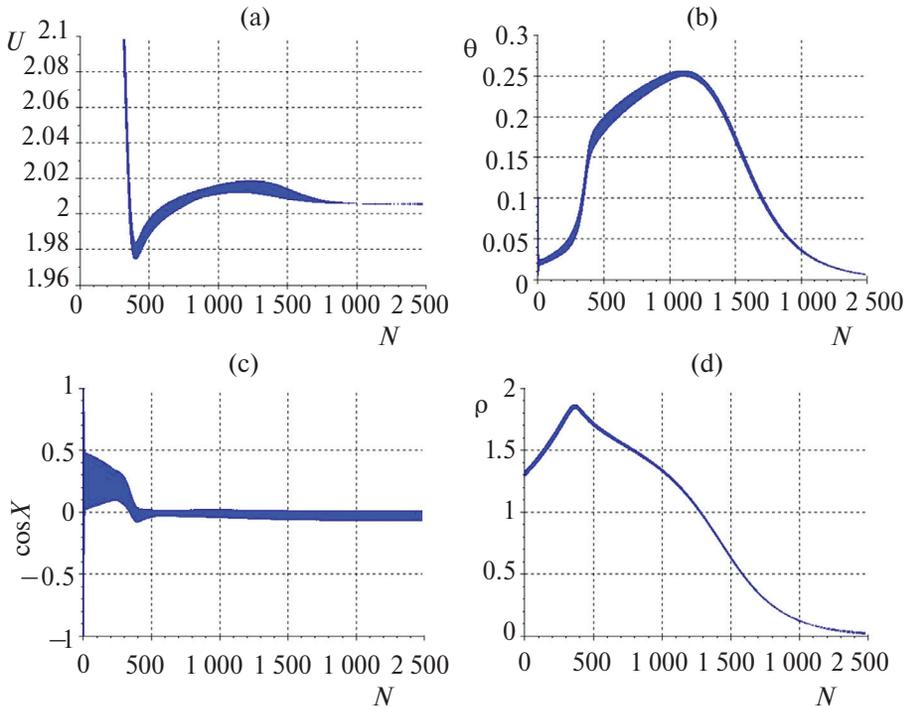


Рис. 4. Резонансные вращения 2:1.

Из формулы (4.46) следует также, что с уменьшением параметра ε диапазон значений ρ , где существуют резонансные вращения 2:1, увеличивается.

На рис. 4 приведены построенные по результатам численного интегрирования точных уравнений (2.14), (2.15), (2.10) фазовые траектории вращательного движения спутника с демпфером в плоскости переменных U_X , U_Z для следующих значений параметров: $\mu=1$, $\gamma=1$, $\varepsilon=0.1$. Здесь U_X – проекция угловой скорости спутника на плоскость орбиты, а U_Z – проекция угловой скорости спутника на нормаль к плоскости орбиты. На рис. 3, а изображены фазовые траектории для начальных условий из области $U > 2$, а на рис. 3, б – из области $U < 2$. Стрелками показано направление эволюции.

Резонансным вращениям 2:1 на представленных рисунках соответствует дуга окружности радиуса $U \approx 2$. Как видно из этих рисунков, асимптотически устойчивые резонансные вращения 2:1 существуют в широком диапазоне значений угла нутации ρ из интервала $(0, \pi)$. Отсутствие резонансных вращений, близких к “обратным”, где значения ρ близки к π , объясняется формулой (4.46).

На рис. 4, а–д изображено поведение переменных U , ρ , θ и X на резонансных вращениях 2:1. Эти графики построены по результатам численного интегрирования точных уравнений движения спутника (3.4)–(3.11) для следующих значений параметров: $\mu=1$, $\gamma=1$, $\varepsilon=0.1$. Здесь N – число оборотов центра масс спутника вокруг притягивающего центра.

Представленные графики полностью подтверждают полученные выше аналитические выводы о поведении переменных на резонансных вращениях 2:1. Из графика на рис. 4, а следует, что после захвата в резонансное вращение (в момент захвата $N \approx 400$) величина угловой скорости спутника практически не меняется и близка к значению $U=2$, а графики углов θ и $X = \psi - 2(\tau - \sigma)$ на рис. 4, б, с полностью согласуются с формулами (4.40).

График угла нутации ρ на рис. 4, д показывает, что значение этой переменной на резонансном вращении монотонно уменьшается, т.е. движение спутника монотонно стремится к “прямому” плоскому стационарному вращению вокруг нормали к плоскости орбиты.

5. Резонансные вращения 1:1. Исследуем теперь вращения спутника, для которых выполняется резонансное соотношение (4.4). Такие вращения будем называть резонансами 1:1. Для них угловая скорость спутника с точностью до $O(\varepsilon)$ равна угловой скорости орбитального базиса. Для исследования этих резонансных вращений применим ту же самую процедуру, которая использовалась выше при анализе резонансов 2:1.

Введем новую переменную X согласно формуле

$$X = \psi - (\tau - \sigma). \quad (5.1)$$

Резонансное соотношение (4.4) будет выполняться для тех движений спутника, где среднее значение переменной X остается неизменным. При этом для резонансных вращений 1:1 будет иметь место такая синхронизация между движением центра масс и вращательным движением спутника, при которой за один оборот центра масс спутника относительно базиса $Os_1s_2s_3$ ось симметрии спутника e совершает ровно один оборот вокруг вектора угловой скорости U (см. рис. 2, 3).

Согласно (3.5) и (3.11) уравнение, описывающее поведение переменной X (5.1), записывается в виде:

$$X' = U - 1 - \operatorname{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) / U + M_2 (1 - \cos \rho) / (U \sin \rho). \quad (5.2)$$

Уравнения (3.4)–(3.11) и (5.2) заменой $\tau - \sigma = \psi - X$ приводятся к автономной системе в переменных $\rho, U, W_1, W_2, W_3, \theta, X, \psi$. В рассматриваемом случае вычисленные по формулам (3.15) проекции гравитационного момента \mathbf{m} (2.19) на оси базиса $Os_1s_2s_3$ запишутся в виде:

$$m_1 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin^2 \theta \sin 2X + \right. \\ \left. + \sin 2\theta [-2 \cos^2 \rho \cos \psi + (1 + \cos \rho)(2 - \cos \rho) \cos(\psi - 2X)] + \right. \\ \left. + \sin 2\rho \sin^2 \theta \sin 2\psi + \sin 2\theta ((1 - \cos \rho)(2 + \cos \rho) \cos(3\psi - 2X) + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta \sin \rho (\cos \rho - 1) \sin(4\psi - 2X) + 2 \sin \rho (3 \cos^2 \theta - 1) \sin 2(\psi - X) \right\}, \quad (5.3)$$

$$m_2 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ \sin 2\rho (1 - 3 \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \cos 2X + \right. \\ \left. + \sin 2\theta [-2 \cos 2\rho \sin \psi + (\cos \rho + \cos 2\rho) \sin(\psi - 2X)] + \right.$$

$$-\sin 2\rho[\sin^2 \theta \cos 2\psi + (3\cos^2 \theta - 1)\cos(2\psi - 2X)] + \\ + \sin^2 \theta \sin \rho(1 - \cos \rho)\cos(4\psi - 2X) + \sin 2\theta(\cos 2\rho - \cos \rho)\sin(3\psi - 2X)\}, \quad (5.4)$$

$$m_3 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ -\sin^2 \theta(1 + \cos \rho)^2 \sin 2X - \sin 2\theta \sin 2\rho \cos \psi - \right. \\ \left. - \sin 2\theta \sin \rho(1 + \cos \rho)\cos(\psi - 2X) \right\} + 2\sin^2 \theta \sin^2 \rho \sin 2\psi + \\ + \sin 2\theta \sin \rho(1 - \cos \rho)\cos(3\psi - 2X) - \sin^2 \theta(1 - \cos \rho)^2 \sin(4\psi - 2X)\}. \quad (5.5)$$

После осреднения уравнений (3.4)–(3.9) по “быстрой” переменной ψ получим систему (4.13)–(4.15), в которой согласно (5.3)–(5.5) средние по ψ компоненты гравитационного момента будут выражаться формулами:

$$\bar{m}_1 = 3\varepsilon \sin^2 \theta \sin 2X \sin \rho(1 + \cos \rho)/8, \quad (5.6)$$

$$\bar{m}_2 = 3\varepsilon (\sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta) - \sin \rho(1 + \cos \rho)\sin^2 \theta \cos 2X)/8, \quad (5.7)$$

$$\bar{m}_3 = -3\varepsilon \sin^2 \theta \sin 2X(1 + \cos \rho)^2/8. \quad (5.8)$$

Чтобы усреднить правые части уравнений (3.10) и (5.2) с точностью до $O(\varepsilon^2)$, воспользуемся формулами (4.23) и (4.24). В рассматриваемом случае на основании формул (4.17), (4.19), (5.3) и (5.4) получим:

$$\alpha_1 = 3\varepsilon \sin 2\theta (2\cos^2 \rho + 4U^2/3 + (1 + \cos \rho)(\cos \rho - 2)\cos 2X)/8,$$

$$\beta_1 = 3\varepsilon \sin 2\theta \sin 2X(1 + \cos \rho)(\cos \rho - 2)/8,$$

$$\alpha_2 = 3\varepsilon \sin 2\theta \sin 2X(\cos \rho + \cos 2\rho)/8,$$

$$\beta_2 = 3\varepsilon \sin 2\theta (2\cos 2\rho + 4U^2/3 - (\cos \rho + \cos 2\rho)\cos 2X)/8.$$

Отсюда находим

$$\alpha_2 - \beta_1 = 3\varepsilon \sin 2\theta \sin 2X(\cos \rho + 1)^2/8, \quad (5.9)$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 3\varepsilon \sin 2\theta (6\cos^2 \rho - 2 + 8U^2/3 - (1 + \cos \rho)^2 \cos 2X)/8. \quad (5.10)$$

В итоге осредненные по ψ уравнения (5.2) и (3.10) запишутся в виде:

$$X' = F_X = U - 1 + (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)(1 - \cos \rho)/(U \sin \rho) + \\ + \frac{\text{ctg } \theta}{2U} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) + \frac{\mu\gamma U(\beta_1 - \alpha_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (5.11)$$

$$\theta' = F_\theta = -\frac{3\varepsilon}{16U} \frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin 2\theta \sin 2X(\cos \rho + 1)^2 -$$

$$-\frac{3\epsilon\mu\gamma \sin 2\theta (6\cos^2\rho - 2 + 8U^2/3 - (1 + \cos\rho)^2 \cos 2X)}{16(U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2)} + O(\epsilon^2). \quad (5.12)$$

В рассматриваемом случае стационарные решения (положения равновесия) осредненной системы (4.14), (4.15), (5.11), (5.12) по переменным $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X$ при фиксированном ρ определяются решениями следующей системы уравнений:

$$W_1^* = -\frac{3\epsilon \sin^2\theta^* \sin 2X^* \sin\rho(1 + \cos\rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (5.13)$$

$$W_2^* = -\frac{3\epsilon \sin 2\rho(1 - 3\cos^2\theta^*) - \sin\rho(1 + \cos\rho)\sin^2\theta^* \cos 2X^*}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (5.14)$$

$$W_3^* = \frac{3\epsilon \sin^2\theta^* \sin 2X^* (1 + \cos\rho)^2}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (5.15)$$

$$\sin^2\theta^* \sin 2X^* (1 + \cos\rho)^2 = O(\epsilon), \quad (5.16)$$

$$U^* = 1 + O(\epsilon), \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\theta^* \sin 2X^* (\cos\rho + 1)^2 [1 + \mu^2(1 + \gamma)] + \\ & + \sin 2\theta^* \mu\gamma (6\cos^2\rho - 2 + 8/3 - (1 + \cos\rho)^2 \cos 2X^*) = O(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если значения угла нутации ρ удовлетворяют условию

$$(1 + \cos\rho)^2 \gg \epsilon, \quad (5.19)$$

то система (5.13)–(5.18) допускает стационарные решения (положения равновесия), в которых X^* и θ^* с точностью до $O(\epsilon)$ описываются формулами:

$$\sin 2X^* = 0, \quad \theta^* = \pm\pi/2 \Rightarrow \cos 2\theta^* = -1 \quad (5.20)$$

Матрица линеаризованной системы для этих положений равновесия выражается следующей формулой:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mu(1 + \gamma) & 0 & 0 & 0 & O(\epsilon) & 0 \\ 0 & -\mu(1 + \gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu(1 + \gamma) & 0 & \epsilon f_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\gamma & 0 & -\epsilon f_3 & 0 \\ 0 & \mu\gamma \frac{1 - \cos\rho}{\sin\rho} & 0 & 1 & 0 & O(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon f_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Здесь

$$\varepsilon f_3 = -\frac{\partial \bar{m}_3}{\partial X} = \frac{3\varepsilon}{4} \cos 2X^* (1 + \cos \rho)^2, \quad (5.22)$$

$$\varepsilon f_{\theta\theta} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \frac{3\varepsilon\mu\gamma(6\cos^2 \rho - 2 + 8/3 - (1 + \cos \rho)^2 \cos 2X^*)}{8(1 + \mu^2(1 + \gamma)^2)}. \quad (5.23)$$

Характеристический полином матрицы (5.21), в коэффициентах которого учтены только главные члены разложения по ε , записывается в виде:

$$f(\lambda) = (\mu(1 + \gamma) + \lambda)^2 (\lambda - \varepsilon f_\theta) (\lambda^3 + \lambda^2 \mu(1 + \gamma) + \lambda \varepsilon f_3 + \mu \varepsilon f_3). \quad (5.24)$$

Отсюда на основании критерия Рауса–Гурвица заключаем, что те из стационарных решений, для которых $f_3 > 0$ и $f_\theta < 0$, асимптотически устойчивы, а решения, для которых $f_3 < 0$ либо $f_\theta > 0$, неустойчивы.

Условия $f_3 > 0$, $f_3 < 0$ асимптотической устойчивости найденных стационарных решений на основании формул (5.20), (5.22) и (5.23) записываются в виде:

$$\cos 2X^* = 1, \quad 5\cos^2 \rho - 2\cos \rho - 1/3 < 0. \quad (5.25)$$

Отсюда следует, что пространственные резонансные вращения спутника 1:1 асимптотически устойчивы в следующем интервале значений угла нутации ρ :

$$\frac{3 - \sqrt{24}}{15} < \cos \rho < \frac{3 + \sqrt{24}}{15} \Rightarrow \rho_1 < \rho < \rho_2; \quad \rho_1 \approx 1.0, \quad \rho_2 \approx 1.7. \quad (5.26)$$

Вне этого интервала резонансные вращения (5.20) неустойчивы.

Отметим, что согласно формулам (5.20) резонансные движения 1:1 для динамически симметричного спутника представляют собой вращения вокруг оси, лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции спутника.

Оценим интервалы значений угла нутации ρ , где существуют исследуемые резонансные вращения 1:1. Положим, что в правой части уравнения (5.16) $O(\varepsilon) = a\varepsilon$, где $a \neq 0$ – некоторая ограниченная величина. Тогда получим

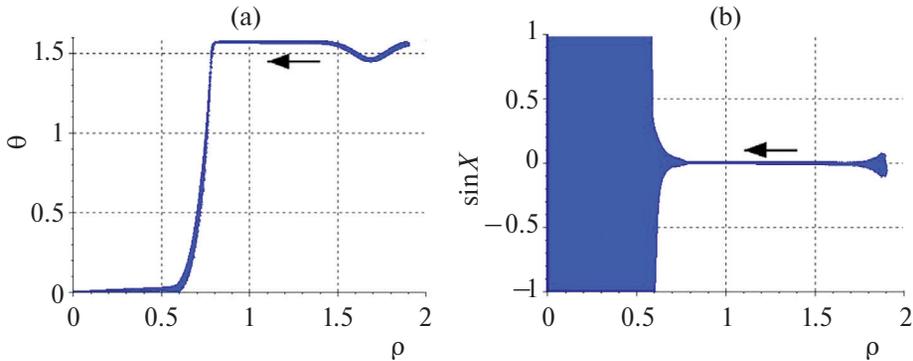


Рис. 5. Резонансные вращения 1:1.

уравнение $\sin^2\theta^* \sin 2X^*(1 + \cos \rho)^2 = a\varepsilon$. Это уравнение не имеет решений, если $(1 + \cos \rho)^2 < a\varepsilon$, т.е. для следующих значений ρ : $(\pi - \rho)^4 < 4\varepsilon|a|$. Таким образом, интервал значений угла нутации ρ , где существуют резонансные вращения 1:1 для динамически симметричного спутника, описывается формулой:

$$0 \leq \rho < \pi - \rho^*, \text{ где } \rho^* \sim \varepsilon^{1/4}. \quad (5.27)$$

Из этой формулы следует, что нет резонансных вращений для значений ρ , близких к π , т.е. для движений, близких к “обратным” вращениям спутника.

На рис. 5, а, б изображены типичные графики поведения переменных θ и $X = \psi - (\tau - \sigma)$ в зависимости от угла нутации ρ на резонансных вращениях 1:1. Эти графики построены по результатам численного интегрирования точных уравнений движения спутника (3.4)–(3.11). Здесь стрелками показано направление эволюции.

Графики полностью подтверждают полученные выше выводы о существовании асимптотически устойчивых резонансных вращений спутника 1:1 и формулы (5.20) для значений переменных θ и $X = \psi - (\tau - \sigma)$ на этих вращениях.

Из графиков видно, что правая граница интервала асимптотической устойчивости резонансных вращений 1:1 хорошо согласуется со значением $\rho_2 = 1.7$ из формулы (5.26). Вычисленная же из графиков левая граница этого интервала составляет $\rho_1 \approx 0.8$ и немного отличается от значения $\rho_1 = 1.0$ формулы (5.26). Но это небольшое различие объяснимо. Когда в процессе эволюции значение угла нутации становится меньше, чем $\rho_1 = 1.0$, стационарные решения $\theta^*(\rho)$, $X^*(\rho)$ не исчезают, а только становятся неустойчивыми, т.е. имеет место “мягкая” потеря устойчивости. В таких случаях заметный уход из окрестности неустойчивого решения наблюдается с некоторой задержкой по времени Δt , что на графиках проявляется в смещении границы ρ_1 влево на некоторую величину $\Delta \rho_1$.

Следует отметить, что в рассматриваемой задаче численным интегрированием уравнений движения спутника устойчивые резонансные вращения 1:1 можно обнаружить только соответствующим подбором начальных условий, а именно: начальное значение U должно быть близким к $U^* = 1$, а начальное значение θ – близким к $\theta^* = \pi/2$. Если же начальные условия не удовлетворяют указанным требованиям, то спутник быстро переходит в режим устойчивого нерезонансного вращения, где $\theta = O(\varepsilon)$, а этот режим является устойчивым для всех значений U из окрестности $U^* = 1$. Иначе говоря, в отличие от резонансов 2:1, резонансные вращения 1:1 для симметричного спутника изолированы от нерезонансных вращений в том смысле, что спутник, эволюционирующий в режиме нерезонансного вращения, не может перейти в режим резонансного вращения 1:1.

Заключение. В работе получены уравнения вращательного движения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите и проведено детальное исследование пространственных резонансных вращений на круговой орбите. Установлено, что для спутника, “сплюснутого” вдоль оси симметрии, на круговой орбите существуют асимптотически устойчивые пространственные резонансные вращения 2:1 и 1:1. Эти резонансные вращения обусловлены синхронизацией между вращательным движением

спутника и движением его центра масс и представляют собой эволюционирующие процессы, в которых величина угловой скорости спутника остается практически неизменной, равной угловой скорости орбитального базиса для резонанса 1:1 и удвоенной угловой скорости орбитального базиса для резонанса 2:1, а ось вращения спутника монотонно поворачивается в сторону нормали к плоскости орбиты. Определены интервалы значений угла нутации, в пределах которых существуют пространственные резонансные вращения 2:1 и 1:1, а также интервалы, в пределах которых эти резонансные вращения асимптотически устойчивы.

Аналитические выводы работы подтверждаются результатами компьютерного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амелькин Н.И.* Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 204–223.
2. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 123–136.
3. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* О стационарных вращениях спутника при наличии внутренних упругих и диссипативных сил // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 628–641.
4. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 3–15. <https://doi.org/10.1134/S0032823519010016>
5. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 16–31. <https://doi.org/10.1134/S0032823519010028>
6. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты на круговой орбите под влиянием внутренних упругих и диссипативных сил. // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 96–111. <https://doi.org/10.31857/S0572329920020038>
7. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты Земля под влиянием внутренних диссипативных сил // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 6. С. 486–497. <https://doi.org/10.31857/S0023420623600162>
8. *Амелькин Н.И.* О плоских резонансных вращениях спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите // ПММ. 2022. Т. 86. № 3. С. 313–328. <https://doi.org/10.31857/S003282352203002X>
9. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
11. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
12. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Матем. сб. 1952. Т. 73. № 3. С. 575–586.

RESONANT ROTATIONS OF A DYNAMICALLY SYMMETRICAL SATELLITE WITH A BALL DAMPER IN A CIRCULAR ORBIT

N. A. Amel'kin^{a, *}

^aMoscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

** e-mail: namelkin@mail.ru*

Abstract – For a satellite with a ball damper, the effect of internal dissipation on rotational motion in the central gravitational field is studied. The equations of rotational motion of a dynamically symmetric satellite with a spherical damper in an elliptical orbit are obtained. For the case of a circular orbit, the spatial resonance rotations of a dynamically symmetric satellite with a ball damper were investigated using the averaging method.

Keywords: gravitational field, satellite with ball damper, averaging method, evolutionary equations, spatial resonant rotations in circular orbit

REFERENCES

1. *Amel'kin N.I.* The asymptotic properties of the motions of satellites in a central field due to internal dissipation // *J. Appl. Math. Mech.* 2011. V. 75. № 2. P. 140–153. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.05.003>
2. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field // *J. Appl. Math. Mech.* 2017. V. 81. № 2. P. 85–94. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.002>
3. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Steady rotations of a satellite with internal elastic and dissipative forces // *J. Appl. Math. Mech.* 2017. V. 81. № 6. P. 431–441. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2018.03.011>
4. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 2. P. 179–189. <https://doi.org/10.3103/S0025654419030014>
5. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 2. P. 190–203. <https://doi.org/10.3103/S0025654419030026>
6. *Amel'kin N.I.* Evolution of the rotational motion of a planet in a circular orbit under the influence of internal elastic and dissipative forces // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. № 2. P. 234–247. <https://doi.org/10.3103/S0025654420020053>
7. *Amel'kin N.I.* Evolution of rotational motion of the planet Earth under the influence of internal dissipative forces // *Cosmic Res.* 2023. V. 61. № 6. P. 510–521. <https://doi.org/10.1134/S001095252370051X>
8. *Amel'kin N.I.* On the plane resonant rotations of a satellite with a spherical damper in an elliptical orbit // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. № 7. P. 1644–1656. <https://doi.org/10.31857/S003282352203002X>
9. *Beletskii V.V.* Motion of a Satellite with Respect to Center of Mass in Gravitational Field. Moscow: Izd. MGU, 1975 (in Russian).
10. *Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.* Asymptotic Methods for Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
11. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Applied Methods for Oscillations Theory. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
12. *Tikhonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters at derivatives // *Math. collection.* 1952. V. 73. № 3. P. 575–586 (in Russian).

УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ ИЗМЕНЯЕМОГО ТЕЛА В СИЛОВОМ ПОЛЕ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ

© 2024 г. А. А. Буров^{а, *}, В. И. Никонов^{а, **}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской Академии Наук, Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru, **e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 20.10.2023 г.

После доработки 19.12.2023 г.

Принята к публикации 28.12.2023 г.

Рассматривается задача о поступательно-вращательном движении изменяемого тела в предположении о том, что инерциальные свойства тела, а также действующие на него внешние силы и моменты сил явно зависят от времени. Указываются условия, при которых уравнения движения сводятся к классическим уравнениям, описывающим движения твердого тела в силовом поле, не зависящем от времени. Отмечаются случаи, когда уравнения движения сводятся к вполне интегрируемым. Воспроизводятся элементы дискуссии 1920–1930-х гг. об описании движения материальной точки переменной массы в зависящем от времени поле притяжения.

Ключевые слова: поступательно-вращательное движение изменяемого тела, зависящие от времени инерциальные свойства, зависящие от времени силы, замена времени, замена переменных.

DOI: 10.31857/S1026351924030092, EDN: UHUNMR

1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть $Ox_\alpha X_\beta X_\gamma$ — абсолютная прямоугольная декартова система отсчета (АСО), $Sx_1x_2x_3$ — подвижная прямоугольная декартова система отсчета (ПСО), начало которой — точка S — совершает движение в трехмерном евклидовом пространстве. Предполагается, что оси ПСО могут быть произвольным образом ориентированы относительно осей АСО. Пусть P_1, \dots, P_n — точки массами $m_1(t), \dots, m_n(t)$, в общем случае зависящими от времени. Положение этих точек задается векторами

$$\overrightarrow{OP}_k = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{CP}_k. \quad (1.1)$$

Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

– ортогональная матрица, по строкам которой записаны единичные векторы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ АСО, заданные своими проекциями на оси ПСО. Задающая ориентацию матрица \mathbf{S} зависит от времени: $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$. При этом кососимметричная матрица

$$\hat{\omega} = \mathbf{S}^{-1} \frac{d\mathbf{S}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S}\hat{\omega} \quad (1.2)$$

называется матрицей угловой скорости:

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По ее компонентам определяется вектор угловой скорости ПСО относительно АСО

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T,$$

заданный в проекциях на оси ПСО.

В дальнейшем будем обозначать заглавными буквами проекции вектора на оси АСО и такими же строчными буквами — проекции вектора на оси ПСО. Тогда равенство (1.1) можно записать как

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{R} + \mathbf{X}_k = \mathbf{R} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}_k \quad (1.3)$$

Здесь и далее \mathbf{P}_k — вектор \overline{OP}_k , заданный в проекциях на оси АСО, \mathbf{R} — вектор \overline{OP} , также заданный в проекциях на оси АСО, $\mathbf{X}_k = (X_{k\alpha}, X_{k\beta}, X_{k\gamma})^T$ и $\mathbf{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})^T$ — вектор \overline{CP}_k , заданный в проекциях на оси АСО и ПСО соответственно.

Дифференцируя равенство (1.3) по времени, выписываем выражение для скорости точки P_k :

$$\dot{\mathbf{P}}_k = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{X}}_k = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{x}}_k. \quad (1.4)$$

Домножая левую и правую части (1.4) слева на \mathbf{S}^{-1} , имеем:

$$\mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{P}}_k = \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{X}}_k = \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{S}^{-1} \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{x}}_k.$$

Отсюда находим соотношение

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \equiv \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k, \quad (1.5)$$

позволяющее выразить абсолютную скорость \mathbf{v}_k точки P_k через абсолютную скорость \mathbf{v} точки C , через угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$, через вектор \mathbf{x}_k , задающий положение точки P_k относительно ПСО, и, наконец, через вектор $\dot{\mathbf{x}}_k$, задающий скорость движения точки P_k относительно ПСО.

Будем считать, что законы движения точек относительно ПСО заданы:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(t),$$

где $x_{1k}(t)$, $x_{2k}(t)$, $x_{3k}(t)$ — гладкие функции времени. Тогда кинетическая энергия системы в целом определяется как

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(m_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + \dots + m_n(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n)) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k, \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k + \dot{\mathbf{x}}_k) \equiv \\
&\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{B}(t)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}(t)\mathbf{v}, \mathbf{v}) + (\mathbf{D}(t), \boldsymbol{\omega}) + (\mathbf{E}(t), \mathbf{v}) + T_0(t),
\end{aligned}$$

где функция $T_0(t)$ зависит только от времени и при дальнейшем составлении уравнений движения роли не играет.

Согласно теоремам об изменении количества движения и момента количества движения уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \right) &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right) &= \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ — результирующие внешняя сила и момент внешних сил соответственно. Вводя обозначения

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{B}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{E}, \mathbf{M} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{D},$$

запишем эти уравнения в явном виде¹:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.6)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p} \times \mathbf{v} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.7)$$

Эти уравнения должны быть дополнены уравнениями Эйлера:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.8)$$

описывающими изменение вектора \overline{OC} в ПСО, а также уравнениями Пуассона:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.9)$$

представляющими собой записанное в векторном виде матричное равенство (1.2). Справедливо

¹ Здесь и далее, где это не приводит к утрате смысла, аргумент (t) при тензорных и векторных величинах опускается.

Утверждение 1. Если существует функция $f(t) > 0 \quad \forall t$, такая, что

$$\mathbf{A}(t) = f(t)\mathbf{A}_*, \quad \mathbf{B}(t) = f(t)\mathbf{B}_*, \quad \mathbf{C}(t) = f(t)\mathbf{C}_*, \quad \mathbf{D}(t) = \mathbf{D}_*, \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_*, \quad (1.10)$$

$$f(t)\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{F}_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad f(t)\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{Q}_*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (1.11)$$

где тензоры \mathbf{A}_* , \mathbf{B}_* и \mathbf{C}_* , а также вектор \mathbf{D}_* и \mathbf{E}_* постоянны в осях ПСО, а векторы $\mathbf{F}_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ и $\mathbf{Q}_*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ не зависят явно от времени, то заменой независимой переменной $t \rightarrow t_*$:

$$f(t) \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_*} \quad (1.12)$$

и переменных \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}_* = f(t)\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega}_* = f(t)\boldsymbol{\omega} \quad (1.13)$$

уравнения (1.6), (1.7), а также уравнения (1.9) и (1.8) приводимы к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_*}{dt_*} &= \mathbf{p}_* \times \boldsymbol{\omega}_* + \mathbf{F}_*, & \frac{d\mathbf{M}}{dt_*} &= \mathbf{M}_* \times \boldsymbol{\omega}_* + \mathbf{p}_* \times \mathbf{v}_* + \mathbf{Q}_*, \\ \mathbf{p}_* &= \frac{\partial T_*}{\partial \mathbf{v}_*}, & \mathbf{M}_* &= \frac{\partial T_*}{\partial \boldsymbol{\omega}_*}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$T_* = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_* \boldsymbol{\omega}_*, \boldsymbol{\omega}_*) + (\mathbf{B}_* \boldsymbol{\omega}_*, \mathbf{v}_*) + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_* \mathbf{v}_*, \mathbf{v}_*) + (\mathbf{D}_*, \boldsymbol{\omega}_*) + (\mathbf{E}_*, \mathbf{v}_*), \quad (1.15)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt_*} = \mathbf{v}_* + \mathbf{r}_* \times \boldsymbol{\omega}_*, \quad (1.16)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt_*} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}_*, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt_*} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}_*, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt_*} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}_*. \quad (1.17)$$

Правые части уравнений (1.14), (1.15) не зависят явно от времени и имеют вид уравнений Кирхгофа–Клебша из динамики твердого тела в жидкости под действием не зависящих явно от времени результирующей силы и результирующего крутящего момента. Уравнения (1.17) и (1.16) отличаются от уравнений (1.9) и (1.8) лишь обозначениями.

Доказательство. Прежде всего подставим условия (1.10) в уравнения (1.14). Имеем

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{B}_* \boldsymbol{\omega} + f\mathbf{C}_* \mathbf{v} + \mathbf{E}_*) = (f\mathbf{B}_* \boldsymbol{\omega} + f\mathbf{C}_* \mathbf{v} + \mathbf{E}_*) \times \boldsymbol{\omega}_* + \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Домножая левую и правую части этих уравнений на $f(t)$, выполняя замену времени (1.12) и переменных (1.13), а также используя условие (1.11), после преобразований приходим к (1.14), что и требовалось. Далее, подставляя условия (1.10) в уравнения (1.14), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f\mathbf{A}_* \boldsymbol{\omega} + f\mathbf{B}_*^T \mathbf{v} + \mathbf{D}_*) &= (f\mathbf{A}_* \boldsymbol{\omega} + f\mathbf{B}_*^T \mathbf{v} + \mathbf{D}_*) \times \boldsymbol{\omega} + \\ &+ (f\mathbf{B}_* \boldsymbol{\omega} + f\mathbf{C}_* \mathbf{v} + \mathbf{E}_*) \times \mathbf{v} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

Вновь домножая левую и правую части этих уравнений на $f(t)$, выполняя замену времени (1.12) и переменных (1.13), а также используя условие (1.11), после преобразований приходим к (1.15), что и требовалось.

Наконец, что касается уравнений Эйлера (1.8) и Пуассона (1.9), то также домножая их левые и правые части на $f(t)$ и используя замену переменных (1.13), получаем уравнения (1.16) и (1.17), отличающиеся от уравнений Эйлера (1.8) и уравнений Пуассона (1.9) лишь обозначениями.

2. Случай потенциальных внешних сил. Предположим, что система совершает движение в потенциальном поле внешних сил с потенциалом

$$U = U(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.1)$$

выражающим зависимость от времени, от положения и от ориентации тела. При этом результирующая сила и результирующий момент сил, как известно, записываются как

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Q}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{r} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}. \quad (2.3)$$

Утверждение 2. Если в условиях утверждения 1 силы потенциальны и потенциал (2.1) имеет вид:

$$f(t)U(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = U_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.4)$$

то уравнения движения сводятся к независимым от времени уравнениям типа уравнений Кирхгофа–Клебша, описывающих поступательно-вращательное движение тела в трехмерном евклидовом пространстве.

Доказательство сводится к непосредственной подстановке условия (2.4) в соотношения (2.2) и (2.3) для результирующей силы и результирующего момента сил соответственно.

Рассмотрим некоторые известные специальные случаи такого потенциала, для которых предлагаемая замена переменных и времени приводит к классическим задачам механики твердого тела.

3. Свободное движение системы. Пусть выполнено условие

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \equiv 0, \quad \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \equiv 0. \quad (3.1)$$

В этом случае при выполнении условий утверждения 1 возникающие динамические уравнения (1.14), (1.15) отделяются от кинематических уравнений (1.16), (1.17) и всегда обладают тремя первыми интегралами:

$$\mathcal{J}_0 = (\mathbf{p}_*, \mathbf{v}_*) + (\mathbf{M}_*, \boldsymbol{\omega}_*) - T_*, \quad \mathcal{J}_1 = (\mathbf{p}_*, \mathbf{M}_*), \quad \mathcal{J}_2 = (\mathbf{p}_*, \mathbf{p}_*),$$

причем вектор \mathbf{p} остается неизменным в абсолютном пространстве.

В случае, когда условия (3.1) выполнены, четвертый, дополнительный интеграл, знание которого достаточно для интегрирования уравнений движения в квадратурах, существует в ряде случаев при выполнении дополнительных условий, таких как условия Клебша, Кирхгофа, Стеклова, Ляпунова, Чаплыгина и др. (см., например, [1]).

Замечание 1. Изучаемые уравнения (1.6)–(1.9) при выполнении условий существования потенциала (2.1) посредством преобразования Лежандра по скоростям и угловым скоростям в общем случае приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ \dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{p} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \end{aligned}$$

с функцией Гамильтона

$$f(t)H(t, \mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = H_*(\mathbf{M}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).$$

Для таких систем замена независимой переменной $t \mapsto t_*$ вида (1.12) выглядит вполне естественной и очевидной.

4. О движении точки переменной массы в ньютоновском поле сил. Обратим внимание на то обстоятельство, что задача о движениях материальной точки переменной массы в центральном ньютоновском поле сил была объектом активного изучения в работах Т. Леви-Чивита, Г.Н. Дубошина и В.В. Степанова [2–10]. В частности, в этой задаче имеется случай, когда уравнения движения сводятся к классическим уравнениям движения в задаче Кеплера.

4.1. Сведение к задаче Кеплера. На самом деле, пусть P — материальная точка, масса которой зависит от времени: $m = m(t)$. Предполагается, что движение совершается в центральном поле ньютоновского притяжения с центром в точке O , интенсивность которого также зависит от времени и определяется множителем $f = f(t)$. Пусть $\mathbf{r} = \overline{OP}$ — радиус-вектор точки P , $r = |\overline{OP}|$ — расстояние от точки P до притягивающего центра. Здесь и далее все векторы заданы своими проекциями на оси абсолютной системы отсчета. Для описания движения естественно воспользоваться подходом И.В. Мещерского, предложенным для описания движения систем переменной массы [11]. В рамках этого подхода уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -fm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{4.1}$$

Введение нового времени

$$t = t(t_*) : \frac{d}{dt_*} = m(t) \frac{d}{dt} \tag{4.2}$$

позволяет переписать эти уравнения в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt_*^2} = -f_* \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad f_*(t_*) \equiv [f(t) \cdot m^2(t)]_{t=t_*}. \quad (4.3)$$

Если величина f_* постоянна, то (4.3) — не что иное, как классические уравнения Кеплера, возникающие в случае, когда и масса точки, и интенсивность поля притяжения постоянны.

Замечание 2. Величина $f(t)$ представляет собой произведение гравитационной постоянной G и массы притягивающего тела: $f(t) = GM(t)$. В то время как трудно представить себе гравитационную постоянную, меняющуюся со временем, масса притягивающего тела $M(t)$ может со временем меняться за счет поглощения и испускания материи.

Замечание 3. Уравнения (4.3) относятся к классу знаменитых уравнений Гильдена–Мещерского [12, 13]. В многочисленных работах, восходящих к основополагающим публикациям [4, 13, 14], были развиты подходы к их интегрированию (см. обзоры в [15, 16]).

4.2. Дискуссии. В свое время уравнения (4.1) и (4.3) были предметом оживленной дискуссии. Сравнивая такие уравнения, проф. Г.Н. Дубошин в своей работе [10], в частности, пишет: “*В общем случае, когда масса t есть функция времени (например, рассматриваемая нами задача), можно исходить, как делают некоторые авторы, из другого, более общего закона и писать вместо формулы (4)² следующую³*”

$$\frac{d(mv)}{dt} = F, \quad (5)$$

выражающую, что “изменение количества движения = силе”.

Так как формулы (4) и (5) обе представляют собой принятые определения, то они обе одинаково аксиоматичны и, следовательно, нет никаких оснований предпочесть одну другой.

Следуя примеру большинства исследователей, я также выбрал из этих двух аксиом — первую, как более простую и позволяющую вместе с тем вести исследование в рамках классической механики”.

По мнению авторов, предложенная замена независимой переменной (4.2) указывает на то, что в противопоставлении двух типов аксиоматик, выделенных проф. Г.Н. Дубошиным, нет особой необходимости.

Представляется поучительным привести здесь продолжение той же цитаты из публикации [10]. После нее проф. Г.Н. Дубошин пишет: “*Однако необходимо отметить, что Леви-Чивита (T. Levi-Civita) пытался⁴ доказать формулу (5), рассматривая изменение массы тела t , как налипание на него со всех сторон малых материальных частиц космической пыли в случае увеличения массы, и как выбрасывание частиц (émission) в случае ее уменьшения.*”

² Аналог уравнений (4.3), примечание авторов.

³ Аналог уравнений (4.1), примечание авторов.

⁴ Вероятно, имеются в виду публикации [2, 3], присутствующие в списке литературы работы.

Но гипотезы, положенные Леви-Чивита в основу этого вывода, вызывают ряд недоумений и возражений, а потому формула (5) не может считаться доказанной и остается по-прежнему аксиомой⁵. Остается лишь сожалеть о том, что детали упоминаемого обсуждения остались за рамками цитируемого текста. Ведь обсуждаемые уравнения весьма близки уравнениям И.В. Мещерского для систем переменной массы, изложенные, в частности, в его цитируемой, но не обсуждаемой работе [11].

Замечание 4. В работе фактически не обсуждаются физически мотивированные источники изменения массы и формы. Среди них могут быть, например, как испарение и сублимация, так и налипание пыли (см., например, [17]). Общие подходы к исследованию таких систем предложены в работе [18] (см. также [19]).

5. Выводы. Среди систем с изменением распределения масс надо прежде всего выделить так называемые подобно-деформируемые тела, исследование движения которых восходит к публикации Д.Н. Зейлигера [20]. Эти исследования, продолженные Н.Г. Четаевым [21] (см. также [22]), получили развитие в ряде работ, посвященных решению задач теории групп, дифференциальной геометрии и математической физики [23–26]. Примеры использования аффинно-деформируемых тел и особенности их динамики в задачах орбитальной динамики обсуждаются в работе [27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов А.В. Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
2. *Levi-Civita T.* Sul moto di un corpo di massa variabile // *Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei.* 1928. V. 8. P. 329–333.
3. *Levi-Civita T.* Ancora sul moto di un corpo di massa variabile // *Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei.* 1930. V. 11. P. 626–632.
4. *Doubochine G.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps // *Русский астрономический журнал.* 1925. Т. 2. № 4. С. 5–11.
5. *Doubochine G.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps. II // *Русский астрономический журнал.* 1927. Т. 4. № 2. С. 123–141.
6. *Дубошин Г.Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. II // *Русский астрономический журнал.* 1927. Т. 4. № 2. С. 141–142.
7. *Дубошин Г.Н.* Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. III. Исследование одного частного случая // *Русский астрономический журнал.* 1928. Т. 5. № 2–3. С. 138–151.

⁵ Подстрочник под цитатой: “Работы Леви-Чивиты по этому вопросу были подвергнуты критическому обсуждению на одном из заседаний отдела Теоретической астрофизики при Государственном Астрофизическом институте, где членами Отдела и были сделаны упомянутые возражения. 27 мая 1930 г. на научном собрании института заведующий отделом Теоретической астрофизики проф. В.В. Степанов изложил эти возражения, дополненные и развитые более детально им лично”.

8. *Doubochine G.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps. IV. Une méthode nouvelle pour la resolution du problème // Русский астрономический журнал. 1929. Т. 6. № 2. С. 162–179.
9. *Stepanoff W.* Sur la forme de trajectoires d'un point matériel dans le cas de l'attraction Newtonienne d'une masse variable // Русский астрономический журнал. 1930. Т. 7. № 2. С. 73–80.
10. *Doubochine G.* Sur la forme de trajectoires dans le problème des deux corps de masse variables. // Астрономический журнал. 1930. Т. 7. № 3–4. С. 153–172.
11. *Мещерский И.* Динамика точки переменной массы. СПб.: Тип. Имп. АН, 1897. 160 с.
12. *Gyldén H.* Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind // Astronomische Nachrichten. 1884. V. 109. № 1–2. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1002/asna.18841090102>
13. *Mestschersky J.* Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems. (A. N.2593) // Astronomische Nachrichten. 1893. V. 132. № 9. P. 3153 (129–130).
14. *Mestschersky J.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse // Astronomische Nachrichten. 1902. V. 159. № 15. P. 229–242.
15. *Беркович Л.М.* Задача Гильдена–Мещерского и законы изменения массы // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. № 5. С. 1088 – 1091.
16. *Беков А.А.* Динамика двойных нестационарных гравитирующих систем. Алматы: Гылым, 2013. 170 с.
17. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Eng. Science. 2004. V. 42. № 19-20. P. 2159–2174.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.07.010>
18. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass. International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures. 2014. V. 557. P. 1–50.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1809-2_1
19. *Cveticanin L.* Dynamics of machines with variable mass. 1st edition. London: Routledge, 1998. 300 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203759066>
20. *Зейлигер Д.Н.* Теория движения подобно-изменяемого тела. Казань: тип. Имп. Казан. ун-та. 1892. 105 с.
21. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях движения подобно-изменяемого тела // Учен. зап. Казан. ун-та. 1954. Т. 114. № 8. С. 5–7.
22. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 368 с.
23. *Ślawianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM. 1982. V. 62. № 6. P. 229–240.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19820620604>
24. *Ślawianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $GL(n, \mathbb{R})$ // Rep. on Math. Phys. 1988. V. 26. № 1. P. 73 – 119.
[https://doi.org/10.1016/0034-4877\(88\)90006-7](https://doi.org/10.1016/0034-4877(88)90006-7)
25. *Ślawianowski J.J., Kovalchuk V., Golubowska B. et al.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 446. № 1. P. 493–520.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.042>

26. *Burov A. A., Chevallier D. P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // Reports on Math. Phys. 2008. V. 62. № 3. P. 283–321.
[https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(09\)00003-2](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(09)00003-2)
27. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2019. V. 131. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1007/s10569-018-9874-0>

MOTION OF A VARIABLE BODY IN A TIME-DEPENDENT FORCE FIELD

A. A. Burov^{a, *}, V. I. Nikonov^{a, **}

^a Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*e-mail: jtm@narod.ru, **e-mail: nikon_v@list.ru

The problem of translational-rotational motion of a variable body is considered under the assumption that the inertial properties of the body, as well as the external forces acting on it and the moments of forces clearly depend on time. The conditions under which the equations of motion are reduced to classical equations describing the motion of a solid body in a force field independent of time are indicated. There are cases when the equations of motion are reduced to completely integrable ones. The elements of the discussion of the 1920-1930 on the description of the motion of a material point of variable mass in a time-dependent field of attraction are reproduced.

Keywords: translational-rotational motion of a variable body, time-dependent inertial properties, time-dependent forces, time substitution, variable substitution

REFERENCES

1. *Borisov, A.V. and Mamaev, I.S.* Rigid Body Dynamics. Hamiltonian Methods, Integrability, Chaos. Institute of computer Science, Moscow, 2005. 576 p.
2. *Levi-Civita T.* Sul mote di un corpo di massa variabile // Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei. 1928. V. 8. P. 329–333.
3. *Levi-Civita T.* Ancora sul moto di un corpo di massa variabile // Rendiconti delle Sedute della Reale Accademia dei Lincei. 1930. V. 11. P. 626 – 632.
4. *Dobochine G.* Mouvement d’un point matériel sous l’action d’une force qui dépend du temps // Russian Astronomical Journal. 1925. V. 2. № 4. P. 5–11.
5. *Dobochine G.* Mouvement d’un point matériel sous l’action d’une force qui dépend du temps. II // Russian Astronomical Journal. 1927. V. 4. № 2. P. 123–141.
6. *Dobochine G.N.* On the motion of a material point under the action of a time-dependent force. II // Russian Astronomical Journal. 1927. V. 4. № 2. P. 141–142.

7. *Dobochine G.N.* On the motion of a material point under the action of a time-dependent force. III. Investigation of a particular case // Russian Astronomical Journal. 1928. V. 5. № 2–3. P. 138–151.
8. *Dobochine G.* Mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force qui dépend du temps. IV. Une méthode nouvelle pour la résolution du problème // Russian Astronomical Journal. 1929. V. 6. № 2. P. 162–179.
9. *Stepanoff W.* Sur la forme de trajectoires d'un point matériel dans le cas de l'attraction Newtonienne d'une masse variable // Russian Astronomical Journal. 1930. V. 7. № 2. P. 73–80.
10. *Dobochine G.* Sur la forme de trajectoires dans le problème des deux corps de masse variables. // Astronomical Journal. 1930. V. 7. № 3–4. P. 153–172.
11. *Mestschersky I.* The dynamics of a point of variable mass. St. Petersburg: Type. Imp. AN. 1897. 160 p.
12. *Gyldén H.* Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind // Astronomische Nachrichten. 1884. V. 109. № 1. P. 2593–2594 (1–4).
13. *Mestschersky J.* Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems. (A. N.2593) // Astronomische Nachrichten. 1893. V. 132. № 9. P. 3153 (129–130).
14. *Mestschersky J.* Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse // Astronomische Nachrichten. 1902. V. 159. № 15. P. 3807 (231–242).
15. *Berkovich L.M.* The Gilden–Meshchersky problem and the laws of mass change // Dokl. USSR Academy of Sciences. 1980. V. 250. № 5. C. 1088 – 1091.
16. *Bekov A.A.* Dynamics of double nonstationary gravitational systems. Almaty: Gylm. 2013. 170 c.
17. *Ong J.J., O'Reilly O.M.* On the equations of motion for rigid bodies with surface growth // Int. J. Eng. Science. 2004. V. 42. № 19–20. P. 2159–2174.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2004.07.010>.
18. *Irschik H., Humer A.* A rational treatment of the relations of balance for mechanical systems with a time-variable mass and other non-classical supplies // Dynamics of Mechanical Systems with Variable Mass. International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures. V. 557. 2014. P. 1–50.
https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1809-2_1.
19. *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. 1st edition. London: Routledge. 1998. 300 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203759066>
20. *Zeiliger D.N.* Theory of motion of a similarly changeable body. Kazan: type. Kazan Imperial University. 1892. 105 p.
21. *Chetaev N.G.* On the equations of motion of a similarly variable body // Scientific notes of the Kazan University. 1954. Vol. 114. P. 5–7.
22. *Chetaev N.G.* Theoretical mechanics. M.: Nauka. 1987. 368 p.
23. *Ślawianowski J.J.* The mechanics of the homogeneously-deformable body. Dynamical models with high symmetries // ZAMM. 1982. V. 62. № 6. P. 229–240.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19820620604>.
24. *Ślawianowski J.J.* Affinely rigid body and Hamiltonian systems on $GL(n, \mathbb{R})$ // Reports on Mathematical Physics. 1988. V. 26. № 1. P. 73–119.
[https://doi.org/10.1016/0034-4877\(88\)90006-7](https://doi.org/10.1016/0034-4877(88)90006-7).

-
25. *Sławianowski J.J., Kovalchuk V., Golubowska B. et al.* Mechanics of affine bodies. Towards affine dynamical symmetry // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. V. 446. № 1.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.08.042>.
 26. *Burov A.A., Chevallier D.P.* Dynamics of affinely deformable bodies from the standpoint of theoretical mechanics and differential geometry // *Reports on Math. Phys.* 2008. V. 62. № 3. P. 283–321.
[https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(09\)00003-2](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(09)00003-2)
 27. *Burov A., Guerman A., Kosenko I.* Satellite with periodical mass redistribution: relative equilibria and their stability // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2019. V. 131. P. 1 (1–12).
<https://doi.org/10.1007/s10569-018-9874-0>

УДК 531

ТЕОРЕМА О ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЗАКРИТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТОНКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

© 2024 г. С. В. Селюгин^а, *

^аМосковский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский
Университет), Москва, Россия

*e-mail: selyuginSV@mai.ru

Поступила в редакцию 20.12.2023 г.

После доработки 9.01.2024 г.

Принята к публикации 16.01.2024 г.

Рассматриваются композитные закритически деформируемые тонкие пластины в приближении фон Кармана. На основе использования первого тензора напряжений Пиола и тензора градиентов перемещений доказана вариационная теорема о дополнительной энергии. Доказательство проведено в рамках гипотез Кирхгоффа. Укладка слоев пластины считается симметричной, углы укладки слоев могут меняться от точки к точке пластины. В соответствии с теоремой для действительно реализующегося напряженного состояния пластины ее дополнительная энергия (как функционал от внутренних сил и моментов) достигает стационарного значения, в сравнении с другими статически возможными состояниями. Доказанная теорема составляет содержание статического вариационного принципа возможных напряжений, приводящего к линейным соотношениям для погонных сил/моментов, создаваемых соответствующими компонентами первого тензора напряжений Пиола, и 2D-деформациями/кривизнами. Представлен пример, иллюстрирующий использование полученных теоретических результатов.

Ключевые слова: композитные пластины, закритическое деформирование, дополнительная энергия, первый тензор напряжений Пиола

DOI: 10.31857/S1026351924030108, EDN: UHUDGU

1. Введение. Поведение анизотропных слоистых и композитных пластин широко исследовалось начиная с 30-х гг. XX в. (начиная от фанерных конструкций и переходя затем к угле- и стеклопластиковым конструкциям). В последней трети XX в. значительное внимание уделялось изучению закритического деформирования (т.е. деформирования после потери устойчивости) этих пластин. Так, например, в авиационных конструкциях учет такого деформирования при нагрузках от так называемых эксплуатационных (потеря устойчивости при них не допускается) до в 1.5 раза более

высоких расчетных позволяет существенно увеличить несущую способность конструкции и улучшить ее весовое совершенство.

Обзорные статьи [1–3] описывают состояние зарубежных исследований в области композитных конструкций, нагруженных нагрузками выше нагрузок потери устойчивости. Из последних отечественных работ по этой тематике укажем [4–6].

Большинство работ в обсуждаемой области посвящены разного рода численным подходам. Все такие подходы основываются или на прямом интегрировании (в том или ином приближении) уравнений равновесия, или на кинематическом описании поведения конструкции в форме кинематического (или смешанного) вариационного принципа. В частности, работа [7] посвящена специальному смешанному вариационному подходу для закритически деформируемых композитных пластин со слоями меняющейся ориентации (так называемых Variable Angle Tow-VAT пластин). При этом использован подход, описанный в работе [8], § 8.5, применительно к композитным пластинам. Варьируемыми величинами в работе [8] являются как перемещения, так и силовые факторы. Чисто статический принцип (для дополнительной энергии конструкции) при закритическом деформировании композитных пластин до настоящего времени не использовался.

В общей нелинейной теории упругости дополнительный вариационный принцип (названный, например, в [9] принципом стационарности дополнительной работы деформации второго рода) известен. Варьируемыми величинами при этом являются как перемещения, так и напряжения.

Известно, что подход с дополнительной энергией является плодотворным для нелинейных задач, если удастся вывести функционал дополнительной энергии в зависимости только от внутренних силовых факторов. Для того чтобы сделать это, необходимо (см. [8], § 14.4) обратить связь напряжение–деформация и выразить градиенты перемещений в конструкции как функции компонент первого тензора напряжений Пиола. Как сказано в работе [8], “к сожалению, в общем случае такое обращение весьма затруднительно”. Но в нескольких частных случаях такое обращение все же возможно. Например, в работе [10], посвященной вариационным принципам для изотропных пластин фон Кармана, такое обращение было выполнено и доказана стационарность общей дополнительной энергии изгибаемой пластины. Также следует упомянуть работу [11], в которой рассмотрены изотропные пластины и оболочки (в том числе с центральным сотовым слоем внутри) при конечных умеренных прогибах и доказан дополнительный вариационный принцип при варьировании внутренних усилий и перемещений.

В настоящей работе рассмотрен и доказан чисто статический вариационный принцип для тонких композитных пластин фон Кармана при закритическом деформировании. Рассмотрение ведется на основе использования первого тензора напряжений Пиола и тензора градиентов перемещений. Так как целью является изучение поведения пластин за пределами устойчивости, то рассматривается представляющая наибольший интерес симметричная укладка слоев (предел устойчивости в случае несимметричной укладки будет, как известно, существенно ниже). Углы ориентации слоев могут меняться от точки к точке.

Работа состоит из следующих разделов. В разделе 2 описаны принятые определения и допущения. Раздел 3 посвящен кинематике деформирования пластины и обсуждению кинематического вариационного принципа. В разделе 4 представлены вывод и доказательство теоремы о дополнительной энергии и статического вариационного принципа для тонких композитных пластин. В разделе 5 представлен пример, иллюстрирующий использование полученных теоретических результатов. В разделе 6 приведены заключение и выводы работы.

2. Основные допущения. В данной работе приняты следующие основные предположения.

Рассматривается тонкая плоская композитная пластина толщиной h , составленная из $2K$ симметрично уложенных локально ортотропных слоев одинаковой толщины (обобщение на нечетное число слоев может быть легко выполнено при необходимости). Также возможно использование расположенного в срединной плоскости слоя из сотового материала, толщина которого достаточна для восприятия перерезывающей силы.

Пластина после потери устойчивости под нагрузкой в ее плоскости при дальнейшем повышении нагрузки деформируется в соответствии с приближением фон Кармана.

Толщина всей пластины много меньше любого ее линейного размера.

Рис. 1 иллюстрирует декартову систему координат XYZ , срединную плоскость Γ пластины, ограниченную гладким контуром C (состоящим из частей C_1 и C_2), нормаль и касательный вектор к этому контуру. На C_1 заданы силы, действующие в плоскости, а на C_2 — перемещения по x , y , z .

Волокна слоев композиционного материала считаются криволинейными и уложенными гладким образом.

Приняты гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали к поверхности Γ , означающие равенство нулю xz , yz , zz компонент тензора деформаций Грина.

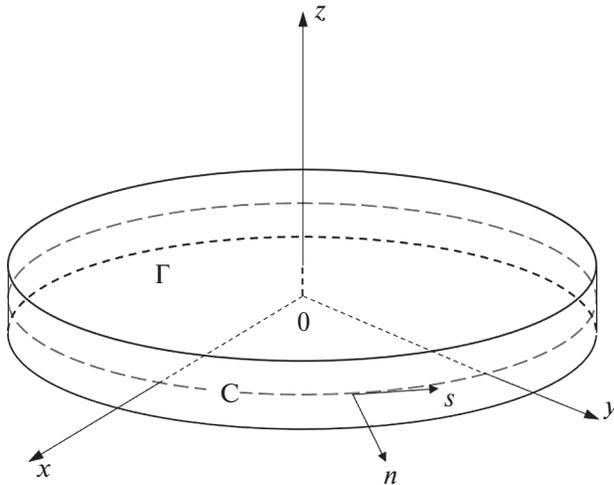


Рис. 1. Тонкая пластина.

Возможные краевые условия для пластины – защемление или простое опирание.

Первое (наименьшее) собственное значение потери устойчивости считается некрратным (изолированным). При закритическом деформировании не происходит перескока с одной моды потери устойчивости на другую.

Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам у тензоров и векторов.

Индекс после запятой означает дифференцирование по переменной, соответствующей этому индексу.

3. Закритическое деформирование пластины. Как известно (см. [9]), широко используемые в теории изгиба пластин гипотезы Кирхгоффа о прямой нормали и приближение фон Кармана описывают так называемые умеренные прогибы пластины, сравнимые с ее толщиной, но малые по сравнению с линейным размером пластины. В книге [12] также указывается, что наклон поверхности пластины при этом находится в пределах 15° .

В соответствии с приближением фон Кармана (см. [8]) перемещения u , v , w внутри пластины описываются формулами:

$$\begin{aligned} u &= u_0 - zw_{0,x}, \\ v &= v_0 - zw_{0,y}, \\ w &= w_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где индексом 0 обозначены перемещения в срединной плоскости.

Компоненты тензора Грина деформаций внутри пластины будут

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{0,x} + \frac{1}{2}(w_{0,x})^2 - zw_{0,xx} = u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2, \\ \varepsilon_{yy} &= v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_{0,y})^2 - zw_{0,yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2, \\ 2\varepsilon_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y} - 2zw_{0,xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где деформации в срединной плоскости соответствуют $z=0$.

Вариационный принцип для общей энергии пластины U рассмотренной конфигурации записывается в виде равенства нулю вариации этой энергии [8, 12]:

$$U = \int_{\Gamma} \pi(x, y) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv}u + \bar{N}_{yv}v) dC_1, \tag{3.3}$$

где \bar{N}_{xv} , \bar{N}_{yv} – заданные силы на единицу длины контура границы C_1 до деформации (заданные величины перемещений на части C_2 граничного контура будут помечены далее верхней чертой также), $\pi(x, y)$ – потенциальная энергия деформации пластины на единицу площади срединной поверхности до деформации. Эта энергия выводится из потенциальной энергии деформации слоя интегрированием по толщине пластины.

Компоненты тензора деформаций Грина слоя – это ε_x , ε_y , ε_{xy} (эти деформации описываются соответственно также (3.2)). Удельная потенциальная

энергия деформации слоя π_{ply}^V в объеме до деформации записывается в виде [14, 15]:

$$\pi_{ply}^V = \frac{1}{2} \bar{Q}_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} \bar{Q}_{22} \varepsilon_y^2 + 2\bar{Q}_{66} \varepsilon_{xy}^2 + \bar{Q}_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + 2\bar{Q}_{16} \varepsilon_x \varepsilon_{xy} + 2\bar{Q}_{26} \varepsilon_y \varepsilon_{xy}, \quad (3.4)$$

где напряжения в слое $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ и деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ связаны соотношением:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix}.$$

где $\bar{Q}_{ij}, i, j = 1, 2, 6$, – элементы матрицы упругих констант слоя.

Компоненты первого тензора напряжений Пиола σ_{ij}^p и второго тензора напряжений Кирхгоффа σ_{ij} (называемого далее просто тензором напряжений Кирхгоффа) даются соотношениями (u, v, w эквивалентно записи $v_i, i = 1, 2, 3$ соответственно):

$$\sigma_{ij}^p = \frac{\partial \pi_{ply}^V(v_{i,j})}{\partial v_{j,i}}, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \pi_{ply}^V(e_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (3.6)$$

где $\pi_{ply}^V(\dots)$ – плотность потенциальной энергии деформации в единице недеформированного объема в соответствии с (3.4). Вообще говоря, тензор σ_{ij}^p является несимметричным. Вычисляя компоненты этого тензора для слоя по (3.5), получаем:

$$\sigma_{xx}^p = \bar{Q}_{11} \left(v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{12} \left(v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{16} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}), \quad (3.7)$$

$$\sigma_{yy}^p = \bar{Q}_{12} \left(v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{22} \left(v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \bar{Q}_{26} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^p = \sigma_{yx}^p = & \bar{Q}_{16} \left(v_{x,x} + \frac{1}{2} v_{z,x}^2 \right) + \bar{Q}_{26} \left(v_{y,y} + \frac{1}{2} v_{z,y}^2 \right) + \\ & + \bar{Q}_{66} (v_{x,y} + v_{y,x} + v_{z,x} v_{z,y}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Непосредственное дифференцирование (3.3) в соответствии с (3.6) дает xx, uu, xy, ux компоненты тензора напряжений Кирхгоффа, равными правым частям (3.7)–(3.9) соответственно.

Используя известные соотношения (см. [8] и упомянутое выше равенство компонент в плоскости для двух тензоров напряжений)

$$\sigma_{xz}^p = \sigma_{xx}^p v_{z,x} + \sigma_{xy}^p v_{z,y}, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{yz}^p = \sigma_{yx}^p v_{z,x} + \sigma_{yy}^p v_{z,y}, \quad (3.11)$$

получаем остающиеся ненулевые компоненты тензора σ_{ij}^p . Компоненты тензора σ_{ij} , отличающиеся от xx , yy , xy , yx , равны нулю.

Интегрируя по z через всю толщину пластины, введем следующие результирующие силы и моменты N_{ij} , M_{ij} :

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xx}^p) dz, \quad (3.12)$$

$$N_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{yy}^p) dz, \quad (3.13)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xy}^p) dz, \quad (3.14)$$

$$N_{xz} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{xz}^p) dz, \quad (3.15)$$

$$N_{yz} = \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{yz}^p) dz, \quad (3.16)$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{xx}^p) dz, \quad (3.17)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{yy}^p) dz, \quad (3.18)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} z(\sigma_{xy}^p) dz. \quad (3.19)$$

Подставляя (3.7)–(3.11) в (3.12)–(3.19) и используя определение матриц жесткости \mathbf{A} , \mathbf{D} для пластины через \bar{Q}_{ij} , $i, j = 1, 2, 6$ (см. [14, 15]), получаем эти силы и моменты.

Перепишем формулу для общей энергии пластины в виде:

$$U = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma - \int_{C_1} \left(\bar{N}_{xv} u + \bar{N}_{yv} v \right) dC_1, \quad (3.20)$$

где вектор-столбцы $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, \mathbf{k} есть, соответственно, 2D-деформации и кривизны срединной поверхности пластины.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left. \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \right|_{z=0},$$

$$\mathbf{k} = \left. \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{pmatrix} \right|_{z=0}.$$

Первый интеграл в (3.20) получается из (3.3) (с учетом (3.1) и (3.2)) после интегрирования по толщине.

Вариация энергии (3.20) будет

$$\delta U = \int_{\Gamma} \delta \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \mathbf{D} \mathbf{k} \right) d\Gamma - \int_{C_1} \left(\bar{N}_{xv} \delta u + \bar{N}_{yv} \delta v \right) dC_1. \quad (3.21)$$

Используя известное соотношение [8]

$$\delta \pi_{ply}^V = \frac{\partial \pi_{ply}^V}{\partial v_{j,i}} \delta v_{j,i} = \sigma_{ij}^p \delta v_{j,i}$$

и подставляя в него (3.1) для вычисления производных перемещений, после интегрирования по толщине пластины получаем вариацию потенциальной энергии деформации на единицу недеформированной площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & N_{xx} \delta u_{,x} + N_{yy} \delta u_{,y} + N_{xy} (\delta u_{,y} + \delta v_{,x}) + N_{xz} \delta w_{,x} + \\ & + N_{yz} \delta w_{,y} - M_{xx} \delta w_{,xx} - M_{yy} \delta w_{,yy} - 2M_{xy} \delta w_{,xy}. \end{aligned}$$

Далее обозначим n_x, n_y компоненты нормального вектора к граничному контуру для Γ . Используя их, введем x, y, z компоненты погонных сил N_{xv}, N_{yv}, N_{zv} , погонных моментов, и некоторые другие величины:

$$\begin{aligned} N_{xv} &= n_x N_{xx} + n_y N_{yx}, & M_{xv} &= n_x M_{xx} + n_y M_{yx}, \\ N_{yv} &= n_x N_{xy} + n_y N_{yy}, & M_{yv} &= n_x M_{xy} + n_y M_{yy}, \\ N_{zv} &= n_x N_{xz} + n_y N_{yz}, & M_{zv} &= n_x M_{xz} + n_y M_{yz}, \end{aligned}$$

$$V_z = (M_{xx,x} + M_{xy,y})n_x + (M_{xy,x} + M_{yy,y})n_y + N_{zv},$$

$$M_{vs} = -M_{xv}n_x + M_{yv}n_y.$$

Здесь и далее мы используем x и y компоненты нормали n_x, n_y к недеформированному граничному контуру, а также соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} = n_x \frac{\partial}{\partial n} - n_y \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = n_y \frac{\partial}{\partial n} + n_x \frac{\partial}{\partial s},$$

где n, s – нормальное и тангенциальное направления к граничному контуру. Интегрируя (3.21) по частям и используя теорему Остроградского–Гаусса, получаем вариацию общей энергии пластины:

$$\begin{aligned} \delta U = & - \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (N_{xx,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{yy,y})\delta v + \\ & (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y})\delta w \end{aligned} \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} \left[\begin{aligned} & (N_{xv} - \bar{N}_{xv})\delta u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv})\delta v + (V_z - \bar{F}_z)\delta w - \\ & -(M_v - \bar{M}_v)\delta w_{,n} - (M_{vs} - \bar{M}_{vs})\delta w_{,s} \end{aligned} \right] dC_1 + \\ & + \int_{C_2} [N_{xv}\delta u + N_{yv}\delta v + V_z\delta w - M_v\delta w_{,n} - M_{vs}\delta w_{,s}] dC_2, \end{aligned}$$

где для общности (см. [8]) записаны возможные значения моментов \bar{M}_v, \bar{M}_{vs} на C_1 (вычисляемые через возможные заданные на границе моменты $\bar{M}_{xv}, \bar{M}_{yv}$), а \bar{F}_z – возможная заданная z -сила на границе:

$$\bar{M}_v = n_x \bar{M}_{xv} + n_y \bar{M}_{yv}, \quad \bar{M}_{vs} = -\bar{M}_{xv}n_x + \bar{M}_{yv}n_y.$$

Это приводит (см. [8], § 8.2) к принципу виртуальных работ вида:

$$\begin{aligned} \delta U = & - \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (N_{xx,x} + N_{xy,y})\delta u + (N_{xy,x} + N_{yy,y})\delta v + \\ & (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y})\delta w \end{aligned} \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} \left[\begin{aligned} & (N_{xv} - \bar{N}_{xv})\delta u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv})\delta v + \\ & + ((V_z + M_{vs,s}) - (\bar{F}_z + \bar{M}_{vs,s}))\delta w - (M_v - \bar{M}_v)\delta w_{,n} \end{aligned} \right] dC_1 - \\ & - (M_{vs} - \bar{M}_{vs})\delta w |_{C_1} + \int_{C_2} [N_{xv}\delta u + N_{yv}\delta v + V_z\delta w - M_v\delta w_{,n}] dC_2 - \\ & - M_{vs}\delta w |_{C_2} = 0, \end{aligned} \tag{3.22}$$

где запись $(...)|_{C_1}$ означает разность на концах интервала. При выполнении условия заземления на части C_2 граничного контура

$$\delta u = \delta v = \delta w = \delta w_{,n} = 0$$

интеграл по C_2 и следующий за ним член исчезают. Везде далее это условие считается выполненным.

Тогда стационарность U по перемещениям ведет к уравнениям равновесия пластины в Γ :

$$\begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0, \\ M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где в соответствии с (3.10), (3.11), (3.15), (3.16):

$$\begin{aligned} N_{xz} &= N_{xx} w_{,x} + N_{xy} w_{,y}, \\ N_{yz} &= N_{yx} w_{,x} + N_{yy} w_{,y}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Третье уравнение в (3.23) после подстановки (3.24) ведет к известному уравнению z -равновесия пластины фон Кармана:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0.$$

При отсутствии \bar{F}_z , \bar{M}_v , \bar{M}_{vs} линейные силовые краевые условия на контуре C_1 по силам в направлениях x , y и условия закрепления на нем следуют из (3.22):

$$\begin{aligned} N_{xv} - \bar{N}_{xv} &= 0, \\ N_{yv} - \bar{N}_{yv} &= 0, \\ \delta w &= \delta w_{,n} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

В случае отсутствия закрепления по $w, w_{,n}$ на C_1 третья строка в (3.25) заменяется на

$$\begin{aligned} (V_z + M_{vs,s}) - (\bar{F}_z + \bar{M}_{vs,s}) &= 0, \\ M_v - \bar{M}_v &= 0. \end{aligned}$$

4. Статический вариационный принцип (теорема о дополнительной энергии).

Рассмотрим статический вариационный принцип, описывающий равновесие пластины при закритических прогибах после потери устойчивости.

Плотность дополнительной энергии слоя $\pi_{c_ply}^V$ и плотность потенциальной энергии деформации слоя π_{ply}^V удовлетворяют преобразованию Лежандра (в случае, если градиент перемещений может быть выражен через первый тензор напряжений Пиола):

$$\pi_{c_ply}^V(\sigma_{mp}^p) = \sigma_{kl}^p v_{l,k} - \pi_{ply}^V(v_{i,j}). \quad (4.1)$$

Используя (3.1), получаем:

$$\sigma_{kl}^p v_{l,k} = \sigma_{xx}^p (u_{,x} - z w_{,xx}) + \sigma_{yy}^p (v_{,y} - z w_{,yy}) + \sigma_{xy}^p (u_{,y} + v_{,x} - 2z w_{,xy}) + \sigma_{xz}^p w_{,x} + \sigma_{yz}^p w_{,y}.$$

Последний член из соотношения (4.1) может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \pi_{c_{ply}}^V = & \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^p)\left(u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^p)\left(v_{,y} - zw_{,yy} + \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^p)(u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} + w_{,x}w_{,y}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вычитая (4.2) из (4.1), получаем плотность дополнительной энергии слоя:

$$\begin{aligned} \pi_{c_{ply}}^V = & \frac{1}{2}(\sigma_{xx}^p)\left(u_{,x} - zw_{,xx} - \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + \frac{1}{2}(\sigma_{yy}^p)\left(v_{,y} - zw_{,yy} - \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + \\ & + \frac{1}{2}(\sigma_{xy}^p)(u_{,y} + v_{,x} - 2zw_{,xy} - w_{,x}w_{,y}) + (\sigma_{xz}^p)w_{,x} + (\sigma_{yz}^p)w_{,y}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Интегрируя (4.3) по z по толщине пластины, получаем дополнительную энергию на единицу недеформированной площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \pi_c = & \frac{1}{2}N_{xx}\left(u_{,x} - \frac{1}{2}w_{,x}^2\right) + \frac{1}{2}N_{yy}\left(v_{,y} - \frac{1}{2}w_{,y}^2\right) + \frac{1}{2}N_{xy}(u_{,y} + v_{,x} - w_{,x}w_{,y}) + \\ & + N_{xz}w_{,x} + N_{yz}w_{,y} + \frac{1}{2}M_{xx}(-w_{,xx}) + \frac{1}{2}M_{yy}(-w_{,yy}) + \frac{1}{2}M_{xy}(-2w_{,xy}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Интегрируя (3.10), (3.11) по толщине пластины, имеем:

$$w_{,x} = \frac{N_{yy}N_{xz} - N_{xy}N_{yz}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} = \gamma_1(N_{ij}), \quad (4.5)$$

$$w_{,y} = \frac{N_{xx}N_{yz} - N_{xy}N_{xz}}{N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2} = \gamma_2(N_{ij}). \quad (4.6)$$

Теперь определим вектор-столбцы:

$$\mathbf{N} = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})^T, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M} = (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})^T. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.5)–(4.8) в (4.4), получаем окончательное выражение для плотности дополнительной энергии на единицу недеформированной срединной поверхности:

$$\pi_c = \frac{1}{2}\mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2}\mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} + \frac{1}{2}N_{xz}\gamma_1(N_{ij}) + \frac{1}{2}N_{yz}\gamma_2(N_{ij}).$$

Функции γ_1, γ_2 в (4.5), (4.6) несовместны в случае произвольного напряженного состояния. Они становятся соответствующими производными прогибов для реального напряженного состояния.

Для формирования дополнительного вариационного функционала U_c и в целях большей общности учтем возможные заданные на C_1 z -силу \bar{F}_z и x, y моменты $\bar{M}_{vx}, \bar{M}_{vy}$. После этого перепишем функционал потенциальной энергии конструкции (3.3) в виде:

$$U = \int_{\Gamma} \pi(x, y) d\Gamma - \int_{C_1} (\bar{N}_{xv} u + \bar{N}_{yv} v + \bar{F}_z w - \bar{M}_{vs} w_{,x} - \bar{M}_{vy} w_{,y}) dC_1 \quad (4.9)$$

и подставим в этот функционал соотношение (4.1), проинтегрированное по толщине пластины.

Затем, интегрируя (4.9) по частям и используя теорему Остроградского–Гаусса, получаем функционал общей энергии U в виде:

$$\begin{aligned} U = & - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \int_{C_2} \left[N_{xv} \bar{u} + N_{yv} \bar{v} + (V_z + M_{vs,s}) \bar{w} - M_v \bar{w}_{,n} \right] dC_2 - \\ & - M_{vs} \bar{w} |_{C_2} - \int_{\Gamma} \left[(N_{xx,x} + N_{xy,y}) u + (N_{xy,x} + N_{yy,y}) v + \right. \\ & \left. + (M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + N_{xz,x} + N_{yz,y}) w \right] d\Gamma + \\ & + \int_{C_1} \left[(N_{xv} - \bar{N}_{xv}) u + (N_{yv} - \bar{N}_{yv}) v + \right. \\ & \left. + (V_z + M_{vs,s} - \bar{F}_z - \bar{M}_{vs,s}) w - (M_v - \bar{M}_v) w_{,n} \right] dC_1 - \\ & - (M_{vs} - \bar{M}_{vs}) w |_{C_1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь и ниже используются геометрические краевые условия на C_2 , а именно то, что значения перемещений и их производных (помеченные чертой сверху) заданы и

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}, \quad w_{,n} = \bar{w}_{,n}.$$

Если уравнения равновесия (3.23), (3.24) и краевые условия на контуре C_1 вида

$$\begin{aligned} N_{xv} - \bar{N}_{xv} = 0, \quad N_{yv} - \bar{N}_{yv} = 0, \\ V_z + M_{vs,s} - \bar{F}_z - \bar{M}_{vs,s} = 0, \quad M_v - \bar{M}_v = 0 \end{aligned}$$

справедливы для вариаций напряженного состояния, тогда дополнительный вариационный функционал U_c , зависящий только от силовых факторов и следующий из (4.10), будет

$$U_c = - \int_{\Gamma} \pi_c d\Gamma + \int_{C_2} \left[N_{xv} \bar{u} + N_{yv} \bar{v} + (V_z + M_{vs,s}) \bar{w} - M_v \bar{w}_{,n} \right] dC_2 - M_{vs} \bar{w} |_{C_2}. \quad (4.11)$$

Вариация π_c будет

$$\begin{aligned} \delta \pi_c = & \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{xx}} \delta N_{xx} + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{yy}} \delta N_{yy} + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{xy}} \delta N_{xy} + \\ & + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{xz}} \delta N_{xz} + \frac{\partial \pi_c}{\partial N_{yz}} \delta N_{yz} + \\ & + \frac{\partial \pi_c}{\partial M_{xx}} \delta M_{xx} + \frac{\partial \pi_c}{\partial M_{yy}} \delta M_{yy} + \frac{\partial \pi_c}{\partial M_{xy}} \delta M_{xy}. \end{aligned}$$

Необходимо доказать, что для напряженных состояний, удовлетворяющих условиям статического равновесия (3.23), (3.24) и указанным выше статическим краевым условиям на C_1 , действительное напряженное состояние соответствует стационарной точке дополнительного вариационного функционала U_c . Рассматривая (4.10), можно сказать, что перемещения в этом соотношении могут трактоваться как множители Лагранжа при поиске указанной точки стационарности (4.11).

Дополним (4.11) членами, соответствующими уравнениям равновесия с множителями Лагранжа $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. Тогда, учитывая статические краевые условия, используя теорему Остроградского–Гаусса и интегрируя по частям, получаем:

$$\delta U_c = - \int_{\Gamma} \left[\begin{aligned} & (\delta N^T) A^{-1} N + (\delta M^T) D^{-1} M - \left(\frac{1}{2} \gamma_1^2 + \alpha_{x,x} \right) \delta N_{xx} - \\ & - \left(\frac{1}{2} \gamma_2^2 + \alpha_{y,y} \right) \delta N_{yy} - (\gamma_1 \gamma_2 + \alpha_{x,y} + \alpha_{y,x}) \delta N_{xy} + \\ & + (\gamma_1 - \alpha_{z,x}) \delta N_{xz} + (\gamma_2 - \alpha_{z,y}) \delta N_{yz} + \\ & + \alpha_{z,xx} \delta M_{xx} + \alpha_{z,yy} \delta M_{yy} + 2\alpha_{z,xy} \delta M_{xy} \end{aligned} \right] d\Gamma - \\ - \int_{C_2} \left[\begin{aligned} & (\alpha_x - \bar{u}) \delta N_{xv} + (\alpha_y - \bar{v}) \delta N_{yv} + \\ & + (\alpha_z - \bar{w}) \delta (V_z + M_{vs,s}) - (\alpha_{z,n} - \bar{w}_{,n}) \delta M_v \end{aligned} \right] dC_2 - (\alpha_z - \bar{w}) \delta M_{vs} |_{C_2} = 0. \quad (4.12)$$

Если мы рассмотрим множители Лагранжа как некоторые перемещения, то получим геометрические краевые условия на C_2 :

$$\alpha_x = \bar{u}; \quad \alpha_y = \bar{v}; \quad \alpha_z = \bar{w}; \quad \alpha_{z,n} = \bar{w}_{,n}.$$

Также внутри Γ мы имеем из (4.12) условия совместности для γ_1, γ_2 как функций $N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{xz}, N_{yx}$:

$$\gamma_1 = \alpha_{z,x}, \quad \gamma_2 = \alpha_{z,y} \quad (4.13)$$

и соотношения сила (момент) – перемещение (кривизна):

$$\begin{aligned} A_{11}^{-1} N_{xx} + A_{12}^{-1} N_{yy} + A_{16}^{-1} N_{xy} &= \alpha_{x,x} + \frac{1}{2} \gamma_1^2, \\ A_{12}^{-1} N_{xx} + A_{22}^{-1} N_{yy} + A_{26}^{-1} N_{xy} &= \alpha_{y,y} + \frac{1}{2} \gamma_2^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} A_{16}^{-1} N_{xx} + A_{26}^{-1} N_{yy} + A_{66}^{-1} N_{xy} &= \alpha_{x,y} + \alpha_{y,x} + \gamma_1 \gamma_2, \\ D_{11}^{-1} M_{xx} + D_{12}^{-1} M_{yy} + D_{16}^{-1} M_{xy} &= -\alpha_{z,xx}, \\ D_{12}^{-1} M_{xx} + D_{22}^{-1} M_{yy} + D_{26}^{-1} M_{xy} &= -\alpha_{z,yy}, \\ D_{16}^{-1} M_{xx} + D_{26}^{-1} M_{yy} + D_{66}^{-1} M_{xy} &= -2\alpha_{z,xy}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где A_{jj}^{-1} , D_{jj}^{-1} означают элементы обратных матриц к матрицам жесткости пластины \mathbf{A} , \mathbf{D} . Правая часть (4.14) выглядит подобно правой части (3.2) для $z=0$. Величины $\alpha_{z,xx}$, $\alpha_{z,yy}$, $\alpha_{z,xy}$ могут трактоваться как кривизны пластины. Тогда соотношения (4.13)–(4.15) приводят к условию совместности деформаций в срединной плоскости пластины фон Кармана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy0}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy0}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (4.16)$$

где ε_{xx0} , ε_{yy0} , ε_{xy0} – компоненты тензора деформации Грина при $z=0$. Непосредственно проверяется, что соотношение (4.16) выполнено при подстановке

$$u = \alpha_x,$$

$$v = \alpha_y,$$

$$w = \alpha_z.$$

Таким образом, мы доказали, что стационарное значение дополнительно вариационного функционала по допускаемым силовым факторам соответствует реализующемуся равновесному решению для композитной пластины при закритическом деформировании.

Заметим, что плотность дополнительной энергии π_c может быть переписана в явном виде как функция только от силовых факторов N_{xx} , N_{xy} , N_{yy} , N_{xz} , N_{yz} , M_{xx} , M_{xy} , M_{yy} :

$$\begin{aligned} \pi_c = & \frac{1}{2} \mathbf{N}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} + \frac{1}{2} N_{xz}^2 \frac{N_{yy}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2} + \\ & + \frac{1}{2} N_{yz}^2 \frac{N_{xx}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2} - \frac{N_{xz} N_{yz} N_{xy}}{N_{xx} N_{yy} - N_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Легко проверить, что три последних члена в (4.17) при двустороннем сжатии в главных направлениях потоков 2D-напряжений дают в сумме отрицательную величину.

Отметим в заключение, что учет возможных точек излома на контуре пластины может быть осуществлен так, как указано в работе [8], что не изменит рассмотренный вариационный принцип, но добавит дополнительные условия в этих точках.

5. Пример. В качестве иллюстрации использования полученных теоретических результатов приведем пример длинной тонкой закритически деформируемой композитной пластины с симметричной укладкой, нагруженной сжимающими погонными усилиями постоянной величины N_0 , приложенными вдоль длинных сторон. Пластина расположена в плоскости X – Y с началом координат в центре пластины. Координатная ось Y направлена параллельно длинным сторонам, вдоль которых пластина закреплена по z . Короткие стороны свободны. Напряженно-деформированное состояние пластины приближенно предполагается независимым от координаты y . Удельная дополнительная энергия пластины запишется в виде:

$$\pi_c = \frac{1}{2} A_{11}^{-1} N_{xx}^2 + \frac{1}{2} D_{11}^{-1} M_{xx}^2 + \frac{1}{2} \frac{N_{xz}^2}{N_{xx}},$$

а уравнения равновесия по x и по z в виде:

$$N_{xx,x} = 0,$$

$$M_{xx,xx} + N_{xz,x} = 0.$$

Тогда, учитывая

$$N_{xx} = N_0,$$

$$\alpha_{z,x} = \gamma_1 = \frac{N_{xz}}{N_0},$$

$$u = \alpha_x,$$

$$w = \alpha_z,$$

в результате применения выведенного вариационного принципа получаем из (4.14), (4.15):

$$A_{11}^{-1} N_0 = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2,$$

$$D_{11}^{-1} M_{xx} = -w_{,xx}.$$

Приведенные соотношения, с учетом краевых условий и условий симметрии относительно оси Y , позволяют полностью определить силовые факторы и деформированное состояние пластины.

6. Заключение. Доказана теорема о дополнительной энергии для тонкой композитной пластины при закритическом деформировании. Доказанная теорема составляет содержание статического вариационного принципа возможных напряжений, ведущего к линейным соотношениям для погонных сил/моментов, создаваемым соответствующими компонентами первого тензора напряжений Пиола, и 2D-деформациями/кривизнами. Полученные результаты проиллюстрированы на примере удлиненной композитной пластины.

Результаты работы могут использоваться при построении вычислительных методов анализа закритически деформируемых тонких композитных пластин.

Благодарности. Автор признателен коллегам за плодотворные обсуждения. Автор также признателен рецензенту статьи за ценные замечания и рекомендации, способствовавшие значительному улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turvey G.J., Marshall I.H., eds.* Buckling and postbuckling of composite plates. Chapman and Hall. 1995.
<https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4>

2. *Falzon B.G., Aliabadi M.H., eds.* Buckling and postbuckling structures: volume 1. Imperial College Press. 2008. 528 p.
<https://doi.org/10.1142/p506>
3. *Xu J., Zhao Q., Qiao P.* A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures // *Frontiers in Aerospace Engineering*. 2013. № 2. P. 157–168.
4. *Гришин В.И.* (ред.). Проектирование, расчеты и статические испытания металло-композитных конструкций. М.: Техносфера, 2022. 407 с.
5. *Азиков Н.С., Зинин А.В., Гайдаржи Ю.В., Сайфуллин И.Ш.* Прочность при закритическом деформировании косоугольных композиционных панелей // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2021. № 5. С. 62–71.
6. *Митрофанов О., Осман М.* Проектирование гладких композитных панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении // *Механика композитных материалов*. 2022. Т. 58. № 1. С. 21–42.
<https://doi.org/10.22364/mkm.58.1.02>
7. *Wu Z., Raju G., Weaver P.M.* Postbuckling analysis of variable angle tow composite plates // *Int. J. Solids Struct.* 2013. V. 50. № 10. P. 1770–1780.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.02.001>
8. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
9. *Новожиллов В. В.* Теория упругости. Ленинград.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
10. *Stumpf H.* Die Extremalprinzipie der nichtlinearen Plattentheorie // *ZAMM*. 1975. № 55. P. 110–112.
11. *Wang C.-T.* Principle and application of complementary energy method for thin homogenous and sandwich plates and shells with finite deflections. NACA TN 2620, 1952.
12. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2nd edition. Taylor and Francis, Inc., 2003. 858 p.
<https://doi.org/10.1201/b12409>
13. *Ashton J.E., Whitney J.M.* Theory of laminated plates. Technomic Publ., 1970.
14. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
15. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics. 4th edition. Taylor and Francis, Inc., 2016. 700 p.
<https://doi.org/10.1201/b19626>

COMPLEMENTARY ENERGY THEOREM FOR THIN COMPOSITE PLATES IN POSTBUCKLING

S. V. Selyugin^{a, *}

^a *Department of Airplane Design and Certification, Moscow Aviation Institute
(National Research University), Moscow, Russia*

** e-mail: selyuginSV@mai.ru*

Abstract – The thin composite von Kármán plates in postbuckling are considered. Using the first Piola stress tensor and the displacement gradient tensor, the complementary energy variational theorem is proven. The Kirchhoff assumptions

are adopted. The plate lay-up is symmetric and pointwise. According to the theorem, at the actual stress state of the plate the complementary energy (as a functional of the internal forces and of the moments) reaches its stationary value. The stationary feature of the actual state is valid as compared to other feasible states satisfying the static equilibrium and the static boundary conditions. The theorem is a consent of the static variational principle. The principle leads to the linear relations between forces/moments, created by the corresponding first Piola stress tensor components, and the 2D-strains/curvatures. An illustrative plate example is given.

Keywords: composite plates, postbuckling, complementary energy, first Piola stress tensor

REFERENCES

1. *Turvey G.J., Marshall I.H., eds.* Buckling and Postbuckling of Composite Plates. Chapman and Hall, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4>
2. *Falzon BG, Aliabadi MH, eds.* Buckling and postbuckling structures, volume 1. Imperial College Press, 2008. <https://doi.org/10.1142/p506>
3. *Xu J., Zhao Q., Qiao P.* A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures // *Frontiers in Aerospace Engineering*. 2013. № 2. P. 157–168.
4. *Grishin V.I., ed.* Design, analysis and static tests of metallic-composite structures (in Russian). Moscow: Technosfera, 2022.
5. *Azikov N.S., Zinin A.V., Gaidarzhi U.V., Saifullin I.S.* Strength of skewed composite panels in postbuckling // *Machine-building and machine-reliability problems*. 2021. № 5. P. 62–71.
6. *Mitrofanov O., Osman M.* Designing of smooth composite panels providing stability and strength at postbuckling behavior // *Mech Compos Mater*. 2022. V. 58. P. 15–30. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-10008-3>
7. *Wu Z., Raju G., Weaver P.M.* Postbuckling analysis of variable angle tow composite plates // *Int. J. Solids Struct*. 2013. V. 50. P. 1770–1780. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.02.00>
8. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd edition. Pergamon Press, 1982.
9. *Novozhilov V.V.* *Theory of elasticity* (in Russian). Leningrad: Sudpromgiz, 1958.
10. *Stumpf H.* Die Extremalprinzipie der nichtlinearen Plattentheorie // *ZAMM*. 1975. № 55. P. 110–112.
11. *Wang C.-T.* Principle and application of complementary energy method for thin homogeneous and sandwich plates and shells with finite deflections. NACA TN 2620, 1952.
12. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. 2nd edition. Taylor and Francis, Inc., 2003. 831 p. <https://doi.org/10.1201/b12409>
13. *Ashton J.E., Whitney J.M.* Theory of laminated plates. Technomic Publ. 1970.
14. *Vasilyev VV.* Mechanics of structures made of composite materials (in Russian). Mashinostroenie. 1988.
15. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics. 4th edition. Taylor and Francis, Inc., 2016. 425 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>

УДК 537.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕРОВНОСТЕЙ ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОКРЫТИЕМ

© 2024 г. Ф. И. Степанов^{а, *}, Е. В. Торская^{а, **}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: stepanov_ipm@mail.ru, **e-mail: torskaya@mail.ru

Поступила в редакцию 14.12.2023 г.

После доработки 09.01.2024 г.

Принята к публикации 16.01.2024 г.

Предложена постановка и разработан метод решения задачи о скольжении периодической системы неровностей по границе вязкоупругого полупространства с покрытием, которое моделируется слоем, обладающим изгибной жесткостью. Решение основано на сведении задачи к контакту ограниченной системы неровностей с заменой действия остальных неровностей распределенным давлением, проведена оценка погрешности подобной замены. Численно-аналитический метод решения базируется на двойных интегральных преобразованиях Фурье, методе граничных элементов и итерационной процедуре. Исследовано влияние формы неровностей, скорости скольжения, толщины покрытия на деформационную составляющую силы трения и на эффект взаимного влияния неровностей. Для выявления эффекта взаимного влияния проведено сравнение результатов (распределения контактного давления и силы трения), полученных для множественного контакта и для изолированной неровности. Для сравнения получены и проанализированы результаты решения аналогичной задачи для вязкоупругого полупространства без покрытия.

Ключевые слова: вязкоупругое полупространство, покрытие, множественный контакт, скольжение, трение

DOI: 10.31857/S1026351924030117, EDN: UHRNLK

1. Введение. Отказы техники часто связаны с неудовлетворительной работой узлов трения, изготовленных из высокоэластичных материалов, в частности уплотнений. Причиной использования высокоэластичных материалов, чаще всего это резины, является необходимость герметизации и поглощения вибраций различной природы (в том числе возникающих при трении). Однако эластомерные материалы без специальных силовых элементов неработоспособны при высоких давлениях и скоростях скольжения. Нанесение покрытий является одним из основных методов модификации для обеспечения антифрикционных свойств и износостойкости, при этом

покрытия должны быть относительно тонкими для сохранения герметизирующих свойств уплотнения. Толщина покрытия может быть сравнима с размерами неровностей поверхностей взаимодействующих тел, поэтому задача множественного контакта вязкоупругих тел с покрытием в условиях скольжения является практически важной и актуальной.

Для вязкоупругого материала деформационный механизм трения напрямую связан с реальной шероховатостью поверхности, которую трудно математически описать, поскольку она имеет сложную многомасштабную природу. В последнее время появились значимые работы для описания самоподобных шероховатых поверхностей [1–4], которые обычно образуются при случайном характере формирования их геометрии. Многие исследователи используют подход, предложенный Перссоном в работе [3], для математического описания контакта самоподобной шероховатой поверхности. Численные подходы для моделирования скольжения резины по шероховатой поверхности были разработаны в работах [5–9]. В случае, когда геометрия поверхности возникает в результате шлифования или точения модели, ее нельзя описать нормальным распределением Гаусса, поэтому модель контакта, опирающуюся на предположение об около-фрактальной природе поверхности сложно брать в расчет [10]. Для моделирования деформационной составляющей силы трения используются различные подходы. Скольжение стандартных линейных вязкоупругих тел по шероховатым поверхностям рассматривалось в работах [2, 3]. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работе [11] рассматривалось скольжение шероховатого индентора по вязкоупругому основанию, описываемому моделью Кельвина. Поверхность состояла из самоаффинных прямоугольных выступов. Исследована деформационная составляющая силы трения в зависимости от нагрузки, скорости скольжения и геометрических характеристик шероховатости. Хотя фрактальный подход эффективен для моделирования рельефа реальных поверхностей, рассматриваемые в упомянутых работах модели вязкоупругих материалов достаточно упрощены.

Следует отметить работы, которые посвящены решению контактных задач о скольжении периодических систем из жестких инденторов с различной формой по вязкоупругому материалу [12], которые позволяют описать поверхности с искусственно заданным макрорельефом (текстурой), а также могут служить моделями для изучения основных закономерностей гистерезисного трения. Трехмерные контактные задачи, рассматривающие скольжение/качение одного индентора по вязкоупругой подложке, описываемой различными моделями материала, в основном решаются с использованием функции Грина и метода граничных элементов [6, 13–18]. Дискретный контакт твердых тел с двоякопериодическим рельефом и вязкоупругого основания рассматривался в работах [19]; контакт жестких волнистых поверхностей с вязкоупругим телом исследован в работах [20, 21]. В двумерной постановке [25] решение получается аналитически с использованием подхода, аналогичного предложенному в известной статье Хантера [22]. Подробный обзор работ по задачам контактного взаимодействия вязкоупругих тел при наличии шероховатости, включающий работы как по индентированию, так и по скольжению, предложен в [23].

Все приведенные выше работы относятся к контакту вязкоупругих тел без покрытия. Во многих случаях рассматривается вязкоупругий слой. Решение для единичного контакта вязкоупругого полупространства (пространственная модель материала), скрепленного со слоем, обладающим изгибной жесткостью, получено в работе [24].

Целью данной работы является решение задачи множественного контакта для вязкоупругого полупространства с относительно жестким покрытием и сравнение результатов, полученных для полупространства с покрытием и без покрытия.

2. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается скольжение с постоянной скоростью V жесткой периодической системы неровностей под действием среднего давления p_n по поверхности вязкоупругого полупространства с покрытием толщиной H . Покрытие моделируется слоем, обладающим изгибной жесткостью. Используется подвижная декартова система координат, центр которой связан с точкой первоначального касания произвольно выбранной неровности с поверхностью покрытия. Скольжение происходит вдоль оси Ox . Форма периодической системы неровностей (рис. 1) описывается следующей функцией:

$$f(x, y) = \begin{cases} A - A \cdot \left| \cos\left(\frac{x \cdot \pi}{L}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{y \cdot \pi}{L}\right) \right|, & n = 1, \\ A - A \left(1 - \sin\left(\frac{x \cdot \pi}{L}\right)^n \right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{y \cdot \pi}{L}\right)^n \right), & n = 2, 4, \end{cases} \quad (2.1)$$

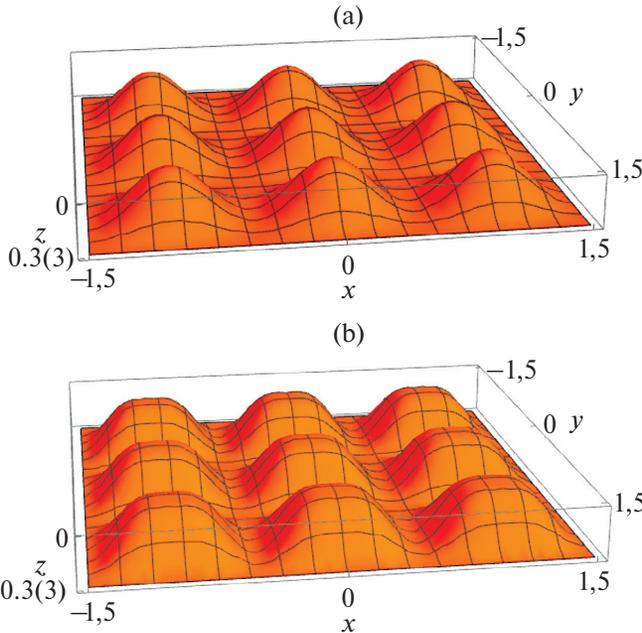


Рис. 1. Модель периодической поверхности $n = 2$ (а), $n = 4$ (б), $A/L = 1/3$.

где A – высота неровностей, L – период неровностей.

Слой и полупространство жестко сцеплены $z = -H$:

$$w^{(1)} = w^{(2)}, u_x^{(1)} = u_x^{(2)}, u_y^{(1)} = u_y^{(2)}. \quad (2.2)$$

Здесь $w^{(i)}, u_x^{(i)}, u_y^{(i)}$ – нормальные и касательные перемещения слоя ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$).

Свойства линейно-вязкоупругого материала описываются оператором Вольтерра:

$$[F\tau](t) = 1 + \int_{-\infty}^t \tau(t)K(t-\xi)d\xi, \quad K(t) = ke^{(-t/\eta)}, \quad (2.3)$$

где τ – напряжения, $1/k$ – время релаксации, η – время последействия.

На верхней границе двуслойного полупространства выполняются следующие условия контакта $z = 0$:

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x, y) &= f(x, y) - D, \quad (x, y) \in \omega_i, \quad i = 1..n, \\ \sigma_z^{(1)} &= 0, \quad (x, y) \notin \omega_i, \quad i = 1..n, \\ \tau_{rz}^{(1)} &= \tau_{\theta z}^{(1)} = 0, \quad \forall (x, y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь D – осадка неровностей, ω_i – область контакта i -й неровности, $\sigma_z, \sigma_{rz}, \tau_{\theta z}$ – нормальные и касательные напряжения.

Нагрузка на каждую неровность и номинальное давление p_n связаны соотношением:

$$Q_p = p_n L^2. \quad (2.5)$$

Уравнение равновесия рассматривается в следующем виде:

$$Q_p = \iint_{\omega_i} p(x, y) dx dy, \quad i = 1..n. \quad (2.6)$$

Для приближенного решения поставленной задачи используется упрощенная постановка:

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x, y) &= f(x, y) - D, \quad |x|, |y| < 3L/2 \wedge (x, y) \in \omega_i, \quad i = 1..n, \\ \sigma_z^{(1)} &= 0, \quad |x|, |y| < 3L/2 \wedge (x, y) \notin \omega_i, \quad i = 1..n, \\ \sigma_z^{(1)} &= p_n, \quad |x|, |y| \geq 3L/2, \\ \tau_{rz}^{(1)} &= \tau_{\theta z}^{(1)} = 0, \quad \forall (x, y). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В сущности, переход к данной упрощенной постановке означает использование метода локализации [25]. Справедливость подобного перехода доказана в работе [25] применительно к упругому полупространству. Очевидно, что в общем случае для произвольных значений параметров, описывающих вязкоупругое основание, справедливость подобного перехода доказать нельзя.

Для каждого конкретного сочетания входных параметров задачи проверка погрешности перехода проводилась в процессе расчетов: если нагрузка на центральную неровность, определяемая при решении контактной задачи, получалась равной Q_p , замена периодической задачи на упрощенную постановку (2.7) полагалась правомерной. Осадка D при переходе от задачи с граничными условиями (2.4) к приближенной задаче с условиями (2.7) становится техническим результатом расчета и при анализе результатов не рассматривается.

Задача с условиями (2.7) решается методом граничных элементов. Для этого используется решение задачи о равномерно распределенном давлении внутри квадрата размером $2a \times 2a$, движущегося с постоянной скоростью V по поверхности двуслойного вязкоупругого полупространства [24]. В случае упругого материала вертикальные смещения границы слоя, обладающего изгибной жесткостью, определяются следующим соотношением:

$$w^{(1)}(x, y) = -\frac{a}{G} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \Delta(\gamma, \varphi, \lambda) \cos((x/a)\gamma \cos \varphi) \cos((y/a)\gamma \sin \varphi) d\gamma d\varphi. \quad (2.8)$$

Здесь γ, φ – координаты в пространстве двойного преобразования Фурье, $\lambda = H/a$ – безразмерная толщина слоя, G – модуль сдвига. Функция $\Delta(\gamma, \varphi, \lambda)$ определяется из уравнений, полученных в результате двойного преобразования Фурье граничных условий на поверхности покрытия, а также на границе покрытия и полупространства. При этом общее решение представляется в форме Галеркина [26]. Функция $\Delta(\gamma, \varphi, \lambda)$ имеет громоздкий вид и линейно зависит от давления в пространстве двойного преобразования Фурье:

$$\bar{q} = q \frac{4}{\pi^2} \frac{\sin(\gamma \cos \varphi) \sin(\gamma \sin \varphi)}{\gamma^2 \sin \varphi \cos \varphi}. \quad (2.9)$$

Решение для вязкоупругого полупространства и покрытия получим в результате применения оператора Вольтерра (2.3) к упругому решению (2.8) подобно тому, как это сделано в работе [17].

$$w^{(1)}(x, y, 0) = -\frac{a}{2G} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \Delta(\gamma, \varphi, \lambda) \cos((y/a)\gamma \sin \varphi) \times \left(\cos((x/a)\gamma \cos \varphi) + \int_{-\infty}^0 K(-\tau) \cos(((x/a) + (V/a)\tau)\gamma \cos \varphi) d\tau \right) d\gamma d\varphi. \quad (2.10)$$

В случае экспоненциального ядра ползучести (2.3) выражение (2.10) примет вид:

$$w(x, y, 0) = -\frac{a}{2G} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \Delta(\gamma, \varphi, \lambda) \cos((y/a)\gamma \sin \varphi) \left(\cos((y/a)\gamma \cos \varphi) + c \frac{\eta(V/a)\gamma \cos \varphi \sin((x/a)\gamma \cos \varphi) + \cos((x/a)\gamma \cos \varphi)}{1 + ((V/a)\eta\gamma \cos \varphi)^2} \right) d\gamma d\varphi, \quad (2.11)$$

$$c = k \cdot \eta.$$

Соотношение (2.11) было использовано для оценки погрешности замены граничных условий (2.4) на условия (2.7). Для этого оценивалась разница вертикальных смещений, возникающих в результате действия постоянной нагрузки вне области $|x|, |y| < 3L/2$, в центре выделенного квадрата со смещениями от действия сил Q_p , расположенных в узлах квадратичной решетки. Использование факта малости смещений относительно периода решетки позволило показать, что погрешность пропорциональна комплексу $p_n c / (G \lambda \eta V)$, то есть чем больше скорость скольжения, тем меньше погрешность замены (2.4) на (2.7). Для решения задачи в постановке (2.7) квадратная область $|x|, |y| < 3L/2$ разбивается на N элементов, давление в каждом элементе принимается постоянным. Внутри выбранной области с помощью (2.11) рассчитываются вертикальные смещения $\bar{w}_i^{(1)}$ границы двуслойного основания под действием номинального давления $-p_n$, затем с учетом этих смещений, граничных условий, а также условия равновесия для девяти неровностей составляется СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} s & \dots & s & 0 \\ k_1^1 & \dots & k_N^1 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_1^N & \dots & k_N^N & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{w}_1 \\ \vdots \\ \bar{w}_N \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

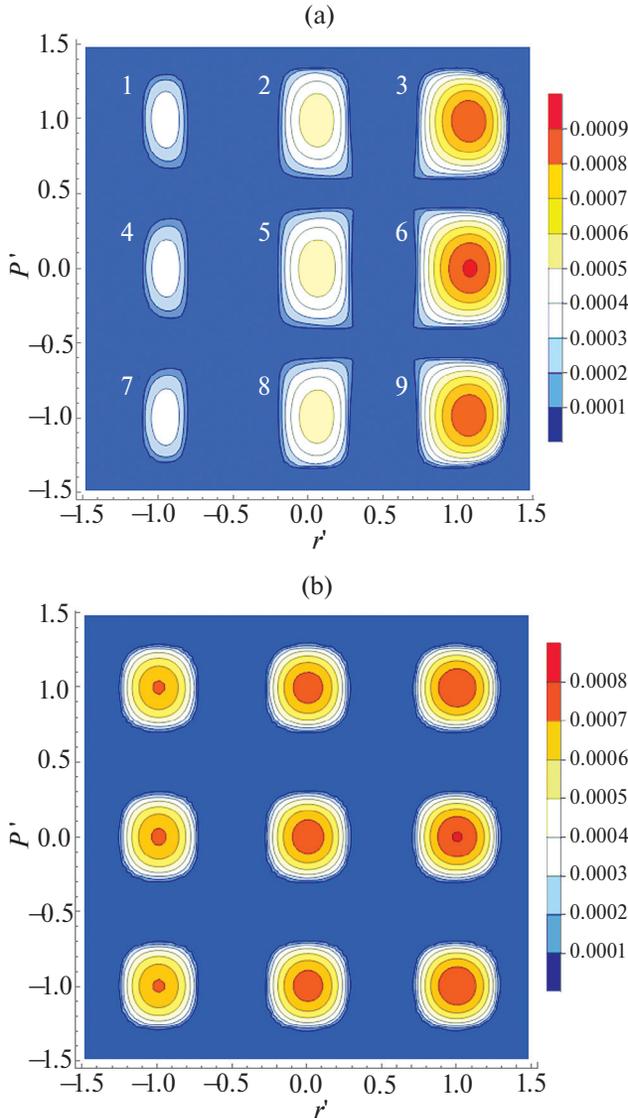
где k_i^j – внедрение в центре элемента j под действием единичного давления в элементе i , которое рассчитывается с использованием формулы (2.11). Решение системы дает распределение давления такое, что граница двуслойного основания повторяет форму неровностей, при этом некоторые давления имеют отрицательные значения, что противоречит условию контакта (2.7), поэтому отрицательные давления приравниваются нулю и система решается заново. Описанная итерационная процедура завершается в том случае, если в решении не окажется отрицательных давлений.

3. Анализ результатов. В данном разделе приведен анализ результатов расчетов, полученных для вязкоупругого полупространства без покрытия и с покрытием – слоем, обладающим изгибной жесткостью. Для анализа использовалась следующая система безразмерных параметров:

$$V' = \frac{V \cdot \omega}{L}, \quad c = \eta \cdot k, \quad Q' = \frac{Q}{E \cdot L^2}, \quad A' = A/L, \quad H' = H/L, \quad (x', y', z') = \frac{(x, y, z)}{L}.$$

В результате расчетов определялось безразмерное распределение контактного давления $p'(x, y) = p(x, y)/E$, где E – длительный модуль упругости, и коэффициент трения, обусловленного гистерезисными потерями в вязкоупругом материале. Поскольку в общем случае корректность использования метода локализации для задачи о скольжении периодической системы по вязкоупругому полупространству не доказана, для каждого расчета проводилась численная оценка. Она заключалась в следующем: на центральную неровность должна действовать нагрузка, равная Q_p , с погрешностью не более 10%.

Результаты, представленные на рис. 2–5, получены для вязкоупругого полупространства без покрытия. На рис. 2 и 3 приведены распределения контактного давления, действующего на вязкоупругое полупространство под девятью неровностями, для разных скоростей и различной формы поверхности контр-тела, за которую отвечает параметр n в (2.1). Для используемых параметров расчетов чем больше скорость, тем меньше разница в распределении давлений в системе из девяти неровностей. Это обусловлено более упругим характером контактирования при относительно больших скоростях скольжения



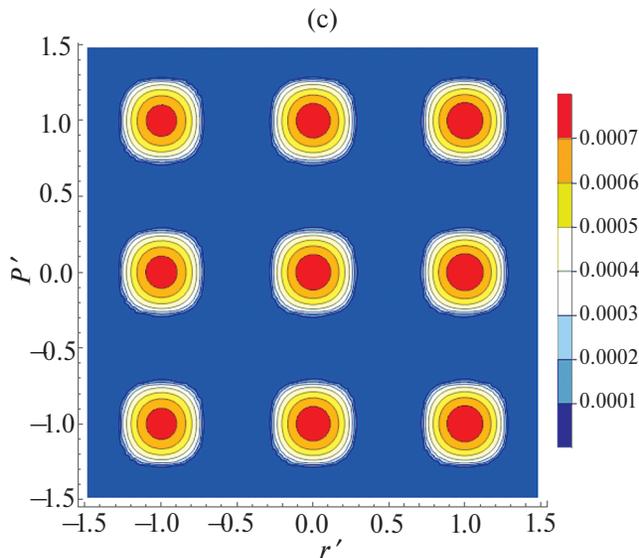


Рис. 2. Распределение контактного давления под девятью неровностями при $n = 1$, $c = 10$ $A' = 1/3$, (на девять неровностей), $V' = 8.20$ (а), $V' = 82.05$ (б), $V' = 328.22$ (с).

(рис. 2, с и 3, с). При увеличении скорости происходит также уменьшение суммарной площади контакта. На неровности, являющиеся передними по направлению скольжения, действуют нагрузки, превышающие среднюю на неровность. В табл. 1 показано, как распределяется нагрузка между неровностями (номера неровностей проставлены на рис. 2, а) для различных скоростей скольжения. Входные параметры расчета соответствуют рис. 2. Уменьшение скорости приводит к увеличению погрешности расчетов.

При $n = 4$ (рис. 3) неровности являются более плоскими, в связи с чем влияние реологических свойств на распределение контактного давления под каждой из неровностей является визуально более выраженным. При этом распределение нагрузки между неровностями (табл. 2) примерно соответствует результатам, полученным при $n = 1$.

Далее анализ будет проводиться только для центральной неровности, поскольку она, с некоторой погрешностью, находится в условиях, соответствующих периодической задаче. На рис. 4 представлены распределения контактного давления (сечение по $y' = 0$), полученные для центральной неровности в условиях множественного контакта, и для изолированной неровности, на которую действует нагрузка Q_p . Во всех случаях ширина площадки контакта сужается за счет влияния соседних неровностей, что находится в полном соответствии с результатами для упругого полупространства [25]. Для относительно низких скоростей распределение давления существенно несимметрично, особенно для более плоских неровностей, что приводит к появлению момента касательной силы (деформационной составляющей силы трения). При высоких скоростях эффект взаимного влияния увеличивает максимальное значение контактного давления, что соответствует контакту,

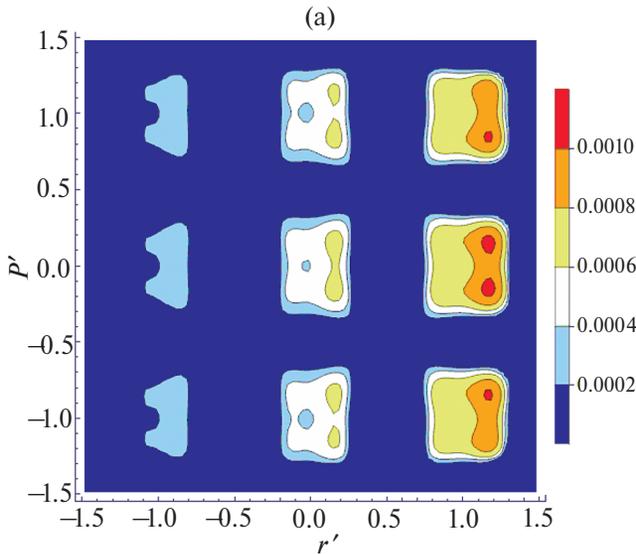
Таблица 1. Распределение нагрузки по неровностям, относительно Q_p , при различных скоростях, $n = 1$

V'	8.205667	41.028	82.056	164.111	246.17	328.22	410.28
#1	0.31985	0.769687	0.87434	0.931922	0.951864	0.961972	0.968125
#2	0.908856	1.01494	1.01191	1.00823	1.00674	1.00595	1.00543
#3	1.63266	1.14924	1.07069	1.03165	1.01878	1.01238	1.00854
#4	0.336582	0.812096	0.908072	0.956249	0.971928	0.979755	0.98445
#5 (центр)	1.02145	1.08667	1.05853	1.03866	1.03118	1.02723	1.02477
#6	1.91923	1.2335	1.11952	1.06149	1.04212	1.03242	1.02657

Таблица 2. Распределение нагрузки по неровностям, относительно Q_p , при различных скоростях, $n = 4$

V'	8.205667	41.028	82.056	164.111	246.17	328.22	410.28
#1	0.320538	0.776364	0.878398	0.933869	0.953365	0.963313	0.969324
#2	0.911677	1.01383	1.01116	1.00793	1.00641	1.00558	1.00507
#3	1.63807	1.14811	1.06993	1.03156	1.01882	1.01248	1.0087
#4	0.337917	0.816908	0.910365	0.956805	0.972392	0.98011	0.984716
#5 (центр)	1.0212	1.08073	1.05509	1.03673	1.02954	1.02574	1.0234
#6	1.90032	1.22575	1.11557	1.05974	1.04087	1.0314	1.02571

близкому к упругому. При относительно низких скоростях имеем противоположный эффект за счет большей вытянутости площадки контакта в направлении, перпендикулярном направлению скольжения.



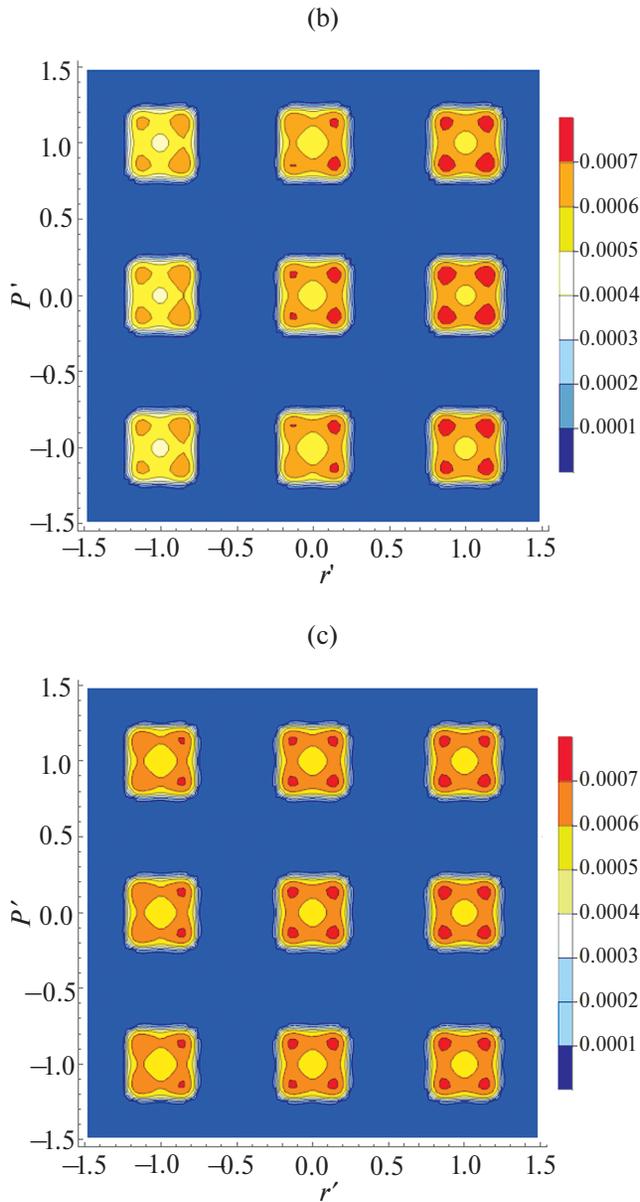
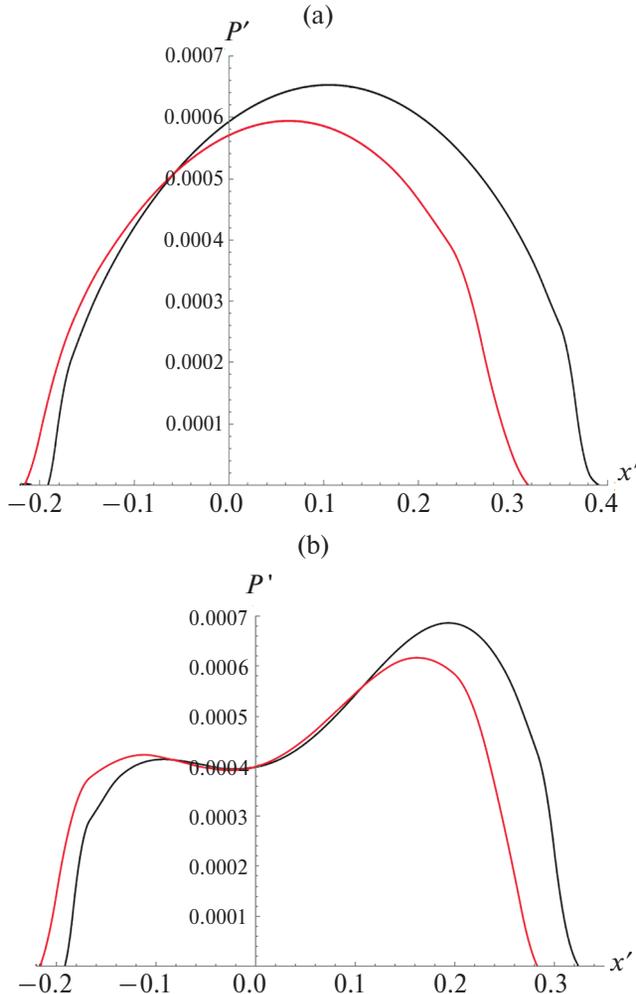


Рис. 3. Распределение контактного давления под девятью неровностями при $n=4$, $c=10$, $A'=1/3$, $Q'=1.23$ (на 9 неровностей), $V'=8.20$ (a), $V'=82.05$ (b), $V'=328.22$ (c).

Были получены зависимости, отражающие влияние скорости на деформационную составляющую силы трения при разных значениях параметра n (рис. 5). Следует отметить, что в этих результатах нет монотонности,

коэффициент трения для $n = 2$ больше, чем для $n = 4$ и 1. Это выполняется как для случая множественного контакта, так и для изолированной неровности. Эффект влияния соседних неровностей можно оценить по рис. 5, с. При скольжении изолированной неровности потери энергии, связанные с несовершенной упругостью, больше. Ранее было показано [17, 18], что зависимость коэффициента трения от скорости является немонотонной – сначала увеличивается, затем уменьшается. В данном случае существенная погрешность замены граничных условий (2.4) на условия (2.7) при околонулевых скоростях не позволила провести соответствующие расчеты.

На рис. 6 и 7 представлены результаты, полученные для скольжения периодической системы неровностей по поверхности вязкоупругого полупространства с жестким покрытием. Зависимости коэффициента трения от скорости скольжения для систем неровностей, различающихся формой



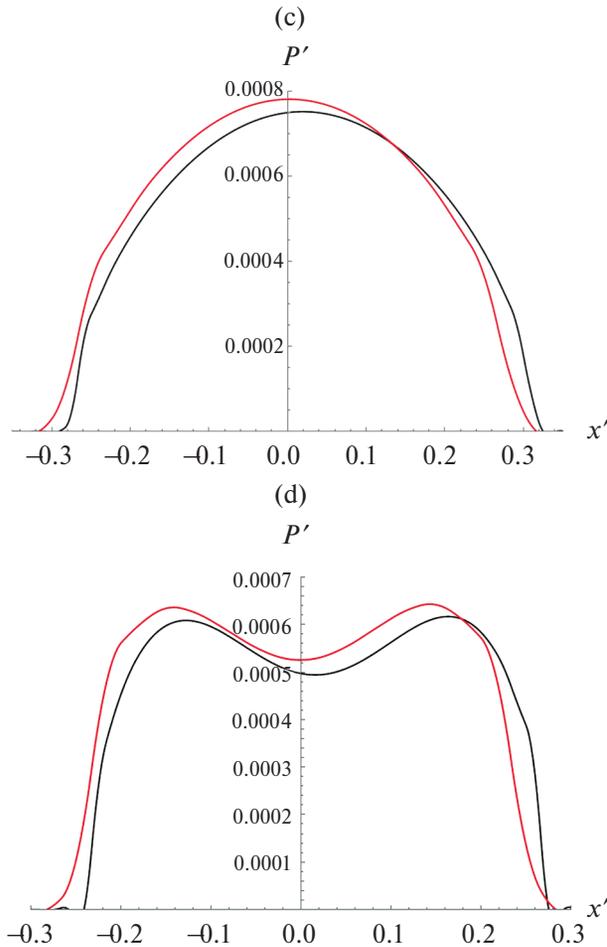


Рис. 4. Распределение контактного давления при (а), $n=4$, $c=10$, $A'=1/3$, $V'=8.20$ (а, б), $V'=383.22$ (с, д), $Q'=1.23$ (на девять неровностей), $Q'=0.137$ (на 1 неровность); изолированная неровность (черные кривые), множественный контакт (красные кривые).

(рис. 6, а), демонстрируют более существенное, по сравнению со случаем вязкоупругого полупространства, влияние величины параметра n . Для случая $n=2$ проведено сравнение зависимостей коэффициента трения от скорости, полученных для изолированной неровности и для случая множественного контакта (рис. 6, б). Эффект взаимного влияния является более существенным при наличии жесткого изгибающегося слоя, при том что абсолютные значения коэффициента трения при прочих равных условиях больше для вязкоупругого полупространства без покрытия. Влияние соседних неровностей на распределение контактного давления (рис. 7, а, б) при относительно малых скоростях в целом такое же, как и для случая вязкоупругого полупространства, хотя степень несимметрии несколько меньше. Увеличение

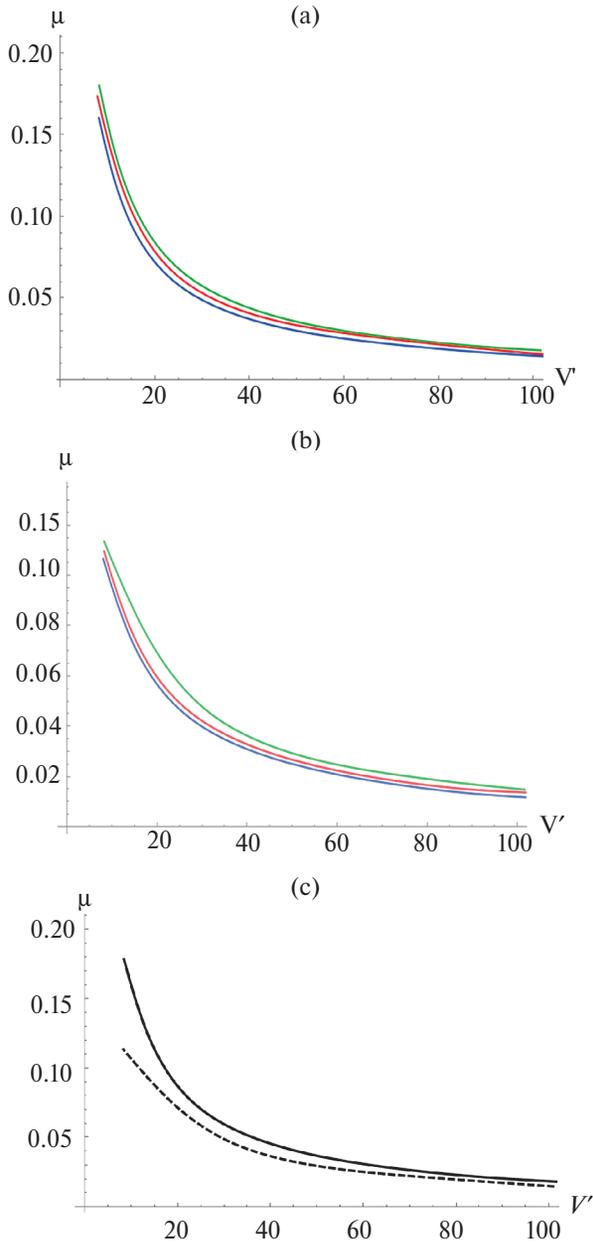


Рис. 5. Зависимость коэффициента трения от скорости для изолированной неровности (а), множественного контакта (б): $c = 10$, $A' = 1/3$, $Q' = 1.23$ (на 9 неровностей), $Q' = 0.137$ (на одну неровность), $n = 1$ (красная), $n = 2$ (зеленая), $n = 4$ (синяя); (с) – сравнение результатов для единичного контакта (сплошная кривая) и множественного контакта (штриховая кривая) при $n = 2$.

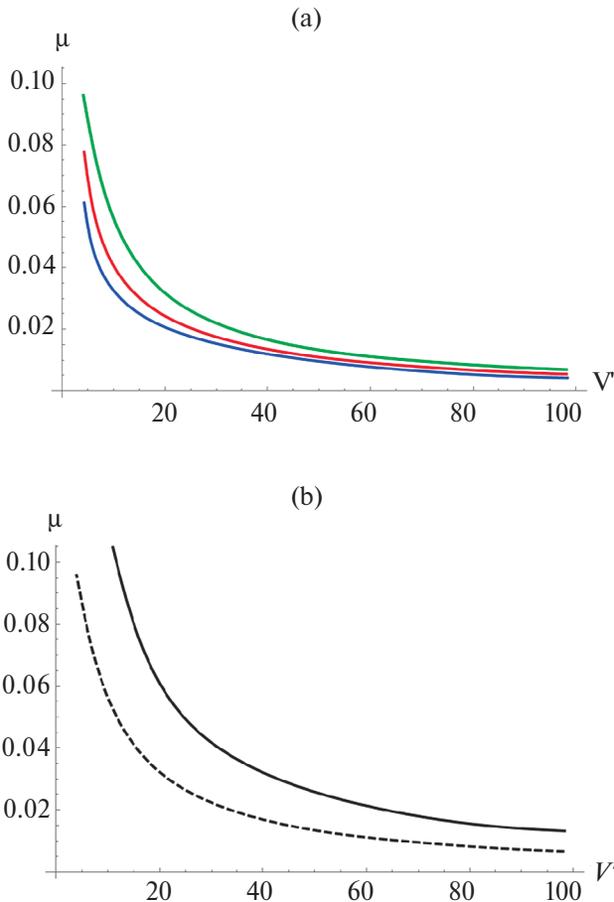


Рис. 6. Зависимость коэффициента трения от скорости для множественного контакта (а): $H' = 3.3 \cdot 10^{-6}$, $c = 10$, $A' = 1/3$, $Q' = 1.23$ (на девять неровностей), $Q' = 0.137$ (на одну неровность), $n = 1$ (красная), $n = 2$ (зеленая), (синяя); (б) – сравнение результатов для единичного контакта (сплошная кривая) и множественного контакта (штриховая кривая) при $n = 2$.

толщины слоя приводит к увеличению максимального значения контактного давления. При этом следует отметить, что увеличение толщины слоя в десять раз не меняет радикально размер площадки контакта и вид функции $p'(x, y)$, видимо, в связи с тем, что слой при этом остается относительно тонким.

4. Заключение. Получено решение задачи о скольжении с постоянной скоростью периодической системы инденторов по границе вязкоупругого полупространства с покрытием, и проведено сравнение с решением аналогичной задачи для изолированной неровности. Анализ результатов показал, что эффект взаимного влияния снижает потери на трение, связанные с несовершенной упругостью материала полупространства, скрепленного со слоем, обладающим изгибной жесткостью, а также без покрытия. Этот результат более

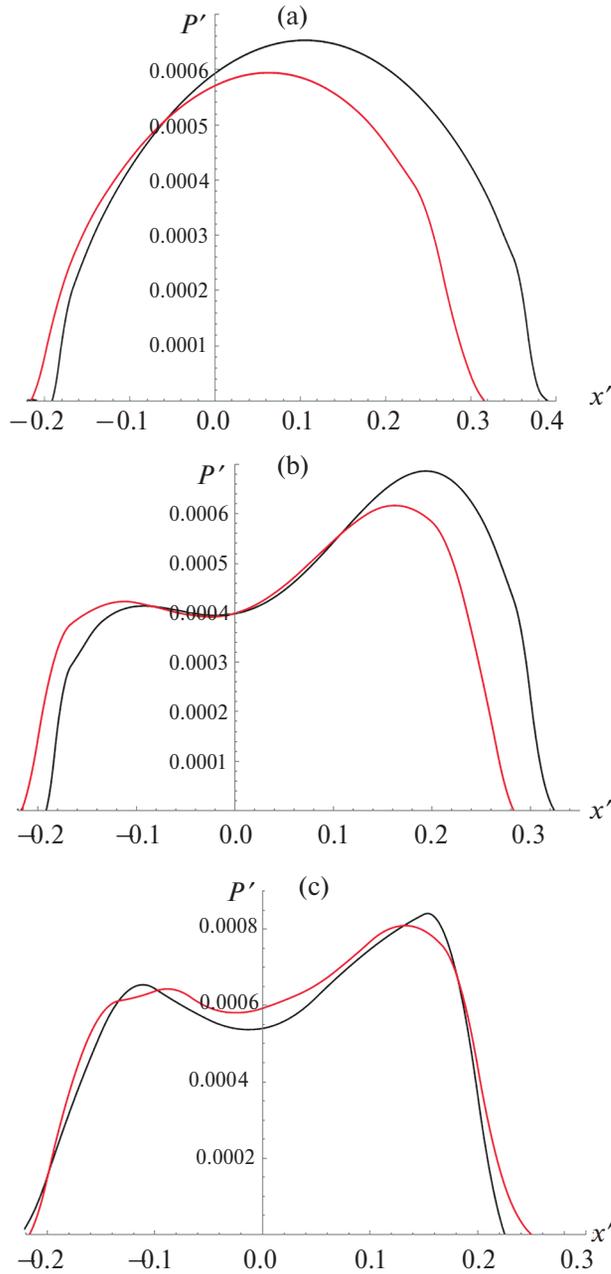


Рис. 7. Распределение контактного давления при $n = 1$ (а), $n = 4$ (б, с); $H' = 3.3 \cdot 10^{-4}$ (а, б), $c = 10$, $A' = 1/3$, $V' = 8.20$, (на девять неровностей), $Q' = 0.137$ (на одну неровность); изолированная неровность (черные кривые), множественный контакт (красные кривые); (с) — распределения контактного давления при: $n = 4$ (красная кривая), $H' = 3.3 \cdot 10^{-3}$ (черная кривая).

заметен для полупространства со слоем, чем без слоя. В то же время слой уменьшает величину деформационной составляющей силы трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 23-19-00484).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borodich F.M., Onishchenko D.A.* Similarity and fractality in the modelling of roughness by a multilevel profile with hierarchical structure // *Int. J. Solids Struct.* 1999. V. 36. № 17. P. 2585–2612.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00116-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00116-4)
2. *Klüppel M., Heinrich G.* Rubber friction on self-affine road tracks // *Rubber Chem. Technol.* 2000. V. 73. № 4. P. 578–606.
<https://doi.org/10.5254/1.3547607>
3. *Persson B.N.J.* Theory of rubber friction and contact mechanics // *J. Chem. Phys.* 2001. V. 115. P. 3840–3861.
<https://doi.org/10.1063/1.1388626>
4. *Li Q., Popov M., Dimaki A., Filippov A.E., Kürschner S., Popov V.L.* Friction between a viscoelastic body and a rigid surface with random self-affine roughness // *Phys. Rev. Lett.* 2013. № 111. P. 034301.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.034301>
5. *Nettinsmeier J., Wriggers P.* Frictional contact of elastomer materials on rough rigid surfaces // III European Conference on Computational Mechanics. Springer, Dordrecht. 2006. 331 p.
https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_331
6. *Carbone G., Putignano C.* A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: theory and experiments // *J. Mech. Phys. Sol.* 2013. V. 61. №. 8. P. 1822–1834.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2013.03.005>
7. *Carbone G., Putignano C.* Rough viscoelastic sliding contact: Theory and experiments // *Phys. Rev.* 2014. № E89. P. 032408.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.032408>
8. *Scaraggi M., Persson B.N.J.* Friction and universal contact area law for randomly rough viscoelastic contacts // *J. Phys. Condens Matter.* 2015. № 27. P. 105102.
<https://doi.org/10.1088/0953-8984/27/10/105102>
9. *Menga, N., Afferrante, L., Demelio, G.P., Carbone, G.* Rough contact of sliding viscoelastic layers: Numerical calculations and theoretical predictions // *Tribol. Int.* 2018. V. 122. P. 67–75.
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.02.012>
10. *Kane M., Do M.-T., Cerezo V., Rado Z., Khelifi C.* Contribution to pavement friction modelling: an introduction of the wetting effect // *Int. J. Pavement Eng.* 2019. V.20. № 8. P. 965–976.
<https://doi.org/10.1080/10298436.2017.1369776>
11. *Солдатенков И.А.* Расчет трения индентора с фрактальной шероховатостью о вязкоупругое основание // *Трение и износ.* 2015. Т. 36. № 3. С. 257–262.
12. *Barber J.R.* *Contact Mechanics.* Dordrecht. The Netherlands: Springer. 2018. 585 p.
13. *Chen W., Wang Q., Huan Z., Luo X.* Semi-analytical viscoelastic contact modeling of polymer-based materials // *J. Trib.* 2011. V. 133. № 4. P. 041404.
<https://doi.org/10.1115/1.4004928>

14. *Koumi K.E.* et al. Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space // *Int. J. Sol. Struc.* 2014. V. 51. № 6. P. 1390–1402.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.035>
15. *Koumi K.E., Chaise T., Nelias D.* Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity // *J. Mech. Phys. Sol.* 2015. V. 80. P. 1–25.
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.04.001>
16. *Kusche S.* Frictional force between a rotationally symmetric indenter and a viscoelastic half-space // *ZAMM J. Appl. Math. Mech.* 2017. V. 97. № 2. P. 226–239.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201500169>
17. *Александров В.М., Горячева И.Г., Торская Е.В.* Пространственная задача о движении гладкого штампа по вязкоупругому полупространству // *Докл. РАН.* 2010. Т. 430. № 4. С. 490–493.
18. *Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // *ПММ.* 2015. Т. 79. № 6. С. 853–863.
19. *Шентунов В.В., Горячева И.Г., Ноздрин М.А.* Контактная задача о движении штампа с регулярным рельефом по вязкоупругому основанию // *Трение и износ.* 2013. Т. 34. № 2. С. 109–119.
20. *Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P.* The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // *Proc. R. Soc. A.* 2014. V. 470. № 2169. Article number 20140392.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0392>
21. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Скольжение волнистого индентора по поверхности вязкоупругого слоя при наличии адгезии // *Изв. РАН. МТТ.* 2015. № 4. P. 90–103.
22. *Hunter S.C.* The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids.* 1960. V. 8. № 4. P. 219–234.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90028-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90028-4)
23. *Wang D., de Boe, G., Neville A., Ghanbarzadeh A.* A review on modelling of viscoelastic contact problems // *Lubricants.* 2022. № 10 (12). P. 358.
<https://doi.org/10.3390/lubricants10120358>
24. *Stepanov F.I., Torskaya E.V.* Effect of surface layers in sliding contact of viscoelastic solids (3-D model of material) // *Front. Mech. Eng.* 2019. V. 5. P. 26.
<https://doi.org/10.3389/fmech.2019.00026>
25. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
26. *Никишин В.С., Шаниро Г.С.* Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1970. 260 с.

MODELING OF SLIDING CONTACT OF A SYSTEM OF ASPERITIES AND COATED VISCOELASTIC HALF-SPACE

E. V. Torskaya^a, F. I. Stepanov^a

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

* e-mail: stepanov_ipm@mail.ru, ** e-mail: torskaya@mail.ru

Abstract – Problem of sliding of a periodic system of asperities along the boundary of a viscoelastic half-space with a coating is under consideration. The coating is modeled by a layer with flexural rigidity. The solution is based on reducing the problem to the contact of a limited system of asperities with the action of others being replaced by distributed pressure; the accuracy of such approach is evaluated. The numerical-analytical solution is based on double integral Fourier transforms, the boundary element method and the iterative procedure. The influence of the shape of asperities, sliding velocity, and coating thickness on the deformation component of the friction force and on the effect of mutual influence of asperities was analyzed. To identify the effect of mutual influence, a comparison was made of the results (distribution of contact pressure and friction force) obtained for multiple contacts and for the isolated asperity. For comparison, the results of solving a similar problem for viscoelastic half-space without a coating were obtained and analyzed.

Keywords: viscoelastic half-space, coating, multiple contact, sliding, friction

BIBLIOGRAPHY

1. *Borodich F.M., Onishchenko D.A.* Similarity and fractality in the modelling of roughness by a multilevel profile with hierarchical structure // *Int. J. Solids Struct.* 1999. V. 36. P. 2585–2612. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00116-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00116-4)
2. *Klüppel M., Heinrich G.* Rubber Friction on Self-Affine Road Tracks // *Rubber Chem. Technol.* 2000. V. 73. № 4. P. 578–606. <https://doi.org/10.5254/1.3547607>
3. *Persson B.N.J.* Theory of rubber friction and contact mechanics // *J. Chem. Phys.* 2001. V. 115. P. 3840–3861. <https://doi.org/10.1063/1.1388626>
4. *Li Q., Popov M., Dimaki A., Filippov A.E., Kürschner S., Popov V.L.* Friction between a viscoelastic body and a rigid surface with random self-affine roughness // *Phys Rev Lett.* 2013. № 111. P. 034301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.034301>
5. *Nettingsmeier J., Wriggers P.* Frictional contact of elastomer materials on rough rigid surfaces // *PAMM Proc Appl Math Mech.* 2004. № 4. P. 360–361. https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_331
6. *Carbone G., Putignano C.A.* Novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials: theory and experiments // *J. Mech. and Phys. Sol.* 2013. V. 61. № 8. P. 1822–1834. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2013.03.005>
7. *Carbone G., Putignano C.* Rough viscoelastic sliding contact: Theory and experiments // *Phys Rev.* 2014. № E89. P. 032408. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.032408>
8. *Scaraggi M., Persson B.N.J.* Friction and universal contact area law for randomly rough viscoelastic contacts // *J Phys Condens Matter.* 2015. № 27. P. 105102. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/27/10/105102>
9. *Menga N., Afferrante L., Demelio G.P., Carbone, G.* Rough contact of sliding viscoelastic layers: Numerical calculations and theoretical predictions // *Tribol. Int.* 2018. № 122. P. 67–75. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2018.02.012>
10. *Kane M.Do., M.-T., Cerezo V., Rado Z., Khelifi C.* Contribution to pavement friction modelling: an introduction of the wetting effect // *Int. J. Pavement Eng.* 2019. V. 20. № 8. P. 965–976. <https://doi.org/10.1080/10298436.2017.1369776>

11. *Soldatenkov I.A.* Calculation of friction for indenter with fractal roughness that slides against a viscoelastic foundation // *J. Frict. Wear.* 2015. V. 36. № 3. P. 193–196.
<https://doi.org/10.3103/S1068366615030137>.
12. *Barber J.R.* Contact Mechanics. Dordrecht. The Netherlands: Springer, 2018. 585 p.
13. *Chen W., Wang Q., Huan Z., Luo X.* Semi-analytical viscoelastic contact modeling of polymer-based materials // *J Trib.* 2011. V. 133. № 4. P. 041404.
<https://doi.org/10.1115/1.4004928>
14. *Koumi K.E. et al.* Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space // *Int J Sol Struc.* 2014. Vol. 51. № 6. P. 1390–1402.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.035>
15. *Koumi K.E., Chaise T., Nelias D.* Rolling contact of a rigid sphere/sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity // *J Mech Phys Sol.* 2015. V. 80. P. 1–25. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.04.001>
16. *Kusche S.* Frictional force between a rotationally symmetric indenter and a viscoelastic half-space // *ZAMM J Appl Math Mech.* 2016. P. 1–14.
<https://doi.org/10.1002/zamm.201500169>
17. *Aleksandrov V.M., Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Sliding contact of a smooth indenter and a viscoelastic half-space (3D problem) // *Dokl. Phys.* 2010. V. 55. P. 77–80.
<https://doi.org/10.1134/S1028335810020084>
18. *Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V.* Sliding of a smooth indenter over a viscoelastic half-space when there is friction // *J. Appl. Math. Mech.* 2015. V. 79. № 6. P. 596–603. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.04.006>
19. *Sheptunov B.V., Goryacheva, I.G., Nozdrin M.A.* Contact problem of die regular relief motion over viscoelastic base // *J. Frict. Wear.* 2013. V. 34. P. 83–91.
<https://doi.org/10.3103/S1068366613020086>
20. *Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P.* The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space // *Proc. R. Soc. A.* 2014. V. 470. № 2169. P. Article number 20140392. <https://doi.org/10.1098/rspa.2014.0392>
21. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Sliding of a wavy indenter on a viscoelastic layer surface in the case of adhesion // *Mech. Solids.* 2015. V. 50. № 4. P. 439–450.
<https://doi.org/10.3103/S002565441504010X>.
22. *Hunter S.C.* The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space // *J Mech Phys Solids.* 1960. V. 8. P. 219–234.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90028-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90028-4)
23. *Wang D., de Boe G., Neville A., Ghanbarzadeh A.A.* Review on Modelling of Viscoelastic Contact Problems. // *Lubricants.* 2022. № 10. P. 358.
<https://doi.org/10.3390/lubricants10120358>
24. *Stepanov F.I., Torskaya E.V.* Effect of Surface Layers in Sliding Contact of Viscoelastic Solids (3-D Model of Material) // *Front. Mech. Eng.* 2019. V. 5. P. 26.
<https://doi.org/10.3389/fmech.2019.00026>
25. *Goryacheva I.G.* Mechanics of friction interaction. Moscow: Nauka. 2001. 478 p.
26. *Nikishin V.S., Shapiro G.S.* Space Problems of Elasticity Theory for Multilayered Media // Moscow: Vych. Tsentr Akad Nauk SSSR. 1970. 260 p.

УДК 539.3

КЛЕТКИ И ФИГУРЫ НАЯ ДЛЯ АТЕРМИЧЕСКИХ
ГЕМИТРОПНЫХ, ИЗОТРОПНЫХ И УЛЬТРАИЗОТРОПНЫХ
МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

© 2024 г. Е. Ю. Крылова^{а,*}, Е. В. Мурашкин^{б,**}, Ю. Н. Радаев^{б,***}

^а Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
Саратов, Россия

^б Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* e-mail: kat.krylova@bk.ru, ** e-mail: murashkin@ipmnet.ru,

*** e-mail: radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 08.05.2024 г.

После доработки 13.05.2024 г.

Принята к публикации 14.05.2024 г.

В работе рассматривается метод построения фигур Ная для микрополярных упругих тел. Метод представления тензоров четвертого и третьего рангов посредством блоков двумерных матриц и связей между их элементами широко известен в кристаллографии. Указанный подход позволяет простым образом выяснить количество независимых определяющих констант для микрополярных упругих тел и гарантировать отсутствие связей между ними. В рамках настоящего исследования построены двумерные фигуры Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела, исходя из соответствующих фигур для гемитропного и изотропного микрополярных упругих тел. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

Ключевые слова: ультраизотропный микрополярный континуум, потенциал напряжений, определяющий тензор, фигура Ная, клетка Ная, нано/микродлина, нано/микромасштаб.

DOI: 10.31857/S1026351924030124, EDN: UGVSUZ

1. Введение. Современный этап развития биоинженерии, трансплантологии, аддитивного производства биоматериалов ставит перед наукой, в частности перед механикой континуума, проблему построения адекватных математических моделей деформирования материалов со сложной внутренней микроструктурой — зернистых, волокнистых, гранулированных, дипольных, полимерных, сотовых и т.д.

Одной из простейших и исторически первой математической моделью, в которой оказывается возможным введение нано/микромасштабной

длины, является модель микрополярного упругого континуума, предложенная в работах Коссера [1]. В микрополярной теории упругости трансляционные перемещения каждого элемента континуума сопровождаются микроповоротами (спинорными перемещениями). Спинорные и трансляционные перемещения считаются независимыми [2–4].

Современные исследования [5] ясно указывают на то, что важной особенностью биоматериалов является чувствительность их определяющих постоянных и тензоров к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства, — инверсиям и зеркальным отражениям. Как следствие, возникает необходимость классификации микрополярных упругих моделей с точки зрения изменения ориентации пространства.

Удобной, легко воспринимаемой формой представления тензоров четвертого и третьего рангов посредством блоков двумерных квадратных и прямоугольных матриц и связей между элементами указанных матриц являются обобщенные фигуры Ная [6, с. 113–115]. Метод построения фигур Ная описан в его классических работах по кристаллографии [6–10]. В цикле статей авторов [11–13] в матричной форме были построены определяющие уравнения для общего анизотропного, гемитропного и изотропного микрополярного упругого континуума. Показано, что определяющие тензоры для анизотропного случая содержат 171 независимую определяющую константу, гемитропного — 9, изотропного — 6. В представляемой работе подход, предложенный Наем, используется для получения определяющих уравнений ультраизотропного микрополярного упругого тела, т.е. такого тела, компоненты определяющих тензоров которого инвариантны относительно любых мыслимых преобразований пространства. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

2. Тензоры/псевдотензоры с постоянными компонентами. Ковариантно постоянные тензорные/псевдотензорные поля играют важную роль как при выводе определяющих уравнений, так и при преобразовании дифференциальных уравнений механики сплошных сред [14–18]. Важным типом ковариантно постоянных тензоров/псевдотензоров являются тензоры/псевдотензоры с постоянными компонентами [19, с. 164].

Тензором/псевдотензором с постоянными компонентами [19, с. 164] называется тензор/псевдотензор, сохраняющий неизменными все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования гомотетии, центральная инверсия, зеркальные отражения.

В монографии [19, с. 164–176] изложен общий алгоритм построения тензоров/псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных/отрицательных алгебраических весов. Например, общий вид псевдотензора $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$ с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой:

$$C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s} = \sum_{P=1}^r \lambda_P \delta_{k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \dots \delta_{k_s}^{h_s} \underbrace{m_{k_{s+1} \dots k_{s+N}} \dots m_{k_{r-N+1} \dots k_r}}_{|g|} \quad (2.1)$$

где r — число ковариантных индексов, s — число контравариантных индексов, N — размерность пространства, g — вес (целое отрицательное число), λ_P ($P=1, 2, \dots, r!$) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты), P — перестановка в ряде индексов

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (2.1) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки, производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|g|, \quad (2.2)$$

откуда следует взаимное ограничение

$$r \geq s. \quad (2.3)$$

Если условие (2.2) не выполняется, то псевдотензор $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$ с постоянными компонентами сводится к нулевому.

Отметим, что псевдотензорное поле $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s}$ с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_s C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[g] h_1 h_2 \dots h_s} = 0, \quad (2.4)$$

при условии, что

$$\nabla_s \lambda_P = 0. \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (2.1) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах [17–21]. Среди них фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и его алгебраические степени, псевдотензорные единицы $1^{[g]}$, обобщенные δ -символы, ϵ -символы, e -тензоры, метрические тензоры g^{kh} , g_{hk} , которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [22–26].

Рассмотрим важный для дальнейшего изложения пример. Абсолютный тензор четвертого ранга C_{sm}^{il} с постоянными компонентами согласно (2.1) можно представить в виде:

$$C_{sm}^{il} = a \delta_s^i \delta_m^l + c \delta_s^l \delta_m^i, \quad (2.6)$$

где $a = C_{12}^{12}$ и $c = C_{21}^{12}$ — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).

Уравнение (2.6), справедливое в любой системе координат, в декартовых координатах можно представить следующим образом:

$$C_{ilsm} = a \delta_{is} \delta_{lm} + c \delta_{ls} \delta_{im}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим ограничение (2.2). Тогда для тензора четвертого ранга, заданного в N -мерном пространстве, можно получить систему уравнений для определения числа ковариантных r и контравариантных s индексов в виде:

$$\begin{aligned} r - s &= N|g|, \\ r + s &= 4. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Выражая r и s , получим:

$$\begin{aligned} 0 \leq 2r &= 4 + N|g|, \\ 0 \leq 2s &= 4 - N|g|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решениями системы (2.9) должны быть целые неотрицательные числа, откуда немедленно заключаем, что произведение $N|g|$ должно быть четным неотрицательным целым числом, удовлетворяющим неравенству

$$N|g| \leq 4. \quad (2.10)$$

Анализируя неравенство (2.10), заинтересованный читатель может заключить, что в трехмерном пространстве и в пространствах с размерностью выше пятой невозможно построить псевдотензор четвертого ранга с постоянными компонентами ненулевого алгебраического веса. Однако в пространствах размерности 2 и 4 такая возможность существует. Все сказанное имеет место только когда $g = \text{Ent}(g)$.¹

3. Анизотропное микрополярное упругое тело. В дальнейшем все рассуждения будем проводить в декартовой прямоугольной системе координат. Рассмотрим микрополярный упругий потенциал напряжений \mathcal{U} в расчете на единицу инвариантного элемента объема $d\tau$ [27–32], с естественными асимметричными тензорными аргументами (не разделяя пока на симметричную и антисимметричную конститутэнты:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad (3.1)$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; κ_{ij} — тензор изгиба–кручения.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела квадратичная энергетическая форма упругого потенциала напряжений \mathcal{U} записывается в виде [33–35]:

$$2\mathcal{U} = H_{1\ islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_{2\ islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_{3\ islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}, \quad (3.2)$$

где $H_{c\ islm}$ ($c = 1, 2, 3$) — определяющие тензоры анизотропного микрополярного упругого тела. Для определяющих тензоров выполняются следующие условия:

1. $H_{1\ islm}$ и $H_{2\ islm}$ — симметричны при перестановке пар индексов ($is \rightleftharpoons lm$).
2. $H_{3\ islm}$ — не симметричен при перестановке пар индексов ($is \rightleftharpoons lm$).

Выделим симметричные и антисимметричные составляющие асимметричных тензоров деформаций и изгиба–кручения в виде суммы, имеем:

¹ Вопрос с целочисленностью алгебраического веса g в алгебре псевдотензоров к настоящему времени окончательно не решен.

$$\epsilon_{is} = \epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}, \quad \kappa_{is} = \kappa_{(is)} + \kappa_{[is]}. \quad (3.3)$$

Определим векторы, ассоциированные с антисимметричными составляющими асимметричных тензоров деформаций и изгиба–кручения согласно

$$\varphi_k = -\frac{1}{2}e_{kis}\epsilon_{[is]}, \quad \kappa_k = \frac{1}{2}e_{kis}\kappa_{[is]}. \quad (3.4)$$

Формулы, обратные к (1.4), записываются в виде:

$$\epsilon_{[is]} = -e_{isk}\varphi_k, \quad \kappa_{[is]} = e_{kis}\kappa_k. \quad (3.5)$$

Определяющие тензоры четвертого ранга в представлении (3.2) запишем в виде:

$$H_{c\ islm} = H_c{}_{(is)(lm)} + H_c{}_{[is](lm)} + H_c{}_{(is)[lm]} + H_c{}_{[is][lm]}. \quad (3.6)$$

Подстановка соотношений (3.3) с учетом (3.6) в энергетическую форму упругого потенциала (3.2) приводит к формуле:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & \left(H_1{}_{(is)(lm)} + H_1{}_{[is](lm)} + H_1{}_{(is)[lm]} + H_1{}_{[is][lm]} \right) (\epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}) (\epsilon_{(lm)} + \epsilon_{[lm]}) + \\ & + \left(H_2{}_{(is)(lm)} + H_2{}_{[is](lm)} + H_2{}_{(is)[lm]} + H_2{}_{[is][lm]} \right) (\kappa_{(is)} + \kappa_{[is]}) (\kappa_{(lm)} + \kappa_{[lm]}) + \\ & + \left(H_3{}_{(is)(lm)} + H_3{}_{[is](lm)} + H_3{}_{(is)[lm]} + H_3{}_{[is][lm]} \right) (\epsilon_{(is)} + \epsilon_{[is]}) (\kappa_{(lm)} + \kappa_{[lm]}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в (3.7), имеем десятичленную форму:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & H_1{}_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + 2H_1{}_{(is)[lm]}\epsilon_{(is)}\epsilon_{[lm]} + H_1{}_{[is][lm]}\epsilon_{[is]}\epsilon_{[lm]} + \\ & + H_2{}_{(is)(lm)}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + 2H_2{}_{(is)[lm]}\kappa_{(is)}\kappa_{[lm]} + H_2{}_{[is][lm]}\kappa_{[is]}\kappa_{[lm]} + \\ & + H_3{}_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + H_3{}_{[is](lm)}\epsilon_{[is]}\kappa_{(lm)} + H_3{}_{(is)[lm]}\epsilon_{(is)}\kappa_{[lm]} + H_3{}_{[is][lm]}\epsilon_{[is]}\epsilon_{[is]}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Откуда, учитывая (1.5) и принимая во внимание

$$H_c{}_{[is][lm]}e_{lmk}\epsilon_{(is)}\varphi_k = H_c{}_{[is](lm)}e_{isk}\epsilon_{(lm)}\varphi_k \quad (c = 1, 2), \quad (3.9)$$

после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U} = & H_1{}_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + H_2{}_{(is)(lm)}\kappa_{(is)}\kappa_{(lm)} + H_3{}_{(is)(lm)}\epsilon_{(is)}\kappa_{(lm)} + \\ & + H_1{}_{[is][lm]}e_{isk}e_{lmj}\varphi_k\varphi_j + H_2{}_{[is][lm]}e_{isj}e_{lmk}\kappa_j\kappa_k - H_3{}_{[is][lm]}e_{isk}e_{lmj}\varphi_k\kappa_j - \\ & - 2H_1{}_{(is)[lm]}e_{lmk}\epsilon_{(is)}\varphi_k + 2H_2{}_{(is)[lm]}e_{lmk}\kappa_{(is)}\kappa_k - H_3{}_{[is](lm)}e_{isk}\kappa_{(lm)}\varphi_k + \\ & + H_3{}_{(is)[lm]}e_{lmj}\epsilon_{(is)}\kappa_j. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для упрощения дальнейшего изложения материала настоящей статьи введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 E_I^{(is)(lm)} &= H_1^{(is)(lm)}, & E_{II}^{(is)(lm)} &= H_2^{(is)(lm)}, & E_{III}^{(is)(lm)} &= H_3^{(is)(lm)}, \\
 E_{IV}^{(kj)} &= H_1^{[is][lm]} e_{isk} e_{lmj}, & E_V^{(kj)} &= H_2^{[is][lm]} e_{isk} e_{lmj}, \\
 E_{VI}^{kj} &= -H_3^{[is][lm]} e_{isj} e_{lmk}, & E_{VII}^{(is)k} &= -2H_1^{(is)[lm]} e_{lmk}, \\
 E_{VIII}^{(is)k} &= 2H_2^{(is)[lm]} e_{lmk}, & E_{IX}^{k(lm)} &= -H_3^{[is](lm)} e_{isk}, \\
 E_X^{(is)j} &= H_3^{(is)[lm]} e_{lmj}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

В новых обозначениях (3.11) энергетическая форма упругого потенциала (3.10) примет вид:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{U} &= E_I^{(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + E_{II}^{(is)(lm)} \kappa_{(is)} \kappa_{(lm)} + E_{III}^{(is)(lm)} \epsilon_{(is)} \kappa_{(lm)} + \\
 &+ E_{IV}^{(is)} \phi_i \phi_s + E_V^{(is)} \kappa_i \kappa_s + E_{VI}^{is} \phi_i \kappa_s + E_{VII}^{(is)k} \epsilon_{(is)} \varphi_k + \\
 &+ E_{VIII}^{(is)k} \kappa_{(is)} \kappa_k + E_{IX}^{k(lm)} \kappa_{(lm)} \varphi_k + E_X^{(is)j} \epsilon_{(is)} \kappa_j.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

4. Гемитропное микрополярное упругое тело. Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты трех его определяющих тензоров четвертого ранга не изменяются при поворотах координатного репера, но, вообще говоря, изменяются при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. полуизотропны.

В этом случае определяющие тензоры гемитропного микрополярного упругого тела могут быть представлены в виде [36, с. 70]:

$$H_{c\ islm} = a_c \delta_{is} \delta_{lm} + b_c \delta_{sm} \delta_{il} + c_c \delta_{im} \delta_{ls} \tag{4.1}$$

или

$$H_{c\ islm} = a_c \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b_c - c_c)(\delta_{il} \delta_{sm} - \delta_{im} \delta_{sl}) + \frac{1}{2}(b_c + c_c)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \tag{4.2}$$

где a_c, b_c, c_c ($c = 1, 2, 3$) — определяющие постоянные.

С учетом представлений (4.2) соотношения (3.11) запишутся в форме:

$$\begin{aligned}
 E_I^{(is)(lm)} &= a_1 \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b_1 + c_1)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
 E_{II}^{(is)(lm)} &= a_2 \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b_2 + c_2)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
 E_{III}^{(is)(lm)} &= a_3 \delta_{is} \delta_{lm} + \frac{1}{2}(b_3 + c_3)(\delta_{il} \delta_{sm} + \delta_{im} \delta_{sl}), \\
 E_{IV}^{(kj)} &= (b_1 - c_1) \delta_{kj}, & E_V^{(kj)} &= (b_2 - c_2) \delta_{kj}, \\
 E_{VI}^{kj} &= -(b_3 - c_3) \delta_{kj}, & E_{VII}^{(is)k} &= E_{VIII}^{(is)k} = E_{IX}^{k(lm)} = E_X^{(is)j} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

5. Изотропное микрополярное упругое тело. Микрополярное тело называется изотропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются не только при поворотах координатного репера, но и при зеркальных отражениях и инверсиях трехмерного Евклидова пространства. Последнее означает, что

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{sm}\delta_{il} + c\delta_{im}\delta_{ls}, \\ H_2^{islm} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{sm}\delta_{il} + c\delta_{im}\delta_{ls}, \\ H_3^{islm} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда для определяющих тензоров (3.11) получим:

$$\begin{aligned} E_I^{(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{II}^{(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}(b+c)(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{IV}^{(kj)} &= (b-c)\delta_{kj}, \quad E_V^{(kj)} = (b-c)\delta_{kj}, \\ E_{III}^{(is)(lm)} &= E_{VI}^{kj} = E_{VII}^{(is)k} = E_{VII}^{(is)k} = E_{IX}^{k(lm)} = E_X^{(is)j} = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

6. Ультраизотропное микрополярное упругое тело. Изотропное микрополярное упругое тело назовем ультраизотропным, если компоненты двух его определяющих тензоров вообще не изменяются ни при каких преобразованиях трехмерного Евклидова пространства, т.е. являются тензорами с постоянными компонентами.

Учитывая представление (2.7) для тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами, определяющие тензоры (5.1) можно представить в виде:

$$H_c^{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + c\delta_{im}\delta_{ls} \quad (c=1, 2) \quad (6.1)$$

или

$$H_c^{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} - \frac{1}{2c}c(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{1}{2c}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}) \quad (c=1, 2). \quad (6.2)$$

В обозначениях (3.11) имеем:

$$\begin{aligned} E_I^{(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{II}^{(is)(lm)} &= a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{1}{2}c(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}), \\ E_{IV}^{(kj)} &= -c\delta_{kj}, \quad E_V^{(kj)} = -c\delta_{kj}, \\ E_{III}^{(is)(lm)} &= E_{VI}^{kj} = E_{VII}^{(is)k} = E_{VII}^{(is)k} = E_{IX}^{k(lm)} = E_X^{(is)j} = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

7. Матричное представление определяющих тензоров микрополярного упругого тела. Удобной, легко воспринимаемой формой представления тензоров

четвертого, третьего и второго рангов посредством блоков двумерных квадратных и прямоугольных матриц и связей между элементами указанных матриц являются обобщенные фигуры Ная [6, с. 113–115]. Метод построения фигур Ная подробно описан в классических монографиях и физических стандартах по кристаллографии [6–10]. Указанный метод позволяет без труда установить количество независимых определяющих постоянных, характеризующих микрополярный континуум, и возможных наличия/отсутствия алгебраических связей между ними.

Преобразование определяющих тензоров четвертого, третьего и второго рангов, участвующих в записи микрополярного упругого потенциала (3.12), к виду двумерных матриц можно произвести при помощи соответствующей замены индексов согласно правилу (см. табл. 1), предложенному в монографии [6, с. 113–115], т.е. каждой паре тензорных индексов соответствует матричный индекс, обозначенный прописной латинской буквой:

$$\begin{aligned}
 (is) &\leftrightarrow K, \\
 (lm) &\leftrightarrow N, \\
 (is)(lm) &\leftrightarrow KN.
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Следует помнить, что метainдексы a и b не являются тензорными индексами, а нумеруют определяющие тензоры.

Таблица 1. Соответствие пар тензорных и матричных индексов.

пары тензорных индексов (is, lm)	11	22	33	23, 32	31, 13	12, 21
матричные индексы (K, N)	1	2	3	4	5	6

	ϵ_N	ϕ_s	k_N	k_s
ϵ_K	E_{KN} I	E_{Ks} VII	E_{KN} III	E_{Ks} X
ϕ_i	E_{iN}^T VII	E_{is} IV	E_{iN} IX	E_{is} VI
k_K	E_{KN}^T III	E_{Ks}^T IX	E_{KN} II	E_{Ks} VIII
k_i	E_{iN}^T X	E_{is}^T IV	E_{iN}^T VIII	E_{is} V

Рис. 1. Ансамбль блоков Ная для общих анизотропных микрополярных упругих определяющих тензоров

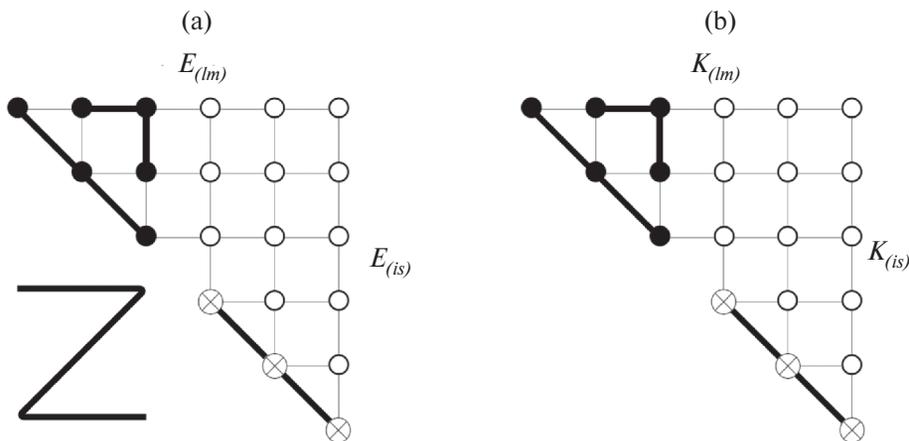


Рис. 2. Клетки Ная определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого континуума: а) E_{IKN} , б) E_{IINKN} .

Ансамбль двумерных матричных блоков Ная для определяющих тензоров линейного анизотропного микрополярного упругого тела представлен на рис. 1.

Фигуры Ная для определяющих тензоров анизотропного, гемитропного и изотропного микрополярных упругих тел приведены в работе [11].

Рассмотрим преобразование определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного тела к виду двумерных матриц. В этом случае ненулевыми оказываются два тензора четвертого ранга $E_{I(is)(lm)}$, $E_{II(is)(lm)}$ и два тензора второго ранга $E_{IV(is)}$, $E_{V(is)}$. Заменяя пары индексов у тензоров $E_{\alpha(is)(lm)}$ ($\alpha = I, II$) согласно табл. 1, получим:

$$E_{\alpha}^{KN} = \begin{bmatrix} a+c & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Матрицы ненулевых определяющих тензоров второго ранга $E_{b(is)}$ ($b = IV, V$) для ультраизотропного микрополярного упругого тела примут вид:

$$E_{b}^{is} = \text{diag}(-c, -c, -c). \quad (7.3)$$

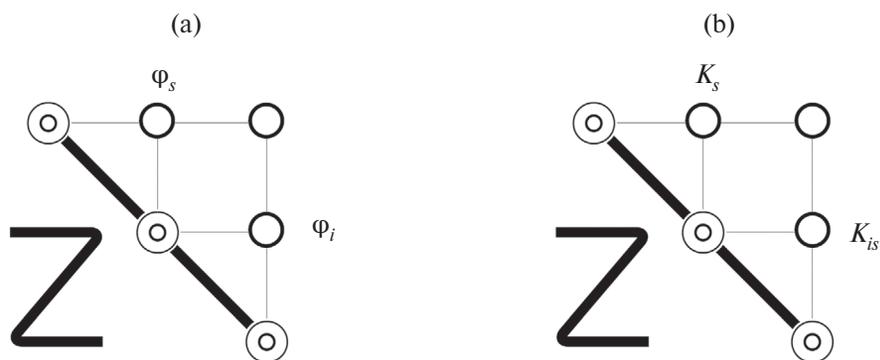


Рис. 3. Клетки Ная определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого континуума: а) E_{IV}^{is} , б) E_{∇}^{is} .

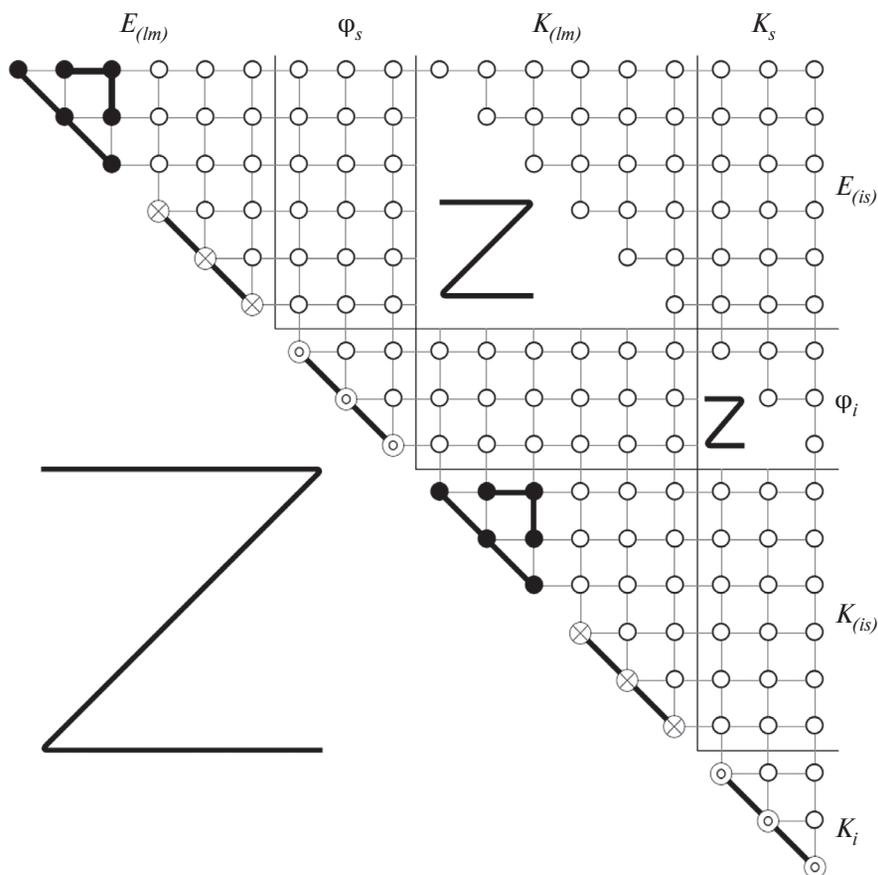


Рис. 4. Сборка Ная для ультраизотропного микрополярного тела.

Метаиндексы a и b в (7.3) связаны соотношением $a = b - III$.

Двумерные клетки Ная определяющих тензоров ультраизотропного микрополярного упругого тела:

1. $E_{\alpha}^{(is)(lm)}$ ($\alpha = I, II$) представлены на рис. 2.

2. $E_{\beta}^{(is)}$ ($\beta = IV, V$) представлены на рис. 3.

Фигура Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела состоит из клеток (см. рис. 2 и 3). В результате несложных геометрических преобразований получим фигуру Ная (см. рис. 4).

Обозначения на фигурах Ная: жирными отрезками соединены равные компоненты, Z означает симметрию числовых значений элементов фигуры относительно главной диагонали, \bullet — отличные от нуля компоненты, \otimes — компоненты, вычисляемые по следующему правилу $0.5(E_{\alpha}^{(11)(11)} - E_{\alpha}^{(11)(12)})$, \odot — компоненты, вычисляемые по следующему правилу $(E_{\alpha}^{(11)(22)} - E_{\alpha}^{(11)(11)})$, \circ — нулевые компоненты.

Заключение. В работе выполнено обобщение метода построения двумерных фигур Ная для микрополярных упругих тел. Указанный подход позволяет наиболее простым образом выяснить количество независимых определяющих констант для микрополярных упругих тел и установить возможные связи между ними. В рамках настоящего исследования построены двумерные фигуры Ная для ультраизотропного микрополярного упругого тела. Показано, что определяющие тензоры данного материала содержат лишь 4 независимые определяющие постоянные: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная нано/микродлина и еще одна, не имеющая физической размерности, постоянная.

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500437-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
2. *Besdo D.* Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // Acta Mechanica. 1974. V. 20. № 1. P. 105–131.
3. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
4. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. *Lakes R.* Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
6. *Nye J.F.* Physical Properties of Crystals: their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
7. *Wooster W.A.* Experimental crystal physics. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
8. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. XXVI. 979 p.
9. Standards on piezoelectric crystals. New York: Proceedings of the I.R.E., 1949. 18 p.
10. *Zheng Q.S., Spencer A.J.M.* On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // Int. J. Engng Sci. 1993. V. 31. № 4. P. 617–435.
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)

11. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Two-dimensional nye figures for some micropolar elastic solids // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. P. 2254–2268.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700243>
12. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24. Вып. 1. С. 109–122.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>
13. *Мурашкин Е.В.* Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 3 (57). С. 100–111.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>
14. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей // *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 6. С. 104–113.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060149>
15. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2 (52). С. 106–117.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>
16. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2022. № 2 (52). С. 118–127.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>
17. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V.* Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022. V. 22. № 2. P. 205–215.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>
18. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K.* On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. V. 26. № 1. P. 36–47.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>
19. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [*G.B. Gurevich*. Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.]
20. *McConnell A.J.* Application of tensor analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. 318 p.
21. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [*Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.]
22. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. № 3. С. 504–517.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>

23. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 457–474.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>
24. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>
25. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 3. P. 424–444.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
26. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
27. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с. [*Schouten J. A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
28. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. V. 5. Courier Corporation, 1978. 324 p.
29. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25. № 4. С. 776–786.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>
30. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mech. Solids. 2022. V. 57. P. 205–213.
<https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mech. Solids. 2023. V. 58. P. 153–160.
<https://doi.org/10.3103/s0025654422700029>
32. *Radaev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // Mech. Solids. 2023. V. 58. P. 1517–1527.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
33. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 108–115.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 3 (53). С. 86–100.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
35. *Мурашкин Е.В.* О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // Вестник Чувашского государственного

педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2023. № 1 (55). С. 110–121. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>
 36. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge University Press, 1931. 101 p.

THE NYE CELLS AND FIGURES FOR ATHERMIC HEMITROPIC, ISOTROPIC AND ULTRAISOTROPIC MICROPOLAR ELASTIC SOLIDS

Krylova E. Yu.^{a, *}, Murashkin E. V.^{b, **}, and Radaev Yu. N.^{b, *}**

^a *Saratov, Saratov State University,*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia*
^{*}*e-mails: kat.krylova@bk.ru, **murashkin@ipmnet.ru, ***radaev@ipmnet.ru*

Abstract – The paper deals with a method of the Nye figures construction for micropolar elastic solids. The method of tensors of the 4th and 3rd ranks representations by means of blocks of two-dimensional matrices and relationships between their elements is widely known in crystallography. Such approach makes it possible to simply determine the number of independent constitutive constants for micropolar elastic solids and guarantee the absence of relationships between them. In frameworks of the present study, the two-dimensional Nye figures for an ultrasotropic micropolar elastic solid were figured out based on the corresponding figures for hemitropic and isotropic micropolar elastic solids. It is shown that the constitutive tensors of ultrasotropic material characterized by only 4 independent constitutive constants: shear modulus of elasticity, Poisson’s ratio, characteristic nano/microlength and another dimensionless constant.

Keywords: ultrasotropic micropolar continuum, stress state potential, constitutive tensor, Nye’s figure, Nye’s cell, nano/microlength, nano/microscale

REFERENCES

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 p.
2. *Besdo D.* Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mechanica*. 1974. Vol. 20. №. 1. P. 105–131.
3. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
4. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
5. *Lakes R.* Composites and metamaterials. Singapore: World Scientific, 2020.
6. *Nye J.F.* Physical Properties of Crystals, their representation by tensors and matrices. Oxford: Clarendon Press, 1957. 322+xv p.
7. *Wooster W.A.* Experimental Crystal Physics. Oxford: Clarendon Press, 1957. 116+vi p.
8. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik). Fachmedien, Wiesbaden: Springer, 1966. XXVI+979 p.
9. Standards on Piezoelectric Crystals. New York: Proceedings of the I.R.E., 1949. 18 p.
10. *Zheng Q. S., Spencer A. J. M.* On the canonical representations for Kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems // *Int. J. Engng Sci.* 1993. V. 31. Iss. 4. pp. 617–435.
[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(93\)90054-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90054-X)

11. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Two-dimensional nye figures for some micropolar elastic solids // *Mechanics of Solids*. 2023. V. 58. № 6. P. 2254–2268.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700243>
12. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids // *Izvestiya of saratov university. Mathematics. Mechanics. Informatics* 2024. V. 24. № 1. P. 109–122.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>
13. *Murashkin E.V.* On a method of constructing Nye figures for asymmetric theories of micropolar elasticity // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2023. № 3 (57). P. 100–111.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>
14. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the Theory of covariant differentiation of two point pseudotensor fields // *Mechanics of Solids*. 2022. V. 57. № 6. P. 1365–1373.
<https://doi.org/10.3103/s0025654422060255>
15. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2022. № 2 (52). P. 106–115.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>
16. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, // *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost.* 2022. № 2 (52). P. 118–127.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>
17. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V.* Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022. V. 22. № 2. P. 205–215.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>
18. *Radayev Yu.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K.* On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. V. 26. № 1. P. 36–47.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>
19. *Gurevich G.B.* Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: Noordhoff, 1964. 429 p.
20. *McConnell A.J.* Application of Tensor Analysis. New York: Dover Publications Inc., 1957. xii+38 p.
21. *Sokolnikoff I.S.* Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 p.
22. *Radayev Yu.N.* The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018. V. 22. № 3. P. 504–517.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>
23. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*. 2021. Vol. 25. № 3. P. 457–474.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>
24. *Radayev Y.N., Murashkin E.V.* Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // *Probl. Prochn. Plastichn.* 2020. V. 82. № 4. P. 399–412.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>

25. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 3. P. 424–444.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
26. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 24. № 4. P. 752–761.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>
27. *Schouten J.A.*, Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 p.
28. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. V. 5. Courier Corporation, 1978. 334 p.
29. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. V. 25. № 4. P. 776–786.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>
30. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // Mechanics of Solids. 2022. V. 57. №. 2. P. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The schouten force stresses in continuum mechanics formulations // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. №. 1. P. 153–160.
<https://doi.org/10.3103/s0025654422700029>
32. *Radaev Y.N.* Tensors with Constant Components in the Constitutive Equations of Hemitropic Micropolar Solids // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 5. P. 1517–1527.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>
33. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I. Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. № 4 (54). P. 108–115.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>
34. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2022. № 3 (53). P. 86–100.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>
35. *Murashkin E.V.* On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials // Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. Im. I.Ya. Yakovleva Ser.: Mekh. Pred. Sost. 2023. № 1 (55). P. 110–121.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>
36. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge University Press, 1931. 101 p.

УДК 669.018.44:539.376

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ МОНОКРИСТАЛЛОВ НИКЕЛЕВЫХ ЖАРОПРОЧНЫХ СПЛАВОВ

© 2024 г. А. И. Епишин^а, *, Д. С. Лисовенко^б, **

^аИнститут структурной макрокинетики и проблем материаловедения
им. А.Г. Мерджанова РАН, Черноголовка, Россия

^бИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: a.epishin2021@gmail.com, **e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г.

После доработки 24.06.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Исследована отрицательная ползучесть монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов SRR99 и CMSX-4. Данное явление наблюдали для обоих сплавов при температурах 980–1000 °С и низких либо нулевых напряжениях нагрузки. Предположено, что основной причиной отрицательной ползучести является образование ближнего порядка атомов в сильно легированной кристаллической решетке матричной γ -фазы. Дополнительными факторами, влияющими на величину и анизотропию деформации отрицательной ползучести, могут быть релаксация остаточных напряжений: на микроскопическом уровне – мисфитных напряжений между γ -матрицей и упрочняющими ее γ' -выделениями и на мезоскопическом уровне – дендритных напряжений между осями дендритов и межосными пространствами.

Ключевые слова: монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов, отрицательная ползучесть, упорядочение кристаллической структуры, остаточные напряжения

DOI: 10.31857/S1026351924030131, EDN: UGUAZO

1. Введение. В последнее время большое внимание уделяется материалам, называемым “ауксетиками” – термин, введенный профессором Эвансом с соавт. из Эксетерского университета [1] для материалов, которые демонстрируют отрицательные значения коэффициента Пуассона, то есть расширяются в поперечном направлении при приложении растягивающей продольной нагрузки [2–7]. Было установлено, что эффект отрицательности коэффициента Пуассона имеет место для широкого класса материалов, в том числе для никелевых жаропрочных сплавов. В работе профессора И.Л. Светлова с соавт. [8] методом голографической интерферометрии было однозначно показано, что при нагружении монокристалла никелевого жаропрочного сплава ЖС6Ф растягивающей нагрузкой

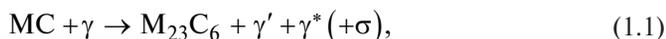
в кристаллографическом направлении $[011]$ происходит его расширение в поперечном направлении $[0\bar{1}\bar{1}]$.

Позже значение термина “ауксетики” было расширено для более широкой области материалов с необычными механическими и тепловыми свойствами, например, такими как отрицательная сжимаемость [9], отрицательное тепловое расширение [10], отрицательное объемное расширение при плавлении [11, 12], включения с отрицательной жесткостью [13] и др. В связи с большим научным и практическим интересом к материалам данного типа по научному направлению “ауксетики” проводятся регулярные конференции “Ауксетики и другие материалы и модели с отрицательными характеристиками” (International Conference Auxetics and other materials and models with “negative” characteristics) и семинары “Ауксетики и связанные с ними системы” (International Workshop Auxetics and related systems).

Настоящая статья посвящена такому необычному механическому явлению, как “отрицательная ползучесть”. Этот термин был введен Фонтаном и Корчинским [14], которые наблюдали отрицательную деформацию образцов сплава на основе железа Fe-20.5W ат. % и никелевого сплава Ni-25.5Mo ат. % в процессе ползучести при 600 °С под действием растягивающей нагрузки. Тимминс с соавт. [15], а потом и другие исследователи показали, что “отрицательная ползучесть” типична и для никелевых сплавов. В своей работе авторы исследовали ползучесть сплава Nimonic 90 при 850 °С и зарегистрировали отрицательную деформацию -0.05% после испытания длительностью 800 ч. Было предположено, что причиной отрицательной деформации является изменение объемной доли упрочняющей сплав γ' -фазы. Таким образом, никелевые сплавы являются по крайней мере материалами, дважды проявляющими отрицательные характеристики – вследствие отрицательности коэффициента Пуассона и отрицательной ползучести при высокотемпературном длительном нагружении.

Гипотезу, подобную гипотезе Тимминса, предложил Луше [16]. Согласно его модели на начальной стадии ползучести, когда кубоидные γ' -частицы образуют так называемую рафт-структуру, Р-прослойки γ -фазы, параллельные (Р) оси растягивающей нагрузки, превращаются в нестехиометрическую упорядоченную фазу γ' , вследствие чего объемная доля γ' -фазы в сплаве временно увеличивается и образец сжимается, поскольку параметр γ' -решетки меньше, чем у γ -решетки.

Обширные исследования явления отрицательной ползучести были проведены в работах [17–21] для никелевых сплавов Ni-20% Cr, Nimonic 80A и Waspaloy. Согласно Реппих [21] и Кинцель с соавт. [22], причиной отрицательной ползучести является превращение монокарбидов MC в карбиды типа $M_{23}C_6$ по следующей реакции:



где обе фазы γ и γ^* являются матричными с ГЦК-структурой, но разного состава. В случае сплава IN 738 карбидный переход приводит к удлинению образца [21], в то время как для сплава Waspaloy наблюдается сокращение его длины [22].

Фирлус с соавт. [23] показали, что чистый никель и разбавленные бинарные никелевые сплавы не проявляют признаков отрицательной ползучести. Однако при более высоком содержании Cr и Al, а также в высоколегированных тройных и многокомпонентных сплавах на основе никеля наблюдается отрицательная ползучесть. Согласно результатам данного исследования, отрицательная ползучесть при 550 °С вызвана образованием ближнего порядка атомов Cr и Al.

Целью настоящей работы являлось экспериментальное исследование явления “отрицательной ползучести” на образцах двух монокристаллических никелевых жаропрочных сплавов 1-го и 2-го поколений, а также обсуждение гипотез, объясняющих это явление.

2. Материалы и методика эксперимента. Объектами исследования являлись монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов SRR99 [24] и CMSX-4 [25], соответственно разработанных британской фирмой Rolls-Royce и американской фирмой Cannon-Muskegon. Химический состав сплавов представлен в табл. 1. Сплав SRR99 не содержит рения, а сплав CMSX-4 содержит 3 мас. %, и поэтому согласно международно принятой классификации эти сплавы соответственно относятся к 1-му и 2-му поколениям монокристаллических никелевых жаропрочных сплавов.

Таблица 1. Химический состав исследованных сплавов, мас. %

Сплав	Al	Ti	Cr	Co	Ni	Mo	Ta	W	Re	C
SRR99	5.6	1.8	9.0	5.0	основа	–	2.9	9.5	–	0.15
CMSX-4	5.7	1.0	6.4	9.7	основа	0.6	6.5	6.4	3.0	0.014

Цилиндрические монокристаллы этих сплавов с осевой кристаллографической ориентацией [001] были закристаллизованы методом Бриджмена–Стокбаргера, SRR99 – германской фирмой Doncasters Precision Castings, CMSX-4 – американской фирмой Howmet Alcoa. После кристаллизации монокристаллы были подвергнуты стандартной термической обработке, включающей длительный многоступенчатый гомогенизационный отжиг и двухступенчатое старение: 1080 °С/ 4 ч + 870 °С/ 16 ч для SRR99 и 1140 °С/ 6 ч + 871 °С/ 20 ч для CMSX-4.

СЭМ изображения γ/γ' -микроструктуры монокристаллов сплавов SRR99 и CMSX-4 после полного цикла термической обработки показаны на рис. 1. Видно, что в обоих сплавах сформировалась типичная для никелевых жаропрочных сплавов кубоидная γ/γ' -микроструктура – γ -твердый раствор никеля (матрица, темная фазы), упрочненная кубоидными γ' -выделениями (фаза на основе интерметаллида Ni_3Al), размером около 0.45 мкм. Объемная доля γ' -выделений несколько выше в сплаве CMSX-4 (≈ 73 об. %), чем в сплаве SRR99 (≈ 68 об. %), что обусловлено более высоким суммарным содержанием γ' -образующих элементов в первом сплаве: Al+Ti+Ta = 16.2 ат. % в CMSX-4 против Al+Ti+Ta = 15.24 ат. % в SRR99. Следует отметить, что монокристаллические сплавы SRR99 и CMSX-4 содержат мало углерода, его концентрация в этих сплавах соответственно равна 0.15 и 0.014 мас. %, что ниже растворимости

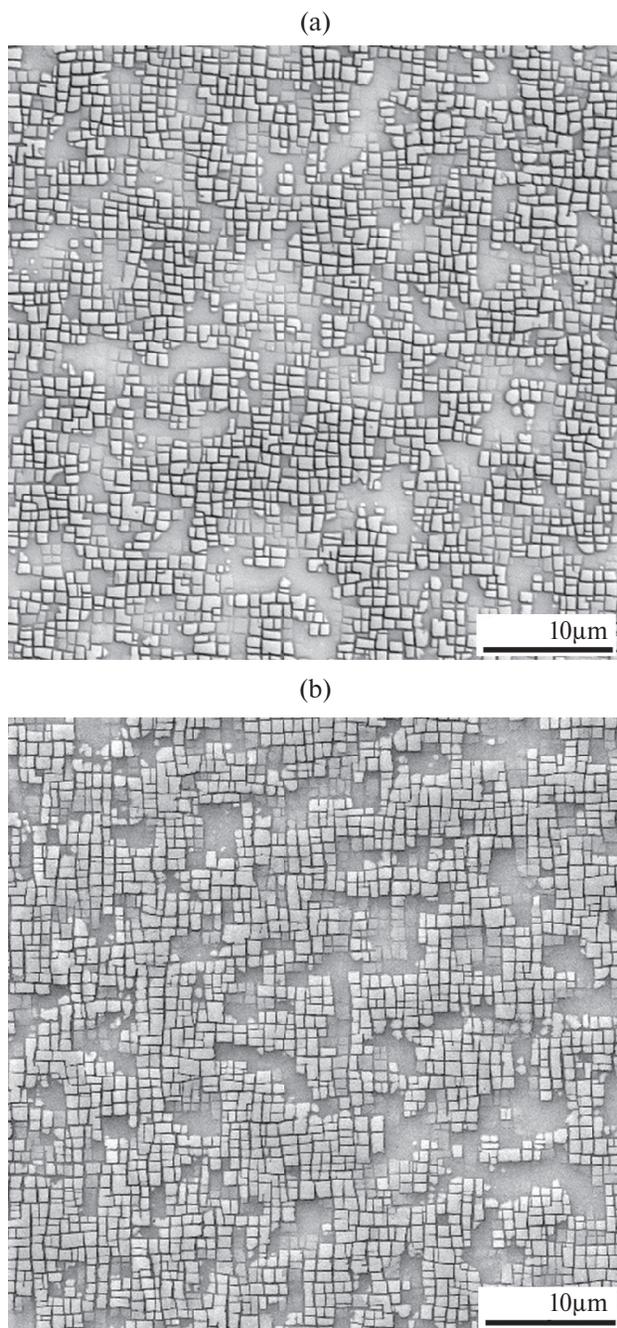


Рис. 1. СЭМ изображения γ/γ' -микроструктуры сплавов SRR99 (a) и CMSX-4 (b) после стандартной термической обработки. Выделения γ' -фазы – светлые, γ -матрица – темная.

углерода в никеле, 0.26–0.27 мас. % [26] при 1000 °С (близко к температуре настоящих исследований). Поэтому карбидные включения в сплаве CMSX-4 практически отсутствуют, а в сплаве SRR99 их очень мало.

Отрицательную ползучесть без нагрузки и термическое расширение монокристаллов измеряли в высокотемпературном автоматическом dilatометре фирмы Linseis, Германия. Для dilatометрического анализа из [001] ориентированных монокристаллов сначала продольно вырезали прямоугольные заготовки, из которых затем вытачивали цилиндрические образцы диаметром 4 мм и длиной $l_0 = 35$ мм. Удлинение образцов регистрировали по перемещению корундового толкателя, прижатого к образцу с усилием около 1 Н. Нагрев образцов осуществляли радиационно в электрической резистивной печи, при этом температуру контролировали с помощью Pt/Pt-13%Rh термопар с точностью ± 3 °С. При измерении термического расширения нагрев осуществляли со скоростью 5 °С/мин. Предварительно dilatометрическая система была откалибрована по нулевым измерениям и сравнительного измерения с использованием эталонного образца. Погрешность измерения (стандартное отклонение) при повторных измерениях составляла менее 5×10^{-8} °С⁻¹.

Испытания на ползучесть проводились на воздухе при температуре 980 °С в рычажных машинах с постоянной нагрузкой. Нагрев образцов также осуществляли радиационно с использованием резистивных электрических печей. В пределах рабочей части образца длиной 25 мм температурное поле было достаточно однородно, разница температур между центром и концами рабочей части не превышала ± 5 °С. Продольную деформацию ползучести измеряли в пределах рабочей длины с помощью бокового MTS-экстензометра с базой измерения деформации, равной 25 мм.

При измерении малых деформаций отношение сигнал/шум невелико, и поэтому для исключения высокочастотных осцилляций и выделения собственно сигнала экспериментальные кривые ползучести были сглажены с использованием уравнения (2.1), предложенного для аппроксимации кривых ползучести на 1-й и 2-й стадиях [27]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] + \dot{\varepsilon}t, \quad (2.1)$$

где ε и t – соответственно деформация и время ползучести, а ε_0 , τ и $\dot{\varepsilon}$ – подгоночные параметры. Для положительной ползучести параметры ε_0 , τ и $\dot{\varepsilon}$ соответственно имеют смысл деформации ползучести, накопленной на 1-й стадии, продолжительности 1-й стадии и скорости стационарной ползучести. Для отрицательной ползучести эти подгоночные параметры не имеют ясного смысла.

3. Результаты. На рис. 2 показаны начальные участки кривых ползучести [001] монокристаллов сплавов SRR99 и CMSX-4, испытанных при температуре 980 °С. Как видно из графиков, максимальные по абсолютной величине значения отрицательной деформации на разных кривых ползучести наблюдаются при разных временах, но вблизи 10 ч ползучести. Поэтому для сравнения величин отрицательной ползучести, наблюдаемых в разных испытаниях,

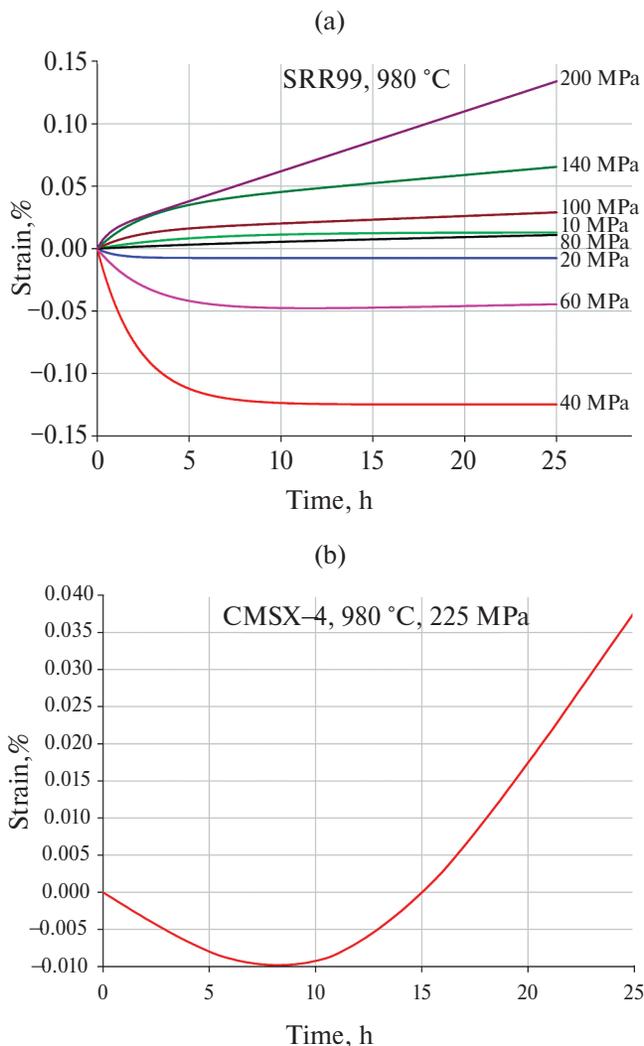


Рис. 2. Начальные участки кривых ползучести [001] монокристаллов сплавов SRR99 (a) и CMSX-4 при 980 °C (b).

использовали величину ε_{10} , равную деформации ползучести, накопленной за время испытания, равного 10 ч.

Из рис. 2,а следует, что вид начальных кривых ползучести сплава SRR99 существенным образом зависит от величины приложенного напряжения σ . При очень малом напряжении $\sigma = 10$ МПа наблюдается небольшая положительная ползучесть, $\varepsilon_{10} \approx +0.011\%$, однако при повышении σ до 20 МПа знак ε_{10} меняется и ее величина составляет $\approx -0.007\%$. При дальнейшем увеличении σ до 40 МПа ε_{10} достигает своего наиболее высокого по абсолютной величине отрицательного значения, приблизительно равного -0.124% .

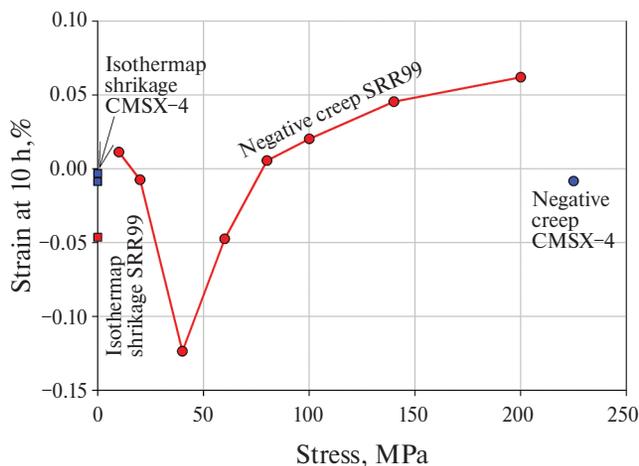


Рис. 3. Зависимость пластической деформации, накопленной за 10 ч ползучести при 980 °С под нагрузкой в испытательной машине – круглые точки, и без нее в dilatометре – квадратные точки.

Повышение σ до 60 МПа уменьшает абсолютную величину ε_{10} при сохранении ее отрицательности, $\varepsilon_{10}(\sigma=60 \text{ МПа}) \approx -0.048 \%$. Дальнейшее повышение σ приводит как изменению знака ε_{10} в положительную сторону, так и увеличению величины ε_{10} : для $\sigma=80, 100, 140$ и 200 МПа значения ε_{10} соответственно составляют $+0.005; +0.020; +0.045$ и $+0.062 \%$. Зависимость $\varepsilon_{10}=f(\sigma)$ показана графически на рис. 3.

Отрицательную ползучесть сплава CMSX-4 наблюдали при температуре 980 °С и напряжении 225 МПа, см. рис. 2,б. Величина отрицательной ползучести $\varepsilon_{10}(\sigma=225 \text{ МПа})$ в этом случае мала и составляет около -0.008% . Это значение также представлено на графике на рис. 3 в виде синей круглой точки.

На рис. 4 представлены кривые отрицательной ползучести сплавов SRR99 и CMSX-4, измеренные на dilatометре с практически нулевой нагрузкой (62,5 кПа) прижатия корундового толкателя, что приблизительно на три порядка величины ниже типичного напряжения, прикладываемого к образцам никелевых жаропрочных сплавов при испытании на ползучесть при температурах 980–1000 °С. Как видно из представленных графиков, при нагреве до температуры 980–997 °С образцы сплавов SRR99 и CMSX-4 начинают сжиматься, причем скорость сжатия монотонно понижается со временем выдержки. На рис. 4,а представлена кривая сжатия образца SRR99, вырезанного в направлении дендритного роста [001], на рис. 4,б двух образцов CMSX-4, одного – вырезанного также в направлении дендритного роста [001], а другого – в поперечном направлении [100]. Величина деформации изотермического сжатия образца SRR99 $\varepsilon_{10}(\sigma \approx 0) \approx -0.046 \%$, что сравнимо величиной отрицательной ползучести $\varepsilon_{10}(\sigma=60 \text{ МПа}) \approx -0.048 \%$. Образцы CMSX-4, вырезанные вдоль [001] показывают приблизительно в 2–3 раза меньшее изотермическое сокращение, чем образцы, вырезанные вдоль [100], $\varepsilon_{10}^{[001]}(\sigma \approx 0) \approx -0.003 \%$ и $\varepsilon_{10}^{[100]}(\sigma \approx 0) \approx -0.009 \%$. Эти данные также приведены на рис. 3 для сравнения с данными по отрицательной ползучести.

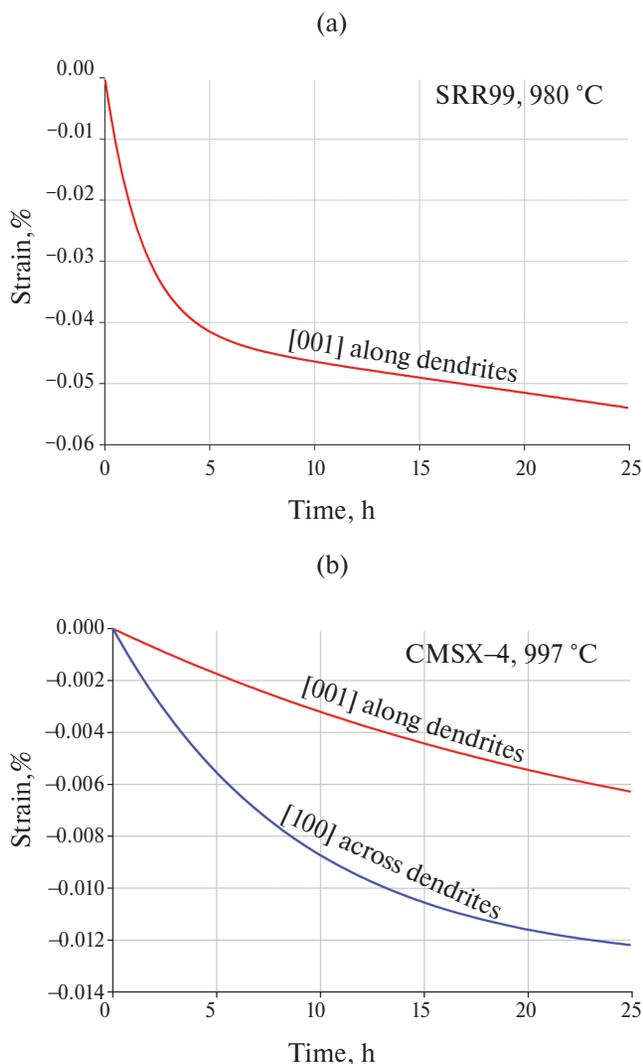


Рис. 4. Кривые сжатия монокристаллов жаропрочных сплавов при постоянной температуре. (а) Сплав SRR99 при 980 °С, ориентация [001] вдоль направления дендритного роста. (б) Сплав CMSX-4 при 997 °С, ориентации [001] и [100] соответственно вдоль и поперек направления дендритного роста.

4. Обсуждение результатов. Как было отмечено в введении, предложено множество гипотез для объяснения явления отрицательной ползучести, но при рассмотрении настоящего случая часть из них можно сразу отклонить в силу специфики исследуемого материала. Во-первых, исследуемый материал является монокристаллом и поэтому влияние на отрицательную ползучесть границ зерен исключено, как это обсуждается в работе [23]. Во-вторых, сплав

CMSX-4 практически не содержит карбидов, а в сплаве SRR99 их очень мало и поэтому гипотезу карбидных реакций [21, 22] также следует отклонить. При этом следует отметить, что для поликристаллических и карбидосодержащих сплавов вышеуказанные гипотезы могут быть справедливы.

С точки зрения авторов, основной причиной наблюдаемого явления отрицательной ползучести является образование ближнего порядка атомов в сильно легированной кристаллической решетке матричной γ -фазы. Подобное мнение было высказано в работе [23] на основании результатов проведенных исследований отрицательной ползучести никелевых сплавов при 550 °С. Согласно диаграмме состояния Ni-Cr [28] при температурах ниже 590 °С образуется фаза Ni_2Cr , упорядочение которой вызывает значительное сжатие кристаллической решетки [19]. Так как настоящие исследования проводили при существенно более высоких температурах, близких к 1000 °С, то образование фазы Ni_2Cr маловероятно. Согласно диаграмме состояния Ni-W [23] при температурах ниже ≈ 1000 °С в никелевых сплавах, легированных вольфрамом, возможно образование упорядоченной фазы Ni_4W [30]. При этом следует ожидать повышения интенсивности образования этой фазы при приближении к 1000 °С, когда диффузионная мобильность вольфрама увеличивается. Следует отметить, что γ -фаза сплавов SRR99 и CMSX-4 содержит соответственно ≈ 4 и ≈ 3 ат. % вольфрама [31, 32], что гипотетически достаточно для образования соответственно ≈ 20 и ≈ 15 об. % фазы Ni_4W (% к объему γ -фазы). В сильно легированной γ -фазе никелевых жаропрочных сплавов возможно также образование локальных зон сложного химического состава, где атомная плотность повышена вследствие упорядоченного расположения атомов в кристаллической решетке.

Принимая гипотезу образования ближнего порядка в γ -фазе как основную, следует также учесть такой фактор, как релаксация остаточных напряжений: на микроскопическом уровне – мисфитных напряжений [33] между γ -матрицей и упрочняющими ее γ' -выделениями, обусловленных разностью (мисфитом) параметров γ - и γ' -решеток [34], и на мезоскопическом уровне – дендритных напряжений между осями дендритов и межосными пространствами, обусловленных их разным термическим расширением [35], см. рис. 5,а. Покажем, что релаксация напряжений в материале, где элементы структуры имеют близкие упругие характеристики, не может вызвать существенное изменение объема.

Рассмотрим объект объемом V , находящейся под постоянной нагрузкой, в котором вследствие пластического течения происходит релаксация остаточных напряжений. Так как внешняя нагрузка постоянна, то из механического равновесия системы следует:

$$\int_V \Delta\sigma_{ij}(\vec{x}) dV = 0, \quad (4.1)$$

где $\Delta\sigma_{ij}(\vec{x})$ – изменение напряжения в точке с координатой \vec{x} вследствие упругой релаксации при пластической деформации. Из (4.1) следует:

$$\int_V \Delta\sigma(\vec{x}) dV = 0, \quad (4.2)$$

где $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – гидростатическое давление. Так как пластическая деформация не вызывает изменение объема, что объемную деформацию $\Delta V/V$ могут вызвать только изменение упругих деформаций:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V} \int_V B(\vec{x}) \Delta \sigma(\vec{x}) dV, \quad (4.3)$$

где $B(\vec{x})$ – объемный модуль упругости в точке с координатой \vec{x} . В случае если величина $B(\vec{x})$ постоянна в объеме объекта, т.е. $B(\vec{x}) = B = \text{const}$, из (4.5) и (4.4) следует:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V} B \int_V \Delta \sigma(\vec{x}) dV = 0. \quad (4.4)$$

Как следует из результатов работы [36], несмотря на сильно различающийся химический состав упругие постоянные γ - и γ' -фаз в сплаве CMSX-4 отличаются всего лишь на несколько процентов, поэтому есть основание полагать, что упругие постоянные дендритных осей и междендритных пространств, в гораздо меньшей степени различающихся по химическому составу, также очень близки. Из этого следует, что релаксация мисфитных и дендритных напряжений не может вызвать существенного изменения объема материала. Однако является очевидным, что направленная релаксация остаточных напряжений может вызвать изменение формы исследуемого объекта, которое может как усилить эффект отрицательной ползучести, так и его ослабить.

На микроскопическом уровне – это направленная релаксация мисфитных напряжений в N-прослойках γ -фазы в процессе рафтинга γ/γ' -микроструктуры, происходящего нормально к направлению приложенной нагрузки. Однако поскольку процесс рафтинга сопровождается пластической деформацией N-прослоек γ -фазы, а для сплавов с отрицательным мисфитом ($a_\gamma > a_{\gamma'}$) – это пластическое утолщение вдоль направления нагрузки, то суммарным эффектом обоих процессов является положительная ползучесть, как рассмотрено в работе [27]. При длительном высокотемпературном отжиге без внешней нагрузки рафтинг тоже происходит, но поскольку он ориентирован эквивалентно в трех направлениях $\langle 001 \rangle$, то не вызывает формоизменения образца.

На мезоскопическом уровне – это направленная релаксация напряжений в дендритной структуре, ориентированной в направлении дендритного роста $[001]$. Согласно МКЭ расчетам и экспериментальным исследованиям, проведенным в работе [35], дендритные оси 1-го и 2-го порядков находятся в состоянии упругого растяжения, тогда как межосные пространства в состоянии сжатия. При этом остаточная деформация дендритных осей 1-го порядка в сплаве CMSX-4 при комнатной температуре, измеренная рентгеновским методом, составляет $\approx 0.05\%$, что сравнимо с величиной деформации отрицательной ползучести. При релаксационном отжиге трехмерный скелет дендритных осей, ориентированных в направлениях $\langle 001 \rangle$, сжимается. Из рис. 46 можно предположить, что сжатие дендритных осей ослабляет отрицательную ползучесть в направлении дендритного роста $[001]$ и усиливает ее в перпендикулярном направлении $[100]$. То есть сжатие многочисленных дендритных

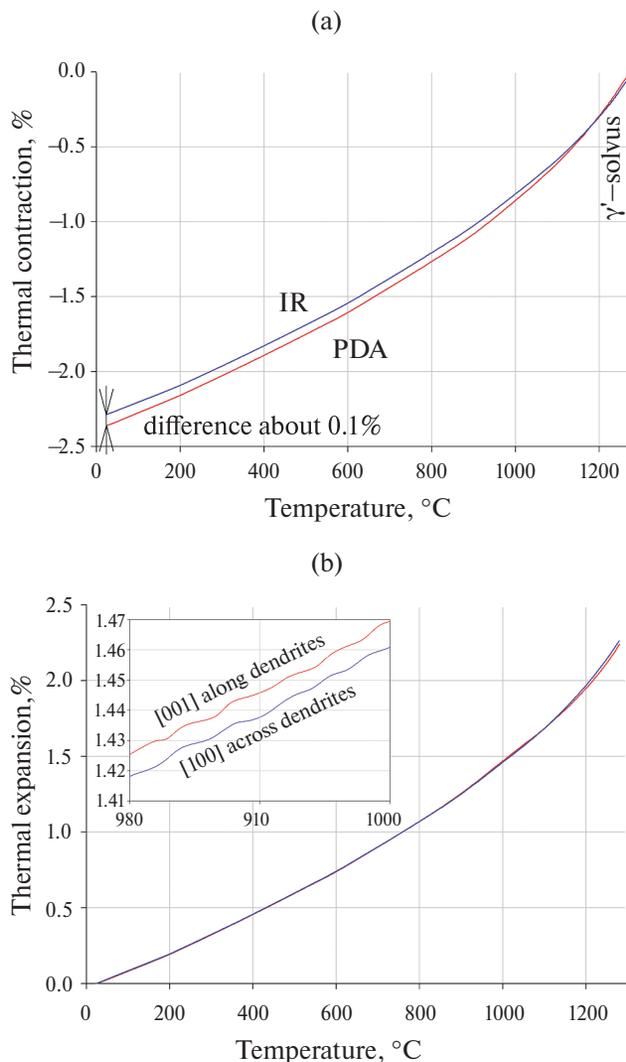


Рис. 5. Кривые термического расширения и сжатия сплава CMSX-4. (а) Различное сжатие осей 1-го порядка (PDA) и межосных пространств (IR) при охлаждении с температуры γ' -солвуса. (б) Различное термическое расширение монокристаллов сплава CMSX-4 вдоль направления дендритной структуры [001] и поперечном направлении [100].

осей 2-го порядка превосходит сжатие менее многочисленных осей 1-го порядка. Следствием этого является тетрагональное искажение формы элементарного куба материала, который расширяется в направлении [001] и сжимается в перпендикулярных направлениях [100] и [010]. Подобным образом можно интерпретировать несколько большее термическое расширение монокристалла сплава CMSX-4 в поперечном направлении [100], чем в продольном направлении [001], см. рис. 5,б. Из вставки на рис. 5,б видно, что при нагреве

до 1000 °С дендритная структура расширяется на $\approx 0.008\%$ больше в направлении [001], чем в [100], что подобно разности в отрицательной ползучести этих ориентаций, наблюдаемой на рис. 4,б.

Следует отметить, что некоторые результаты, полученные в настоящей работе, не совсем понятны. Например, физически не понятен эффект увеличения деформации отрицательной ползучести сплава SRR99 при увеличении напряжения нагрузки с 20 до 40 МПа, см. рис. 3,а. Можно предположить, что причина этого эффекта методическая. Перед нагружением образец удерживается при заданной температуре для стабилизации температурного режима, обычно до 1–2 ч, и продолжительность этого периода может отличаться от испытания к испытанию. При последующем нагружении образца более холодными захватами может происходить небольшое временное понижение его температуры, сопровождающееся термическим сжатием. При температуре 1000 °С коэффициент линейного термического расширения жаропрочных сплавов α составляет около $2 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$ [36]. Поэтому временное понижение температуры образца на 10 °С вызывает его термическое сжатие на -0.02% . Все эти факторы следует учитывать при исследовании отрицательной ползучести, которая может быть как очень мала по величине, так и коротка по продолжительности.

Следует отметить, что несмотря на малую деформацию отрицательной ползучести, типично $\epsilon_c \sim -0.05\%$, эта величина может быть существенна для инженерных расчетов. В предельном случае жесткого стеснения ϵ_c вызывает изменение напряжения, оценочно равное $\Delta\sigma = E\epsilon_c$. Используя известное усреднение Фогта–Ройса–Хилла и изотермические упругие константы монокристаллов никелевого жаропрочного сплава для температуры 1000 °С из [37], получаем усредненный модуль Юнга, равный $E_{VRH} = 153$ ГПа. Умножая это значение на ϵ_c , получаем $\Delta\sigma = 77$ МПа, что сравнимо с напряжением в лопатке газовой турбины, вызванным действием центробежной силы: 190 МПа при 800 °С в середине лопатки и 30 МПа при 980 °С в кромке пера [38].

5. Выводы. Исследована отрицательная ползучесть монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов SRR99 и CMSX-4. Данное явление наблюдали для обоих сплавов при температурах 980–1000 °С и низких либо нулевых напряжениях нагрузки. Предположено, что основной причиной отрицательной ползучести является образование ближнего порядка атомов в сильно легированной кристаллической решетке матричной γ -фазы. Дополнительными факторами, влияющими на величину и анизотропию деформации отрицательной ползучести, могут быть релаксация остаточных напряжений: на микроскопическом уровне – мисфитных напряжений между γ -матрицей и упрочняющими ее γ' -выделениями и на мезоскопическом уровне – дендритных напряжений между осями дендритов и межосными пространствами.

Отрицательная ползучесть оказывает влияние на напряжение в изделии, и поэтому это явление требует детального изучения и физического понимания. В том числе для инженерных расчетов требуется понимание того, является ли это явление объемным изотропным или направленным, то есть вызывающим формоизменение элементарного куба материала. Для практики желательна адекватная модель, предсказывающая как условия, при которых проявляется отрицательная ползучесть, так и количественно описывающая это явление.

Однако разработка такой модели представляется нетривиальной задачей, поскольку монокристалл никелевого жаропрочного сплава представляет из себя сложную многоуровневую структурно-напряженную систему, в которой при высоких температурах происходят разнообразные физическо-механические процессы.

Работа выполнена по темам госзадания ИСМАН РАН (номер государственной регистрации 122032800153-5) и ИПМех РАН (номер государственной регистрации 124013000674-0).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evans K., Nkansah M., Hutchinson I., Rogers S.C.* Molecular network design // *Nature*. 1991. V. 353. P. 124.
<https://doi.org/10.1038/353124a0>
2. *Lim T.-C.* Auxetic materials and structures. Singapore: Springer, 2015.
<http://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
3. *Ren X., Das R., Tran P., et al.* Auxetic metamaterials and structures: A review // *Smart Mater. Struct.* 2018. V. 27. № 2. P. 023001. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
4. *Kelkar P.U., Kim H.S., Cho K.-H. et al.* Cellular auxetic structures for mechanical metamaterials: A review // *Sensors*. 2020. V. 20. № 11. P. 3132.
<https://doi.org/10.3390/s201113132>
5. *Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди материалов с кубической анизотропией // *Известия РАН. МТТ*. 2020. № 4. С. 7–24.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920040054>
6. *Епишин А.И., Лисовенко Д.С.* Влияние кристаллической структуры и типа межатомной связи на упругие свойства одноатомных и двухатомных кубических кристаллов // *Известия РАН. МТТ*. 2022. № 6. С. 79–96.
<http://doi.org/10.31857/S0572329922060058>
7. *Иванова С.Ю., Осипенко К.Ю., Демин А.И., Баничук Н.В., Лисовенко Д.С.* Изучение свойств метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона при пробитии жестким ударником // *Известия РАН. МТТ*. 2023. № 5. С. 120–130.
<https://doi.org/10.31857/S0572329923600366>
8. *Светлов И.Л., Епишин А.И., Кривко А.И. и др.* Анизотропия коэффициента Пуассона монокристаллов никелевого сплава // *ДАН СССР*. 1988. Т. 302. № 6. С. 1372–1375.
9. *Baughman R.H., Stafström S., Cui C., Dantas S.O.* Materials with negative compressibilities in one or more dimensions // *Science*. 1998. V. 279. P. 1522–1524.
<https://doi.org/10.1126/science.279.5356.1522>
10. *Liu Z.-K., Wang Y., Shang S.-L.* Origin of negative thermal expansion phenomenon in solids // *Scripta Mater.* 2011. V. 65. № 8. P. 664–667.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2011.07.001>
11. *Wittenberg L.J., DeWitt R.* Volume contraction during melting; Emphasis on lanthanide and actinide metals // *J. Chem. Phys.* 1972. V. 56. P. 4526–4533.
<https://doi.org/10.1063/1.1677899>
12. *Rittich M.* The volume change during solidification. NASA Technical Memorandum TM-77817, 1982.
<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19850015932/downloads/19850015932.pdf>
13. *Lakes R.S.* Extreme damping in composite materials with a negative stiffness phase // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. № 13. P. 2897–2900.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2897>

14. *Fountain R.W., Korchynsky M.* The phenomenon of “negative creep” in alloys // *Trans. ASM* 51. 1959. P. 108–122.
<https://doi.org/10.1021/ie50595a915>
15. *Timmins R., Greenwood G.W., Dyson D.F.* Negative creep in a nickel-base superalloy // *Scr. Metall.* 1986. V.20. P. 67–70.
[https://doi.org/10.1016/0036-9748\(86\)90214-0](https://doi.org/10.1016/0036-9748(86)90214-0)
16. *Louchet F.* A model of negative creep in nickel-based superalloys // *Scripta Metall. Mater.* 1995. V. 33. № 6. P. 913–918.
[https://doi.org/10.1016/0956-716X\(95\)00299-B](https://doi.org/10.1016/0956-716X(95)00299-B)
17. *Branch G., Draper J.H.M., Hodger J.B.M.N.W.* In: International conference on creep and fatigue in Elevated Temperature Applications, Philadelphia. 1973. P. 192.1–192.9.
18. *Mayer K.H., Koenig H.* In: VGB-Konferenz “Forschung in der Kraftwerkstechnik”. Essen, 1988. P. 1–24.
19. *Marucco A., Nath B.* Effects of ordering on the properties of Ni-Cr alloys // *J. Mater. Sci.* 1988. V. 23. P. 2107–2114.
<https://doi.org/10.1007/BF01115776>
20. *Reppich B.* Negatives Kriechen // *Z. Metallkd.* 1984. V. 75. P. 193–202.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-1984-750302>
21. *Reppich B.* Negatives Kriechen und Mikrogefüge langzeitexponierter Gasturbinenwerkstoffe // *Z. Metallkd.* 1994. V. 85. P. 28–38.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-1994-850105>
22. *Kinzel S., Gabel J., Völkl R., Glatzel U.* Reasons for volume contraction after long-term annealing of waspaloy // *Adv. Eng. Mater.* 2015. V. 17. P. 1106–1112.
<https://doi.org/10.1002/adem.201500159>
23. *Firlus K., Völkl R., Gabel J., Glatzel U.* The influence of Cr, Al, Co, Fe and C on negative creep of Waspaloy // *Inter. J. Mater. Research.* 2021. V. 112. № 2. P. 90–97.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-2020-7980>
24. *Ford D.A., Arthey R.P.* Development of single crystal alloys for specific engine applications. *Superalloys 1984*, Warrendale, Pa.: Metallurgical Society of AIME. 1984. P. 115–124.
https://www.tms.org/superalloys/10.7449/1984/Superalloys_1984_115_124.pdf
25. *Harris K., Erickson G.L., Sikkenga S.L., Brentall W.D., Aurrecochea J.M., Kubarych K.G.* Development of the rhenium-containing superalloys CMSX-4 & CM 186 LC for single-crystal blade and directionally solidified vane applications in advanced turbine engines // *JMEP*. 1993. V. 2. № 1. P. 481–487.
<https://doi.org/10.1007/BF02661730>
26. *Lander J.J., Kern H.E., Beach A.L.* Solubility and diffusion coefficient of carbon in nickel: Reaction rates of nickel-carbon alloys with barium oxide // *J. Appl. Phys.* 1952. V. 23. P. 1305–1309.
<https://doi.org/10.1063/1.1702064>
27. *Link T., Epishin A., Brückner U., Portella P.* Increase of misfit during creep of superalloys and its correlation with deformation // *Acta Mater.* 2000. V. 48. № 8. P. 1981–1994.
[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(99\)00456-5](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(99)00456-5)
28. *Nash P.* The Cr–Ni (Chromium–Nickel) system // *Bulletin of Alloy Phase Diagrams*. 1986. V. 7. P. 466–476.
<https://doi.org/10.1007/BF02867812>
29. *Okamoto H.* Ni–W (Nickel–Tungsten) // *JPE*. 1991. V. 12. № 6. P. 706.
<https://doi.org/10.1007/BF02645185>

30. *Cury R., Joubert J.-M., Tusseau-Nenez S., Leroy E., Allavena-Valette A.* On the existence and the crystal structure of Ni_4W , NiW and NiW_2 compounds // *Intermetallics*. 2009. V. 17. № 3. P. 174–178.
<https://doi.org/10.1016/j.intermet.2008.11.001>
31. *Schmidt R., Feller-Kniepmeier M.* Effect of heat treatments on phase chemistry of the nickel-base superalloy SRR 99 // *Metall. Trans. A*. 1992. V. 23. P. 745–757.
<https://doi.org/10.1007/BF02675552>
32. *Hemmersmeier U., Feller-Kniepmeier M.* Element distribution in the macro- and microstructure of nickel base superalloy CMSX-4 // *Mater. Sci. Eng. A*. 1998. V. 248. № 1–2. P. 87–97.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(98\)00516-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(98)00516-4)
33. *Link T., Epishin A., Fedelich B.* Inhomogeneity of misfit stresses in nickel-base superalloys: Effect on propagation of matrix dislocation loops // *Phil. Mag.* 2009. V. 89. № 13. P. 1141–1159.
<https://doi.org/10.1080/14786430902877810>
34. *Brückner U., Epishin A., Link T.* Local X-ray diffraction analysis of the structure of dendrites in single-crystal nickel-base superalloys // *Acta Mater.* 1997. V. 45. № 12. P. 5223–5231.
[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(97\)00163-8](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(97)00163-8)
35. *Epishin A., Link T., Brückner U., Fedelich B.* Residual stresses in the dendritic structure of single crystal nickel-based superalloys // *Phys. Met. Metallogr.* 2005. V. 100. № 2. P. 192–199.
36. *Epishin A., Fedelich B., Finn M. et al.* Investigation of elastic properties of the single-crystal nickel-base superalloy CMSX-4 in the temperature interval between room temperature and 1300°C // *Crystals*. 2021. V. 11. № 2. P. 152.
<https://doi.org/10.3390/cryst11020152>
37. *Epishin A.I., Lisovenko D.S.* Comparison of isothermal and adiabatic elasticity characteristics of the single crystal nickel-based superalloy CMSX-4 in the temperature range between room temperature and 1300°C // *Mech. Solids*. 2023. V. 58. № 5. P. 1587–1598.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423601301>
38. *Epishin A., Link T., Nazmy M., Staubli M., Klingelhöffer H., Nolze G.* Microstructural degradation of CMSX-4: kinetics and effect on mechanical properties, Proceedings of 11th International Symposium “Superalloys 2008”, ed. by R. C. Reed et al., TMS, Warrendale, Pennsylvania, USA, 2008. P. 725–731.
https://doi.org/10.7449/2008/Superalloys_2008_725_731

NEGATIVE CREEP OF SINGLE-CRYSTALS NICKEL-BASED SUPERALLOYS

A. I. Epishin^{a, *}, D. S. Lisovenko^{b, **}

^a*Merzhanov Institute of Structural Macrokinetics and Materials Science of the Russian Academy of Sciences, Chernogolovka, Russia*

^b*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*e-mail: a.epishin2021@gmail.com, **e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Abstract – The negative creep of single crystals of nickel-based superalloys SR99 and CMSX-4 has been investigated. This phenomenon was observed for both superalloys at temperatures of 980–1000 °C and low or zero loading stresses. It is assumed that the main reason for the negative creep is the formation of a short-range order of atoms in a strongly alloyed crystal lattice of the γ -matrix. Additional factors affecting the magnitude and anisotropy of the negative creep strain may be the relaxation of residual stresses: at the microscopic level, misfit stresses between the γ -matrix and strengthening γ' -precipitates, and at the mesoscopic level, dendritic stresses between the dendrite axes and interdendritic regions.

Keywords: nickel-based superalloys, negative creep, crystal structure ordering, residual stresses

REFERENCES

1. *Evans K., Nkansah M., Hutchinson I., Rogers S.C.* Molecular network design // *Nature*. 1991. V. 353. P. 124.
<https://doi.org/10.1038/353124a0>
2. *Lim T.-C.* Auxetic materials and structures. Singapore: Springer, 2015.
<http://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3>
3. *Ren X., Das R., Tran P., et al.* Auxetic metamaterials and structures: A review // *Smart Mater. Struct.* 2018. V. 27. № 2. P. 023001. <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>
4. *Kelkar P.U., Kim H.S., Cho K.-H., et al.* Cellular auxetic structures for mechanical metamaterials: A review // *Sensors*. 2020. V. 20. № 11. P. 3132.
<https://doi.org/10.3390/s20113132>
5. *Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S.* Auxetics among materials with cubic anisotropy // *Mech. Solids*. 2020. V.55. № 4. P. 461–474.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420040044>
6. *Epishin A.I., Lisovenko D.S.* Influence of the crystal structure and type of interatomic bond on the elastic properties of monatomic and diatomic cubic crystals // *Mech. Solids*. 2022. V.57. № 6. P. 1344–1358.
<https://doi.org/10.3103/S0025654422060206>
7. *Ivanova S.Yu., Osipenko K.Yu., Demin A.I., Banichuk N.V., Lisovenko D.S.* Studying the properties of metamaterials with a negative Poisson's ratio when punched by a rigid impactor // *Mech. Solids*. 2023. V.58. № 5. P. 1536–1544.
<https://doi.org/10.3103/S0025654423600897>
8. *Svetlov I.L., Epishin A.I., Krivko A.I., Samojlov A.I., Odintsev I.N., Andreev A.P.* Anisotropy of Poisson ratio of nickel base alloy single crystals // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1988. V. 302. № 6. P. 1372–1375.
9. *Baughman R.H., Stafström S., Cui C., Dantas S.O.* Materials with negative compressibilities in one or more dimensions // *Science*. 1998. V. 279. P. 1522–1524.
<https://doi.org/10.1126/science.279.5356.1522>
10. *Liu Z.-K., Wang Y., Shang S.-L.* Origin of negative thermal expansion phenomenon in solids // *Scripta Mater.* 2011. V. 65. № 8. P. 664–667.
<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2011.07.001>

11. *Wittenberg L.J., DeWitt R.* Volume contraction during melting; Emphasis on lanthanide and actinide metals // *J. Chem. Phys.* 1972. V. 56. P. 4526–4533.
<https://doi.org/10.1063/1.1677899>
12. *Rittich M.* The volume change during solidification. NASA Technical Memorandum TM-77817, 1982.
<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19850015932/downloads/19850015932.pdf>
13. *Lakes R.S.* Extreme damping in composite materials with a negative stiffness phase // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 86. № 13. P. 2897–2900.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2897>
14. *Fountain R.W., Korchynsky M.* The phenomenon of “negative creep” in alloys // *Trans. ASM* 51. 1959. P. 108–122.
<https://doi.org/10.1021/ie50595a915>
15. *Timmins R., Greenwood G.W., Dyson D.F.* Negative creep in a nickel-base superalloy // *Scr. Metall.* 1986. V.20. P. 67–70.
[https://doi.org/10.1016/0036-9748\(86\)90214-0](https://doi.org/10.1016/0036-9748(86)90214-0)
16. *Louchet F.* A model of negative creep in nickel-based superalloys // *Scripta Metall. Mater.* 1995. V. 33. № 6. P. 913–918.
[https://doi.org/10.1016/0956-716X\(95\)00299-B](https://doi.org/10.1016/0956-716X(95)00299-B)
17. *Branch G., Draper J.H.M., Hodger J.B.M.N.W.* In: International conference on creep and fatigue in Elevated Temperature Applications, Philadelphia. 1973. P. 192.1–192.9.
18. *Mayer K.H., Koenig H.* In: VGB-Konferenz “Forschung in der Kraftwerkstechnik”. Essen, 1988. P. 1–24.
19. *Marucco A., Nath B.* Effects of ordering on the properties of Ni-Cr alloys // *J. Mater. Sci.* 1988. V. 23. P. 2107–2114.
<https://doi.org/10.1007/BF01115776>
20. *Reppich B.* Negatives Kriechen // *Z. Metallkd.* 1984. V. 75. P. 193–202.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-1984-750302>
21. *Reppich B.* Negatives Kriechen und Mikrogefuge langzeitexponierter Gasturbinenwerkstoffe // *Z. Metallkd.* 1994. V. 85. P. 28–38.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-1994-850105>
22. *Kinzel S., Gabel J., Völkl R., Glatzel U.* Reasons for volume contraction after long-term annealing of waspaloy // *Adv. Eng. Mater.* 2015. V. 17. P. 1106–1112.
<https://doi.org/10.1002/adem.201500159>
23. *Firlus K., Völkl R., Gabel J., Glatzel U.* The influence of Cr, Al, Co, Fe and C on negative creep of Waspaloy // *Inter. J. Mater. Research.* 2021. V. 112. № 2. P. 90–97.
<https://doi.org/10.1515/ijmr-2020-7980>
24. *Ford D.A., Arthey R.P.* Development of single crystal alloys for specific engine applications. Superalloys 1984, Warrendale, Pa.: Metallurgical Society of AIME. 1984. P. 115–124.
https://www.tms.org/superalloys/10.7449/1984/Superalloys_1984_115_124.pdf
25. *Harris K., Erickson G.L., Sikkenga S.L., Brentall W.D., Aurrecochea J.M., Kubarych K.G.* Development of the rhenium-containing superalloys CMSX-4 & CM 186 LC for single-crystal blade and directionally solidified vane applications in advanced turbine engines // *JMEP.* 1993. V. 2. № 1. P. 481–487.
<https://doi.org/10.1007/BF02661730>
26. *Lander J.J., Kern H.E., Beach A.L.* Solubility and diffusion coefficient of carbon in nickel: Reaction rates of nickel-carbon alloys with barium oxide // *J. Appl. Phys.* 1952. V. 23. P. 1305–1309.
<https://doi.org/10.1063/1.1702064>

27. *Link T., Epishin A., Brückner U., Portella P.* Increase of misfit during creep of superalloys and its correlation with deformation // *Acta Mater.* 2000. V. 48. № 8. P. 1981–1994. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(99\)00456-5](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(99)00456-5).
28. *Nash P.* The Cr–Ni (Chromium–Nickel) system // *Bulletin of Alloy Phase Diagrams.* 1986. V. 7. P. 466–476. <https://doi.org/10.1007/BF02867812>
29. *Okamoto H.* Ni–W (Nickel–Tungsten) // *JPE.* 1991. V. 12. № 6. P. 706. <https://doi.org/10.1007/BF02645185>
30. *Cury R., Joubert J.-M., Tusseau-Nenez S., Leroy E., Allavena-Valette A.* On the existence and the crystal structure of Ni₄W, NiW and NiW₂ compounds // *Intermetallics.* 2009. V. 17. № 3. P. 174–178. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2008.11.001>
31. *Schmidt R., Feller-Kniepmeier M.* Effect of heat treatments on phase chemistry of the nickel-base superalloy SRR 99 // *Metall. Trans. A.* 1992. V. 23. P. 745–757. <https://doi.org/10.1007/BF02675552>
32. *Hemmersmeier U., Feller-Kniepmeier M.* Element distribution in the macro- and microstructure of nickel base superalloy CMSX-4 // *Mater. Sci. Eng. A.* 1998. V. 248. № 1–2. P. 87–97. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(98\)00516-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(98)00516-4)
33. *Link T., Epishin A., Fedelich B.* Inhomogeneity of misfit stresses in nickel-base superalloys: Effect on propagation of matrix dislocation loops // *Phil. Mag.* 2009. V. 89. № 13. P. 1141–1159. <https://doi.org/10.1080/14786430902877810>
34. *Brückner U., Epishin A., Link T.* Local X-ray diffraction analysis of the structure of dendrites in single-crystal nickel-base superalloys // *Acta Mater.* 1997. V. 45. № 12. P. 5223–5231. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(97\)00163-8](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(97)00163-8)
35. *Epishin A., Link T., Brückner U., Fedelich B.* Residual stresses in the dendritic structure of single crystal nickel-based superalloys // *Phys. Met. Metallogr.* 2005. V. 100. № 2. P. 192–199.
36. *Epishin A., Fedelich B., Finn M. et al.* Investigation of elastic properties of the single-crystal nickel-base superalloy CMSX-4 in the temperature interval between room temperature and 1300°C // *Crystals.* 2021. V. 11. № 2. P. 152. <https://doi.org/10.3390/cryst11020152>
37. *Epishin A.I., Lisovenko D.S.* Comparison of isothermal and adiabatic elasticity characteristics of the single crystal nickel-based superalloy CMSX-4 in the temperature range between room temperature and 1300°C // *Mech. Solids.* 2023. V. 58. № 5. P. 1587–1598. <https://doi.org/10.3103/S0025654423601301>.
38. *Epishin A., Link T., Nazmy M., Staubli M., Klingelhöffer H., Nolze G.* Microstructural degradation of CMSX-4: kinetics and effect on mechanical properties, *Proceedings of 11th International Symposium “Superalloys 2008”*, ed. by R. C. Reed et al., TMS, Warrendale, Pennsylvania, USA, 2008. P. 725–731. https://doi.org/10.7449/2008/Superalloys_2008_725_731