

УДК 539.3

О НЕПОЛУПРОСТОМ ВЫРОЖДЕНИИ ВОЛН ЛЭМБА

© 2024 г. А. И. Каракозова^а, С. В. Кузнецов^{б, *}

^аМосковский государственный строительный университет, Москва, Россия

^бИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.02.2024.

После доработки 28.03.2024.

Принята к публикации 22.04.2024.

В рамках шестимерного формализма Коши впервые обнаружены аномальные поверхностные волны, возникающие при неполупростом вырождении фундаментальной матрицы. Условие неполупростого вырождения получено в явной форме для волн Лэмба, распространяющихся в слое с произвольной упругой анизотропией и свободными границами. Получен новый тип дисперсионного уравнения и соответствующее дисперсионное решение. Обсуждается связь с поверхностными волнами нерэлеевского типа.

Ключевые слова: формализм Коши, направленная волна, анизотропия, дисперсия, вырождение

DOI: 10.31857/S1026351924040139, EDN: UCHXEM

1. Введение. Установлено, что в некоторых случаях анизотропии экспоненциально затухающая с глубиной рэлеевская волна превращается в более сложную волну, в которой вариация по глубине определяется некоторым полиномом, умноженным на экспоненту [1–6]. Такая волна известна, как волна нерэлеевского типа [7, 8]. Для анализа волн Рэлея в анизотропных средах разработано несколько методов.

1.1. Полупростая фундаментальная матрица. Ниже рассматривается более простой случай волн Рэлея, распространяющихся в анизотропном полупространстве с полупростой фундаментальной матрицей.

1.1.1. Трехмерный формализм. Исторически первым появился трехмерный формализм, используемый для решения обыкновенного матричного дифференциального уравнения второго порядка, полученного путем подстановки представления для гармонической плоской волны [9]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(i\mathbf{r}\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct)) \quad (1.1)$$

в уравнение движения для анизотропной упругой среды

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \rho \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

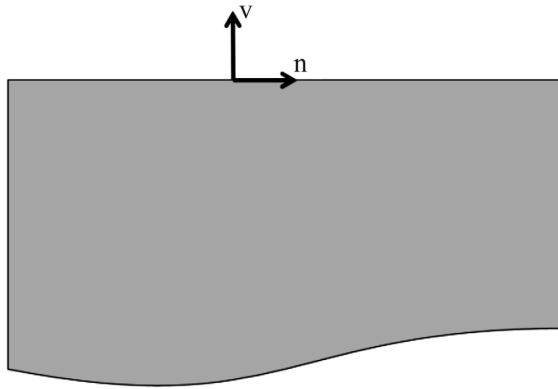


Рис. 1. Полупространство; $\mathbf{n}$ – волновой вектор; $\mathbf{v}$ – единичная нормаль к свободной границе.

где $\mathbf{u}$ – поле смещения; $\mathbf{m}$ – амплитуда вектора; $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ – единичные векторы, см. рис. 1; r – волновое число; c – фазовая скорость; t – время; $\mathbf{C}$ – тензор упругости четвертого порядка, предполагаемый строго эллиптическим; ρ – плотность материала; двойные точки в уравнении (1.2) означают свертку по двум индексам; $i = \sqrt{-1}$.

Подставляя представление (1.1) в уравнение (1.2), получаем искомое обыкновенное уравнение второго порядка; см. [7, 10–15]:

$$\left(\mathbf{A}_1 \partial_{xx}^2 + \mathbf{A}_2 \partial_x + \mathbf{A}_3 \right) \cdot \mathbf{m}(x) = 0, \quad (1.3)$$

где

$$x = ir\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \quad (1.4)$$

и

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} - \rho c^2 \mathbf{I}, \quad (1.5)$$

здесь $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго порядка (3×3 -матрица). Общее решение уравнения имеет вид [16]:

$$\mathbf{m}(x) = \sum_{k=1}^3 C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x}, \quad (1.6)$$

где C_k – произвольные комплексные коэффициенты, определяемые с точностью до множителя из граничных условий; $\mathbf{m}_k$ – собственные векторы комплексной матрицы

$$\left(\gamma_k^2 \mathbf{A}_1 + \gamma_k \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \right) \cdot \mathbf{m}_k = 0. \quad (1.7)$$

В множители γ_k являются корнями соответствующего уравнения Кристоффеля:

$$\det(\gamma_k^2 \mathbf{A}_1 + \gamma_k \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) = 0. \quad (1.8)$$

Заметим, что только корни с положительной мнимой частью обеспечивают затухание с глубиной волн Рэлея [14]. Также было обнаружено [7, 8], что для некоторых типов упругой анизотропии два собственных вектора уравнения могут совпадать, что приводит к необходимости введения обобщенного собственного вектора [17]; этот случай, известный как неполупростое вырождение, более подробно рассматривается в разделе 2.

1.1.2. Шестимерные формализмы. Известны два шестимерных формализма: формализм Стро [15, 16], см. также [1–6, 18–25], и формализм Коши [26, 27]. Оба эти формализма эквивалентны в терминах дисперсионных уравнений [28]. При рассмотрении формализма Коши вводится новый 6-вектор

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{w}(x) \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$\mathbf{w}(x) = \partial_x \mathbf{m}(x). \quad (1.10)$$

С учетом (1.10), уравнение (1.3) в терминах вектора $\mathbf{Y}$ приобретает вид:

$$\partial_x \mathbf{Y}(x) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{Y}(x), \quad (1.11)$$

где $\mathbf{G}$ – фундаментальная матрица [28]

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

см. в [1–6, 24, 25] для его аналога в формализме Стро. Осуществляя приведение фундаментальной матрицы $\mathbf{G}$ к Жордановой нормальной форме, дает [17]

$$\mathbf{G} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{W}^{-1}, \quad (1.13)$$

где $\mathbf{W}$ – матрица 6×6 , содержащая либо собственные векторы, если $\mathbf{G}$ полупростая, либо собственные и обобщенные собственные векторы, если $\mathbf{G}$ неполупростая; в обоих случаях $\mathbf{W}$ не ортогональна ввиду несимметричности $\mathbf{G}$, кроме того, $\mathbf{W}$ невырожденная матрица [17]; матрица $\mathbf{D}$ либо диагональная, если $\mathbf{G}$ полупростая, либо $\mathbf{D}$ содержит как диагональные элементы, так и жорданов(ы) блок(и).

Случай полупростой матрицы $\mathbf{G}$ и, соответственно, диагональной матрицы $\mathbf{D}$ приводит к общему решению уравнения, которое можно представить в виде [16]:

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag}(e^{\gamma_1 x}; \dots; e^{\gamma_6 x}) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0, \quad (1.14)$$

где γ_k , $k = 1, \dots, 6$ – собственные значения фундаментальной матрицы $\mathbf{G}$; $\mathbf{Y}_0$ – произвольный 6-вектор, определяемый граничными условиями. Уравнение вместе с граничным условием на свободной границе при $x = 0$ дает:

$$\mathbf{t}_v(x)|_{x=0} \equiv (\mathbf{A}_4; \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{Y}(x)|_{x=0} = 0. \quad (1.15)$$

Наряду с условием (0.15), необходимо условие затухания Зоммерфельда при $x \rightarrow \infty$ [29, 30]:

$$\mathbf{Y}(x)|_{x \rightarrow -\infty} = 0, \quad (1.16)$$

обеспечивающее экспоненциальное затухание с глубиной для волн Рэлея [31, 32]. Отметим, что условие (1.16) подразумевает, что в решении могут сохраняться только собственные значения с положительной мнимой частью.

1.2. Неполупростая фундаментальная матрица. Как уже отмечалось ранее, случай неполупростого вырождения фундаментальной матрицы приводит к появлению волн нерэлеевского типа [1–8, 33, 34, 35] с более сложным поведением смещений, имеющих следующую поляризацию [7, 8]:

$$\mathbf{m}(x) = C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} + (C_2 \mathbf{m}_2 + C_3 \mathbf{g}_2 x) e^{\gamma_2 x}, \quad (1.17)$$

где γ_1 – некрatное собственное значение с $\text{Im}(\gamma_1) > 0$, которое соответствует истинному собственному вектору $\mathbf{m}_1$; γ_2 – кратное собственное значение с $\text{Im}(\gamma_2) > 0$, которое соответствует истинному собственному вектору $\mathbf{m}_2$ и обобщенному собственному вектору $\mathbf{g}_2$. Заметим, что векторы $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ и $\mathbf{g}_2$ являются линейно независимыми [2, 36]. Наконец, случай двух жордановых блоков третьего порядка приводит к следующему вектору поляризации:

$$\mathbf{m}(x) = (C_1 \mathbf{m}_1 + C_2 \mathbf{g}_1 x + C_3 \mathbf{g}_2 x^2) e^{\gamma_1 x}, \quad (1.18)$$

где γ_1 – кратное собственное значение с $\text{Im}(\gamma_1) > 0$, которое соответствует истинному собственному вектору $\mathbf{m}_1$ и двум обобщенным собственным векторам $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$. Аналогично предыдущему случаю, векторы $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ являются линейно независимыми [36]. Как показано в разделе 2, в случае волн Лэмба допустимы только жордановы блоки второго ранга.

Замечание 1.2. Физическую ситуацию, приводящую к неполупростому вырождению матрицы (появлению жорданова блока), можно продемонстрировать, рассмотрев собственные векторы следующей однопараметрической 2×2 -матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ рассматриваемая матрица становится не полупростой, но при $\alpha \neq 0$ она полупростая и имеет два собственных вектора:

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+\alpha} \\ \alpha \\ \sqrt{1+\alpha} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{1+\alpha} \\ \alpha \\ \sqrt{1+\alpha} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Скалярное произведение этих собственных векторов имеет вид:

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 = \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha}. \quad (1.21)$$

И при $\alpha \rightarrow 0$ скалярное произведение $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 \rightarrow -1$, что означает, что эти собственные векторы коллинеарны и направлены в противоположные стороны. Таким образом, вблизи неполупростого вырождения собственные векторы (в нашем случае парциальные волны), будучи изначально линейно независимыми, начинают вырождаться.

1.3. Постановка задачи. В данной работе с помощью шестимерного формализма Коши в сочетании с методом экспоненциальных матриц анализируется дисперсия волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое со свободными границами и при неполупростом вырождении фундаментальной матрицы. Анализ полей перемещений показывает, что они в значительной степени зависят от нормальной жордановой формы фундаментальной матрицы, которая может быть как полупростой, так и неполупростой, см. (1.6) и (1.17). В следующем разделе анализируется подробная спектральная структура фундаментальной матрицы и соответствующее экспоненциальное представление для волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое со свободными границами.

2. Формализм Коши для волн Лэмба. Ниже анализируются волны Лэмба, распространяющиеся в однородном слое со свободными границами, рис. 2.

2.1. Спектральный анализ фундаментальной матрицы.

2.1.1. Разложение по жордановой нормальной форме. Полупростая фундаментальная матрица $\mathbf{G}$, допускающая нормальную жорданову форму

$$\mathbf{G} = \mathbf{W} \cdot \text{diag}(\gamma_1; \dots; \gamma_6) \cdot \mathbf{W}^{-1} \quad (2.1)$$

и экспоненциальное общее решение, задаваемое уравнением (1.14), имеет собственные значения γ_k , $k = 1, \dots, 6$, которые в случае волн Лэмба могут быть как вещественными, так и комплексными числами, без необходимости накладывать какие-либо ограничения на мнимую часть, поскольку условие затухания Зоммерфельда (1.16) для волн Лэмба не требуется [28]. Заметим также, что поскольку $\mathbf{G}$ — вещественная матрица, все комплексные собственные значения должны появляться в комплексно-сопряженных парах [17].

2.1.2. Характеристические полиномы. Характеристический многочлен матрицы $\mathbf{G}$ имеет вид:

$$P(\gamma) \equiv \det(\mathbf{G} - \gamma \mathbf{1}) = 0, \quad (2.2)$$

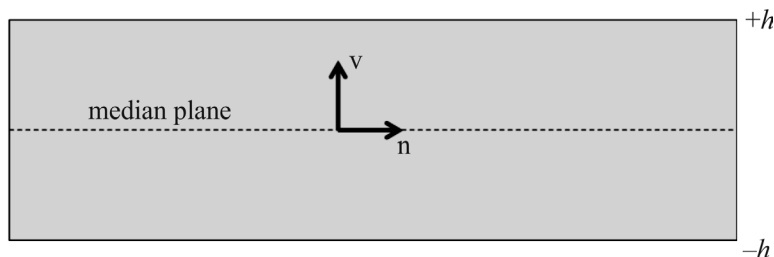


Рис. 2. Однородный анизотропный слой со свободными границами толщиной $2h$.

где $\mathbf{I}$ обозначает единичную матрицу 6×6 . Учитывая, что матрица $\mathbf{G}$ имеет блочную структуру, заданную уравнением (1.12), характеристический полином становится [37]

$$P(\gamma) = \det(\gamma^2 \mathbf{I} + \gamma \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3) = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение показывает, что $\gamma=0$ является собственным значением, когда

$$\rho c^2 \in \text{Sp}(\mathbf{A}_3). \quad (2.4)$$

Действительно, из условия (2.4), $\det(\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3) = 0$, поэтому $\gamma=0$ становится корнем уравнения (2.3).

2.1.3. Спектральный анализ. Замечание о блочной структуре матрицы $\mathbf{G}$ и блочной структуре вектора $\mathbf{Y}$ позволяет записать для собственного вектора

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

соответствующее уравнение:

$$\gamma \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{M} = -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_3; \quad \mathbf{N} = -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2. \quad (2.7)$$

Из уравнения следует

$$\gamma \mathbf{m} = \mathbf{w} \quad (2.8)$$

и

$$\gamma \mathbf{w} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{w}, \quad (2.9)$$

откуда

$$\gamma^2 \mathbf{m} = (\mathbf{M} + \gamma \mathbf{N}) \cdot \mathbf{m}. \quad (2.10)$$

Умножение обеих сторон уравнения на $\mathbf{A}_1$, а затем свертка с вектором $\bar{\mathbf{m}}$ дают скалярный многочлен

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0, \quad (2.11)$$

где

$$a = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{m}; \quad b = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{m}; \quad c = \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{m}. \quad (2.12)$$

Уравнения гарантируют, что коэффициенты a , b и c являются вещественными, а из-за предполагаемой сильной эллиптичности тензора упругости, $a > 0$. Теперь из уравнения следует, что собственные значения удовлетворяют следующему соотношению:

$$\gamma = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \quad (2.13)$$

Необходимо отметить, что (2.13) не является уравнением для нахождения собственных значений, так как уравнение (2.13) содержит лишь часть соответствующего собственного вектора. Однако уравнение (2.13) показывает, что для конкретного собственного вектора (2.5) выражение в правой части (2.13) может соответствовать либо некрайнему корню, если дискриминант не равен нулю, либо крайнему корню, если дискриминант обращается в нуль. Последний случай соответствует неполупростому вырождению фундаментальной матрицы $\mathbf{G}$. Таким образом, единственным неполупростым вырождением фундаментальной матрицы $\mathbf{G}$ может быть вырождение второго ранга, а в фундаментальной матрице может быть не более трех блоков Жордана.

2.2. Экспоненциальные решения.

2.2.1. *Полупростая фундаментальная матрица.* Экспоненциальное решение для волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое, в случае полупростой фундаментальной матрицы $\mathbf{G}$ совпадает с соответствующим экспоненциальным решением для волн Рэлея, которое дается уравнением (0.22).

2.2.2. *Неполупростые фундаментальные матрицы.* Если фундаментальная матрица $\mathbf{G}$ содержит жордановы блоки, то соответствующие экспоненциальные решения имеют вид:

А. Одиночный блок Жордана

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag} \left(e^{\gamma_1 x}, \dots, e^{\gamma_4 x}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_5 x} & 0 \\ x e^{\gamma_5 x} & e^{\gamma_5 x} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0. \quad (2.14)$$

Последний (столбец) вектор в $\mathbf{W}$ — это обобщенный собственный вектор, который ортогонален первым пяти собственным векторам [36].

Б. Два жорданова блока

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag} \left(e^{\gamma_1 x}, e^{\gamma_2 x}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_3 x} & 0 \\ x e^{\gamma_3 x} & e^{\gamma_3 x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_5 x} & 0 \\ x e^{\gamma_5 x} & e^{\gamma_5 x} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0. \quad (2.15)$$

При этом два (столбца) вектора в $\mathbf{W}$, а именно четвертый и шестой, являются обобщенными собственными векторами, которые ортогональны друг другу и другим собственным векторам.

В. Три жорданова блока

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{W} \cdot \text{diag} \left(\begin{pmatrix} e^{\gamma_1 x} & 0 \\ x e^{\gamma_1 x} & e^{\gamma_1 x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_3 x} & 0 \\ x e^{\gamma_3 x} & e^{\gamma_3 x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\gamma_5 x} & 0 \\ x e^{\gamma_5 x} & e^{\gamma_5 x} \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_0. \quad (2.16)$$

При этом три (столбца) вектора в $\mathbf{W}$, а именно второй, четвертый и шестой, являются обобщенными собственными векторами, которые ортогональны друг другу и другим собственным векторам.

2.2.3. *Поля смещения для неполупростых фундаментальных матриц.* Если фундаментальная матрица $\mathbf{G}$ содержит жордановы блоки, то соответствующие экспоненциальные решения имеют вид:

А. Одиночный жорданов блок

$$\mathbf{m}(x) = C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} + \dots + C_4 \mathbf{m}_4 e^{\gamma_4 x} + C_5 \mathbf{m}_5 e^{\gamma_5 x} (1 + x) + C_6 \mathbf{m}_6 e^{\gamma_5 x}, \quad (2.17)$$

где $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_5$ – “верхние” части собственных векторов, а $\mathbf{m}_6$ – “верхняя” часть обобщенного собственного вектора, см. [16, 36].

Б. Два жорданова блока

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(x) = & C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 \mathbf{m}_2 e^{\gamma_2 x} + C_3 \mathbf{m}_3 e^{\gamma_3 x} (1+x) + C_4 \mathbf{m}_4 e^{\gamma_3 x} + \\ & + C_5 \mathbf{m}_5 e^{\gamma_5 x} (1+x) + C_6 \mathbf{m}_6 e^{\gamma_5 x}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5$ – “верхние” части собственных векторов, а $\mathbf{m}_4, \mathbf{m}_6$ – “верхние” части обобщенных собственных векторов.

В. Три жорданова блока

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(x) = & C_1 \mathbf{m}_1 e^{\gamma_1 x} (1+x) + C_2 \mathbf{m}_2 e^{\gamma_1 x} + C_3 \mathbf{m}_3 e^{\gamma_3 x} (1+x) + C_4 \mathbf{m}_4 e^{\gamma_3 x} + \\ & + C_5 \mathbf{m}_5 e^{\gamma_5 x} (1+x) + C_6 \mathbf{m}_6 e^{\gamma_5 x}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_5$ – “верхние” части собственных векторов, а $\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_4, \mathbf{m}_6$ – “верхние” части обобщенных собственных векторов.

Замечание 2.2. Ввиду уравнений (1.4), (2.12) и (2.13), экспонента $e^{\gamma_k x}$, соответствующая жордановым блокам, является чисто мнимой

$$e^{\gamma_k x} = i \sin(\gamma_k r \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.20)$$

поскольку соответствующий γ_k – вещественный, что вытекает из уравнения (2.13). Аналогично соответствующий собственный вектор и обобщенный собственный вектор также должны быть чисто мнимыми, поскольку уравнение содержит только вещественные матрицы. Рассмотрим теперь комплексный скалярный коэффициент C_k :

$$C_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (2.21)$$

с $\alpha_k, \beta_k \neq 0$, тогда вещественная часть выражения $C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x} (1+x)$ становится

$$\operatorname{Re}(C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x} (1+x)) = (\beta_k r \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - \alpha_k) \sin(\gamma_k r \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{Im}(\mathbf{m}_k). \quad (2.22)$$

Уравнение показывает, что частичное решение $C_k \mathbf{m}_k e^{\gamma_k x} (1+x)$, соответствующее жорданову блоку, не является ни симметричным, ни асимметричным относительно срединной плоскости $x=0$. Таким образом, решения, связанные с жордановыми блоками, могут привести к новому типу волн Лэмба “смешанного режима”.

2.3. Уравнение дисперсии.

2.3.1. *Импедансная матрица.* Введем матрицу акустического импеданса 6×6 [28, 38]:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.24)$$

Матрица $\mathbf{Z}$ преобразует 6-вектор $\mathbf{Y}(x)$ в 6-вектор, состоящий из перемещений и поверхностных сил, действующих на горизонтальную плоскость в точке $x = \text{const}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}(x) \\ \mathbf{t}_v(x) \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}(x). \quad (2.25)$$

Заметим, что $\mathbf{Y}(x)$ определяется одним из уравнений (1.14), (2.14)–(2.16) и поэтому в значительной степени зависит от нормальной жордановой формы матрицы $\mathbf{G}$.

2.3.2. Дисперсионное уравнение. Независимо от полупростоты или неполупростоты фундаментальной матрицы $\mathbf{G}$, дисперсионное уравнение для волн Лэмба в слое со свободными границами можно представить в виде [28, 38]:

$$\det \left((\mathbf{0}; \mathbf{I}) \cdot (\mathbf{Z} \cdot \exp(-2irh\mathbf{G}) \cdot \mathbf{Z}^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = 0, \quad (2.26)$$

где согласно уравнениям (0.14), (0.35)–(0.37) экспонента матрицы $\exp(-2irh\mathbf{G})$ зависит от ее нормальной жордановой формы.

Заключение. Настоящее исследование посвящено спектральному анализу волн Лэмба, распространяющихся в однородном анизотропном слое со свободными границами. Проведенный анализ показывает возможность неполупростого вырождения фундаментальной матрицы. Выявлена возможность появления жордановых блоков, отмечено, что жордановы блоки могут быть максимально второго ранга. Также впервые получены поля перемещений для случая неполупростого вырождения. Показано, что при неполупростом вырождении фундаментальной матрицы возникают волны Лэмба, напоминающие волны нерэлеевского типа. Одним из отличительных свойств обнаруженных волн является их необычная поляризация. Как показывают уравнения (2.17)–(2.19), мода волн Лэмба, соответствующая жорданову блоку, не является ни симметричной, ни асимметричной; см. замечание 2.2.

Проведенный анализ основан на шестимерном формализме Коши в сочетании с методом экспоненциальных матриц и спектральным разложением фундаментальной матрицы. Исследование полей смещений показывает, что они в значительной степени зависят от жордановой нормальной формы фундаментальной матрицы, которая может быть как полупростой, так и неполупростой. Можно ожидать, что этот анализ послужит лучшему пониманию возможных спектральных и дисперсионных аномалий волн Лэмба, распространяющихся в анизотропных пластинах [39], а также выявлению условий аномального затухания волн Лэмба по глубине [40, 41].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 24-49-02002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barnett D.M., Lothe J.* Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals // J. Phys. F: Metal Phys. 1974. V. 4. P. 671–686. <https://doi.org/10.1088/0305-4608/4/5/009>

2. *Chadwick P., Smith G.D.* Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // *Adv. Appl. Mech.* 1977. V. 17. P. 303–376.
[https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70223-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70223-0)
3. *Ting T.C.T., Barnett D.M.* Classification of surface waves in anisotropic elastic materials // *Wave Motion*. 1997. V. 26. № 3. P. 207–218.
[https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(97\)00027-9](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(97)00027-9)
4. *Ting T.C.T.* On extraordinary semisimple matrix $N(v)$ for anisotropic elastic materials // *Quart. Appl. Math.* 1997. V. 55. № 4. P. 723–738.
5. *Wang Y.M., Ting T.C.T.* The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix N // *Int. J. Solids Struct.* 1997. V. 34. № 4. P. 401–413.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00024-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00024-8)
6. *Clements D.L.* A note on surface waves in anisotropic media // *Acta Mech.* 1985. V. 56. P. 31–40.
<https://doi.org/10.1007/BF01306022>
7. *Kuznetsov S.V.* “Forbidden” planes for Rayleigh waves // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 87–97.
<https://doi.org/10.1090/qam/1878260>
8. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.
<https://doi.org/10.1090/qam/1999838>
9. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids 1. Free and Guided Propagation, NY: Springer, 1996. 370 p.
10. *Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. I. General principles // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 226. № 1166. P. 339–355.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0258>
11. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1961. V. 14. № 3. P. 293–317.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/14.3.293>
12. *Syngé J.L.* Elastic waves in anisotropic media // *J. Math. Phys.* 1956. V. 35. № 1–4. P. 323–334.
<https://doi.org/10.1002/SAPM1956351323>
13. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // *J. Appl. Phys.* 1968. V. 39. P. 4319–4325.
<https://doi.org/10.1063/1.1656967>
14. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1969. V. 45. P. 845–851.
<https://doi.org/10.1121/1.1911556>
15. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // *Phys. Acoust.* 1970. V. 6. P. 109–166.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-395666-8.50017-8>
16. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. N.Y.: Wiley, 1964. 612 p.
17. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix Computations (3rd ed.), Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 750 p.
18. *Stroh A.N.* Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // *Philos. Mag.* 1958. V. 3. № 30. P. 625–646.
<https://doi.org/10.1080/14786435808565804>
19. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* 1962. V. 41. № 1–4. P. 77–103.
<https://doi.org/10.1002/sapm196241177>
20. *Mase G.T.* Rayleigh wave speeds in transversely isotropic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 5. P. 1441–1446.

21. *Wu K.C.* Generalization of the Stroh formalism to 3-dimensional anisotropic elasticity // *J. Elast.* 1998. V. 51. P. 213–225.
<https://doi.org/10.1023/A:1007523219357>
22. *Hwu C.* Stroh-like formalism for the coupled stretching-bending analysis for composite laminates // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40. P. 3681–3705.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00161-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00161-6)
23. *Hwu C., Becker W.* Stroh formalism for various types of materials and deformations // *J. Mech.* 2022. V. 38. P. 433–444.
<https://doi.org/10.1093/jom/ufac031>
24. *Fu Y.B.* Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity // *Proc. Roy. Soc. A.* 2007. V. 463. № 2088. P. 3073–3087.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0093>
25. *Edmondson R.T., Fu Y.B.* Stroh formulation for a generally constrained and pre-stressed elastic material // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2009. V. 44. № 5. P. 530–537.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.001>
26. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. Paper 89.
<https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>
27. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.018>
28. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Random Complex Media.* 2021. V. 31. № 6. P. 1540–1549.
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
29. *Michalski K.A., Mosig J.R.* The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes // *J. Electromagnetic Waves Appl.* 2016. V. 30. № 1. P. 1–42.
<https://doi.org/10.1080/09205071.2015.1093964>
30. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Sommerfeld-type integrals for discrete diffraction problems // *Wave Motion.* 2020. V. 97. Paper 102606.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2020.102606>
31. *Barnett D.M., Lothe J.* Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces: The surface impedance method // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1985. V. 402. № 1822. P. 135–152.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0111>
32. *Tanuma K.* Stroh Formalism and Rayleigh Waves. In: *Stroh Formalism and Rayleigh Waves*. Springer: Dordrecht, 2007.
33. *Wang L.* Space of degeneracy in the Stroh eigensystem and surface waves in transversely isotropic elastic media // *Wave Motion.* 2004. V. 40. № 2. P. 173–190.
34. *Ting T.C.T.* An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2002. V. 55. № 2. P. 297–311.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/55.2.297>
35. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
36. *Pease III M.C.*, *Methods of Matrix Algebra*, London: Academic Press, 1965. 424 p.
37. *Habgood K., Arel I.* A condensation-based application of Cramer's rule for solving large-scale linear systems // *J. Discrete Algorithms.* 2012. V. 10. P. 98–109.
<https://doi.org/10.1016/j.jda.2011.06.007>
38. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2018. V. 52. P. 700–707.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>

39. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2017. V. 53. P. 243–259. <https://doi.org/10.1134/S1061830917040039>
40. *Li S. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 2020. V. 24. № 14. P. 2400–2421. <https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>
41. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Comput. Geotech.* 2021. V. 131. Article 103808. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103808>

NON-SEMISIMPLE DEGENERACY OF LAMB WAVES

A. I. Karakozova^a, S. V. Kuznetsov^{b, *}

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Ishlinski Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia*

*e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru

Abstract — Anomalous guided waves appearing at a non-semisimple degeneracy of the fundamental matrix are observed and analysed in the framework of the Cauchy sextic formalism. The non-semisimple degeneracy condition is explicitly constructed for the most general case of Lamb waves propagating in a traction-free layer with arbitrary elastic anisotropy. A new type of dispersion equation and the corresponding dispersion solution are obtained. The connection with surface waves of the non-Rayleigh type is discussed.

Keywords: Cauchy formalism; guided wave; anisotropy; dispersion; degeneracy

REFERENCES

1. *Barnett D.M., Lothe J.* Consideration of the existence of surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic crystals // *J. Phys. F: Metal Phys.* 1974. V. 4. P. 671–686. <https://doi.org/10.1088/0305-4608/4/5/009>
2. *Chadwick P., Smith G.D.* Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials // *Adv. Appl. Mech.* 1977. V. 17. P. 303–376. [https://doi.org/10.1016/s0065-2156\(08\)70223-0](https://doi.org/10.1016/s0065-2156(08)70223-0)
3. *Ting T.C.T., Barnett D.M.* Classification of surface waves in anisotropic elastic materials // *Wave Motion*, 1997. V. 26. P. 207–218. [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(97\)00027-9](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(97)00027-9)
4. *Ting T.C.T.* On extraordinary semisimple matrix $N(v)$ for anisotropic elastic materials // *Quart. Appl. Math.* 1997. V. 55. P. 723–738.
5. *Wang Y.M., Ting T.C.T.* The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix N // *Int. J. Solids Struct.* 1997. V. 34. P. 401–413. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(96\)00024-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(96)00024-8)
6. *Clements D.L.* A note on surface waves in anisotropic media // *Acta Mech.* 1985. V. 56. P. 31–40. <https://doi.org/10.1007/BF01306022>

7. *Kuznetsov S.V.* “Forbidden” planes for Rayleigh waves // *Quart. Appl. Math.* 2002. V. 60. P. 87–97.
<https://doi.org/10.1090/qam/1878260>
8. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // *Quart. Appl. Math.* 2003. V. 61. P. 575–582.
<https://doi.org/10.1090/qam/1999838>
9. *Royer D., Dieulesaint E.* *Elastic Waves in Solids I. Free and Guided Propagation*, NY: Springer, 1996. 370 p.
10. *Musgrave M.J.P.* On the propagation of elastic waves in aeolotropic media. I. General principles // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1954. V. 226. P. 339–355.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0258>
11. *Buchwald V.T.* Rayleigh waves in transversely isotropic media // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1954. V. 14. P. 293–317.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/14.3.293>
12. *Synge J.L.* Elastic waves in anisotropic media // *J. Math. Phys.* 1956. V. 35. P. 323–334.
<https://doi.org/10.1002/SAPM1956351323>
13. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // *J. Appl. Phys.* 1968. V. 39. P. 4319–4325.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2006.03.004>
14. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1969. V. 45. P. 845–851.
<https://doi.org/10.1121/1.1911556>
15. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // *Phys. Acoust.* 1970. V. 6. P. 109–166.
<https://doi.org/B978-0-12-395666-8.50017-8>
16. *Hartman P.* *Ordinary Differential Equations*. N.Y.: Wiley, 1964. 612 p.
17. *Golub G.H., Van Loan C.F.* *Matrix Computations* (3rd ed.). Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 750 p.
18. *Stroh A.N.* Dislocations and cracks in anisotropic elasticity // *Philos. Mag.* 1958. V. 3. P. 625–646.
<https://doi.org/10.1080/14786435808565804>
19. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* 1962. V. 41. P. 77–103.
20. *Mase G.T.* Rayleigh wave speeds in transversely isotropic materials // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 81. № 5. P. 1441–1446.
21. *Wu K.C.* Generalization of the Stroh formalism to 3-dimensional anisotropic elasticity // *J. Elast.* 1998. V. 51. P. 213–225.
<https://doi.org/10.1023/A:1007523219357>
22. *Hwu C.* Stroh-like formalism for the coupled stretching-bending analysis for composite laminates // *Int. J. Solids Struct.* 2003. V. 40. P. 3681–3705.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00161-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00161-6)
23. *Hwu C., Becker W.* Stroh formalism for various types of materials and deformations // *J. Mech.* 2022. V. 38. P. 433–444.
<https://doi.org/10.1093/jom/ufac031>
24. *Fu Y.B.* Hamiltonian interpretation of the Stroh formalism in anisotropic elasticity // *Proc. Roy. Soc. A.* 2007. V. 463. P. 3073–3087.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0093>
25. *Edmondson R.T., Fu Y.B.* Stroh formulation for a generally constrained and pre-stressed elastic material // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2009. V. 44. P. 530–537.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.11.001>
26. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. Paper 89.
<https://doi.org/10.1007/s00033-019-1132-0>

27. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion*. 2019. V. 84. P. 1–7.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.018>
28. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in stratified and functionally graded plates: discrepancy, similarity, and convergence // *Waves Random Complex Media*. 2021. V. 31. P. 1540–1549.
<https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1683257>
29. *Michalski K.A., Mosig J.R.* The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes // *J. Electromagnetic Waves Appl.* 2016. V. 30. P. 1–42.
<https://doi.org/10.1080/09205071.2015.1093964>
30. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Sommerfeld-type integrals for discrete diffraction problems // *Wave Motion*. 2020. V. 97. Paper 102606.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2020.10260>
31. *Barnett D.M., Lothe J.* Free surface (Rayleigh) waves in anisotropic elastic half-spaces: The surface impedance method // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1985. V. 402. P. 135–152.
<https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0111>
32. *Tanuma K.* Stroh Formalism and Rayleigh Waves. In: *Stroh Formalism and Rayleigh Waves*. Springer: Dordrecht, 2007.
33. *Wang L.* Space of degeneracy in the Stroh eigensystem and surface waves in transversely isotropic elastic media // *Wave Motion*. 2004. V. 40. P. 173–190.
34. *Ting T.C.T.* An explicit secular equation for surface waves in an elastic material of general anisotropy // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2002. V. 55. P. 297–311.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.03.001>
35. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V.* Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoust. Phys.* 2014. V. 60. P. 200–207.
<https://doi.org/10.1134/S106377101402002X>
36. *Pease III M.C.*, *Methods of Matrix Algebra*, London: Academic Press, 1965. 424 p.
37. *Habgood K., Arel I.* A condensation-based application of Cramer’s rule for solving large-scale linear systems // *J. Discrete Algorithms*. 2012. V. 10. P. 98–109.
38. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids*. 2018. V. 52. P. 700–707.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
39. *Ilyashenko A.V. et al.* Theoretical aspects of applying Lamb waves in nondestructive testing of anisotropic media // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2017. V. 53(4). P. 243–259.
<https://doi.org/10.1134/S1061830917040039>
40. *Li S. et al.* Explicit/implicit multi-time step co-simulation in unbounded medium with Rayleigh damping and application for wave barrier // *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2020. V. 24(14). P. 2400–2421.
<https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>
41. *Li S. et al.* Benchmark for three-dimensional explicit asynchronous absorbing layers for ground wave propagation and wave barriers // *Computers and Geotechnics*. 2021. V. 131. Article 103808.
<https://doi.org/10.1080/19648189.2018.1506826>