

УДК 534.12

О СОБСТВЕННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПЛОСКОЙ КОНСТРУКЦИИ ТИПА КОССЕРА

©2024 г. Г. Л. Бровко^{а, *}, В. В. Кожухов^{а, **}, Е. Д. Мартынова^а

^аМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: glb@mech.math.msu.su, **e-mail: vladislav.kozhukhov@student.msu.ru

Поступила в редакцию 16.11.2023 г.

После доработки 06.12.2023 г.

Принята к публикации 09.12.2023 г.

Исследована задача о собственных колебаниях плоской полосы в рамках анизотропной континуальной двумерной модели среды Коссера в предположении о малости движений (деформаций) и при отсутствии внешних сил и моментов. Обнаружено, что каждому волновому числу соответствуют две собственные частоты, найдены собственные формы колебаний и связь между ними. Сделан вывод, что при колебаниях с меньшей из двух частот повороты включений сопутствуют продольному смещению полосы, а при колебаниях с более высокой частотой — препятствуют. Полученные результаты проиллюстрированы на примере модели среды с конкретными значениями параметров. На графиках представлены зависимости собственных частот, фазовых и групповых скоростей от волнового числа, изучено их асимптотическое поведение.

Ключевые слова: структурное моделирование, среда Коссера, собственные колебания

DOI: 10.31857/S1026351924030054, EDN: UIEYYV

1. Введение. Научное наследие А.А. Ильюшина [1–3] является важной частью российской (советской) науки и истории. Объединяя теоретические исследования с тонко поставленными опытными наблюдениями, при больших организаторских способностях, Алексею Антоновичу удалось решить сложнейшие технические проблемы XX в., достигнуть существенного продвижения в науке. С его именем связан необычайно широкий спектр исследуемых задач и проблем [3–5], в частности фундаментальные исследования, направленные на развитие основ моделирования и методики описания сложных структур и сред [3, 4, 6, 7].

А.А. Ильюшин обратил внимание на проблемы феноменологического описания сложных сред, уделил особое внимание топологии микроструктуры представительного объема и возможным внутренним взаимодействиям

частиц среды, включая моментные [4, 6, 7]. Подходы и методы, разработанные Алексеем Антоновичем, нашли своё применение и развитие в работах его учеников, научной школы и в последние годы активно используются исследователями: при построении моментных теорий [8, 9], моделей гетерогенных сред с разнотипными фазами [10], в том числе с различными степенями свободы [11–14], в построении уравнений состояния нелокальных сред [15, 16] и др.

Метод механического моделирования, предложенный в работе [17], был реализован в исследовании процессов в теплообменниках атомных электростанций, в построении неклассических моделей сплошной среды [9, 13, 14, 18]. Продолжая работу по изучению неклассических моделей сред, с учетом интереса в отечественной и зарубежной литературе [19–21] к данному типу, нами было решено вернуться к более детальному изучению модели, рассмотренной в работе [9], на примере задачи о собственных колебаниях конструкции типа Коссера при отсутствии внешних сил и моментов.

2. Постановка задачи. В плоских движениях при малых деформациях и поворотах система уравнений (относительно неизвестных перемещений и угла поворота), описывающих плоские движения коссеровского континуума (осредненной модели исходной дискретной конструкции), имеет вид [9]:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{mat}_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + [G_{\text{mat}} + 2(G_r - G_{\text{mix}})] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
 + G_{\text{mat}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \rho f_{\text{ex}_1} = 0, \\
 E_{\text{mat}_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + [G_{\text{mat}} + 2(G_r + G_{\text{mix}})] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
 + G_{\text{mat}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2(G_r + G_{\text{mix}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \rho f_{\text{ex}_2} = 0, \\
 H_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi - \\
 - 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \rho g_{\text{ex}_3} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где j – массовая плотность момента инерции включений относительно оси Ox_3 , ρ – средняя плотность массы ячейки (принимается в качестве массовой плотности модели среды в актуальной конфигурации), $f_{\text{ex}_1}, f_{\text{ex}_2}, g_{\text{ex}_3}$ – соответствующие проекции внешних сил и моментов, $E_{\text{mat}_1} = E_1 b_1 \Delta l_1 / \Delta l_2$, $E_{\text{mat}_2} = E_2 b_2 \Delta l_2 / \Delta l_1$, $G_{\text{mat}} = 2C_{fr} / (\Delta l_1 \Delta l_2)$, $G_r = (C_1 + C_2) / (2\Delta l_1 \Delta l_2)$, $G_{\text{mix}} = (C_1 - C_2) / (2\Delta l_1 \Delta l_2)$, $H_1 = D_1 \Delta l_1 / \Delta l_2$, $H_2 = D_2 \Delta l_2 / \Delta l_1$ – константы плоской модели среды, отвечающие свойствам исходной дискретной конструкции, а именно здесь $C_{fr} = (2/(E_1 b_1^3 \Delta l_1^2)) + (2/(E_1 b_1^3 \Delta l_1^2))^{-1}$ – жесткость каркаса на сдвиг, C_i – жесткость упругого шарнира крепления диска–включения

к полустержню i -го направления ($i = 1, 2$), D_i – жесткость ременной передачи i -го направления, E_i – модуль Юнга материала стержня i -ого направления, b_i – отношение толщины в плане к длине i -ого стержня, Δl_i – длина i -го стержня на ячейке. Будем считать все указанные здесь константы дискретной конструкции положительными числами.

3. Частные случаи плоских движений, неограниченной рассматриваемой среды при отсутствии внешних сил и моментов. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях конструкции (континуальной модели) при отсутствии внешних сил и моментов в плоскости Ox_1x_2 , где x_1 направлена горизонтально.

Случай 1. Пусть перемещения и повороты включений зависят только от времени, т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 t} &= 0, \\ \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} + 4G_r \varphi &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{u}_0, \\ \varphi &= A_1 \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{u}_0$, A_1 и A_2 задаются начальными условиями.

Случай 2. Теперь пусть перемещения и повороты включений зависят от времени и координаты x_1 , т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, t)$ и $\varphi = \varphi(x_1, t)$, кроме того, потребуем, чтобы $u_2 = 0$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned}E_{\text{mat}1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} &= 0, \\ H_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Разрешая эту систему, получим:

$$\begin{aligned}u_1(x_1, t) &= f_1(x_1 - a_1 t) + f_2(x_1 + a_1 t), \\ \varphi(x_1, t) &= A_1 \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где f_1 и f_2 – произвольные функции, $a_1 \equiv (E_{\text{mat}_1}/\rho)^{1/2}$ – скорость распространения продольных волн.

Случай 3. Пусть перемещения зависят от времени и координаты x_1 , т.е. $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, t)$, а повороты включений зависят от времени и координаты x_2 , т.е. $\varphi = \varphi(x_2, t)$, кроме того, потребуем, чтобы $u_2 = 0$. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} E_{\text{mat}_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2(G_r - G_{\text{mix}}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} &= 0, \\ H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 4G_r \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решая систему, получим:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= f_1(x_1 - a_1 t) + f_2(x_1 + a_1 t) + C_1 \frac{\rho j}{4G_r} \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + C_2 \frac{\rho j}{4G_r} \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t, \\ \varphi(x_2, t) &= \left(A_1 + \frac{C_1}{2(G_r - G_{\text{mix}})} x_2 \right) \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + \\ &+ \left(A_2 + \frac{C_2}{2(G_r - G_{\text{mix}})} x_2 \right) \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если $\varphi(\infty, t) < \infty$, то $C_1 = C_2 = 0$ в (3.6), а значит, выражения для φ и u_1 совпадают с (3.4).

Случай 4. Рассмотрим одномерные плоские сдвиговые движения среды при отсутствии внешних сил и моментов. Будем считать, что $\mathbf{u} = (u_1(x_2, t), 0, 0)$ и $\varphi = \varphi(x_2, t)$. Для краткости далее под x и u будем понимать x_2 и u_1 . С учетом сказанного система (2.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} N_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_b \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ H_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - N_c \varphi - N_b \frac{\partial u}{\partial x} - \rho j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $N_a \equiv G_{\text{mat}} + 2(G_r - G_{\text{mix}})$, $N_b \equiv 2(G_r - G_{\text{mix}})$, $N_c \equiv 4G_r$.

Решение системы уравнений (3.7) ищем в виде пары функций [22]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A_1 \cos(px + \omega t) + A_2 \sin(px + \omega t), \\ \varphi(x, t) &= B_1 \cos(px + \omega t) + B_2 \sin(px + \omega t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставим выражение (3.8) в (3.7):

$$\begin{aligned}
& \cos(px + \omega t)(-N_a p^2 A_1 + \rho \omega^2 A_1 + N_b p B_2) + \\
& + \sin(px + \omega t)(-N_b p B_1 - p^2 N_a A_2 + \rho A_2 \omega^2) = 0, \\
& \cos(px + \omega t)(-H_2 p^2 B_1 - N_c B_1 - p N_b A_2 + \rho j \omega^2 B_1) + \\
& + \sin(px + \omega t)(N_b p A_1 - H_2 p^2 B_2 - N_c B_2 + \rho j \omega^2 B_2) = 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Так как равенства выполняются при любых x и t , получаем системы уравнений для A_1 , B_2 и A_2 , B_1 :

$$\begin{aligned}
& (-N_a p^2 + \rho \omega^2) A_1 + N_b p B_2 = 0, \\
& N_b p A_1 - (H_2 p^2 + N_c - \rho j \omega^2) B_2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
& -(p^2 N_a - \rho \omega^2) A_2 - N_b p B_1 = 0, \\
& -p N_b A_2 - (H_2 p^2 + N_c - \rho j \omega^2) B_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Нетривиальное решение каждой из этих систем существует при условии

$$\det \begin{pmatrix} -N_a p^2 + \rho \omega^2 & p N_b \\ p N_b & -N_c - H_2 p^2 + j \rho \omega^2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3.12}$$

Откуда

$$j \rho^2 \omega^4 - (p^2 H_2 + N_c + j p^2 N_a) \rho \omega^2 + p^2 N_a N_c + H_2 p^4 N_a - p^2 N_b^2 = 0. \tag{3.13}$$

Введя следующие обозначения $a \equiv j \rho^2$, $b \equiv (-j \rho p^2 N_a - \rho N_c - H_2 p^2 \rho)$, $c \equiv p^2 N_a N_c + H_2 p^4 N_a - p^2 N_b^2$, (3.13) перепишем в виде:

$$a \omega^4 + b \omega^2 + c = 0. \tag{3.14}$$

Заметим, что старший член уравнения (3.14) всегда положителен, член при ω^2 отрицателен, если

$$\frac{1}{2}(N_c + H_2 p^2 / (j p^2) + G_{\text{mat}} + 2G_r) > G_{\text{mix}},$$

а свободный член (3.14) положителен при $p^2 N_a N_c + H_2 p^4 N_a > p^2 N_b^2$. Уравнение (3.14) имеет положительный дискриминант как квадратное уравнение относительно ω^2 при $(j p^2 N_a + N_c + H_2 p^2)^2 > 4 j p^2 (N_a N_c + H_2 p^2 N_a - N_b^2)$. Если все эти условия выполнены, тогда положительные корни (3.13) можно записать в виде

$$\omega_{1,2}(p) = \sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}} \tag{3.15}$$

Примем без ограничения общности в (3.15), что $0 < \omega_1(p) < \omega_2(p)$. При $p \rightarrow \infty$ и предположении, что $H_2 > j N_a$, корень ω_1 имеет асимптоту $p \sqrt{N_a / \rho}$, а корень ω_2 имеет асимптоту $p \sqrt{H_2 / (j \rho)}$.

В терминах фазовой скорости ($v_\phi \equiv \omega/p$) решение (3.15) может быть переформулировано:

$$v_{\phi 1,2} = \sqrt{-\frac{b}{2ap^2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2ap^2}\right)^2 - \frac{c}{ap^4}}}. \quad (3.16)$$

Корни (3.15) можно записать в виде групповой скорости волны, когда $v_g \equiv \partial\omega/\partial p$. Фазовая и групповая скорости волны имеют две одинаковые асимптоты при $p \rightarrow \infty$, а именно: $(N_a/\rho)^{1/2}$ для v_{g1} , $v_{\phi 1}$ и $(H_2/(j\rho))^{1/2}$ для v_{g2} , $v_{\phi 2}$.

Соответственно уравнения движения (3.7) имеют два решения вида (3.8):

$$\begin{aligned} u_i &= A_{1i} \cos(px + \omega_i t) + A_{2i} \sin(px + \omega_i t), \\ \phi_i &= B_{1i} \cos(px + \omega_i t) + B_{2i} \sin(px + \omega_i t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $i = 1, 2$, причем A_{1i} , B_{2i} находятся из системы (3.10) при $\omega = \omega_i$, а A_{2i} , B_{1i} — из системы (3.11) при $\omega = \omega_i$. Из этих систем получим:

$$B_{1i} = A_{2i} \varkappa_i, \quad (3.18)$$

$$B_{2i} = -A_{1i} \varkappa_i,$$

где

$$\varkappa_i \equiv -\frac{\rho\omega_i^2 - p^2 N_a}{pN_b} = \frac{pN_b}{-N_c - H_2 p^2 + j\rho\omega_i^2}. \quad (3.19)$$

Проанализируем величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Введем обозначение $\xi = H_2 p^2 + N_c$ и подставим (3.15) в (3.19), тогда

$$\begin{aligned} -\frac{\rho\omega_1^2 - p^2 N_a}{pN_b} &= \frac{\xi - j\rho p N_a - \sqrt{(\xi - j\rho p N_a)^2 + 4j\rho p^2 N_b}}{-2j\rho p N_b}, \\ -\frac{\rho\omega_2^2 - p^2 N_a}{pN_b} &= \frac{\xi - j\rho p N_a + \sqrt{(\xi - j\rho p N_a)^2 + 4j\rho p^2 N_b}}{-2j\rho p N_b}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa_1}{p} &= -\frac{\rho\omega_1^2 - p^2 N_a}{p^2 N_b} < \frac{1}{p^2 N_b} (\xi - jp^2 N_a - |\xi - jp^2 N_a|) \leq 0, \\ \frac{\varkappa_2}{p} &= -\frac{\rho\omega_2^2 - p^2 N_a}{p^2 N_b} > \frac{1}{p^2 N_b} (\xi - jp^2 N_a + |\xi - jp^2 N_a|) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Следовательно, $\varkappa_1/p < 0$, $\varkappa_2/p > 0$ при $N_b > 0$. Кроме того, заметим, что если умножить $\varkappa_1$ (ω_1 подставляем в левую часть (3.19)) на $\varkappa_2$ (ω_2 подставляем в правую часть (3.19)), то подобные множители сократятся, и в итоге получим

$$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = -\frac{1}{j}, \quad (3.22)$$

что означает существование связи между параметрами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Аналогичный результат может быть получен в работе [12]:

$$\tilde{a}_1 = -\frac{\tilde{J}}{\tilde{\rho}} \cdot (\tilde{a}_2)^{-1}, \quad (3.23)$$

где $\tilde{\rho}$ — удельная плотность массы конструкции, $\tilde{J}$ — удельный момент инерции включений, $\tilde{a}_i$ — соответствует введенному обозначению в работе [12].

Учитывая соотношения (3.17) и (3.18) получим:

$$\begin{aligned} u_i &= A_{1i} \cos(px + \omega_i t) + A_{2i} \sin(px + \omega_i t), \\ \varphi_i &= \varkappa_i (A_{2i} \cos(px + \omega_i t) - A_{1i} \sin(px + \omega_i t)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Отсюда легко заметить, что

$$\varphi_i(x, t) = \frac{\varkappa_i}{p} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} = \frac{\varkappa_i}{\omega_i} \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t}. \quad (3.25)$$

Из (3.22) и соотношения (3.25) следует, что при движениях с меньшей частотой $\text{sign}(\varphi_1(x, t)) = -\text{sign}(\partial u_1(x, t)/\partial x)$, и значит, повороты включений сонаправлены со смещением полосы, а при движениях с большей частотой $\text{sign}(\varphi_2(x, t)) = \text{sign}(\partial u_2(x, t)/\partial x)$, направление поворота включений противоположно смещению полосы.

Система уравнений (3.7) является линейной относительно $u(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ и однородной. Следовательно, линейные комбинации функций $u_i(x, t)$ и $\varphi_i(x, t)$ из (3.24), соответствующие разным p и i , также являются решениями системы.

4. Моделирование сдвига полосы. Применим полученный выше результат для изучения собственных колебаний бесконечной в направлении оси Ox_1 полосы ширины l (рис. 1). Сохраняя введенные выше обозначения, зададим граничные условия при $x=0$ и $x=l$ положим $u(0, t)=0$ и $u(l, t)=0$, а также потребуем, чтобы $\partial\varphi/\partial x(0, t)=0$ и $\partial\varphi/\partial x(l, t)=0$.

Для данных граничных условий будем искать решение (3.7) в виде суммы двух выражений вида (3.24): первое соответствует волновому числу p , второе $-p$. Для удобства записи далее опустим индекс i , помня, что волновым

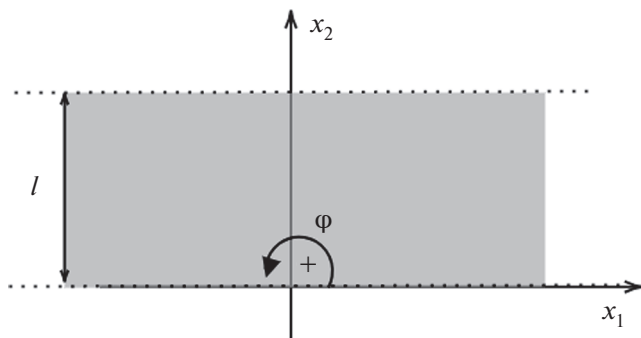


Рис. 1. Рассматриваемая бесконечная полоса в отсчетной конфигурации.

числам $\pm p$ по формулам (3.15) соответствуют частоты ω_1 и ω_2 , $\omega_1(p) = \omega_1(-p)$ и $\omega_2(p) = \omega_2(-p)$. Тогда

$$u(x, t) = \cos(\omega t) (A_1 \cos px + A_2 \sin px + B_1 \cos px - B_2 \sin px) + \\ + \sin(\omega t) (-A_1 \sin px + A_2 \cos px + B_1 \sin px + B_2 \cos px), \quad (4.1)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{\kappa}{p} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Учитывая первую пару граничных условий, получим:

$$\begin{aligned} A_1 \cos pl + A_2 \sin pl + B_1 \cos pl - B_2 \sin pl &= 0, \\ -A_1 \sin pl + A_2 \cos pl + B_1 \sin pl + B_2 \cos pl &= 0, \\ A_1 + B_1 &= 0, \\ A_2 + B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= -B_1, \\ A_2 &= -B_2, \\ 2B_1 \sin pl &= 0, \\ 2B_2 \sin pl &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Нетривиальное решение этой системы получается при

$$p = p^{(k)} = \frac{\pi k}{l}, \text{ где } k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

В случае, когда $k = 0$, решение системы уравнений (3.7) с учетом граничных условий имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ \varphi &= A_1 \sin \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t + A_2 \cos \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}} t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Также отметим, что из (3.15) при $p = 0$

$$\omega_1^{(0)} = 0, \quad \omega_2^{(0)} = \sqrt{\frac{4G_r}{\rho j}}. \quad (4.6)$$

Вторая пара граничных условий также будет выполняться при волновых числах (4.4), поскольку

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\kappa}{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\kappa p u(x, t). \quad (4.7)$$

Таким образом, собственные сдвиговые колебания полосы из рассматриваемого материала Коссера при заданных граничных условиях описываются функциями:

$$u_i^{(k)}(x, t) = \sin(p^{(k)}x)(A_{1i}^{(k)}\sin\omega_i^{(k)}t + A_{2i}^{(k)}\cos\omega_i^{(k)}t),$$

$$\varphi^{(k)}(x, t) = \frac{k_i^{(k)}}{p^{(k)}} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Общее решение рассматриваемой задачи можно записать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_k \sin(p^{(k)}x) (A_{1i}^{(k)}\sin\omega_i^{(k)}t + A_{2i}^{(k)}\cos\omega_i^{(k)}t), \quad (4.9)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_k \frac{\varkappa_i^{(k)}}{p^{(k)}} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x},$$

где $A_{1i}^{(k)}, A_{2i}^{(k)}$ — произвольные константы ($i = 1, 2$).

Если $A_{1i}^{(k)}, A_{2i}^{(k)}$ — ненулевые константы, то движение (4.9) определяется не двумя различными $\varkappa_i^{(k)}$, а зависит лишь от одной из них, так как по формуле (3.22) можно выразить одну через другую.

5. Пример численного расчета конструкции. Выбор числовых значений констант параметров модели очень деликатное дело, особенно в связи с рассмотрением неклассических сред. В ряде работ такие константы определяются из эксперимента [23], [24], в других работах числовые значения констант выбираются на основе теоретических предположений, аналогий между классическими и неклассическими средами [10], [12], [14], [18], [22], [24–31]. В качестве примера возьмем следующие значения параметров модели [9]: $G_{\text{mat}} = 6 \cdot 10^7$ [Па/м], $G_r = 3 \cdot 10^7$ [Па/м], $H_2 = 99$ [Па/м], $\rho = 2259$ [кг/м³], $j = 9.99 \cdot 10^{-3}$ [м²], $G_{\text{mix}} = 0$ [Па/м]. На рис. 2 изображены зависимости собственных частот среды от параметра k , определяющего волновое число (черная сплошная линия). Здесь и далее на графиках: для областей, где рассматриваемый параметр не определен, примем серую заливку, асимптоты функций обозначаются серым штрихом, а сами функции черными сплошными линиями (значения функции дискретны и определены при натуральных k). На бесконечности верхняя ветвь, соответствующая ω_2 , ведет себя как $p(H_2/(j\rho))^{1/2}$ (серая пунктирная линия), а нижняя ветвь, соответствующая ω_1 , — как $p(N_a/\rho)^{1/2}$. Из графика видно, что при $k=0$, частоты ω_1, ω_2 достигают минимальных значений.

На рис. 3 изображена фазовая скорость от параметра k (черная сплошная линия). Ветвь, соответствующая ω_2 , расположена выше ветви, соответствующей ω_1 . Ветвь $v_{\varphi_2}^{(k)}$ на бесконечности подходит к своей асимптоте сверху $(H_2/(j\rho))^{1/2}$, ветвь $v_{\varphi_1}^{(k)}$ на бесконечности — к $(N_a/\rho)^{1/2}$ сверху. Отметим, что область изменения $v_{\varphi_i}^{(k)}$ распадается на три части: ветвь $v_{\varphi_2}^{(k)}$ ограничена сверху значением при $k=1$ (на рис. 3, б черная пунктирная линия) и асимптотой на бесконечности (серая пунктирная линия), аналогично $v_{\varphi_1}^{(k)}$ со своими значениями.

На рис. 4 показана групповая скорость от волнового числа (черная сплошная линия). При этом ветвь, соответствующая ω_2 при $k=1$, расположена ниже ветви, соответствующей ω_1 . Однако на бесконечности ветвь, соответствующая ω_2 , расположена выше ветви, соответствующей ω_1 . Обратим

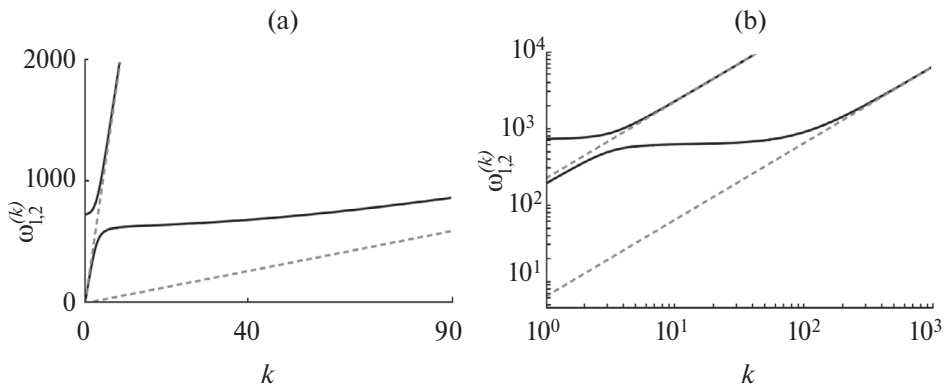


Рис. 2. Графики зависимости собственных частот от k : (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

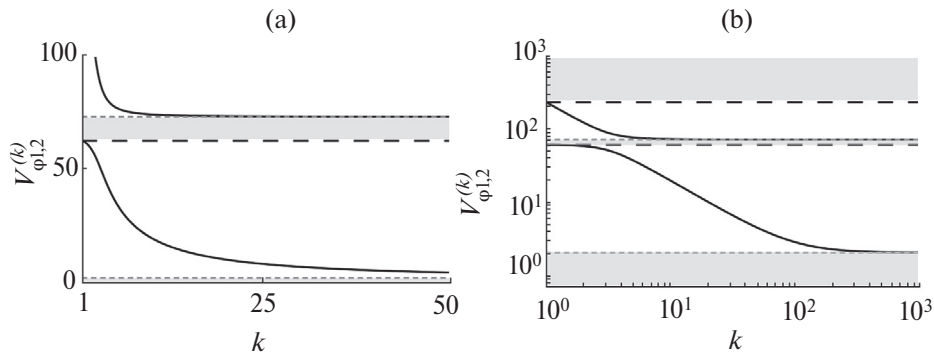


Рис. 3. Графики зависимости фазовых скоростей от k : (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

внимание, что ветвь $v_{g_2}^{(k)}$ на бесконечности подходит к своей асимптоте снизу $(H_2/(j\rho))^{1/2}$, как и $v_{g_1}^{(k)}$ к $(N_a/\rho)^{1/2}$ тоже снизу, однако последняя вначале пересекает асимптоту, имеет точку перегиба и только после этого уходит на бесконечность снизу к своей асимптоте. Особенно отчетливо это видно в логарифмическом масштабе на рис. 4, б.

Заметим, что параметр H_2 входит в выражение для асимптоты ω_2 . Предположим, что $H_2 = 0$. Это соответствует тому, что у исходной конструкции отсутствует жесткость ременной передачи в направлении x_2 . У собственных частот появляется область, где значение $\omega^{(k)}$ не определено (рис. 5). Кроме того, видно, что все собственные частоты $\omega_1^{(k)}$ расположены ниже $\omega_2^{(k)}$. Асимптотой у ветви, соответствующей $\omega_2^{(k)}$, является прямая $p\sqrt{N_a/\rho}$, а у ветви низкой частоты асимптотой является комбинация констант $\sqrt{N_a N_c - N_b^2}/\sqrt{j\rho N_a}$.

Ветвь фазовой скорости $v_{\phi_1}^{(k)}$ асимптотически приближается к нулю сверху при стремлении k к бесконечности (рис. 6). Асимптотой для $v_{\phi_2}^{(k)}$ является $\sqrt{N_a/\rho}$. При этом область изменения $v_{\phi_i}^{(k)}$ распадается на две части.

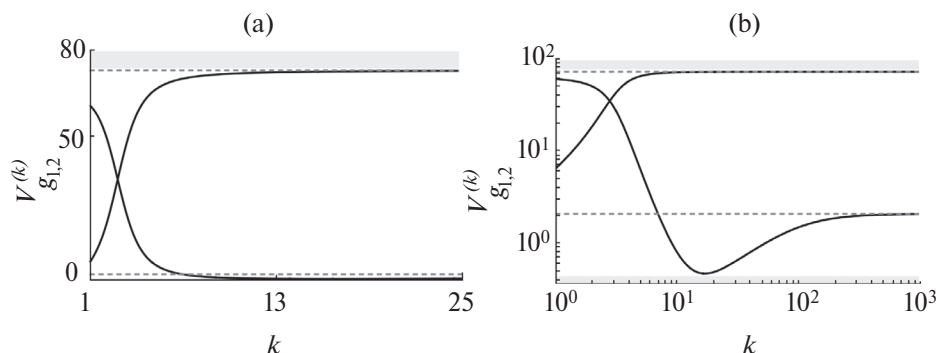


Рис. 4. Графики зависимости групповых скоростей от k : (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

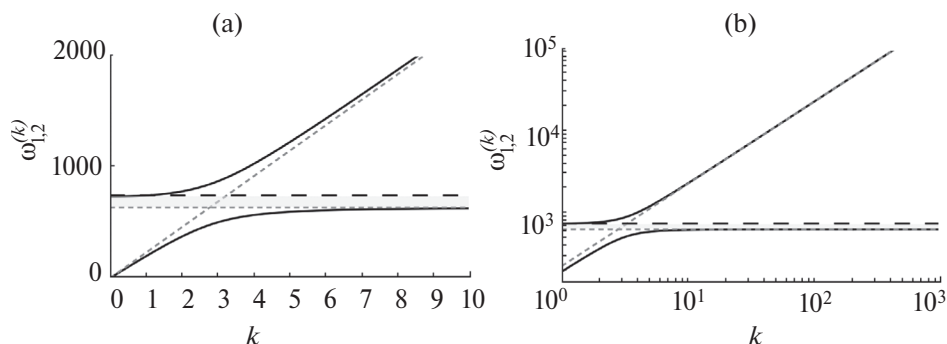


Рис. 5. Графики зависимости собственных частот от k при $H_2 = 0$: (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

Аналогичным образом ведет себя групповая скорость $v_{g_i}^{(k)}$ (рис. 7). При стремлении волнового числа к бесконечности ветвь $v_{g_1}^{(k)}$ асимптотически приближается к нулю сверху, а ветвь $v_{g_2}^{(k)}$ имеет асимптоту $\sqrt{N_a/\rho}$, приближаясь к ней снизу.

Рассмотрим движения, соответствующие первой моде колебаний с $k = 1$, положив для наглядности $A_{2i}^{(k)} = 0$ ($i = 1, 2$). В этом случае существуют ровно две формы колебаний. Примем $A_{11}^{(1)} = 0.0872$ для первой формы колебаний с частотой $\omega_1^{(1)}$, а для второй формы колебаний с частотой $\omega_2^{(1)}$ примем $A_{12}^{(1)} = 0.0872$. Согласно (4.9) получим для первой и второй форм колебаний:

$$\begin{aligned} u_1^{(2)} &= A_{11}^{(1)} \sin(\pi x/l) \sin \omega_1^{(1)} t, & \varphi_1^{(1)} &= \varkappa_1^{(1)} A_{11}^{(1)} \cos(\pi x/l) \sin \omega_1^{(1)} t, \\ u_2^{(1)} &= A_{12}^{(1)} \sin(\pi x/l) \sin \omega_2^{(1)} t, & \varphi_2^{(1)} &= \varkappa_2^{(1)} A_{12}^{(1)} \cos(\pi x/l) \sin \omega_2^{(1)} t. \end{aligned} \quad (5.1)$$

На рис. 8, а и 9, а изображены перемещения в зависимости от поперечной координаты и времени t в соответствии с (5.1). На рис. 8, б и 9, б изображены повороты включений. Первая форма колебаний (с низкой частотой — ω_1) соответствует поворотам включений, которые сопутствуют продольному

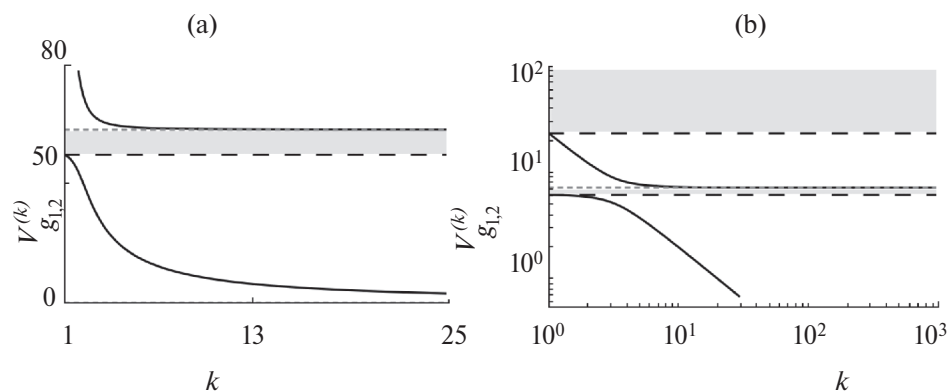


Рис. 6. Графики зависимости фазовых скоростей от k при $H_2=0$: (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

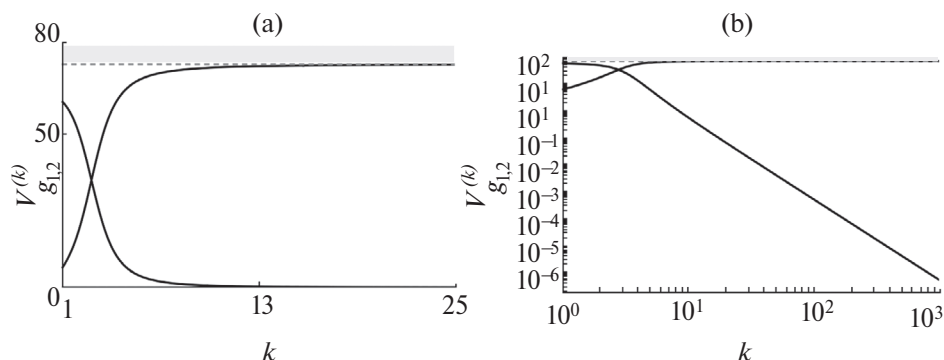


Рис. 7. Графики зависимости групповых скоростей от k при $H_2=0$: (а) линейный масштаб, (б) логарифмический масштаб.

смещению полосы. Вторая форма (с высокой частотой — ω_2) соответствует «встречным» (противоположным по знаку) поворотам включений.

Таким образом можно сделать вывод, что при колебаниях с низкой частотой включения «содействуют» продольному смещению полосы, а при колебаниях с более высокой частотой — «препятствуют». Схематически это изображено на рис. 10, где черными стрелками обозначены повороты включений, серыми стрелками направления перемещения точек полосы. Математически данный эффект объясняется тем, что $\mathcal{H}_i^{(k)}$ связаны друг с другом и отличаются знаком, поэтому в (5.1) $\varphi_i^{(k)}$ всегда разного знака.

5. Заключение. В работе продолжено развитие структурного (механического) метода моделирования сложных свойств сопротивления материалов деформированию, предложенного А.А. Ильюшиным [17]. Решена задача о собственных колебаниях бесконечной полосы, механические свойства которой описываются моделью [9].

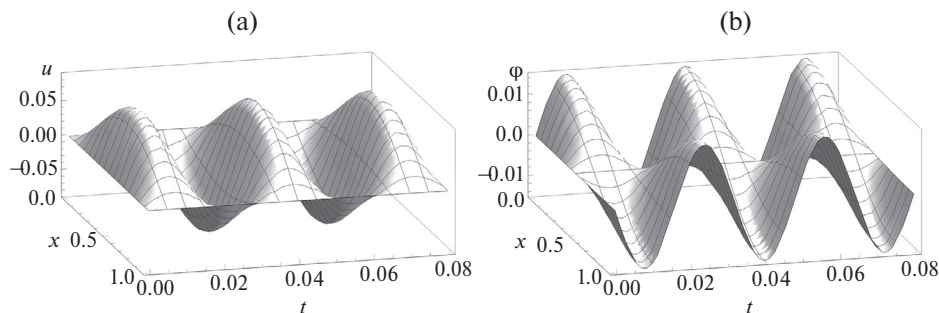


Рис. 8. Первая форма колебаний: (а) перемещения $u_1^{(1)}$ в зависимости от времени t , (б) повороты $\varphi_1^{(1)}$ в зависимости от времени t .

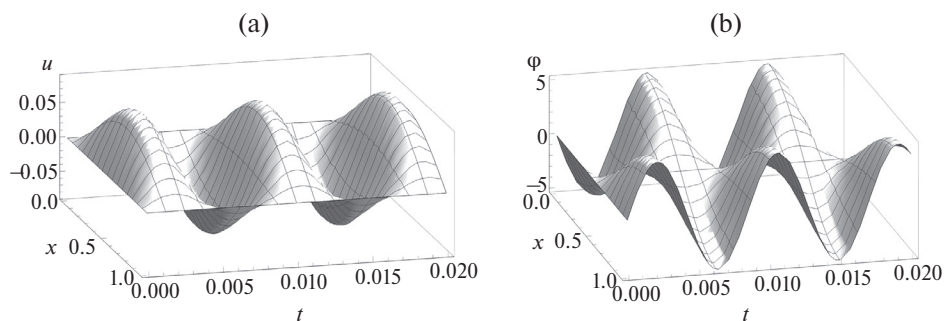


Рис. 9. Вторая форма колебаний: (а) перемещения $u_2^{(1)}$ в зависимости от времени t , (б) повороты $\varphi_2^{(1)}$ в зависимости от времени t .

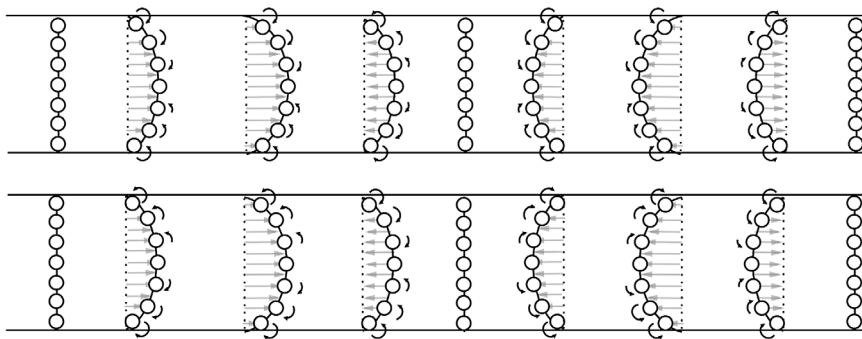


Рис. 10. Формы колебания полосы в зависимости от частоты (верхний рисунок — с частотой ω_1 , нижний рисунок — с частотой ω_2).

Получен общий вид решения в предположении, что функции u_1 и φ зависят только от координаты x_2 и времени t , а перемещения u_2 отсутствуют. Формулы (4.9) показывают существенную особенность решения, состоящую в том, что каждому волновому числу, определяемому числом k , соответствуют ровно две частоты и две формы колебаний.

Проведены численные расчеты для конкретной конструкции. На графиках в линейном и логарифмическом масштабах представлены зависимости собственных частот, фазовых и групповых скоростей от волнового числа, указаны соответствующие особенности, в том числе асимптотическое поведение. Показано, что при $H_2 = 0$ на графиках появляются области, через которые не проходят дисперсионные кривые. Отмечено, что групповая скорость низкой собственной частоты стремится к нулю при больших значениях параметра k , в отличие от случая, когда $H_2 \neq 0$.

Приведены рисунки, иллюстрирующие первую моду колебаний в зависимости от времени. Рассмотрено поведение полосы и включений при каждой из частот, сделан вывод, что при колебаниях с низкой частотой включения сопутствуют продольному смещению полосы, а при колебаниях с более высокой частотой — препятствуют. В случае, когда $A_i^{(k)}$ — ненулевые константы, показано, что собственные движения конструкции определяется не двумя различными $\mathcal{H}_i^{(k)}$, а зависят лишь от одного из них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексей Антонович Ильющин (к семидесятилетию со дня рождения) // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1981. № 1. С. 104.
2. Кийко И.А. Алексей Антонович Ильющин (2.0. 01.11–31.05. 98) // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1999. № 3. С. 63–65.
3. Бровко Г.Л., Быков Д.Л., Васин Р.А. и др. Научное наследие А.А. Ильющина и развитие его идей в механике // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 5–18.
4. Ильющин А.А. Динамика // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1994. № 3. С. 79–87.
5. Алексей Антонович Ильющин (к 100-летию со дня рождения) // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2010. № 6. С. 198–203.
6. Ильющин А.А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошной среды // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 6–14.
7. Ильющин А.А., Ломакин В.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54–61.
8. Бровко Г.Л. Моделирование неоднородных сред сложной структуры и континуум Коссера // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1996. № 5. С. 55–63.
9. Бровко Г.Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 75–91.
10. Бровко Г.Л. Модели и задачи для наполненных пористых сред // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 6. С. 33–44.
11. Атоян А.А., Саркисян С.О. Изучение свободных колебаний микрополярных упругих тонких пластин // Докл. НАН Армении. 2004. Т. 104. № 2. С. 18–33.
12. Бровко Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 22–36.

13. Бровко Г.Л., Кузичев С.А. Устойчивость вынужденных крутильных колебаний оснащенного стержня // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 1. С. 57–62.
14. Иванова О.А. О предельных формах равновесия модели одномерного континуума Коссера с пластическими свойствами // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 1. С. 52–68.
15. Кантор М.М., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 96–110.
16. Саркисян С.О. Микрополярная стержневая модель для нанокристаллического материала, состоящего из линейных цепочек атомов // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19. № 4. С. 14–20.
17. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. Об одной плоской модели перфорированных плит // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 1993. № 2. С. 83–91.
18. Иванова О.А. Модель оснащенного стержня с вязкоупругими внутренними взаимодействиями // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. № 1. С. 70–81.
19. Carta G., Jones I.S., Movchan N.V. et al. “Deflecting elastic prism” and unidirectional localisation for waves in chiral elastic systems // Scientific reports. 2017. V. 7. № 1. P. 1–11. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-00054-6>
20. Carta G., Nieves M.J., Jones I.S. et al. Elastic chiral waveguides with gyro-hinges // Quart. J. Mech. Applied Math. 2018. V. 71. № 2. P. 157–185. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hby001>
21. Garau M., Nieves M.J., Carta G., Brun M. Transient response of a gyro-elastic structured medium: Unidirectional waveforms and cloaking // Int. J. Eng. Sci. 2019. V. 143. P. 115–141. <https://doi.org/10.1016/j.jengsci.2019.05.007>
22. De Borst R., Sluys L.J. Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 90. № 1–3. P. 805–827. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90185-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90185-9)
23. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with microstructure. 1995. V. 70. P. 1–25.
24. Sadati S.M., Naghibi S.E., Shiva A. et al. Mechanics of continuum manipulators, a comparative study of five methods with experiments. 2017. P. 686–702. https://doi.org/10.1007/978-3-319-64107-2_56
25. Wang J., Rubin M.B., Dong H. A nonlinear Cosserat interphase model for residual stresses in an inclusion and the interphase that bonds it to an infinite matrix // Int. J. Solids Struct. 2015. V. 62. P. 186–206. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.028>
26. Suiker A.S.J., De Borst R., Chang C.S. Micro-mechanical modelling of granular material. Part 2: Plane wave propagation in infinite media // Acta Mechanica. 2001. V. 149. № 1. P. 181–200. <https://doi.org/10.1007/bf01261671>
27. Madeo A., Neff P., Ghiba I.-D. et al. Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2015. V. 27. № 4. P. 551–570. <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0329-2>

28. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bulletin of the Seismological Society of America. 2009. V. 99. № 2B. P. 1423–1428. <https://doi.org/10.1785/0120080154>
29. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // Math. Mech. Solids. 2016. V. 21. № 1. P. 73–93. <https://doi.org/10.1177/1081286515577042>
30. Abreu R., Thomas C., Durand S. Effect of observed micropolar motions on wave propagation in deep Earth minerals // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2018. V. 276. P. 215–225. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.04.006>
31. Xiu Chenxi, Chu Xihua, Wang Jiao et al. A micromechanics-based micromorphic model for granular materials and prediction on dispersion behaviors // Granular Matter. 2020. V. 22. № 4. P. 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10035-020-01044-8>

ON PROPER MOTIONS OF THE FLAT COSSERAT TYPE STRUCTURE

G. L. Brovko^{a, *}, V. V. Kozhukhov^{a, **}, E. D. Martynova^a

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Abstract — The problem of natural vibrations of a flat strip of anisotropic two-dimensional Cosserat medium under the assumption of small deformations and in the absence of external forces and moments is investigated. It is shown that two natural frequencies correspond to each wave number. The natural forms of oscillations and the relationship between them are found. It is concluded that at oscillations with the lower of the two frequencies the inclusion rotations accompany the longitudinal displacement of the strip, and at oscillations with a higher frequency they prevent it. The obtained results are illustrated on the example of a medium model with specific parameter values. The plots show the dependences of natural frequencies, phase and group velocities on the wave number, and their asymptotic behavior is studied.

Keywords: structural modeling, Cosserat medium, natural vibrations

REFERENCES

1. Alexei Antonovich Ilyushin (to the seventieth anniversary of his birth) // Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 1981. № 1. P. 104.
2. Kiyko I.A. Alexey Antonovich Ilyushin (2.0. 01.11-31.05. 98) // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1999. № 3. P. 63–65.
3. Brovko G.L., Bykov D.L., Vasin R.A. et al. Scientific Heritage of A.A. Ilyushin and Development of His Ideas in Mechanics // Izv. RAS. MTT. 2011. № 1. P. 5–18.
4. Ilyushin A.A. Dynamics // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1994. № 3. P. 79–87.
5. Alexey Antonovich Ilyushin (to the 100th anniversary of his birth) // Bulletin of Tyumen State University. Physico-mathematical modeling. Oil, gas, energetica. 2010. № 6. P. 198–203.

6. *Ilyushin A.A.* Non-symmetry of strain and stress tensors in continuum mechanics // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1996. № 5. P. 6–14.
7. *Ilyushin A.A., Lomakin V.A.* Moment theories in mechanics of solid deformable bodies // Strength and Plasticity. Moscow: Nauka. 1971. P. 54–61.
8. *Brovko G.L.* Modeling of inhomogeneous media of complex structure and Cosser continuum (in Russian) // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1996. № 5. P. 55–63.
9. *Brovko G.L.* About one structural model of the Kosser medium (in Russian) // Izv. RAS. MTT. 2002. № 1. P. 75–91.
10. *Brovko G.L.* Models and problems for filled porous media // Bulletin of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2010. № 6. P. 33–44.
11. *Atoyan A.A., Sarkisyan S.O.* Study of free vibrations of micropolar elastic thin plates // Dokl. of NAS of Armenia. 2004. T. 104. № 2. P. 18–33.
12. *Brovko G.L., Ivanova O.A.* Modeling of properties and motions of an inhomogeneous one-dimensional continuum of a complex microstructure of the Kosser type (in Russian) // Izv. RAS. MTT. 2008. № 1. P. 22–36.
13. *Brovko G.L., Kuzichev S.A.* Stability of the forced torsional oscillations of the equipped rod (in Russian) // Moscow University Vestnik. Series 1. Mathematics. Mechanics. 2010. № 1. P. 57–62.
14. *Ivanova O.A.* About limit forms of equilibrium of the model of one-dimensional Cosser continuum with plastic properties // Mechanics of composite materials and structures. 2017. T. 23. № 1. P. 52–68.
15. *Kantor M.M., Nikabadze M.U., Ulukhanyan A.R.* Equations of motion and physical boundary conditions of the micropolar theory of thin bodies with two small dimensions // Izv. RAS. MTT. 2013. № 3. P. 96–110.
16. *Sarkisyan S.O.* Micropolar rod model for nanocrystalline material consisting of linear chains of atoms // Physical Mesomechanics. 2016. V. 19. № 4. P. 14–20.
17. *Brovko G.L., Ilyushin A.A.* About one plane model of perforated plates (in Russian) // Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 1993. № 2. P. 83–91.
18. *Ivanova O.A.* Model of the equipped rod with viscoelastic internal interactions // Mechanics of composite materials and structures. 2018. V. 24. № 1. P. 70–81.
19. *Carta G., Jones I.S., Movchan N.V. et al.* “Deflecting elastic prism” and unidirectional localisation for waves in chiral elastic systems // Scientific reports. 2017. V. 7. № 1. P. 1–11. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-00054-6>
20. *Carta G., Nieves M.J., Jones I.S. et al.* Elastic chiral waveguides with gyro-hinges // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2018. V. 71. № 2. P. 157–185. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hby001>
21. *Garau M., Nieves M.J., Carta G., Brun M.* Transient response of a gyro-elastic structured medium: Unidirectional waveforms and cloaking // International Journal of Engineering Science. 2019. V. 143. P. 115–141. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.05.007>
22. *De Borst R., Sluys L.J.* Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1991. V. 90. № 1–3. P. 805–827. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(91\)90185-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90185-9)
23. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with microstructure. 1995. V. 70. P. 1–25.

24. *Sadati S.M., Naghibi S.E., Shiva A. et al.* Mechanics of continuum manipulators, a comparative study of five methods with experiments. 2017. P. 686–702.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-64107-2>
25. *Wang J. Rubin M.B., Dong H.* A nonlinear Cosserat interphase model for residual stresses in an inclusion and the interphase that bonds it to an infinite matrix // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. V. 62. P. 186–206.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.028>.
26. *Suiker A.S.J., De Borst R., Chang C.S.* Micro-mechanical modelling of granular material. Part 2: Plane wave propagation in infinite media // *Acta Mechanica*. 2001. V. 149. № 1. P. 181–200. <https://doi.org/10.1007/bf01261671>
27. *Madeo A., Neff P., Ghiba I.-D. et al.* Wave propagation in relaxed micromorphic continua: modeling metamaterials with frequency band-gaps // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2015. V. 27. № 4. P. 551–570.
<https://doi.org/10.1007/s00161-013-0329-2>
28. *Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C.* Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2009. V. 99. № 2B. P. 1423–1428.
<https://doi.org/10.1785/0120080154>
29. *Grekova E.F.* Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. V. 21. № 1. P. 73–93.
<https://doi.org/10.1177/1081286515577042>
30. *Abreu R., Thomas C., Durand S.* Effect of observed micropolar motions on wave propagation in deep Earth minerals // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2018. V. 276. P. 215–225. <https://doi.org/10.1016/j.pepi.2017.04.006>
31. *Xiu Chenxi, Chu Xihua, Wang Jiao et al.* A micromechanics-based micromorphic model for granular materials and prediction on dispersion behaviors // *Granular Matter*. 2020. V. 22. № 4. P. 1–22. <https://doi.org/10.1007/s10035-020-01044-8>