

УДК 539.3

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СВЯЗАННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ДЛИННОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

© 2024 г. Д. А. Шляхин^{а, *}, В. А. Юрин^{а, **}

^аСамарский государственный технический университет, Самара, Россия

**e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru,*

***e-mail: get8ack@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.09.2023 г.

После доработки 30.10.2023 г.

Принята к публикации 07.11.2023 г.

Построено новое замкнутое решение неосесимметричной связанной нестационарной задачи термоэлектродупругости для длинного пьезокерамического цилиндра при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода. Цилиндрические поверхности элемента электродированы и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. Ограничение скорости изменения температурного поля на внутренней поверхности цилиндра позволяет включить в математическую формулировку задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. Для исследования полученной несамосопряженной системы уравнений и построения замкнутого решения применяется обобщенное биортогональное конечное интегральное преобразование. Полученные зависимости позволяют определить температурное, электрическое и упругое поля в пьезокерамическом цилиндре, а также разность потенциалов между его электродированными поверхностями при действии нестационарного неосесимметричного температурного “воздействия”.

Ключевые слова: неосесимметричная задача термоэлектродупругости, длинный пьезокерамический цилиндр, биортогональные конечные интегральные преобразования

DOI: 10.31857/S1026351924020161, **EDN:** uuzej

1. Введение. Для описания и усовершенствования работы приборов, принцип действия которых основывается на взаимном влиянии термоэлектродупругих полей [1–4], используются различные математические теории [5–7]. При этом достаточно слабый эффект влияния скорости изменения объема тела на температурное поле удается учесть только с помощью построенных замкнутых решений. В этом случае для преодоления математических проблем при интегрировании системы несамосопряженных дифференциальных

уравнений, как правило, рассматриваются задачи в осесимметричной постановке. Здесь можно отметить работы, в которых исследуются задачи для градиентно-неоднородного пьезокерамического слоя [8, 9], длинного цилиндра [10–17] и полый сферы [18, 19].

В настоящее время можно отметить небольшое количество исследований в неосесимметричной постановке, в основном статических задач термоэлектроупругости. В частности, в работах [20–22] рассматриваются задачи для функционально-градиентного пьезокерамического длинного цилиндра при отсутствии потенциала на его электродированных поверхностях. В статьях [23, 24] анализируется характер изменения термоэлектроупругих полей в цилиндре, подверженном температурному и механическому воздействиям. Здесь также можно отметить задачу для длинного пьезокерамического цилиндра под нестационарным температурным воздействием [25], для которой было построено замкнутое решение в несвязанной постановке.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма решения связанной неосесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра в случае удовлетворения на его поверхностях граничных условий 1-го и 3-го рода. Ограничение скорости изменения температуры на внутренней поверхности элемента дает возможность не учитывать его инерционные характеристики, что позволяет использовать при формулировке задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. Замкнутое решение строится обобщенным методом биортогональных конечных интегральных преобразований.

2. Постановка задачи. Рассматривается полый длинный пьезокерамический цилиндр (расчетная схема представлена на рис. 1), занимающий в цилиндрической системе координат область $\Sigma = \{(r_*, \varphi, z_*) \mid r_* \in [a; b], \varphi \in [0; 2\pi), z_* \in R\}$.

В общем случае разработанный ниже алгоритм расчета позволяет удовлетворить произвольные граничные условия теплопроводности. Рассматриваемый в работе частный случай предполагает удовлетворение на внутренней поверхности ($r_* = a$) граничного условия 1-го рода в виде неосесимметричной нестационарной функции температуры $\omega_1^*(\varphi, t_*)$. На внешней поверхности ($r_* = b$) задано граничное условие 3-го рода — закон конвективного теплообмена при известной температуре окружающей среды ϑ^* . Поверхности цилиндра имеют электродное покрытие и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением. При этом внутренняя поверхность заземлена.

Математическая формулировка задачи в безразмерной форме включает дифференциальные уравнения равновесия, электростатики, теплопроводности и краевые условия для радиально поляризованного пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса $6mm$ [26, 27]:

$$L_{m+1}(U) + L_{m+2}(V) + L_{m+3}(\Phi) + L_{m+4}(\Theta) = 0, \text{ при } m = 0, 4, 8, \quad (2.1)$$

$$L_{13}(\Theta) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta + a_{12} \nabla U + a_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$r = R, 1: \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{a_3}{r} \left(U + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad r \frac{\partial V}{\partial r} - V + \frac{\partial U}{\partial \varphi} + a_{14} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.3)$$

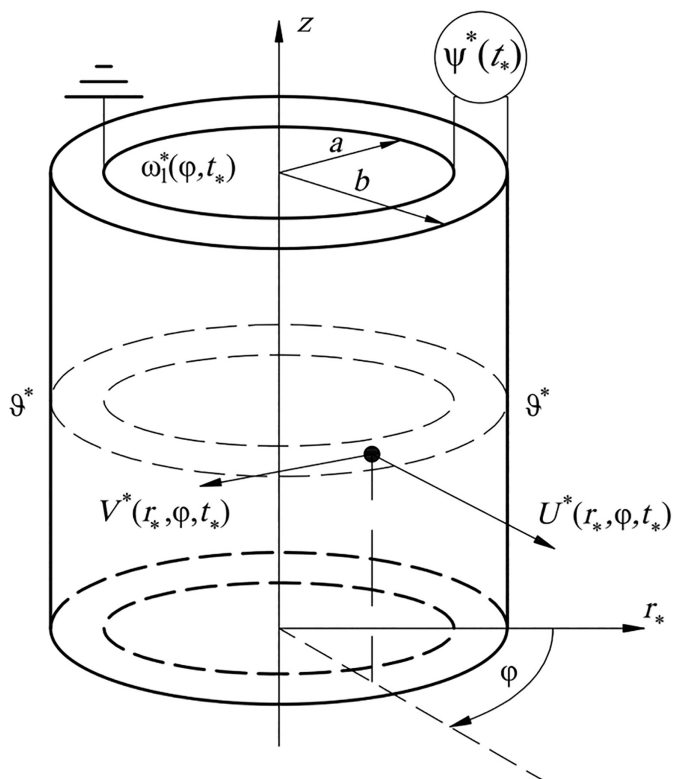


Рис. 1. Расчетная схема.

$$\Phi|_{r=R} = 0, \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_8 \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + a_9 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + a_{11} \Theta \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad (2.4)$$

$$\Theta|_{r=R} = \omega_1, \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{15} \Theta \right) \Big|_{r=1} = a_{15} \vartheta \quad (2.5)$$

$$m = \overline{1, \infty} : \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=0} = \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=2\pi m},$$

$$\frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi m}, \quad (2.6)$$

$$t = 0 : U = V = \Phi = \Theta = 0, \quad (2.7)$$

где

$$L_1 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_1}{r^2} + a_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_2 = \frac{1}{r} \left[(a_2 + a_3) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2)}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_3 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_4}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_5}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad L_4 = \frac{a_6}{r} - \nabla, \quad L_5 = \frac{1}{r} \left(a_2 \nabla + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_6 = a_2 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{a_2}{r^2}, \quad L_7 = \frac{1}{r} \left(a_4 \frac{\partial}{\partial r} + a_5 \nabla \right) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$L_8 = -a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_9 = a_8 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_9}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_{10}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$L_{10} = \frac{1}{r} \left[(a_{10} + a_9) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_{10}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_{11} = -\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_7}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad L_{12} = a_{11} \nabla,$$

$$L_{13} = \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \{U, V, r, R\} = \{U^*, V^*, r_*, a\} / b,$$

$$\Phi = \frac{e_{33}}{bc_{33}} \Phi^* \quad \{\Theta, \omega_1, \vartheta\} = \frac{\gamma_{33}}{c_{33}} \left\{ \Theta^* - T_0, \omega_1^* - T_0, \vartheta^* - T_0 \right\}; \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*; ,$$

$$a_4 = \frac{e_{31}}{e_{33}} \quad a_5 = \frac{e_{15}}{e_{33}}, \quad a_6 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, \quad a_7 = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}, \quad \{a_8, a_9, a_{10}\} = \{e_{33}, e_{31}, e_{15}\} \frac{e_{33}}{c_{33} \varepsilon_{33}},$$

$$a_{11} = \frac{e_{33} g_3}{\varepsilon_{33} \gamma_{33}}, \quad a_{12} = T_0 \frac{\gamma_{33}}{c_{33} k}, \quad a_{13} = T_0 \frac{\gamma_{33} g_3}{k e_{33}}, \quad a_{14} = \frac{a_5}{a_2}, \quad a_{15} = \alpha \frac{b}{\Lambda}.$$

В системе (2.1)–(2.7) $U^*(r_*, \varphi, t_*)$, $V^*(r_*, \varphi, t_*)$, $\Phi^*(r_*, \varphi, t_*)$, $\Theta^*(r_*, \varphi, t_*)$ – компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и температура тела в размерной форме; T_0 – температура первоначального состояния тела; c_{ms} , e_{ms} , ε_{ms} – модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости пьезокерамического материала при $\{m, s\} = 1, 5$; γ_{11} , γ_{33} – компоненты тензора температурных напряжений ($\gamma_{11} = c_{11} \alpha_t$, $\gamma_{33} = c_{33} \alpha_t$); g_3 – пироккоэффициент; Λ , k , α_t – коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; α – коэффициент теплоотдачи.

С учетом того, что внутренняя поверхность элемента заземлена, напряжение холостого хода $\Psi^*(t_*)$ определяется путем осреднения потенциала по его внешней поверхности:

$$\Psi^*(t_*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^*(1, \varphi, t_*) d\varphi. \quad (2.8)$$

3. Построение общего решения. На первом этапе решения задачи (2.1)–(2.7) применяется конечное косинус- и синус-преобразования Фурье [28] при использовании следующих трансформант и формул обращения:

$$\{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} = \int_0^{2\pi} \{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi \quad (3.1)$$

$$V_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} V(r, \varphi, t) \sin(n\varphi) d\varphi$$

$$\{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t), \Theta(r, \varphi, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t), \Theta_H(r, n, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi \quad (3.2)$$

$$V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} V_H(r, n, t) \sin(n\varphi) d\varphi$$

$$(n = 0 : \Omega_n = (2\pi)^{-1}; n \neq 0 : \Omega_n = \pi^{-1}).$$

При реализации преобразования (3.1), (3.2) с учетом периодичности решения (2.6) в пространстве изображений получается следующая начально-краевая задача:

$$\tilde{L}_{m+1}(U_H) + \tilde{L}_{m+2}(V_H) + \tilde{L}_{m+3}(\Phi_H) + \tilde{L}_{m+4}(\Theta_H) = 0, \text{ при } m = 0, 4, 8 \quad (3.3)$$

$$\tilde{L}_{13}(\Theta_H) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\Theta_H + a_{12} \nabla U_H + a_{12} n \frac{V_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \Phi_H}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$r = R, 1 : \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_3 \frac{U_H}{r} + a_3 n \frac{V_H}{r} + \frac{\partial \Phi_H}{\partial r} - \Theta_H = 0,$$

$$r \frac{\partial V_H}{\partial r} - V_H - n U_H - a_{14} n \Phi_H = 0 \quad (3.5)$$

$$\Phi_H|_{r=R} = 0, \left(-\frac{\partial \Phi_H}{\partial r} + a_8 \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_9 \frac{U_H}{r} + a_9 n \frac{V_H}{r} + a_{11} \Theta_H \right)_{|r=1} = 0. \quad (3.6)$$

$$\Theta_H|_{r=R} = \omega_{1H}, \left(\frac{\partial \Theta_H}{\partial r} + a_{15} \Theta_H \right)_{|r=1} = a_{15} \vartheta_H, \quad (3.7)$$

$$t = 0 : U_H = V_H = \Phi_H = \Theta_H = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\{\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_4, \tilde{L}_9, \dots, \tilde{L}_{13}\} = \int_0^{2\pi} \{L_1, \dots, L_4, L_9, \dots, L_{13}\} \cos(n\varphi) d\varphi,$$

$$\left\{ \tilde{L}_5, \dots, \tilde{L}_8 \right\} = \int_0^{2\pi} \left\{ L_5, \dots, L_8 \right\} \sin(n\varphi) d\varphi$$

$$\left\{ \omega_H(n, t), \vartheta_H \right\} = \int_0^{2\pi} \left\{ \omega_1(\varphi, t), \vartheta \right\} \cos(n\varphi) d\varphi.$$

Далее производится приведение неоднородных граничных условий (3.5)–(3.7) к однородным с применением следующих разложений:

$$U_H(r, n, t) = H_1(r, n, t) + u_H(r, n, t), \quad V_H(r, n, t) = H_2(r, n, t) + v_H(r, n, t) \quad (3.9)$$

$$\Phi_H(r, n, t) = H_3(r, n, t) + \phi_H(r, n, t), \quad \Theta_H(r, n, t) = H_4(r, n, t) + T_H(r, n, t),$$

где

$$\left\{ H_1(r, n, t), H_2(r, n, t), H_3(r, n, t), H_4(r, n, t) \right\} =$$

$$= \left\{ f_1(r), \dots, f_4(r) \right\} \omega_H(n, t) + \left\{ f_5(r), \dots, f_8(r) \right\} \vartheta_H$$

$f_1(r) \dots f_8(r)$ – дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (3.9) в (3.3)–(3.8) при выполнении условий

$$r = R, 1: \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_3 \frac{H_1}{r} + a_3 n \frac{H_2}{r} + \frac{\partial H_3}{\partial r} - H_4 = 0,$$

$$r \frac{\partial H_2}{\partial r} - H_2 - n H_1 - a_{14} n H_3 = 0 \quad (3.10)$$

$$H_{3|r=R} = 0, \quad \left(-\frac{\partial H_3}{\partial r} + a_8 \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_9 \frac{H_1}{r} + a_9 n \frac{H_2}{r} + a_{11} H_4 \right)_{|r=1} = 0$$

$$H_{4|r=R} = \omega_H, \quad \left(\frac{\partial H_4}{\partial r} + a_{15} H_4 \right)_{|r=1} = a_{15} \vartheta_H$$

позволяет преобразовать задачу (3.5)–(3.7) к стандартной форме относительно функций u_H , v_H , ϕ_H , T_H :

$$\tilde{L}_{m+1}(u_H) + \tilde{L}_{m+2}(v_H) + \tilde{L}_{m+3}(\phi_H) + \tilde{L}_{m+4}(T_H) = \{F_1, F_2, F_3\},$$

при $m = 0, 4, 8$ (3.11)

$$\tilde{L}_{13}(T_H) - \frac{\partial}{\partial t} \left(T_H + a_{12} \nabla u_H + a_{12} n \frac{v_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \phi_H}{\partial r} \right) = F_4 \quad (3.12)$$

$$r = R, 1: \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_3 \frac{u_H}{r} + a_3 n \frac{v_H}{r} + \frac{\partial \phi_H}{\partial r} - T_H = 0,$$

$$r \frac{\partial v_H}{\partial r} - v_H - n u_H - a_{14} n \phi_H = 0 \quad (3.13)$$

$$\phi_{H|r=R} = 0, \left(-\frac{\partial \phi_H}{\partial r} + a_8 \frac{\partial u_H}{\partial r} + a_9 \frac{u_H}{r} + a_9 n \frac{v_H}{r} + a_{11} T_H \right) \Big|_{r=1} = 0 \quad (3.14)$$

$$T_{H|r=R} = 0, \left(\frac{\partial T_H}{\partial r} + a_{15} T_H \right) \Big|_{r=1} = 0 \quad (3.15)$$

$$t = 0 : \{u_H, v_H, \phi_H, T_H\} = -\{H_1(r, n, 0), H_2(r, n, 0), H_3(r, n, 0), H_4(r, n, 0)\} \quad (3.16)$$

где

$$F_p = -\left[\tilde{L}_{m+1}(H_1) + \tilde{L}_{m+2}(H_2) + \tilde{L}_{m+3}(H_3) + \tilde{L}_{m+4}(H_4) \right],$$

$$F_4 = -\tilde{L}_{13}(H_4) + \frac{\partial}{\partial t} \left(H_4 + a_{12} \nabla H_1 + a_{12} n \frac{H_2}{r} - a_{13} \frac{\partial H_3}{\partial r} \right),$$

при $\{p\} = 1, 2, 3$, $\{m\} = 0, 4, 8$ соответственно.

Для решения системы (3.11)–(3.16) применяется биортогональное конечное интегральное преобразование (КИП) с неизвестными компонентами собственных вектор-функций $K_1(\lambda_{in}, n, r) \dots K_4(\lambda_{in}, n, r)$ и $N_1(\mu_{in}, n, r) \dots N_4(\mu_{in}, n, r)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_R \left[T_H + a_{12} \nabla u_H + a_{12} n \frac{v_H}{r} - a_{13} \frac{\partial \phi_H}{\partial r} \right] r K_4(\lambda_{in}, n, r) dr \quad (3.17)$$

$$\{u_H, v_H, \phi_H, T_H\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, n, r), N_2(\mu_{in}, n, r), N_3(\mu_{in}, n, r), N_4(\mu_{in}, n, r)\}}{\|K_{in}\|^2} \quad (3.18)$$

$$\|K_{in}\|^2 = \int_R K_4(\lambda_{in}, n, r) N_4(\mu_{in}, n, r) r dr,$$

где λ_{in} , μ_{in} – собственные значения функций $K_k(\lambda_{in}, n, r)$ и $N_k(\mu_{in}, n, r)$ при $k = 1 \dots 4$.

Особенностью биортогонального КИП является то, что трансформанта (3.17) и формула обращения (3.18) содержат две ядровые вектор-функции: сопряженные $K_k(\lambda_{in}, n, r)$ и инвариантные $N_k(\mu_{in}, n, r)$.

При биортогональном КИП формируется счетное множество задач для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda_{in}^2 \right) G(\lambda_{in}, n, t) = F_H(\lambda_{in}, n, t), \text{ при } i = \overline{1, \infty}; n = \overline{0, \infty}$$

$t = 0 : G(\lambda_{in}, n, 0) = G_{0H}$,
решение которых имеет вид:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_{0H} \exp(-\lambda_{in}^2 t) + \int_0^t F_H(\lambda_{in}, n, \tau) \exp[\lambda_{in}^2 (\tau - t)] d\tau,$$

где

$$F_H(\lambda_{in}, n, t) = - \int_R^1 (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in}) r dr,$$

$$G_{0H} = - \int_R^1 \left(H_4 + a_{12} \nabla H_1 + a_{12} n \frac{H_2}{r} - a_{13} \frac{\partial H_3}{\partial r} \right) r K_{4in} dr.$$

Также формируются две однородные задачи. Первая – относительно функций $K_1(\lambda_{in}, n, r) \dots K_4(\lambda_{in}, n, r)$:

$$\tilde{L}_1(K_{1in}) + \tilde{L}_2(K_{2in}) + \left(a_8 \nabla \frac{d}{dr} - a_9 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{a_{10} n^2}{r^2} \right) K_{3in} - \lambda_{in}^2 a_{12} \frac{dK_{4in}}{dr} = 0 \quad (3.19)$$

$$\tilde{L}_6(K_{2in}) + \tilde{L}_2(K_{1in}) + \tilde{L}_{10}(K_{3in}) - 2n \left[(a_2 + a_3) \frac{1}{r} \frac{dK_{1in}}{dr} + (a_9 + a_{10}) \frac{1}{r} \frac{dK_{3in}}{dr} \right] + \lambda_{in}^2 a_{12} n \frac{K_{4in}}{r} = 0$$

$$\tilde{L}_{11}(K_{3in}) + \tilde{L}_3(K_{1in}) - \tilde{L}_7(K_{2in}) + 2a_4 \frac{1}{r} \frac{dK_{1in}}{dr} - 2a_5 n \frac{K_{2in}}{r^2} + \lambda_{in}^2 a_{13} \nabla K_{4in} = 0$$

$$\tilde{L}_{13}(K_{4in}) + \frac{dK_{1in}}{dr} + a_6 \frac{K_{1in}}{r} + \tilde{L}_8(K_{2in}) - a_{11} \frac{dK_{3in}}{dr} + \lambda_{in}^2 K_{4in} = 0$$

$$r = R, 1: \quad \frac{dK_{1in}}{dr} + a_3 \frac{K_{1in}}{r} + a_3 n \frac{K_{2in}}{r} + a_8 \frac{dK_{3in}}{dr} - \lambda_{in}^2 a_{12} K_{4in} = 0 \quad (3.20)$$

$$r \frac{dK_{2in}}{dr} - K_{2in} - n K_{1in} - \frac{a_{10}}{a_2} n K_{3in} = 0, \quad K_{3in}|_{r=R} = K_{4in}|_{r=R} = 0$$

$$\left(-\frac{dK_{3in}}{dr} + \frac{dK_{1in}}{dr} + a_4 \frac{K_{1in}}{r} + a_4 n \frac{K_{2in}}{r} + \lambda_{in}^2 a_{13} K_{4in} \right) \Big|_{r=1} = 0,$$

$$\left(\frac{dK_{3in}}{dr} + a_{15} K_{3in} \right) \Big|_{r=1} = 0.$$

Вторая – относительно функций $N_1(\mu_{in}, n, r) \dots N_4(\mu_{in}, n, r)$:

$$\tilde{L}_{n+1}(N_{1in}) + \tilde{L}_{n+2}(N_{2in}) + \tilde{L}_{n+3}(N_{3in}) + \tilde{L}_{n+4}(N_{4in}) = 0,$$

$$\text{при } n = 0, 4, 8 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{13}(N_{4in}) + \varphi_{in}^2 \left(N_{4in} + a_{12} \nabla N_{1in} + a_{12} n \frac{N_{2in}}{r} - a_{13} \frac{dN_{3in}}{dr} \right) &= 0 \\ r = R, 1: \frac{\partial N_{1in}}{\partial r} + a_3 \frac{N_{1in}}{r} + a_3 n \frac{N_{2in}}{r} + \frac{\partial N_{3in}}{\partial r} - N_{4in} &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} r \frac{\partial N_{2in}}{\partial r} - N_{2in} - n N_{1in} - a_{14} n N_{3in} &= 0, \quad N_{3in|r=R} = N_{4in|r=R} = 0 \\ \left(-\frac{\partial N_{3in}}{\partial r} + a_8 \frac{\partial N_{1in}}{\partial r} + a_9 \frac{N_{1in}}{r} + a_9 n \frac{N_{2in}}{r} + a_{11} N_{4in} \right)_{|r=1} &= 0, \\ \left(\frac{dN_{4in}}{dr} + a_{15} N_{4in} \right)_{|r=1} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_H(\lambda_{in}, n, t) &= - \int_R^1 (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in}) r dr, \\ G_{0H} &= - \int_R^1 \left(H_4 + a_{12} \nabla H_1 + a_{12} n \frac{H_2}{r} - a_{13} \frac{\partial H_3}{\partial r} \right)_{|t=0} r K_{4in} dr. \end{aligned}$$

В краевых задачах (3.19), (3.20) и (3.21), (3.22) при вычислении первых членов ряда (3.18), обеспечивающих его сходимость, коэффициенты $\{\lambda_{in}^2 a_{12}, \lambda_{in}^2 a_{13}, \mu_{in}^2 a_{12}, \mu_{in}^2 a_{13}\} \ll \{a_1 \dots a_{11}\}$ (для пьезокерамических материалов $\{a_{12}, a_{13}\} = (1 \div 5) \times \{10^{-4}, 10^{-6}\}$). Учитывая малость a_{12} и a_{13} , при решении (3.19)–(3.22) можно пренебречь слагаемыми при данных коэффициентах и получить следующие выражения для функций $K_1(\lambda_{in}, n, r) \dots K_4(\lambda_{in}, n, r)$ и $N_1(\mu_{in}, n, r) \dots N_4(\mu_{in}, n, r)$:

$$\{K_1(\lambda_{in}, n, r), K_2(\lambda_{in}, n, r), K_3(\lambda_{in}, n, r)\} = \sum_{p=1}^6 D_{pn} \{1, A_{1pn}, B_{1pn}\} r^{m_p}$$

$$K_4(\lambda_{in}, n, r) = - \sum_{p=1}^6 D_{pn} (m_p + a_6 + a_6 n A_{pn} -$$

$$-a_{11}B_{pn}m_p)\lambda_{in}^{-m_p-1}G_{n,m_p}(\lambda_{in}r) + D_{7n}J_n(\lambda_{in}r) + D_{8n}Y_n(\lambda_{in}r)$$

$$\{N_1(\varpi_{in}, n, r), N_2(\varpi_{in}, n, r), N_3(\varpi_{in}, n, r)\} = \\ = \sum_{s=1}^6 E_{pn} \{1, A_{2pn}, B_{2pn}\} r^{m_s} + \sum_{s=1}^6 V_p(r) \{1, A_{2pn}, B_{2pn}\} r^{m_s}$$

$$N_4(\varpi_{in}, n, r) = E_{7n}J_n(\varpi_{in}r) + E_{8n}Y_n(\varpi_{in}r),$$

где $V_p = n_{2p-1}r^{1-s_p}N_{4in} + (n_{2p-1}s_p + n_{2p}) \int r^{-s_p} N_{4in} dr$ при $p = \overline{1, 6}$; $J_n(\dots)$, $Y_n(\dots)$ – функции Бесселя I и II родов порядка n [30]; $G_{n,m_p}(\dots)$ – неэлементарные функции Ломмеля; $m_1 \dots m_6$, $s_1 \dots s_6$ – действительные корни двух бикубических уравнений; A_{1pn} , A_{2pn} , B_{1pn} , B_{2pn} , $n_1 \dots n_{12}$ – коэффициенты, сформированные при решении (3.19), (3.21).

Подстановка $K_k(\lambda_{in}, n, r)$, $N_k(\mu_{in}, n, r)$ в (3.20), (3.22) позволяет определить постоянные $D_{1n} \dots D_{4n}$, $E_{1n} \dots E_{4n}$ и сформировать трансцендентные уравнения для определения собственных значений λ_{in} , μ_{in} .

При применении к трансформанте $G(\lambda_{in}, n, t)$ формул обращения (3.2), (3.18) с учетом (3.9) определяются окончательные выражения для $U(r, \varphi, t)$, $V(r, \varphi, t)$, $\Phi(r, \varphi, t)$, $\Theta(r, \varphi, t)$:

$$U(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_1(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, n, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi \\ V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[H_2(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, n, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin(n\varphi) d\varphi \\ \Phi(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_3(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, n, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi \\ \Theta(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[H_4(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_4(\mu_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi.$$

Функции $f_1(r) \dots f_8(r)$ определяются из системы уравнений

$$\tilde{L}_{n+1}(H_1) + \tilde{L}_{n+2}(H_2) + \tilde{L}_{n+3}(H_3) + \tilde{L}_{n+4}(H_4) = 0, \text{ при } n = 0, 4, 8 \\ \tilde{L}_{13}(H_4) = 0$$

и удовлетворяют (3.10), что позволяет упростить (3.11), (3.12).

4. Численный анализ результатов. В качестве образца рассматривается полый цилиндр ($b = 0.02$ м, $a = 0.005$ м) изготовленный из пьезокерамики PZT-4, имеющий следующие характеристики [27, 31]:

$\{c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}\} = \{13.9, 7.43, 11.5, 2.56\} \times 10^{10}$ Па, $\rho = 7600$ кг/м³,
 $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{6.45, 5.62\} \times 10^{-9}$ Ф/м, $\{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} = \{12.7, -5.2, 15.1\}$ Кл/м²,
 $k = 3 \times 10^6$ Дж/(м³×К), $\Lambda = 1.6$ Вт/(м×К), $\alpha_t = 0.4 \times 10^{-5}$ К⁻¹,
 $g_3 = -0.6 \times 10^{-6}$ Кл/(м²×К). Коэффициент теплоотдачи в случае естественной конвекции: $\alpha = 5.6$ Вт/(м²×К).

Изменение температуры $\omega_1^*(\varphi, t_*)$ задается в виде следующей зависимости:

$$\omega_1^*(\varphi, t_*) = Y(t_*) \left[H\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) + H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right] + T_0 \left[H\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) - H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right]$$

где $Y(t_*) = T_{\max} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$; θ – угол охвата участка изменения температуры, представлен на рис. 2; $H(\dots)$ – единичная функция Хэвисайда; $T_{\max}$, $t_{\max}^*$ – максимальное значение функции температуры и соответствующий ему момент времени ($T_{\max} = 373$ К (100 °С); $T_0 = 293$ К (20 °С); $t_{\max}^* = 1$ с).

Температура воздуха ϑ^* соответствует температуре исходного состояния тела T_0 , т.е. $\vartheta = 0$.

На рис. 3, 4 изображены графики изменения функций $\Theta(r, \varphi, t_*)$, $U(r, \varphi, t_*)$ и $V(r, \varphi, t_*)$ по φ в момент времени $t_* = 500t_{\max}^*$ при $\theta = \pi/2$ (установившийся температурный режим). Рис. 3 иллюстрирует распределение температуры на внешней ($r = 1$) и внутренней ($r = R$) поверхностях. На рис. 4 цифрами 1 и 2

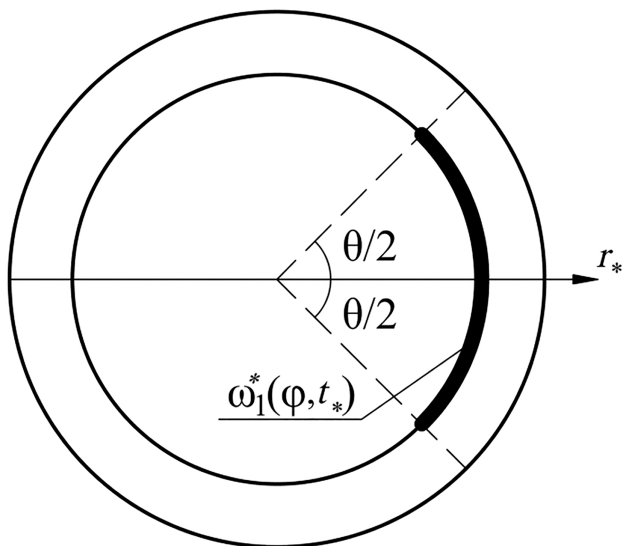


Рис. 2. Участок изменения температуры на внутренней поверхности полого цилиндра.

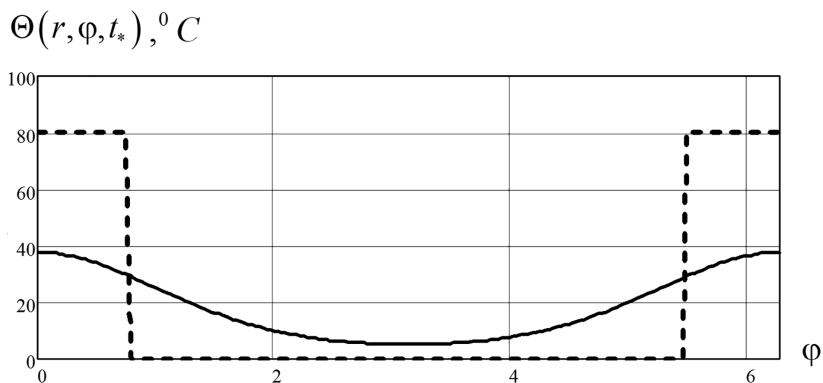


Рис. 3. Изменение температуры $\Theta(r, \varphi, t_*)$ по угловой координате φ при $t_* = 500t_{\max}^*$: сплошная линия – $r = 1$, пунктир – $r = R$.

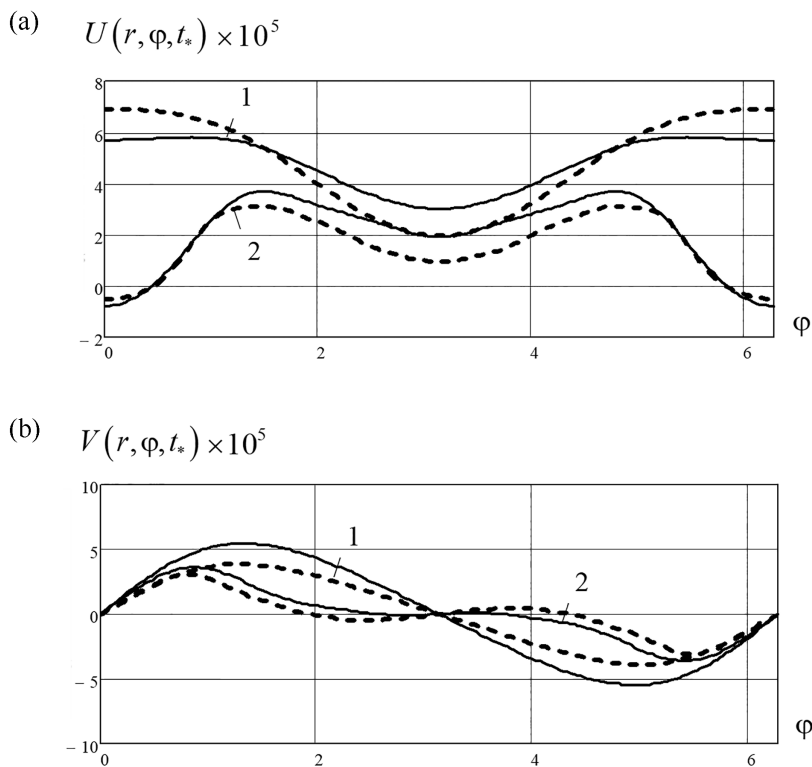


Рис. 4. Изменение радиального $U(r, \varphi, t_*)$ и тангенциального $V(r, \varphi, t_*)$ перемещений по угловой координате φ при $t_* = 500t_{\max}^*$: 1 – $r = 1$; 2 – $r = R$; сплошная линия – с учетом, пунктир – без учета электрического поля.

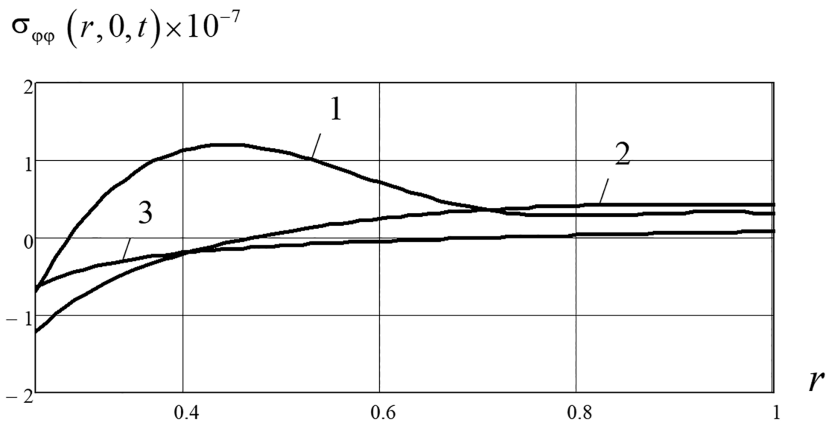


Рис. 5. Изменение окружных нормальных напряжений $\sigma_{\phi\phi}(r, 0, t_*)$ [Па] по радиальной координате r : 1 – $t_* = t_{\max}^*$; 2 – $t_* = 300t_{\max}^*$; 3 – $t_* = 500t_{\max}^*$.

обозначены графики при $r = 1, R$, а сплошной линией и пунктиром – с учетом

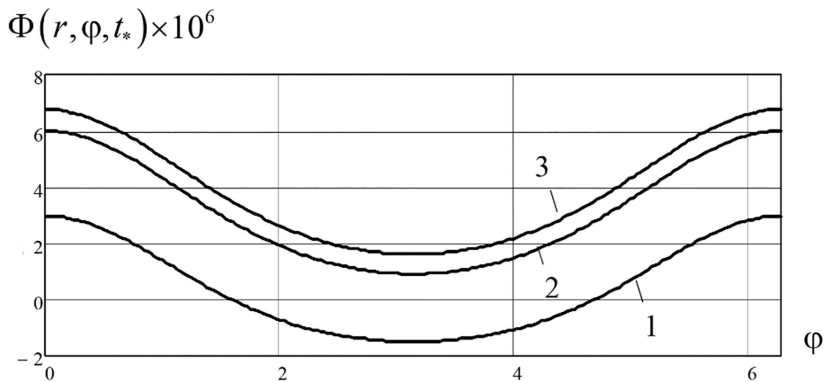


Рис. 6. Изменение электрического потенциала $\Phi(r, \phi, t_*)$ по угловой координате ϕ : 1 – $t_* = 100t_{\max}^*$; 2 – $t_* = 300t_{\max}^*$; 3 – $t_* = 500t_{\max}^*$.

и без учета электрического поля соответственно.

На основании анализа полученных результатов можно сформулировать следующие выводы:

1) при изменении температуры на части ($\theta = \pi/2$) внутренней поверхности цилиндра ($r = R$) функция приращения температуры на внешней поверхности ($r = 1$) изменяется от 6 до 38 °С. При этом увеличение θ приводит к росту $\Theta(1, \phi, 500t_*)$, и в случае $\theta = 2\pi$ (осесимметричная задача) величина данной функции будет постоянной и равной 73 °С;

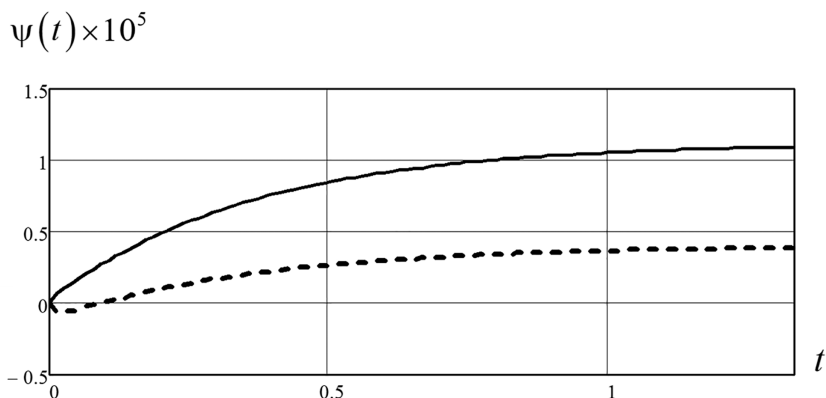


Рис. 7. Изменение разности потенциалов $\psi(t)$ по времени: сплошная линия — разрезной электрод, пунктир — непрерывное электродное покрытие.

2) влияние электроупругих полей на температурное учитывается в алгоритме решения с помощью трансформанты нагрузки $G(\lambda_{in}, n, t)$ и проявляется в том случае, когда коэффициенты связанности $\{a_{12}, a_{13}\} \geq 10^{-2}$. Поэтому при исследовании пьезокерамических элементов, для которых параметры a_{12} , a_{13} существенно меньше, в случае определения температурного поля можно исследовать только уравнение теплопроводности (2.2) в несвязанной постановке;

3) радиальная поляризация материала и образование электрического поля в процессе деформирования цилиндра приводит к увеличению его жесткости в данном направлении. Поэтому на участке $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ увеличение толщины стенки пьезокерамического элемента существенно ниже по сравнению с результатами, полученными для материала с аналогичными механическими характеристиками. На других участках толщина стенки цилиндра отличается незначительно (см. рис. 4, а);

4) при определении тангенциальных перемещений $V(r, \varphi, t_*)$ наблюдается обратная картина: наличие электрического поля приводит к их увеличению (см. рис. 4, б).

На рис. 5 приведены эпюры, характеризующие изменение окружных нормальных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t_*)$ вдоль радиальной координаты. Цифрами 1, 2 и 3 обозначены результаты для $t_* = t_{\max}^*$, $t_* = 300t_{\max}^*$, $t_* = 500t_{\max}^*$ соответственно.

Из анализа зависимостей следует, что на первом этапе деформирования ($t_* = t_{\max}^*$) рассматриваемого элемента наблюдаются наибольшие напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t_*)$ вследствие неравномерного распределения температуры по толщине стенки. Дальнейший прогрев конструкции приводит к снижению $\sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi, t_*)$. При этом зона сжимающих напряжений при установившемся температурном режиме растет.

На рис. 6 отображен характер изменения потенциала $\Phi(1, \varphi, t_*)$ по φ в различные моменты времени. Цифрами 1, 2, 3 обозначены результаты для $t_* = 100t_{\max}^*$, $t_* = 300t_{\max}^*$, $t_* = 500t_{\max}^*$ соответственно.

Здесь следует отметить, что потенциал электрического поля неравномерно распределен по угловой координате, принимая наибольшее значение в области $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$. Таким образом, для более эффективного определения разности

потенциалов $\psi^*(t_*)$ необходимо использовать на внешней поверхности цилиндра не сплошное электродное покрытие, а разрезной по высоте электрод, расположенный на участке $[-\pi/4, \pi/4]$.

В качестве подтверждения данных выводов на рис. 7 представлены графики изменения разности потенциалов электрического поля в безразмерной форме $\psi(t) = e_{33}(bc_{33})^{-1} \psi^*(t)$. Пунктиром и сплошной линией соответственно обозначены результаты для сплошного электродного покрытия, полученные на основании соотношения (2.8), и для разрезного электрода — с помощью следующего выражения:

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \Phi(1, \varphi, t) d\varphi.$$

5. Заключение. Полученное замкнутое решение неосесимметричной связанной задачи позволяет определить все компоненты температурного, электрического и упругого полей в длинном полом пьезокерамическом цилиндре, а также напряжение между его электродированными поверхностями. Преимущество представленного алгоритма расчета перед решением несвязанной задачи [25] состоит в том, что при исследовании уравнений равновесия и электростатики не требуется проводить аппроксимацию функции температуры, то есть принимается фактический нелинейный характер ее изменения, соответствующий физической природе нагрева тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ионов Б.П., Ионов А.Б.* Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // Датчики и системы. 2009. № 2. С. 9–11.
2. *Казарян А.А.* Тонкопленочный датчик давления и температуры // Датчики и системы. 2016. № 3. С. 50–56.
3. *Паньков А.А.* Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектрוליуми-несцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 72–82.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>
4. *Kalmova M.* The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields // Austrian J. Technical and Natural Sciences. 2022. V. 3. № 4. P. 14–16.
<https://doi.org/10.29013/AJT-22-3.4-14-16>
5. *Mindlin R.D.* Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // Int. J. Solids Struct. 1974. V. 10. № 6. P. 625–637.
[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X)
6. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. № 5. P. 299–309.
[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
7. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208.
<http://dx.doi.org/10.1007/BF00044969>

8. Ватутлян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 117–126.
<https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
9. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions // Doklady Physics. 2007. V. 52. P. 90–95.
<https://doi.org/10.1134/S102833580702005X>
10. Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // J. Mech. Sci. Technol. 2009. V. 23. P. 45–53.
<https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>
11. Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder // Smart Mater. Struct. 2011. V. 20. № 6.
<https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>
12. Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // Appl. Math. Mech. 2011. V. 32. № 8. P. 997–1008.
<https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>
13. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 14. № 4. С. 677–691.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>
14. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного цилиндра // Вестник ПНИПУ. Механика. 2021. № 2. С. 181–190.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>
15. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра // Adv. Eng. Res. (Rostov-on-Don). 2022. Т. 22. № 2. С. 81–90.
<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90>
16. Dai H.L., Wang X., Dai Q.H. Thermoelectroelastic responses in orthotropic piezoelectric hollow cylinders subjected to thermal shock and electric excitation // J. Reinf. Plast. Compos. 2005. V. 24. № 10. P. 1085–1103.
<https://doi.org/10.1177/0731684405048834>
17. Dai H.L., Wang X. Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. № 3–4. P. 1151–1171.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061>
18. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. 1994. V. 17. № 3. P. 471–487.
<https://doi.org/10.1080/01495739408946273>
19. Chen W.Q., Shiota T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell // J. Therm. Stresses. 2001. V. 24. № 2. P. 105–120.
<https://doi.org/10.1080/01495730150500424>
20. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads // J. Appl. Mech. 2003. V. 70. № 1. P. 111–118.
<https://doi.org/10.1115/1.1509484>
21. Arian A., Fesharaki J.J., Majzoobi G.H., Sheidaee M. Effects of electric potential on thermomechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads // Int. J. Mech., Aero., Indust., Mechatr. Manufacturing Eng. 2011. V. 5. № 11. P. 2441–2444.
<https://doi.org/10.5281/zenodo.1060363>

22. Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F. Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell // Compos. Struct. 2017. V. 162. P. 411–423.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>
23. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with D_∞ symmetry in cylindrical coordinates // J. Wood Sci. 2016. V. 62. P. 29–41.
<https://doi.org/10.1007/s10086-015-1524-5>
24. Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with D_∞ symmetry in cylindrical coordinates // J. Therm. Stresses. 2017. V. 41. № 1. P. 1–20.
<https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1368052>
25. Шляхин Д.А., Юрин В.А. Неосесимметричная нестационарная задача термоэлектрору-
пругости для длинного пьезокерамического цилиндра // Инженерный журнал: наука
и инновации. 2023. № 7. С. 677–691.
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>
26. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 307 с.
27. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электро-
проводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
28. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Иностранная литература, 1955. 668 с.
29. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при
динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Сара-
тов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 174 с.
30. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
31. Hong C.H., Kim H.P., Choi B.Y., Han H.S., Son J.S., Ahn C.W., Jo W. Lead-free piezoceramics –
Where to move on? // J. Materiomics. 2016. V. 2. № 1. P. 1–24.
<https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.12.002>

UDC 539.3

NON-AXISYMMETRIC COUPLED NON-STATIONARY PROBLEM OF THERMOELECTROELASTICITY FOR A LONG PIEZOCERAMIC CYLINDER

© 2024 г. D. A. Shlyahin^a, *, V. A. Jurin^a, **

^a*Samara Polytech, Samara, Russia*

**e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru,*

***e-mail: get8ack@mail.ru*

Abstract – A new closed solution to the non-axisymmetric coupled non-stationary problem of thermoelectroelasticity was constructed for a long piezoceramic cylinder for the case of satisfaction of the first and the third kind boundary conditions. Cylindrical surfaces were made as electrodes and connected to a measurement device with large input resistance. Limitation of a temperature change “load” rate made it possible to include equations of statics, electrostatics and thermal conductivity in the initial formula. The finite biorthogonal transforms are applying to explore a non-selfadjoint system of differential equations and to develop a closed

solution. The obtained relations made it possible to determine the temperature and electric fields, and the stress-strain state in the piezoceramic cylinder, as well as the potential difference between cylindrical surfaces (electrodes) under non-stationary non-axisymmetric temperature impact.

Keywords: non-axisymmetric problem of thermoelectroelasticity, long piezoceramic cylinder, finite biorthogonal integral transforms

REFERENCES

1. *Ionov B.P., Ionov A.B.* Statistic-spectral approach to noncontact temperature measurement // *Sensors and Systems*. 2009. V. 2. P. 9–11.
2. *Kazaryan A.A.* Fine-film captive pressure and temperature // *Sensors and Systems*. 2016. V. 3. P. 50–56.
3. *Pan'kov A.A.* Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electro-luminescent fiber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation // *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. V. 2. P. 72–82; <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
4. *Kalmova M.* The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields // *Austrian Journal of Technical and Natural Sciences*. 2022. V. 3. № 4. P. 14–16; <https://doi.org/10.29013/AJT-22-3.4-14-16>.
5. *Mindlin R.D.* Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // *International Journal of Solids and Structures*. 1974. V. 10. № 6. P. 625–637; [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
6. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. 1967. V. 15. № 5. P. 299–309; [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5).
7. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*. 1993. V. 31. P. 189–208.
8. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer // *Computational Continuum Mechanics*. 2017. V. 2. № 10. P. 117–126; <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
9. *Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V.* On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions // *Doklady Physics*. 2007. V. 52. P. 90–95; <https://doi.org/10.1134/S102833580702005X>.
10. *Saadatfar M., Razavi A.S.* Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // *J. Mech. Sci. Technol.* 2009. V. 23. P. 45–53; <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>.
11. *Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T.* The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder // *Smart Materials and Structures*. 2011. V. 20. № 6; <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>.
12. *Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J.* Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // *Appl. Math. Mech.* 2011. V. 32. № 8. P. 997–1008; <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>.

13. *Shlyakhin D.A., Kal'mova M.A.* The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder // Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2020. V. 4. № 14. P. 677–691;
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.
14. *Shlyakhin D.A., Kal'mova M.A.* The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder // PNRPU Mechanics Bulletin. 2021. V. 2. P. 181–190;
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>.
15. *Shlyakhin D.A., Kal'mova M.A.* Related dynamic axisymmetric thermoelectroelasticity problem for a long hollow piezoceramic cylinder // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). 2022. V. 2. № 22. P. 81–90;
<https://doi.org/10.23947/2687-1653-2022-22-2-81-90>.
16. *Dai H.L., Wang X., Dai Q.H.* Thermoelectroelastic responses in orthotropic piezoelectric hollow cylinders subjected to thermal shock and electric excitation // J. Reinfor. Plast. Comp. 2005. V. 24. № 10. P. 1085–1103;
<https://doi.org/10.1177/0731684405048834>.
17. *Dai H.L., Wang X.* Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures // Int. J. Solids Struct. 2005. V. 42. № 3–4. P. 1151–1171;
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061>.
18. *Obata Y., Noda N.* Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. 1994. V. 17. № 3. P. 471–487;
<https://doi.org/10.1080/01495739408946273>.
19. *Chen W.Q., Shioya T.* Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell // J. Therm. Stresses. 2001. V. 24. P. 105–120;
<https://doi.org/10.1080/01495730150500424>.
20. *Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R.* General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads // J. Appl. Mech. 2003. V. 70. № 1. P. 111–118;
<https://doi.org/10.1115/1.1509484>.
21. *Atrian A., Fesharaki J.J., Majzoobi G.H., Sheidaee M.* Effects of electric potential on thermo-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads // Int. J. Mech., Aerospace, Indust., Mech. Manufac. Eng. 2011. V. 5. № 11. P. 2441–2444;
<https://doi.org/10.5281/zenodo.1060363>.
22. *Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F.* Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell // Compos. Struct. 2017. V. 162. P. 411–423;
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>.
23. *Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y.* A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with D_∞ symmetry in cylindrical coordinates // J. Wood Sci. 2016. V. 62. P. 29–41;
<https://doi.org/10.1007/s10086-015-1524-5>.
24. *Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y.* Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with D_∞ symmetry in cylindrical coordinates // J. Therm. Stresses. 2017. V. 41. № 6. P. 1–20;
<https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1368052>.
25. *Shlyakhin D.A., Yurin V.A.* Non-axisymmetric non-stationary problem of thermoelectroelasticity for a long piezoceramic cylinder // Eng. J.: Sci. Innov. 2023. V. 7. P. 677–691;
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>.
26. *Kovalenko A.D.* Fundamentals of Thermoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1970. 307 p.
27. *Parton V.Z., Kudryavtsev B.A.* Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids. Moscow: Science, 1988, 470 p.

28. *Sneddon I.N.* Fourier Transforms. Moscow: Foreign Literature, 1955. 668 p.
29. *Senitsky Y.E.* Study of the Elastic Deformations of Structural Elements Under Dynamic Influences by the Method of Finite Integral Transformations. Saratov. Saratov University, 1985. 174 p.
30. *Yanke E., Emde F., Lesh F.* Special functions. Moscow: Science, 1977. 342 p.
31. *Hong C.H., Kim H.P., Choi B.Y. et al.* Lead-free piezoceramics – Where to move on? // J. Materiomics. 2016. V. 2. № 1. P. 1–24;
<https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.12.002>