

УДК 533.2; 534.12

ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ

© 2023 г. А. Г. Хакимов^{а,*}

^аИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: hakimov@anrb.ru

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.

После доработки 03.05.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

Определяются частоты изгибных колебаний углеродной нанотрубки (УНТ) по полу-безмоментной теории. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на УНТ в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности УНТ контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

Ключевые слова: УНТ, газ, плотность, давление, присоединенная масса

DOI: 10.31857/S0572329923600214, EDN: IZGYHW

1. Введение. Определение спектра частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, имеет большое значение [1–3]. Этой теме посвящена обширная литература. К ней примыкает также серия работ по колебаниям тонкостенных тел, не контактирующих с внешней средой. Работа [4] посвящена аналитическому и численному исследованиям свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой. Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных для моделей сжимаемой и несжимаемой среды, показывает, что при решении задачи определения параметров свободных колебаний оболочки сжимаемостью среды можно пренебречь. В то же время для решения практических задач, требующих учета полного спектра собственных частот системы оболочка—среда, должна использоваться модель сжимаемой среды, в рамках которой получены результаты о влиянии жесткости оболочки на спектр частот объема среды. Некоторые результаты решений для цилиндрических оболочек, в том числе взаимодействующих со средой, представлены в статьях [5–7].

Среди многочисленных видов применения микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотрубок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. [8–10].

В [11] представлен метод, позволяющий определять частоты колебаний цилиндрических оболочек бесконечной длины в акустической среде. Полученные результаты показывают, что существует низкая частота, когда излучение не происходит, и высокая частота, когда внешний источник обеспечивает передачу энергии, которая излучается. Резонанс возникает только в диапазоне низких частот. Метод требует только модификации для учета эффекта статического давления в окружающей среде.

Моделируя микротрубки тонкими упругими цилиндрическими оболочками [12], получены собственные частоты и собственные моды ограниченных упругих колебаний в системе оболочка—жидкость.

В [13] рассматривается радиальная динамика однослойной углеродной нанотрубки при динамическом сжатии в линейной постановке. Применяется уравнение изгибной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки (кругового кольца), основанное на гипотезах Кирхгофа.

Однако во всех этих работах взаимодействие среднего давления сред и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей оболочки не учитывается. Это взаимодействие принимается во внимание в статьях [14, 15] в случае легких газов, когда присоединенная масса сред мала. В монографиях [1–3] также не учитывается указанный эффект среднего давления. В [16] определяется спектр частот двухопорного резонатора с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на поверхности резонатора и кривизны, а также действия осевой нагрузки.

В данной работе определяются собственные частоты колебаний однослойной углеродной нанотрубки (УНТ) с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действия присоединенной массы газовой среды с удаленными границами.

Представляет интерес вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию УНТ. Это проще выяснить в случае несжимаемой жидкости. Далее, с учетом полученного результата рассматривается случай сжимаемой жидкости в более простой постановке (в частности, не производится разложение в ряд Тейлора условий контакта).

Ввиду одинакового давления по всей поверхности УНТ объектом исследования может быть принято кольцо с эффективными значениями радиуса R , толщины h , ширины b , плотности по площади ρh , модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν . Кольцо образуется зигзагообразным рядом атомов углерода [17, 18]. Если ось x направлена вдоль трубки, ось $y = R\theta$ по окружности (θ — центральный угол), то расстояние по y равно $a = l \cos 30^\circ = 0.123$ нм. При площади $S = 3\sqrt{3}l^2/4$, приходящейся на один атом, эффективная ширина кольца равна $b = Sa^{-1} = 0.213$ нм. Так как масса атома углерода равна $m = 1.99 \times 10^{-26}$ кг, то эффективная плотность по площади

$$\rho h = mS^{-1} = 0.76 \times 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \quad (1.1)$$

Во многих работах (в том числе в обзорных статьях [19–21]) приводятся значения модуля упругости и приведенные толщины однослойных углеродных нанотрубок, которые находятся в диапазонах: $E = (1–5) \times 10^6$ МПа, $h = 0.07–0.34$ нм. Эти данные получены экспериментально, а также с привлечением теоретического моделирования. Разброс значений E и h объясняется разными образцами для испытаний, аппаратурой, методами определения и т.д. Эффективный радиус R определяется через число атомов N , образующих кольцо, например, для хиральности зигзаг

$$2\pi R = aN \quad (1.2)$$

На внутреннюю и внешнюю поверхности УНТ действуют давления $p_0 + p_1$ и $p_0 + p_2$ жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 1). Здесь p_0 — давление сборки, в частности, атмосферное давление, действующее на все поверхности, p_1, p_2 — избыточные давления. При определении нагрузки q исходим из предположения, что ρ_1, ρ_2 и p_1, p_2 остаются постоянными при изгибе УНТ.

2. Несжимаемая среда. Возникающие в результате движения УНТ давления обозначим через $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$. Уравнения динамики несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости $\phi(r, \theta, t)$ в цилиндрических координатах r, θ имеют вид [1–3]

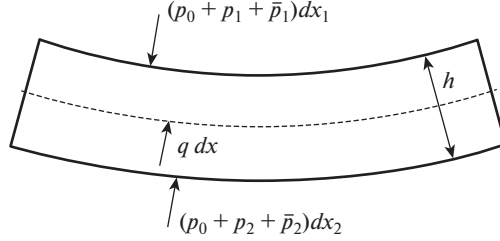


Рис. 1. Элемент dx модели поперечного сечения УНТ.

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{r^2 \partial \theta^2} = 0, \quad \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial t} \quad (2.1)$$

Условия на поверхностях для функции прогиба $w(\theta, t)$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} \left(r = R - \frac{h}{2} - w \right), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t} \left(r = R + \frac{h}{2} - w \right) \quad (2.2)$$

Радиальные перемещения считаем положительными, если они направлены к центру поперечного сечения.

На большом удалении от поверхности УНТ возмущения исчезают

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = 0 \quad (r = \infty) \quad (2.3)$$

Примем

$$w = W \cos n\theta \sin \omega t \quad (2.4)$$

Тогда в функциях

$$\Phi_1 = \Phi_1(r) \cos n\theta \cos \omega t, \quad \Phi_2 = \Phi_2(r) \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.5)$$

по (2.1) имеем $\Phi_1(r) = A_1 r^n$, $\Phi_2(r) = A_2 r^{-n}$. При этом удовлетворяются условие ограниченности решения при $r = 0$ и условие (2.3).

Разлагая функции $\partial \Phi_1 / \partial r$, $\partial \Phi_2 / \partial r$ в ряд Тейлора в окрестности $r = R$, условия (2.2) приведем к виду

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \left(-\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} = -\frac{\partial w}{\partial t} (r = R), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \left(\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} = -\frac{\partial w}{\partial t} (r = R)$$

В линейной задаче член с w в данных условиях должен быть опущен. Подставляя сюда выражения (2.4), (2.5) с учетом Φ_1 , Φ_2 , получаем

$$A_1 = -\frac{2W\omega R^{2-n}}{n(2R - nh + h)}, \quad A_2 = \frac{2W\omega R^{n+2}}{n(2R - nh - h)}$$

Выражения (2.5) через амплитуду прогиба W приобретают вид

$$\Phi_1 = -\frac{2W\omega R^{2-n} r^n}{n(2R - nh + h)} \cos n\theta \cos \omega t, \quad \Phi_2 = \frac{2W\omega R^{n+2} r^{-n}}{n(2R - nh - h)} \cos n\theta \cos \omega t \quad (2.6)$$

При вычислении акустического давления на поверхностях УНТ $r = R - h/2 + w$, $r = R + h/2 + w$ выражение (2.1) также сведем к поверхности $r = R$

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= -\rho_1 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left(-\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial r} \right] \quad (r = R) \\ \bar{p}_2 &= -\rho_2 \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \left(\frac{h}{2} + w \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t \partial r} \right] \quad (r = R)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Подставим в (2.7) выражения (2.6), предварительно опустив нелинейные члены с w . Тогда получаем

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 &= -\rho_1 \omega^2 W R b_1 \cos n\theta \sin \omega t, \quad \bar{p}_2 = \rho_2 \omega^2 W R b_2 \cos n\theta \sin \omega t \\ b_1 &= \frac{2R - hn}{n(2R - hn + h)}, \quad b_2 = \frac{2R - hn}{n(2R - hn - h)}\end{aligned}$$

С учетом соотношения для прогиба эти выражения могут быть представлены в виде

$$\bar{p}_1 = \rho_1 R b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2 R b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Распределенная сила q определяется по формуле [17, 18]

$$q = p_2 - p_1 + \bar{p}_2 - \bar{p}_1 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2R} + \frac{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)h}{2R}$$

или с учетом (2.8)

$$q = p_2 - p_1 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2R} - (\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

Уравнение радиальной динамики тонкого кольца относительно функции прогиба в предположении о нулевой деформации срединной поверхности имеет вид [22]

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{T_0 R^2}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \dot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \quad (2.10)$$

где q — внешнее давление, действующее на УНТ, точка над буквой означает производную по времени t , T_0 — кольцевое растягивающее усилие при $p_1 > p_2$, которое находится по формуле

$$\begin{aligned}T_0 &= (p_0 + p_1) \int_0^{\pi/2} \left(R - \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta - (p_0 + p_2) \int_0^{\pi/2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta = \\ &= (p_1 - p_2) R - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2}\end{aligned}\quad (2.11)$$

Линейное уравнение (2.10) получено преобразованием дифференциальных уравнений движения элемента кольца в проекциях на касательную и нормаль с учетом изменения кривизны линии поперечного сечения УНТ [23].

Уравнение колебаний УНТ (2.10) с учетом (2.11), (2.9) для p_0, p_1, p_2 не зависящих, а $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ зависящих от θ , записывается

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left[(p_1 - p_2) R - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \right] \frac{R^2}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \dot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \left[-(\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2) R \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} + (\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2) \frac{h}{2} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} \right]\end{aligned}\quad (2.12)$$

Подставляя (2.4) в уравнение (2.12), получим

$$\dot{W}_n + \omega_n^2 W_n = 0, \quad \omega_n^2 = \Omega_n^2 \frac{1}{1 + \mu} \left(1 + \frac{3\alpha}{n^2 - 1} - \frac{3\alpha_1}{n^2 - 1} \right), \quad \Omega_n^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)^2 \xi^2}{(n^2 + 1)R^4} \quad (2.13)$$

$$\alpha = \frac{(p_1 - p_2)R^3}{3D}, \quad \alpha_1 = \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)R^2 h}{2 \cdot 3D}, \quad \xi = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1 - \nu^2)}}$$

$$\mu = \frac{\rho_1 b_1 + \rho_2 b_2}{\rho} \cdot \frac{R}{h} \cdot \frac{n^2}{(n^2 + 1)} - \frac{\rho_1 b_1 - \rho_2 b_2}{2\rho} \cdot \frac{n^2}{(n^2 + 1)}$$

где Ω_n — собственные частоты при нулевом давлении p_1 и p_2 .

При $\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$ имеем $\alpha = 0$

$$\omega_n^2 = \Omega_n^2 \frac{1 - \alpha_1}{1 + \mu}$$

При $\alpha_1 = 1$ происходит потеря устойчивости круговой формы УНТ в виде эллипса ($n = 2$), причем, критическое давление потери устойчивости равно

$$p_{1cr} = \frac{3D}{R^2 h},$$

откуда следует, что УНТ может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления. Например, для одностенной УНТ с хиральностью кресло (10, 10), радиусом $R = 0.678$ нм [24] для модуля упругости $E = 0.972 \times 10^6$ МПа, коэффициента Пуассона $\nu = 0.278$ [21] и толщине h , принятой равной 0.052 нм, при нулевом перепаде давления критическое давление потери устойчивости p_{1cr} равно 1.55 ГПа [24], что соответствует давлению перехода круговой формы поперечного сечения к эллиптической или потере устойчивости кругового поперечного сечения одностенной УНТ [25].

Параметры α , α_1 и μ определяют влияние избыточного давления, среднего давления и плотности окружающей среды. Таким образом, избыточное давление в УНТ повышает, среднее давление и плотность понижают собственную частоту УНТ. При $\alpha \ll 1$, $\alpha_1 \ll 1$, $\mu \ll 1$ их влияние исчезает.

Собственные частоты изгибных колебаний УНТ при ее контакте с жидкостью снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Учет разности площадей внутренней и внешней поверхностей УНТ оказывает понижающее влияние на собственные частоты.

По модели несжимаемой жидкости имеется повышение собственной частоты за счет перепада давлений, уменьшение частоты за счет действия среднего давления и присоединенной массы.

3. Сжимаемая среда. По модели сжимаемой среды вместо уравнений (2.1) имеем [1–3]

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{p}_{1,2} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial t}, \quad c_{1,2}^2 = \kappa_{1,2} \frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}} \quad (3.1)$$

где $c_{1,2}$ — скорость звука, $\kappa_{1,2}$ — коэффициент адиабаты. В отличие от случая несжимаемой жидкости здесь давление и плотность не являются независимыми, а связаны изотермическим законом.

При функциях (2.7), (2.8)

$$w = W \cos n\theta \sin \omega t, \quad \Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(r) \cos n\theta \cos \omega t \quad (3.2)$$

из волнового уравнения (3.1) следует

$$\Phi_{1,2} = A_{1,2} J_n \left(\frac{\omega r}{c_{1,2}} \right) + B_{1,2} Y_n \left(\frac{\omega r}{c_{1,2}} \right) \quad (3.3)$$

где J_n , Y_n — функции Бесселя первого и второго рода.

Положив $B_1 = 0$, $A_2 = 0$ в соответствии с условиями (2.3), получаем частное решение

$$\varphi_1 = A_1 J_n \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \cos n\theta \cos \omega t, \quad \varphi_2 = B_2 Y_n \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) \cos n\theta \cos \omega t \quad (3.4)$$

Как показано выше, при определении распределенной нагрузки q необходимо учитывать условия при $r = R \pm h/2$, а при определении $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ на поверхностях УНТ и удовлетворении условий (2.2) в линейной задаче вместо $r = R \pm h/2 + w$ можно принять $r = R$. Тогда из условия конечности решения при $r = 0$ и условия (2.3) следует

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{W\omega R}{nf_1}, \quad B_2 = \frac{W\omega R}{nf_2}, \quad t_1 = \frac{R}{c_1}, \quad t_2 = \frac{R}{c_2} \\ f_1 &= -\frac{\omega(2R+h)}{2nc_1} J_{n+1}(\omega t_1) + J_n(\omega t_1) \left(n - \frac{n^2 h}{2R} + \frac{hn}{2R} + \frac{\omega^2 h R}{2c_1^2} \right) \\ f_2 &= \frac{\omega(2R-h)}{2nc_2} Y_{n+1}(\omega t_2) + Y_n(\omega t_2) \left(-n - \frac{n^2 h}{2R} + \frac{hn}{2R} + \frac{\omega^2 h R}{2c_2^2} \right) \end{aligned}$$

Подставим в (2.7) выражения (3.4), предварительно опустив нелинейные члены с w . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= -\rho_1 \omega^2 W R f_{11} \cos n\theta \sin \omega t, \quad \bar{p}_2 = -\rho_2 \omega^2 W R f_{22} \cos n\theta \sin \omega t \\ f_{11} &= \frac{f_{10}}{f_1}, \quad f_{10} = \frac{\omega h}{2c_1} J_{n+1}(\omega t_1) + J_n(\omega t_1) \left(1 - \frac{nh}{2R} \right) \\ f_{22} &= \frac{f_{20}}{f_2}, \quad f_{20} = \frac{\omega h}{2c_2} Y_{n+1}(\omega t_2) - Y_n(\omega t_2) \left(1 + \frac{nh}{2R} \right) \end{aligned}$$

С учетом соотношения для прогиба эти выражения могут быть представлены в виде

$$\bar{p}_1 = \rho_1 f_{11} R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \bar{p}_2 = \rho_2 f_{22} R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Находим распределенную поперечную нагрузку

$$q = p_2 - p_1 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2R} + (-\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2}(\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

Уравнение колебаний УНТ (2.10) с учетом (2.11), (3.6) для p_0, p_1, p_2 не зависящих, а $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ зависящих от θ , записывается

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left[(p_1 - p_2) R - (2p_0 + p_1 + p_2) \frac{h}{2} \right] \frac{R^2}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4}{D} \left[(-\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) R \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2}(\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) h \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Частное решение принимается в виде (3.2). Подставляя (3.2) в уравнение (3.7), получим

$$\begin{aligned} \omega_n^2 - \Omega_n^2 \left(1 + \frac{3\alpha}{n^2 - 1} - \frac{3\alpha_1}{n^2 - 1} \right) + \omega_n^2 \frac{n^2 R}{\rho h(n^2 + 1)} (\rho_1 f_{11} - \rho_2 f_{22}) - \\ - \omega_n^2 \frac{n^2}{2\rho(n^2 + 1)} (\rho_1 f_{11} + \rho_2 f_{22}) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Omega_n^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)^2 \xi^2}{(n^2 + 1)R^4}, \quad \alpha = \frac{(p_1 - p_2)R^3}{3D}, \quad \alpha_1 = \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)R^2 h}{2 \cdot 3D}$$

В случае несжимаемой жидкости $t_1 \rightarrow 0$, $t_2 \rightarrow 0$ и из (3.8) следует

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \Omega_n^2 \left(1 + \frac{3\alpha}{n^2 - 1} - \frac{3\alpha_1}{n^2 - 1} \right) / (1 + \mu) \\ \mu &= \frac{\rho_1 f_{11n} - \rho_2 f_{22n}}{\rho} \cdot \frac{R}{h} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1} - \frac{\rho_1 f_{11n} + \rho_2 f_{22n}}{2\rho} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1} \\ f_{11n} &= \frac{2R - hn}{n(2R - hn + h)}, \quad f_{22n} = \frac{2R + hn}{n(2R + hn - h)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для решения уравнения (3.8) в случае сжимаемой жидкости применяется метод последовательных приближений. Принимается, что нулевое приближение $f_{11}^{(0)} = f_{11n}$, $f_{22}^{(0)} = f_{22n}$, и из уравнения (3.9) находится круговая частота колебаний первого приближения $\omega_n^{(1)}$. По полученной частоте первого приближения $\omega_n^{(1)}$ находится первое приближение $f_{11}^{(1)}$, $f_{22}^{(1)}$ и так далее. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не удовлетворится условие $|\omega_n^{(2(k-1))} - \omega_n^{(2(k))}| \leq \epsilon$, где ϵ наперед заданная малая величина.

На рис. 2, а приводятся зависимости первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления $p_1 = p_2$ (ГПа) для модуля упругости $E = 0.972 \times 10^6$ МПа, коэффициента Пуассона $\nu = 0.278$ [21], радиуса $R = 0.678$ нм, толщины $h = 0.052$ нм и при нулевом перепаде давления. Из рис. 2, а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний уменьшается, причем влияние среднего давления значительно. Модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν взяты из работы [21] для однослойной УНТ хиральности кресло (10, 10), а толщина принята $h = 0.052$ нм, согласно результатам моделирования потери устойчивости под действием среднего давления [24, 25], что не соответствует диапазону изменения приведенных толщин $h = 0.07\text{--}0.34$ нм. На рис. 2, б приводится зависимость первой частоты изгибных колебаний цилиндрической оболочки от давления по формулам для сжимаемой жидкости для разных газов. Рассмотрены газы гелий, воздух, двуокись углерода с целью показать, что собственные частоты колебаний УНТ зависят от плотности газовой среды. Из рис. 2, б видно, что с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 3 приведены зависимости первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления p_1 (ГПа) для гелия $\rho_1 = 0.1785$ кг/м³: по формулам для несжимаемой (2.14) и сжимаемой (3.7) жидкостей (сплошная, штриховая линии соответственно). Видно, что учет сжимаемости жидкости приводит к уменьшению частоты колебаний.

4. Заключение. Собственные частоты изгибных колебаний УНТ при ее контакте с жидкостью снижаются. Это объясняется влиянием присоединенной массы жидкости. Учет разности площадей внутренней и внешней поверхностей УНТ оказывает понижающее влияние на собственные частоты.

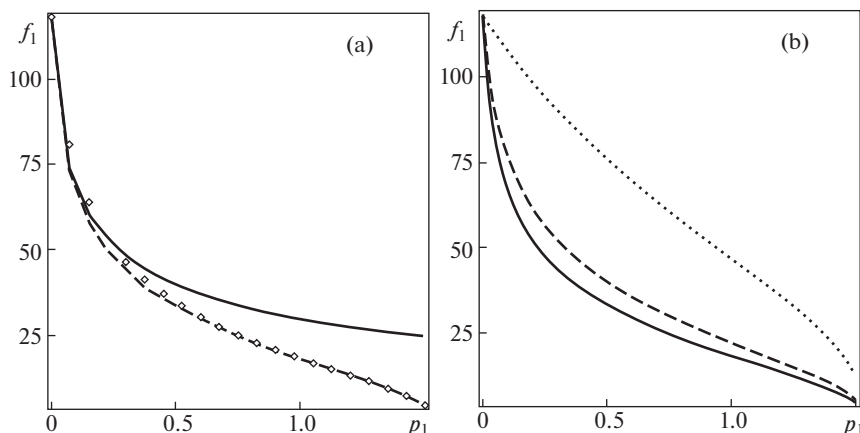


Рис. 2. Зависимость первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления $p_1 = p_2$ (ГПа): (а) для двуокиси углерода $\rho_1 = 1.9768 \text{ кг/м}^3$ с учетом действия среднего давления по формулам для несжимаемой (2.13), сжимаемой (3.8) жидкостей и без учета действия среднего давления (3.8) (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (б) по формулам для сжимаемой (3.8) жидкости для разных газов: $\rho_1 = 0.1785$ (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м^3 (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно).

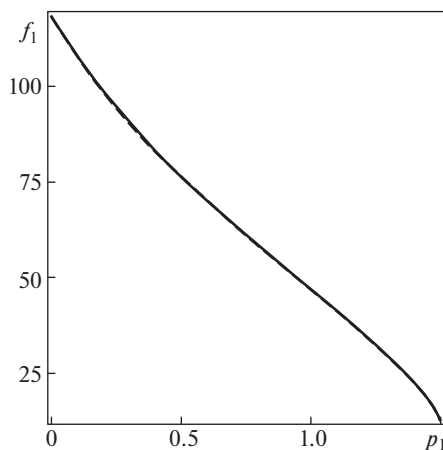


Рис. 3. Зависимость первой частоты изгибных колебаний УНТ f_1 (ГГц) от давления p_1 (ГПа) для гелия $\rho_1 = 0.1785 \text{ кг/м}^3$: по формулам для несжимаемой (2.14) и сжимаемой (3.7) жидкостей (сплошная, штриховая линии соответственно).

По модели несжимаемой жидкости имеется повышение собственной частоты за счет перепада давлений, уменьшение частоты за счет действия среднего давления и присоединенной массы.

УНТ может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления.

Для сжимаемой жидкости влияние носит более сложный характер, так как присоединенная масса зависит от скорости звука и от самой частоты колебаний. Кроме того, давление и плотность газовой среды не являются независимыми.

Влияние контактирующей среды на частоту колебаний является значительным для весьма тонких оболочек из материала с низким модулем упругости. Учет его необходим особенно в случае элементов микро- и наноразмерных толщин.

Эти результаты могут быть также использованы при моделировании колебаний оболочек, контактирующих с жидкостью и газом.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 103 с.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 182 с.
3. Попов А.Л., Чернышев Г.Н. Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1994. 208 с.
4. Дяченко И.А., Миронов А.А. Аналитические и численные исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 1. С. 35–48.
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48>
5. Leizerovich G.S., Taranukha N.A. Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells // Mech. Solids. 2008. V. 43. № 2. P. 246–253.
<https://doi.org/10.3103/S0025654408020106>
6. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells // Proc. Indian National Sci. Acad. 2016. V. 82. № 2. P. 349–355.
<https://doi.org/10.16943/ptinsa/2016/48426>
7. Farshidianfar A., Oliazaadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories // Int. J. Mech. Appl. 2012. V. 2 (5). P. 74–80.
<https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20120205.04>
8. O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M. et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. № 464. P. 697–703.
<https://doi.org/10.1038/nature08967>
9. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M. et al. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. № 446. P. 1066–1069.
<https://doi.org/10.1038/nature05741>
10. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. № 462. P. 1075–1078.
<https://doi.org/10.1038/nature08626>
11. Bleich H.H., Baron M.L. Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. V. 21. № 2. P. 167–177.
12. Sirenko Y.M., Strosio M.A., Kim K.W. Elastic vibrations of microtubules in a fluid // Phys. Rev. 1996. V. 53. № 1. P. 1003–1010.
13. Дмитриев С.В., Ильгамов М.А. Радиальная реакция углеродной нанотрубки на динамическое давление // ДАН. Физика. Технические науки. 2021. Т. 501. № 1. С. 8–13.
<https://doi.org/10.31857/S2686740021060080>
14. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
<https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
15. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381>

16. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/jacm.2021.36470.2848>
17. *Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С.* Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // *ЖТФ*. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737.
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21>
18. *Dmitriev S.V., Semenov A.S., Savin A.V., Ilgamov M.A., Bachurin D.V.* Rotobreather in a carbon nanotube bundle // *J. Micromech. Mol. Phys.* 2020. V. 5. № 3. 2050010.
<https://doi.org/10.1142/S2424913020500101>
19. *Harik V.M.* Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods // *Solid State Commun.* 2001. V. 120. № 7–8. P. 331–335.
[https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(01\)00383-0](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(01)00383-0)
20. *Qian D., Wagner G.J., Lin W.K., Ju M.F., Ruoff R.S.* Mechanics of carbon nanotubes // *Appl. Mech. Rev.* 2002. V. 55. № 6. P. 495–532.
<https://doi.org/10.1115/1.1490129>
21. *Елецкий А.В.* Механические свойства углеродных нанотрубок и материалов на их основе // *Успехи физических наук*. 2007. Т. 177. № 3. С. 233–274.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200703a.0233>
22. *Ильгамов М.А.* Перестройка гармоник при изгибе цилиндрической оболочки вследствие динамического сжатия // *ПМТФ*. 2011. Т. 52. № 3. С. 167–174.
23. *Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W.* Vibration problems in engineering. New York: John Wiley & Sons, 1974.
24. *Wu J., Zang J., Larade B. et al.* Computational design of carbon nanotube electromechanical pressure sensors // *Phys. Rev. B*. 2004. V. 69. P. 153406.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.153406>
25. *Хакимов А.Г.* К статической устойчивости формы поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, углеродной нанотрубки // *Изв. РАН. МТТ*. 2023. № 1. С. 95–101.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922060101>