

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННЫХ СЛОЕВ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2023 г. В. В. Глаголев^{a,*}, А. А. Маркин^{a,**}

^aТульский государственный университет, Тула, Россия

* e-mail: vadim@tsu.tula.ru

** e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.01.2023 г.

После доработки 30.01.2023 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматривается состояние предразрушения тонкого адгезионного слоя конечной толщины в окрестности трещиноподобного дефекта. Предлагается учитывать гидростатическое давление, формирующее энергию деформации объема, для нахождения критического состояния. Критическое значение J -интеграла для моды нагружения I+II предполагается зависимым от произведения энергии деформации объема и толщины слоя в торце адгезива. Предельное значение произведения энергии объема и толщины слоя при нагружении по моде I, а также критические значения J -интеграла для мод нагружения I и II определяют величину параметра разрыхления конкретного адгезива в предлагаемом критерии разрушения.

Ключевые слова: линейный параметр, энергетическое произведение, энергия деформации объема, J -интеграл, метод конечных элементов

DOI: 10.31857/S0572329923600019, EDN: KPBBKN

Введение. В силу того, что критические значения J -интегралов для адгезионных слоев при модах I и II существенно отличаются [1, 2], рассмотрим возможное влияние гидростатического давления на предел прочности трещиноподобных дефектов в адгезионных слоях при моде нагружения I+II. Принимаем, что напряженное состояние адгезионного слоя регулярно и определяется конечными значениями тензора напряжений в рамках модели “слоя взаимодействия” [3]. В этом случае поток упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта определяется J -интегралом, который представим в виде энергетического произведения (ЭП) равного произведению удельной свободной энергии и толщины слоя δ_0 [4]. В силу конечных значений тензора напряжений при любых конечных значениях линейного параметра δ_0 возможно выделение энергии деформации формы и энергии деформации объема, определяемой через гидростатическое давление. При чистом сдвиге адгезионного слоя критическое значение J -интеграла определяет поток упругой энергии нагружения по моде II.

1. Формулировка критерия. Предельное состояние трещиноподобного дефекта в линейно упругом теле связывается концепцией J -интеграла с потоком упругой энергии в вершину трещины [5–7]. Для трещины в виде математического разреза поток упругой энергии G в случае смешанной моды нагружения I+II определяется через квадрат коэффициента интенсивности напряжений $K^2 = K_I^2 + K_{II}^2$ [6, 7]:

Таблица 1. Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
E (GPa)	4.9	1.85	0.49
ν	0.35	0.33	0.3
G_{IC} (N/m)	200	430	2360
G_{IIC} (N/m)	380	4700	5410

$$G = \alpha \frac{K^2}{E} = \alpha (G_I + G_{II}) \quad (1.1)$$

где $\alpha = 1$ для плоского напряженного состояния; $\alpha = 1 - \nu^2$ для состояния плоской деформации; E — модуль упругости тела; ν — коэффициент Пуассона; K_I — коэффициент интенсивности напряжений для нагружения по моде I; K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений для нагружения по моде II. Критическое значение потока энергии G_C определяет предельное состояние трещины. Экспериментальное подтверждение критерия в виде (1.1) для однородных тел является проблематичным в силу неустойчивости трещины моды II и отсутствия режима ее устойчивого подрастания.

Отметим, что аппарат линейной механики разрушения применяется для расчетов прочности адгезионных слоев композитов [1, 2]. В силу того, что механические свойства адгезивов могут существенно отличаться от свойств сопрягаемых ими тел, возможно обеспечить устойчивое подрастание трещины моды II и определить соответствующий критический поток упругой энергии G_{IIC} [8]. Согласно данным работ [1, 2] приведем в табл. 1 механические свойства ряда адгезивов.

Из табл. 1 видим, что критериальная характеристика в виде (1.1) не является корректной в силу существенного различия двух предельных значений G_{IC} и G_{IIC} . В работе [9] предложено рассматривать в качестве критерия следующую взаимосвязь между потоками упругой энергии:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}} \right)^{\alpha_2} = 1 \quad (1.2)$$

где α_1, α_2 — постоянные материала.

Постоянные α_1, α_2 , следуя работе [10], полагаются равными: $\alpha_1 = \alpha_2$. Для нахождения постоянной α_1 строится набор кривых при различных значениях α_1 и проводится сравнение с тестируемым материалом [2, 10, 11]. В случае рассмотрения двух постоянных в критерии (1.2) их нахождение не очевидно.

Рассмотрим альтернативный подход к критериям (1.1), (1.2). Положим, что процесс разрушения локализуется в адгезиве с регулярным распределением напряженно-деформированного состояния по его толщине δ_0 . В случае обратимого деформирования значение J-интеграла равно потоку упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта и принимает вид [4]:

$$G = \delta_0 \phi \quad (1.3)$$

где ϕ — изменение удельной свободной энергии на торце адгезионного слоя; $\delta_0 \phi$ — энергетическое произведение.

Представим приращение удельной свободной энергии в виде суммы инвариантных слагаемых [12]:

$$\varphi = (3(1 - 2\nu)\sigma^2 + (1 + \nu)\tau^2)/(2E) = \varphi^\sigma + \varphi^\tau \quad (1.4)$$

где $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – гидростатическое давление; $\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$ – свертка девиаторных составляющих тензора напряжений; φ^σ – изменение свободной энергии деформации объема; φ^τ – изменение свободной энергии деформации формы.

Таким образом энергетическое произведение (1.3) представимо в виде суммы энергетических произведений энергии деформации объема $\delta_0\varphi^\sigma$ и энергии деформации формы $\delta_0\varphi^\tau$.

В силу того, что в окрестности трещиноподобного дефекта при нагружении по моде I реализуется высокое положительное гидростатическое давление, а при нагружении по моде II гидростатическое давление равно нулю, считаем, что гидростатическое давление является причиной существенного различия в критических значениях J-интеграла при нагружении адгезионного слоя по моде I и моде II. Положительное гидростатическое давление способствует “разрыхлению” адгезива и уменьшает его прочностные свойства. С другой стороны, гидростатическое сжатие материального объема не должно приводить к его разрушению.

С учетом (1.3), (1.4) критерий разрушения сформулируем в следующем виде:

$$\delta_0((1 + \text{sign}(\sigma)\beta)\varphi^\sigma + \varphi^\tau) = G_{\text{IC}} \quad (1.5)$$

где β – параметр, характеризующий “разрыхление” адгезива.

В критическом состоянии моды II, когда $\varphi_{\text{IC}}^\sigma = 0$ из (1.5) приходим к тождеству: $\delta_0\varphi_{\text{IC}}^\tau = G_{\text{IC}}$.

В силу того, что в критическом состоянии моды I $\delta_0(\varphi_{\text{IC}}^\sigma + \varphi_{\text{IC}}^\tau) = G_{\text{IC}}$ из (1.5) и последнего равенства получаем представление параметра в виде

$$\beta = \frac{G_{\text{IC}} - G_{\text{IC}}}{\delta_0\varphi_{\text{IC}}^\sigma} \quad (1.6)$$

Из данной формулы следует, что при известных критических значениях G_{IC} и G_{IIC} параметр β определяется критическим для данной моды I значением $\varphi_{\text{IC}}^\sigma$ и толщиной слоя.

2. Определение параметра адгезива. Рассмотрим нахождение параметра β для адгезионных слоев, представленных в табл. 1. В этом случае необходимо определить напряженное состояние в вершине адгезионного слоя при его нормальном разрыве для малой, но конечной толщины δ_0 .

На рис. 1 представлена схема нагружения слоистого композита длиной $l + a$, состоящего из трех тел. Тела 1 и 2 с одинаковыми толщинами h и механическими свойствами связаны адгезионным слоем 3 толщиной δ_0 с отличными от сопрягаемых им тел свойствами. Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных перемещений, на левых торцах тел действует симметричная распределенная нагрузка P . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки. Данная схема определяет стандартный для эксперимента ДКБ-образец и используется для нахождения прочностной характеристики – критического потока упругой энергии или J_c -интеграла согласно схеме податливости Ирвина [1].

Вариационные уравнения равновесия системы двух тел, связанных слоем [3], в силу симметрии задачи преобразуются в вариационное уравнение для тела 1 [14]:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_l \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} u dl \quad (2.1)$$

где S_1 – площадь тела 1; $\mathbf{u}$ – векторное поле перемещений тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор средних напряжений; $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор средних деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0} \quad (2.2)$$

u_s^+ – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя; $s = 1, 2$; L_1 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; $\cdot$ – скалярное умножение. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. При линейно упругом деформировании слоя связь средних напряжений и деформаций определяется законом Гука:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right) \quad (2.3)$$

где E_3 , ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя; $\bar{\varepsilon}$ – объемная деформация слоя; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Определяющие соотношения тел будем рассматривать в форме закона Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \varepsilon \delta_{ij} \right) \quad (2.4)$$

где E_1 , ν_1 – модуль упругости и коэффициент Пуассона; ε – объемная деформация.

Уравнение (2.1) совместно со связями (2.2)–(2.4) и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{12} = -P; \quad x_1 = -a, \quad x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h] \\ \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{12} = 0; \quad x_1 = [-a; l], \quad x_2 = \delta_0/2 + h \\ u_1 &= 0, \quad u_2 = 0; \quad x_1 = l, \quad x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h] \\ \sigma_{11} &= 0 \quad \sigma_{12} = 0; \quad x_1 = [-a; 0], \quad x_2 = \delta_0/2 \end{aligned}$$

является замкнутым, однозначно определяет поле перемещений тела и его напряженное состояние. Согласно (2.2), (2.3) находится напряженное состояние адгезионного слоя. Задача может быть решена численным методом. В работе используем метод конечных элементов (МКЭ) [15] с квадратичным распределением поля перемещений по элементу в состоянии плоской деформации. Размер грани элемента в концевой зоне адгезионного слоя соответствовал линейному параметру δ_0 .

Согласно данным работы [1] рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a = 0.055$ м, $h = 0.0127$ м, $b = 0.025$ м, $l = 0.245$ м, $E_1 = 200$ ГПа, $\nu_1 = 0.3$, где b – толщина образца в направлении нормали к рассматриваемому сечению.

Следуя работам [16, 17] приведем выражение J-интеграла для ДКБ-образца, найденное из решения 2D задачи для модели слоя нулевой толщины:

$$J_1 = \frac{12(F/b)^2 (1 - \nu_1^2)}{h E_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + 0.673 \frac{h}{a} \right)^2 \quad (2.5)$$

Таблица 2. Критические значения силы

F_{cr} (N)		
Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
1078	1580	3702

Таблица 3. Сходимость энергетического произведения

δ_0 (m)	$\delta_0 \Phi_{IC}$ (N/m)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
10^{-3}	207	488	3105
10^{-4}	194	432	2541
10^{-5}	190	415	2330
10^{-6}	193	418	2295

где $F = Pbh$ – внешняя сила.

Из (2.5) и связи $J_{IC} = G_{IC}$ найдем значение критической силы:

$$F_{cr} = b \sqrt{\frac{G_{IC} h E_1}{12(1 - \nu_1^2)}} \left(\frac{a}{h} \left(1 + 0.673 \frac{h}{a} \right) \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Результаты расчетов по (2.6) с учетом данных табл. 1 и заявленных характеристик консолей поместим в табл. 2.

Полученные критические значения силы соответствуют значениям начала роста трещины в адгезиве, найденным по R-кривым, согласно работе [1]. Критическое значение распределенной внешней касательной нагрузки для граничного условия определяем в виде: $P = F_{cr}/(bh)$.

Результаты расчетов критического энергетического произведения для известной критической силы в случае различных толщин слоя при решении задачи (2.1)–(2.4) МКЭ поместим в табл. 3.

Сравнение результатов табл. 3 со значением G_{IC} из табл. 1, показывает, что решение МКЭ для относительно тонкого слоя с учетом осевых напряжений приводит практически к одинаковому результату (с точностью до 4%). Таким образом значение ЭП для тонких, но имеющих конечную толщину слоев, соответствует известным 2D решениям по нахождению J-интеграла для классической модели трещины в виде математического разреза.

В табл. 4 поместим результаты расчетов из определения (1.4) зависимости предельного значения энергетического произведения энергии деформации объема $\delta_0 \Phi_{IC}^o$ от толщины слоя для F_{cr} МКЭ.

Из результатов расчетов видно, что при уменьшении толщины слоя, как и для ЭП, имеет место вычислительная сходимость характеристики $\delta_0 \Phi_{IC}^o$. Однако в слое нулевой толщины выделение энергетического произведения энергии формы на торце слоя не имеет смысла, а ее прямое экспериментальное определение не очевидно.

В табл. 5 поместим значения коэффициента β для рассмотренных адгезивов. Значения критических потоков упругой энергии G_{IC} и G_{IIC} , брались согласно данным табл. 1. Критическое значение энергетического произведения энергии деформации объема определялось согласно данным табл. 4 для $\delta_0 = 10^{-6}$ м.

Таблица 4. Сходимость значения энергетического произведения энергии деформации объема

δ_0 (м)	$\delta_0 \Phi_{IC}^\sigma$ (Н/м)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
10^{-3}	148	330	1949
10^{-4}	135	287	1580
10^{-5}	130	274	1443
10^{-6}	132	276	1420

Таблица 5. Значение коэффициента β для адгезивов

β		
Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
1.4	15.5	2.1

Отметим, что для нахождения коэффициента β согласно формуле (1.6) необходимы критические значения J -интеграла для нагружения адгезионного слоя по моде I и моде II. Данные характеристики могут быть получены в результате стандартных экспериментов над компактными образцами для классической модели трещины в виде математического разреза с сингулярным распределением поля напряжений. Нахождение критического значения энергетического произведения энергии объема возможно только для модели с конечным напряженным состоянием разрушаемого адгезионного слоя. В этом случае существенным будет значение коэффициента Пуассона адгезива. Так уменьшение коэффициента Пуассона для адгезива Sikaforce 7752 до нуля приведет к уменьшению энергетического произведения энергии объема с 1420 Н/м до 783 Н/м при неизменном значении J -интеграла. Таким образом коэффициент Пуассона предельно тонкого адгезионного слоя оказывает влияние на коэффициент β .

Нулевой коэффициент Пуассона для адгезива в рамках рассматриваемой постановки (2.1)–(2.4) приводит к аналитическому решению в рамках теории пластин Миндлина–Рейснера [18, 19] для тела 1. В этом случае имеет место следующее распределение напряжений на торце тонкого адгезионного слоя [14]:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} &= \frac{2(F/b)\sqrt{6(1+\nu_1)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{(1-\nu_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ \bar{\sigma}_{11}|_{x_1=0} &= \frac{12(F/b)}{5\sqrt{\delta_0 h}} \left(\frac{E_3}{E_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{h} \sqrt{(1-\nu_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) (\sqrt{6(1+\nu_1)}^{\frac{3}{2}} - 1)\end{aligned}$$

Таким образом, в силу существенного различия в модулях упругости рассматриваемых тел: $E_3/E_1 \approx 2.5 \times 10^{-3}$, гидростатическое давление на торце слоя будет формировать напряжение отрыва. При этом напряженное состояние в слое может быть найдено в рамках упругих связей Прандтля [20, 21]. Энергетическое произведение энергии объема в этом случае будет равно:

$$\delta_0 \Phi_{IC}^\sigma = \frac{4(F/b)^2(1-\nu_1^2)}{hE_1} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \frac{h}{a} \right)^2 \quad (2.7)$$

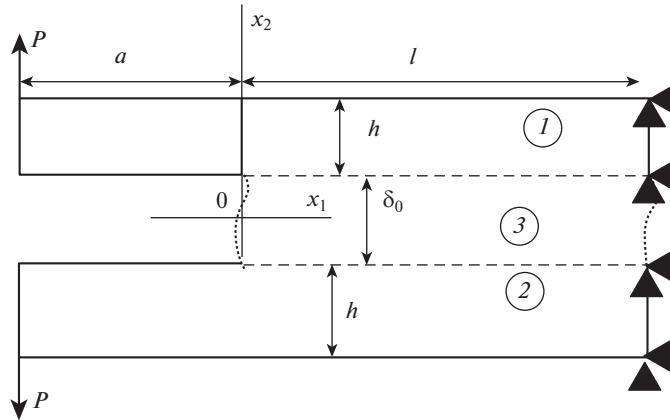


Рис. 1. Модель ДКБ-образца.

Представление (2.7) не зависит от свойств адгезива и принимает значение 744 Н/м, что на 5% отличается от расчетного значения по МКЭ для $\delta_0 = 10^{-6}$ м.

Заключение. Предложена система критериев (1.4)–(1.6), отражающая влияние гидростатической составляющей напряжений на экспериментально установленное существенное различие критических значений потоков энергии через торцевую часть адгезива, ослабленного трещиноподобным дефектом, при нагружениях по моде I и моде II.

Использование данных критериев возможно для предельно тонких адгезионных слоев с регулярным распределением поля напряжений по длине слоя. Для конкретизации критерия разрушения материала адгезионного слоя необходимы критические значения J-интеграла для мод нагружения I и II. Нахождение энергетического произведения энергии объема возможно из решения задачи (2.1)–(2.4) с учетом (2.6) и анализом вычислительной сходимости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S.* Comparative evaluation of the double-cantilever beam and tapered double-cantilever beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // *Int. J. Adhes.* 2016. V. 67. P. 103–111. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032>
2. *Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G.* Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *Int. J. Fract.* 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
3. *Glagolev V.V., Markin A.A.* Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *Int. J. Solids Struct.* 2019. V. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
4. *Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A.* Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>
5. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Нелинейная механика разрушения. Самара: Сам. ун-т, 2001. 630 с.

7. *Kanninen M.F., Popelar C.H.* Advanced fracture mechanics. N.Y.: Oxford University Press, 1985. 563 p.
8. *Campilho R.D.S.G., Pinto A.M.G., Banea M.D., da Silva L.F.M.* Optimization study of hybrid spot-welded/bonded single-lap joints // *Int. J. Adhes.* 2012. V. 37. P. 86–95.
<https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2012.01.018>
9. *Wu E.M., Reuter R.C.J.* Crack extension in fiberglass reinforced plastics. University of Illinois TAM Report № 275. 1965.
<https://doi.org/10.21236/ad0613576>
10. *Alfano G., Crisfield M.A.* Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001. V. 50. № 7. P. 1701–1736.
<https://doi.org/10.1002/nme.93>
11. *Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sánchez-Arce I.J., Madani K., Prakash C.* Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts // *Processes.* 2022. V. 10. № 12. P. 2730.
<https://doi.org/10.3390/pr10122730>
12. Хан Х.Г. Теория упругости. Основы линейной теории. М.: Мир, 1988. 343 с.
13. *Irwin G.R., Kies J.A.* Critical energy rate analysis of fracture strength // *Welding J. Res. Suppl.* 1954. V. 33. № 4. P. 193–198.
14. *Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.* On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation // *PNR-PU Mech. Bulletin.* 2022. № 3. P. 116–124.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
15. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
16. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
17. *Andrews M.G., Massabó R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.
<https://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013>
18. *Mindlin R.D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18. P. 31–38.
https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4_29
19. *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates // *Appl. Mech. Rev.* 1985. V. 38. № 11. P. 1453–1464.
<https://doi.org/10.1115/1.3143699>
20. *Prandtl L., Knauss W.G.* A thought model for the fracture of brittle solids // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. P. 105–109.
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>
21. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1968. № 6. С. 87–99.