

ISSN 1024-7084

Номер 4

Июль - Август 2023



*ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК*

# МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



# СОДЕРЖАНИЕ

## Номер 4, 2023

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Андрей Геннадьевич Куликовский (к 90-летию со дня рождения)                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 3   |
| Расчеты сжатия сферической слоистой системы ударными волнами<br>с учетом переноса теплового излучения в кинетической модели<br><i>С. А. Грабовенская, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков</i>                                                                                                                                                                                 | 5   |
| Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя<br><i>И. В. Стурова</i>                                                                                                                                                                                                                                                                          | 14  |
| Экспериментальное исследование структуры возмущений от двух импульсных<br>источников в сверхзвуковом пограничном слое пластины<br><i>Л. В. Афанасьев, Ю. Г. Ермолаев, А. Д. Косинов, В. Л. Кочарин,<br/>Н. В. Семенов, А. А. Яцких</i>                                                                                                                                   | 27  |
| Резонансное воздействие периодической последовательности плазменных<br>актуаторов при управлении течением в пограничном слое<br>на стреловидном крыле<br><i>С. В. Мануйлович</i>                                                                                                                                                                                         | 37  |
| Структура течения и теплообмен в стационарном газокапельном потоке<br>за точкой падения ударной волны на плоскую стенку<br><i>И. В. Голубкина, А. Н. Осипцов</i>                                                                                                                                                                                                         | 50  |
| Обтекание тел запыленным газом при рассеянии отраженных частиц<br><i>С. В. Панфилов, Д. А. Романюк, Ю. М. Циркунов</i>                                                                                                                                                                                                                                                   | 64  |
| Неизотермическое течение жидкости в скважине при индукционном<br>нагреве обсадной колонны<br><i>Ф. Ф. Давлетшин, Р. З. Акчурина, Р. Ф. Шарафутдинов, Д. Ф. Исламов</i>                                                                                                                                                                                                   | 81  |
| Численное исследование влияния структуры системы трещин на фильтрацию<br>жидкости в пороупругой среде<br><i>Д. Ю. Легостаев, С. П. Родионов</i>                                                                                                                                                                                                                          | 93  |
| Исследование механизма взаимодействия углеводородного пламени<br>с электрическим полем<br><i>П. А. Власов, И. Л. Панкратьева, В. А. Полянский</i>                                                                                                                                                                                                                        | 108 |
| Формирование пространственных внутренних волн за телом,двигающимся<br>в стратифицированной вязкой жидкости<br><i>П. В. Матюшин</i>                                                                                                                                                                                                                                       | 117 |
| Особенности формирования факела при столкновении двух ламинарных<br>газовых струй<br><i>В. В. Козлов, Ю. А. Литвиненко, М. М. Катасонов, Д. В. Сарычев,<br/>А. Г. Шмаков</i>                                                                                                                                                                                             | 131 |
| Численное моделирование сверхзвукового потока с областью тепловыделения<br>продольно-поперечным разрядом<br><i>К. Н. Корнев, А. А. Логунов, В. М. Шибков</i>                                                                                                                                                                                                             | 137 |
| Исследование режимов теплообмена в дозвуковых струях диссоциированного<br>азота высокочастотного индукционного плазматрона при дополнительном<br>нагреве поверхности лазерным излучением<br><i>С. А. Васильевский, С. С. Галкин, А. Ф. Колесников, М. А. Котов,<br/>И. В. Лукомский, Н. Г. Соловьев, Е. С. Тептеева, А. В. Чаплыгин,<br/>А. Н. Шемякин, М. Ю. Якимов</i> | 146 |
| Анализ автоколебательных процессов в каверне с открытым типом течения<br>на основе данных вихреразрешающих расчетов<br><i>Б. Н. Даньков, А. П. Дубень, Т. К. Козубская</i>                                                                                                                                                                                               | 156 |



**Андрей Геннадьевич Куликовский**  
**(к 90-летию со дня рождения)**

DOI: 10.31857/S1024708423700059, EDN: WMDFRJ



18 марта 2023 г. исполнилось 90 лет выдающемуся ученому-механику, академику Андрею Геннадьевичу Куликовскому.

В 1955 г. Андрей Геннадьевич окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, в 1958 г. окончил аспирантуру по кафедре гидромеханики и защитил кандидатскую диссертацию (научный руководитель Л.И. Седов). После окончания аспирантуры был принят на работу в отдел механики Математического института им В.А. Стеклова РАН, где работает по настоящее время.

А.Г. Куликовским получены основополагающие результаты в различных разделах механики.

Начало научной деятельности А.Г. Куликовского совпало по времени с возникновением новой науки под названием магнитная гидродинамика. Это было время, когда вырабатывались и шлифовались новые подходы к изучению сложных моделей механики сплошной среды и, в частности, моделей, описываемых нелинейными гиперболическими уравнениями. А.Г. Куликовским исследованы нелинейные волны Римана и возникновение ударных волн в процессе их опрокидывания. Совместно с Г.А. Любимовым опубликована монография “Магнитная гидродинамика” (1962 г.), содержащая основные понятия и отражавшая уровень этой науки на этот период времени.

Несколько позже (1968 г.) совместно с Г.А. Любимовым и А.А. Барминым были теоретически предсказаны и исследованы разрывы — фронты ионизации и рекомбинации. С одной стороны этих разрывов газ неэлектропроводный, а с другой стороны — электропроводный, движения которого описываются уравнениями магнитной гидродинамики. Эти разрывы требуют выполнения на них дополнительных граничных условий, получаемых из требования существования структуры разрывов. Число требований зависит от скорости разрыва. А.Г. Куликовским было показано, что не только для упомянутых разрывов, но и при очень общих условиях, число дополнительных соотношений на разрыве, получаемых из требования существования структуры, обеспечивает эволюционность разрыва.

В последующие годы опыт, накопленный при решении задач магнитной гидродинамики, был применен при построении и изучении других моделей механики сплошной среды. В семидесятые-восемидесятые годы А.Г. Куликовский совместно с Е.И. Свешниковой получили ряд ярких результатов при изучении нелинейных волн в слабоанизотропных упругих средах и разрывных решений гиперболических уравнений. Этим результатам посвящена монография “Нелинейные волны в упругих средах”. Совместно с Е.И. Свешниковой изучались фронты затвердевания, состояние перед которыми соответствует среде без касательных напряжений, а состояние позади фронта разрыва — упругая среда. На таких разрывах, так же, как и в случае фронтов ионизации и рекомбинации, требуются дополнительные соотношения, число которых зависит от скорости их распространения в соответствии с требованиями их эволюционности.

В работах, выполненных А.Г. Куликовским совместно с А.П. Чугайновой, исследовались разрывы и неединственность решений задачи Римана в нелинейно-упругих средах. В этих задачах существенную роль играют мелкомасштабные процессы. Показано, что структурой обладает много разнотипных разрывов. Если для построения решения задачи Римана использовать разрывы со стационарной структурой, то решение неединственно. Детальные расчеты с учетом мелкомасштабных процессов показали, что возникает всегда одно устойчивое решение. Это послужило основанием включить требование устойчивости структуры разрыва в понятие допустимости разрыва (при этом структура может быть нестационарной).

За результаты, полученные при изучении нелинейных волн в сплошных средах, в 2003 г. А.Г. Куликовскому (в составе авторского коллектива) присуждена Государственная премия Российской Федерации.

Еще одно направление исследований связано с устойчивостью и развитием возмущений в протяженных областях. Показано, что в случае однородного течения или состояния на бесконечном отрезке  $x$ , неустойчивость может проявляться в двух формах: краевой, которая определяется взаимодействием уравнений с граничным условием, и глобальной, определяемой усилением волн, движущихся в направлении другой границы и отражающихся от нее. За эти результаты в 1967 г. А.Г. Куликовскому была присуждена премия С.А. Чаплыгина. В развитие этой темы последовал цикл работ, касающихся установления критериев неустойчивости и развития возмущений на стационарном медленно меняющемся фоне.

Андрей Геннадьевич всегда уделял большое внимание педагогической деятельности. На протяжении многих лет он был профессором кафедры гидромеханики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, многие его ученики защитили кандидатские и докторские диссертации и стали известными учеными.

С 2013 по 2020 г. А.Г. Куликовский был главным редактором нашего журнала. Андрей Геннадьевич сохранил, приумножил традиции и высокие стандарты качества научных работ, которые сложились в “Механике жидкости и газа”. Редколлегия журнала от всей души поздравляет Андрея Геннадьевича с замечательным юбилеем, желает ему крепкого здоровья и творческого долголетия.

УДК 517.958:536.2

## РАСЧЕТЫ СЖАТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ СЛОИСТОЙ СИСТЕМЫ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© 2023 г. С. А. Грабовенская<sup>а</sup>, В. В. Завьялов<sup>а,\*</sup>, А. А. Шестаков<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. Е.И. Забабахина, Снежинск, Россия

\*e-mail: zvv68@vk.com

Поступила в редакцию 25.10.2022 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

В настоящее время численное моделирование является основным, а зачастую и единственным инструментом для детального описания некоторых физических явлений при исследовании процессов сжатия веществ ударными волнами. Изучение поведения ударных волн и волн разряжения на простейших модельных тестах помогает при анализе более сложных расчетов, например, задач инерциального термоядерного синтеза на лазерных установках. В работе рассмотрены сравнительные расчеты тестовой задачи, моделирующей сжатие ударными волнами сферической слоистой системы, состоящей из двух веществ.

**Ключевые слова:** слоистые системы, ударные волны, лучистый перенос

**DOI:** 10.31857/S102470842260083X, **EDN:** WJWGBS

Одним из направлений работ при исследовании процессов имплозии на лазерных установках является развитие технологии проведения численного моделирования мишеней для оптимизации постановки экспериментов с целью достижения условий термоядерного зажигания мишеней и получения новых экспериментальных данных. Так как аналитическое описание нелинейных процессов взаимодействия лазерного излучения с плазмой в большинстве задач затруднено, большую роль в изучении этих процессов играет математическое моделирование процессов имплозии. Особое место в теории нелинейных процессов занимают режимы с обострением — задачи, допускающие неограниченные решения в течение конечного промежутка времени. Такие режимы рассматривались отдельно для теплопроводности или газодинамики и использовались для изучения поведения экстремальных решений [1]. К ним относятся безударное сжатие в газовой динамике, задачи теплового взрыва, процессы кумуляции ударных волн и др. Моделирование совместной системы переноса излучения с газодинамикой может существенно влиять на поведение решений таких задач, в частности, сделать неограниченные решения ограниченными, но с дельтаобразным поведением основных величин. Поэтому возникает интерес к процессам, близким к режимам с обострением, но с одновременным учетом переноса излучения и газодинамики.

В работе [2] для тестирования многомерных программ, описывающих процессы радиационной газовой динамики (РГД), была предложена задача, моделирующая сжатие простейшей сферической слоистой системы, состоящей из двух веществ, и названная в дальнейшем “пульсар”. Особенностью задачи является резкое возрастание плотности при сжатии ударными волнами вещества в центре. При этом максимальная плотность достигается после прохождения третьей ударной волны. Такие режимы, когда средние плотности веществ вырастают на несколько порядков, по-видимому, можно отнести к задачам с обострением [1]. Задачи на сверхсильное сжатие, когда плотность вещества возрастает под воздействием ударных волн, называют сжатием с усилением [3], в отличие от задач, где максимальное сжатие вещества достигается после прохождения первой ударной волны с последующим затуханием амплитуды максимальной плотности.

Задача о сходящейся сферической ударной волне (УВ) была впервые решена немецким ученым Гудерлеем, работавшим в Лос-Аламосе в 1942 г. [4], и независимо от него Л.Д. Ландау и К.П. Станюковичем в 1944 г. [5]. В общей форме описание сферической УВ есть в книгах [6, 7]. В момент прихода УВ в центр происходит ее фокусировка и отражение от центра. При учете теп-

лопереноса вблизи фокусировки сходящейся УВ растут температурные градиенты, поэтому теплопроводность и излучение становятся ведущими механизмами диссипации энергии. Задача о сходящейся сферической УВ с учетом лучистой теплопроводности была решена Е.И. Забабахиным и В.А. Симоненко в 1965 г. [8], которые показали, что теплопроводность видоизменяет характер движения: вместо конечной плотности и бесконечной температуры возникают бесконечная плотность и конечная температура. За счет теплопроводности перед УВ появляется зона прогрева, в которой газ не только нагревается, но и начинает двигаться и уплотняться. Фронт этой зоны называют тепловым предвестником. Результаты этой работы были подтверждены численными расчетами, проведенными в работе [9], для сильной сходящейся сферической ударной волны с учетом нелинейной теплопроводности.”

Неограниченную кумуляцию можно получить и другими способами. В работе [10] показано, что в слоистой системе из чередующихся легких и тяжелых плоских слоев можно получить возрастание плотности и давления. Описание движения УВ в слоистой системе намного сложнее, чем в однородной среде, поэтому моделирование таких систем проводится, в основном, численными методами. В сферической слоеке степень кумуляции значительно выше, чем в плоской, поскольку УВ усиливается за счет суммы двух факторов: сферичности и слоистости.

В работе [3] рассмотрены задачи, моделирующие сжатие ударными волнами сферической слоистой системы, состоящей из нескольких веществ, при совместном счете лучистой теплопроводности и газодинамики. До выхода на стационарный режим основные газодинамические величины (температура, плотность, давление и скорости границ веществ) являются осциллирующими функциями. Возникающие под воздействием сильных ударных волн осцилляции всех величин очень резкие и для их качественного воспроизведения требуются достаточно прецизионные методы. В работе [3] приведены различные варианты задач с усилением при подвижной и неподвижной внешней границе, а также с вариацией граничных давлений и температур.

Данная статья посвящена решению одной из задач на сжатие с усилением из работы [3]. В отличие от [3], где она решалась в приближении лучистой теплопроводности, перенос излучения рассматривается в кинетической модели. Достоинством решаемой задачи является то, что при выходе на стационарный режим она имеет точное решение, а это позволяет сравнивать различные методики, моделирующие процессы РГД. Однако нестационарное точное решение данной задачи авторам не известно, поэтому вызывают интерес нахождение времен прихода ударной (SW – shock wave) и тепловой (HW – heat wave) волн в центр сферы и определение максимумов плотности и температуры, достигаемых при сверхсильном сжатии. Для нахождения максимальных значений плотности и температуры проведены расчеты на сгущающихся сетках.

Для сравнения в настоящей работе приведены результаты расчетов теста “пульсар” по трем схемам TVDR (Total Variation Diminishing Reconstruction), DDAD/St (Diamond Difference with the Artificial Dissipation) и St (Step). Хотя используемые разностные схемы построены на принципиально разных подходах, они, оставаясь в рамках Sn-метода, позволяют использовать экономичный алгоритм бегущего счета.

St-схема [11] является линейной положительной монотонной схемой первого порядка аппроксимации.

В TVDR-схеме [12, 13] методология TVD применяется для построения нелинейной реконструкции повышенного порядка аппроксимации (выше первого) по пространству искомой функции с сохранением положительности решения.

В DDAD/St-схеме предлагается улучшить монотонность схемы второго порядка аппроксимации по пространству за счет искусственной диссипации [14, 15]. Результаты по схеме DDAD/St для краткости в дальнейшем будем обозначать как DDAD.

Схемы повышенного порядка аппроксимации по пространству TVDR и DDAD позволяют получать удовлетворительные результаты на более грубых сетках, однако на осциллирующих решениях это может приводить к плохой сходимости итераций. Монотонные схемы первого порядка аппроксимации типа St-схемы, как правило, позволяют сделать итерационные процессы более устойчивыми. Для организации итерационного процесса применяется метод ВДЭПФ [15]. Аппроксимация по времени в применяемых схемах осуществляется с первым порядком точности.

Целями работы являются

1. нахождение максимальных значений плотностей и температур как в центре сферы, так и их средних значений по областям;
2. определение времен прихода ударной и тепловой волн в центр;
3. сравнение температуры вещества и радиационной температуры в центре.

## 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ РГД

Система уравнений РГД [7, 16] расщепляется по физическим процессам и на каждом шаге по времени моделируется в два этапа. На первом этапе решаются уравнения газовой динамики

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla P &= 0, \\ \rho \frac{dE}{dt} + P \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь  $t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — вектор газодинамической скорости,  $E(\rho, T)$  — удельная внутренняя энергия,  $T$  — температура вещества,  $P = p + p_r$  — полное давление,  $p(\rho, T)$  — газодинамическое давление,  $p_r = \frac{\sigma T_r^4}{3}$  — давление излучения,  $T_r = \sqrt[4]{\frac{1}{c\sigma} \int_{\Omega} I d\Omega}$  — радиационная температура,  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана,  $c$  — скорость света,  $I(\mathbf{r}, \Omega, t)$  — интенсивность излучения в момент времени  $t$  в направлении  $\Omega$ .

Газодинамическое движение рассчитывается в эйлерово-лагранжевой системе координат по методике [17].

На втором этапе решается система уравнений переноса теплового излучения для поглощающей и рассеивающей среды

$$\begin{aligned}\frac{\rho d}{cdt} \left( \frac{I}{\rho} \right) + \Omega \nabla I + (\alpha_c + \alpha_s) I &= \frac{\alpha_c}{4\pi} B + \frac{\alpha_s}{4\pi} \int_{\Omega} I d\Omega, \\ \rho \frac{dE}{dt} &= \alpha_c \left( \int_{\Omega} I d\Omega - B \right).\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_c(\rho, T)$  — коэффициент поглощения,  $\alpha_s(\rho, T)$  — коэффициент рассеивания,  $B(T) = c\sigma T^4$ .

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Шар радиусом  $0 \leq r \leq R_2 = 0.6$  см состоит из 2 физических областей (табл. 1). Внутренняя область 1 ( $0 \leq r \leq R_1 = 0.5$ ) состоит из вещества с плотностью  $\rho_1 = 0.02$  г/см<sup>3</sup>, внешняя область 2 ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) из вещества с плотностью  $\rho_2 = 1$  г/см<sup>3</sup>. Уравнение состояния вещества  $E = 0.81 T$  и  $P = 0.54\rho T$ . Начальная температура всей системы  $T = 0.00001$  кэВ, начальные скорости  $\mathbf{u} = 0$ . На внешней границе задано давление  $P = 10^7$  Бар и температура  $T = 0.1$  кэВ. В обеих областях —

$$\alpha_c = \frac{\rho}{5} \left[ \left( 1 + \frac{8.65}{\rho^{2/3} T^2} \right)^{3/2} - 1 \right] \text{ см}^{-1}, \quad \alpha_s = \frac{\rho}{5} \text{ см}^{-1}.$$

До выхода на стационарный режим все величины являются осциллирующими функциями, и при  $t \rightarrow \infty$  решение задачи выходит на постоянные значения

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 0, \quad P = 10^7 \text{ Бар}, \quad T = 0.1 \text{ кэВ}, \quad R_{1,st} = R_1 \sqrt[3]{\frac{\rho_1^0}{\rho_{st}}} \approx 0.11 \text{ см}, \\ R_{2,st} &= \sqrt[3]{\frac{1}{\rho_{st}} [R_1^3 \rho_1^0 + (R_2^3 - R_1^3) \rho_2^0]} \approx 0.37 \text{ см}, \quad \rho_{1,2} = \rho_{st} = \frac{299.868}{162} \approx 1.851 \text{ г/см}^3.\end{aligned}$$

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Расчеты проводились по двумерной программе в цилиндрических координатах на сгущающихся по обоим направлениям сетках до времени достижения максимальной средней плотности в первой области  $t = 0.12$  мкс. Константа сходимости итераций по температуре полагалась

Таблица 1. Состав системы

| Номер области                  | 1               | 2               |
|--------------------------------|-----------------|-----------------|
| Начальная плотность $\rho^0$   | 0.02            | 1               |
| Конечная плотность $\rho_{st}$ | 1.851           | 1.851           |
| Начальные радиусы $R_{1,2}$    | 0.5             | 0.6             |
| Конечные радиусы $R_{1,2,st}$  | 0.11            | 0.37            |
| Число ячеек на сетке N         | $25 \times 8$   | $100 \times 8$  |
| Число ячеек на сетке 2N        | $50 \times 15$  | $200 \times 15$ |
| Число ячеек на сетке 4N        | $100 \times 30$ | $400 \times 30$ |

Таблица 2. Результаты расчетов

| Схема | Сетка | $T_{\max}(t_{\max})$ | $\Delta T_{\max}$ | $\rho_{\max}(t_{\max})$ | $\Delta \rho_{\max}$ | $t_{HW}$ | $\Delta t_{HW}$ | $t_{SW}$ | $\Delta t_{SW}$ |
|-------|-------|----------------------|-------------------|-------------------------|----------------------|----------|-----------------|----------|-----------------|
| St    | N     | 0.361 (1.105)        | -11.3%            | 57.47 (1.171)           | -40.9%               | 0.425    | -34.4%          | 0.840    | 2.8%            |
| St    | 2N    | 0.386 (1.143)        | -5.2%             | 74.41 (1.175)           | -7.5%                | 0.466    | -28.1%          | 0.837    | 2.4%            |
| St    | 4N    | 0.403 (1.137)        | -0.93%            | 80.91 (1.175)           | 0.6%                 | 0.490    | -24.4%          | 0.825    | 0.98%           |
| DDAD  | N     | 0.409 (1.136)        | 0.49%             | 79.72 (1.171)           | -0.9%                | 0.585    | -12.8%          | 0.761    | -6.9%           |
| DDAD  | 2N    | 0.406 (1.133)        | -0.25%            | 78.14 (1.170)           | -1.7%                | 0.633    | -2.3%           | 0.818    | 0.1%            |
| DDAD  | 4N    | 0.407 (1.129)        | 0                 | 79.69 (1.165)           | -0.9%                | 0.651    | 0.46%           | 0.816    | -0.1%           |
| TVDR  | N     | 0.408 (1.137)        | 0.25%             | 78.46 (1.172)           | -2.4%                | 0.528    | -18.5%          | 0.802    | -1.8%           |
| TVDR  | 2N    | 0.407 (1.132)        | 0                 | 79.51 (1.168)           | -1.1%                | 0.610    | -5.9%           | 0.819    | 0.2%            |
| TVDR  | 4N    | 0.407 (1.129)        | 0                 | 80.42 (1.165)           | 0                    | 0.648    | 0               | 0.817    | 0               |

равной  $10^{-6}$ , квадратура по направлениям полета частиц — ES<sub>16</sub>. Шаг по времени варьировался, исходя из поведения решения, но не превышал 1 пс.

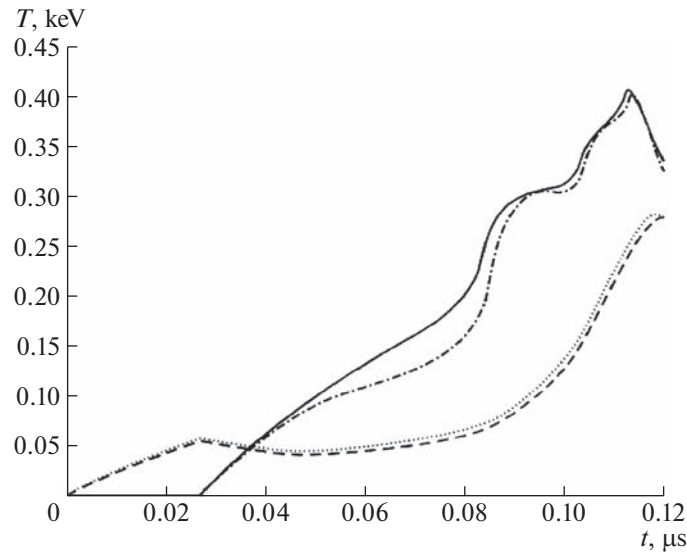
С момента прихода первой ударной волны в центр сферы после лагранжева этапа на каждом временном шаге в области 1 строилась равномерная по радиусу сетка, на которую пересчитывались все термодинамические величины.

Максимальные значения основных газодинамических величин (температуры, давления и плотности) достигаются в центре области 1. Так как система является оптически плотной, температуры вещества и радиационной температуры по областям совпадают и их отличие наблюдается только в центре в моменты максимального сжатия.

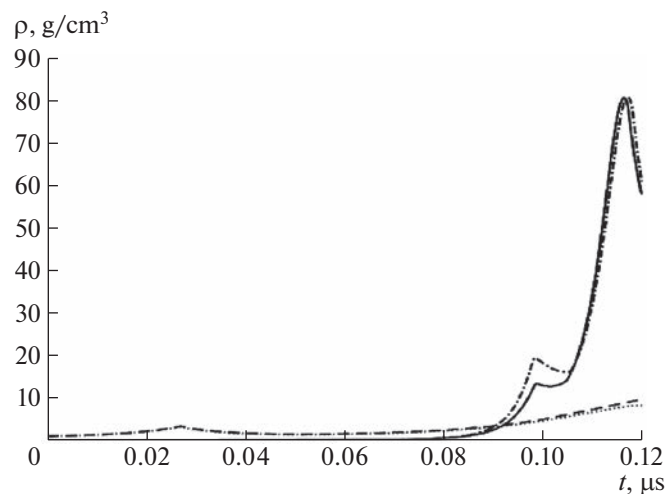
Результаты расчетов, а именно, времена достижения максимумов  $t_{\max}$  для средней температуры  $T_{\max}$  и средней плотности  $\rho_{\max}$  в области 1, времена прихода тепловой  $t_{HW}$  и ударной волн  $t_{SW}$  в центр сферы и их отличия  $\Delta$  в процентах от результатов по схеме TVDR на сетке 4N приведены в табл. 2. Средняя плотность и температура вещества вычисляются по формулам  $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i V_i / \sum_{i=1}^N V_i$ ,  $T = \sum_{i=1}^N T_i M_i / \sum_{i=1}^N M_i$ , где  $N$  — число ячеек разностной сетки,  $\rho_i, T_i$  — величины в центре ячейки,  $V_i, M_i$  — объем и масса ячейки.

Из таблицы видно, что расчеты на сетке 4N показали достаточно хорошее согласие (менее 1%) по максимумам средних величин в схемах St, TVDR и DDAD. На этой же сетке времена прихода тепловой и ударной волн в схемах TVDR и DDAD дают отличие менее 0.5%. Наибольшие отличия наблюдаются во временах прихода тепловой волны в расчетах по St схеме. Даже на сетке 4N эти расчеты дают отличие более 20%.

На рис. 1, 2 приведены зависимости от времени средних по областям плотности и температуры. Результаты по схеме DDAD на этих рисунках не приводятся, так как они визуально не различимы со схемой TVDR.



**Рис. 1.** Средняя температура по схемам St и TVDR на сетке 4N; 1 область: штрихпунктирная – St, сплошная – TVDR; 2 область: точечная – St, штриховая – TVDR.



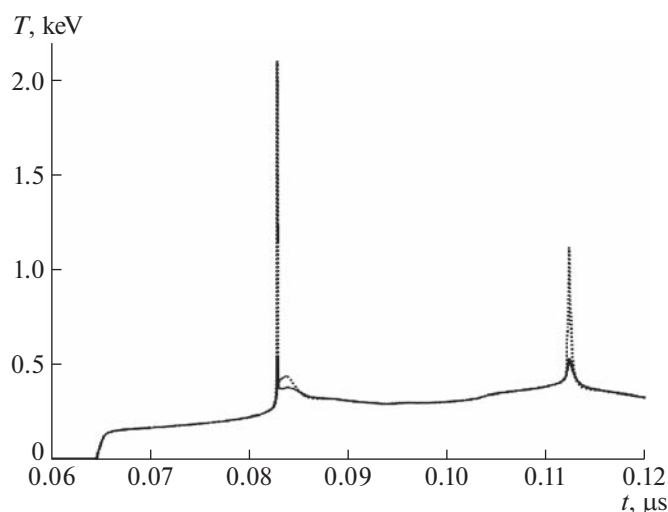
**Рис. 2.** Средняя плотность по схемам St и TVDR на сетке 4N; 1 область: штрихпунктирная – St, сплошная – TVDR; 2 область: точечная – St, штриховая – TVDR.

Из рис. 1 видно, что наибольшее отличие наблюдается при прогреве первой области, где разница между схемами St и TVDR в момент времени  $t = 0.07$  мкс достигает 20%. Однако в момент достижения максимума средней температуры разница уменьшается до 1%.

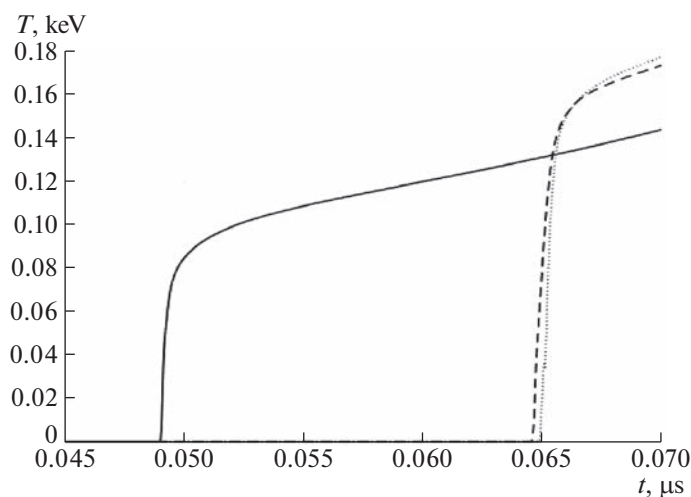
Из рис. 2 следует, что наибольшее отличие между схемами наблюдается в момент первого пика по плотности в первой области  $t = 0.1$  мкс и достигает 30%. Максимальные температуры отличаются менее 1%.

Как показано в работе [3] рассматриваемая система является оптически плотной, поэтому средние по областям температуры вещества и излучения не отличаются на протяжении всего времени счета. Однако в отдельных точках, в частности, в центральной точке температуры могут отличаться очень сильно, т.е. происходит “отрыв” температур. “Отрыв” наблюдается во всех схемах в моменты прихода ударных волн в центр и представлен на рис. 3.

Из рис. 3 вытекает, что температура вещества практически мгновенно за время  $\Delta t \approx 0.3$  нс вырастает на первом пике в центральной точке более чем в 10 раз с  $T \approx 0.2$  кэВ до  $T \approx 2.5$  кэВ и пре-



**Рис. 3.** Температура вещества и радиационная температура в центре на сетке 4N по схеме TVDR: точечная — температура вещества, сплошная — радиационная температура.



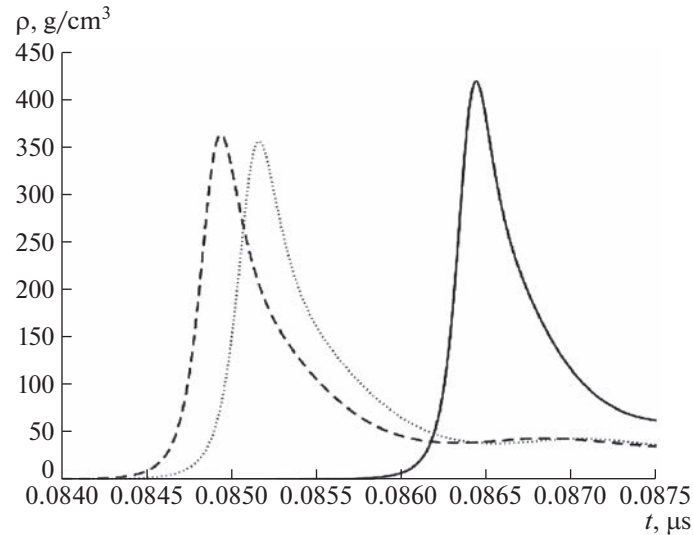
**Рис. 4.** Температура вещества и радиационная температура в центре на сетке 4N по схемам St, TVDR и DDAD: сплошная — St, штриховая — TVDR, точечная — DDAD.

вышает радиационную температуру  $T_r \approx 0.6$  кэВ более чем в 4 раза. Так как “отрыв” температур происходит в центре в нескольких точках и за очень короткий промежуток времени, он практически не сказывается на общем характер движения и средние по веществам величины.

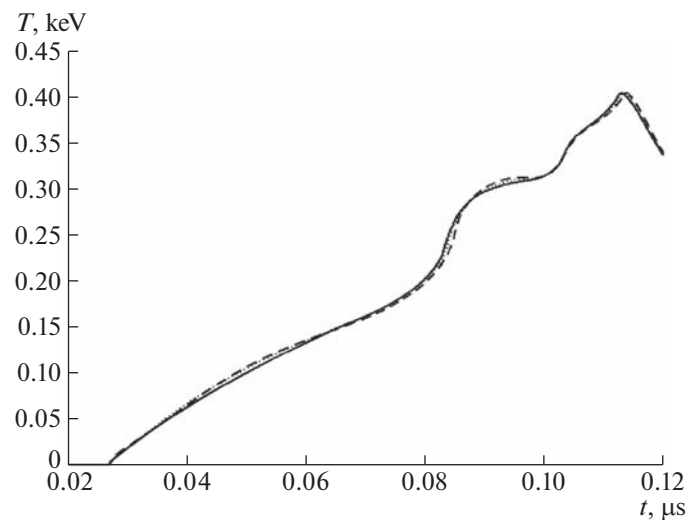
Наиболее чувствительными к порядку аппроксимации схем являются времена прихода первых тепловой и ударной волн в центр системы. На рис. 4, 5 представлены зависимости от времени температуры и плотности вещества в центральной точке для сравнения времен прихода первых тепловой и ударной волн по схемам St, TVDR и DDAD.

Из рис. 4 видно, что тепловые волны, полученные по схемам TVDR и DDAD, немного отличаются (примерно на 0.1%), и тепловая волна, описываемая St-схемой, значительно опережает волны, полученные по схемам повышенного порядка аппроксимации. Для получения времени прихода по St-схеме, совпадающим с временем по схемам TVDR и DDAD, необходима разностная сетка на два порядка подробнее.

Из рис. 5 видно, что плотность вещества за время  $\Delta t \approx 1$  нс вырастает в центральной точке более чем в  $10^4$  раз с  $\rho \approx 0.02$  г/см<sup>3</sup> до  $\rho \approx 350$  г/см<sup>3</sup>, и ударная волна, полученная с использованием



**Рис. 5.** Плотность вещества в центре на сетке 4N по схемам St, TVDR и DDAD: сплошная — St, штриховая — TVDR, точечная — DDAD.



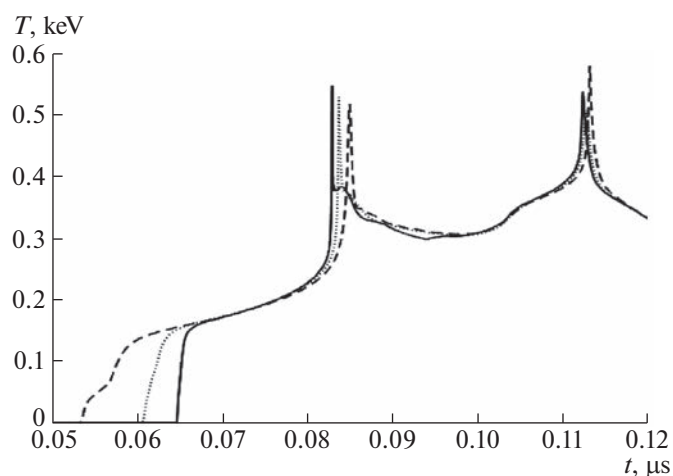
**Рис. 6.** Средние по первой области радиационные температуры на сетках N, 2N, 4N по схеме TVDR: штриховая — сетка N, точечная — сетка 2N, сплошная — сетка 4N.

St схемы, демонстрирует значительное отставание. Для получения удовлетворительного результата по St схеме необходима более подробная разностная сетка.

На рис. 4, 5 можно наблюдать, что максимальные плотности и температуры в центре значительно более чувствительны к разностной сетке и точности схемы, чем их средние величины. Для примера на рис. 6, 7 приведены зависимости от времени радиационных температур в центре и средних по первой области на сгущающихся сетках по схеме TVDR.

Рисунок 6 демонстрирует, что средние температуры на сгущающихся сетках близки между собой, и дальнейшее увеличение числа ячеек разностной сетки не требуется.

Из рис. 7 можно сделать вывод, что температуры в центральной точке отличаются сильнее, чем средние величины больше всего в моменты прихода тепловой и ударных волн в центр сферы. Для их описания желательно использовать схемы повышенного порядка аппроксимации. При увеличении числа ячеек разностной сетки наступает сходимость по времени прихода и амплитудам тепловых и ударных волн во всех рассмотренных схемах.



**Рис. 7.** Радиационные температуры в центре на сетках N, 2N, 4N по схеме TVDR: штриховая — сетка N, точечная — сетка 2N, сплошная — сетка 4N.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача, моделирующая сжатие ударными волнами с учетом излучения сферической системы, состоящей из двух веществ. Приведены результаты расчетов по трем схемам на нахождение максимальных значений плотностей и температур как в центре сферы, так и их средних значений по областям, а также определение времен прихода ударной и тепловой волн в центр.

В данной задаче плотность вещества за промежуток времени  $\Delta t \approx 1$  нс возрастает в центральной точке более чем в  $10^4$  раз, а температура вещества за промежуток времени  $\Delta t \approx 0.3$  нс увеличивается более чем в 10 раз, и превышает в точке максимума радиационную температуру примерно в 4 раза, т.е. происходит “отрыв” температур. Такие режимы с обострением, когда плотности веществ вырастают на несколько порядков, предъявляют к численным методикам очень высокие требования. В подобных задачах даже, если средние по веществам плотности и температуры достаточно близки между собой, плотности и температуры в отдельных точках при имплозии могут существенно отличаться, особенно в моменты прихода тепловой и ударных волн.

В работе приведены результаты сравнительных расчетов по схемам повышенного порядка аппроксимации TVDR и DDAD, а также монотонной St-схеме первого порядка. Из представленных расчетов следует, что схемы повышенного порядка аппроксимации по пространству TVDR и DDAD показали достаточно хорошее согласие на сгущающихся сетках по максимумам средних величин (менее 1%). Данные по времени прихода тепловой и ударной волн в схемах TVDR и DDAD дают отличие менее 0.5%. Существенно большие отличия наблюдаются во временах прихода тепловой волны в расчетах по St схеме. Для получения времени прихода тепловой волны в St схеме, согласованного со схемами TVDR и DDAD, необходима сетка на два порядка подробнее, что приводит к существенному увеличению времени счета и затрат по памяти на ЭВМ.

Несмотря на то что рассматриваемая система является оптически плотной, модель лучистой теплопроводности дает заметно отличающиеся результаты. Так для сетки 4N в момент максимального сжатия отличие средней плотности в области 1 в приближении лучистой теплопроводности достигает 9.5%, максимальной средней температуры — 1.8%. Отличие времени прихода тепловой волны от кинетической модели примерно 2 нс, по времени прихода ударной волны — примерно 0.7 нс.

Рассмотренная задача и ее модификации могут быть использованы для исследования процессов сжатия веществ ударными волнами и тестирования методик РГД.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов В.П., Михайлов В.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. С. 477.

2. *Шестаков А.А.* Об одной тестовой задаче сжатия слоистой системы с учетом переноса излучения в различных приближениях // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2017. Вып. 4. С. 25–31.
3. *Шестаков А.А.* Тестовые задачи на сжатие сферических слоистых систем ударными волнами // Математическое моделирование. 2020. Т. 32. № 12. С. 29–42.
4. *Guderley K.G.* Strake kugelige und zylindrische Verdichtungsstosse in der Nane des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. 1942. B. 19. Lfg 9. P. 302–312.
5. *Ландау Л.Д., Станюкович К.П.* Об изучении детонации конденсированных ВВ // ДАН СССР. 1945. Т. 46. № 9. С. 399–402.
6. *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955. 804 с.
7. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
8. *Забабахин Е.И., Симоненко В.А.* Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 334–336.
9. *Махмудов А.А., Попов С.П.* Влияние теплопроводности на сходящуюся к центру симметрии сильную ударную волну // ИЗВ.РАН. Механика жидкости и газа. 1980. № 2. С. 167–170.
10. *Забабахин Е.И., Забабахин И.Е.* Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988, 173 с.
11. *Карлсон Б.* Численное решение задачи кинетической теории нейтронов. В кн.: Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1963. С. 243–258.
12. *Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А.* Применение TVD-подхода к DSn-методу решения уравнения переноса теплового излучения // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
13. *Шестаков А.А.* TVDR-схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2019. Вып. 2. С. 17–36.
14. *Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Писарев В.Н., Стародумов О.И., Шестаков А.А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
15. *Гаджиев А.Д., Селезнев В.Н., Шестаков А.А.* DSn-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели нейтронов // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 33–46.
16. *Суржигов С.Т.* Тепловое излучение газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 544 с.
17. *Бисярин А.Ю., Грибов В.М., Зубов А.Д., Неуважаев В.Е., Первиненко Н.В., Фролов В.Д.* Комплекс ТИГР для расчета двумерных задач математической физики // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1984. Вып. 3. С. 34–41.

УДК 532.5.031:532.591

## ДЕЙСТВИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИСТОЧНИКА В ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СДВИГОВОГО СЛОЯ

© 2023 г. И. В. Стурова\*

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

*\*E-mail: sturova@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Решена двумерная нестационарная задача о развитии волнового движения в двухслойной жидкости конечной глубины, ограниченной сверху свободной поверхностью. Рассмотрены случаи, когда в невозмущенном состоянии один из слоев покоится, а в другом (приповерхностном или придонном) горизонтальная скорость потока линейно меняется по глубине. Определены дисперсионные зависимости и групповые скорости трех волновых мод, возникающих при наличии сдвигового потока. Вычислены вертикальные смещения свободной поверхности, вызванные включением пульсирующего источника, расположенного в изначальном неподвижном слое жидкости. Задача рассматривается в линейной постановке, жидкость предполагается идеальной и несжимаемой.

*Ключевые слова:* поверхностные волны, пульсирующий источник, сдвиговые течения

**DOI:** 10.31857/S102470842360001X, **EDN:** WKLCAS

В линейной постановке достаточно полно исследованы процессы генерации, развития и распространения поверхностных волн, вызванных различными подводными возмущениями для покоящейся в невозмущенном состоянии среде или в потоке жидкости, текущей с постоянной по глубине скоростью [1–3]. Однако в реальных условиях часто имеет место изменение скорости и направления основного потока жидкости по глубине. Обзор исследований о взаимодействии поверхностных волн и сдвиговых течений дан в [4, 5]. Учет произвольного изменения скорости течения по глубине даже в двумерном случае является довольно сложной задачей. Одним из наиболее распространенных способов приближенного учета сдвигового течения является его кусочно-линейная аппроксимация с условием непрерывности скоростей на границе слоев. Большое число подобных исследований было выполнено в Морском гидрофизическом институте АН УССР [6].

Одним из наиболее простых примеров сдвигового течения с непостоянной завихренностью является двухслойная жидкость со свободной поверхностью, в верхнем слое которой имеется линейный сдвиговой поток, а нижний слой покоится. Исследование дисперсионных свойств волнового движения при бесконечно глубоком нижнем слое выполнено в [7], а для жидкости конечной глубины – в [8]. В [9] показано, что рассматриваемое течение становится неустойчивым для некоторой области волновых чисел при достаточно больших скоростях сдвигового течения на свободной поверхности.

В данной работе исследовано волновое движение, вызываемое включением пульсирующего источника, расположенного в слое первоначально покоящейся жидкости. Рассмотрено два варианта сдвигового потока: приповерхностный или придонный. Задача о развитии волнового движения при отсутствии сдвигового потока подробно исследована в [10, 11]. Показано, что при наличии сдвиговых потоков структура волнового движения существенно меняется.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горизонтальный слой однородной невязкой несжимаемой жидкости постоянной глубины  $H$ , ограниченной сверху свободной поверхностью, а снизу ровным горизонтальным дном. В невозмущенном состоянии часть жидкости находится в покое, а в верхнем либо в ниж-

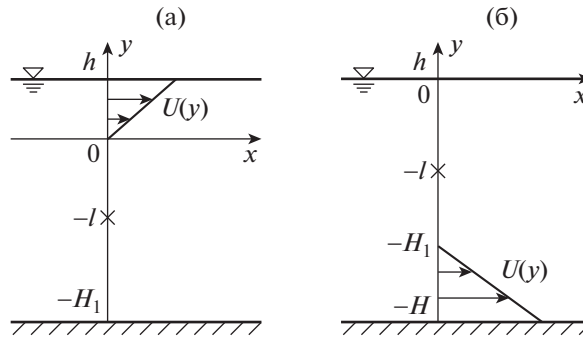


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии для первого (а) и второго (б) случаев.

нем слое толщины  $h$  имеется сдвиговое течение с линейным профилем скорости (рис. 1). В первом случае (а) горизонтальная скорость в верхнем слое равна  $U(y) = U_0 y/h$ , а во втором случае (б) – в нижнем придонном слое  $U(y) = -U_0(y + H_1)/h$ . Система декартовых координат  $x, y$  введена так, что горизонтальная ось  $x$  в первом случае совпадает с невозмущенной границей между сдвиговым и покоящимся слоями, а во втором случае – с невозмущенной свободной поверхностью, ось  $y$  направлена вертикально вверх. Толщина покоящегося слоя равна  $H_1$ , и полная глубина жидкости составляет  $H = H_1 + h$ .

Предполагается, что в покоящемся слое жидкости в момент времени  $t = 0$  в точке  $x = 0$ ,  $y = -l$ ,  $0 < l < H_1$ , начинает работать точечный массовый источник, пульсирующий по гармоническому закону с мощностью  $Q(t) = Q_0 \sin(\Omega t)$ . Движение жидкости в первоначально покоящемся слое предполагается потенциальным всюду, кроме точки локализации источника.

Задача решается в линейной постановке, и далее случаи верхнего и нижнего сдвигового слоя будут рассматриваться отдельно.

### 1.1. Верхний сдвиговой слой

Линеаризованные уравнения Эйлера в сдвиговом слое имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \mathbf{v} + v \frac{d\mathbf{V}}{dy} + \frac{\nabla p_1}{\rho} = 0, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (|x| < \infty, 0 \leq y \leq h) \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{V} = (U(y), 0)$  – вектор скорости основного потока,  $U(y) = U_0 y/h$ ,  $\mathbf{v} = (u, v)$  – возникающие возмущения скорости жидкости, которые предполагаются малыми,  $p_1$  – динамический добавок давления,  $\rho$  – плотность жидкости.

При наличии линейного сдвига продольной скорости основного течения компоненты волнового движения можно представить в виде [12]

$$u(x, y, t) = U(y) + \partial \phi_1 / \partial x, \quad v(x, y, t) = \partial \phi_1 / \partial y$$

где функция  $\phi_1(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2 \phi_1 / \partial x^2 + \partial^2 \phi_1 / \partial y^2 = 0 \quad (|x| < \infty, 0 \leq y \leq h) \quad (1.2)$$

Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности жидкости имеют вид

$$\partial \eta / \partial t + U_0 \partial \eta / \partial x = v, \quad \rho g \eta = p_1 \quad (y = h) \quad (1.3)$$

где  $\eta(x, t)$  – вертикальное смещение свободной поверхности,  $g$  – ускорение свободного падения.

В слое первоначально покоящейся жидкости потенциал скорости возмущенного течения  $\Phi(x, y, t)$  представим в виде, аналогичном [10]

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y, t) + \phi_2(x, y, t) \quad (|x| < \infty, -H_1 \leq y \leq 0) \quad (1.4)$$

где

$$\Phi_0(x, y, t) = \frac{Q(t)}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + l)^2} \quad (1.5)$$

потенциал скорости течения, создаваемого точечным пульсирующим источником в безграничной жидкости. Функция  $\phi_2(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2 \phi_2 / \partial x^2 + \partial^2 \phi_2 / \partial y^2 = 0 \quad (|x| < \infty, -H_1 \leq y \leq 0) \quad (1.6)$$

На границе раздела между верхним и нижним слоями выполняются условия непрерывности вертикальной скорости и давления

$$\partial \phi_1 / \partial y = \partial \Phi / \partial y, \quad p_1 = -\rho \partial \Phi / \partial t \quad (y = 0) \quad (1.7)$$

а на ровном горизонтальном дне — условие непротекания

$$\partial \Phi / \partial y = 0 \quad (y = -H_1) \quad (1.8)$$

В начальный момент времени волновые возмущения отсутствуют

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \eta = \partial \eta / \partial t = 0 \quad (t = 0) \quad (1.9)$$

### 1.2. Придонный сдвиговой слой

В верхнем первоначально покоящемся слое жидкости потенциал скорости  $\Psi(x, y, t)$  ищем в виде, аналогичном (1.4)

$$\Psi(x, y, t) = \Phi_0(x, y, t) + \psi_1(x, y, t) \quad (|x| < \infty, -H_1 \leq y \leq 0)$$

где функция  $\Phi_0(x, y, t)$  задана в (1.5), и функция  $\psi_1(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

В нижнем слое ( $-H \leq y \leq -H_1$ ), в котором имеет место сдвиговое течение  $U(y) = -U_0(y + H_1)/h$ , выполняются линеаризованные уравнения Эйлера, аналогичные (1.1) и компоненты скорости волнового движения ищем в виде

$$u(x, y, t) = U(y) + \partial \psi_2 / \partial x, \quad v(x, y, t) = \partial \psi_2 / \partial y$$

где функция  $\psi_2(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Граничные условия на свободной поверхности жидкости имеют вид

$$\partial \eta / \partial t = \partial \Psi / \partial y, \quad g\eta + \partial \Psi / \partial t = 0 \quad (y = 0) \quad (1.10)$$

На границе раздела между слоями имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial t} - \frac{U_0}{h} \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (y = -H_1) \quad (1.11)$$

а на дне

$$\partial \psi_2 / \partial y = 0 \quad (y = -H) \quad (1.12)$$

Начальные условия аналогичны (1.9).

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для решения начально-краевых задач, сформулированных в п. 1, используем преобразования Фурье и Лапласа в виде

$$\bar{\phi}_1(k, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \phi_1(x, y, t) e^{-ikx} dx dt$$

Аналогичные преобразования вводятся для остальных искомых функций.

Функции  $\phi_{1,2}(x, y, t)$  удовлетворяют уравнению Лапласа (1.2), (1.6), которое после преобразования Фурье принимает вид

$$\partial^2 \bar{\phi}_{1,2} / \partial y^2 - k^2 \bar{\phi}_{1,2} = 0$$

Аналогичное соотношение имеет место и для функций  $\bar{\psi}_{1,2}(k, y)$ .

В случае 1 решения для функций  $\bar{\phi}_1(k, y, s)$  и  $\bar{\phi}_2(k, y, s)$  ищем в виде

$$\bar{\phi}_1 = C_1 \text{sh}[|k|(h-y)] + D_1 \text{ch}[|k|(h-y)] \quad (0 \leq y \leq h)$$

$$\bar{\phi}_2 = C_2 \text{sh}(|k|y) + D_2 \text{ch}(|k|y) \quad (-H_1 \leq y \leq 0)$$

а для случая 2 – в виде

$$\bar{\psi}_1 = C_3 \text{sh}(|k|y) + D_3 \text{ch}(|k|y) \quad (-H_1 \leq y \leq 0) \quad (2.1)$$

$$\bar{\psi}_2 = C_4 \text{sh}[|k|(y+H_1)] + D_4 \text{ch}[|k|(y+H_1)] \quad (-H \leq y \leq -H_1) \quad (2.2)$$

где функции  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 1-4$ ) являются неизвестными.

При вычислении преобразования Фурье для функции  $\Phi_0(x, y, t)$  и ее производных по  $x$  и  $y$  использованы результаты [10]. Выполняя преобразование Лапласа для функции  $Q(t)$ , получим

$$\int_0^\infty Q(t) e^{-st} dt = \frac{Q_0 \Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

В случае 1 неизвестные функции  $\bar{\eta}(k, s)$ ,  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из системы пяти алгебраических уравнений, вытекающих из граничных условий (1.3), (1.4), (1.7) и (1.8)

$$(s + ikU_0)\bar{\eta} + |k|C_1 = 0$$

$$g\bar{\eta} + i\gamma C_1 + (s + ikU_0)D_1 = 0$$

$$C_1 \text{ch}(|k|h) + D_1 \text{sh}(|k|h) + C_2 = -\Lambda e^{-|k|l} \quad (2.3)$$

$$C_1 \left[ \text{sh}(|k|h) + \frac{i\gamma}{s} \text{ch}(|k|h) \right] + D_1 \left[ \text{ch}(|k|h) + \frac{i\gamma}{s} \text{sh}(|k|h) \right] - D_2 = -\Lambda e^{-|k|l}$$

$$C_2 \text{ch}(|k|H_1) - D_2 \text{sh}(|k|H_1) = \Lambda e^{-|k|(H_1-l)}$$

где

$$\gamma = \frac{U_0}{h} \text{sgn} k, \quad \Lambda = \frac{Q_0 \Omega}{2|k|(s^2 + \Omega^2)} \quad (2.4)$$

Решение системы уравнений (2.3) для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = Q_0 \Omega \frac{[1 + e^{-2|k|(H_1-l)}] e^{-|k|(l+h)}}{1 + e^{-2|k|H}} \frac{s(s + ikU_0)}{(s^2 + \Omega^2) P_1(k, s)}$$

Здесь  $P_1(k, s)$  – полином третьей степени

$$P_1(k, s) = s^3 + ia_1 s^2 + a_2 s + ia_3 \quad (2.5)$$

где

$$a_1(k) = 2kU_0 + \gamma[b_+ - \text{th}(|k|H)] \quad (2.6)$$

$$a_2(k) = g|k|\text{th}(|k|H) + \gamma[kU_0(\text{th}(|k|H) - 2b_+) + \gamma b_-] - k^2 U_0^2 \quad (2.7)$$

$$a_3(k) = \gamma[kU_0(\gamma b_- - kU_0 b_+) + g|k|b_-] \quad (2.8)$$

$$b_{\pm}(k) = (1 \pm e^{-2|k|h}) \frac{1 - e^{-2|k|H_1}}{2(1 + e^{-2|k|H})} \quad (2.9)$$

Полином  $P_1(k, s)$  представим в виде

$$P_1(k, s) = \prod_{n=1}^3 (s - s_n)$$

где  $s_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) корни уравнения  $P_1(k, s) = 0$ .

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье получим решение для отклонения свободной поверхности от ее равновесного положения

$$\eta(x, t) = \frac{Q_0 \Omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 + e^{-2k(H-l)}}{1 + e^{-2kH}} e^{-k(l+h)} [A_1(k, t) \cos kx - B_1(k, t) \sin kx] dk \quad (2.10)$$

где  $A_1(k, t)$  и  $B_1(k, t)$  соответственно вещественная и мнимая части суммы  $\sum_{n=1}^5 \alpha_n(k) e^{s_n(k)t}$ ,  $s_{4,5} = \pm i\Omega$ .  
Функции  $\alpha_n(k)$  ( $n = 1-5$ ) удовлетворяют равенству

$$\frac{s(s + ikU_0)}{(s^2 + \Omega^2)P_1(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\alpha_n(k)}{s - s_n(k)} \quad (2.11)$$

и их определение сводится к решению системы пяти линейных алгебраических уравнений, получающихся из равенства числителей в левой и правой частях соотношения (2.11). При выводе (2.10) использовано свойство функций  $s_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) и  $\alpha_n(k)$  ( $n = 1-5$ ), заключающееся в том, что их значения при  $k > 0$  и  $k < 0$  являются комплексно-сопряженными.

Аналогичным образом строится решение задачи и в случае 2. Используя для функций  $\bar{\Psi}_1(k, y, s)$  и  $\bar{\Psi}_2(k, y, s)$  представления (2.1) и (2.2), неизвестные функции  $\bar{\eta}(k, s)$ ,  $C_j(k, s)$ ,  $D_j(k, s)$  ( $j = 3, 4$ ) определяются из системы уравнений, вытекающих из граничных условий (1.10)–(1.12)

$$s\bar{\eta} - |k|C_3 = |k|\Lambda e^{-|k|l}$$

$$g\bar{\eta} + sD_3 = s\Lambda e^{-|k|l}$$

$$C_3 \operatorname{ch}(|k|H_1) - D_3 \operatorname{sh}(|k|H_1) - C_4 = \Lambda e^{-|k|(H_1-l)}$$

$$C_3 \operatorname{sh}(|k|H_1) - D_3 \operatorname{ch}(|k|H_1) + i\gamma C_4/s + D_4 = -\Lambda e^{-|k|(H_1-l)}$$

$$C_4 - D_4 \operatorname{th}(|k|h) = 0$$

где использованы обозначения (2.4). Решение этой системы уравнений для  $\bar{\eta}(k, s)$  имеет вид

$$\bar{\eta} = Q_0 \Omega \frac{(1 + e^{-2|k|h})e^{-|k|l}}{1 + e^{-2|k|H}} \frac{s(cs + d)}{(s^2 + \Omega^2)P_2(k, s)}$$

где  $P_2(k, s)$  – полином третьей степени

$$P_2(k, s) = s^3 + ib_1 s^2 + b_2 s + ib_3 \quad (2.12)$$

$$b_1(k) = \gamma f_+, \quad b_2(k) = g|k| \operatorname{th}(|k|H), \quad b_3(k) = g\gamma|k|f_- \quad (2.13)$$

$$f_{\pm}(k) = (1 \pm e^{-2|k|H_1}) \frac{1 - e^{-2|k|h}}{2(1 + e^{-2|k|H})} \quad (2.14)$$

$$c(k) = \frac{1 + e^{-2|k|(H-l)}}{1 + e^{-2|k|h}}, \quad d(k) = 0.5i\gamma(1 + e^{-2|k|(H_1-l)}) \operatorname{th}(|k|h)$$

Решение для возвышения свободной поверхности после выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье имеет вид

$$\eta(x, t) = \frac{Q_0 \Omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 + e^{-2kh})e^{-kl}}{1 + e^{-2kH}} [A_2(k, t) \cos(kx) - B_2(k, t) \sin(kx)] dk \quad (2.15)$$

где  $A_2(k, t)$  и  $B_2(k, t)$  соответственно вещественная и мнимая части суммы  $\sum_{n=1}^5 \beta_n(k) e^{s_n(k)t}$ . Функции  $\beta_n(k)$  ( $n = 1-5$ ) определяются из равенства

$$\frac{s(cs + d)}{(s^2 + \Omega^2)P_2(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\beta_n(k)}{s - s_n(k)}$$

после решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

### 3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Полученные решения позволяют исследовать дисперсионные свойства волн, возникающих в рассматриваемых случаях. Дисперсионное соотношение устанавливает для каждой волны зависимость ее частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$ . Ранее достаточно подробно был исследован случай 1 [7–9], тогда как для случая 2 подобные исследования автору не известны.

Для случая 1 используем уравнение  $P_1(k, s) = 0$ , где функция  $P_1(k, s)$  дана в (2.5). Вводя замену  $\omega = is$ , получим полином для определения дисперсионных соотношений каждой из трех волновых мод

$$\omega^3 - a_1(k)\omega^2 - a_2(k)\omega + a_3(k) = 0 \quad (3.1)$$

где значения  $a_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) даны в (2.6)–(2.8). Анализируя функции  $a_n(k)$ , легко видеть, что для каждой из трех волн выполняется равенство  $\omega_n(k) = -\omega_n(-k)$ .

Групповая скорость каждой волновой моды равна  $c_g^{(n)} = d\omega_n/dk$ . Используя (3.1), получим

$$c_g^{(n)} = \frac{a_1' \omega_n^2 + a_2' \omega_n - a_3'}{3\omega_n^2 - 2a_1 \omega_n - a_2}$$

где штрих означает дифференцирование по  $k$ .

В частном случае однослойной жидкости с линейным сдвиговым потоком  $h = H$  ( $H_1 = 0$ ) функции  $b_{\pm}(k)$  в (2.9) тождественно равны нулю, и уравнение (3.1) становится квадратным уравнением

$$\omega^2 - \bar{a}_1(k)\omega - \bar{a}_2(k) = 0$$

где

$$\bar{a}_1(k) = 2kU_0 - \gamma \text{th}(|k|H), \quad \bar{a}_2(k) = (g|k| + \gamma k U_0) \text{th}(|k|H) - k^2 U_0^2$$

Следовательно, в этом случае существует только две волновые моды

$$\omega_{1,2} = \bar{a}_1/2 \pm \sqrt{(\bar{a}_1/2)^2 + \bar{a}_2} \quad (3.2)$$

Известно, что для кубического уравнения с вещественными коэффициентами (см., например, [13]) возможно существование двух сопряженных комплексных корней. Для уравнения (3.1) это возможно при условии, что значение  $Q$  положительное, где

$$Q = \left(\frac{r}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad (3.3)$$

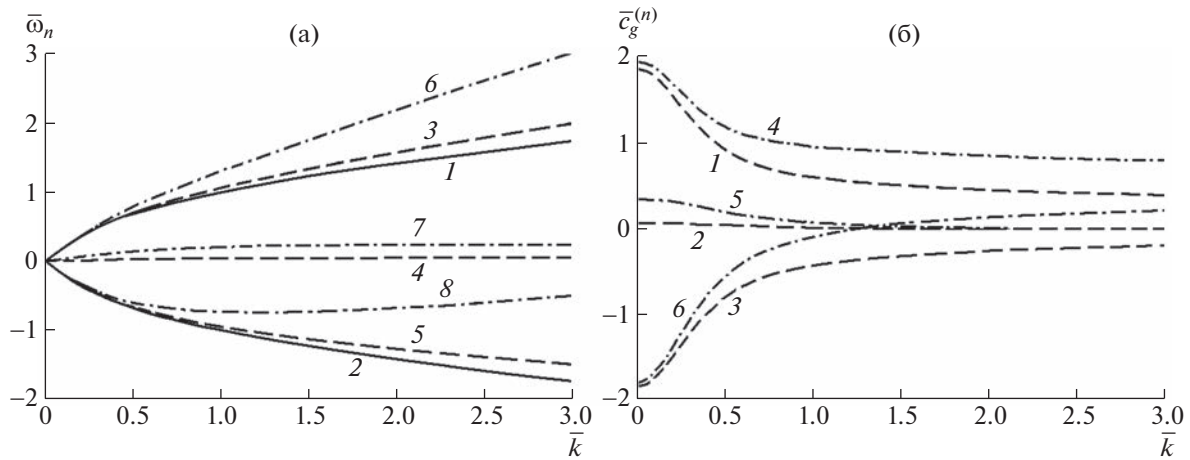
$$r(k) = -\left(a_2(k) + \frac{a_1^2(k)}{3}\right), \quad q(k) = a_3(k) - 2\left(\frac{a_1(k)}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}a_1(k)a_2(k)$$

Для случая 2 из уравнения  $P_2(k, s) = 0$ , используя соотношения (2.12)–(2.14), получим

$$\omega^3 - b_1(k)\omega^2 - b_2(k)\omega + b_3(k) = 0 \quad (3.4)$$

В этом случае групповая скорости каждой волновой моды равна

$$c_g^{(n)} = \frac{b_1' \omega_n^2 + b_2' \omega_n - b_3'}{3\omega_n^2 - 2b_1 \omega_n - b_2} \quad (3.5)$$



**Рис. 2.** (а) Дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$ : 1, 2 –  $U_0 = 0$ ; 3–5 –  $\bar{U}_0 = 0.1$ ; 6–8 –  $\bar{U}_0 = 0.5$ . (б) Групповые скорости  $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$ : 1–3 –  $\bar{U}_0 = 0.1$ ; 4–6 –  $\bar{U}_0 = 0.5$ .

В частном случае однослойной жидкости при  $h = H$  ( $H_1 = 0$ ) получим аналогично случаю 1 квадратное уравнение

$$\omega^2 - (\gamma\omega + g|k|\text{th}(|k|H)) = 0$$

решение которого имеет вид

$$\omega_{1,2} = \gamma\text{th}(|k|H)/2 \pm \sqrt{[\gamma\text{th}(|k|H)/2]^2 + g|k|\text{th}(|k|H)}$$

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Использованы значения исходных параметров работы [10]:

$$H = 1 \text{ м}, \quad \Omega = 2\pi\text{с}^{-1}, \quad Q_0 = 1 \text{ м}^2/\text{с} \quad (4.1)$$

Ускорение свободного падения  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ .

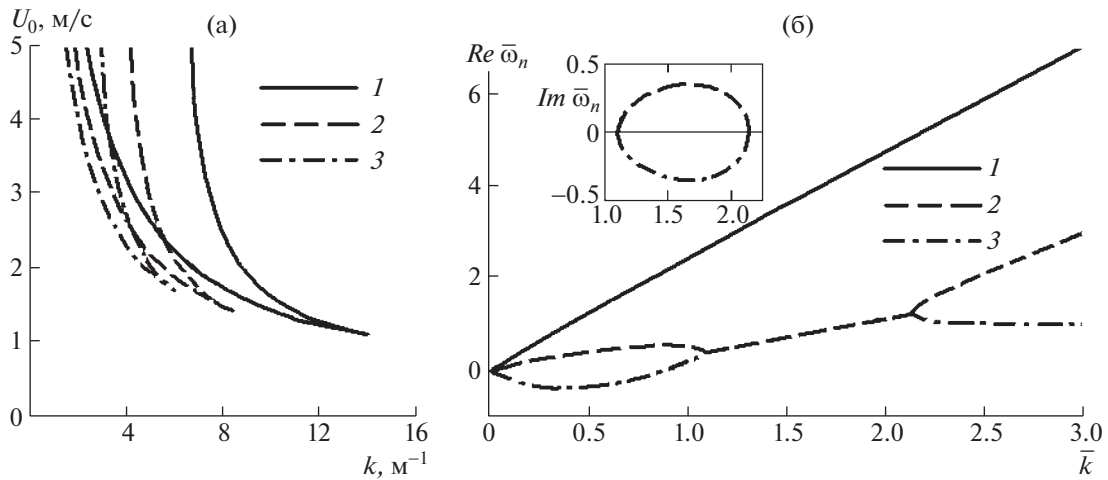
##### 4.1. Верхний сдвиговой слой

На рис. 2а представлены дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  для случая 1 при  $h = 0.3 \text{ м}$ ,  $H_1 = 0.7 \text{ м}$  в безразмерном виде, где  $\bar{\omega}_n = \omega_n\sqrt{h/g}$ ,  $\bar{k} = kh$ . Кривые 1, 2 соответствуют покоящейся жидкости в невозмущенном состоянии ( $U_0 = 0$ ), для которой существуют только две волновые моды согласно (3.2)

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{gk\text{th}(kH)}$$

Кривые 3–5 и 6–8 показывают дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n$  ( $n = 1–3$ ) при  $\bar{U}_0 = U_0/\sqrt{gh} = 0.1, 0.5$  соответственно. Нумерация корней полинома (3.1) производится по убыванию их вещественной части. Видно, что с ростом скорости  $U_0$  увеличивается отклонение дисперсионных зависимостей от случая бессдвигового течения и возникает третья дополнительная волновая мода. Поведение групповых скоростей  $\bar{c}_g^{(n)} = c_g^{(n)}/\sqrt{gh}$  ( $n = 1–3$ ) показано на рис. 2б для  $\bar{U}_0 = 0.1$  (штриховые кривые 1–3) и  $\bar{U}_0 = 0.5$  (штрихпунктирные кривые 4–6).

С увеличением скорости  $U_0$  появляются комплексные корни в уравнении (3.1) при некоторых значениях волнового числа  $k$ . Это означает, что возникающее волновое движение становится неустойчивым. Границы устойчивости на плоскости  $(U_0, k)$  можно определить, используя нулевую изолинию функции  $Q$  в (3.3). На рис. 3а показаны нулевые изолинии функции  $Q$  при различных значениях толщины сдвигового слоя  $h = 0.3, 0.5, 0.7 \text{ м}$  (кривые 1–3) соответственно. При увели-

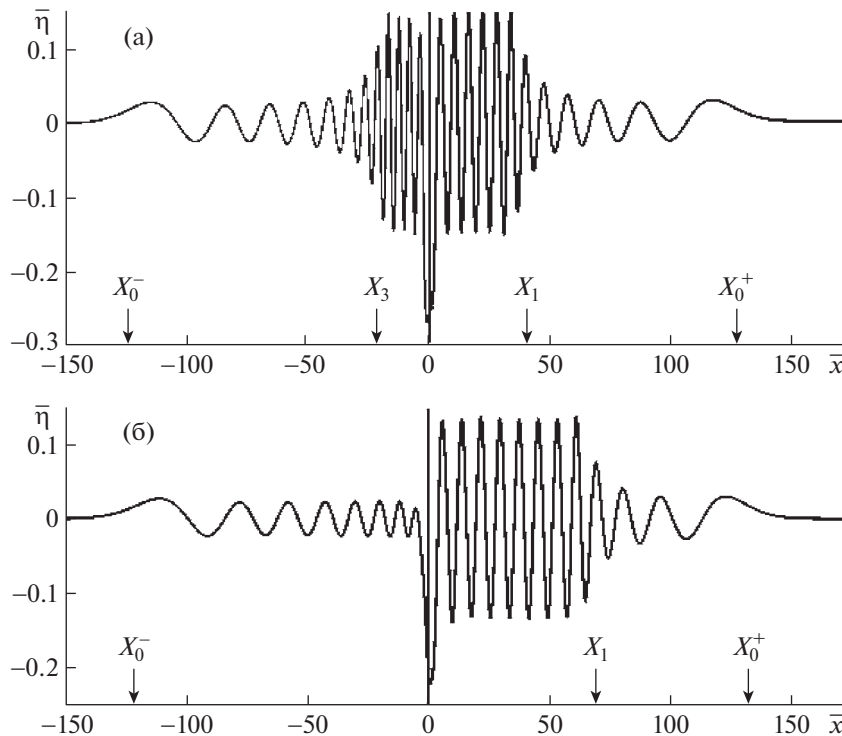


**Рис. 3.** (а) Области неустойчивых значений волновых чисел в зависимости от скорости сдвигового потока  $U_0$  при различных толщинах сдвигового слоя: 1–3 –  $h = 0.3, 0.5, 0.7$  м. (б) Вещественные значения дисперсионных зависимостей  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  при наличии неустойчивого диапазона волновых чисел. Номер кривых 1–3 соответствует номеру моды. На врезке показана зависимость мнимых значений  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  при  $n = 2$  и  $n = 3$ .

чении толщины сдвигового слоя область неустойчивых значений  $k$  уменьшается и полностью исчезает при  $h = H$ . Пример поведения дисперсионных зависимостей  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  ( $n = 1-3$ ) при наличии неустойчивого диапазона волновых чисел представлен на рис. 3б для  $h = 0.3$  м и  $\bar{U}_0 = 2$ . На отрезке  $1.095 < \bar{k} < 2.138$  значения  $\bar{\omega}_2$  и  $\bar{\omega}_3$  становятся комплексно-сопряженными и их мнимые значения показаны на врезке рис. 3б. Развитие волновых возмущений в этом случае надо исследовать на основе уравнений и граничных условий, учитывающих нелинейные члены.

Возвышения свободной поверхности  $\eta(x, t)$  при  $h = 0.3$  м,  $l = 0.2$  м,  $t = 12$  с определены в результате численного интегрирования (2.10) и представлены на рис. 4а, б для  $\bar{U}_0 = 0.1, 0.5$  соответственно. Используются следующие безразмерные переменные:  $\bar{\eta} = \eta\sqrt{gh}/Q_0$ ,  $\bar{x} = x/h$ . При отсутствии сдвигового течения ( $U_0 = 0$ ) профили свободной поверхности для заданного момента времени представлены в [10]. В этом случае волновые возмущения являются четной функцией по  $x$ .

Зависимости групповой скорости волновых мод от волнового числа позволяют определить границы волновых фронтов возбуждаемых колебаний. Значение  $c_g^{(n)}(0)$  показывает скорость распространения длинноволновых возмущений. В рассматриваемой задаче волновые движения порождаются периодическим источником, фиксированная частота которого  $\Omega$  определяет волновой фронт распространения возмущений заданной частоты. Границы этого волнового фронта подробно изучены в [11] для случая бессдвигового течения. В рассматриваемой задаче для каждой дисперсионной зависимости  $\omega_n(k)$  ( $n = 1-3$ ) следует определить значение  $k_n$ , удовлетворяющее уравнению  $\omega_n(k_n) = \Omega$ . Скорость волнового фронта, который устанавливает границы профиля свободной поверхности с колебаниями заданной частоты  $\Omega$ , определяется значением групповой скорости  $c_g^{(n)}(k_n)$ . При наличии сдвигового течения распространение волн вправо и влево от пульсирующего источника происходит с разными скоростями. Для рис. 4а  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 1.84$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.81$ ,  $\bar{k}_1 = 1.07$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.576$ ,  $\bar{k}_3 = 1.43$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -0.325$ . Для заданного момента времени  $t = 12$  с (в безразмерных переменных  $\bar{t} = t\sqrt{g/h} = 68.62$ ) координаты волновых фронтов показаны вертикальными стрелками на рис. 4а:  $X_0^+ = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(0) = 126.3$ ,  $X_0^- = \bar{t}\bar{c}_g^{(3)}(0) = -124.2$ ,  $X_1 = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 39.55$ ,  $X_3 = \bar{t}\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -22.33$ .



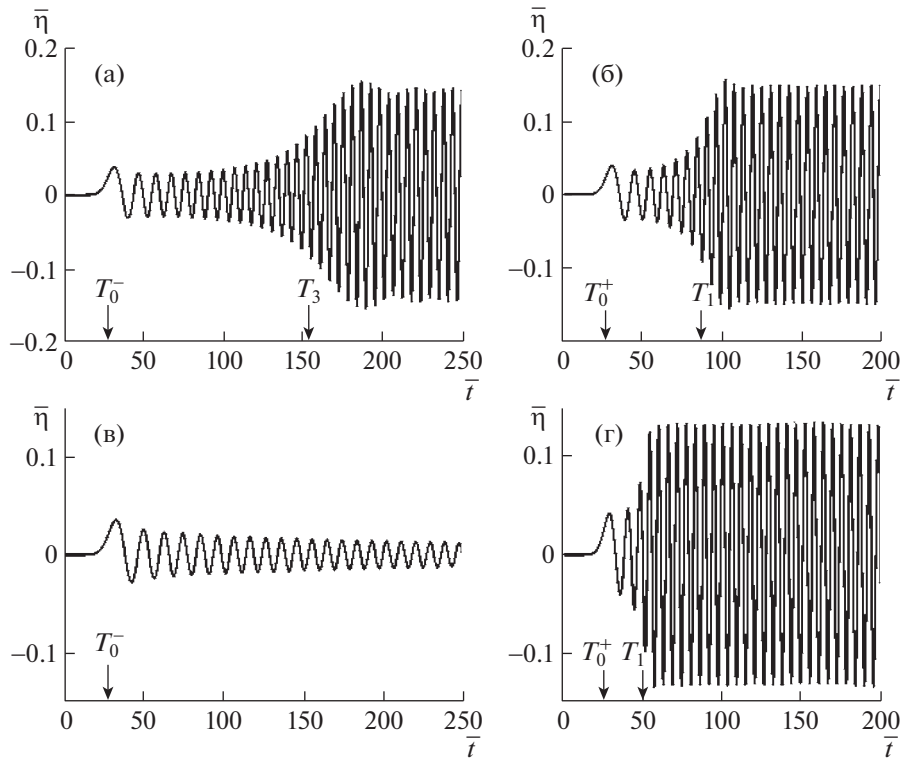
**Рис. 4.** Возвышения свободной поверхности при  $t = 12$  с: (а, б)  $\bar{U}_0 = 0.1, 0.5$ . Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.

Для значения скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$  согласно рис. 2а (кривая 8) дисперсионная зависимость  $|\bar{\omega}_3(\bar{k})| < \bar{\Omega}$  для всех значений  $\bar{k}$ , где  $\bar{\Omega} = \Omega\sqrt{h/g} = 1.099$ . Это означает, что при отрицательных значениях  $x$  второй волновой фронт отсутствует, так как не возникает колебаний свободной поверхности с частотой пульсирующего источника. Для рис. 4б  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 1.92$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.76$ ,  $\bar{k}_1 = 0.795$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 1.0$ ,  $X_0^+ = 131.8$ ,  $X_0^- = -120.8$ ,  $X_1 = 68.65$  и координаты волновых фронтов также показаны вертикальными стрелками. Рис. 4б подтверждает вывод работы [7] о том, что приповерхностный сдвиговой поток обладает свойствами волногасителя.

Рисунок 5 показывает смещения свободной поверхности жидкости в зависимости от времени  $\bar{t} = t\sqrt{g/h}$  в двух фиксированных точках  $\bar{x} = -50$  (рис. 5а,в) и  $\bar{x} = 50$  (рис. 5б,г) для  $\bar{U}_0 = 0.1$  (рис. 5а,б) и  $\bar{U}_0 = 0.5$  (рис. 5в,г). Можно определить время прохождения волновых фронтов в рассматриваемых точках свободной поверхности. По аналогии с рис. 4 обозначим время прохождения фронта длинноволновых возмущений  $T_0^\pm$  и время прохождения второго фронта  $T_{1,3}$ . Эти моменты времени показаны на рис. 5 вертикальными стрелками: для рис. 5а  $T_0^- = 27.62$ ,  $T_3 = 153.85$ , для рис. 5б  $T_0^+ = 27.17$ ,  $T_1 = 86.75$ , для рис. 5в  $T_0^- = 28.41$  и для рис. 5г  $T_0^+ = 26.04$ ,  $T_1 = 50$ .

#### 4.2. Нижний сдвиговой слой

Для случая 2 расчеты выполнены при значениях исходных параметров (4.1), толщине придонного сдвигового слоя  $h = H - H_1 = 0.3$  м и отстоянии пульсирующего источника от свободной поверхности  $l = 0.5$  м. На рис. 6 представлены дисперсионные зависимости и значения групповых скоростей для двух скоростей  $\bar{U}_0 = 0.5, 2.5$ . Кривые 1–3 соответствуют номеру волновой моды. На рис. 6а,б показаны зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  ( $n = 1-3$ ), определяемые как корни полинома в (3.4), а на рис. 6в,г – значения групповых скоростей для каждой волновой моды согласно (3.5).



**Рис. 5.** Возвышения свободной поверхности в зависимости от времени в фиксированных точках:  $\bar{x} = -50$  (а, в) и  $\bar{x} = 50$  (б, г) для  $\bar{U}_0 = 0.1$  (а, б) и  $\bar{U}_0 = 0.5$  (в, г). Вертикальные стрелки показывают время прохождения волновых фронтов для различных мод.

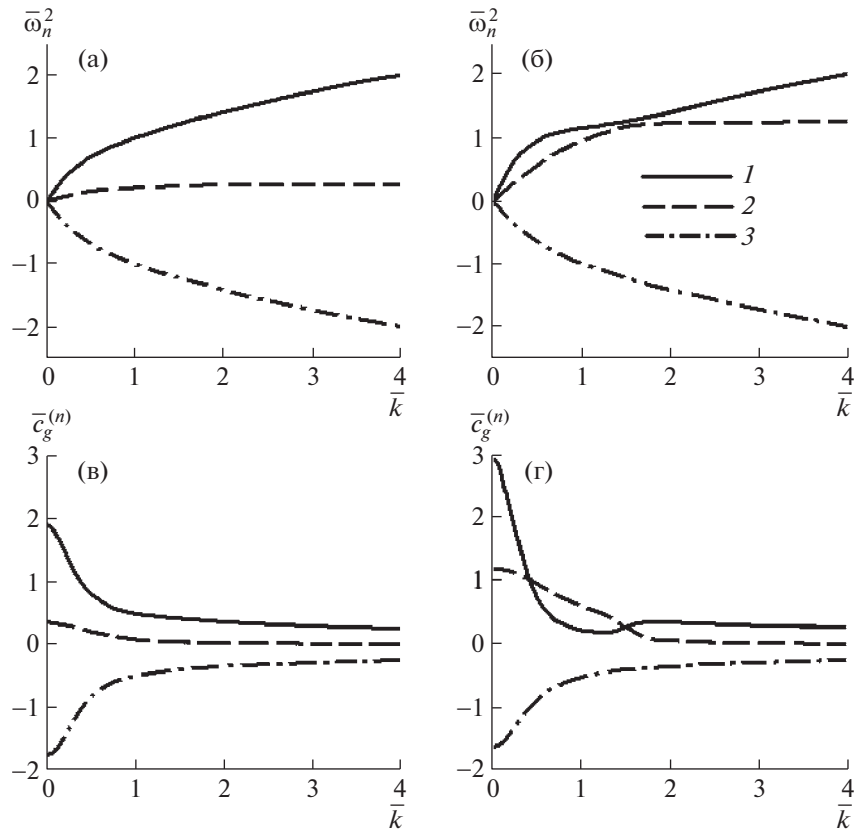
Рисунок ба,в соответствует скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$ , а рис. бб,г — скорости  $\bar{U}_0 = 2.5$ . Интересно отметить, что в рассматриваемом случае все возбуждаемые волновые моды являются устойчивыми, так как значение величины  $Q$  для полинома в (3.4) при рассматриваемых параметрах остается отрицательным для всех значений волнового числа  $k$ . Другой интересной особенностью рассматриваемого случая является то, что вторая волновая мода, которая при малых скоростях  $U_0$  была значительно меньше двух других мод, с ростом этой скорости становится сопоставимой с двумя другими волновыми модами.

Поведение вертикальных смещений свободной поверхности, полученных в результате численного интегрирования (2.15), представлено на рис. 7 при фиксированном значении времени  $t = 12$  с ( $\bar{t} = 68.62$ ) и на рис. 8 при фиксированном значении продольной координаты  $\bar{x} = -50, 50$ . Использовано два значения скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$  (рис. 7а, 8а,б) и  $\bar{U}_0 = 2.5$  (рис. 7б, 8в,г).

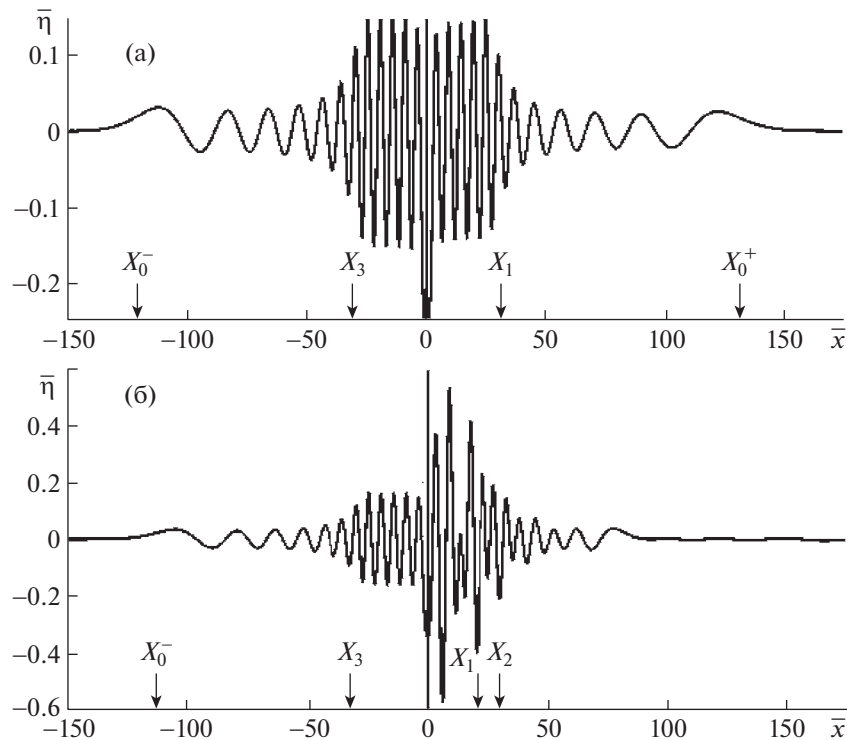
Вертикальными стрелками показаны значения волновых фронтов аналогично рис. 4 и 5. Для значения скорости  $\bar{U}_0 = 0.5$  согласно рис. 6а,в  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 1.92$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.76$ ,  $\bar{k}_1 = 1.21$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.453$ ,  $\bar{k}_3 = 1.21$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -0.459$ . Для заданного момента времени координаты волновых фронтов показаны вертикальными стрелками на рис. 7а:  $X_0^+ = 131.7$ ,  $X_0^- = -121.0$ ,  $X_1 = 31.12$ ,  $X_3 = -31.53$ .

Для значения скорости  $\bar{U}_0 = 2.5$  согласно рис. 6б,г  $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 2.96$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.65$ ,  $\bar{k}_1 = 0.822$ ,  $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.308$ ,  $\bar{k}_2 = 1.31$ ,  $\bar{c}_g^{(2)}(\bar{k}_2) = 0.430$ ,  $\bar{k}_3 = 1.21$ ,  $\bar{c}_g^{(3)}(\bar{k}_3) = -0.464$ . Для заданного момента времени  $\bar{t} = 68.62$  координаты волновых фронтов на рис. 7б равны:  $X_0^+ = 203.1$  (находится за пределами графика),  $X_0^- = -113.4$ ,  $X_1 = 21.13$ ,  $X_2 = 29.52$ ,  $X_3 = -31.82$ .

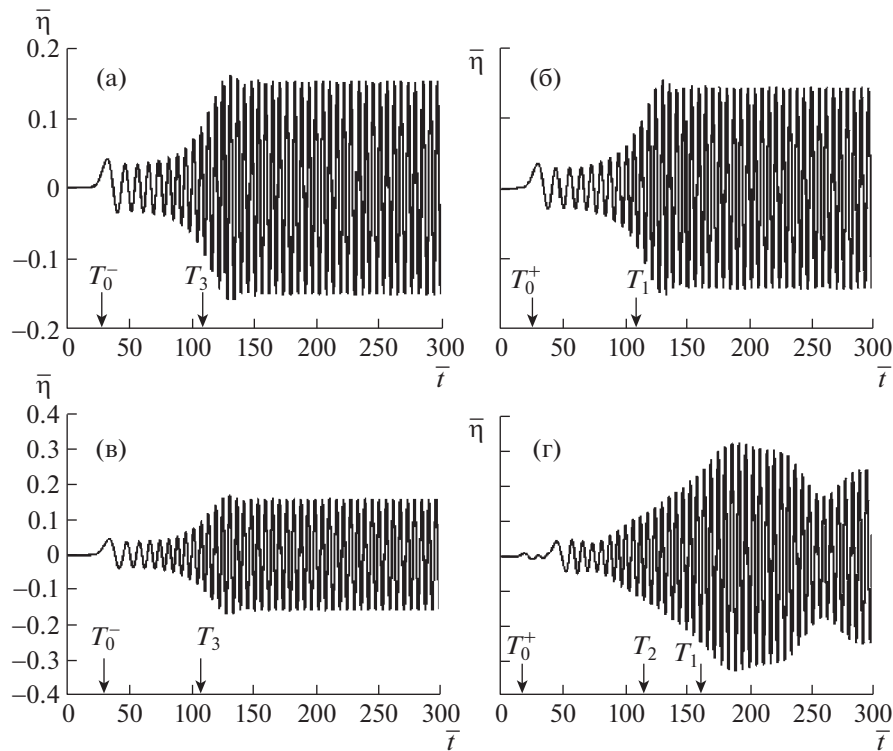
На рис. 8 по аналогии с рис. 5 обозначены время прохождения фронта длинноволновых возмущений  $T_0^\pm$  и время прохождения фронтов  $T_{1,2,3}$ . Эти моменты времени показаны на рис. 8 вер-



**Рис. 6.** Дисперсионные зависимости  $\bar{\omega}_n(\bar{k})$  (а, б) и групповые скорости  $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$  (в, г) для волновых мод в случае придонного сдвигового слоя при  $\bar{U}_0 = 0.5$  (а, в) и  $\bar{U}_0 = 2.5$  (б, г). Номер кривой соответствует номеру волновой моды.



**Рис. 7.** Возвышения свободной поверхности при  $t = 12$  с: (а, б) –  $\bar{U}_0 = 0.5, 2.5$ . Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.



**Рис. 8.** Возвышения свободной поверхности в зависимости от времени в фиксированных точках:  $\bar{x} = -50$  (а, в) и  $\bar{x} = 50$  (б, г) для  $\bar{U}_0 = 0.5$  (а, б) и  $\bar{U}_0 = 2.5$  (в, г). Вертикальные стрелки показывают время прохождения волновых фронтов для различных мод.

тикальными стрелками: для рис. 8а  $T_0^- = 28.3$ ,  $T_3 = 108.8$ , для рис. 8б  $T_0^+ = 26.05$ ,  $T_1 = 110.3$ , для рис. 8в  $T_0^- = 30.26$ ,  $T_3 = 107.8$  и для рис. 8г  $T_0^+ = 16.9$ ,  $T_1 = 162.4$ ,  $T_2 = 116.2$ . На рис. 8г заметна модуляция волновых возмущений, так как вторая волновая мода становится сопоставимой с первой модой, что приводит к суперпозиции колебаний с различной длиной волны.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано волновое движение, возникающее при включении пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвиговых слоев. В рамках линейной теории волн построено интегральное представление решения, описывающего вертикальные смещения свободной поверхности. Показано, что, как в случае приповерхностного сдвигового слоя, так и в случае придонного слоя, колебания свободной поверхности существенно отличаются от тех, которые имели место при пульсациях источника в изначально покоящейся жидкости [10, 11]. В случае приповерхностного сдвигового слоя волновое движение становится неустойчивым с ростом скорости сдвигового потока. Для придонного сдвигового потока возникает суперпозиция колебаний с различными длинами волн. Это свидетельствует о том, что даже в простых случаях взаимодействие волн и течений приводит к большому разнообразию явлений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wehausen J.V., Laitone E.V. Surface waves. *Handbuch der Physik*. 1960. V. 9. P. 446–778.
2. Сметенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. Киев: Наук.думка, 1980. 259 с.
4. Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents // *Adv. Appl. Mech.* 1976. V. 16. P. 9–117.
5. Jonsson I.G. Wave-current interactions. *The Sea*. 1990. V. 9. P. 65–120.

6. *Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д., Суворов А.М. и др.* Динамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук. думка. 1988. 192 с.
7. *Taylor G.* The action of a surface current used as a breakwater // *Proc. Royal Soc. Lond. A.* 1955. V. 231. P. 466–478.
8. *Brevik I.* The stopping of linear gravity waves in currents of uniform vorticity // *Phys. Norv.* 1976. V. 8. № 3. P. 157–162.
9. *Brevik I., Sollie R.* Stable and unstable modes in a wave-current system having uniform vorticity // *Phys. Scr.* 1997. V. 55. P. 639–643.
10. *Павельева Е.Б., Савин А.С.* Установление волн от пульсирующего источника в жидкости конечной глубины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 4. С. 12–22.
11. *Ильичев А.Т., Савин А.С.* Эволюция возмущений свободной поверхности от пульсирующего заглубленного источника в жидкости конечной глубины // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 6. С. 19–24.
12. *Стурова И.В.* Задача Коши–Пуассона для жидкости с ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 1. С. 47–56.
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

УДК 532.526

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ДВУХ ИМПУЛЬСНЫХ ИСТОЧНИКОВ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПЛАСТИНЫ

© 2023 г. Л. В. Афанасьев<sup>а</sup>, Ю. Г. Ермолаев<sup>а</sup>, А. Д. Косинов<sup>а</sup>,  
В. Л. Кочарин<sup>а</sup>, Н. В. Семенов<sup>а</sup>, А. А. Яцких<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

\*E-mail: yatskikh@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 27.01.2023 г.

После доработки 13.03.2023 г.

Принята к публикации 20.03.2023 г.

Описано развитие нового экспериментального метода введения в сверхзвуковой пограничный слой контролируемых возмущений с заданной частотно-волновой структурой. Представлены данные экспериментов по формированию возмущений от двух импульсных источников (импульсный тлеющий разряд) в ламинарном пограничном слое пластины при числе Маха, равном 2. Эксперименты выполнены в аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН. Локализованные источники располагались на одинаковом расстоянии от передней кромки пластины в 6 мм друг от друга по размаху. Пульсации потока измерялись с помощью односточного датчика термоанемометра постоянного сопротивления, запись сигнала проводилась синхронно с зажиганием разрядов, что позволяло выделять возмущения от разрядов из фона случайных неконтролируемых “естественных” пульсаций пограничного слоя. Анализируются пространственно-временная структура и частотно-волновой состав генерируемых возмущений от одиночного и двух разрядов, работающих синхронно и с задержкой во времени. Получено, что наибольшие отличия в структуре возмущений от одного и двух источников наблюдаются в центральной области, тогда как на боковых границах возмущения пульсации близки во всех рассматриваемых случаях. В спектрах возмущений по поперечным волновым числам от двух разрядов формируются узлы и пучности, положение которых определяется расстоянием между источниками и временной задержкой в их работе.

**Ключевые слова:** эксперимент, сверхзвуковой пограничный слой, источник контролируемых возмущений, импульсные тлеющие разряды

**DOI:** 10.31857/S1024708423600070, **EDN:** WLFQGI

В настоящее время общепринято, что переход ламинарного пограничного слоя в турбулентное состояние представляет собой сложный процесс возникновения (возбуждения) возмущений различного типа, их развития, взаимодействия друг с другом и средним течением, приводящий к турбулентному режиму. Одним из подходов при изучении возникновения турбулентности в пограничных слоях является экспериментальное исследование эволюции контролируемых возмущений. В поток вводятся возмущения с фиксированными начальными параметрами, что позволяет определять волновые характеристики развития возмущений и проводить количественное сравнение с результатами расчетов. В экспериментах при сверхзвуковых скоростях потока наиболее отработанным методом возбуждения контролируемых возмущений является тлеющий разряд, зажигаемый в локальной области экспериментальной модели. В случае периодического зажигания разряда в пограничном слое формируется возмущение, обладающее узким частотным и широким поперечно-волновым спектром (волновые поезда). С помощью такого подхода удается изучать ранние стадии ламинарно-турбулентного перехода в двумерных [1–3] и трехмерных [4, 5] сверхзвуковых пограничных слоях. В случае импульсного воздействия в пограничном слое формируется локализованное в пространстве и времени возмущение (волновой пакет), такой подход позволяет изучать развитие возмущений в широком частотно-волновом спектре. В экспериментах [6–9] для введения локализованных возмущений в сверхзвуковой пограничный слой использовался импульсный тлеющий разряд, зажигаемый на поверхности модели.

Для определения механизмов взаимодействия возмущений на поздних стадиях ламинарно-турбулентного перехода в высокоскоростных пограничных слоях необходимы подробные численно-экспериментальные исследования. В задачах по изучению нелинейной стадии развития важную роль может играть начальная структура возмущений. В исследованиях с помощью численного моделирования исходное возмущение может быть задано с помощью динамических граничных условий, при этом возможно задавать параметры возмущений на входе. В расчетах также используются локализованные в пространстве источники возмущения, которые обладают широким поперечно-волновым спектром. Аналогично экспериментам в них рассматривается как периодическое [10], так и локализованное [11–13] во времени воздействие на пограничный слой. Другой подход состоит в следующем: задаются волны или пакеты волн, параметры которых рассчитываются по линейной теории устойчивости [15, 16], либо вводятся пульсации, характерные для условий полета [17]. Для корректного экспериментального моделирования необходим метод возбуждения в пограничном слое контролируемых возмущений, параметры которых (амплитуда, частотный и поперечно-волновой состав, фазовые соотношения спектральных компонент и т.д.) могли бы варьироваться в широких пределах. Используемые сегодня при высоких скоростях методы, основанные на одиночном локализованном источнике, не дают возможности контролировать все указанные параметры. Возможным способом является возбуждение контролируемых возмущений комплексом из нескольких источников, разнесенных в пространстве и позволяющих сдвигать фазы сигналов источников во времени.

При малых дозвуковых скоростях потока в исследованиях ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя многосоставные источники возмущений успешно используются. Впервые такой подход при дозвуковых скоростях потока применен в работе [18], где показан эффект наложения и вычитания контролируемых возмущений. Дальнейшее развитие такого подхода привело к созданию многокомпонентного источника возмущения, с помощью которого в пограничный слой вводятся возмущения с варьируемыми в широкой области начальными параметрами [19–21].

Для случая высоких скоростей набегающего потока подход многокомпонентных источников контролируемых возмущений развит значительно меньше. В [22] в качестве источника периодических контролируемых возмущений использовались несколько электрических разрядов, работающих синхронно на определенной частоте, расположенных на поверхности конуса равномерно в азимутальном направлении. Предполагалось, что такая система источников будет генерировать контролируемые возмущения с выделенным пиком в волновом спектре. Однако в работе не приведено подробных данных о частотно-волновом составе генерируемых возмущений.

В [23] были проведены расчетно-экспериментальные исследования по развитию контролируемых периодических возмущений с узким частотным спектром, генерируемые в пограничном слое пластины двумя точечными источниками. В случае синхронной работы двух источников в волновых спектрах наблюдалось образование узлов и пучностей, а при наличии сдвига фаз наблюдалось смещение положения узлов и пучностей в волновом спектре. Это соответствует интерференции волн, порожденных разнесенными источниками возмущений. Исследования показали, что с помощью изменения параметров работы источников возможно изменять структуру вводимых в сверхзвуковой пограничный слой контролируемых периодических возмущений.

В работе [24] проведено численное моделирование формирования и развития возмущений от двух синхронных импульсных источников в ламинарном пограничном слое пластины при числе Маха потока  $M = 2$ . Источники располагались на линии, параллельной передней кромке. Исследования проведены для случая одиночного и двух синхронных импульсных источников при различных расстояниях между ними. Получено, что в рассматриваемых случаях рост возмущений вниз по потоку зависит от расстояния между источниками. Показано, что это связано с появлением в волновых спектрах возмущений узлов и пучностей для всех частот, что может быть описано интерференцией волн от источников. Их положение определяется расстоянием между источниками, что определяет волновой состав возмущений и их развитие в физическом пространстве.

Цель данной работы – развить экспериментальный метод введения в сверхзвуковой пограничный слой контролируемых локализованных возмущений с возможностью изменять их частотно-волновую структуру с помощью двух источников. Представлены данные экспериментальных исследований пространственно-временной и частотно-волновой структуры возмущений от одиночного и двух импульсных разрядов, работающих синхронно и с задержкой во времени, в сверхзвуковом пограничном слое пластины при числе Маха, равном 2.

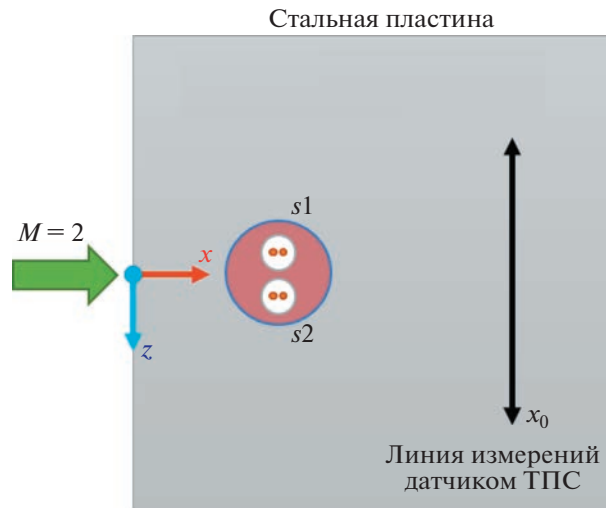


Рис. 1. Схема экспериментов.

### ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты проводились в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН. Параметры потока: число Маха потока  $M = 2$ , единичное число Рейнольдса  $Re_1 = \rho_\infty U_\infty / \mu_\infty = (6 \pm 0.1) \times 10^6 \text{ м}^{-1}$ , где  $\rho_\infty$ ,  $U_\infty$ ,  $\mu_\infty$  — плотность, скорость и вязкость набегающего потока. Температура торможения потока  $T_0 = 295 \pm 1 \text{ К}$ . Схема эксперимента представлена на рис. 1. Исследования выполнялись на модели плоской пластины с острой передней кромкой, установленной в рабочей части под нулевым углом атаки. Ширина модели — 200 мм (во всю ширину рабочей части Т-325), длина — 370 мм. Координата  $x$  направлена вдоль потока и отсчитывается от передней кромки модели, координата  $z$  направлена вдоль кромки модели и отсчитывается от середины модели. В Т-325 при указанных параметрах потока на модели плоской пластины с острой передней кромкой ламинарно-турбулентный переход наблюдается при числе Рейнольдса, рассчитанном по толщине пограничного слоя,  $Re_\delta = (Re_1 x)^{0.5} > 1100$ .

Экспериментальная модель оборудована двумя источниками контролируемых возмущений. Источники располагались в центральной области модели в 30 мм от передней кромки ( $Re_\delta \approx 424$ ). Расстояние между источниками составляло 6 мм (координаты источников  $z_{s1,2} = \pm 3 \text{ мм}$ ). Такое расстояние обосновывается технической возможностью установки источников на модель, характерными масштабами локализованных возмущений, генерируемых аналогичными источниками (10–20 мм в трансверсальном направлении [7, 8]), а также расчетами [24], в которых для этого случая получено наибольшее нарастание возмущений малой амплитуды. Источником возмущений выступает импульсный тлеющий разряд, зажигающийся между двумя изолированными друг от друга и модели электродами. Изолятор и электроды выведены на поверхность модели и отшлифованы заподлицо, центры электродов находятся на линии, параллельной направлению набегающего потока.

Схема зажигания тлеющего разряда условно представлена на рис. 2. Она основана на коммутации постоянного высокого напряжения с помощью быстродействующих высоковольтных ключей, которые управлялись импульсными сигналами с двухканального генератора. Во всех представляемых экспериментах частота зажигания разряда в экспериментах составляла 312.5 Гц, длительность горения — 25 мкс. С помощью 4-х канального осциллографа регистрировались напряжения на электродах источника, что позволило определить падение напряжения на электродах и ток разряда. В экспериментах падение напряжения на электродах во время горения разряда составляло 640–690 В, ток разряда — 14–16 мА. Высокое напряжение на электродах и ток разряда указывают на то, что в этих исследованиях наблюдается тлеющий режим горения. Электрическая энергия на разряде в одном импульсе составляет 0.2–0.3 мДж.

Пульсации и среднее течение пограничного слоя измерялись с помощью однопроводного датчика термоанемометра постоянного сопротивления. Датчик был изготовлен из вольфрамовой

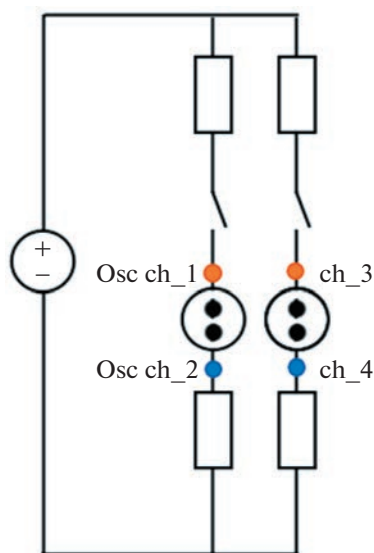


Рис. 2. Схема зажигания разрядов.

проволоки длиной около 1.7 мм и диаметром 10 микрон. Перегрев нити составлял 0.8, в этом случае сигнал термоанемометра связан в основном с пульсациями массового расхода [25].

Среднее напряжение термоанемометра измерялось с помощью цифрового вольтметра. Пульсационный сигнал термоанемометра и управляющие зажиганием разряда импульсные сигналы одновременно записывались 4-х канальным аналого-цифровым преобразователем L-card E20-10. В каждой точке измерения регистрировались 4 реализации сигналов длиной около 0.4 с каждая с частотой дискретизации 2.5 МГц на каждый канал. При обработке исходных данных записанные сигналы разделялись на 520 реализаций “пролета” возмущений от разряда с последующим синхронным осреднением, что позволило выделить контролируемые возмущения от разрядов от фона случайных естественных пульсаций пограничного слоя. Разделение сигнала термоанемометра проводилось по фронтам управляющего разрядом сигнала.

В данных исследованиях измерения термоанемометром проводились в трансверсальном направлении (вдоль  $z$  координаты) на расстоянии 80 мм ( $Re_\delta \approx 693$ ) от передней кромки экспериментальной модели в сверхзвуковой части пограничного слоя в области максимального уровня естественных пульсаций. В области измерений средний массовый расход  $\rho U \approx 0.7\rho U_\infty$ , где  $\rho U_\infty$  – массовый расход набегающего потока.

Из измеренных данных определялись пульсации массового расхода, нормированные на среднее локальное течение

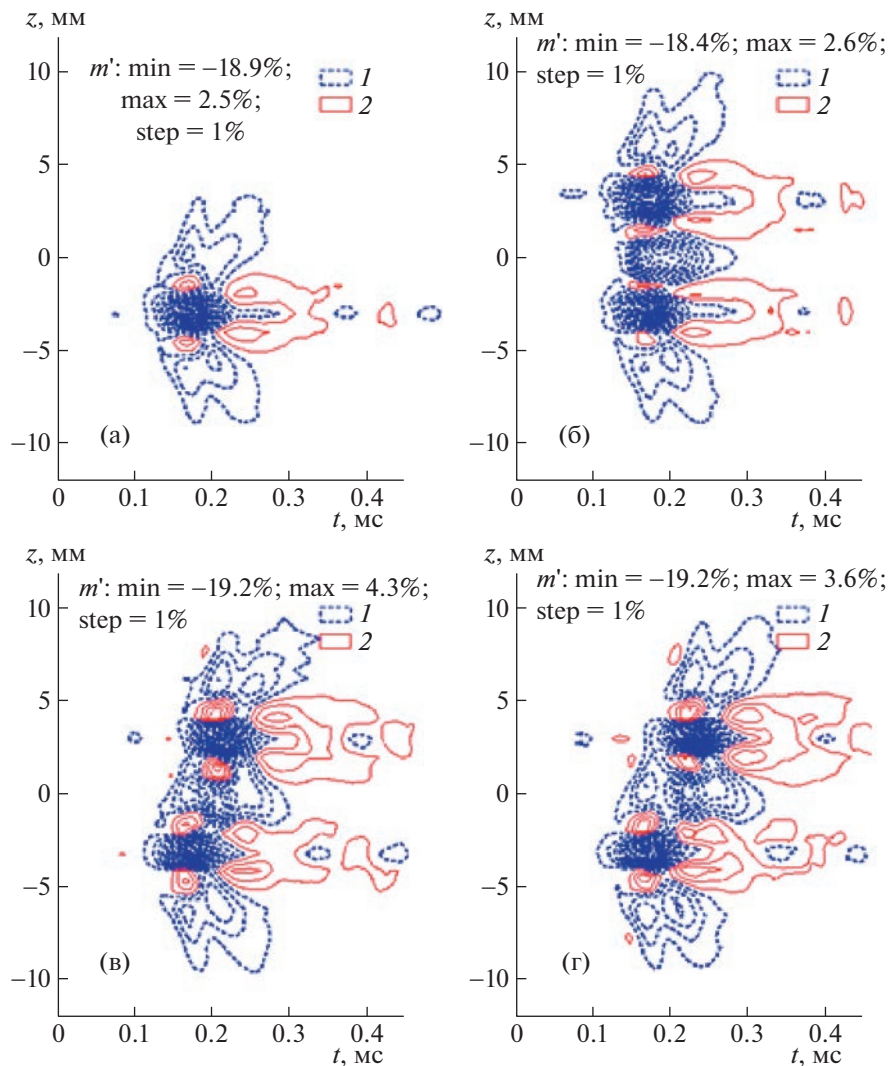
$$m'(t) = \frac{(\rho U)'}{(\rho U)_{loc}} \times 100\% = \frac{e'(t)}{E \cdot Q} \times 100\%$$

Здесь  $e'(t)$  – пульсационный сигнал,  $E$  – среднее напряжение термоанемометра,  $Q = 0.25$  – коэффициент чувствительности к пульсациям массового расхода [25].

Для изучения частотно-волновой структуры возбуждаемых источниками контролируемых возмущений анализировались амплитудные спектры пульсаций, полученные с помощью дискретного преобразования Фурье. Также для различных частот анализировались амплитудные спектры по поперечному волновому числу  $\beta$ :

$$A_{f\beta}(f, \beta) = \left| \frac{\sqrt{2}}{T \cdot \delta_0} \sum_{l,k} m'(z_l, t_k) \exp(i2\pi f t_k - \beta z_l) \Delta t \Delta z \right|$$

где  $T = 1$  мс – длительность анализируемых осциллограмм,  $\delta_0 = 1$  мм – характерная толщина пограничного слоя в области измерений.



**Рис. 3.** Изолинии пульсаций массового расхода ( $m'$ ) контролируемых возмущений в плоскости ( $z, t$ ): одиночный источник (а); два синхронных источника (б); два источника с временной задержкой 40 мкс (в); два источника с временной задержкой 60 мкс (г); 1 – отрицательные пульсации; 2 – положительные пульсации.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Были проведены измерения при четырех вариантах работы источников: при работе одного источника, при синхронной работе двух источников и при временной задержке зажигания разрядов в 40 и 60 мкс. На рис. 3 представлены экспериментальные данные в виде изолиний пульсаций массового расхода в плоскости ( $z, t$ ), измеренные на расстоянии 80 мм от передней кромки модели при работе одного источника, двух синхронных источников и в случае работы источников с временной задержкой.

В случае одиночного источника в области измерений возмущение от разряда в поперечном направлении имеет размер около 10 мм и симметрично относительно положения источника в поперечном направлении ( $z = -3$  мм). В структуре возмущения можно выделить следующие составляющие: центральный дефект на линии за источником ( $z = -3$  мм), наблюдается максимальное мгновенное отклонение массового расхода от среднего значения и составляет около 19% от локального базового течения; боковые отрицательные пульсации с максимальной амплитудой около 3% при  $z \approx 0$  и  $-6$  мм, фронт этих пульсаций имеет наклон; положительные пульсации с максимальным отклонением от среднего течения при  $z \approx -2$  и  $-4$  мм. В целом наблюдаемая структура возмущений от одиночного импульсного разряда согласуется с предыдущими экспе-

риментальными результатами [7, 8], несмотря на то, что амплитуда центрального дефекта отличается, что связано с большей энергией разряда в настоящей работе.

В случае синхронного зажигания двух импульсных разрядов в  $z = \pm 3$  мм, как и в случае одиночного источника, выделяются высокоинтенсивные дефекты течения от разрядов, боковые отрицательные и положительные пульсации. В области  $z = 0$  мм наблюдается наибольшее отличие в структуре генерируемого возмущения от случая одиночного источника — дефект с максимальным отклонением от среднего течения около 9%. На внешней границе возмущений амплитуда и форма пульсаций неизменны. Аналогичная картина, когда отличия в структуре контролируемых возмущений наблюдаются только в области между источниками, наблюдалась в численном моделировании генерации в сверхзвуковом пограничном слое возмущений от двух импульсных источников [24], а также в исследованиях для случая периодических возмущений от двух источников [23].

При наличии временной задержки в работе импульсных источников (разряд в  $z = 3$  мм зажигается позже разряда в  $z = -3$  мм) отличия в форме пульсаций также наблюдаются только в области между источниками, а возмущение в целом приобретает наклонный характер.

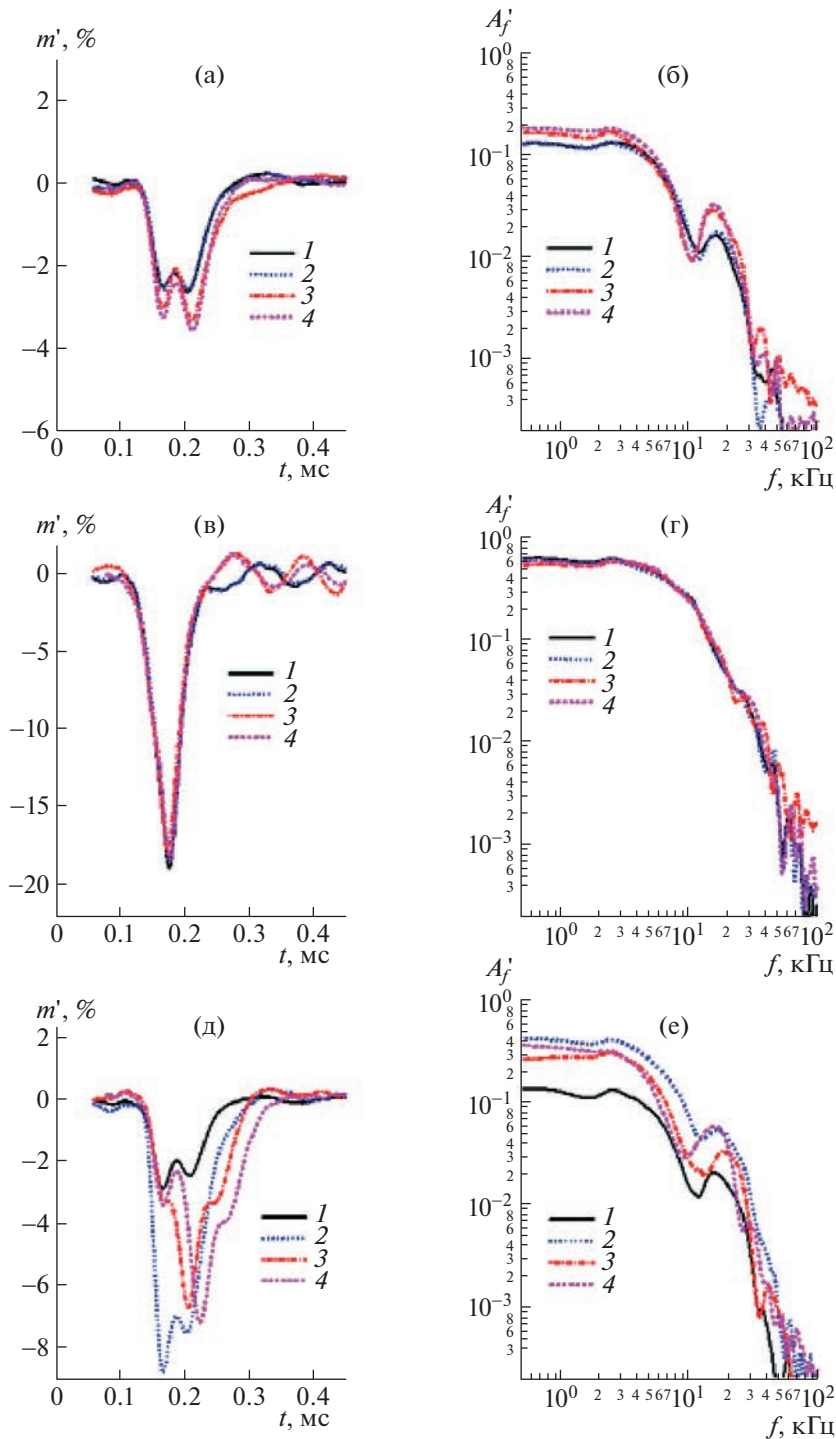
На рис. 4 представлены осциллограммы пульсаций массового расхода (а, в, д) и их амплитудно-частотные спектры (б, г, е) для различных областей возмущений при разных режимах работы разрядов. В области  $z \approx -6$  мм (рис. 4а, б) пульсации по форме близки во всех случаях. Амплитуда пульсаций совпадает в случаях зажигания одного и двух синхронных разрядов, тогда как в экспериментах с временной задержкой наблюдаются пульсации с большей амплитудой. Это обусловлено погрешностью измерений, связанной с тем, что из-за разрушения датчик термоанемометра был заменен на другой, что привело к необходимости повторно устанавливать положение датчика в пограничном слое и позиция датчика относительно поверхности модели была изменена, т.е. измерения были проведены в несколько отличном слое. Спектры пульсаций также близки во всех случаях. Частотный состав пульсаций в этой области ограничивается диапазоном до примерно 30 кГц. Выделяется пик в области частот 12–30 кГц, по расчетам [24] в этой области наблюдается наибольшее нарастание возмущений при линейном развитии.

В области  $z \approx -3$  мм (рис. 4в, г), которая соответствует измерениям за одним из разрядов, во всех случаях наблюдается высокоинтенсивный дефект массового расхода, близкий во всех режимах по форме и амплитуде. Частотные спектры во всех случаях также близки. В спектрах не наблюдаются выделенные пики, и амплитуды значительно превышают уровень шума только в области до 40 кГц.

При  $z \approx 0$  мм (рис. 4д, е), где наблюдаются наибольшие отличия в структуре возмущений от одиночного и двух разрядов, в случае одиночного разряда осциллограмма пульсаций и спектр близки по форме и амплитуде результатам, полученным при  $z \approx -6$  мм (рис. 4а, б). В случае одновременного зажигания разрядов форма осциллограмм и частотный состав не изменяются, а амплитуда пульсаций увеличивается приблизительно в три раза по сравнению со случаем одиночного разряда. Временная задержка в зажигании разрядов приводит к изменению формы и спектрального состава возмущений. При задержке в 40 мкс пик в высокочастотной (12–30 кГц) области спектра значительно смещен в область высоких частот по сравнению со случаями одиночного и двух синхронных источников. При увеличении временной задержки в зажигании разрядов до 60 мкс смещение этого пика относительно случая синхронного зажигания разряда не наблюдается.

Можно заключить, что в случае двух источников, расположенных параллельно передней кромке, наибольшие отличия в структуре возмущений от разрядов по сравнению со случаем одиночного источника наблюдаются в центральной области. В исследуемой конфигурации источников имеется возможность влиять на амплитудно-частотный состав генерируемых возмущений с помощью временной задержки.

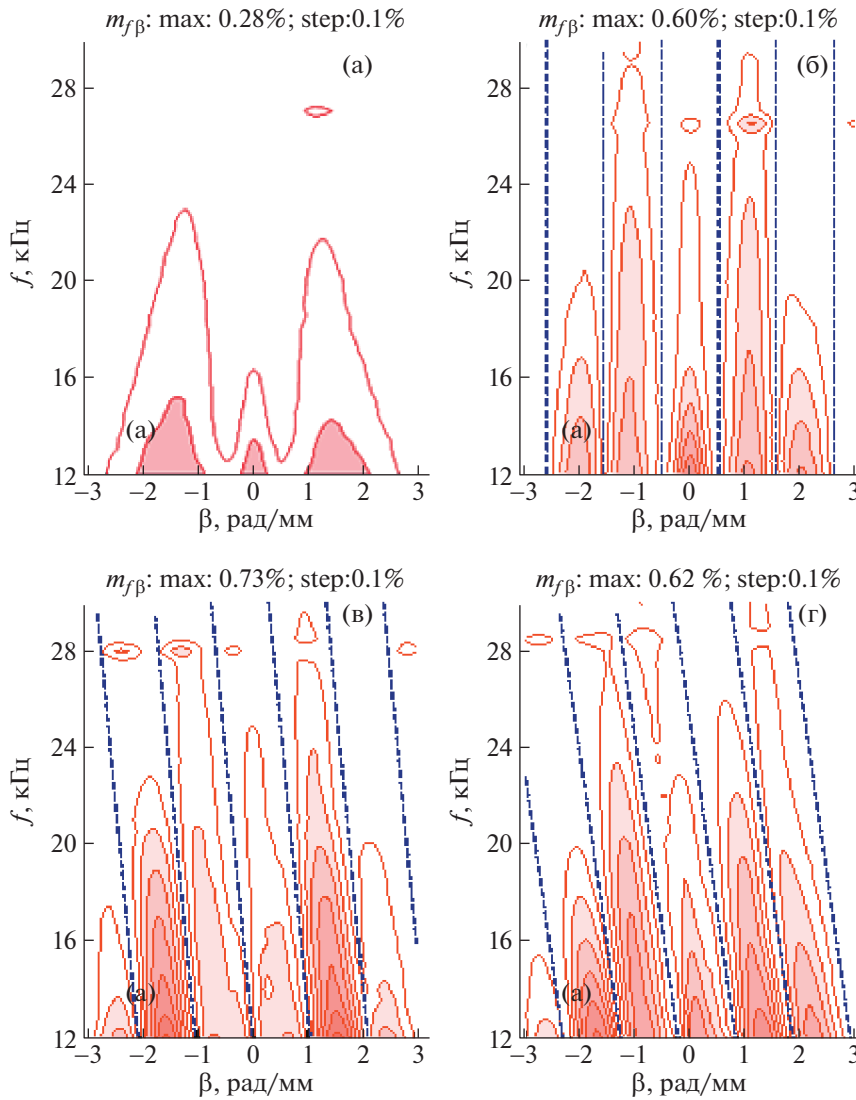
На рис. 5 представлены частотно-волновые спектры возмущений, вводимых в пограничный слой разрядами, в виде изолиний амплитуд в плоскости  $(f, \beta)$ . В случае одиночного источника (рис. 5а) наибольшую амплитуду имеют волны с поперечными волновыми числами в области  $\beta = \pm 1-2$  рад/мм, т.е. наклонные по отношению к набегающему потоку волны. Отметим, что в исследованиях [24] численным моделированием развития возмущений малой амплитуды при близких параметрах потока в пограничном слое пластины наиболее нарастающими являются волны с  $\beta \approx \pm 0.9$  рад/мм, что отличается от наиболее интенсивных волн в составе возмущений в данных экспериментах. Это отличие может быть связано с тем, что в данных экспериментах возмущения не являются малыми и в их нарастании могут проявляться нелинейные эффекты. Помимо этого, возможно, что используемый источник контролируемых возмущений изначально



**Рис. 4.** Осциллограммы (а, в, д) и амплитудно-частотные спектры (б, г, е) пульсаций в  $z \approx -6$  мм (а, б),  $-3$  мм (в, г) и  $0$  мм (д, е): 1 – одиночный источник; 2 – два синхронных источника; 3 – два источника с временной задержкой  $40$  мкс; 4 – два источника с временной задержкой  $60$  мкс.

но вводит в пограничный слой возмущение, в составе которого волны с большими  $\beta$  имеют большую амплитуду.

В случае одновременного зажигания двух разрядов (рис. 5б) в спектре вводимых контролируемых возмущений наблюдаются пучности и узлы. При этом для различных частот их положения одинаковы. Аналогичное появление узлов и пучностей в волновом спектре возмущений наблюдалось в расчетах [24], при этом значения  $\beta$ , при которых наблюдаются узлы, такие же как в данных экспериментах.



**Рис. 5.** Частотно-волновые спектры контролируемых возмущений: одиночный источник (а); два синхронных источника (б); два источника с временной задержкой 40 мкс (в); два источника с временной задержкой 60 мкс (г).

При наличии временной задержки в работе источников контролируемых возмущений (рис. 5в, г) в частотно-волновых спектрах также наблюдаются узлы и пучности, однако значения поперечной проекции волнового вектора  $\beta$ , при которых они наблюдаются, зависят от частоты. Эта зависимость меняется при варьировании временной задержки.

Узлы и пучности в амплитудных волновых спектрах наблюдались ранее в численных и экспериментальных исследованиях по развитию периодических [23] и локализованных [24] возмущений от двух разнесенных в пространстве источников в сверхзвуковом пограничном слое. Наличие узлов и пучностей может быть объяснено интерференцией волн от источников. Возмущение, порожденное на конкретной частоте одним источником, может быть представлено в виде суммы плоских волн с различными волновыми числами и амплитудами. Тогда результат их наложения представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \sum_j A_j \cdot \cos(2\pi f t + \beta_j(z - z_0) + \alpha_j x) + \\
 & + \sum_j A_j \cdot \cos(2\pi f(t + \tau) + \beta_j(z + z_0) + \alpha_j x) = \\
 & = 2 \sum_j A_j \cdot \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + \beta_j z + \alpha_j x\right) \cos(\pi f \tau + \beta_j z_0)
 \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – продольное и поперечное волновое число,  $\tau$  – временная задержка в работе источников,  $z_0 = 3$  мм – половина расстояния между источниками. Последний множитель в правой части выражения определяет положение пучностей и узлов в амплитудном волновом спектре. Их расположение в спектре определяется расстоянием между источниками и задержкой в их работе. Нулевой амплитуде (узлам) соответствуют значения  $\beta = \pi \cdot (0.5 + n - f\tau)/z_0$ , где  $n$  – целое число, а угол наклона  $\phi$  линий, на которых расположены узлы в плоскости  $(f, \beta)$ , может быть определен как  $\phi = \arctg[-z_0/(\pi\tau)]$ . На рис. 5б, в и г результаты расчетов положения узлов в плоскости  $(f, \beta)$  представлены прерывистыми линиями. Как видно, в волновых спектрах возмущений от импульсных разрядов положение узлов хорошо согласуется с приведенными выше выкладками по интерференции волн.

Отметим, что в работах [23] и [24], в которых наблюдались такие же эффекты при формировании контролируемых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое от двух разнесенных источников, исследования проведены для возмущений малой амплитуды, развитие которых согласовывалось с линейной теорией устойчивости. В экспериментах, результаты которых впервые представляются в данной работе, амплитуда возмущений выше, однако также наблюдаются узлы и пучности, а их положения хорошо предсказываются интерференцией волн.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит новый метод введения контролируемых возмущений в сверхзвуковой пограничный слой с помощью двух импульсных тлеющих разрядов. Проведены экспериментальные исследования формирования локализованных возмущений от одного и двух источников в пограничном слое пластины при числе Маха  $M = 2$  при различных временных задержках в их работе. Источники возмущений располагались на линии параллельной передней кромке модели пластины.

Показано, что наибольшие отличия в структуре возмущений от одного и двух источников наблюдаются в центральной области, тогда как на боковых границах возмущения пульсации близки во всех рассматриваемых случаях. Временная задержка в работе источников приводит к изменению амплитудно-частотного состава возмущений от разрядов.

В случае работы двух источников в частотно-волновой структуре возмущений формируются узлы и пучности, положение которых в плоскости  $(f, \beta)$  определяется расстоянием между источниками и временной задержкой в зажигании разрядов. Качественно это может быть описано линейной интерференцией волн от двух источников. Экспериментально показано, что варьированием временной задержки в зажигании разрядов можно изменять частотно-волновую структуру контролируемых возмущений.

С помощью полученных в работе результатов можно конфигурировать источники так, чтобы вводить в пограничный слой контролируемые возмущения сложного частотно-волнового спектра.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00097, <https://rscf.ru/project/21-79-00097/>. Работа выполнена на базе ЦКП “Механика” ИТПМ СО РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Косинов А.Д., Маслов А.А. Развитие искусственно вызванных возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 37–43.
2. Kosinov A.D., Maslov A.A., Shevelkov S.G. Experiments on the stability of supersonic laminar boundary layers // J. Fluid Mech. 1990. V. 219. P. 621–633. <https://doi.org/10.1017/S0022112090003111>
3. Bountin D., Shiplyuk A., Maslov A. Evolution of nonlinear processes in a hypersonic boundary layer on a sharp cone // J. Fluid Mech. 2008. V. 611. P. 427–442. <https://doi.org/10.1017/S0022112008003030>
4. Ермолаев Ю.Г., Колосов Г.Л., Косинов А.Д., Семенов Н.В. Линейная эволюция контролируемых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое скользящего крыла // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 2. С. 58–68.
5. Kosinov A.D., Kolosov G.L., Semionov N.V., Yermolaev Y.G. Linear development of controlled disturbances in the supersonic boundary layer on a swept wing at Mach 2 // Phys. Fluids. 2016. V. 28. Art. No. 064101. 16 p. <https://doi.org/10.1063/1.4952999>
6. Casper K.M., Beresh S.J., Schneider S.P. Pressure fluctuations beneath instability wavepackets and turbulent spots in a hypersonic boundary layer // J. Fluid Mech. 2014. V. 756. P. 1058–1091. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.475>
7. Яцких А.А., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д., Семенов Н.В. Эволюция волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое плоской пластины // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 1. С. 17–28.

8. *Yatskikh A., Yermolaev Y., Kosinov A., Semionov N., Semenov A.* Evolution of localized artificial disturbance in 2D and 3D supersonic boundary layers // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2020. V. 234. № 1. P. 115–123.  
<https://doi.org/10.1177/0954410018787120>
9. *Довгаль А.В., Катасонов М.М., Козлов В.В., Павленко А.М.* Эволюция локализованных возмущений пограничного слоя в условиях ламинарно-турбулентного перехода (обзор) // *Теплофизика и аэромеханика*. 2022. Т. 29. № 4. С. 491–506.
10. *Mayer C.S., Wernz S., Fasel H.F.* Numerical investigation of the nonlinear transition regime in a Mach 2 boundary layer // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 668. P. 113–149.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112010004556>
11. *Mayer C.S., Laible A.C., Fasel H.F.* Numerical investigation of wave packets in a Mach 3.5 cone boundary layer // *AIAA J.* 2011. V. 49. № 1. P. 67–86.  
<https://doi.org/10.2514/1.J050038>
12. *Egorov I.V., Novikov A.V.* Direct numerical simulation of laminar–turbulent flow over a flat plate at hypersonic flow speeds // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016. V. 56. P. 1048–1064.  
<https://doi.org/10.1134/S0965542516060129>
13. *Чувахов П.В., Егоров И.В.* Численное моделирование эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое над углом разрежения // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. № 5. С. 49–60.  
<https://doi.org/10.31857/S0568528121050029>
14. *Егоров И.В., Новиков А.В., Чувахов П.В.* Численное моделирование развития турбулентных пятен в сверхзвуковом пограничном слое на пластине // *Матем. моделирование*. 2022. Т. 34. № 7. С. 63–72.  
<https://doi.org/10.20948/mm-2022-07-04>
15. *Хотяновский Д.В., Кудрявцев А.Н.* Прямое численное моделирование перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое на гладких и шероховатых поверхностях // *Прикл. механика и техн. физика*. 2017. Т. 58. № 5. С. 80–92.  
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170508>
16. *Хотяновский Д.В., Кудрявцев А.Н.* Прямое численное моделирование перехода к турбулентности в сверхзвуковом пограничном слое // *Теплофизика и аэромеханика*. 2015. Т. 22. № 5. С. 581–590.
17. *Чувахов П.В., Погорелов И.О.* Источники турбулентности на прямом крыле сверхзвукового пассажирского самолёта // *Матем. моделирование*. 2022. Т. 34. № 8. С. 19–37.  
<https://doi.org/10.20948/mm-2022-08-02>
18. *Гилев В.М., Козлов В.В.* Влияние периодического вдува-отсоса на процесс перехода в пограничном слое // *Уч. записки ЦАГИ*. 1986. Т. 17. № 3. С. 27–33.
19. *Borodulin V.I., Kachanov Y.S.* On properties of the deterministic turbulence and reproducibility of its instantaneous and statistical characteristics // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2014. V. 4. № 6. Art. No. 062004. 19 p.  
<https://doi.org/10.1063/2.1406204>
20. *Бойко А.В., Иванов А.В., Качанов Ю.С., Мищенко Д.А.* Исследование слабонелинейного развития нестационарных вихрей Гёртлера // *Теплофизика и аэромеханика*. 2010. Т. 17. № 4. С. 487–514.
21. *Borodulin V.I., Kachanov Y.S.* Experimental evidence of deterministic turbulence // *Eur. J. Mech. B/Fluids*. 2013. V. 40. P. 34–40.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2013.02.004>
22. *Corke T.C., Cavalieri D.A., Matlis E.* Boundary-layer instability on sharp cone at Mach 3.5 with controlled input // *AIAA J.* 2002. V. 40. P. 1015–1018.  
<https://doi.org/10.2514/2.1744>
23. *Kolosov G.L., Kosinov A.D., Semenov A.N., Yatskikh A.A.* Experimental and numerical investigation of controlled disturbances development from two sources in supersonic boundary layer // *Advances in Aerodynamics*. 2019. V. 1. Art. № 14. 13 p.  
<https://doi.org/10.1186/s42774-019-0017-4>
24. *Яцких А.А., Афанасьев Л.В.* Численное моделирование эволюции локализованных возмущений от двух синхронных разнесенных источников в сверхзвуковом пограничном слое // *Теплофизика и аэромеханика*. 2022. Т. 29. № 6. С. 923–934.
25. *Yatskikh A.A., Kosinov A.D., Semionov N.V., Smorodsky B.V., Ermolaev Yu.G., Kolosov G.L.* Investigation of laminar-turbulent transition of supersonic boundary layer by scanning constant temperature hot-wire anemometer // *AIP Conf. Proc.* 2018. V. 2027. Art. No. 040041. 5 p.  
<https://doi.org/10.1063/1.5065315>

УДК 532.526

## РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЛАЗМЕННЫХ АКТУАТОРОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ТЕЧЕНИЕМ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СТРЕЛОВИДНОМ КРЫЛЕ

© 2023 г. С. В. Мануйлович\*

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского,  
Жуковский, Россия

\*E-mail: sergei.manuilovich@gmail.com

Поступила в редакцию 28.06.2022 г.

После доработки 28.01.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Теоретически изучен процесс управления течением в пограничном слое на стреловидном крыле с помощью ряда плазменных актуаторов, установленных под углом к передней кромке. Исследован резонансный отклик управляемого течения в случае, когда угол наклона актуаторов близок углу наклона стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения. Расчет управляемого течения произведен в рамках параболизированной системы уравнений Навье–Стокса. Вычислены характеристики устойчивости периодических течений, сформированных воздействием управляющей объемной силы.

**Ключевые слова:** пограничный слой, поперечное течение, объемная сила, резонансное воздействие, устойчивость периодического течения

**DOI:** 10.31857/S1024708423600215, **EDN:** WMBUGI

Течение в пограничном слое на стреловидном крыле современного пассажирского самолета носит турбулентный характер. Это связано с наличием поперечного течения — ненулевого профиля скорости пограничного слоя в плоскости, перпендикулярной вектору скорости внешнего течения. Именно неустойчивость поперечного течения является основной причиной преждевременного ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое на стреловидном крыле [1]. В этой связи является актуальной разработка методов уменьшения интенсивности поперечного течения.

Очевидный способ ослабления поперечного течения — уменьшение угла стреловидности крыла — приводит к уменьшению скорости крейсерского режима полета во избежание появления скачков уплотнения и связанного с этим увеличения волнового сопротивления. Классическим методом уменьшения скорости поперечного течения при сохранении геометрии крыла является отсос газа через его поверхность [2].

Другой метод активного подавления поперечного течения предложен в [3]. Он заключается в использовании плазменных актуаторов, формирующих поле объемной силы, направленной против поперечного течения. Положительный эффект такого способа управления был продемонстрирован в эксперименте [4]; там ослабление поперечного течения достигалось с помощью единичного актуатора, размещенного на начальном участке пограничного слоя с электродами, параллельными передней кромке модели. Это позволило увеличить протяженность ламинарного участка течения на несколько процентов.

Поскольку вниз по течению угол наклона внешней линии тока к направлению передней кромки крыла возрастает, для ослабления поперечного течения более выгодным является расположение актуаторов, электроды которых составляют некоторый угол с передней кромкой. В идеализированном случае поля объемной силы, однородного вдоль размаха крыла, оптимальной является конфигурация, когда сила направлена всюду строго против поперечного течения [5]. Поскольку с помощью электрогидродинамического воздействия создать однородное вдоль размаха распределение объемной силы невозможно, представляется естественным вместо однородного

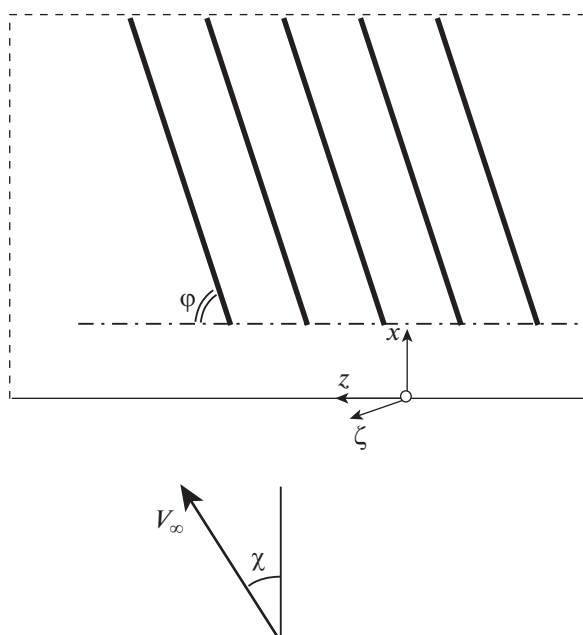


Рис. 1. Схема течения, система координат и конфигурация системы управления.

организовать продольно-периодическое силовое воздействие с помощью системы наклонных актуаторов, расставленных с некоторым шагом вдоль размаха крыла [6]. Как показано в [7], такая конфигурация системы управления может оказывать на течение нежелательное воздействие. Приведем краткое пояснение.

Пусть течение в пограничном слое управляется последовательностью наклонных актуаторов, расставленных вдоль размаха крыла с некоторым периодом. Оси виртуальной системы вихрей неустойчивости поперечного течения того же периода составляют с передней кромкой крыла углы, на несколько градусов большие, чем местные углы наклона линий тока внешнего течения. По мере разгона внешнего течения при удалении от передней кромки углы наклона его линий тока монотонно возрастают, и направления осей виртуальных вихрей неустойчивости могут совпасть с направлениями электродов актуаторов, что вызовет резонансный отклик управляемого течения. Линейный анализ резонанса проведен в [7]; данная работа посвящена изучению этого явления в нелинейной постановке.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задачу управления течением в пограничном слое на стреловидном крыле будем изучать, моделируя эксперименты, проводимые в низкоскоростных аэродинамических трубах. В этих экспериментах в качестве модели как правило используется плоская пластина со скошенной передней кромкой, обтекаемая под нулевым углом атаки. Для формирования разгонного течения над ней устанавливают вытесняющее тело цилиндрической формы, образующие которого параллельны передней кромке модели [8].

Рассмотрим задачу управления течением в ламинарном пограничном слое на плоской полубесконечной пластине, обтекаемой равномерным потоком газа под углом скольжения  $\chi$  с небольшой дозвуковой скоростью  $V_\infty^\circ$ , плотностью  $\rho^\circ$  и вязкостью  $\mu^\circ$  (кружками помечаем размерные величины). Введем декартову систему координат с началом на передней кромке пластины, ось  $x^\circ$  направим вдоль пластины перпендикулярно передней кромке, ось  $y^\circ$  — по нормали к стенке, а ось  $z^\circ$  — вдоль передней кромки (рис. 1). Соответствующие компоненты вектора скорости обозначим  $u^\circ$ ,  $v^\circ$ ,  $w^\circ$ , давление —  $p^\circ$ . Значения параметров течения на внешней границе пограничного слоя будем пометать индексом  $e$ .

Будем предполагать, что течение управляется системой исполнительных элементов, расставленных с постоянным шагом вдоль размаха. Прямолинейные электроды актуаторов наклонены

под углом  $\varphi$  к передней кромке (рис. 1). Компоненты объемной силы вдоль пластины и по нормали к ней обозначим, соответственно,  $f^\circ$  и  $g^\circ$ .

В дальнейшем будем использовать две размерных единицы длины — масштаб внешнего течения  $L^\circ$  и характерную толщину пограничного слоя

$$\delta^\circ = \sqrt{\frac{\mu^\circ L^\circ}{\rho^\circ V_\infty^\circ}}$$

Введем безразмерные переменные с помощью равенств

$$\{x^\circ, y^\circ, z^\circ\} = \delta^\circ \{x, y, z\}, \quad \{u^\circ, v^\circ, w^\circ\} = V_\infty^\circ \{u, v, w\}$$

$$p^\circ = \rho^\circ V_\infty^{\circ 2} p, \quad \{f^\circ, g^\circ\} = \frac{\rho^\circ V_\infty^{\circ 2}}{L^\circ} \{f, g\}$$

В сделанных предположениях параметры течения удовлетворяют системе уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - f \cos \varphi \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $R = \rho^\circ V_\infty^\circ \delta^\circ / \mu^\circ \gg 1$  — число Рейнольдса.

Параметры течения удовлетворяют условиям прилипания на стенке и условиям срачивания с внешним течением

$$\begin{aligned} u(x, 0, z) &= v(x, 0, z) = w(x, 0, z) = 0 \\ u(x, \infty, z) &= u_e(x), \quad w(x, \infty, z) = w_e = \sin \chi, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(x, \infty, z) = -u_e \frac{du_e}{dx} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для расчета течения в пограничном слое необходимо задать продольную скорость внешнего течения  $u_e$ . Будем использовать ее модельное распределение в форме сглаженной ступеньки

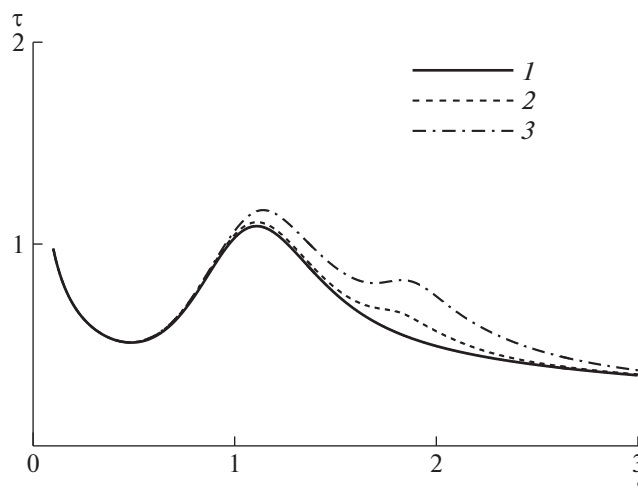
$$u_e(s) = \left[ 1 + H \left( \frac{s-1}{\Delta s} \right) \Delta u \right] \cos \chi, \quad s = \frac{1}{R} x, \quad H(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{th} \xi)$$

где  $\Delta u = 0.5$  задает приращение продольной скорости внешнего течения, вызванное действием вытесняющего тела, а  $\Delta s = 0.3$  — полуширина области разгона.

В силу двумерной конфигурации системы актуаторов будем считать, что объемная сила всюду перпендикулярна электродам, т.е. ее направление лежит в плоскости  $y, \zeta = z \sin \varphi - x \cos \varphi$  (см. рис. 1). Зададим компоненты объемной силы в виде [7]

$$\begin{aligned} f &= c f_s F(\zeta) \exp(-y^2), \quad g = c f_s \frac{dF}{d\zeta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(y) \\ F &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp[-(\zeta - \Pi m)^2], \quad f_s = H \left( \frac{s-s_0}{a} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\operatorname{erfc}(y)$  — интеграл вероятностей [9]. Множитель  $f_s$  задает форму сглаживания силового воздействия на его начальном участке. Местоположение переднего края системы управления  $s_0 = 0.5$  выбрано таким образом, чтобы оно предшествовало области потери устойчивости (см. разд. 5). Параметр  $a = 0.05$  определяет характерный размер области сглаживания.



**Рис. 2.** Распределения по  $s$  трения, осредненного по размаху пластины: в отсутствие управляющего воздействия — 1, при воздействии с углом наклона актуаторов  $\varphi = 71^\circ$ , расставленных с периодами  $\Pi = 6, 12 - 2, 3$ .

## 2. ТЕЧЕНИЕ В ОТСУТСТВИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Исследуем характеристики течения в классическом [2] пограничном слое на пластине, соответствующем описанному в разд. 1 модельному распределению скорости внешнего течения. Течение — двумерное (аргумент  $z$  опускаем). Здесь и далее все расчеты проведены при угле скольжения  $\chi = 30^\circ$ .

На рис. 2 показано распределение величины

$$\tau(s) = \frac{\partial u}{\partial y}(s, 0) \cos \chi + \frac{\partial w}{\partial y}(s, 0) \sin \chi \quad (2.1)$$

характеризующей сопротивление трения в направлении скорости набегающего потока (кривая 1). При  $0 < s < 0.5$  трение убывает по закону, близкому  $\tau \sim \sqrt{s}$ , что соответствует течению Блазиуса [2] для  $u_e \equiv \sqrt{3}/2$ . Затем на участке  $0.5 < s < 1.2$  течение подвергается разгону, что приводит к значительному возрастанию трения. Еще ниже по потоку, где  $u_e \approx 1.3$ , трение вновь начинает затухать.

Опишем основные характеристики поперечного течения при отсутствии силового воздействия. Введем обозначения для формы профиля скорости поперечного течения, а также для местного максимума его интенсивности

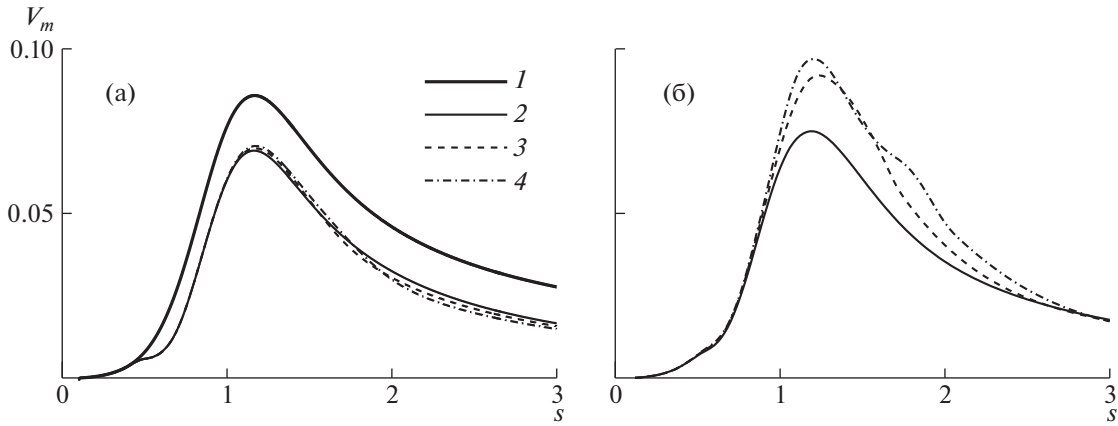
$$V_{cf} = \frac{u_e w_e}{\sqrt{u_e^2 + w_e^2}} \left( \frac{u}{u_e} - \frac{w}{w_e} \right), \quad V_m(s) = \max_y V_{cf} \quad (2.2)$$

На начальном участке пластины течение мало отличается от течения Блазиуса, поэтому интенсивность поперечного течения мала. На участке разгона происходит резкий рост его интенсивности (рис. 3а, линия 1), максимум которой  $V_m = 0.086$  достигается при  $s = 1.17$ . Затем наблюдается сравнительно медленное (приблизительно — обратно пропорционально расстоянию от передней кромки) уменьшение амплитуды поперечного течения несмотря на практически отсутствующий градиент давления при  $s > 2$ . Эта особенность — следствие инерции течения.

На рис. 4а приведена форма профиля скорости поперечного течения вблизи точки максимума его интенсивности ( $s = 1.2$ ).

## 3. МЕТОД РАСЧЕТА УПРАВЛЯЕМОГО ТЕЧЕНИЯ

Для вычисления характеристик пограничного слоя, управляемого периодической по размаху объемной силой (1.4), перепишем систему (1.1) в переменных  $s, y, \zeta$ , пренебрегая членами порядка  $R^{-2}$  (далее в расчетах всюду  $R = 500$ )



**Рис. 3.** Распределения по  $s$  максимума скорости поперечного течения, осредненного по  $z$  (а), абсолютного по  $z$  (б): 1 – отсутствие силового воздействия; 2–4 – при воздействии актуаторами под углами наклона  $\varphi = 75^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $71^\circ$  ( $\Pi = 12$ ).

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial y} + \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \\
 & u \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - f \cos \varphi \right) \\
 & u \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + g \right) \\
 & u \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} - \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \sin \varphi \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + f \sin \varphi \right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Параметры течения периодичны по  $\zeta$  при фиксированных  $s, y$ . В связи с этим будем представлять поле объемной силы и решение системы (3.1) в форме рядов Фурье по переменной  $\zeta$

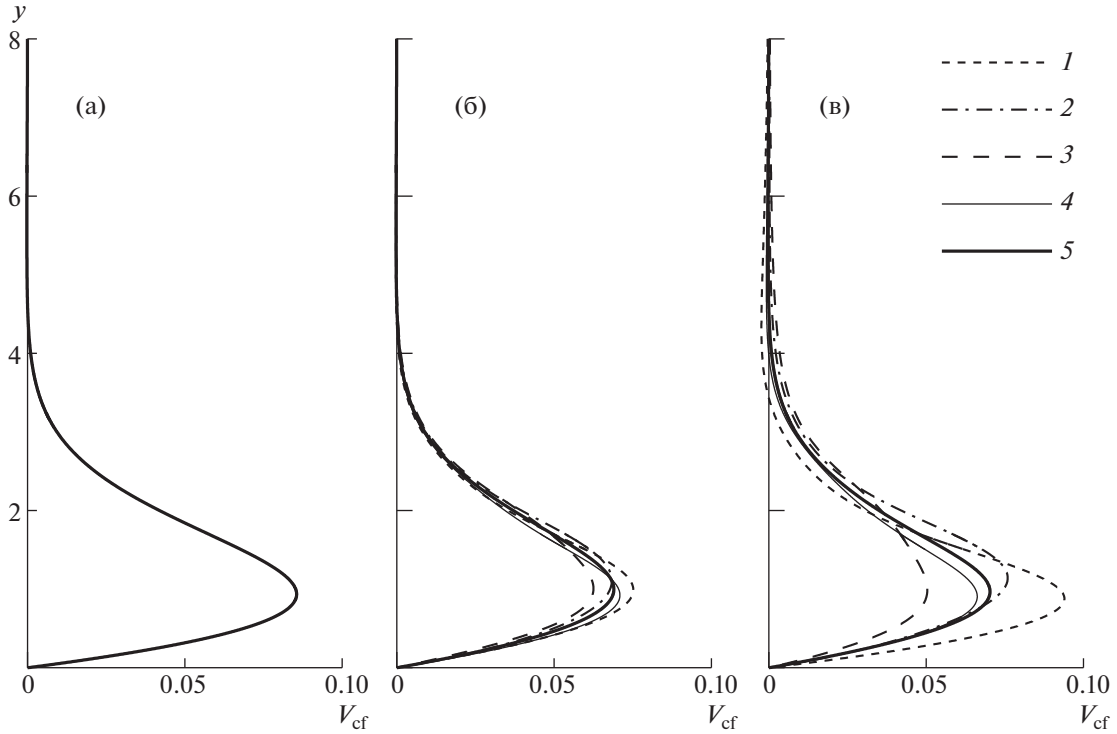
$$\begin{aligned}
 \{f, g\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{f_n, g_n\}(s, y) \exp(ik_n \zeta), \quad k_n = \frac{2\pi n}{\Pi} \\
 q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(s, y) \exp(ik_n \zeta), \quad q = u, v, w, p, \quad q_0 = U, \frac{1}{R} V, W, P
 \end{aligned}$$

Выпишем систему для нулевых гармоник, снова пренебрегая членами порядка  $R^{-2}$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\
 & U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -f_0 \cos \varphi - R \sum_0 \left( i\alpha_m u_l u_m + v_l \frac{\partial u_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l u_m \right) \\
 & \frac{\partial P}{\partial y} = -\sum_0 \left( i\alpha_m u_l v_m + v_l \frac{\partial v_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l v_m \right) \\
 & U \frac{\partial W}{\partial s} + V \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = f_0 \sin \varphi - R \sum_0 \left( i\alpha_m u_l w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l w_m \right)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь и далее используются обозначения

$$\sum_n (\bullet)_l (\bullet\bullet)_m = \sum_{\substack{l+m=n \\ l, m \neq 0}} (\bullet)_l (\bullet\bullet)_m, \quad \alpha_n = -k_n \cos \varphi, \quad \gamma_n = k_n \sin \varphi$$



**Рис. 4.** Профили скорости поперечного течения в точке  $s = 1.2$ ; (а) – при отсутствии силового воздействия и (б, в) – при управлении системой актуаторов с углом наклона  $\varphi = 71^\circ$  и шагом  $\Pi = 6, 12$  в сечениях  $\zeta = -\Pi/4, 0, \Pi/4, \Pi/2$  (1–4); 5 – скорость поперечного течения, осредненная по размаху.

При расчете высших гармоник будем пренебрегать конвективными членами порядка  $R^{-1}$ . В результате системы для гармоник с номерами  $n \neq 0$  приобретают вид

$$\begin{aligned}
 i\alpha_n u_n + \frac{\partial v_n}{\partial y} + i\gamma_n w_n &= 0 \\
 (i\alpha_n U + i\gamma_n W) u_n + \frac{\partial U}{\partial y} v_n + i\alpha_n p_n - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - k_n^2 u_n \right) &= \\
 &= -\frac{1}{R} f_n \cos \varphi - \sum_n \left( i\alpha_m u_l u_m + v_l \frac{\partial u_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l u_m \right) \\
 (i\alpha_n U + i\gamma_n W) v_n + \frac{\partial p_n}{\partial y} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} - k_n^2 v_n \right) &= \frac{1}{R} g_n - \sum_n \left( i\alpha_m u_l v_m + v_l \frac{\partial v_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l v_m \right) \\
 (i\alpha_n U + i\gamma_n W) w_n + \frac{\partial W}{\partial y} v_n + i\gamma_n p_n - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} - k_n^2 w_n \right) &= \\
 &= \frac{1}{R} f_n \sin \varphi - \sum_n \left( i\alpha_m u_l w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l w_m \right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

При значительном угле отклонения актуаторов от направления линии тока внешнего течения высшие гармоники имеют тот же порядок, что и вынуждающая сила  $q_n = O(R^{-1})$ , члены под знаками сумм имеют порядок  $O(R^{-2})$ . В этом случае нулевые гармоники удовлетворяют уравнениям классического пограничного слоя, а высшие гармоники могут быть рассчитаны в линейном приближении по малому параметру  $R^{-1}$  [7]. В исследуемом здесь околорезонансном случае все члены в системах (3.2), (3.3) имеют один порядок по числу  $R$ , поэтому члены под знаками сумм имеют порядок  $O(R^{-1})$ .

В силу

$$\frac{\partial P}{\partial s}(s, \infty) = -u_e \frac{du_e}{ds}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(s, y) = O(R^{-1})$$

система (3.2) может быть подвергнута дальнейшему упрощению и приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{ds} - f_0 \cos \varphi - R \sum_0 \left( i\alpha_m u_l u_m + v_l \frac{\partial u_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l u_m \right) \\ U \frac{\partial W}{\partial s} + V \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= f_0 \sin \varphi - R \sum_0 \left( i\alpha_m u_l w_m + v_l \frac{\partial w_m}{\partial y} + i\gamma_m w_l w_m \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Краевые условия для системы (3.4) такие же, как для классического пограничного слоя [2]

$$U(s, 0) = V(s, 0) = W(s, 0) = 0, \quad U(s, \infty) = u_e(s), \quad W(\infty) = w_e \quad (3.5)$$

Краевые условия для системы (3.3) — условия прилипания на поверхности пластины и условия затухания высших гармоник на внешней границе пограничного слоя

$$u_n(s, 0) = v_n(s, 0) = w_n(s, 0) = 0, \quad q_n(s, \infty) = 0 \quad (3.6)$$

Опишем метод расчета краевых задач (3.4), (3.5) и (3.3), (3.6). В первой из них отсутствуют высшие производные по  $s$ , а вторая вообще не содержит производных по этой переменной и зависит от  $s$  как от параметра. Как и система (3.1), объединенная задача (3.3)–(3.6) имеет параболический тип, ее решение вычислялось маршевым методом.

Для расчета решения задачи (3.4), (3.5) применялась неявная схема [2] по переменной  $s$ . Решение задачи (3.3), (3.6) вычислялось методом [7]. На каждом шаге по  $s$  решение рассчитывалось с помощью итераций. Билинейные члены под знаками сумм и коэффициенты системы (3.3) вычислялись с использованием величин, рассчитанных на предыдущем шаге итераций (на первом шаге итераций — с предыдущего шага по  $s$ ). При расчетах бесконечные суммы заменялись конечными —  $N_h \leq n, m, l \leq N_h$ , где  $N_h$  — число учитываемых гармоник. Расчеты управляемого течения проводились для  $N_h = 10$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА УПРАВЛЯЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

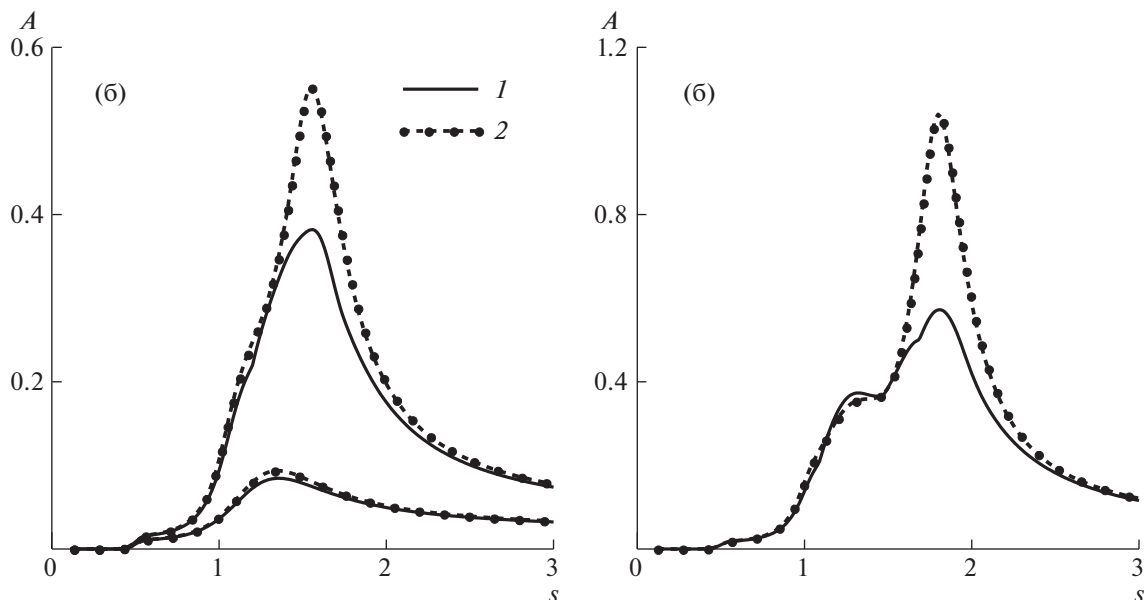
В системе управления, описанной в разд. 1, пока не заданы угол наклона актуаторов  $\varphi$ , расстояние между актуаторами  $\Pi$  и амплитуда силового воздействия  $c$ . Поясним их выбор.

Как уже упоминалось выше, наклон виртуальной системы вихрей неустойчивости на несколько градусов больше наклона внешней линии тока. У изучаемого течения угол наклона линии тока к передней кромке пластины монотонно возрастает, пробегая значения от  $60^\circ$  до  $69^\circ$ . Для исследования околорезонансной конфигурации системы управления будем рассматривать значения углов, лежащих выше этого промежутка.

Исследуемый диапазон изменения параметра  $\Pi$  выбран таким, чтобы соответствующие волновые числа  $\gamma_n$  располагались в окрестности области роста вихрей неустойчивости поперечного течения (см. разд. 5). При варьировании  $\Pi$  амплитудный параметр  $c$  выбирался из условия сохранения интегрального силового воздействия. Далее всюду  $c/\Pi = 0.05$ .

Высота расчетной области и шаги интегрирования по переменным  $s, y$  выбирались с учетом снижения времени вычислений при обеспечении достаточной точности. В результате все расчеты выполнялись при  $y_{\max} = 10, h_s = 0.001, h_y = 0.01$ .

На рис. 2 показаны распределения осредненной по размаху силы трения (2.1), вычисленной для  $\Pi = 6, 12$  и  $\varphi = 71^\circ$ . Расчеты показывают, что при сохранении интегральной силы и увеличении периода воздействия сила трения возрастает. Это связано с ростом вклада, оказываемого высшими гармониками (выражениями под знаками сумм в (3.4)) на осредненное течение, подобно тому, как напряжения Рейнольдса [2] увеличивают наполненность профиля турбулентного течения. Таким образом, увеличение шага расстановки актуаторов может нивелировать их благоприятное стабилизирующее воздействие, вызывая возрастание сопротивления трения до его значений в турбулентном пограничном слое.



**Рис. 5.** Распределения по  $s$  интенсивности колебательной составляющей скорости управляемого течения при углах наклона актуаторов  $\varphi = 75^\circ, 72^\circ$  (а) и  $\varphi = 71^\circ$  (б); 1 – в рамках нелинейной постановки, 2 – в рамках линейного анализа [7] ( $\Pi = 12$ ).

На рис. 4б, в приведены профили скорости поперечного течения в сечении  $s = 1.2$  при управлении системой актуаторов с наклоном  $\varphi = 71^\circ$  и шагом расстановки  $\Pi = 6, 12$ . Линиями 1–4 показаны профили в сечениях, равноотстоящих по размаху; линии 5 – профили осредненного течения. При силовом воздействии средняя скорость поперечного течения снижается почти на 20%, но возникает его поперечная модуляция, усиливающаяся при возрастании периода воздействия. При  $\Pi = 6$  максимум скорости поперечного течения (теперь он зависит и от  $\zeta$ ) колеблется в пределах  $0.062 < V_m < 0.075$ , а при  $\Pi = 12$  – в диапазоне  $0.048 < V_m < 0.097$ , местами даже превышая значение 0.086 для случая отсутствия воздействия. В данной работе исследуются околорезонансные режимы управления поперечным течением, поэтому ниже всюду считаем  $\Pi = 12$ .

На рис. 3а изображены зависимости от  $s$  осредненных по  $z$  значений  $V_m$ , вычисленных для углов наклона актуаторов  $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$  (линии 2–4). Расчеты показывают, что по влиянию на осредненное течение указанные воздействия мало отличаются друг от друга. Что касается абсолютных максимумов скорости по размаху пластины (рис. 3б), то при  $\varphi = 75^\circ$  их отличие от среднего значения мало, а при  $\varphi = 72^\circ$  и  $71^\circ$  оно становится значительным, указывая на околорезонансный характер воздействий.

Для исследования околорезонансных режимов управления введем функцию

$$A(s) = \max_{y, \zeta} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}, \quad q' = q - Q \quad (4.1)$$

характеризующую распределение интенсивности колебательной составляющей  $q'$  скорости течения. Напомним, что в силу малости источников членов в системе (3.3) для высших гармоник, соотношение  $q' = O(1)$  указывает на резонансный характер силового воздействия.

На рис. 5 линиями 1 показаны распределения (4.1), вычисленные для трех значений угла наклона актуаторов. Линиями 2 для сравнения приведены те же распределения, вычисленные в рамках подхода [7] в предположении  $q' = O(R^{-1}) \ll Q$ . При  $\varphi = 75^\circ$  расчеты показали, что результаты, полученные в рамках обоих подходов, практически совпадают (нижние кривые на рис. 5а), т.е. резонанс не наблюдается. При  $\varphi = 72^\circ$  (верхние кривые рис. 5а) максимум функции (4.1) увеличивается почти в 5 раз, а при  $\varphi = 71^\circ$  – еще в 2 раза (рис. 5б).

На начальном участке ( $s < 1$ ) угол наклона линии тока внешнего течения меньше  $65^\circ$ , и результаты расчета для  $\varphi = 72^\circ, 71^\circ$  по-прежнему мало отличаются от решения линеаризованной задачи [7]. Ниже по потоку отличие становится существенным, и нелинейный анализ определяет

более гладкую зависимость (4.1) по сравнению с [7], уменьшая амплитуду околорезонансного пика.

## 5. ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ

Выясним, как управляющее воздействие влияет на скорость роста стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения. Изучим сначала характеристики устойчивости в отсутствие силового воздействия, представляя параметры течения в виде

$$q = Q(y) + \varepsilon [q^*(y) \exp(i\alpha x + i\gamma z) + \text{с.с.}] \quad (5.1)$$

Здесь  $\varepsilon \ll 1$  — амплитуда возмущения,  $\gamma > 0$  — поперечное волновое число. Подставляя (5.1) в систему (1.1), производя ее линеаризацию по параметру  $\varepsilon$  и пренебрегая членами, содержащими  $\partial U/\partial x$ ,  $V$ ,  $\partial W/\partial x$  (плоскопараллельное приближение [2]), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных собственных функций  $q^*$ .

Эта система может быть сведена к уравнению Орра-Зоммерфельда для функции  $v^*$ . Налагая на его решение условия  $v^*(0) = dv^*/dy(0) = v^*(\infty) = 0$ , получим задачу на собственные значения для определения комплексного продольного волнового числа  $\alpha$ . Решение задачи рассчитывалось с помощью вычисления линейно независимых решений с использованием процедуры ортонормализации Шмидта [10].

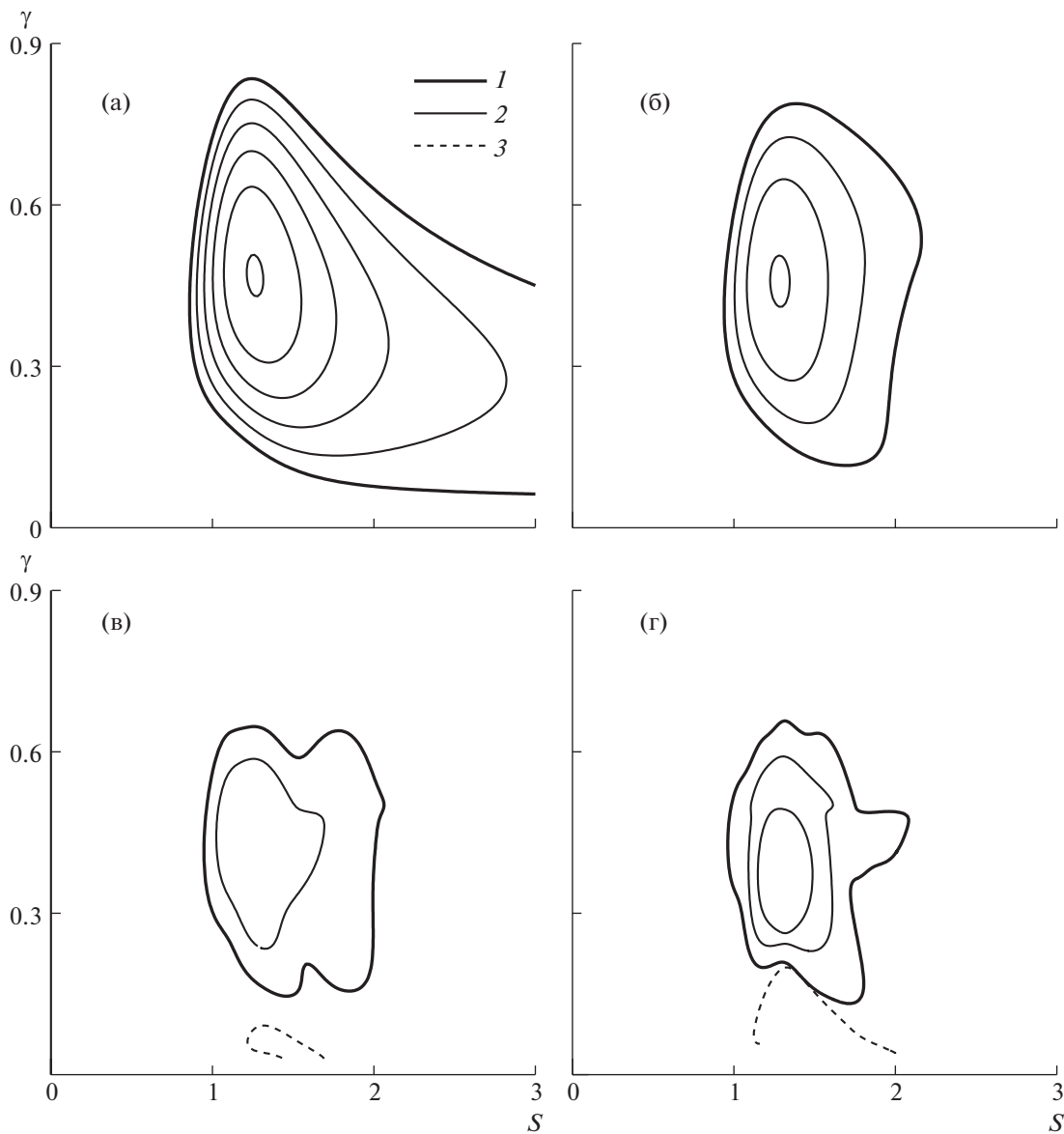
На рис. 6а приведены результаты расчетов инкремента нарастания  $\sigma = -\text{Im } \alpha(s, \gamma)$  моды неустойчивости поперечного течения. Линия 1 — кривая нейтральной устойчивости (где  $\sigma = 0$ ), линии 2 — линии уровня  $\sigma > 0$ , нанесенные с шагом 0.001. Расчет показывает, что усиление стационарных возмущений вниз по потоку впервые наблюдается на расстоянии  $s_c = 0.86$  от передней кромки пластины для гармоники с волновым числом  $\gamma_c = 0.42$ . Максимальная скорость усиления  $\sigma_m = 5.05 \times 10^{-3}$  достигается в точке  $s_m = 1.24$ ,  $\gamma_m = 0.47$ .

Перейдем к изучению характеристик устойчивости течения, модулированного объемным силовым воздействием. Как и в случае классической теории устойчивости, будем, использовать допущение о квазиоднородном, квазипараллельном характере осредненного течения, не распространяя это на колебательную составляющую течения. Исследуем поведение малых стационарных вихревых возмущений, представляя параметры течения в виде

$$q = Q(y) + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) \exp(ik_n \zeta) + \text{с.с.} \right] + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_m^*(y) \exp[i(\alpha_n + \alpha)x + i(\gamma_n + \gamma)z] \quad (5.2)$$

Представление (5.2) аналогично выражению (5.1) для случая отсутствия управления с той разницей, что теперь основное течение и собственная функция периодичны по переменным  $x, z$ . Подставим (5.2) в задачу (1.1), (1.2) и линеаризуем ее по малому  $\varepsilon$ , группируя члены, соответствующие отдельным гармоникам. В результате получим краевую задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} i(\alpha_n + \alpha)u_n^* + \frac{dv_n^*}{dy} + i(\gamma_n + \gamma)w_n^* &= 0 \\ i[(\alpha_n + \alpha)U + (\gamma_n + \gamma)W]u_n^* + \frac{\partial U}{\partial y}v_n^* + i(\alpha_n + \alpha)p_n^* - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 u_n^*}{dy^2} - [(\alpha_n + \alpha)^2 + (\gamma_n + \gamma)^2]u_n^* \right\} &= \\ = - \sum_{\substack{l+m=n \\ l \neq 0}} \left\{ i[(\alpha_n + \alpha)u_l + (\gamma_m + \gamma)w_l]u_m^* + v_l \frac{du_m^*}{dy} + \frac{\partial u_l}{\partial y}v_m^* + i\gamma_l u_l w_m^* \right\} \\ i[(\alpha_n + \alpha)U + (\gamma_n + \gamma)W]v_n^* + \frac{dp_n^*}{dy} - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 v_n^*}{dy^2} - [(\alpha_n + \alpha)^2 + (\gamma_n + \gamma)^2]v_n^* \right\} &= \\ = - \sum_{\substack{l+m=n \\ l \neq 0}} \left\{ i\alpha_l v_l u_m^* + \left[ i(\alpha_m + \alpha)u_l + \frac{\partial v_l}{\partial y} + i(\gamma_m + \gamma)w_l \right]v_m^* + v_l \frac{dv_m^*}{dy} + i\gamma_l v_l w_m^* \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$



**Рис. 6.** Характеристики устойчивости течения: (а) – в отсутствие управления, (б, в, г) – при управлении с углами наклона актуаторов  $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$  ( $\Pi = 12$ ); 1 – кривые нейтральной устойчивости, 2 – линии уровня инкрементов нарастания с интервалом 0.001, 3 – кривые  $\theta(s, \gamma) = \varphi$ .

$$\begin{aligned}
 & i[(\alpha_n + \alpha)U + (\gamma_n + \gamma)W]w_n^* + \frac{\partial W}{\partial y}v_n^* + i(\gamma_n + \gamma)p_n^* - \frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 w_n^*}{dy^2} - [(\alpha_n + \alpha)^2 + (\gamma_n + \gamma)^2]w_n^* \right\} = \\
 & = - \sum_{\substack{l+m=n \\ l \neq 0}} \left\{ i\alpha_l w_l u_m^* + v_l \frac{dw_m^*}{dy} + \frac{\partial w_l}{\partial y} v_m^* + i[(\alpha_n + \alpha)u_l + (\gamma_m + \gamma)w_l]w_m^* \right\} \\
 & u_n^*(0) = v_n^*(0) = w_n^*(0) = 0, \quad q_n^*(\infty) = 0
 \end{aligned}$$

Как и при расчете основного течения, заменим конечными бесконечные суммы в правых частях уравнений (5.3). Сведем систему (5.3) к системе  $6(2N_h + 1)$  дифференциальных уравнений первого порядка, используя в качестве неизвестных функций компоненты вектора  $\mathbf{Z}$

$$Z_{N+1} = u_n^*, \quad Z_{N+2} = \frac{du_n^*}{dy}, \quad Z_{N+3} = v_n^*, \quad Z_{N+4} = p_n^*, \quad Z_{N+5} = w_n^*, \quad Z_{N+6} = \frac{dw_n^*}{dy}$$

$$N = 6(n + N_h), \quad -N_h \leq n \leq N_h$$

Представим  $\mathbf{Z}$  в виде суммы  $3(2N_h + 1)$  линейно независимых решений системы, затухающих при  $y \rightarrow \infty$  (у векторов использованы верхние индексы)

$$\mathbf{Z} = \sum_{n=-N_h}^{N_h} (C_{M+1} \mathbf{Z}^{M+1} + C_{M+2} \mathbf{Z}^{M+2} + C_{M+3} \mathbf{Z}^{M+3}), \quad M = 3(n + N_h) \quad (5.4)$$

В отличие от слагаемых в левых частях уравнений (5.3), правые части быстро стремятся к 0 при  $y \rightarrow \infty$ , поэтому там система распадается на системы четвертого порядка для отдельных гармоник. Это позволяет при  $y = y_{\max}$  задать ненулевые компоненты линейно независимых векторов в явном виде

$$\begin{aligned} Z_{N+1}^{N+1} &= i(\alpha + \alpha_n), \quad Z_{N+2}^{N+1} = i(\alpha + \alpha_n)\lambda_1, \quad Z_{N+3}^{N+1} = \lambda_1 \\ Z_{N+4}^{N+1} &= \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{R}, \quad Z_{N+5}^{N+1} = i(\gamma + \gamma_n), \quad Z_{N+6}^{N+1} = i(\gamma + \gamma_n)\lambda_1 \\ Z_{N+1}^{N+2} &= 1, \quad Z_{N+2}^{N+2} = \lambda_2, \quad Z_{N+3}^{N+2} = -\frac{i(\alpha + \alpha_n)}{\lambda_2} \\ Z_{N+3}^{N+3} &= -\frac{i(\gamma + \gamma_n)}{\lambda_2}, \quad Z_{N+5}^{N+3} = 1, \quad Z_{N+6}^{N+3} = \lambda_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\lambda_1 = \sqrt{(\alpha + \alpha_n)^2 + (\gamma + \gamma_n)^2}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{iR[(\alpha + \alpha_n)u_e + (\gamma + \gamma_n)w_e] + \lambda_1^2}$ ,  $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ .

Линейно независимые решения системы с начальными данными (5.5) вычислялись методом Рунге–Кутты с шагом  $h_y = -0.02$  с использованием ортонормализации. Для расчета коэффициентов разложения (5.4) использовались граничные условия (5.3) при  $y = 0$ , в которых условие для  $v_0^*$  заменено на условие нормировки собственной функции  $du_0^*/dy = 1$  при  $y = 0$ . Полученная линейная неоднородная алгебраическая система уравнений порядка  $3(2N_h + 1)$  решалась методом Гаусса, что позволяло вычислить  $v_0^* = D(\alpha; s, \gamma)$ . Корень  $\alpha = \alpha(s, \gamma)$  дисперсионного соотношения  $D = 0$  рассчитывался методом Ньютона.

Поскольку в данной работе вычисления производились на персональном компьютере, для уменьшения времени параметрических расчетов требовалось определить минимальное количество гармоник, которое следует учитывать для достижения достаточной точности.

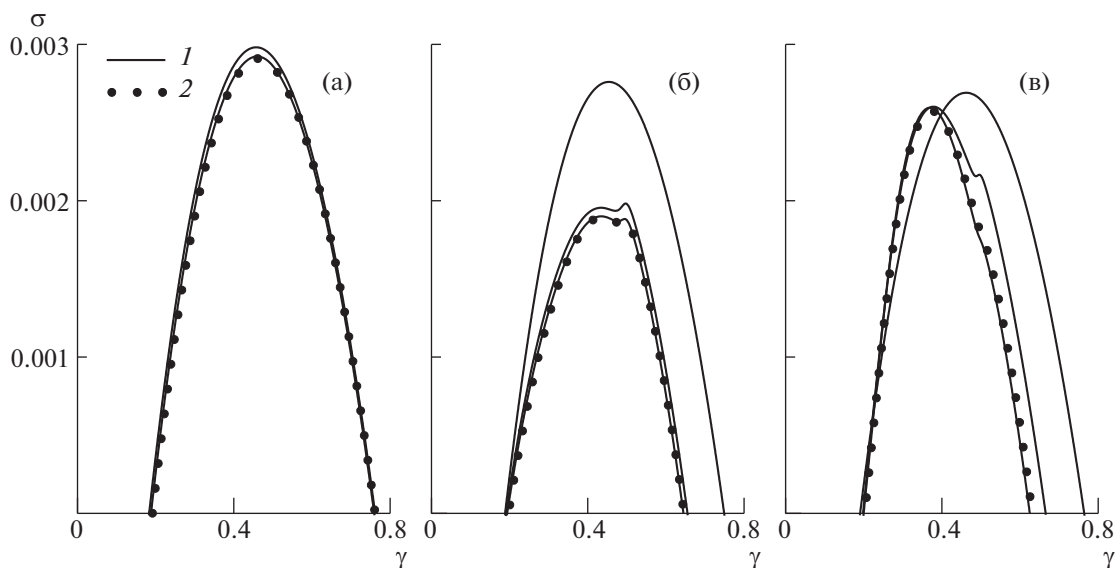
В качестве иллюстрации приведем пример расчета моды неустойчивости поперечного течения в точке  $s = 1.2$ ,  $\gamma = 0.6$  для околорезонансного угла наклона актуаторов  $\varphi = 71^\circ$  при возрастании числа учитываемых гармоник

| $N_h$ | $\alpha$               |
|-------|------------------------|
| 0     | $-0.22211 - i 0.00210$ |
| 1     | $-0.22045 - i 0.00105$ |
| 2     | $-0.22050 - i 0.00045$ |
| 3     | $-0.22052 - i 0.00050$ |
| 4     | $-0.22052 - i 0.00052$ |
| 5     | $-0.22052 - i 0.00052$ |

Результаты показывают, что расчеты с  $N_h = 5$  заведомо обеспечивают достаточную точность.

На рис. 7 приведены зависимости инкремента нарастания от поперечного волнового числа, вычисленные для различного количества учитываемых гармоник в сечении  $s = 1.2$  при углах наклона актуаторов  $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$  (рис. 7а, б, в). Расчеты показывают, что для достижения адекватной точности при  $\varphi = 75^\circ$  достаточно учитывать три гармоники ( $N_h = 2$ ), а при  $\varphi = 72^\circ$  – четыре ( $N_h = 3$ ). При расчетах для  $\varphi = 71^\circ$  будем полагать  $N_h = 5$ .

На рис. 6б, в, г показаны кривые нейтральной устойчивости и линии уровня инкремента нарастания на плоскости  $s, \gamma$  для углов наклона актуаторов  $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$ . При  $\varphi = 75^\circ$  результаты



**Рис. 7.** Расчет инкрементов нарастания моды неустойчивости в сечении  $s = 1.2$  для углов наклона актуаторов  $\varphi = 75^\circ, 72^\circ, 71^\circ$  (а, б, в) ( $\Pi = 12$ ); анализ сходимости результатов при возрастании числа учитываемых гармоник  $N_h = 0, 1, 2$  (1),  $N_h = 5$  (2).

мало отличаются от вычисленных в рамках линейного подхода [7]; в целом, течение оказывается чуть более устойчивым. Максимальное значение инкремента  $\sigma_m = 3.08 \times 10^{-3}$  достигается в точке  $s_m = 1.28$ ,  $\gamma_m = 0.46$ . Точка потери устойчивости ( $s_c = 0.94$ ,  $\gamma_c = 0.41$ ) по сравнению со случаем отсутствия воздействия смещена вправо и немного вниз. При  $s > 2.16$  течение вновь становится устойчивым по отношению к возмущениям рассматриваемого типа. Здесь целесообразно прекращать управление, поскольку уже отсутствует первопричина формирования поперечного течения — разгон потока.

Расчеты, проведенные для  $\varphi = 72^\circ$  (рис. 6в), дают неожиданный результат. По сравнению со случаем  $\varphi = 75^\circ$  максимальная скорость осредненного поперечного течения повышается на 1%, абсолютный максимум  $V_{cf}$  — на 20%, колебательная составляющая скорости больше в несколько раз (см. рис. 3, 5), а неустойчивость управляемого течения существенно снижается ( $\sigma_m = 2 \times 10^{-3}$  в точке  $s_m = 1.26$ ,  $\gamma_m = 0.42$ ). По-видимому, эффект аналогичен обнаруженному экспериментально в [11]. Там наблюдалась стабилизация разгонного течения со скольжением, достигаемая с помощью искусственно организованной модуляции течения вдоль размаха. Роль управляющего воздействия играла слабо нарастающая система вихрей неустойчивости поперечного течения, генерируемая периодической последовательностью неровностей. В данной работе аналогичную роль играет поперечная модуляция течения, вызываемая околорезонансным воздействием системы актуаторов.

При  $\varphi = 71^\circ$  стабилизирующий эффект поперечной модуляции течения становится менее явным. Хотя размер области неустойчивости уменьшается (рис. 6г), максимальное значение инкремента нарастания увеличивается ( $\sigma_m = 2.88 \times 10^{-3}$  при  $s_m = 1.29$ ,  $\gamma_m = 0.36$ ). По сравнению со случаем  $\varphi = 75^\circ$ , при  $\varphi = 72^\circ, 71^\circ$  положение точки потери устойчивости меняется незначительно:  $s_c = 0.95, 0.96$  и  $\gamma_c = 0.42, 0.43$  соответственно.

Выпишем условие, эквивалентное условию совпадения угла наклона актуаторов  $\varphi$  с углом наклона осей вихрей неустойчивости  $\theta$ :

$$\operatorname{Re} \alpha(s, \gamma) = -\gamma \operatorname{ctg} \varphi \quad (5.6)$$

Точки плоскости  $s, \gamma$ , удовлетворяющие условию (5.6), показаны на рис. 6 (линии 3). На рис. 6б, соответствующем системе управления с  $\varphi = 75^\circ$ , резонансная кривая (5.6) отсутствует, поэтому система генерирует слабую модуляцию течения, описываемую линейной теорией [7]. При  $\varphi = 72^\circ, 71^\circ$  кривая (5.6) возникает в нижней части рис. 6в, г и приближается к линии  $\gamma = \gamma_1 \approx 0.5$  с уменьшением  $\varphi$ , вызывая резонансный рост модуляции течения (см. рис. 5).

При усилении модуляции управляемого течения могут развиваться новые типы неустойчивости, для обнаружения которых используемый метод непригоден (сходимость метода Ньютона чувствительна к точности задания начального значения  $\alpha$ ). Дискретизация задачи устойчивости по переменной  $y$  с последующим сведением ее к задаче расчета собственных значений матрицы также мало эффективна из-за чрезвычайно большого размера получаемой матрицы. Кроме того, расчет таким методом порождает бесконечное множество ложных мод: моде в точке  $\gamma$  с волновым числом  $\alpha$  соответствуют ложные моды в точке  $\gamma + \gamma_m$  с волновыми числами  $\alpha + \alpha_m$  и смещенными на  $-n$  номерами гармоник собственной функции. Именно по этой причине данное исследование ограничивалось только расчетами характеристик стационарной моды неустойчивости поперечного течения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически исследован процесс управления течением в пространственном пограничном слое на стреловидном крыле с помощью объемной силы, моделирующей действие периодической последовательности плазменных актуаторов.

Рассчитаны параметры управляемых течений для различных углов наклона актуаторов и периодов их расстановки. Вычисления проведены в рамках параболизированной системы уравнений Навье—Стокса. Особое внимание уделено околорезонансной конфигурации системы управления, когда направление актуаторов близко направлению осей вихрей неустойчивости поперечного течения.

Изучены характеристики устойчивости течений, модулированных управляющим силовым воздействием. Показано, что повышенная модуляция управляемого течения, вызванная околорезонансным воздействием, может приводить к дополнительному ослаблению неустойчивости течения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gray W.E. The effect of wing sweep on laminar flow // RAE TM Aero. 1952. № 255.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 711 с.
3. Курячий А.П. Управление поперечным течением в трехмерном пограничном слое с помощью объемного пространственно-периодического силового воздействия // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 71–79.
4. Yadala S., et al. Experimental control of swept-wing transition through base-flow modification by plasma actuators // J. Fluid Mech. 2018. V. 844. 11 p.
5. Мануйлович С.В. Объемные воздействия, устраняющие поперечное течение в ламинарном пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 3. С. 87–98.
6. Баранов С.А., и др. Ослабление неустойчивости поперечного течения в трехмерном пограничном слое с помощью многоразрядной актуаторной системы // Докл. РАН. 2019. Т. 488. № 2. С. 147–152.
7. Мануйлович С.В. Устойчивость и восприимчивость течения в пограничном слое на стреловидном крыле, управляемого периодической последовательностью плазменных актуаторов // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 34–48.
8. Deyhle H., Bippes H. Disturbance growth in an unstable three-dimensional boundary layer and its dependence on environmental conditions // J. Fluid Mech. 1996. V. 316. P. 73–113.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.
11. Saric W.S., Carillo R.B.J., Reibert M.S. Leading edge roughness as a transition control mechanism // AIAA paper. 1998. № 98–0781.

УДК 532.529

## СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕН В СТАЦИОНАРНОМ ГАЗОКАПЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ЗА ТОЧКОЙ ПАДЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

© 2023 г. И. В. Голубкина<sup>а,\*</sup>, А. Н. Осипцов<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

\*E-mail: giv-mm@mail.ru

\*\*E-mail: osiptsov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

После доработки 20.03.2023 г.

Принята к публикации 20.03.2023 г.

Рассматриваются задачи о структуре стационарного двумерного течения газокapельной смеси в пристеночной области за точкой падения косой и прямой волн уплотнения на плоскую стенку. В данном случае прямая волна соответствует ножке Маха при маховском отражении, а косая — регулярному режиму отражения падающей наклонной волны. Основной целью исследования является оценка влияния мелких капель жидкости, присутствующих в набегающем потоке, на равновесную температуру адиабатической стенки за точкой падения волны. Исследуется вопрос — насколько наличие падающей на стенку косой ударной волны может усилить эффект снижения равновесной температуры стенки присутствующими в потоке мелкими каплями. Область течения разбивается на внешнюю область “эффективно невязкого течения” и область асимптотического ламинарного пограничного слоя. Расчеты течения в каждой из областей проводятся в рамках двухконтинуальной модели газокapельной смеси с учетом фазового перехода (испарения) на поверхности капель. Исследованы наиболее интересные с точки зрения теплообмена волновые конфигурации, соответствующие неполному испарению капель за отраженной волной, а также “волнам с частичной и полной дисперсией” параметров. Используется упрощенная предельная схема формирования жидкой пленки оседающими на стенку каплями, эффектами неустойчивости и разбрызгивания пленки пренебрегается. На основании численных расчетов получены оценки возможного снижения равновесной температуры адиабатической стенки за точкой падения ударных волн в стационарном сверхзвуковом потоке газа, содержащем малую концентрацию примеси жидких капель.

**Ключевые слова:** газокapельный поток, испарение капель, скачки уплотнения, волны с частичной и полной дисперсией, регулярное и маховское отражение волн, пограничный слой, адиабатическая стенка

**DOI:** 10.31857/S1024708423600185, **EDN:** WLXPUI

Настоящее исследование является продолжением работы [1], в которой анализировались условия существования и структура волн уплотнения с полной и частичной дисперсией параметров в газокapельных смесях с фазовыми переходами, а также возможные волновые конфигурации, возникающие в таких средах при отражении косых волн уплотнения от плоской стенки. Ниже постановка задачи о взаимодействии падающей волны со стенкой в газокapельном потоке дополнена описанием структуры течения на масштабе зон релаксации скоростей и температур фаз и выполнен учет пограничного слоя и формирования жидкой пленки на стенке за точкой отражения ударной волны. Кроме того, рассмотрена модельная постановка задачи о структуре двухфазного течения в ламинарном пограничном слое за прямой ножкой Маха, возникающей при маховском отражении косой ударной волны от стенки.

Актуальность указанных постановок задач обусловлена поиском новых способов “безмашинного энергоразделения” газовых потоков, т.е. таких схем течения, при которых (без совершения работы и в отсутствие внешнего теплообмена) происходит разделение исходного однородного газового потока на два потока, имеющих существенно различающиеся температуры торможения. Одной из таких схем, представляющих альтернативу хорошо известным вихревым трубам

Ранка-Хилша, является так называемая “труба Леонтьева”, в которой энергоразделение осуществляется за счет теплообмена между “холодным” сверх- и “теплым” дозвуковым газовыми потоками, разделенными тонкой теплопроводной стенкой [2]. В дозвуковом пограничном слое температура газа изменяется незначительно, поэтому основной способ увеличения разности средних температур по обе стороны разделяющей перегородки (а следовательно, и повышения эффективности схемы Леонтьева) связан с уменьшением температуры восстановления в сверхзвуковом пограничном слое. По сути, в рамках предельной схемы, задача повышения эффективности “трубы Леонтьева” сводится к модельной задаче понижения равновесной температуры адиабатической стенки, продольно обтекаемой сверхзвуковым потоком газа [3]. В последние годы проанализированы различные способы повышения эффективности указанной схемы энергоразделения, в том числе — использование текстурированных и частично проницаемых перегородок, распределенный вдув и отсос газа, а также добавление в сверхзвуковой поток мелких жидких капель [3]. В недавней экспериментальной работе [4] сделана попытка использования центрального тела в сверхзвуковом газокапельном потоке для создания косой ударной волны, приходящей на стенку, с целью активизации осаждения капель и интенсификации теплоотдачи стенки. Интерпретация полученных экспериментальных данных затруднена в связи с отсутствием информации о структуре течения, формирующегося при отражении косой ударной волны от стенки в газокапельном потоке, и поведении жидкой дисперсной фазы. Частично эти вопросы затронуты в предыдущей публикации авторов [1].

На уровне качественных рассуждений естественно ожидать, что наличие в газокапельном потоке косой ударной волны, приходящей на адиабатическую стенку, должно понизить равновесную температуру стенки, не изменяя температуру торможения газа. При регулярном отражении волны траектории достаточно инерционных капель за отраженной волной не успеют развернуться параллельно стенке, что должно привести к появлению протяженной области осаждения капель и формированию жидкой пленки. Как показано в [5] на примере другого течения, при наличии пленки температура адиабатической стенки падает до температуры оседающих на пленку капель, что в рассматриваемом случае соответствует статической температуре набегающего сверхзвукового потока. Такой режим характерен для слабых ударных волн, температура за которыми повышается незначительно и уменьшение размера капель за счет испарения невелико. При маховском отражении волны, за счет торможения несущей фазы на маховской ножке, возникнет заметное рассогласование продольных скоростей газа и капель, входящих в пограничный слой. Данное рассогласование должно привести к увеличению вклада боковой силы Сэфмана, но повышение температуры газа за ножкой Маха приведет к ускорению испарения капель. Эти два разнонаправленных процесса могут как увеличить, так и уменьшить поток массы капель, выпадающих на стенку из пограничного слоя. Для того чтобы количественно оценить изменение потоков массы оседающих на стенку капель и эффект снижения равновесной температуры стенки, ниже проводится численное исследование динамической и тепловой структуры газокапельного течения за точкой падения ударной волны на адиабатическую плоскую стенку для режимов регулярного и маховского отражения падающей косой волны. Естественно ожидать, что влияние капель на снижение температуры стенки будет значительным в случае максимальных потоков массы оседающих на стенку капель (это соответствует слабому испарению капель за падающей и отраженной волнами), поэтому ниже ограничимся случаями достаточно слабых ударных волн, т.е. небольших чисел Маха, посчитанных по нормальной скорости к падающей на стенку волне.

## 1. МОДЕЛЬ ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Как и в [1], в качестве модели течения газокапельной среды используется классическая двухжидкостная модель [6], в которой объемная концентрация дисперсной фазы считается пренебрежимо малой, пренебрегается столкновениями капель и различием термодинамических свойств пара вещества капель и несущей газовой среды. Среда капель описывается уравнениями континуума, имеющего числовую плотность  $n_s$  и лишенного собственных напряжений. Испарение на поверхности капель учитывается в рамках упрощенной модели, предполагающей, что весь тепловой поток к капле затрачивается на испарение, поэтому капли сохраняют свою исходную температуру. Считается, что несущая фаза — сжимаемый совершенный газ с постоянными теплоемкостями, вязкость и теплопроводность которого зависят от температуры по степенному закону:  $\lambda/\lambda_0 = \mu/\mu_0 = (T/T_0)^{\omega}$ ; индекс 0 относится к параметрам невозмущенного потока. Дисперсная фаза — мелкие монодисперсные сферические капли, масса  $m$  и радиус  $\sigma$  которых могут

изменяться в процессе движения из-за испарения. Уравнения стационарного течения газокapельной среды с фазовыми переходами [6] можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(n_s \mathbf{V}_s) &= 0, & m(\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s &= \mathbf{f}_s, & (\mathbf{V}_s \nabla) m &= -J \\ c_s m(\mathbf{V}_s \nabla) T_s &= 0, & J &= q_s / H \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= n_s J & \rho(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla p + \nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i - n_s \mathbf{f}_s + n_s J(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}) \\ c_p \rho(\mathbf{V} \nabla) T &= (\mathbf{V} \nabla) p + \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \tau^{ij} e_{ij} - n_s q_s + n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) + n_s J[(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)^2 / 2 + c_p(T_s - T)] \\ p &= \rho R T, & \tau^{ij} &= 2\mu e^{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta^{ij} \operatorname{div}(\mathbf{V}), & e_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_s = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)G + 6.46\sigma^2 \sqrt{\rho\mu} \frac{\partial u}{\partial y}(u - u_s)\mathbf{j}, \quad q_s = 4\pi\sigma\lambda(T - T_s)D$$

$$G = 1 + \frac{1}{6} \operatorname{Re}_s^{2/3}, \quad D = 1 + 0.3 \operatorname{Re}_s^{1/2} \operatorname{Pr}^{1/3}, \quad \operatorname{Re}_s = \frac{2\sigma\rho|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\mu}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{c_p\mu}{\lambda}$$

Здесь  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{V}_s$  — скорости газа и капель,  $\rho$  и  $p$  — плотность и давление несущей фазы,  $c_p$  и  $c_s$  — теплоемкости газа и вещества капель,  $R$  — газовая постоянная,  $J$  — поток массы с поверхности капли за счет испарения в единицу времени,  $T$  — температура газовой фазы,  $T_s$  — температура вещества капели, осредненная по ее объему,  $\mathbf{f}_s$  — сила, действующая на каплю со стороны несущей фазы,  $\mathbf{j}$  — единичный вектор оси ординат, перпендикулярной стенке,  $q_s$  — приток тепла к поверхности капли со стороны газовой фазы,  $H$  — скрытая удельная теплота парообразования,  $\tau^{ij}$  — компоненты тензора касательных напряжений,  $e^{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации,  $\delta^{ij}$  — символы Кронекера,  $\mathbf{e}_i$  — единичные векторы базиса,  $\operatorname{Pr}$  — число Прандтля,  $\operatorname{Re}_s$  — число Рейнольдса обтекания капели. Условия применимости аналогичной модели, включая оценки справедливости предположения о постоянстве температуры капели во всей области течения, подробно обсуждались в [1] и [5]. В межфазном обмене импульсом и энергией учтены поправки на конечность числа Рейнольдса обтекания капели в форме Клячко и Ранца-Маршалла [7]. Помимо силы Стокса с поправкой Клячко, учитывается подъемная сила Сэфмана [8], роль которой велика в пограничном слое, где существенны поперечные градиенты скорости обтекания капели [7].

Принимается, что в невозмущенном потоке имеет место скоростное ( $\mathbf{V} = \mathbf{V}_s = \mathbf{V}_0 = (u_0, 0)$ ), температурное  $T = T_s = T_0$  и термодинамическое равновесие фаз (радиус  $\sigma_0$  и числовая плотность капели  $n_{s0}$  постоянны).

Следует отметить, что при движении испаряющихся капели в инородном газе игнорируется зависимость теплофизических параметров и коэффициентов переноса смеси от концентрации паров вещества капели. Это оправдано лишь в рассматриваемом случае небольших массовых концентраций примеси.

## 2. ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ ВО ВНЕШНЕЙ НЕВЯЗКОЙ ОБЛАСТИ

Считается, что число Рейнольдса  $\operatorname{Re}$ , посчитанное по параметрам набегающего потока и длине скоростной релаксации  $l_v^*$ , введенной в (2.1), достаточно велико, так что всю область течения можно разбить на область эффективно невязкого течения и область асимптотического пограничного слоя. Вне пограничного слоя в уравнениях (1.1) можно пренебречь диссипативными слагаемыми и подъемной силой Сэфмана. В декартовой системе координат  $(x^*, Y^*)$ , связанной с некоторой точкой на плоской стенке, уравнения модели (1.1) для внешнего двумерного течения переписываются в безразмерном виде, при этом все искомые параметры отнесены к их значениям в невозмущенном потоке:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{l_v^*}, & Y &= \frac{Y^*}{l_v^*}, & u &= \frac{u^*}{u_0^*}, & v &= \frac{v^*}{u_0^*}, & \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, & T &= \frac{T^*}{T_0^*}, & p &= \frac{p^*}{\rho_0^* R T_0^*} \\ \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_0^*}, & \lambda &= \frac{\lambda^*}{\lambda_0^*}, & u_s &= \frac{u_s^*}{u_0^*}, & v_s &= \frac{v_s^*}{u_0^*}, & T_s &= \frac{T_s^*}{T_0^*}, & n_s &= \frac{n_s^*}{n_{s0}^*}, & \sigma &= \frac{\sigma^*}{\sigma_0^*} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_v^* &= \frac{m_0^* u_0^*}{6\pi\sigma_0^* \mu_0^*} \\
\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial Y} &= \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D, \quad \frac{\partial(n_s u_s)}{\partial x} + \frac{\partial(n_s v_s)}{\partial Y} = 0 \\
\sigma^2 \left( u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial Y} \right) &= \mu (u - u_s) G, \quad \sigma^2 \left( u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial Y} \right) = \mu (v - v_s) G \\
\sigma \left( u_s \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v_s \frac{\partial \sigma}{\partial Y} \right) &= \frac{a \mu (1 - T) D}{3} \\
\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \right) &= -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \mu n_s \sigma (u_s - u) G + \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D (u_s - u) \\
\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \right) &= -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial Y} + \alpha \mu n_s \sigma (v_s - v) G + \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D (v_s - v) \\
\rho \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial Y} \right) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial Y} \right) + \frac{2\alpha}{3 \text{Pr}} n_s \sigma \lambda (1 - T) D + \alpha (\gamma - 1) M_0^2 n_s \mu \sigma G [(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2] - \\
&\quad - \alpha a \sigma \lambda n_s (T - 1)^2 D + \frac{1}{2} \alpha a (\gamma - 1) M_0^2 \lambda n_s \sigma (T - 1) D [(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2] \\
T_s &= 1, \quad p = \rho T, \quad \lambda = \mu = T^\omega \\
\alpha &= \frac{m_0^* n_{s0}^*}{\rho_0^*}, \quad a = \frac{2c_p T_0^*}{3H \text{Pr}}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu_0^*}{\lambda_0^*}, \quad M_0 = \frac{U_0^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}}, \\
\text{Re}_s &= \text{Re}_{s0} \frac{2\sigma \rho}{\mu} \sqrt{(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2}, \quad \text{Re}_{s0} = \frac{2\sigma_0^* \rho_0^* \mu_0^*}{\mu_0^*}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь все переменные величины, кроме отмеченных звездочками, являются безразмерными. В качестве масштаба длины выбрана характерная длина скоростной релаксации капли начального радиуса при стоксовском законе сопротивления  $l_v^*$ . Система уравнений (2.1) содержит следующие независимые параметры подобия: показатель адиабаты газовой фазы  $\gamma$ , число Маха  $M_0$ , посчитанное по скорости несущей фазы в невозмущенном потоке, число Прандтля газа  $\text{Pr}$ , число Рейнольдса обтекания капли  $\text{Re}_{s0}$ , характеризующее отклонение закона сопротивления капли от стоксовского, относительную массовую концентрацию капель в невозмущенном потоке  $\alpha$ , параметр  $a$ , характеризующий скорость испарения капель, и степенной показатель  $\omega$ .

В невозмущенном потоке имеем

$$v = v_s = 0, \quad u = T = \rho = u_s = n_s = \sigma = 1 \tag{2.2}$$

#### *Двухфазное течение за прямым скачком*

В качестве первого примера внешнего невязкого течения, которое может сформироваться вблизи стенки при отражении падающей косо волны уплотнения, рассмотрим течение за ножкой Маха, появляющейся при достаточно больших углах падения косо волны на стенку. В общем случае ножка Маха криволинейна, однако она приходит на стенку под прямым углом, поэтому, рассматривая локальную область течения вблизи стенки, можно считать ножку Маха прямой ударной волной. Тогда внешнее течение можно считать одномерным и положить в (2.1)  $v = v_s = 0$ . При этом система (2.1) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и возникает постановка задачи о структуре нормальной волны уплотнения в газе с испаряющимися каплями, подробно рассмотренная в [1]. Как отмечалось в [1], в газокapельной смеси структура зоны релаксации в волне уплотнения отличается для волн с частичной и полной дисперсией параметров. Первый случай соответствует сверхзвуковой скорости несущей фазы, посчитанной по нормальной к волне компоненте ( $M_0 > 1$ ). При этом возникает сильный разрыв (ударная волна) в параметрах несущей фазы, за которым следует зона релаксации скоростей и

температур фаз. Постановки и методы численного решения задач о структуре волн с частичной и полной дисперсией отличаются. При расчете структуры волн с частичной дисперсией безразмерные параметры несущей фазы сразу за газодинамическим разрывом находятся из стандартных соотношений Рэнкина–Гюгонио для газа

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{(\gamma+1)M_0^2}{2+(\gamma-1)M_0^2}, & u_+ &= \frac{2+(\gamma-1)M_0^2}{(\gamma+1)M_0^2} \\ T_+ &= \frac{[2\gamma M_0^2 - (\gamma-1)][(\gamma-1)M_0^2 + 2]}{(\gamma+1)^2 M_0^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь индекс “плюс” отмечает безразмерные значения параметров среды сразу за фронтом газодинамического разрыва. На ударной волне параметры дисперсной фазы непрерывны ввиду предполагаемой достаточной инерции капель:

$$u_{s+} = n_{s+} = \sigma_+ = 1 \quad (2.4)$$

Таким образом, из (2.1) получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (2.3)–(2.4). Указанная задача решалась численно методом Рунге–Кутты.

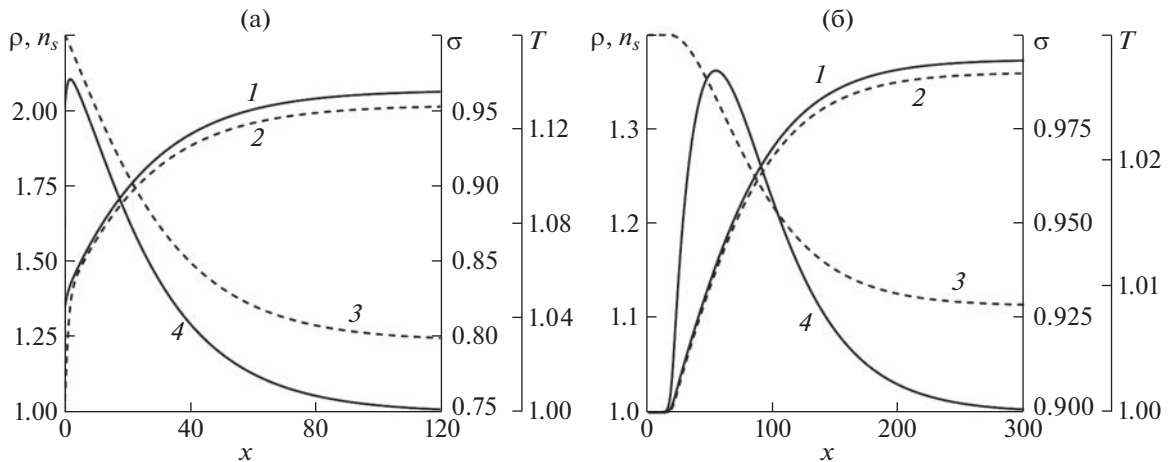
Волны с полной дисперсией параметров возникают в случае, когда по параметрам несущей фазы поток дозвуковой ( $M_0 < 1$ ), но эффективное число Маха равновесной смеси больше единицы ( $M_{ef} > 1$ ) [6]. Эффективные параметры: безразмерная плотность, показатель адиабаты и число Маха, — определяются следующим образом [6]:

$$\rho_{ef} = (1 + \alpha)\rho, \quad \gamma_{ef} = \gamma \frac{1 + \alpha\chi}{1 + \alpha\gamma\chi}, \quad M_{ef}^2 = M_0^2 \frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha\gamma\chi)}{(1 + \alpha\chi)}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_s}$$

В случае волны с полной дисперсией соотношения (2.2) являются граничными условиями на левой границе расчетной области, а условия на правой границе находятся из обобщенных условий Рэнкина–Гюгонио, полученных в [1], для эффективных значений числа Маха и показателя адиабаты (детали см. в [1]). Таким образом, в случае волны с полной дисперсией для одномерного варианта системы (2.1) получаем краевую задачу. Левые и правые граничные условия заданы в особых точках дифференциальных уравнений, что затрудняет непосредственный расчет искомого решения, поэтому был использован следующий численный алгоритм. Система уравнений (2.1) была дополнена производными искомых параметров по фиктивному времени. Полученная система в частных производных решалась методом установления с использованием конечно-разностной схемы Мак–Кормака [9]. Точность всех расчетов контролировалась последовательным увеличением числа расчетных узлов сетки. Поскольку основной целью работы была оценка максимально возможного влияния жидких капель на температуру стенки, численные расчеты проводились лишь для режимов, когда в волне не происходит полного испарения капель.

Некоторые результаты расчетов структуры зоны релаксации в прямых волнах с частичной и полной дисперсией приведены в [1]. Ниже также представлены типичные рассчитанные распределения параметров фаз в зоне релаксации в области прямого скачка с частичной (рис. 1а) и полной (рис. 1б) дисперсией параметров. В численных расчетах использованы значения относительной массовой концентрации капель  $\alpha_0 = 0.05$ ,  $Re_{s0} = 100$ ,  $a = 0.1$  и чисел Маха  $M_0 = 1.2$  (а) и  $M_0 = 0.98$  (б). Во всех расчетах, представленных в статье, остальные безразмерные параметры таковы:  $\gamma = 1.4$ ,  $Pr = 0.72$ ,  $\omega = 0.5$ . Видно, что зона релаксации в волне с полной дисперсией гораздо шире, чем в волне с частичной дисперсией параметров. В обоих случаях распределение температуры несущей фазы имеет выраженный локальный максимум. Предельные (при больших  $x$ ) безразмерные значения плотности газа и концентрации капель отличаются за счет вклада источника члена в уравнении неразрывности несущей фазы. Релаксация скоростей фаз происходит на масштабе всего нескольких длин релаксации капель ( $x \sim 5$ ), поэтому  $u$  и  $u_s$  не приведены на рис. 1. Уменьшение радиуса капель за счет испарения при  $M_0 = 1.2$  достигает 20%.

Ниже, в разд. 3 распределения параметров фаз в зоне релаксации за ударной волной используются в качестве внешних граничных условий при расчетах течений в двухфазном пограничном слое.



**Рис. 1.** Распределения безразмерных параметров фаз: плотности газа  $\rho$ , числовой концентрации капель  $n_s$ , радиуса капель  $\sigma$  и температуры газа  $T$  (кривые 1–4 соответственно) в зоне релаксации за прямой ударной волной (а) и в волне с полной дисперсией (б).

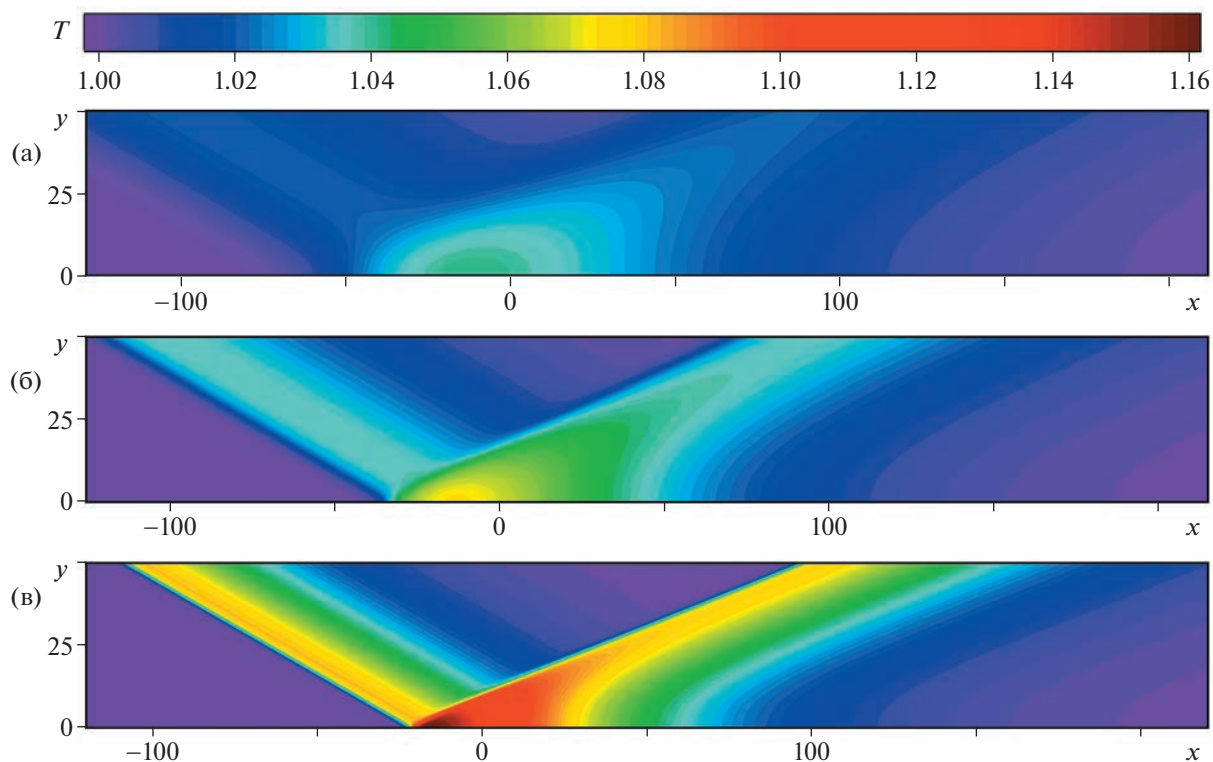
### *Двухфазное течение при регулярном отражении косой ударной волны*

Для косых ударных волн важным параметром является число Маха, посчитанное по скорости, перпендикулярной поверхности волны  $M_{n0}$ . Для волны, приходящей на стенку под углом  $\varphi_0$ ,  $M_{n0} = M_0 \sin \varphi_0$ . При численном расчете двумерных течений с ударными волнами использовался метод установления по фиктивному времени. Уравнения (2.1) с соответствующими производными искомых параметров по фиктивному времени, добавленными в левую часть, решались конечно-разностным методом Мак–Кормака с “искусственной вязкостью” [9]. При заданных параметрах среды, числе Маха и угле падения волны на стенку из обобщенных соотношений Рэнкина–Гюгонио [1] находились число Маха и угол отраженной волны. В качестве начального приближения вдали от стенки задавались параметры, соответствующие структуре зон релаксации за соответствующими падающей и отраженной косыми волнами. В процессе установления численного решения по времени находилась структура течения в окрестности точки падения волны на стенку. Все численные расчеты проводились с необходимым контролем сеточной сходимости результатов в рамках точности значащих цифр, представленных на рисунках величин.

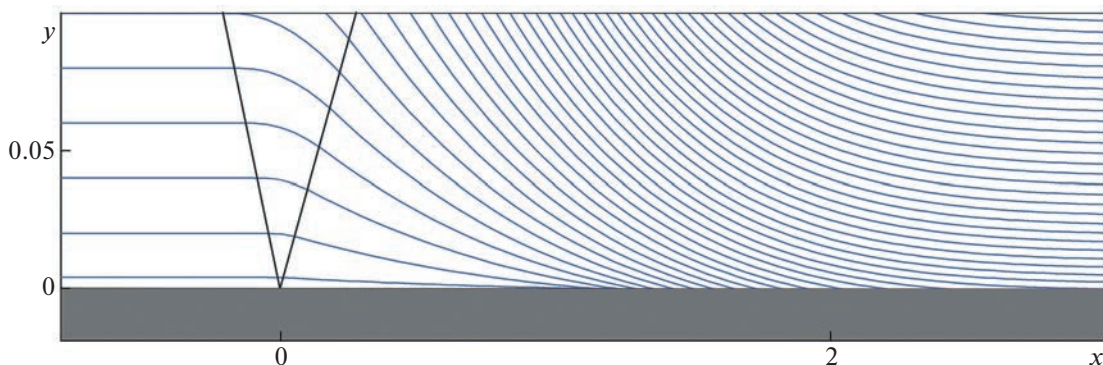
На рис. 2 показаны картины рассчитанных параметров течения для трех характерных примеров: (а) падающая и отраженная волны являются волнами с полной дисперсией; (б) падающая волна есть волна с частичной дисперсией, а отраженная — волна с полной дисперсией; (в) падающая и отраженная волны являются волнами с частичной дисперсией. Начало координат на стенке соответствует условной середине зоны релаксации падающего на стенку скачка. Численные расчеты приведены для начального значения массовой концентрации капель  $\alpha_0 = 0.05$ , угла падения волны  $\varphi_0 = 30^\circ$  и чисел Маха падающей волны (по нормальной скорости):  $M_{n0} = 0.96$  (а),  $M_{n0} = 1.004$  (б) и  $M_{n0} = 1.1$  (в); все наборы параметров соответствуют неполному испарению капель за отраженной волной. Видно, что волны с полной дисперсией имеют значительно большую ширину и более размытую структуру по сравнению с волнами с частичной дисперсией. С увеличением числа Маха падающей волны увеличивается градиент параметров “внутри” волн, а также возрастает максимальная температура газа в локальной окрестности взаимодействия волны со стенкой.

Типичные результаты расчетов траекторий инерционных капель при регулярном отражении косой ударной волной от стенки представлены на рис. 3. Видно, что капли не успевают развернуться параллельно стенке за отраженной ударной волной, что приводит к возникновению протяженной зоны инерционного осаждения капель и формированию тонкой пленки жидкости.

В заключение данного раздела приведем характерные значения параметров, представляющие интерес для приложений. Рассматривается модельная ситуация, в которой набегающий сверхзвуковой поток имеет статическую температуру  $T_0^* = 300^\circ \text{ К}$  и давление в одну атмосферу. Влажность несущей фазы невелика, поэтому ее параметры можно взять как у чистого воздуха:



**Рис. 2.** Поля температуры в области регулярного отражения косой волны уплотнения от стенки при  $\alpha_0 = 0.05$  для трех режимов: (а)  $M_{n0} = 0.96$ : падающая и отраженная волны являются волнами с полной дисперсией, (б)  $M_{n0} = 1.004$ : только отраженная волна является волной с полной дисперсией, (в)  $M_{n0} = 1.1$ : падающая и отраженная волна – волны с частичной дисперсией.



**Рис. 3.** Типичная картина траекторий капель, оседающих на стенку, в области регулярного отражения косой ударной волной от стенки при  $M_{n0} = 2.5$ ,  $\alpha_0 = 0.01$ ,  $a = 0.1$ ,  $Re_{s0} = 100$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ$ ; жирные сплошные линии – положения газодинамических разрывов.

$c_p = 1.012$  дж/(г  $\times$  град),  $\mu_0^* = 1.86 \times 10^{-4}$  г/(см  $\cdot$  с). Удельная теплота испарения воды  $H = 2430$  дж/г, плотности фаз  $\rho_0^* = 1.165 \times 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_{s0}^* = 0.996$  г/см<sup>3</sup>, скорость звука равна 340 м/с.

В табл. 1 представлены характерные значения некоторых параметров для течения вне и внутри погранслоя при  $M_0 = 1$ .

Здесь  $B$  – безразмерный коэффициент перед силой Сэфмана, описанный в следующем параграфе,  $Re$  – число Рейнольдса, посчитанное по длине скоростной релаксации фаз. Поскольку и

Таблица 1

|                         |                     |                     |                     |                     |                     |
|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\sigma \times 10^4$ см | 0.5                 | 1                   | 3                   | 5                   | 10                  |
| $Re_{s0}$               | 21                  | 42                  | 126                 | 210                 | 420                 |
| $l_v$ , см              | 0.171               | 0.684               | 6.156               | 17.1                | 68.4                |
| $Re$                    | $3.591 \times 10^4$ | $1.436 \times 10^5$ | $1.326 \times 10^6$ | $3.591 \times 10^6$ | $1.436 \times 10^7$ |
| $B$                     | 43.3                | 122.46              | 636.3               | 1 369.1             | 3 872.4             |

число Рейнольдса частицы, и длина релаксации пропорциональны скорости газа, их значения для других чисел Маха потока можно получить умножением табличных значений на соответствующее число Маха. Для приведенных выше размерных параметров коэффициент  $a$ , характеризующий скорость испарения капель, приблизительно равен 0.115. Видно, что масштаб зон релаксации параметров фаз в ударных волнах быстро увеличивается с ростом размера капель – релаксируемые в эксперименте длины зон релаксации соответствуют каплям микронного размера.

### 3. ТЕЧЕНИЕ В ДВУХФАЗНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Сформулируем теперь уравнения двухфазного пограничного слоя за точкой падения ударной волны на стенку, предполагая режим течения в пограничном слое ламинарным. Рассчитанные выше течения газокapельной смеси в “невязкой” области считаются “внешними” решениями по отношению к пограничному слою и используются в качестве внешних граничных условий.

#### *Режим отсутствия инерционного осаждения капель на стенку из внешнего потока*

Как следует из асимптотической теории двухфазного пограничного слоя [7], в рамках двухжидкостной модели уравнения двухфазного пограничного слоя принципиально отличаются для режимов с наличием и отсутствием инерционного осаждения дисперсной фазы на стенку из внешнего потока. В первом случае нормальная скорость капель на стенке  $v_{se}$ , найденная из внешнего невязкого решения, конечна, а во втором случае исчезающе мала ( $v_{se} \rightarrow 0$ ). Рассмотрим сначала второй случай, который реализуется при маховском отражении ударной волны. Введем декартову координату  $Ox$ , направленную вдоль стенки с началом в точке падения волны (середины зоны релаксации) и “растянутые” координату и вертикальные скорости фаз в пограничном слое:

$$y = \frac{y^* \sqrt{Re}}{l_v}, \quad Re = \frac{\rho_0^* u_0^* l_v}{\mu_0^*}, \quad v = \frac{v^* \sqrt{Re}}{u_0^*}, \quad v_s = \frac{v_s^* \sqrt{Re}}{u_0^*} \quad (3.1)$$

Остальные безразмерные переменные вводятся как в разделе 2. Перепишав уравнения (1.1) в безразмерном виде с использованием растянутых переменных и переходя к пределу  $Re \rightarrow \infty$ , для главных членов разложения решения по величине, обратной числу Рейнольдса, получаем уравнения двухфазного пограничного слоя (более детально процедура вывода уравнений двухфазного пограничного слоя методом сращиваемых асимптотических разложений описана в [7]):

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D \quad (3.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \alpha \mu n_s \sigma (u - u_s) G + \alpha a \lambda n_s \sigma D (T - 1) (u_s - u)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} u \frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\gamma - 1) M_0^2 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\alpha}{3 Pr} n_s \sigma \lambda D (1 - T) +$$

$$+ \alpha (\gamma - 1) M^2 n_s \sigma \mu G (u - u_s)^2 - \alpha a \sigma \lambda n_s D (1 - T)^2 + \frac{1}{2} \alpha a (\gamma - 1) M^2 \lambda n_s \sigma D (T - 1) (u - u_s)^2$$

$$\rho T = p_e(x), \quad \lambda = \mu = T^{\omega}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial n_s v_s}{\partial y} &= 0, \quad u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{\mu(u - u_s)G}{\sigma^2} \\
u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} &= \frac{\mu(v - v_s)G}{\sigma^2} + B \frac{(u - u_s)}{\sigma} \sqrt{\mu \rho \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \\
u_s \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v_s \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \frac{a\mu(1-T)D}{3\sigma} \\
\alpha &= \frac{mn_{s0}^*}{\rho_0^*}, \quad a = \frac{2c_p T_0^*}{3H \text{Pr}}, \quad M_0 = \frac{U_0^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu_0^*}{\lambda_0^*}, \quad B = \frac{6.46}{12\pi\sqrt{6}} \left( \frac{2\sigma_0^* \rho_0^* U_0^*}{\mu_0^*} \right)^{3/2} \left( \frac{2\rho_{s0}^*}{\rho_0^*} \right)^{1/4} \\
\text{Re}_s &= \text{Re}_{s0} \frac{\sigma \rho |u - u_s|}{\mu}, \quad \text{Re}_{s0} = \frac{2\sigma_0^* \rho_0^* u_0^*}{\mu_0^*}
\end{aligned}$$

Здесь  $p_e(x)$  — распределение безразмерного давления внешнего потока на стенке, вычисленное из решения системы (2.1). Видно, что в дополнение к ранее введенным параметрам подобия добавляется параметр  $B$ , который характеризует относительный вклад подъемной силы Сэфмана в межфазный обмен импульсом. Приближенно величину параметра  $B$  из (3.2) можно выразить следующим образом

$$B \approx 0.0832 \text{Re}_{s0}^{3/2} \left( \frac{\rho_{s0}^*}{\rho_0^*} \right)^{1/4}$$

Если считать фиксированным отношение плотностей фаз, то параметры  $B$  и  $\text{Re}_{s0}$  не являются независимыми. В рассматриваемых условиях течения роль силы Сэфмана очень велика, так как даже для малых капель размером в несколько микрон величина параметра  $B$  в высокоскоростном пограничном слое достигает величин порядка  $10^2$ – $10^3$ .

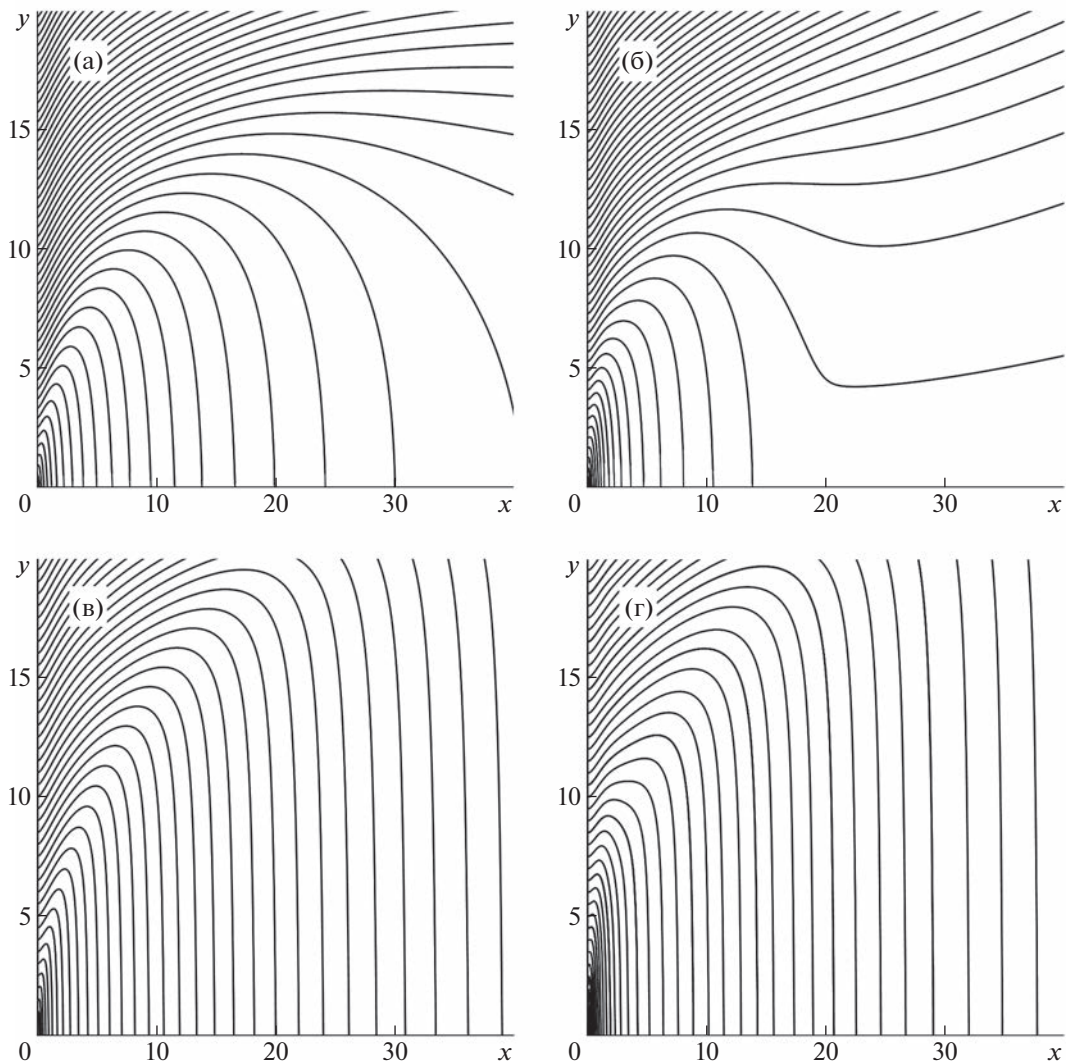
Сформулируем теперь граничные условия для системы (3.2). Поскольку подсистема уравнений, описывающих пограничный слой несущей фазы в (3.2), является параболической, для параметров газа следует задать профили продольной скорости и температуры в начальном сечении, условия срачивания скорости и температуры с внешним потоком, найденным из решения (2.1), а также условия прилипания и адиабатичности на стенке. Подсистема, описывающая поведение дисперсной фазы, является гиперболической. Характеристики этой системы — траектории капель, поэтому в начальном сечении ( $x = 0$ ) следует задать все параметры дисперсной фазы. Так как основной целью является исследование теплообмена в достаточно протяженной области за точкой падения волны на стенку, для простоты будем пренебрегать структурой течения на малых масштабах взаимодействия ударной волны в газе с пограничным слоем и толщиной пограничного слоя в начальном сечении расчетной области. Тогда на левой границе расчетной области имеем:

$$x = 0, \quad y > 0: \quad u = T = n_s = \sigma = 1 = u_s = 1, \quad v_s = 0. \quad (3.3)$$

Условия срачивания с внешним невязким потоком таковы:

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow u_e(x), \quad T \rightarrow T_e(x). \quad (3.4)$$

Индекс  $e$ , как и ранее, относится к параметрам невязкого потока на стенке. Возникает определенная сложность с формулировкой граничных условий для уравнений пограничного слоя на стенке. Типичной является ситуация, когда в пограничном слое за счет действия боковой силы Сэфмана капли оседают на стенку и формируют жидкую пленку. Поскольку максимальное снижение равновесной температуры стенки достигается именно при наличии пленки [5], ниже ограничимся лишь этим случаем. На рис. 4б,г представлены типичные картины траекторий капель, рассчитанные для течения в пограничном слое за прямым скачком, а также для сравнения приведены траектории в пограничном слое при отсутствии ударных волн (рис. 4а,в). Считается, что в последнем случае параметры течения фаз постоянны во внешней области, а значения определяющих параметров  $M_0$ ,  $\alpha_0$  и  $a$  взяты такими же, как и перед скачком в первом случае. Детали используемого численного метода можно найти в [5]. Под воздействием силы Сэфмана капли выпадают на поверхность на ограниченном участке стенки за скачком уплотнения. Причем при наличии прямой волны участок, на котором капли выпадают на стенку, может быть короче (см.



**Рис. 4.** Траектории капель в пограничном слое при  $M_0 = 1.2$ ,  $\alpha_0 = 0.02$ ,  $a = 0.1$  в отсутствие волн (а, в) и за прямым маховским скачком (б, г), для значений параметра  $B = 100$  (а, б), 1000 (в, г); положение скачка уплотнения совпадает с левой границей расчетной области.

рис. 4а и 4б), поскольку интенсивность испарения капель выше, и величина силы Сэфмана уменьшается для более мелких капель.

Вероятность формирования пленки максимальна именно на начальном участке, где вклад боковой силы Сэфмана наиболее значителен. По мере развития и утолщения пограничного слоя уменьшаются величина сдвига скорости и вклад боковой силы Сэфмана. В результате в некоторой точке оседание капель прекращается. С учетом испарения жидкости с поверхности пленки ее протяженность на стенке должна быть конечной. Как показано ниже, наличие пленки приводит к максимальному эффекту снижения равновесной температуры стенки до температуры капель, оседающих на пленку, поэтому длина зоны существования пленки представляет наибольший интерес.

Толщина пленки стремится к нулю в точке  $x_m^*$ , где суммарный поток массы жидкости в пленке стремится к нулю, т.е. выполняется условие

$$\int_0^{x_m^*} \left( m_w^* n_w^* |v_{sw}^*| - \lambda_w^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) / H dx^* = 0 \quad (3.5)$$

Поскольку в работе рассматриваются лишь малые концентрации жидкой фазы в набегающем потоке, считается, что толщина пленки много меньше толщины пограничного слоя, а скорость

жидкости в ней очень мала по сравнению с характерной скоростью газа в пограничном слое. При таких условиях течение в пленке описывается уравнениями ползущего гомобарического течения в тонком слое неизвестной толщины  $h^*(x^*)$  с заданными потоками массы, импульса и энергии на его внешней границе (более подробный вывод и обсуждение уравнений пленки можно найти в [5]):

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_f^*}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_f^*}{\partial y^{*2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_f^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (3.6)$$

$$h^*(x^*) = \sqrt{\frac{2\mu_f^*}{\rho_{s0}^* \tau^*} \int_0^{x^*} \left( m_w^* n_{sw}^* |v_{sw}^*| - \lambda_w^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w \right) / H dx^*}, \quad \tau^* = \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w + m_w^* n_{sw}^* |v_{sw}^*| u_{sw}^*$$

Если ввести безразмерные переменные как в пограничном слое (3.1), а толщину пленки отнести к

$$l_v \sqrt{\frac{\mu_f^* \rho_0^*}{\mu_0^* \rho_{s0}^* \text{Re}}}, \quad (3.7)$$

то безразмерная толщина пленки вычисляется по формуле

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\tau} \int_0^x j_\Sigma dx}, \quad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + \alpha \sigma_w^3 n_{sw} |v_{sw}| u_{sw}, \quad j_\Sigma = \alpha \sigma_w^3 n_{sw} |v_{sw}| - \frac{3}{2} a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w$$

По сути, задача о нахождении толщины и течения в пленке отделяется от основной задачи о течении в пограничном слое. Так как стенка предполагается адиабатической, производная температуры по вертикальной координате на стенке в пленке равна нулю. Из (3.6) в этом случае следует, что течение в пленке изотермическое. Считается, что поток тепла в пленку от несущего газа затрачивается на испарение жидкости на границе пленки. Приравнявая нулю поток энергии, забираемый оседающими на пленку каплями  $Q_s^* = -\rho_{sw}^* v_{sw}^* c_s (T_0^* - T_f^*) = 0$ , получаем важный вывод: при наличии пленки равновесная температура адиабатической стенки  $T_w^*$  равна температуре пленки  $T_f^*$  и равна температуре оседающих на пленку капель  $T_0^*$ .

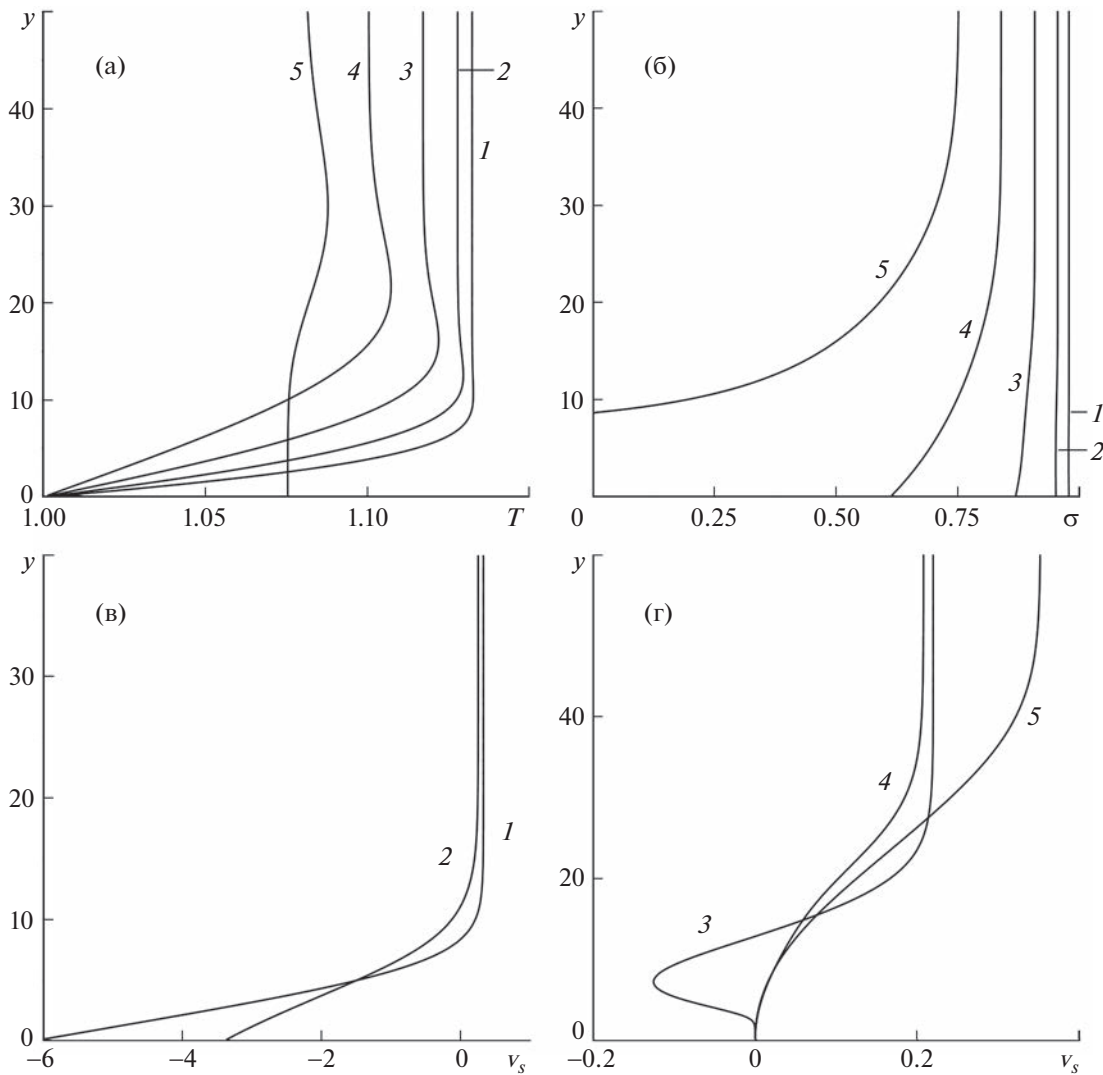
Таким образом, в области существования пленки граничное условие для уравнений пограничного слоя (3.1) на адиабатической стенке в безразмерном виде принимает вид

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = 1 \quad (3.8)$$

При отсутствии пленки (быстрое испарение, малый поток массы капель на стенку) граничные условия адиабатичности имеют более сложный вид (см. [5]).

На рис. 5а–г приведены численные расчеты типичных распределений параметров потока в двухфазном пограничном слое за прямой маховской ножкой для набора определяющих параметров  $M_0 = 1.2$ ,  $\alpha_0 = 0.02$ ,  $a = 0.1$ ,  $B = 100$ . Температура газа на стенке принимает минимальное значение  $T = 1$  в зоне наличия пленки (рис. 5а, кривые 1–4), а за точкой испарения пленки она начинает расти (рис. 5а, кривая 5). После некоторого значения  $x$  капли полностью испаряются в пограничном слое, и вблизи стенки образуется область чистого газа (рис. 5б, кривая 5). Распределение поперечной компоненты скорости капель на рис. 5в демонстрирует влияние на скорость оседания капель силы Сэфмана, существенной в начале зоны формирования пограничного слоя. При больших значениях  $x$  размер капель и рассогласование скоростей фаз снижаются, и уменьшается интенсивность осаждения капель на стенку. Продольные скорости фаз релаксируют друг к другу на небольших расстояниях ( $x \sim 5$ ), поэтому они не приведены на рис. 5.

Поскольку наличие пленки на обтекаемой адиабатической стенке приводит к максимальному снижению ее равновесной температуры, были проведены расчеты толщины пленки на стенке при наличии и в отсутствие прямой волны, приходящей на стенку (рис. 6). Расчеты показали, что наличие маховской ножки может приводить как к увеличению, так и к уменьшению области существования пленки при одинаковых остальных параметрах потока. Длина пленочного течения существенно зависит от числа Маха набегающего потока, величины силы Сэфмана (коэффициента  $B$ ) и других определяющих параметров. В целом маховский режим отражения падающей



**Рис. 5.** Профили безразмерных температуры газа (а), радиуса капель (б) и поперечной скорости капель (в–г) в сечениях  $x = 5, 10, 20, 35, 55$  (кривые 1–5 соответственно) за прямым скачком уплотнения при  $M_0 = 1.2$ ,  $\alpha_0 = 0.02$ ,  $a = 0.1$ ,  $B = 100$ .

волны, по-видимому, не является перспективным с точки зрения снижения температуры стенки, обтекаемой газокapельным потоком.

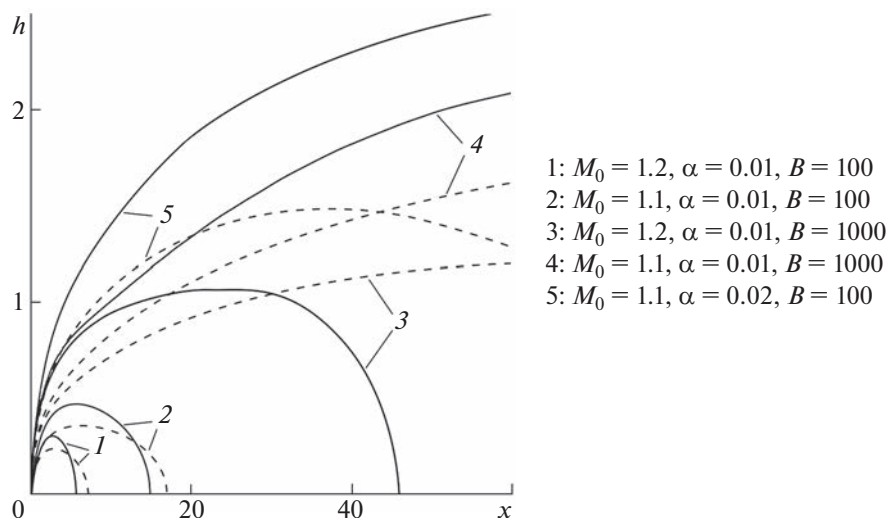
#### *Случай инерционного осаждения капель на стенку из внешнего невязкого потока*

В случае, когда во внешнем “невязком” решении скорость капель на стенке не равна нулю, приближение двухфазного пограничного слоя значительно упрощается [7]. В этом случае в рамках погранслоного приближения капли проходят сквозь пограничный слой несущей фазы, сохраняя значения параметров, найденные из внешнего “невязкого” решения на стенке.

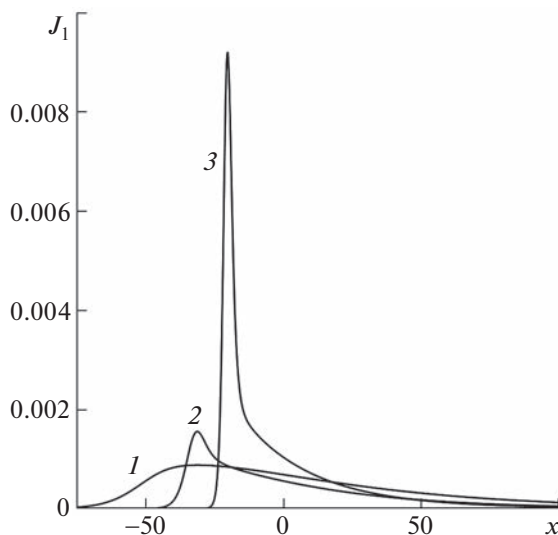
Определение длины существования пленки на стенке является многопараметрической задачей, но в основном, наличие пленки определяется потоком массы оседающих на стенку капель. Следует иметь в виду, что скорость осаждения капель на стенку в случае косых волн на порядок выше скорости осаждения капель из пограничного слоя в отсутствие ударных волн. Поэтому в качестве критерия, иллюстрирующего влияние косых ударных волн на эффективность снижения температуры стенки, был выбран безразмерный поток массы оседающих на стенку капель

$$J_1 = m_w^* n_w^* |v_{sw}^*| / m_0^* n_0^* u_0^*$$

Поскольку для большинства рассмотренных случаев поток массы жидкости, испаряющейся на границе пленки, мал по сравнению с потоком оседающих на пленку капель, величина  $J_1$  поз-



**Рис. 6.** Безразмерная толщина пленки (масштаб обезразмеривания (3.7)) на стенке в отсутствие (—) и при наличии (---) прямой волны уплотнения.



**Рис. 7.** Распределение безразмерного потока массы оседающих на стенку инерционных капель при отражении волны уплотнения от стенки; кривые 1–3 соответствуют режимам а–в, представленным на рис. 2.

воляет наглядно проследить влияние косых скачков уплотнения на длину зоны эффективного охлаждения стенки.

На рис. 7 показаны распределения потока массы капель вдоль стенки для трех различных наборов определяющих параметров, которые соответствуют трем режимам взаимодействия волны со стенкой, представленным выше на рис. 2. Видно, что при увеличении интенсивности падающей волны локальный рост потока массы жидкости на стенку резко усиливается благодаря более крутому повороту двухфазного потока за падающей волной, несмотря на одновременную интенсификацию процесса испарения капель, вызванную заметным ростом температуры вблизи стенки (рис. 2в).

Длины зон выпадения капель на стенку в данном случае заметно превосходят длины зон выпадения капель в отсутствие ударных волн. Поэтому схема течения с косыми ударными волнами является предпочтительной, и создание такой схемы в сверхзвуковом газокapельном потоке представляется перспективным направлением повышения эффективности энергоразделения в “трубе Леонтьева”. При этом, конечно, следует иметь в виду, что проведенные оценки основаны на предельной упрощенной схеме формирования пленочного течения, игнорирующей возможную турбулизацию пленки, ее разбрызгивание и образование вторичных капель.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках двухконтинуальной модели газокapельной среды с учетом испарения капелъ проведены численные расчеты структуры пристеночной зоны стационарного течения за точкой падения на адиабатическую плоскую стенку (i) прямой маховской ножки и (ii) косой ударной волны. Вся область течения разбита на зону внешнего невязкого потока и пристеночный двухфазный пограничный слой. Рассмотрены типичные случаи структуры течения в зоне релаксации за прямой маховской ножкой и за падающей косой волной при ее регулярном отражении от стенки для случаев волн с полной и частичной дисперсией параметров. Численные решения построены с использованием методов Рунге-Кутты для одномерных течений и Мак-Кормака для двумерных течений с ударными волнами. Параметрическое численное исследование динамической и тепловой структуры двухфазного пограничного слоя за точкой падения волны на стенку показало существенное влияние даже небольшой примеси жидких капелъ на температуру адиабатической стенки.

Установлено, что режим течения с формированием на стенке жидкой пленки соответствует максимальному эффекту снижения температуры адиабатической стенки до статической температуры набегающего сверхзвукового потока. Наличие прямой маховской ножки может приводить как к увеличению, так и к уменьшению потока массы оседающих на стенку капелъ. Это обусловлено конкуренцией двух процессов: активизации осаждения капелъ за счет силы Сэфмана из-за увеличения разности продольных скоростей фаз и активизации испарения капелъ за счет повышения температуры газа за ударной волной. Проведенные расчеты не выявили очевидных преимуществ схемы с прямой ударной волной с точки зрения увеличения зоны существования жидкой пленки на обтекаемой поверхности.

Для случая инерционного осаждения капелъ из внешнего потока, формирующегося при регулярном отражении косых волн от стенки, была вычислена величина безразмерного потока массы оседающих на стенку капелъ. Показано, что создание в потоке приходящих на стенку косых ударных волн увеличивает интенсивность осаждения капелъ и длину зоны формирования жидкой пленки.

Максимальные значения снижения температуры стенки по сравнению с течением чистого газа в расчетах могут достигать от нескольких процентов до 1.5 раз в зависимости от числа Маха и величины силы Сэфмана при исходных массовых концентрациях капелъ порядка 1–5%.

Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ при финансовой поддержке гранта РФФ № 19-19-00234.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Волны уплотнения с полной и частичной дисперсией в газокapельных средах с фазовыми переходами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 3. С. 44–55.
2. Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35. № 1. С. 157–159.
3. Azanov G.M., Osipov A.N. The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 106. P. 1125–1133. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.090>
4. Виноградов Ю.А., Здитовец А.Г., Киселев Н.А., Медвецкая Н.В., Попович С.С. Измерение адиабатической температуры стенки плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым воздушно-капельным потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 5. С. 130–136. <https://doi.org/10.31857/S056852812005014X>
5. Golubkina I.V., Osipov A.N. Compressible gas-droplet flow and heat transfer behind a condensation shock in an expanding channel // Int. J. Thermal. Sci. 2022, V. 179, 107576. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2022.107576>
6. Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.002145>
7. Osipov A.N. Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. P. 357–370. <https://doi.org/10.1115/1.3101716>
8. Saffman P.G. Lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385. Corrigendum: J. Fluid Mech. 31 (1968), 628.
9. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х Т. М.: Мир, 1990. С. 728. (Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer / (2-nd Edition. New York: Taylor & Francis, 1997. 803 p.)

УДК 532.529.5

## ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ЗАПЫЛЕННЫМ ГАЗОМ ПРИ РАССЕЯНИИ ОТРАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

© 2023 г. С. В. Панфилов<sup>а,\*</sup>, Д. А. Романюк<sup>а,\*\*</sup>, Ю. М. Циркунов<sup>а,\*\*\*</sup>

<sup>а</sup> Балтийский государственный технический университет ВОЕНМЕХ им. Д. Ф. Устинова,  
Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: panfilov\_sv@rambler.ru

\*\*E-mail: romanyuk-da@rambler.ru

\*\*\*E-mail: yury-tsirkunov@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.01.2023 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Рассмотрены обтекание плоской пластины конечной толщины в канале с большой дозвуковой скоростью и сверхзвуковое поперечное обтекание цилиндра двухфазным потоком газа с твердыми частицами. Передняя кромка пластины имеет форму клина или гладкое затупление постоянного радиуса. Поверхность клина и переднего затупления задается гладкой или шероховатой. Шероховатость моделируется двумерным профилем, который задается на основе эксперимента. Рассмотрены сферические частицы и смесь частиц в виде эллипсоидов вращения, прямоугольных призм, призм со срезанными вершинами и тетраэдров. Параметры каждой из форм варьируются. При определении поступательной и вращательной скоростей несферических частиц после отскока используется модель ударного взаимодействия, предложенная ранее и согласующаяся с экспериментальными данными по коэффициентам восстановления скорости центра масс. Наряду с монодисперсной примесью рассмотрена дисперсная фаза с разбросом частиц по размерам. На основе анализа численных результатов установлена роль исследованных факторов случайной природы на картину течения и параметры примеси.

*Ключевые слова:* двухфазное течение газа с частицами, гладкие и шероховатые обтекаемые поверхности, смесь несферических частиц различной формы, метод Лагранжа, численное исследование

DOI: 10.31857/S1024708423600069, EDN: WLFHPD

В реальных двухфазных течениях газа с частицами многие эффекты, связанные с динамикой примеси, имеют случайную природу, например, разброс частиц по размерам, столкновения между частицами в потоке, несферическая форма частиц, шероховатость обтекаемых поверхностей, турбулентные пульсации несущего газа. В классической теории двухфазных течений газа с частицами (см., например, [1]) все эти случайные эффекты не учитываются.

В задачах двухфазной аэродинамики, когда летательный аппарат движется в атмосфере, содержащей мелкий песок, вулканический пепел или частицы льда, наиболее важными факторами, определяющими картину течения примеси, являются рассеяние частиц при отскоке от обтекаемой поверхности тел вследствие их несферической формы и шероховатости поверхности, а также разброс частиц по размерам [2]. Используемые в экспериментах в аэродинамических трубах частицы кварца или синтетического корунда также имеют несферическую форму и различный размер.

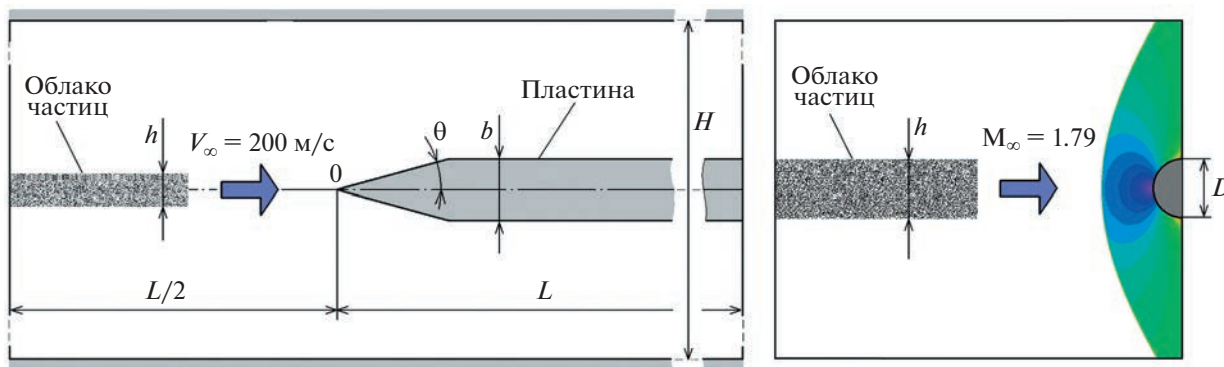
Учесть полидисперсность примеси сравнительно просто. Для этого нужно знать распределение частиц по размерам в невозмущенном течении. Наиболее часто здесь используется логарифмически-нормальный закон. Обтекание тел с учетом разброса сферических частиц по размерам исследовалось в [3–6]. В данном исследовании также принят логарифмически-нормальный закон.

Несферическая форма частиц влияет на их аэродинамические характеристики и особенно на ударное взаимодействие с обтекаемой поверхностью, приводя к рассеянию при отскоке. Влия-

нию несферической формы частиц на силу и момент, действующие со стороны несущего газа, посвящен ряд обзоров и недавних исследований [7–12]. В последней цитированной работе на основе прямого численного моделирования обтекания невращающихся частиц различной неправильной формы при их различной случайной ориентации в потоке выполнено подробное исследование сил сопротивления, поперечных сил и моментов в диапазоне умеренных чисел Рейнольдса  $Re_p \in [0, 200]$  ( $Re_p = 2\rho|\mathbf{V} - \mathbf{V}_p|r_p/\mu$  – число Рейнольдса при обтекании частицы). Найдено, что среднее значение коэффициента сопротивления для частиц, близких к изометрическим, с небольшим отношением наибольшей и наименьшей сторон, аэродинамические характеристики слабо зависят от их формы и ориентации во всем рассмотренном диапазоне числа Рейнольдса, коэффициент поперечной силы и момент заметнее зависят от соотношения сторон, однако с ростом числа Рейнольдса различие убывает. При отскоке от обтекаемой поверхности частицы могут сильно закручиваться. Обтекание вращающихся частиц сопровождается возникновением поперечной силы Магнуса. Как показали предварительные расчеты, в рассмотренных в настоящем исследовании задачах число Маха при обтекании отраженных частиц несущим газом может достигать значений  $M_p \approx 1.7$ , число Рейнольдса  $Re_p \approx 2600$ , вращательное число Рейнольдса  $Re_{p\omega} = \rho|\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p|r_p^2/\mu \approx 1400$ . В указанных диапазонах параметров данные о коэффициентах аэродинамического сопротивления, силы Магнуса и демпфирующего момента для интенсивно вращающихся частиц несферической формы в литературе отсутствуют. Поэтому в данной работе эти коэффициенты вычислялись как для сферических частиц.

В ранних исследованиях ударного взаимодействия частиц с различными поверхностями экспериментально изучались параметры отскока в зависимости от материалов частиц и преград и угла удара. Были предложены эмпирические соотношения для коэффициентов восстановления нормальной и касательной скоростей центра масс частиц в плоскости удара при отскоке [13–17]. Такого рода соотношения использовались при моделировании течений примеси около тел [18, 19]. Одновременно развивались модели соударения частицы с преградой, включающие описание динамического взаимодействия частицы с поверхностью. Модель скользящего удара частицы представлена в монографии [20]. В случае скользящего удара используется уравнение импульсов и закон трения Кулона с коэффициентом динамического трения. Эта модель широко применялась и применяется для расчета течений газозвесей в каналах, когда скорость соударения частиц со стенками невелика [21–23]. В работе [24] рассмотрены скорости удара, типичные для летательных аппаратов, движущихся в запыленной атмосфере, и предложена трехмерная модель отскока несферической частицы от преграды, в которой считалось, что касательная скорость точки контакта частицы с поверхностью в момент отскока равна нулю. В [25] эта модель была распространена на случай ненулевой касательной скорости точки контакта в момент отскока. В [26] предложена полуэмпирическая модель ударного взаимодействия несферической частицы с гладкой поверхностью, в которой рассматривается скольжение частицы относительно поверхности за все время ударного взаимодействия. Предполагается, что касательный импульс пропорционален не только нормальному импульсу, как в законе Кулона, но и средней касательной скорости точки контакта частицы в процессе удара. В модели учитывается также ориентация частицы относительно поверхности перед соударением. На основе этой модели были определены средние и наиболее вероятные значения коэффициентов восстановления нормальной и касательной скоростей центра масс частиц различных форм и смеси частиц различных форм с варьируемыми параметрами формы. Результаты для средних значений хорошо согласуются с экспериментальными данными [15] по коэффициентам восстановления компонент скорости центра масс частиц. Именно эта модель используется в данной работе для численного исследования течения примеси при отскоке частиц от обтекаемой поверхности.

Шероховатость поверхности наряду с несферической формой частиц является важнейшим фактором, который может приводить к значительному рассеянию отраженных частиц. Моделирование шероховатости, особенно если она возникает в результате абразивной эрозии, является одной из наиболее трудных задач в аэродинамике двухфазных течений газа с частицами. В [22] было рассмотрено течение дисперсной примеси из сферических частиц в канале с шероховатыми стенками. Профиль шероховатости не рассматривался, и при ударном взаимодействии частиц со стенками случайным образом на основе нормального закона распределения задавался угол соударения. Позже в [27] было предложено рассматривать именно профиль шероховатости, который описывался квазипериодической случайной функцией. Ее параметры выбирались так, чтобы индикатрисы рассеяния отраженных частиц были близки к получающимся при реальном практически двумерном профиле шероховатости. Такой подход, как отмечено в работе [28], имеет важное преимущество, так как позволяет учитывать возможные многократные соударения ча-



**Рис. 1.** Схема дозвукового обтекания пластины в канале (слева) и сверхзвукового обтекания лобовой поверхности цилиндра (справа).

стицы с шероховатой поверхностью в процессе отскока и теневые зоны при малых углах удара. В дальнейшем были предложены модели поверхностей с изотропной и анизотропной шероховатостью [29, 30]. В данном исследовании рассматривается двумерный рельеф шероховатости, который наблюдается в некоторых экспериментах по взаимодействию частиц синтетического корунда и пластичных материалов преград в диапазоне скоростей удара 100–300 м/с. Рельеф описывается случайной функцией, как это предложено в [24].

Целью данной работы является исследование течения примеси с учетом рассеяния несферических частиц при отскоке от гладкой и шероховатой обтекаемой поверхности и разброса частиц по размерам на примере обтекания двухфазным потоком пластины конечной толщины с различным профилем передней кромки в канале с большой дозвуковой скоростью и при сверхзвуковом обтекании цилиндра.

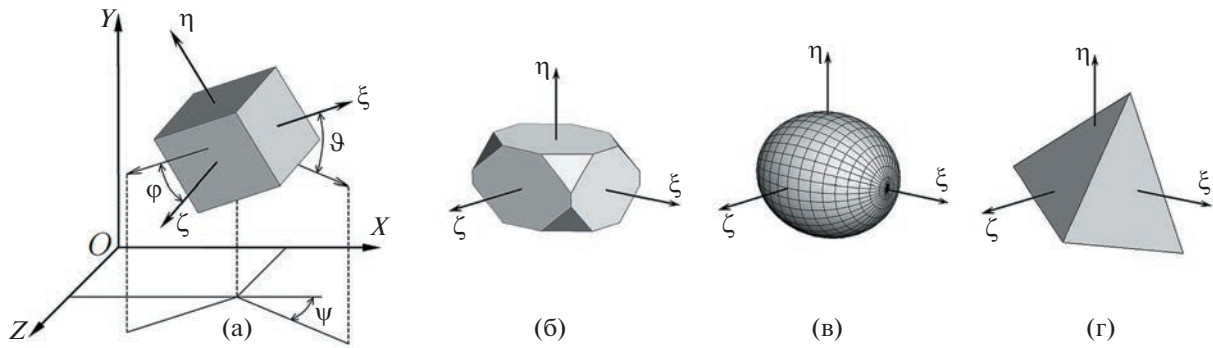
## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЗВЕСИ

### 1.1. Схемы течений

Рассматривались две задачи: симметричное обтекание плоской пластины конечной толщины  $b$  в канале шириной  $H$  и сверхзвуковое обтекание лобовой поверхности поперечно расположенного цилиндра однородным потоком газовой смеси. Пластина имела клиновидную переднюю кромку, как показано на рис. 1, или закругленную по радиусу, равному половине толщины пластины. Угол полураствора клина  $\theta$  был принят равным  $15^\circ$ . Примесь в невозмущенном потоке имела вид облака (рис. 1). Для визуализации особенностей течения дисперсной фазы после отскока частиц рассматривалось облако частиц конечной толщины  $h$ . В задаче обтекания пластины принималось  $h = b/2$ , а в задаче обтекания цилиндра  $h = D$ . Длина облака выбиралась из условия получения стационарных картин течения примеси. Исследовалось течение смеси изометрических частиц различных форм (рис. 2), параметры каждой из форм варьировались, как описано в [26]. Для пластины в канале рассматривалась гладкая и шероховатая поверхность клиновидной или затупленной по радиусу передней кромки, стенки канала считались гладкими. В задаче поперечного обтекания кругового цилиндра его поверхность принималась гладкой. Для оценки влияния разброса размеров частиц на картину течения примеси исследовалась смесь мономодальных (одинаковых по массе, хотя и различающихся по форме) и полидисперсных частиц. Эффекты, связанные с возможным разрушением частиц и поверхности при ударе, не учитывались.

### 1.2. Модель течения несущего газа

Концентрация частиц считалась очень низкой, так что их влияние на течение несущего газа было пренебрежимо мало. В [31] было показано, что такое допущение справедливо при объемной концентрации примеси менее  $\sim 10^{-6}$ . Характерные значения числа Рейнольдса в обеих задачах имеют порядок  $10^6$ . Рассматривались высокоинерционные частицы синтетического корунда, для которых число Стокса имело порядок  $10-10^2$ . Для таких параметров двухфазного потока пограничные слои на обтекаемых поверхностях не оказывают какого-либо влияния на динамику



**Рис. 2.** Конфигурации частиц и углы  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\vartheta$ , определяющие ориентацию частицы в пространстве: (а) – прямоугольная призма; (б) – призма со срезанными вершинами; (в) – эллипсоид вращения; (г) – тетраэдр.

частиц, поэтому поля течений газа моделировались на основе уравнений Эйлера, которые для сжимаемого газа в декартовых координатах  $(x, y)$  имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

где  $\mathbf{Q}$  – вектор консервативных переменных,  $\mathbf{F}_x$  и  $\mathbf{F}_y$  – векторы конвективных слагаемых, которые определяются соотношениями:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ (\rho e + p)v_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ (\rho e + p)v_y \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$p = \rho RT, \quad e = c_v T + (1/2)(v_x^2 + v_y^2) \quad (3)$$

В записанных выше уравнениях  $t$  – время;  $v_x$  и  $v_y$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$  вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $\rho$ ,  $p$ ,  $e$  и  $T$  – плотность, давление, удельная полная энергия и температура;  $R$  – газовая постоянная;  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

В задаче о течении в канале на входной границе задавались скорость  $V_\infty$ , давление  $p_\infty$  и температура  $T_\infty$ , на выходной границе задавалось давление  $p_{\text{out}}$ . При сверхзвуковом обтекании цилиндра на входной границе также задавались скорость, давление и температура, а на выходной границе неотражающие условия.

### 1.3. Модель межфазного взаимодействия

В данной работе столкновения между частицами не учитываются и движение частиц описывается на основе лагранжева подхода [20]. Уравнения импульса и момента импульса для отдельной частицы имеют вид:

$$m_p \frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \mathbf{f}_p, \quad J_p \frac{d\boldsymbol{\Omega}_p}{dt} = \mathbf{L}_p, \quad \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} = \mathbf{V}_p \quad (4)$$

где  $m_p$ ,  $J_p$ ,  $\mathbf{V}_p$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_p$ ,  $\mathbf{r}_p$  – масса, момент инерции, скорость, угловая скорость и радиус-вектор частицы.

Сила  $\mathbf{f}_p$ , действующая на дисперсную частицу со стороны несущего газа, включает силу сопротивления  $\mathbf{f}_D$  и поперечную силу Магнуса  $\mathbf{f}_M$  ( $\mathbf{f}_p = \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_M$ ), которые преобладают над всеми остальными компонентами межфазной силы в рассматриваемых течениях. Эти силы и действу-

ющий на вращающуюся частицу момент  $\mathbf{L}_p$  могут быть выражены через безразмерные коэффициенты  $C_D$ ,  $C_M$  и  $C_L$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_D &= \frac{1}{2} C_D \pi r_p^2 \rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_p| (\mathbf{V} - \mathbf{V}_p) \\ \mathbf{f}_M &= \frac{4}{3} C_M \pi r_p^3 \rho [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p) \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}_p)] \\ \mathbf{L}_p &= \frac{1}{2} C_L r_p^5 \rho |\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p| (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p)\end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\Omega} = (1/2)\text{rot}\mathbf{V}$ .

Хотя рассматриваются несферические частицы, модель межфазного взаимодействия основана на результатах для сферических частиц. Это частично обосновано близостью коэффициентов сопротивления невращающихся сферических и несферических изометрических частиц в широком диапазоне чисел Рейнольдса в относительном движении (до  $\text{Re}_p \sim 10^3$ ) [8]. Сила сопротивления, подъемная сила и момент для несферических частиц при небольших числах Рейнольдса и относительных скоростях вращения, характерных для течений газовзвесей в трубах, численно исследовались в [32]. В настоящее время исследования сопротивления, подъемной силы и момента для несферических частиц в диапазонах параметров их обтекания, характерных для условий полета в запыленной атмосфере, авторам неизвестны. Поэтому в данной работе для коэффициентов сопротивления, подъемной силы Магнуса и момента используются зависимости, предложенные для сферических частиц. Эти зависимости аппроксимируют аналитические, экспериментальные и численные данные в широком диапазоне определяющих параметров при обтекании частицы. Такой подход, конечно, вносит некоторую погрешность в модель межфазного взаимодействия, однако, соотношения для быстро вращающихся несферических частиц (в рассмотренных далее течениях угловая скорость вращения частиц  $\boldsymbol{\Omega}_p$  доходила до значений  $\sim 10^6 - 10^7 \text{с}^{-1}$ ) авторам не известны.

Для коэффициента сопротивления  $C_D$  использовались аппроксимационные формулы, предложенные в [33], в которых принималось  $T_p/T = 1$ , так как в рассматриваемых течениях  $C_D$  слабо зависит от отношения температур частиц и газа:

$$\begin{aligned}C_D(\text{Re}_p, M_p) &= \begin{cases} C_D^1, & 0 < M_p \leq 1 \\ C_{D1}^1 + \frac{4}{3}(M_p - 1)(C_{D2}^2 - C_{D1}^1), & 1 < M_p \leq 1.75 \\ C_D^2, & M_p > 1.75 \end{cases} \\ C_D^1(\text{Re}_p, M_p) &= 24 \left\{ \text{Re}_p + S \left[ 4.33 + \frac{2.12}{1.353} \exp\left(-0.247 \frac{\text{Re}_p}{S}\right) \right] \right\}^{-1} + \\ &+ \left[ \frac{4.5 + 0.38(0.03 \text{Re}_p + 0.48\sqrt{\text{Re}_p})}{1 + 0.03 \text{Re}_p + 0.48\sqrt{\text{Re}_p}} + 0.1M_p^2 + 0.2M_p^8 \right] \exp\left(-\frac{M_p}{2\sqrt{\text{Re}_p}}\right) + 0.6S \left[ 1 - \exp\left(-\frac{M_p}{\text{Re}_p}\right) \right] \\ C_D^2(\text{Re}_p, M_p) &= \left[ 0.9 + \frac{0.34}{M_p^2} + 1.86 \sqrt{\frac{M_p}{\text{Re}_p}} \left( 2 + \frac{1.058}{S} + \frac{2}{S^2} - \frac{1}{S^4} \right) \right] \left( 1 + 1.86 \sqrt{\frac{M_p}{\text{Re}_p}} \right)^{-1} \\ \text{Re}_p &= 2\rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_p| r_p / \mu, \quad M_p = |\mathbf{V} - \mathbf{V}_p| / \sqrt{\gamma R T}, \quad S = M_p \sqrt{\gamma/2}\end{aligned}$$

Здесь  $\text{Re}_p$  и  $M_p$  — относительные числа Рейнольдса и Маха для частицы,  $C_{D1}^1$  — значение  $C_D^1$  при  $M_p = 1$ , а  $C_{D2}^2$  — значение  $C_D^2$  при  $M_p = 1.75$ .

Коэффициент  $C_M$  вычислялся с использованием точного решения [34] или приближенной формулы [35] в зависимости от значения параметра  $\gamma_\omega = r_p |\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_p| / |\mathbf{V} - \mathbf{V}_p|$ :

$$C_M = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 2\gamma_\omega < 0.45 \\ \frac{3}{8\gamma_\omega} [0.45 + (2\gamma_\omega - 0.45) \exp(-0.075\gamma_\omega^{0.4} \text{Re}_p^{0.7})], & 2\gamma_\omega \geq 0.45 \end{cases}$$

**Таблица 1.** Коэффициенты  $C_{l1}$  и  $C_{l2}$  для различных диапазонов вращательного числа Рейнольдса частицы  $Re_{p\omega}$ 

| $Re_{p\omega}$ | 0–6     | 6–20 | 20–50 | $50–4 \times 10^4$ |
|----------------|---------|------|-------|--------------------|
| $C_{l1}$       | 0       | 5.32 | 6.44  | 6.45               |
| $C_{l2}$       | $16\pi$ | 37.2 | 32.2  | 32.1               |

Выражение для коэффициента  $C_L$  взято в виде, предложенном в [36]:

$$C_L = \frac{C_{l1}}{\sqrt{Re_{p\omega}}} + \frac{C_{l2}}{Re_{p\omega}}, \quad Re_{p\omega} = \frac{\rho|\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_p|r_p^2}{\mu}$$

где  $Re_{p\omega}$  – вращательное число Рейнольдса, а константы  $C_{l1}$  и  $C_{l2}$  приведены в табл. 1.

#### 1.4. Модель ударного взаимодействия частицы с обтекаемой поверхностью

Ударное взаимодействие частиц с поверхностью и отскок частиц существенно влияют на структуру и параметры течения газозвеси. Важной особенностью столкновений частиц с поверхностью в двухфазной аэродинамике является высокая скорость соударения. Несмотря на усилия исследователей по развитию моделей удара, учитывающих физические и механические свойства частиц и стенки [37–39], наиболее надежной в настоящее время является экспериментальная информация о коэффициентах восстановления компонент скорости центров масс частиц при отскоке. В реальных течениях частицы практически никогда не имеют сферической формы. Их ориентация в момент соударения и направление отскока являются случайными. Более того, несферическая частица в процессе отражения может удариться о стенку более одного раза перед тем, как улетит в поток. В данном исследовании используется полуэмпирическая модель отскока несферических частиц [26], в которой учитываются упомянутые эффекты и которая хорошо согласуется с экспериментальными данными [15] по средним значениям коэффициентов восстановления центров масс смеси частиц различных форм при скоростях удара 50–350 м/с.

Модель отскока включает в себя описание отдельного столкновения частицы с твердой поверхностью (рис. 3).

В предположении, что положение частицы относительно поверхности за очень малое время соударения не изменяется, уравнения изменения импульса и момента импульса частицы в интегральной форме имеют вид:

$$m_p(\mathbf{V}_p^+ - \mathbf{V}_p^-) \equiv m_p \Delta \mathbf{V}_p = \int_0^{\delta t} \mathbf{f}_c(t) dt \equiv \mathbf{S}$$

$$\|J_p\|(\mathbf{\Omega}_p^+ - \mathbf{\Omega}_p^-) \equiv \|J_p\| \Delta \mathbf{\Omega}_p = \mathbf{r}_c \times \mathbf{S}$$

где  $m_p$ ,  $\|J_p\|$  – масса и тензор инерции частицы,  $\mathbf{f}_c$ ,  $\mathbf{S}$  – сила и импульс, действующие на частицу в точке контакта,  $\delta t$  – интервал времени, в течение которого сила  $\mathbf{f}_c$  действует на частицу, верхние индексы – и + обозначают параметры частицы до и после соударения (рис. 3). Комбинация этих уравнений с кинематическим соотношением

$$\Delta \mathbf{V}_c \equiv \mathbf{V}_c^+ - \mathbf{V}_c^- = \Delta \mathbf{V}_p + \Delta \mathbf{\Omega}_p \times \mathbf{r}_c$$

связывающим изменение скорости точки контакта частицы  $\mathbf{V}_c$  с изменением поступательной скорости центра масс  $\mathbf{V}_p$  и угловой скорости  $\mathbf{\Omega}_p$ , дает

$$\frac{1}{m_p} \|J_p\| \Delta \mathbf{\Omega}_p = \mathbf{r}_c \times \Delta \mathbf{V}_c - \mathbf{r}_c \times [\Delta \mathbf{\Omega}_p \times \mathbf{r}_c]$$

Последнее уравнение содержит два неизвестных вектора  $\Delta \mathbf{V}_c$  и  $\Delta \mathbf{\Omega}_p$ .

При ударном взаимодействии твердой недеформируемой частицы с поверхностью стенки из упруго-пластичного материала и скоростях удара, типичных для движения летательных аппаратов в запыленной атмосфере, предполагается, что, во-первых, касательный к поверхности им-

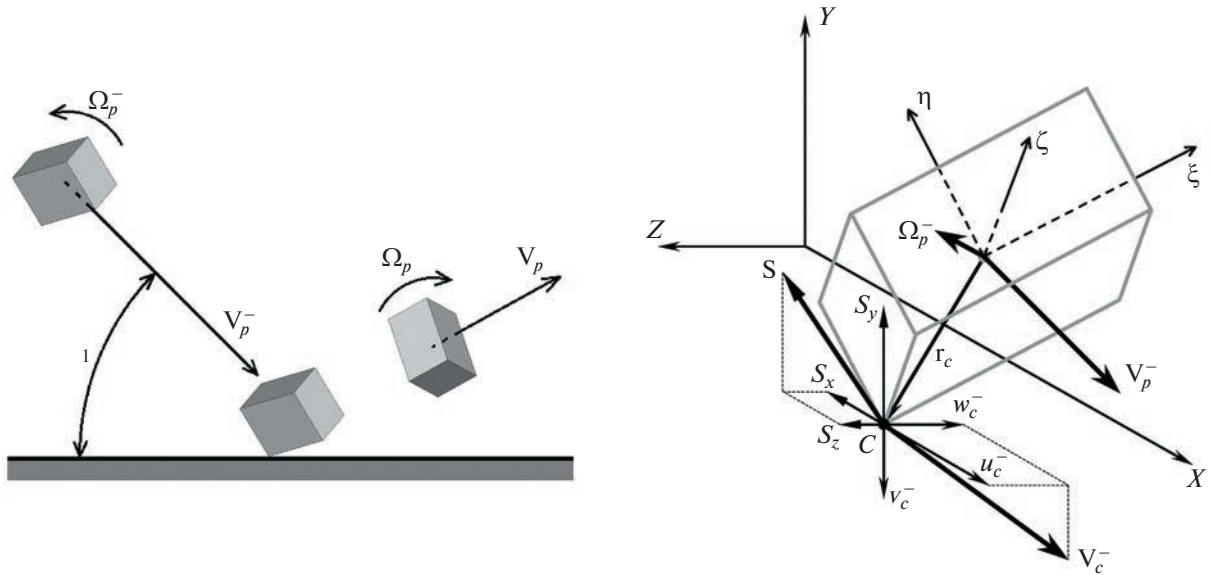


Рис. 3. Столкновение несферической частицы со стенкой.

пульс силы, действующей на частицу, пропорционален как нормальному импульсу, так и средней касательной скорости точки контакта; а во-вторых, для коэффициента восстановления нормальной компоненты скорости частицы в точке контакта может быть принята зависимость, полученная экспериментально для нормальной скорости центра масс частицы путем измерения силы, действующей со стороны дисперсной фазы на твердую пластину.

В этом случае для изменения компонент скорости центра масс частицы можно записать:

$$\Delta u_p = -C_f(u_c^- + 0.5\Delta u_c) \frac{\Delta v_p}{|\mathbf{V}_c^-|}$$

$$\Delta w_p = -C_f(w_c^- + 0.5\Delta w_c) \frac{\Delta v_p}{|\mathbf{V}_c^-|}$$

$$\Delta v_c = -v_c^-(a_{nc} + 1)$$

где  $\Delta u_p$ ,  $\Delta v_p$ ,  $\Delta w_p$  и  $\Delta u_c$ ,  $\Delta v_c$ ,  $\Delta w_c$  — компоненты векторов  $\Delta \mathbf{V}_p$  и  $\Delta \mathbf{V}_c$  в системе координат  $OXYZ$  (рис. 3). Коэффициент динамического сопротивления скольжению частицы в касательном направлении  $C_f$  зависит от взаимного расположения векторов  $\mathbf{r}_c$  и  $\mathbf{V}_p$  ( $\mathbf{r}_c$  определяет положение точки контакта относительно центра масс частицы в момент удара, рис. 3). В данной работе для  $C_f$  принята следующая зависимость:

$$C_f = \exp \left[ \frac{(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{V}_p)}{|\mathbf{r}_c| |\mathbf{V}_p|} \right]$$

Для параметра  $a_{nc}$ , который представляет собой коэффициент восстановления нормальной скорости частицы в точке контакта, принята формула, предложенная для  $a_n$  в [15]:

$$a_{nc} = 1 - [1 - \exp(-0.1|\mathbf{V}_c^-|^{0.61})] \frac{v_c^-}{|\mathbf{V}_c^-|}$$

Ранее было установлено [26], что для смеси частиц средние значения скоростей отскока лучше согласуются с экспериментальными данными, чем для частиц отдельных форм. Результаты расчетов нормальной и касательной компонент скорости центров масс смеси частиц различных форм с варьируемыми параметрами формы в случае невращающихся падающих частиц представлены на рис. 4.

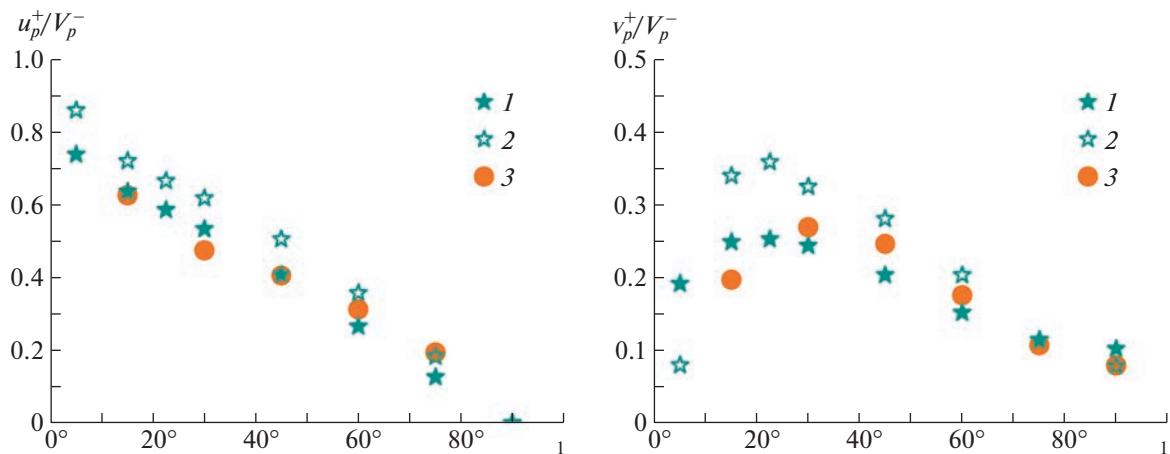


Рис. 4. Средние (1) и наиболее вероятные (2) значения относительных скоростей отскока для смеси несферических частиц различной формы в зависимости от угла падения  $\alpha_1$ ; (3) — экспериментальные данные [15].

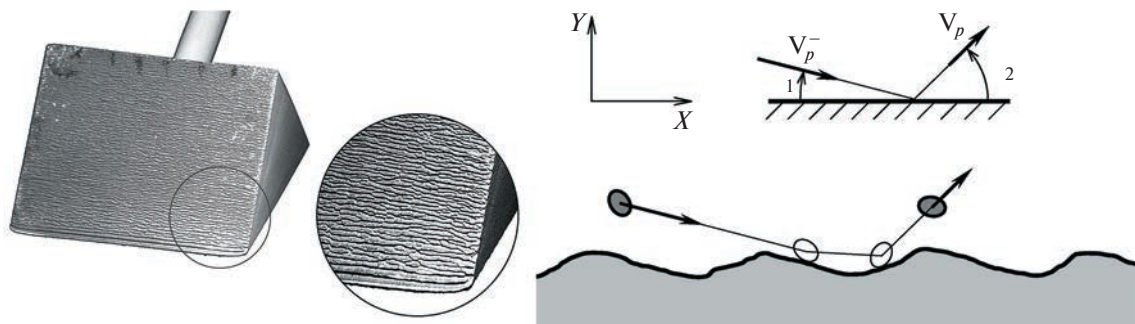


Рис. 5. Вид шероховатой поверхности клина, наблюдаемой в эксперименте (угол полураствора клина 15°, скорость потока 200 м/с) и схема отскока частицы от шероховатой поверхности.

### 1.5. Моделирование шероховатости поверхности

Шероховатость поверхности может существенно влиять на рассеяние частиц при отскоке и, следовательно, на картину течения примеси, поэтому моделирование рельефа шероховатости является важным при рассмотрении обтекания тел потоком газа с твердыми частицами. Одной из причин возникновения шероховатости является абразивная эрозия поверхности под действием ударов частиц с большой скоростью (более 50 м/с). Рельеф шероховатости может быть как трехмерным, так и близким к двумерному. В настоящее время авторам неизвестны работы, в которых теоретически описывается или численно моделируется процесс развития шероховатости при абразивной эрозии, однако имеются немногочисленные экспериментальные данные по структуре рельефа поверхности. В данной работе рассматривается рельеф шероховатости, полученный в экспериментах по обтеканию клина из упруго-пластичного материала двухфазным потоком газа с частицами синтетического корунда (рис. 5).

Рельеф имеет вид поперечных к направлению потока волн. В данной работе профиль шероховатости в плоскости удара ( $X, Y$ ) моделируется синусообразной функцией  $Y(X)$  со случайными периодом и амплитудой [24]. Задается последовательность  $N$  точек со случайными координатами  $(X_i, Y_i)$ , где  $X_1 = 0$ ,  $X_{i+1} = X_i + h + \xi$ ,  $Y_i = \eta$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), через которые проводится кубический сплайн. Величина  $2h$  представляет собой средний шаг профиля реальной шероховатости, случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  выбираются на основе нормального закона распределения со средними значениями, равными нулю, и среднеквадратичными отклонениями  $\Delta\xi$  и  $\Delta\eta$ . Величина  $\Delta\eta$  определяется как средняя высота выступов неровностей. Значение  $\Delta\xi$  определяется из условия согласия характеристик рассеяния отраженных частиц в плоскости удара для эксперименталь-

ного и модельного профилей шероховатости. Если при генерации координат  $X_i$  и  $Y_i$  их значения получались вне интервалов  $X_i + h \pm 3\Delta\xi$  и  $\pm 3\Delta\eta$  соответственно, то эта пара координат исключалась из рассмотрения и генерация повторялась. В данной работе приняты следующие значения параметров профиля:  $h = 80$  мкм,  $\Delta\xi = 10$  мкм,  $\Delta\eta = 20$  мкм.

При моделировании отскока (отражения) частиц от шероховатой поверхности вводятся два угла: угол удара  $\alpha_1$ , показанный на рис. 3 и рис. 5, и локальный угол соударения частицы с шероховатой поверхностью  $\beta_1$ , который в общем случае отличен от  $\alpha_1$ . Значение  $\beta_1$  при каждом соударении определяется траекторией частицы и наклоном профиля шероховатости в точке столкновения. В случае гладкой поверхности, очевидно,  $\beta_1 = \alpha_1$ .

Было выполнено прямое численное моделирование отскока большого числа первоначально невращающихся частиц от гладкой и шероховатой поверхности при различных углах падения  $\alpha_1$ . Рассматривались сферические частицы и смесь частиц различных форм. Ориентация несферических частиц относительно поверхности в момент первого соударения считалась случайной и равновероятной. Учитывалась возможность многократных соударений частиц с поверхностью в процессе отскока. Угол  $\alpha_1$  варьировался в диапазоне от  $15^\circ$  до  $90^\circ$  с шагом  $15^\circ$ . По результатам расчетов отскока  $10^8$  частиц для каждого значения  $\alpha_1$  были получены индикатрисы рассеяния отраженных частиц в плоскости удара (рис. 6).

Видно, что шероховатость поверхности сильно влияет на характеристики отражения даже сферических частиц. Индикатрисы рассеяния несферических частиц при отражении от гладкой и шероховатой поверхности также существенно различаются. В дальнейшем при изучении картин течения примеси рассматривались как гладкие, так и шероховатые поверхности.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ТЕЧЕНИЙ ПРИМЕСИ И ИХ АНАЛИЗ

В этом разделе приведены результаты систематического численного исследования картин течения дисперсной фазы при обтекании пластины конечной толщины в канале и при сверхзвуковом поперечном обтекании кругового цилиндра. Во всех случаях в качестве несущего газа принимался воздух (газовая постоянная  $R = 287$  Дж/(кг · К), показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ ).

Сначала уравнения (1)–(3) были решены численно CFD-методом с высокой точностью. Полное число ячеек сетки в канале составляло 400 тыс. Полное число ячеек сетки в ударном слое около лобовой поверхности цилиндра было около 250 тысяч. Стационарное течение получалось методом установления.

Для визуализации особенностей картин течения примеси рассматривалось облако (см. рис. 1), в котором частицы были расположены случайно и равновероятно. Использовался метод Лагранжа и численно решались уравнения (4) с использованием приведенных в п. 1.3 соотношений для  $\mathbf{f}_p$  и  $\mathbf{L}_p$ , а также описанной в п. 1.4 модели ударного взаимодействия частицы с поверхностью. Для полидисперсной примеси принят логарифмически-нормальный закон распределения частиц по размерам:

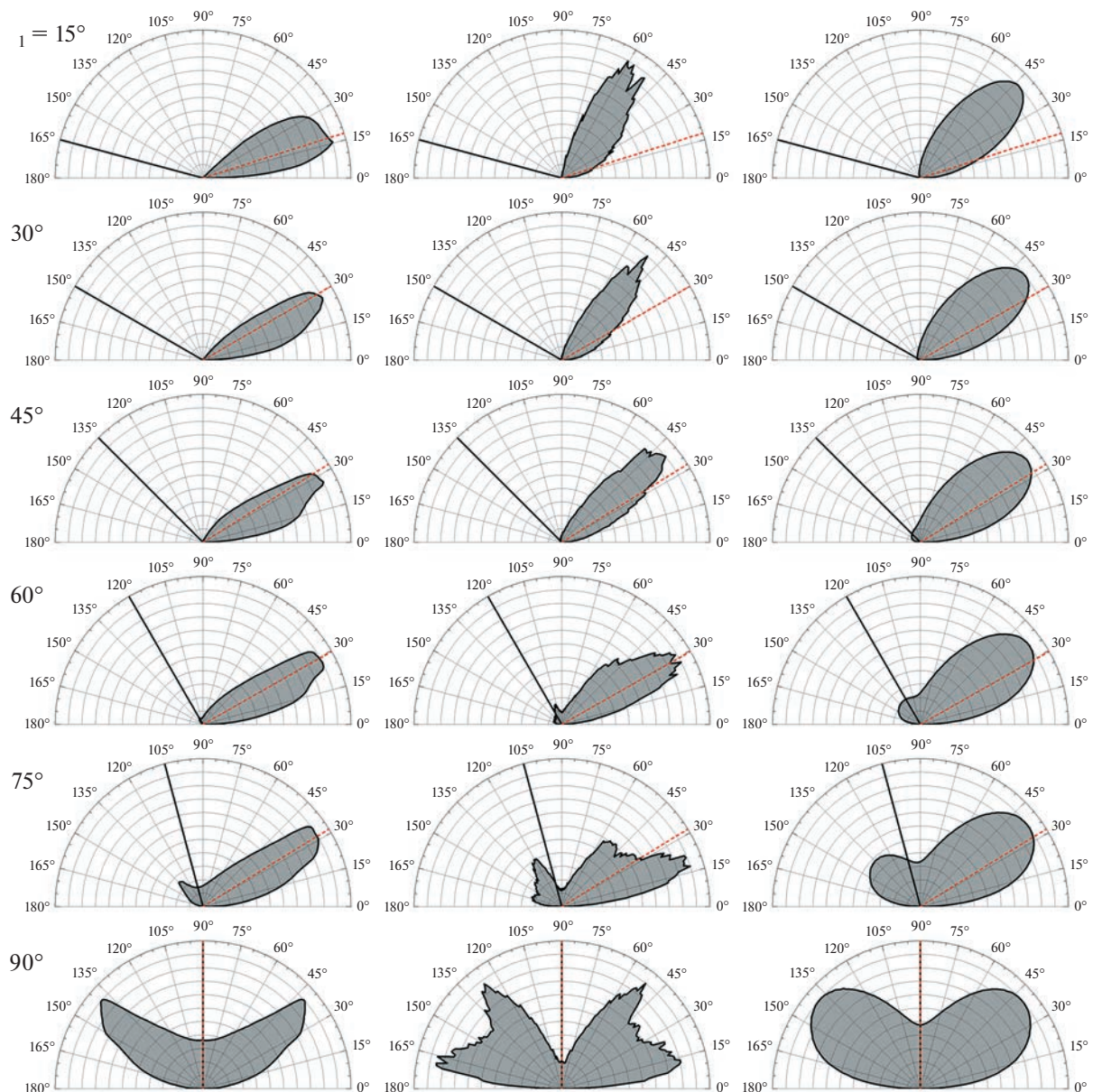
$$g_\infty(d_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d_p \ln s} \exp\left[-\left(\frac{\ln d_p - \ln d_g}{\sqrt{2} \ln s}\right)^2\right] \quad (5)$$

где параметр  $d_g$  связан с наиболее вероятным размером частиц  $d_{pm}$  соотношением  $d_g = d_{pm} \exp(\ln^2 s)$ . Расчеты выполнены для  $s = 1.728$ .

### 2.1. Обтекание пластины в канале

Были приняты следующие размеры канала, пластины и облака частиц (рис. 1):  $L = 1$  м,  $H = 0.4$  м,  $b = 0.02$  м. Входная граница располагалась вверх по потоку на расстоянии  $L/2 = 0.5$  м от передней кромки пластины. На входной границе скорость обеих фаз принималась одинаковой и равной  $V_\infty = 200$  м/с, давление  $p_\infty = 100$  кПа, температура  $T_\infty = 268$  К (число Маха  $M_\infty = 0.6$ , число Рейнольдса  $Re_\infty = \rho_\infty V_\infty H / \mu_\infty \simeq 6 \times 10^6$ ).

Плотность материала частиц (корунда) равна  $\rho_p = 3950$  кг/м<sup>3</sup>. В расчетах размер (диаметр)  $d_p$  сферических и несферических монодисперсных частиц был равен 32 мкм (характерное число

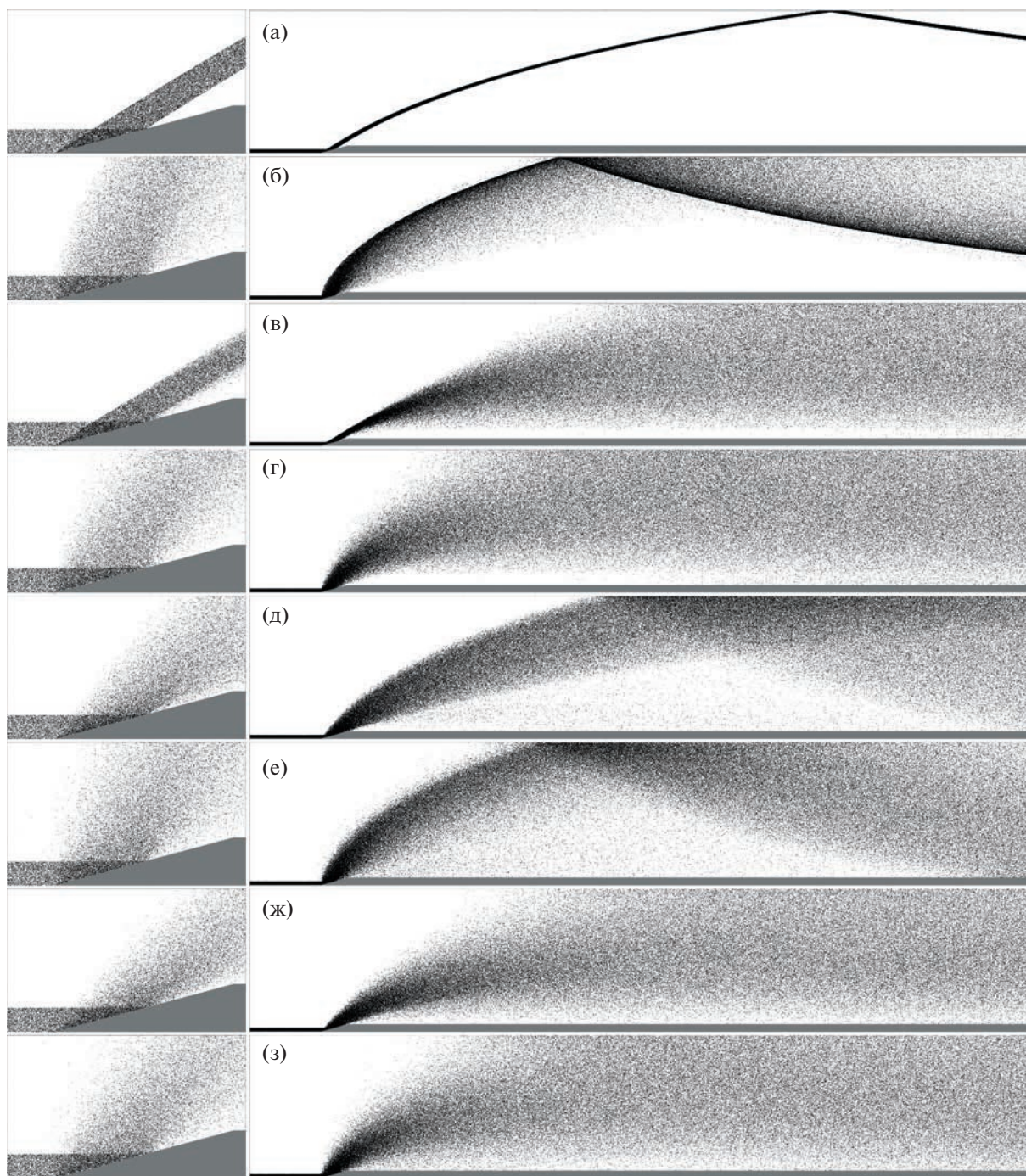


**Рис. 6.** Индикатрисы рассеяния при отражении смеси несферических частиц от гладкой (слева) и шероховатой (справа) поверхности и при отражении сферических частиц от шероховатой поверхности (в центре); направление отскока сферической частицы от гладкой поверхности показано красной штриховой линией.

Стокса  $Stk = \rho_p d_p^2 V_\infty / (18 \mu_\infty b) \simeq 4$ ). Для полидисперсных частиц размер в расчетах варьировался в пределах примерно от 4 до 200 мкм.

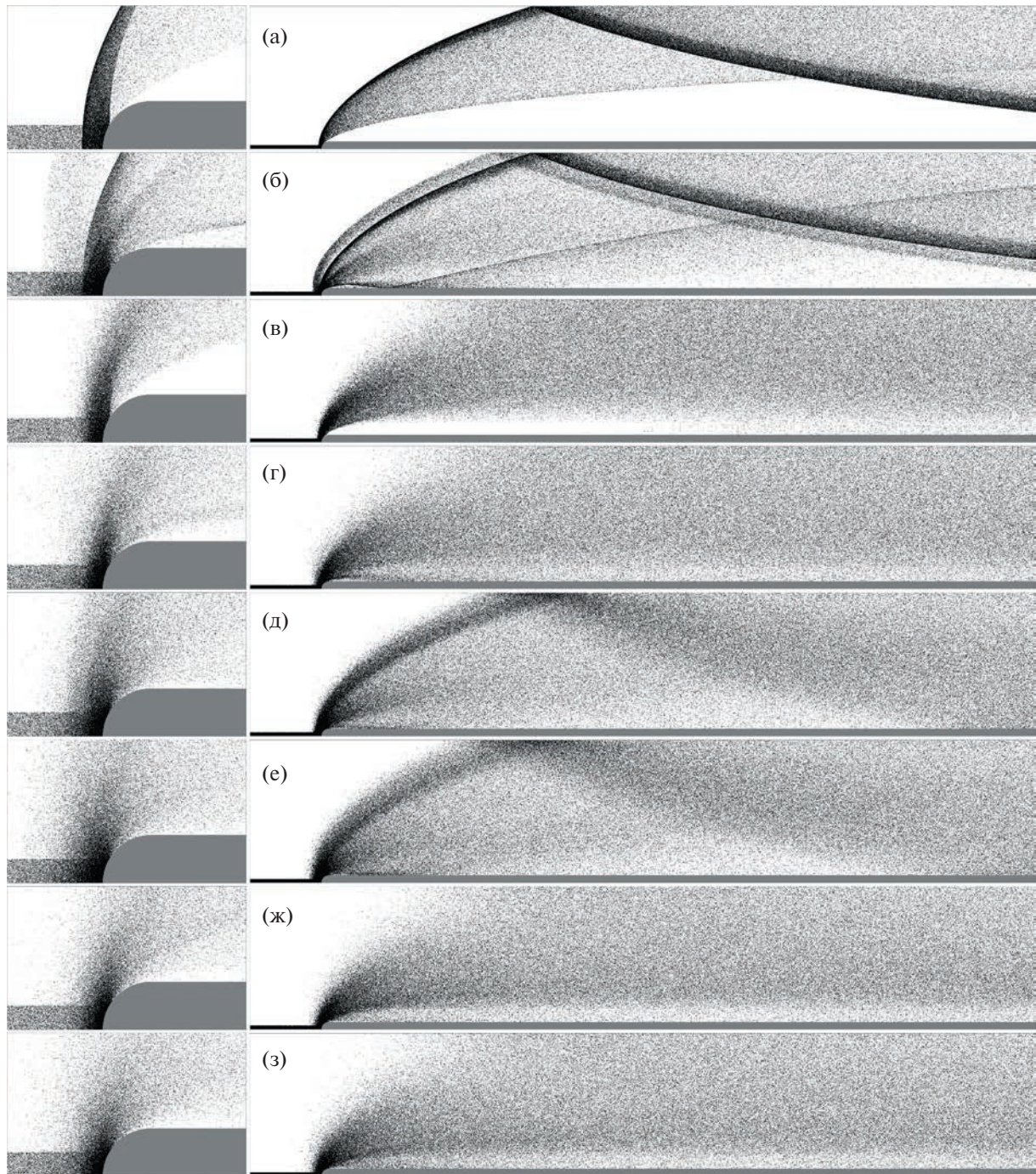
Рассматривалась пластина с гладкой и шероховатой клиновидной и закругленной передней кромкой.

Мгновенное распределение частиц из первоначального облака (см. рис. 1 при обтекании пластины с клиновидной передней кромкой при значениях угла  $\theta = 15^\circ$  показано на рис. 7. Аналогичное распределение частиц около пластины с закругленной передней кромкой показано на рис. 8. Количество визуализирующих частиц на каждом рисунке подбиралось так, чтобы наиболее выразительно представить особенности течения дисперсной примеси. Картина течения монодисперсных сферических частиц после отскока от шероховатой поверхности затупленной по радиусу передней кромки пластины (рис. 8,б) качественно отличается от других картин, что, на первый взгляд, кажется неожиданным. Анализ поведения частиц в этом случае показывает, что



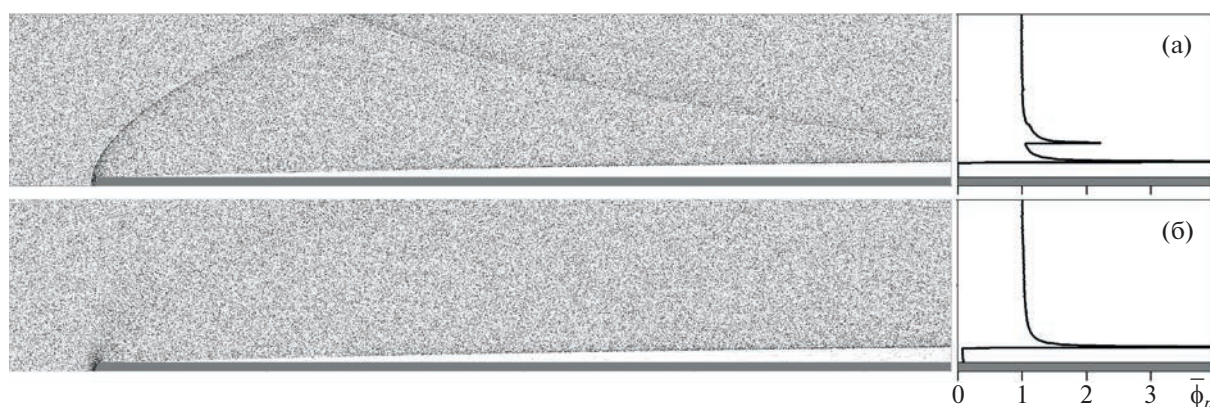
**Рис. 7.** Картины течения облака частиц около передней кромки пластины (слева, увеличено) и вниз по потоку в канале (справа):  $\theta = 15^\circ$ ; (а)–(г) – сферические частицы; (д)–(з) – смесь несферических частиц; (а), (б), (д), (е) – монодисперсные частицы; (в), (г), (ж), (з) – полидисперсные частицы; (а), (в), (д), (ж) – гладкая поверхность клина; (б), (г), (е), (з) – шероховатая поверхность клина.

выраженное “раздвоение” слоя частиц с повышенной концентрацией в случае закругленной передней кромки связано с появлением двух доминирующих направлений отскока сферических частиц от шероховатой поверхности при углах падения, близких к  $\alpha_1 = 90^\circ$  (рис. 6). Подобная ситуация имеет место и для несферических частиц, однако нерегулярность их отскока приводит к дополнительному рассеянию, что сглаживает “раздвоение” слоя частиц с повышенной концентрацией.



**Рис. 8.** Картины течения облака частиц около закругленной передней кромки пластины (слева, увеличено) и вниз по потоку в канале (справа): (а)—(г) — сферические частицы; (д)—(з) — смесь несферических частиц; (а), (б), (д), (е) — монодисперсные частицы; (в), (г), (ж), (з) — полидисперсные частицы; (а), (в), (д), (ж) — гладкая поверхность закругленной кромки; (б), (г), (е), (з) — шероховатая поверхность закругленной кромки.

При движении полидисперсной смеси несферических частиц число Маха  $M_p$  сразу после отскока частиц доходило до 0.9 при клиновидной передней кромке и до 1.25 при закругленной передней кромке. Далее вниз по потоку число Маха монотонно убывало до отскока от стенок канала, когда оно достигало значений в пределах от 0.2 до 0.5, и затем снова монотонно убывало. Характер изменения числа Рейнольдса  $Re_p$  был аналогичным. В момент первого отскока  $Re_p$  достигало значений 1600—2700 и далее убывало до последующего отскока от стенок канала. Наи-



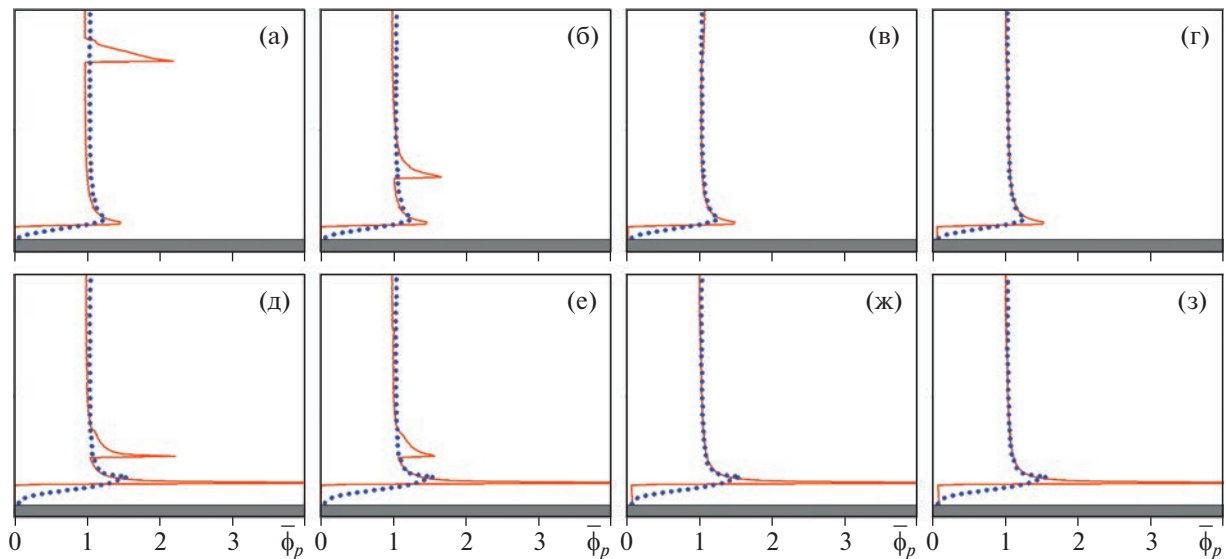
**Рис. 9.** Полные картины течения монодисперсной примеси в канале около пластины с закругленной передней кромкой (слева) и профили относительной объемной концентрации частиц  $\bar{\phi}_p$  в выходном сечении канала (справа): (а) — сферические частицы, гладкая поверхность затупления; (б) — смесь несферических частиц, шероховатая поверхность затупления.

большая величина вращательного числа Рейнольдса  $Re_\omega$  достигала значений 500–1200. Меньшее значение соответствует затупленной по радиусу передней кромке пластины, а наибольшее — клиновидной кромке.

Наряду с исследованием картин течения примеси из первоначально тонкого приосевого однородного облака исследовалось также течение всей примеси в канале, включая и те частицы, которые не сталкивались с пластиной и стенками канала. На рис. 9 приведено два примера полных картин течения монодисперсной примеси при обтекании пластины с затупленной по радиусу передней кромкой и соответствующие этим картинам профили относительной концентрации частиц  $\bar{\phi}_p = \phi_p / \phi_{p\infty}$  ( $\phi_{p\infty}$  — объемная концентрация частиц в невозмущенном потоке) в выходном сечении канала. В данных полях течения формируются два слоя с повышенной концентрацией частиц. Один слой состоит из отраженных частиц, другой возникает вблизи пластины на границе области, свободной от частиц, и состоит из частиц, не испытавших столкновений с пластиной. Профили относительной объемной концентрации частиц были также найдены для всех рассмотренных вариантов дисперсной фазы и поверхности передней кромки. Основные результаты приведены на рис. 10. Видно, что в случае сферических монодисперсных частиц всегда получается два максимума, как для клиновидной, так и для затупленной передней кромки пластины. Для монодисперсной смеси несферических частиц возникает только один максимум на границе области, свободной от частиц. В случае затупленной передней кромки этот максимум очень острый, независимо от того, рассматриваются сферические частицы или смесь несферических частиц, и является поверхность затупления гладкой или шероховатой. Относительная объемная концентрация частиц в этом максимуме достигает значений  $\bar{\phi}_p \simeq 5.4$ . С точки зрения классификации особенностей в бесстолкновительной среде частиц данный максимум соответствует каустике. Как видно из рис. 10, при принятых параметрах двухфазного течения наибольшее влияние на профили концентрации оказывает полидисперсность примеси. Различные фракции в возмущенной области течения перемешиваются, в результате чего профили концентрации сглаживаются и максимум существенно уменьшается.

## 2.2. Сверхзвуковое обтекание цилиндра

При численном моделировании были приняты следующие исходные данные: диаметр цилиндра  $D = 20$  мм, скорость набегающего потока  $V_\infty = 300$  м/с, давление  $p_\infty = 50$  кПа, температура  $T_\infty = 70$  К. Частицы песок (плотность  $2650$  кг/м<sup>3</sup>), размер монодисперсных частиц и наиболее вероятный размер полидисперсной примеси  $d_p$  4 и 10 мкм. Эти значения соответствуют числам Маха и Рейнольдса  $M_\infty = 1.79$ ,  $Re_\infty = \rho_\infty V_\infty D / \mu_\infty \simeq 3 \times 10^6$  и характерному числу Стокса  $Stk = \rho_p^\circ d_p^2 V_\infty / (18 \mu_\infty D) \simeq 1.8$ –11.



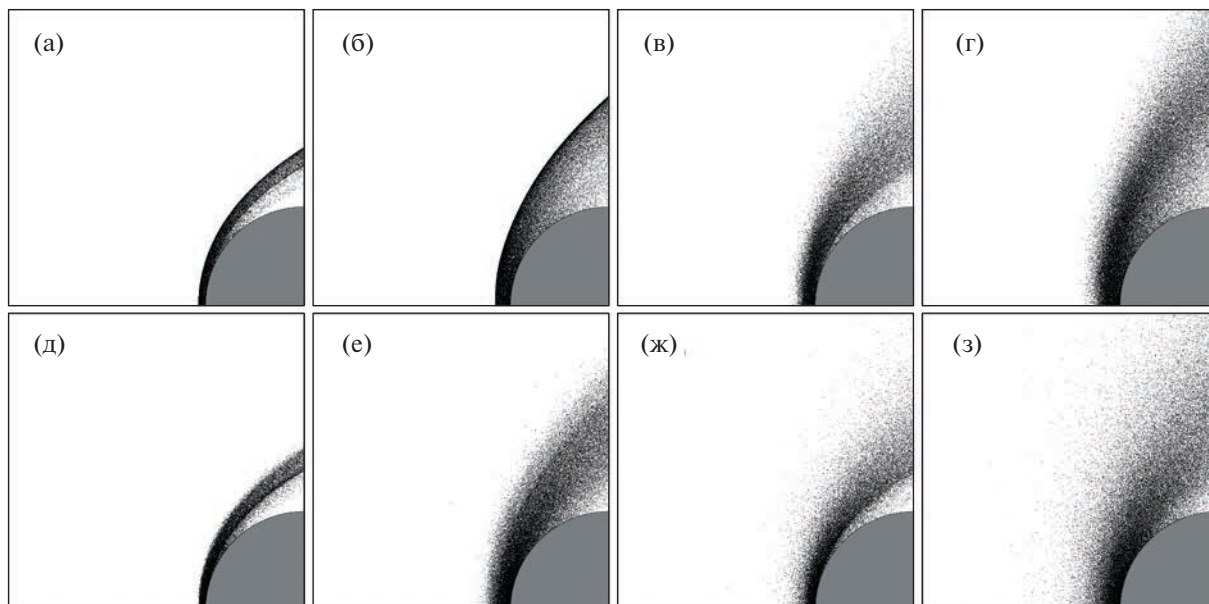
**Рис. 10.** Профили относительной объемной концентрации примеси  $\bar{\phi}_p$  в выходном сечении канала при обтекании пластины с клиновидной передней кромкой (верхний ряд) и с затупленной по радиусу передней кромкой (нижний ряд): сплошные линии — монодисперсная примесь, точки — полидисперсная примесь; (а), (б), (д), (е) — сферические частицы; (в), (г), (ж), (з) — смесь несферических частиц; (а), (в), (д), (ж) — гладкая и (б), (г), (е), (з) — шероховатая поверхность клина или затупления.

Исследовалось влияние рассеяния несферических частиц при отскоке от поверхности и разброса частиц по размерам на структуру течения дисперсной фазы. Моделировалось взаимодействие облака частиц с цилиндром (см. рис. 1). Поверхность цилиндра считалась гладкой. Результаты представлены на рис. 11.

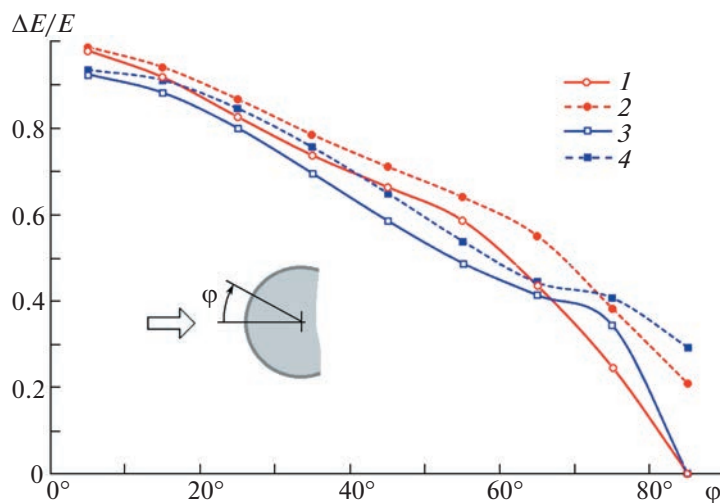
Как видно, более мелкие частицы ( $d_p = 4$  мкм) слабее рассеиваются и быстрее релаксируют к потоку несущего газа. Более крупные частицы ( $d_p = 10$  мкм) отскакивают на большее расстояние, сильнее рассеиваются и образуют значительно более толстый слой отраженных частиц. Полидисперсность примеси приводит к перемешиванию фракций еще при движении частиц к цилиндру в ударном слое. В дальнейшем разброс частиц по размерам приводит к существенному размазыванию слоя отраженных частиц.

Одним из наиболее негативных явлений при движении тела в запыленной атмосфере является абразивная эрозия его поверхности, когда в результате множественных ударов частиц возникает шероховатый рельеф поверхности и может происходить дальнейшее разрушение тела с уносом массы. Процесс эрозии зависит от физико-механических свойств частиц и тела и от скорости и угла удара [40]. Воздействие дисперсной примеси на тело можно оценить по потерям кинетической энергии частиц при отскоке. В общем случае потери кинетической энергии распределяются между отраженными частицами и телом и включают в себя нагрев, деформацию и разрушение. Если частицы не деформируются и не разрушаются при ударах, а материал тела является упруго-пластичным, то потери энергии частиц распределяются между нагревом, деформацией и разрушением тела. На основе расчетов большого числа ( $\sim 10^6$ ) соударений частиц с поверхностью цилиндра были найдены зависимости относительной потери кинетической энергии частиц при отражении. Полученные результаты представлены на рис. 12 ( $E$  — поток кинетической энергии падающих частиц,  $\Delta E$  — потери кинетической энергии при отражении).

Символы соответствуют средним значениям потерь энергии частиц при отскоке от поверхности цилиндра в диапазонах угла  $\varphi$  от  $0^\circ$  до  $10^\circ$ , от  $10^\circ$  до  $20^\circ$  и т.д. Наибольшие потери энергии (наибольшая интенсивность суммарного — теплового и эрозионного — воздействия примеси на цилиндр) наблюдаются около передней точки  $0^\circ \leq \varphi \leq 10^\circ$  и с увеличением  $\varphi$  (с уменьшением угла удара  $\alpha_1$ , рис. 3) они убывают, причем в случае монодисперсной примеси до нуля в области  $80^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ . Последнее объясняется отсутствием здесь столкновений частиц с поверхностью, так как вблизи миделева сечения возникает область, свободная от частиц (см. рис. 11). Отметим, что для пластичных материалов наиболее интенсивное разрушение происходит при углах удара



**Рис. 11.** Картина течения отраженных частиц в ударном слое около лобовой поверхности цилиндра: сверху сферические частицы, внизу смесь несферических частиц; (а), (б), (д), (е) – монодисперсные частицы, (в), (г), (ж), (з) – полидисперсные частицы; (а), (в), (д), (ж) – размер  $d_p$  или наиболее вероятный размер  $d_{pm}$  равен 4 мкм, (б), (г), (е), (з) – размер или наиболее вероятный размер 10 мкм.



**Рис. 12.** Относительные потери кинетической энергии дисперсной примеси при ударном взаимодействии с поверхностью цилиндра: размер монодисперсных или наиболее вероятный размер полидисперсных частиц  $d_p = d_{pm} = 10$  мкм; 1, 2 – сферические частицы, 3, 4 – смесь частиц различных форм; 1, 3 – монодисперсная примесь, 2, 4 – полидисперсная примесь.

$\alpha_1 \sim 20^\circ$  [40]. Это позволяет сделать вывод, что потери энергии частиц в обширной окрестности передней точки распределяются в основном между нагревом и пластической деформацией.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено численное моделирование двухфазного течения газа с частицами с большой дозвуковой скоростью около пластины конечной толщины в канале и со сверхзвуковой скоростью

около цилиндра. Основное внимание было уделено случайным эффектам: рассеянию отраженных от обтекаемых поверхностей частиц из-за их несферической формы и шероховатости поверхности, а также разбросу частиц по размерам. Рассмотрена смесь несферических частиц нескольких форм: эллипсоиды, прямоугольные призматические частицы, призмы с усеченными вершинами и тетраэдры. Параметры форм варьировались. Для вычисления поступательной и вращательной скоростей частиц после отскока от поверхности использовалась новая модель ударного взаимодействия, которая дает хорошее согласие с опытными данными по средним значениям коэффициентов восстановления нормальной и касательной скоростей во всем диапазоне углов удара. Рассматривались инерционные частицы (характерное число Стокса  $Stk \simeq 1.8-11$ ). Результаты сравнивались с полученными для сферических частиц.

Исследование показало, что рассеяние частиц при отражении и их полидисперсность кардинально изменяют картину течения примеси, и эти эффекты должны учитываться при моделировании течений газа с частицами в задачах двухфазной аэродинамики.

Отражение частиц сопровождается потерей их кинетической энергии. Такие потери ассоциируются с нагревом и абразивной эрозией поверхности. Процесс эрозии ведет к изменению рельефа поверхности и последующему уносу массы. В настоящее время отсутствуют модели, описывающие процесс образования в результате эрозии рельефа шероховатой поверхности, и здесь наиболее надежными являются результаты экспериментов. Возникновение шероховатости поверхности влияет не только на рассеяние частиц при отскоке, как показано в данном исследовании, но может влиять на трение, тепловой поток и ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое, и это влияние важно учитывать в задачах аэродинамики.

Данное исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-08-00711).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. Циркунов Ю.М., Панфилов С.В., Романюк Д.А. Двухфазные течения газа с частицами в задачах аэродинамики: взгляд ученого и инженера, проблемы и результаты // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. — СПб.: Издательство ВВМ, 2021. С. 63–67.
3. Циркунов Ю.М. Исследование инерционного осаждения полидисперсных частиц в критической точке сферы // ПМТФ. 1985. № 5. С. 94–102.
4. Моллесон Г.В., Стасенко А.Л. Особенности обтекания затупленного тела сверхзвуковой полидисперсной струей с закруткой отраженных частиц // ТВТ. 2011. Т. 49. 1. С. 73–80.
5. Tsirkunov Yu., Romanyuk D., Panfilov S. Effects of particle mixing and scattering in the dusty gas flow through moving and stationary cascades of airfoils // Progress in Propulsion Physics. Vol. 2 (Eds.: L. DeLuca, C. Bonnal, O. Haidn and S. Frolov). Torus Press and EDP Sciences, 2011. P. 459–474.
6. Ревизников Д.Л., Способин А.В., Сухарев Т.Ю. Численное моделирование обтекания затупленного тела сверхзвуковым полидисперсным потоком // ТВТ. 2017. Т. 55. № 3. С. 418–425.
7. Haider A., Levenspiel O. Drag coefficient and thermal velocity of spherical and nonspherical particles // Powder Technology. 1989. V. 58. P. 63–70.
8. Hölzer A., Sommerfeld M. New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles // Powder Technology. 2008. V. 184. P. 361–365.
9. Кашевараев А.В., Стасенко А.Л. Взаимодействие частиц различной формы с несущим континуальным потоком газа (обзор). Ученые записки ЦАГИ. 2014. Т. XLV. № 5. С. 3–17.
10. Sommerfeld M., Qadir Z. Fluid dynamic forces acting on irregular shaped particles: simulations by the Lattice-Boltzmann method // Int. J. of Multiphase Flow. 2018. V. 101. P. 212–222.
11. Sanjeevi S.K.P., Kuipers H.A.M., Padding J.T. Drag, lift and torque correlations for non-spherical particles from Stokes limit to high Reynolds numbers // Int. J. of Multiphase Flow. 2018. V. 106. P. 325–337.
12. Castang C., Laín S., García D., Sommerfeld M. Aerodynamic coefficients of irregular non-spherical particles at intermediate Reynolds numbers // Powder Technology. 2022. V. 402. 117341. 16 p.
13. Grant G., Tabakoff W. Erosion prediction in turbomachinery resulting from environmental solid particles // J. Aircraft. 1975. V. 12. P. 471–478.
14. Tabakoff W., Malak M.F., Hamed A. Laser measurements of solid-particle rebound parameters impacting on 2024 aluminium and 6Al-4V titanium alloys // AIAA Journal. 1987. V. 25. № 5. P. 721–726.
15. Лашков В.А. Об экспериментальном определении коэффициентов восстановления скорости частиц потока газозвеси при ударе о поверхность // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 2. С. 197–203.

16. *Tabakoff W.* Measurements of particles rebound characteristics on materials used in gas turbines // *J. Propulsion*. 1991. V. 7. № 5. P. 805–813.
17. *Циркунов Ю.М., Панфилов С.В., Клычников М.Б.* Полуэмпирическая модель ударного взаимодействия дисперсной частицы примеси с поверхностью, обтекаемой потоком газовой смеси // *ИФЖ*. 1994. Т. 67. № 5–6. С. 379–386.
18. *Vittal B.V.R., Tabakoff W.* Two-phase flow around a two-dimensional cylinder // *AIAA Journal*. 1987. V. 25. № 5. P. 648–654.
19. *Волков А.Н., Циркунов Ю.М.* Кинетическая модель столкновительной примеси в запыленном газе и ее применение к расчету обтекания тел // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 3. С. 81–97.
20. *Crowe C.T., Schwarzkopf J.D., Sommerfeld M., Tsuji Y.* Multiphase Flows with Droplets and Particles. 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton, U.S.A. 2012.
21. *Tsuji Y., Oshima T., Morikawa Y.* Numerical simulation of pneumatic conveying in a horizontal pipe // *KONA Powder Part. J.* 1985. № 3. P. 38–51.
22. *Sommerfeld M.* Modelling of particle-wall collisions in confined gas-particle flows // *Int. J. Multiphase Flow*. 1992. V. 18. № 6. P. 905–926.
23. *Sommerfeld M., Huber N.* Experimental analysis and modelling of particle-wall collisions // *Int. J. Multiphase Flow*. 1999. V. 25. P. 1457–1489.
24. *Панфилов С.В., Циркунов Ю.М.* Рассеяние несферических частиц примеси при отскоке от гладкой и шероховатой поверхностей в высокоскоростном потоке газовой смеси // *ПМТФ*. 2008. Т. 49. № 2. С. 79–88.
25. *Quintero B., Lain S., Sommerfeld M.* Derivation and validation of a hard-body particle-wall collision model for non-spherical particles of arbitrary shape // *Powder Technology*. 2021. V. 380. P. 526–538.
26. *Панфилов С.В., Циркунов Ю.М.* Модель отскока и рассеяния несферических частиц при высокоскоростном взаимодействии с обтекаемой поверхностью // *ЖТФ*. 2022. Т. 92. Вып. 5. С. 665–675.
27. *Tsirkunov Yu.M., Panfilov S.V.* Modelling of particle-wall interaction in two-phase flows at moderate and high particle impact velocity // *Proc. of the Third Int. Conf. on Multiphase Flow, ICMF'98, Lyon, France, June 8–12, 1998*. Paper 693. 8 p.
28. *Konan N.A., Kannengieser O., Simonin O.* Stochastic modeling of the multiple rebound effects for particle-rough wall collisions // *Int. J. Multiphase Flow*. 2009. V. 35. P. 933–945.
29. *Radenkovic D., Simonin O.* Stochastic modelling of three-dimensional particle rebound from isotropic rough wall surface // *Int. J. Multiphase Flow*. 2018. V. 109. P. 35–50.
30. *Radenkovic D., Simonin O.* Modelling of three-dimensional particle rebound from an anisotropic rough wall // *Powder Technology*. 2021. V. 393. P. 165–183.
31. *Tsirkunov Yu.M.* Gas-particle flows around bodies – key problems, modeling and numerical analysis. // *Proc. 4th Int. Conf. on Multiphase Flow: CD-ROM Proceedings ICMF'2001, May 27–June 1, 2001, New Orleans, LA, USA*. Ed.: E. Michaelides. Paper No. 607. 2001. P. 1–31.
32. *Hölzer A. and Sommerfeld M.* Lattice Boltzmann simulations to determine drag, lift and torque acting on non-spherical particles // *Computers & Fluids*. 2009. V. 38. P. 572–589.
33. *Henderson Ch.B.* Drag coefficients of spheres in continuum and rarefied flows // *AIAA Journal*. 1976. V. 14. № 6. P. 707–708.
34. *Rubinow S.I. and Keller J.B.* The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1961. V. 11. P. 447–459.
35. *Oesterlé B., Bui Dinh T.* Experiments on the lift of a spinning sphere in a range of intermediate Reynolds numbers // *Experiments in Fluids*. 1998. V. 25. P. 16–22.
36. *Dennis S.C.R., Singh S.N. and Ingham D.B.* The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers. // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 101. P. 257–279.
37. *Стасенко А.Л.* Коэффициенты восстановления скорости частицы при отражении от поверхности твердого тела. // *ИФЖ*. 2007. Т. 80. № 5. С. 38–44.
38. *Лашков В.А.* Коэффициент восстановления скорости при прямом ударе // *Вестник СПбГУ, Сер. 1*. 2010. № 4. С. 127–136.
39. *Ray S., Kempe T., Frölich J.* Efficient modelling of particle collisions using a nonlinear viscoelastic contact force // *Int. Journal of Multiphase Flow*. 2015. V. 76. P. 101–110.
40. *Erosion* / Edt. C.Preece. 1979. Academic Press, New York = Эрозия: пер. с англ. / Под ред. К. Прис // М.: Мир, 1982. 464 с.

УДК 532.546

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНЕ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ОБСАДНОЙ КОЛОННЫ

© 2023 г. Ф. Ф. Давлетшин<sup>а,\*</sup>, Р. З. Акчурин<sup>а,\*\*</sup>,  
Р. Ф. Шарафутдинов<sup>а,\*\*\*</sup>, Д. Ф. Исламов<sup>а,\*\*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

\*E-mail: felix8047@mail.ru

\*\*E-mail: ac4urin.ruslan@yandex.ru

\*\*\*E-mail: gframil@inbox.ru

\*\*\*\*E-mail: islamovden@rambler.ru

Поступила в редакцию 23.01.2023 г.

После доработки 17.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

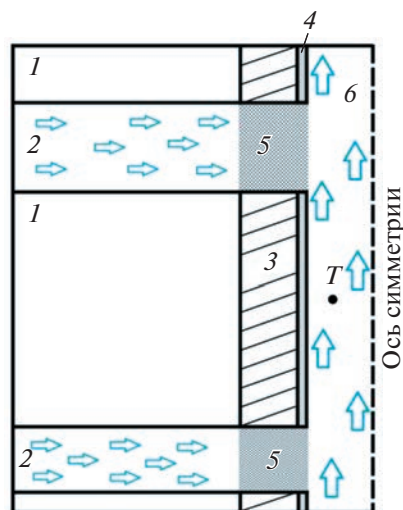
Исследованы особенности полей скорости течения и температуры восходящего потока жидкости в металлической круглой трубе (обсадной колонне, установленной в добывающей скважине) в условиях ее локального индукционного нагрева. Результаты исследований основаны на численном решении уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска–Обербека, расчеты выполнены в программном пакете Ansys Fluent (Лицензия ANSYS Academic Research CFD в рамках договора с Башкирским государственным университетом от 15.06.2020). Рассмотрены расходы жидкости 10 и 50 кубических метров в сутки, соответствующие ламинарному и переходному режимам течения в обсадной трубе. Установлено наличие локальных возмущений поля скорости и температуры в пристеночной области нагретой обсадной трубы. Возмущения температуры в жидкости достигают нескольких градусов Кельвина, причем локальная скорость потока в пристеночной области обсадной колонны, возрастающая за счет естественной тепловой конвекции, в несколько раз превышает среднюю по сечению скорость потока. Показано возникновение областей вихревого движения потока над интервалом индукционного нагрева, обусловленного естественной тепловой конвекцией.

**Ключевые слова:** активная термометрия, температура, скорость потока, индукционный нагрев, естественная тепловая конвекция

**DOI:** 10.31857/S1024708423600045, **EDN:** WKQWVX

При разработке месторождений нефти и газа важное влияние уделяется геофизическому мониторингу состояния скважин. Одним из наиболее информативных методов геофизического контроля за разработкой является скважинная термометрия, основанная на измерении температуры в стволе скважины. Температурные эффекты, связанные с притоком жидкости из пластов в скважину, восходящими или нисходящими жидкостными потоками в стволе скважины, могут быть успешно использованы для решения практических задач скважинной термометрии: выделения мест (интервалов глубин) притока флюида из пластов в скважину, оценки объемного расхода (скорости) флюида в стволе скважины [1, 2]. Схема течения пластовой жидкости в процессе работы добывающей скважины представлена схематично на рис. 1. Жидкость фильтруется через проницаемые флюидонасыщенные пласты 2, и поступает в ствол скважины, формируя восходящий поток 6. Выше и ниже проницаемых пластов 6 залегают непроницаемые горные породы 1. Цементное кольцо 3 и колонна обсадных труб 4 служат для укрепления стенок скважины, а интервал перфорации 5 содержит специальные перфорационные отверстия, восстанавливающие гидродинамическую связь между пластами и скважиной после ее обсадки – спуска в скважину колонны обсадных труб и ее наружного цементирования [3, 4].

Применимость традиционной скважинной термометрии ограничена малыми величинами естественных температурных возмущений (порядка сотых долей градуса). В этом случае более эффективным является метод активной термометрии, основанный на создании в скважине искусственного теплового поля. В данной работе рассматривается одна из модификаций активной



**Рис. 1.** Схема течения жидкости в скважине (1 — непроницаемые горные породы, 2 — проницаемые флюидонасыщенные пласты, 3 — цементное кольцо, 4 — обсадная колонна, 5 — интервал перфорации, 6 — восходящий поток жидкости в скважине).

термометрии, в которой источником тепла выступает индукционный нагреватель обсадной колонны (металлической трубы, внутри которой движется жидкость). Скважинный прибор с индуктором опускается в скважину внутри обсадной колонны, и осуществляет локальный нагрев участка колонны. При контакте с нагреваемой стенкой обсадной трубы происходит передача тепла потоку жидкости в обсадной колонне, в результате в жидкости создается так называемая “тепловая метка”. Опосредованный нагрев жидкости за счет индукционного воздействия на обсадную колонну может составлять до нескольких градусов Кельвина (Цельсия). Изучение особенностей формирования теплового поля в потоке жидкости является основой для решения важной практической задачи активной термометрии, связанной с определением скорости или объемного расхода жидкости в скважине [5, 6].

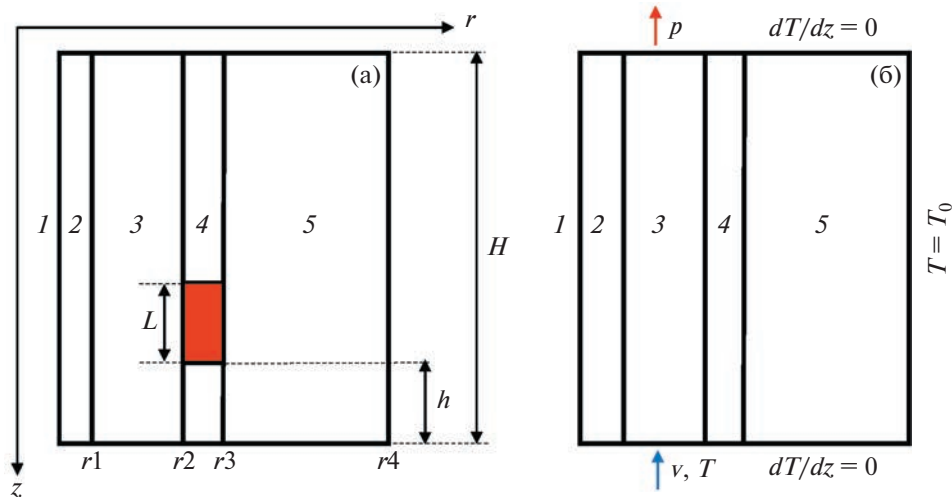
Повышение температуры жидкости в процессе работы индукционного нагревателя обуславливает снижение ее плотности, что приводит к возникновению естественных конвективных потоков. В работах [7, 8] показано, что естественная тепловая конвекция оказывает существенное влияние на характер теплового поля в жидкости при индукционном нагреве. Целью данной работы является исследование особенностей формирования скоростного и температурного полей восходящего потока жидкости в скважине в процессе индукционного нагрева обсадной колонны.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается задача расчета полей скорости и температуры восходящего потока жидкости в цилиндрической трубе (металлической обсадной колонне) при локальном индукционном нагреве участка обсадной трубы. Расчеты выполнены в программном пакете Ansys Fluent. Геометрия модели в осесимметричной 2D ( $r$ – $z$ ) постановке представлена на рис. 2а. На рис. 2б схематично показаны граничные условия, используемые при моделировании. Расчетная область состоит из 4 различных зон с отличающимися свойствами, от внутренней к внешней границе модели: индуктор, жидкость (восходящий поток), металлическая обсадная колонна, цементное кольцо и горные породы. Цементное кольцо и горные породы имеют одинаковые свойства. Скважинный индуктор в общем включает ферритовые сердечники (кольца), на которые наматывается проводящая катушка. Внешний корпус индуктора выполнен из немагнитного непроводящего материала (углепластик, карбон) для исключения индукционного разогрева корпуса прибора.

Допущения, принятые при моделировании:

- скважина вертикальная, обсадная колонна и индуктор расположены концентрично;
- однофазный восходящий поток жидкости в обсадной колонне;



**Рис. 2.** Геометрия задачи (а) (цветом выделен интервал нагрева обсадной колонны); граничные условия (б): 1 – ось симметрии, 2 – индуктор, 3 – жидкость, 4 – металлическая колонна, 5 – цементное кольцо и горные породы.

- жидкость предполагается несжимаемой, при этом учитывается изменение плотности жидкости в связи с изменением температуры в соответствии с приближением Буссинеска–Обербека;
- скважинный прибор с индуктором представлен в виде однородного сплошного цилиндра из углепластика, расположенного вдоль оси скважины по всей длине участка моделирования длиной  $H$ , активная часть с индукционным нагревателем имеет длину  $L$ .
- Электромагнитные процессы, являющиеся причиной выделения тепла в обсадной колонне, в работе не исследуются; в модели используется понятие мощность тепловыделения в обсадной колонне (часть потребляемой индуктором мощности, затрачиваемой на индукционный нагрев тела обсадной колонны); полагается, что тепловыделение в колонне происходит равномерно вдоль участка нагрева  $L$  [7].

Ниже интервала нагрева моделируется участок скважины длиной  $h$ . На рис. 2 показаны также радиусы элементов модели: внешний радиус индуктора  $r_1$ , внутренний и внешний радиусы обсадной колонны  $r_2$  и  $r_3$  соответственно, внешний радиус области моделирования  $r_4$  (в расчетах принято  $r_1 = 21$  мм,  $r_2 = 63.5$  мм,  $r_3 = 73.5$  мм,  $r_4 = 1$  м,  $h = 1.55$  м,  $H = 6$  м,  $L = 0.4$  м). Интервал нагрева располагается в диапазоне глубин 4.05–4.45 м.

Движение жидкости в скважине описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении Буссинеска–Обербека [9, 10], в рамках которого жидкость принимается несжимаемой, а зависимость плотности от температуры учитывается только в уравнении движения при массовых силах. При ламинарном движении жидкости без учета турбулентных поправок уравнение движения имеет вид

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho(T) \mathbf{g} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{u}$  – скорость течения, м/с;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $p$  – давление, Па;  $\mu$  – динамическая вязкость, Па·с;  $\rho_0$  – плотность жидкости при начальной температуре  $T_0$ , кг/м<sup>3</sup>;  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\nabla$  – оператор Гамильтона;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Плотность жидкости в правой части (1.1) линейно зависит от температуры

$$\rho(\theta) = \rho_0 (1 - \beta \theta) \quad (1.2)$$

где  $\theta = T - T_0$  – отклонение температуры от начальной, К;  $\beta$  – коэффициент термического расширения, К<sup>–1</sup>.

Уравнение движения дополняется уравнением неразрывности

$$\nabla(\mathbf{u}) = 0 \quad (1.3)$$

**Таблица 1.** Теплофизические свойства зон

| Зоны                             | $\lambda$ , Вт/(м · К) | $c$ , Дж/(кг · К) | $\rho$ , кг/м <sup>3</sup> |
|----------------------------------|------------------------|-------------------|----------------------------|
| Углепластик (корпус индуктора)   | 0.48                   | 920               | 1500                       |
| Жидкость (вода)                  | 0.65                   | 4185              | 983                        |
| Металл                           | 50                     | 500               | 8000                       |
| Цементное кольцо + горная порода | 2                      | 1000              | 2500                       |

Анализ и сравнение результатов решения уравнений конвекции (1.1)–(1.3) с обширным экспериментальным материалом показывает, что несмотря на некоторую нестрогость приближения Буссинеска–Обербека, эти уравнения достаточно хорошо отражают все важнейшие особенности тепловой конвекции, возникающие в реальных условиях.

Передача теплоты в жидкости осуществляется за счет конвективного теплопереноса (естественного и вынужденного) и теплопроводности [11]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla (\theta) = a \Delta \theta \quad (1.4)$$

Здесь  $a$  – температуропроводность, м<sup>2</sup>/с.

Распределение температуры  $T$  в индукторе, обсадной колонне, горных породах и цементном кольце определяется нестационарным уравнением теплопроводности [12, 13]

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + w(z) \quad (1.5)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К);  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг · К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $w(z)$  – удельная мощность тепловыделения (тепловой источник присутствует в уравнении для обсадной колонны), Вт/м<sup>3</sup>.

Комментарии к граничным условиям, рис. 2б: начальная температура  $T_0$  совпадает с температурой на внешней границе модели и является постоянной величиной. Граничные условия для жидкости: на входе (нижняя граница) задаются постоянная скорость потока  $v$  и температура  $T_0$ , на выходе (верхняя граница) задаются граничное условие по давлению  $p$  и условие равенства нулю производной температуры по вертикальной координате  $z$ . На оси симметрии (левая граница, рис. 2б) задается условие равенства нулю производной температуры по радиальной координате  $r$ . На правой границе задаются условия постоянства температуры горных пород  $T = T_0$ . На верхней и нижней границах в области индуктора, обсадной колонны и горных пород задается условие равенства нулю производной температуры по вертикальной координате  $z$ . Теплообмен на границах жидкость-индуктор, жидкость-обсадная колонна, обсадная колонна-горные породы обусловлен теплопроводностью, на границах различных зон  $i$  и  $j$  выполняются условия равенства температур и тепловых потоков

$$\begin{aligned} T_i &= T_j \\ \lambda_i \frac{dT_i}{dr} &= \lambda_j \frac{dT_j}{dr} \end{aligned} \quad (1.6)$$

На границах жидкость-индуктор и жидкость-обсадная колонна задается условие прилипания.

Теплофизические свойства каждой зоны представлены в табл. 1.

Вязкость жидкости принята 0.5 мПа·с, коэффициент теплового расширения 0.00053 К<sup>−1</sup>. Свойства жидкости были взяты для температуры 60°C (333.15 К), принятой как начальная температура в модели и граничная температура жидкости на входе. Мощность тепловыделения в обсадной колонне составляет 1 кВт, удельная мощность тепловыделения на единицу объема металла 581 кВт/м<sup>3</sup>.

При решении задачи использованы 3 типа сеток: равномерная прямоугольная (в индукторе и обсадной колонне), неравномерная прямоугольная (в жидкости), неравномерная треугольная (в цементном кольце и горных породах). Общее количество расчетных узлов в модели составило около 405000, количество узлов сетки в интервале жидкости 216000. Размер ячеек на границе со стенкой обсадной колонны равен  $r \times z = 1 \times 1$  мм, шаг роста по радиусу равен 1.01, линейный размер ячеек по вертикали постоянен и равен 1 мм. Для численного решения уравнений Навье–

Стокса используется метод (схема) PISO – алгоритм, входящий в семейство алгоритмов SIMPLE, в сравнении с SIMPLE он основан на более высокой степени приближенного соотношения между поправками на давление и скорость. Для пространственной дискретизации конвективных членов была выбрана схема QUICK (Quadratic Upwind Interpolation), которая имеет третий порядок точности на четырехугольных сетках. При расчете градиентов для вычисления диффузионных членов и производных скоростей используется способ Green-Gauss Node Based. Для вычисления градиента давления выбрана схема PRESTO, которая используется для сильно закрученных течений и течений с большими градиентами [14].

Для моделирования турбулентных течений в обсадной колонне рассмотрены модель турбулентности Спаларта–Аллмараса (SA) и модель переноса сдвиговых напряжений (SST  $k-\omega$ ) [14, 15]. При решении задач, связанных с турбулентными потоками, используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (RANS), где мгновенные скорости  $u_i$  представлены в виде суммы пульсационной  $u'_i$  и осредненной по времени  $\overline{u_i}$  составляющих

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i \quad (1.7)$$

Аналогичным образом представлены и другие скалярные величины, такие как давление, энергия и концентрация.

В одно- и двухпараметрических моделях (Спаларта–Аллмараса и SST  $k-\omega$  соответственно) вводятся дополнительные уравнения переноса для характеристик турбулентности. В алгебраических моделях используются алгебраические уравнения для турбулентной вязкости, описывающие ее зависимость от поля осредненной скорости.

Система уравнений, описывающих движение жидкости, представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{-\rho u'_i u'_j}) + \rho g \end{aligned} \quad (1.8)$$

Усредненный по Рейнольдсу подход к моделированию турбулентности использует гипотезу Буссинеска, чтобы связать напряжения Рейнольдса со средними градиентами скорости:

$$\overline{-\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (1.9)$$

В расчете турбулентной вязкости  $\mu_t$  и кроется основное различие моделей Спаларта–Аллмараса и SST  $k-\omega$ .

Для однопараметрической модели Спаларта–Аллмараса используется следующее выражение

$$\mu_t = \rho \tilde{\nu} f_{v1} \quad (1.10)$$

где функция затухания  $f_{v1}$  вычисляется как

$$\begin{aligned} f_{v1} &= \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3} \\ \chi &\equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \end{aligned} \quad (1.11)$$

В модели же SST  $k-\omega$  применяется следующая формула:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \left\{ \max \left[ \frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{\alpha_1 \omega} \right] \right\}^{-1} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \tanh(\Phi_2^2) \\ \Phi_2 &= \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{0.09 \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho y^2 \omega} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь  $S$  – величина скорости деформации,  $k$  – удельная кинетическая энергия турбулентных пульсаций,  $\omega$  – удельная скорость диссипации турбулентных пульсаций.

Коэффициент  $\alpha^*$  уменьшает турбулентную вязкость, вызывая коррекцию низкого числа Рейнольдса:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left( \alpha_0^* + \frac{\text{Re}_t}{R_k} \right) \left( 1 + \frac{\text{Re}_t}{R_k} \right)^{-1} \quad (1.14)$$

$$\text{Re}_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}, \quad R_k = 6, \quad \alpha_0^* = \frac{\beta_t}{3}, \quad \beta_t = 0.072$$

Параметр  $\tilde{\nu}$  идентичен турбулентной кинематической вязкости, за исключением пристеночной области (подверженной влиянию вязкости). Он определяется из следующего уравнения переноса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{\nu}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{\nu} u_i) = \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] + G_{\tilde{\nu}} - Y_{\tilde{\nu}} + S_{\tilde{\nu}} \quad (1.15)$$

Для модели SST  $k-\omega$  требуется определение удельной кинетической энергии турбулентных пульсаций  $k$  и удельной скорости диссипации турбулентных пульсаций  $\omega$ , которые можно определить также из уравнения переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k + G_b \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega + G_{\omega b} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Граничные значения на входе для удельной кинетической энергии турбулентных пульсаций  $k$  и удельной скорости диссипации турбулентных пульсаций  $\omega$  определяются согласно зависимостям

$$\begin{aligned} k &= \frac{3}{2} (UI)^2 \\ \omega &= \frac{\sqrt{k}}{C_\mu^{0.25} l} \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $U$  — средняя скорость потока,  $I$  — интенсивность турбулентности,  $C_\mu = 0.09$  — константа модели турбулентности,  $l$  — масштаб длины турбулентности. Значения коэффициентов модели и принцип расчета слагаемых в правой части уравнений переноса подробно приведены в [14, 16].

Характерные значения  $y^+$  ближайших к стенке узлов рассчитаны согласно зависимости

$$y^+ = \frac{\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}}{\rho \nu} \quad (1.18)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость,  $u$  — составляющая скорости потока в направлении течения (вертикальная составляющая),  $\rho$  — плотность,  $y$  — размер первой ячейки,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Расчетное значение  $y^+$  составило около 0.53; для моделей SA и SST  $k-\omega$ , в которых не используется пристеночных функций, значение  $y^+$  должно быть меньше 1, таким образом, расчетная сетка удовлетворяет требуемому условию по  $y^+$  [15]. Для верификации построенной модели выполнено сравнение результатов расчетов в Ansys Fluent с данными экспериментальных замеров в стендовой скважине [8], получена удовлетворительная сходимость расчетов и экспериментальных данных. В табл. 2 представлены результаты расчетов и замеров максимальной температуры колонны и жидкости (для жидкости рассчитана среднемассовая температура) в процессе 20-минутного нагрева, реализован расход жидкости (воды) в колонне около 60 м³/сут, другие параметры представлены выше в табл. 1 и описании модели. Модель SA прогнозирует большую величину нагрева колонны  $\Delta T$  в сравнении с моделью SST  $k-\omega$  (на 1.9 К или 20%); нагрев жидкости (определяемый по среднемассовой температуре) для модели SA, напротив, ниже (на 0.05 К или 7%). Это показывает, что в модели SST  $k-\omega$  интенсивность теплообмена обсадной колонны с жидкостью выше, чем в модели SA, т.е. эффекты турбулентности, связанные с переносом тепла за счет конвекции в радиальном направлении, проявляются в большей степени. Для дальнейших расчетов была выбрана

**Таблица 2.** Сравнение результатов расчетов для моделей турбулентности SA и SST k- $\omega$ 

| Модель                                                      | SA   | SST k- $\omega$ | Эксперимент |
|-------------------------------------------------------------|------|-----------------|-------------|
| Максимальный нагрев $\Delta T$ колонны (20 мин нагрева), К  | 11.6 | 9.7             | 10.3        |
| Максимальный нагрев $\Delta T$ жидкости (20 мин нагрева), К | 0.68 | 0.73            | 0.71        |

модель SST k- $\omega$ . Она обладает в данном случае лучшей сходимостью и хорошим сопоставлением с экспериментальными результатами.

## 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

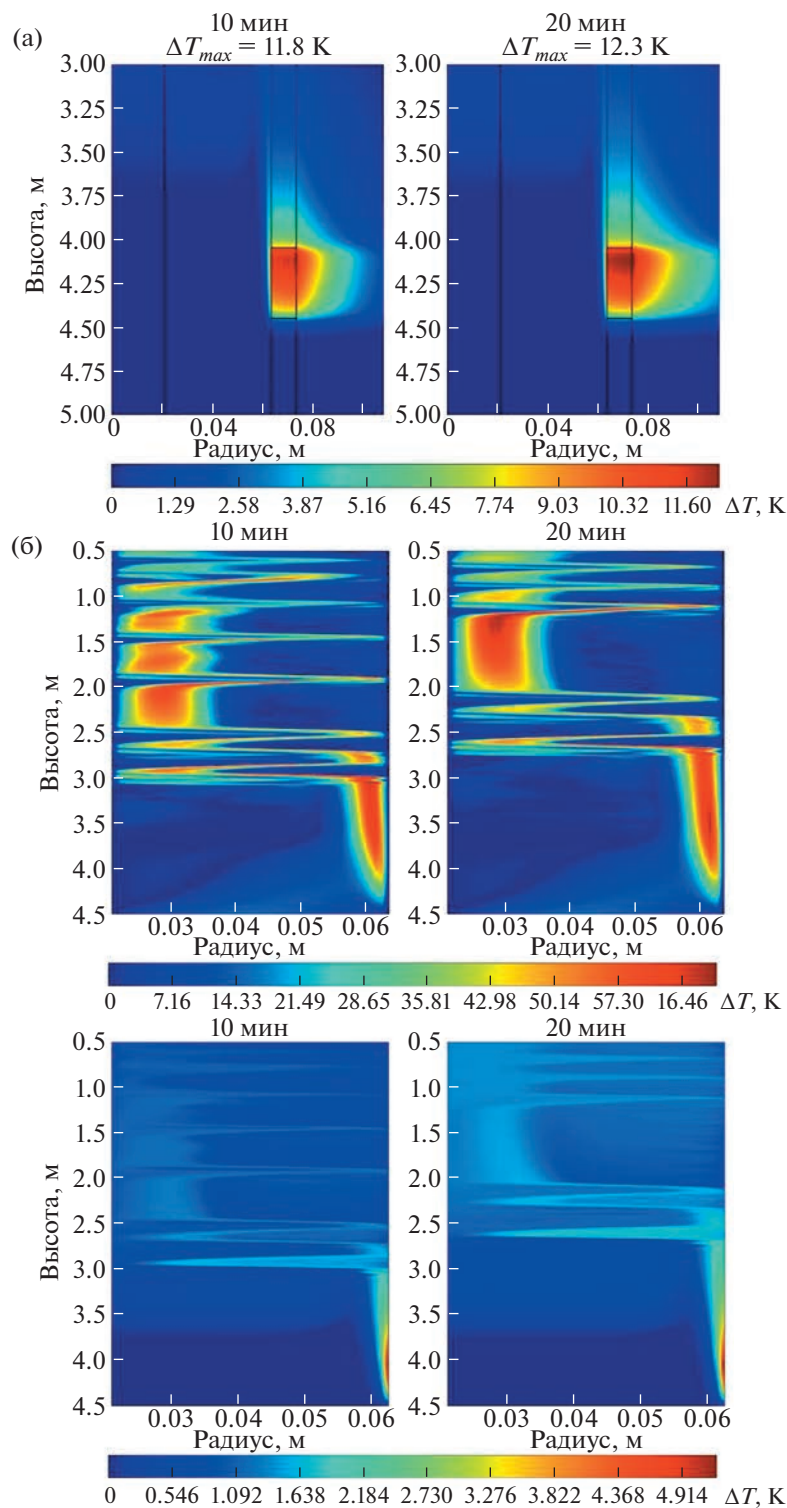
Рассматривается единичный цикл исследования скважины, состоящий из 20-минутного нагрева обсадной колонны индуктором, и 20-минутной остановки индукционного нагревателя (интервал времени между циклами нагрева, в течение которого тепловые аномалии в скважине расформируются). Объемный расход жидкости в обсадной колонне принят  $10 \text{ м}^3/\text{сут}$ , число Рейнольдса  $Re = \rho \cdot v \cdot d / \mu = 972$  (здесь  $\rho$ ,  $\mu$  – плотность и вязкость жидкости соответственно,  $v$  – средняя по сечению скорость потока,  $d$  – гидравлический диаметр). Распределение температуры в колонне и окружающем ее пространстве (жидкости, цементном кольце и горных породах) представлено на рис. 3. Также на рисунке показано распределение модуля локальной скорости и температуры жидкости, движущейся в кольцевом пространстве между индуктором (внешний радиус  $r_1 = 0.021 \text{ м}$ ) и обсадной колонной (внутренний радиус  $r_2 = 0.0635 \text{ м}$ ). Наиболее интенсивный нагрев наблюдается в теле обсадной колонны в интервале индукционного нагрева (глубина/высота 4.05–4.45 м), возмущения температуры  $\Delta T$  относительно начальной за 20 мин нагрева достигают 12.3 К.

Поле скорости жидкости характеризуется существенной нелинейностью и наличием ряда областей возмущения. Максимальная локальная скорость жидкости отмечается вблизи нагретой стенки обсадной колонны, причем локальная скорость в этой области достигает 65 мм/с (для сравнения, средняя по сечению скорость жидкости, соответствующая расходу в колонне  $10 \text{ м}^3/\text{сут}$ , составляет около 10 мм/с). Выше интервала индукционного нагрева, на расстоянии более 1 м (выше глубины 3 м), отмечается возникновение радиальных конвективных потоков, а также повторяющейся структуры движения потока. Максимумы локальной скорости потока отмечаются уже у внутренней стенки (индуктора). Поле температуры восходящего потока жидкости согласуется с полем скорости. В интервале работы индуктора жидкость греется главным образом у стенки нагреваемой обсадной колонны, температурные возмущения в жидкости достигают 5.1 К. В этих условиях естественная тепловая конвекция является причиной максимальной локальной скорости потока в указанной области. По мере подъема в результате теплообмена более горячей и легкой жидкости с более холодной она остывает и становится более плотной, и поскольку она не может опускаться через поднимающийся поток, возникает радиальное конвективное движение.

В результате указанных процессов в жидкости образуется повторяющаяся структура движения жидкости, соответствующая образованию конвекционных ячеек. Картина линий тока (рис. 4) демонстрирует наличие областей вихревого течения жидкости. Анализ поля скорости при подъеме жидкости (рис. 3 и рис. 4) показывает: в интервале индуктора и до глубины порядка 2.7 м подъем жидкости происходит в основном вдоль стенки обсадной колонны. Выше отмечается наличие областей интенсивного закручивания. Характер профиля скорости жидкости претерпевает существенные изменения: подъем жидкости происходит в основном вдоль внешней стенки (обсадной колонны), то вдоль внутренней (поверхность индуктора), причем у противоположной стенки жидкость движется вниз.

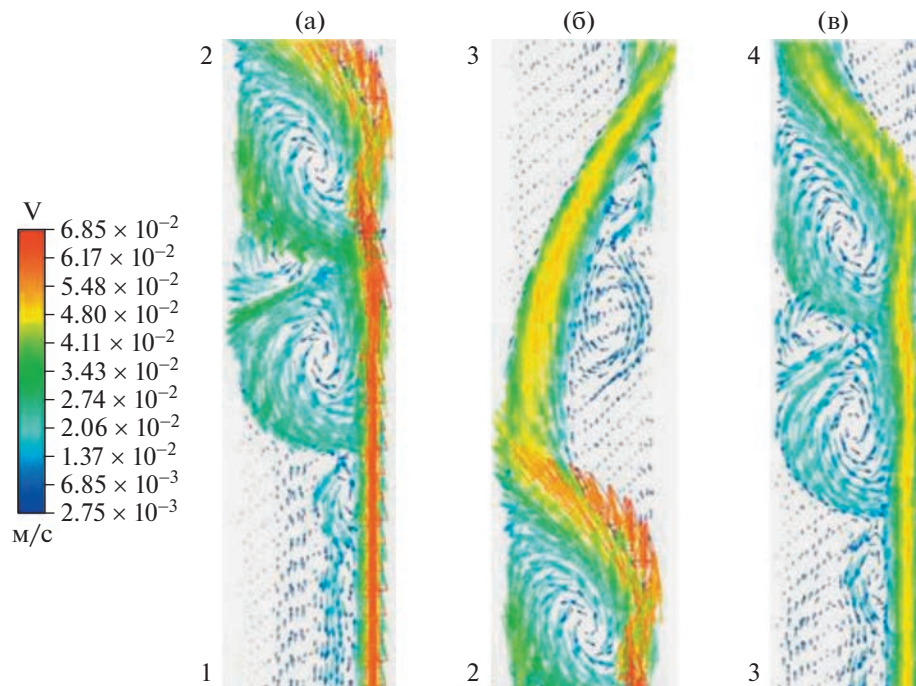
Степень влияния естественной тепловой конвекции на характер движения жидкости во многом зависит от ее расхода. Рассмотрим далее особенности течения жидкости в процессе индукционного нагрева при объемном расходе жидкости в обсадной колонне  $50 \text{ м}^3/\text{сут}$ , число Рейнольдса  $Re = 4860$  (переходный режим течения [11]). Поля скорости течения, температуры восходящего потока и картина линий тока в жидкости представлены на рис. 5 и рис. 6.

На входе в область индукционного нагрева (глубина 4.5 м) максимальная локальная скорость достигается в центральной части потока. В интервале работы индуктора (4.05–4.45 м) за счет теплообмена с нагретой колонной (согласно расчетам ее нагрев достигает 10.8 К) область жидкости вблизи стенки обсадной колонны нагревается, температурные возмущения  $\Delta T$  в жидкости достигают 4.9 К. Влияние естественной тепловой конвекции приводит к росту локальной скорости



**Рис. 3.** Температура колонны и окружающего пространства (а); поле модуля локальной скорости и температуры жидкости в процессе индукционного нагрева при  $Q = 10$  м<sup>3</sup>/сут (б).

потока вблизи нагретой стенки обсадной колонны над интервалом нагрева (на глубинах 2.5–4 м, или высоте над индуктором до 1.5 м), модуль скорости потока достигает 72 мм/с (для сравнения, средняя по сечению локальная скорость жидкости при расходе 50 м<sup>3</sup>/сут составляет около



**Рис. 4.** Картина линий тока через 20 мин индукционного нагрева (глубины точек 1,2,3,4 равны 2,7, 2,4, 2,1, 1,8 м соответственно),  $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$ : нижний 1–2 (а), 2–3 (б) – средний и 3–4 (в) – верхний участок.

50 мм/с). Выше по потоку возмущения поля скорости сглаживаются. Областей вихревого течения в данном случае не образуется (рис. 6).

Следует отметить, что несмотря на существенное различие расхода  $Q$  восходящего потока жидкости 10 и  $50 \text{ м}^3/\text{сут}$  амплитудные величины температуры колонны (12,3 и 10,8 К соответственно) и жидкости (5,1 и 4,9 К соответственно) при индукционном нагреве в целом близки, как и максимальная величина локальной скорости потока (72 и 65 мм/с соответственно). Это говорит о значительном влиянии естественной тепловой конвекции на формирование локальных возмущений поля скорости и температуры в интервале индукционного нагрева. Для оценки влияния естественной тепловой конвекции широко применяется критерий Ричардсона, который рассчитывается следующим образом:

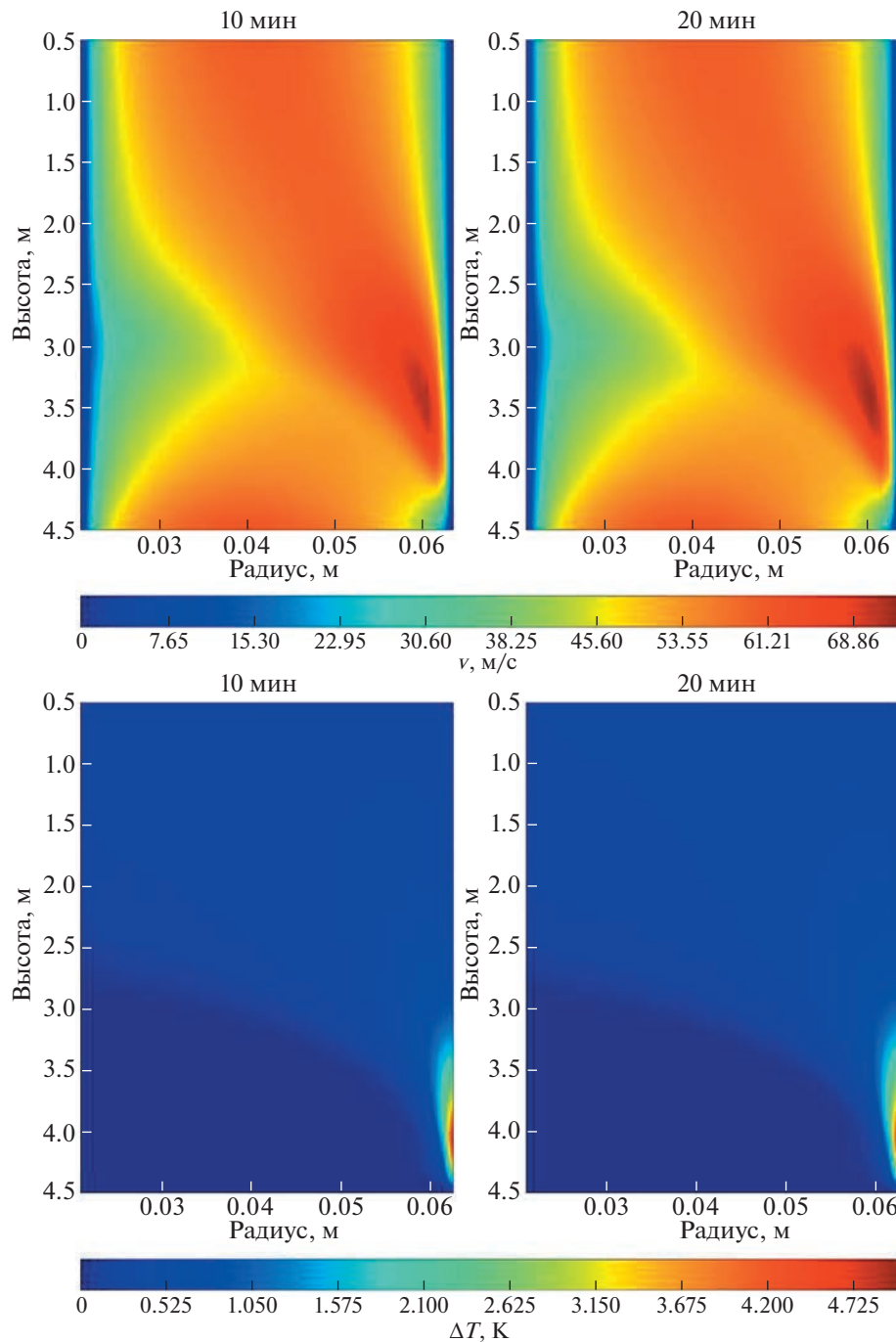
$$\text{Ri} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} = \frac{gL\beta\Delta T}{\nu^2} \quad (2.1)$$

где Gr – число Грасгофа, Re – число Рейнольдса,  $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $\Delta T$  – характерная разница температур,  $\nu$  – скорость потока жидкости.

При  $\text{Ri} \ll 1$  влияние естественной тепловой конвекции в сравнении с вынужденной пренебрежимо мало. При  $\text{Ri} \gg 1$ , естественная тепловая конвекция преобладает над вынужденной. При  $\text{Ri} \approx 1$  требуется учет как естественной, так и вынужденной конвекции. Для фазы нагрева при расходах 10 и  $50 \text{ м}^3/\text{сут}$  числа Ричардсона составляют 23 и 0,9 соответственно, т.е. влияние естественной конвекции существенно во всем диапазоне расходов. При расходе  $10 \text{ м}^3/\text{сут}$  влияние естественной конвекции более чем на порядок превосходит влияние вынужденной конвекции. В этих условиях отмечаются наибольшая нелинейность поля течения и образование областей вихревого движения жидкости и конвекционных ячеек.

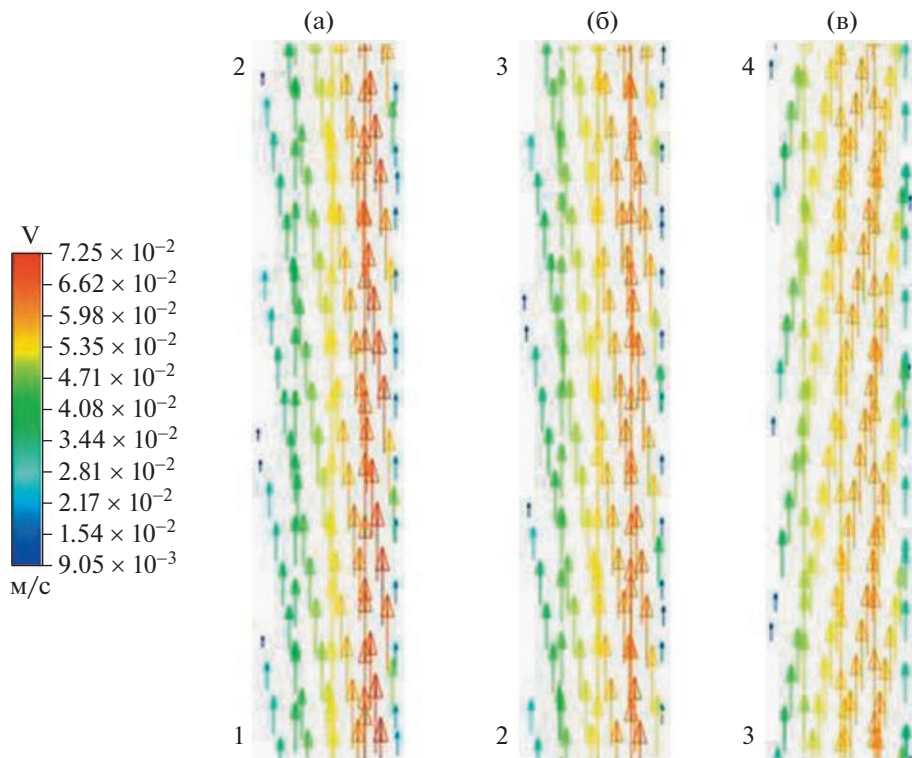
Характер динамики температуры в центральной части потока жидкости (радиальная координата  $r = 0,04 \text{ м}$ ) на различной высоте  $h$  относительно верхней границы интервала (глубины 4,05 м) представлен на рис. 7, данный тип температурных кривых регистрируется обычно при промышленных исследованиях скважины индукционным нагревателем.

При расходе  $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сут}$  видны существенно немонотонный характер роста температуры жидкости во времени и наличие колебаний температуры величиной более 0,5 К, при расходе  $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут}$  температурные кривые значительно более гладкие. На высотах  $h = 1, 1,5, 2 \text{ м}$  над

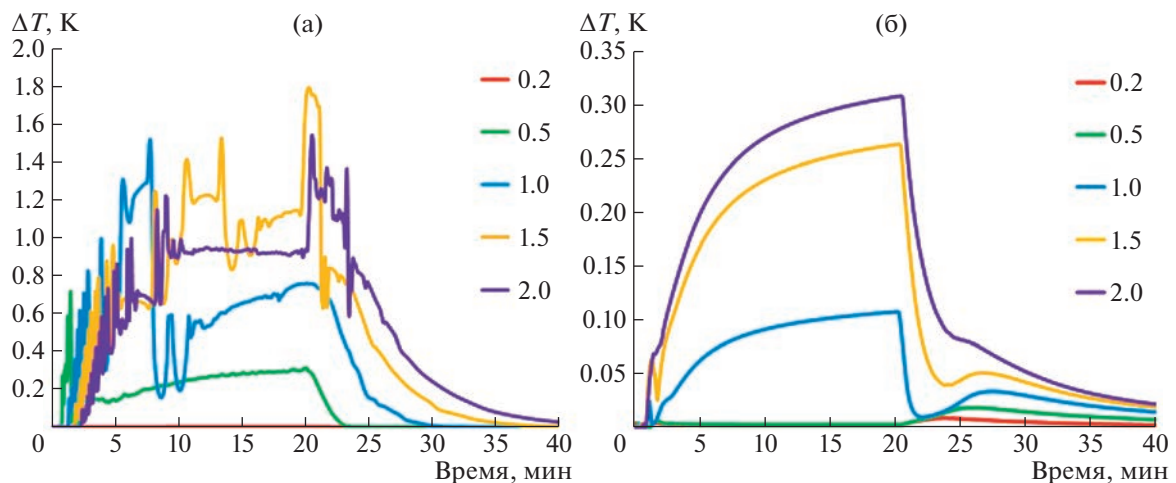


**Рис. 5.** Поле модуля локальной скорости и температуры жидкости в процессе индукционного нагрева при  $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут.}$

интервалом нагрева при увеличении расхода с 10 до  $50 \text{ м}^3/\text{сут}$  температура жидкости снижается; на высоте  $h = 0.5 \text{ м}$  температура выше при расходе  $10 \text{ м}^3/\text{сут}$ , на высоте  $h = 0.2 \text{ м}$  температура в центре потока практически не изменяется во времени при обоих расходах. Также можно отметить тренд увеличения температуры жидкости в центре потока при увеличении высоты относительно интервала нагрева. Причиной подобного характера температурного поля является то, что в интервале индукционного нагрева повышается температура жидкости главным образом в пристеночной области у обсадной колонны, рост температуры в центральной части потока происходит за счет радиального перемещения нагретых слоев жидкости, выше по потоку. При расходе жидкости  $10 \text{ м}^3/\text{сут}$  различные слои жидкости в колонне активно перемешиваются в областях ра-



**Рис. 6.** Картина линий тока через 20 мин индукционного нагрева (глубины точек 1,2,3,4 равны 2.7, 2.4, 2.1, 1.8 м соответственно),  $Q = 50 \text{ м}^3/\text{сут}$ : нижний 1–2 (а), 2–3 (б) – средний и 3–4 (в) – верхний участок.



**Рис. 7.** Динамика температуры в центральной части потока жидкости при объемном расходе в колонне 10 (а) и 50 (б)  $\text{м}^3/\text{сут}$ ; указатель кривых – высота  $h$  в метрах над верхней границей интервала нагрева.

диального конвективного (вихревого) движения. При расходе  $50 \text{ м}^3/\text{сут}$  потоки в радиальном направлении гораздо менее выраженные (рис. 6). В этой связи характер поведения температуры в зависимости от высоты рассматриваемых точек является столь нелинейным.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено исследование особенностей формирования полей локальной скорости и температуры восходящего потока жидкости обсадной колонне в процессе ее индукционного нагрева, расчеты проведены в программном пакете Ansys Fluent. Рассмотрены расходы жидкости 10 и

50 м<sup>3</sup>/сут, соответствующие ламинарному и переходному режимам течения в обсадной трубе. Показано, что жидкость нагревается в основном в области вблизи нагретой стенки обсадной колонны, температурные возмущения в колонне и жидкости достигают 12 и 5 К соответственно. Благодаря естественной тепловой конвекции в пристеночной области обсадной колонны достигается и максимальная локальная скорость потока, величина которой достигает 65–70 мм/с, что в несколько раз превышает среднюю по сечению скорость жидкости. Для расхода жидкости 10 м<sup>3</sup>/сут отмечено возникновение областей радиального конвективного и вихревого движения потока над интервалом индукционного нагрева. При расходе жидкости 50 м<sup>3</sup>/сут установлено наличие локальных возмущений поля скорости и температуры в пристеночной области обсадной колонны на высоте до 1.5 м над интервалом индукционного нагрева. Расчетное значение чисел Ричардсона при расходах 10 и 50 м<sup>3</sup>/сут составило 23 и 0.9 соответственно, что показывает существенное влияние естественной конвекции на формирование температурного поля во всем диапазоне рассмотренных расходов. Построены кривые динамики температуры в центральной части потока жидкости на различной высоте относительно интервала нагрева, показан нелинейный характер поведения температурного поля в зависимости от высоты рассматриваемых точек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-11-2021-061 от 25 июня 2021 г.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яруллин Р.К., Яруллин А.Р., Валиуллин А.С., Валиуллин М.С., Тихонов И.Н. Оптимизация аппаратно-технологического комплекса промыслово-геофизических исследований действующих горизонтальных скважин // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2020. Т. 126. № 4. С. 19–28.
2. Валиуллин Р.А., Яруллин Р.К. Особенности геофизических исследований действующих горизонтальных скважин // Вестник АН Республики Башкортостан. 2014. № 1. С. 21–28.
3. Катеев Т.Р. Повышение качества крепления скважин на нефтяных месторождениях Республики Татарстан // Записки горного института. 2004. Т. 159. № 2. 2004. С. 11–14.
4. Токарев М.А., Зубаиров С.Г., Токарева Н.М. Промысловая эффективность усовершенствованной конструкции гидромеханического щелевого перфоратора // Изв. Томского политехнического ун-та. Инжиниринг георесурсов. 2018. Т. 329. № 7. С. 70–76.
5. Valiullin R.A., Sharafutdinov R.F., Ramazanov A.Sh., Shilov A.A. Enhancement of well productivity using a technique of high-frequency induction treatment // SPE (Society of Petroleum Engineers) – 157724, SPE Heavy Oil Conference Canada, Calgary, Alberta, Canada, 12–14 June 2012. P. 1–7.
6. Гаязов М.С., Валиуллин Р.А., Яруллин Р.К. Применение метода регулярных температурных меток для измерения фазовых расходов в низкодебитных горизонтальных скважинах // Вестник Тюменского гос. ун-та. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6. № 1. С. 150–165.
7. Валиуллин Р.А., Шарафутдинов Р.Ф., Федотов В.Я., Канафин И.В., Космылин Д.В. Изучение тепловой конвекции на модели скважины с индукционным нагревателем при заколонном перетоке “сверху” // Вестник Башкирского ун-та. 2017. Т. 22. № 2. С. 325–329.
8. Канафин И.В., Космылин Д.В. Изучение формирования теплового поля на модели скважины с локальным нагревом // Изв. Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 2. С. 44–48.
9. Шварц К.Г., Шварц Ю.А. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости при наличии условия проскальзывания Навье // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 1. С. 33–44.  
<https://doi.org/10.31857/S0568528120010119>
10. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: ФИЗМАЛИТ, 2008. 368 с.
11. Bergman Th.L., Lavine A.S., Incropera F.P., DeWitt D.P. Fundamentals of heat and mass transfer, 8th edition. St. Joseph County: University of Notre Dame, Indiana, USA, 2006. 1070 p.
12. Брыков Н.А. Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности // Междунар. науч.-исслед. журн. 2016. № 5–3 (47). С. 52–55.  
<https://doi.org/10.18454/IRJ.2016.47.137>
13. Замзари Ф., Мехрез З., Кафси А.Э. Интенсификация теплообмена в пульсирующем течении внутри открытой полости под действием равномерного магнитного поля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 138–149.  
<https://doi.org/10.1134/S0568528119020142>
14. Ansys 2022R1 Documentation. Ansys Fluent Theory Guide. Ansys Inc., Southpointe, 2022. 1036 p.
15. Сентябов А.В., Гаврилов А.А., Дектерев А.А. Исследование моделей турбулентности для расчета закрученных течений // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18. № 1. С. 81–93.
16. Alim M.A., Rahman M., Karim M. Performance of SST k- $\omega$  turbulence model for computation of viscous drag of axisymmetric underwater bodies // International Journal of Engineering. 2011. № 24 (2). P. 139–146.

УДК 532.546:539.371

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ СИСТЕМЫ ТРЕЩИН НА ФИЛЬТРАЦИЮ ЖИДКОСТИ В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

© 2023 г. Д. Ю. Легостаев<sup>а,\*</sup>, С. П. Родионов<sup>а,\*\*</sup>

<sup>а</sup>Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия

\*E-mail: legostaevdy@yandex.ru

\*\*E-mail: rodionovsp@bk.ru

Поступила в редакцию 05.08.2022 г.

После доработки 12.11.2022 г.

Принята к публикации 21.12.2022 г.

Рассматривается двумерная однофазная фильтрация слабосжимаемой жидкости в деформируемой трещиновато-пористой среде. Для совместного моделирования процессов фильтрации и связанного с ними изменения напряженно-деформированного состояния среды использована модель пороупругой среды, моделирование трещиноватости выполнено с помощью модели дискретных трещин. Трещины в рассматриваемой области имели случайное положение и ориентацию, распределение трещин по длинам подчинялось степенному закону. Исследовалась зависимость фильтрационных свойств трещиновато-пористой среды от ее напряженно-деформированного состояния и структуры системы трещин. Численное исследование выполнено для вариантов систем трещин, полученных путем множественной случайной генерации. Установлено, что фильтрационные свойства трещиновато-пористой среды определяются главным образом структурой системы трещин, характеризуемой параметром перколяции. Показано, что существенное влияние напряженно-деформированного состояния среды на ее фильтрационные свойства наблюдается для только связанных систем трещин. Предложена формула для аппроксимации зависимости эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды от параметров характеризующих связность системы трещин, напряженно-деформированное состояние среды, деформационные и фильтрационные свойства трещин.

**Ключевые слова:** трещиновато-пористая среда, абсолютная проницаемость, пороупругость, однофазная фильтрация, модель дискретных трещин, напряженно-деформированное состояние, перколяция

**DOI:** 10.31857/S1024708422600543, **EDN:** WJPBJV

Исследование фильтрационных течений жидкостей и газов в горных породах и иных пористых средах имеет важное значение в различных приложениях [1–3]. Горные породы могут содержать трещины как естественного происхождения, так и искусственные, полученные, например, при проведении операции гидроразрыва пласта [4, 5]. При этом трещиноватость оказывает значительное влияние на процессы фильтрации пластовых флюидов [6, 7]. Трещины, обладая высокой проводимостью, могут выступать в качестве основных каналов при фильтрации жидкостей и газов. Так, при разработке нефтяных месторождений наличие трещиноватости может приводить к быстрым прорывам закачиваемой в пласт воды к добывающим скважинам и к существенной неравномерности вытеснения нефти. В связи с этим наличие трещин необходимо учитывать при планировании размещения скважин и выборе режима их работы [8].

Важным вопросом при моделировании фильтрационных процессов в трещиноватых средах является выбор подхода к моделированию трещин, который должен учитывать структуру и свойства системы трещин. Наиболее универсальной является модель дискретных трещин [9, 10], которая позволяет учесть положение, ориентацию, размер и физические свойства каждой трещины в системе. Данный подход не имеет ограничений на геометрическое строение системы трещин, однако его применимость ограничена высокой вычислительной сложностью. Кроме того, для сильнотрещиноватых сред не представляется возможным описать геометрические характеристики каждой отдельно взятой трещины. В этом случае для моделирования трещиноватости используется модель двойной пористости/двойной проницаемости [11, 12], в рамках которой

матрица горной породы и система трещин представляются в виде сплошных сред с эффективными свойствами. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород сильно зависят от напряженно-деформированного состояния среды [13]. Для совместного описания фильтрационных процессов и связанного с ними изменения напряженно-деформированного состояния среды часто используют модель пороупругой среды [10, 14, 15].

Существенная степень неопределенности параметров системы трещин является ключевым фактором при моделировании трещиноватых сред. Так как истинное расположение всех трещин в пласте достоверно не известно, становится необходимым использование вероятностного описания системы трещин, которое предполагает задание законов распределения трещин по длинам, углу, пространству и раскрытию [16, 17]. Для описания распределения трещин по длинам наиболее широко используется степенной закон [18], который позволяет описать присущую системе трещин разномасштабность. Фильтрационные характеристики трещиноватых сред существенно зависят от параметров системы трещин [19, 20], наиболее значимыми из которых являются длина трещин и их концентрация в рассматриваемой области [21].

Для анализа влияния трещиноватости на фильтрационные свойства горных пород наряду с методами механики сплошной среды широкое распространение получили методы теории перколяции [22–25], использование которых позволяет оценить связность и проводимость системы трещин, опираясь на ее геометрические характеристики. При этом связность противоположных границ рассматриваемой области через систему трещин, характеризуемая параметром перколяции, существенным образом влияет на фильтрационные свойства среды.

Целью настоящей работы является исследование зависимости фильтрационных свойств трещиновато-пористых сред от их напряженно-деформированного состояния и структуры системы трещин. Фильтрационные свойства деформируемой трещиновато-пористой среды определены из результатов прямого численного моделирования процесса однофазной фильтрации в двумерной области. Исследование выполнено для вариантов систем трещин, полученных путем множественной случайной генерации. Рассмотрено влияние плотности системы трещин и параметра перколяции на величину эквивалентной проницаемости среды. Исследована зависимость эквивалентной проницаемости среды от ее напряженно-деформированного состояния, при различных давлениях закачки жидкости в исследуемую область. Предложен вид аппроксимирующей функции, учитывающий зависимость проницаемости трещиновато-пористой среды от основных параметров рассматриваемой задачи.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается однофазная двумерная фильтрация слабосжимаемой жидкости в деформируемой трещиновато-пористой среде. Для описания фильтрационных процессов используется математическая модель пороупругой среды, которая включает в себя уравнения для давления жидкости в системе матрица-трещины и уравнения для перемещений скелета горной породы, учитывающие деформационные свойства трещин.

### 1.1. Фильтрация в трещиновато-пористой среде

Уравнение фильтрации жидкости в поровом пространстве деформируемого скелета горной породы записывается в виде [15]:

$$\frac{1}{M_m} \frac{\partial P_m}{\partial t} + b_m \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{v}_m$$

$P_m$  — давление жидкости в поровом пространстве,  $M_m = C_l \phi_m + \frac{b_m - \phi_m}{K_s}$  — модуль Био пористой среды  $C_l$  — сжимаемость жидкости,  $\phi_m$  — пористость матрицы горной породы,  $b_m$  — коэффициент Био матрицы,  $K_s$  — объемный модуль зерен горной породы,  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений скелета горной породы,  $\mathbf{v}_m$  — скорость фильтрации жидкости в поровом пространстве.

Скорость фильтрации жидкости в пористой среде определяется из уравнения Дарси:

$$\mathbf{v}_m = -\frac{k_m}{\mu_l} \nabla P_m,$$

где  $k_m$  — абсолютная проницаемость пористой среды,  $\mu_l$  — вязкость жидкости.

Трещина представляет собой две поверхности  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ , находящиеся в состоянии механического контакта, шероховатость которых не позволяет им полностью сомкнуться. Продольные размеры трещины существенно преобладают над ее поперечными размерами, что позволяет в двумерном случае рассматривать трещины как одномерные объекты. При рассмотрении процессов фильтрации трещина модельно представляется как узкая щель, окруженная матрицей горной породы. Уравнение для давления жидкости в трещине, учитывающее пороупругие эффекты, имеет вид [13]:

$$\frac{\delta}{M_f} \frac{\partial P_f}{\partial t} + b_f \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{\partial q_f}{\partial x_f} - v_+ - v_-$$

где  $\delta$  – раскрытие трещины,  $P_f$  – давление жидкости в трещине,  $M_f = C_l \phi_f + \frac{b_f - \phi_f}{K_s}$  – модуль Био трещины,  $\phi_f$  – пористость трещины,  $b_f$  – коэффициент Био трещины,  $x_f$  – координата, изменяющаяся вдоль трещины,  $q_f$  – поток вдоль трещины,  $v_{\pm}$  – скорости фильтрации по нормали к границам трещины.

Течение жидкости в трещине рассматривается как движение между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии  $\delta$  друг от друга. Погонный расход через трещину в соответствии с кубическим законом [26] имеет вид:

$$q_f = -\frac{\delta^3}{12\mu_l} \frac{\partial P_f}{\partial x_f}.$$

По аналогии с законом Дарси выражение для абсолютной проницаемости трещины может быть записано в виде:

$$k_f = \frac{\delta^2}{12} = \frac{(\delta_0 + \Delta\delta)^2}{12},$$

где  $\delta_0$  – характерное раскрытие трещины,  $\Delta\delta$  – изменение раскрытия.

На границах трещины  $\Gamma_{\pm}$  должны выполняться условия непрерывности давления и потоков. При этом скорость фильтрации  $v_{\pm}$  по нормали к границе матрица-трещина  $\Gamma_{\pm}$  пропорциональна градиенту давления и может быть определена как

$$v_{\pm} = -\frac{k_m}{\mu_l} \frac{\partial P_m}{\partial \mathbf{n}_{\pm}},$$

где  $\mathbf{n}_{\pm}$  – вектор нормали к границам трещины.

При рассмотрении системы трещин две трещины либо не пересекаются, либо имеют одну общую точку. При этом в точке пересечения трещин также должны выполняться условия непрерывности давления и потоков.

## 1.2. Напряженно-деформированное состояние трещиновато-пористой среды

Трещиновато-пористая среда в каждый момент времени находится в состоянии механического равновесия. Закон сохранения импульса для пороупругой среды в квазистационарном приближении без учета объемных сил имеет вид [15]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - b_m \nabla P_m I) = 0 \quad (1.1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор полных напряжений,  $\boldsymbol{\sigma}'$  – тензор эффективных напряжений,  $I$  – единичная матрица.

Для изотропной пороупругой среды в случае малых деформаций уравнение (1.1) с использованием закона Гука может быть записано относительно вектора перемещений скелета горной породы:

$$\nabla \cdot [\mu \nabla \mathbf{u} + \mu (\nabla \mathbf{u})^T + \lambda \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{I}] - b_m \nabla P_m = 0,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ляме.

При моделировании напряженно-деформированного состояния трещины рассматриваются как включения в скелет горной породы, обладающие собственными деформационными свойствами. Напряжения, действующие на границы трещины, в соответствии с условием механического равновесия (1.1) должны удовлетворять условию

$$\sigma_+ \cdot n_+ = -\sigma_- \cdot n_-,$$

где  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  — полные напряжения, действующие на противоположные стороны трещины.

Выражение для эффективных напряжений, возникающих в трещине, может быть представлено в виде

$$\sigma'_n = \sigma_n + b_f P_f, \quad \sigma'_s = \sigma_s, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_n$ ,  $\sigma_s$  — полные нормальное и сдвиговое напряжения,  $\sigma'_n$ ,  $\sigma'_s$  — эффективные нормальное и сдвиговое напряжения. Из (1.2) видно, что давление жидкости в трещине не влияет на сдвиговую компоненту напряжений.

Нормальные и сдвиговые напряжения, действующие на трещину, связаны с относительными перемещениями ее границ следующими линейными соотношениями:

$$\sigma'_n = k_n u_n, \quad \sigma'_s = k_s u_s, \quad (1.3)$$

где  $u_n$  и  $u_s$  — относительные нормальные и сдвиговые перемещения берегов трещины.

Раскрытие трещины  $\delta$  может быть выражено через относительное нормальное перемещение ее берегов:

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta = \delta_0 + u_n$$

Таким образом, приведенные выше уравнения однофазной фильтрации в деформируемой трещиновато-пористой среде образуют замкнутую систему, которую необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим насыщенную жидкостью трещиновато-пористую среду, находящуюся в квадратной области  $\Omega = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq L\}$  с левой  $\Gamma_l = \{x = 0; 0 \leq y \leq L\}$ , правой  $\Gamma_r = \{x = L; 0 \leq y \leq L\}$ , нижней  $\Gamma_b = \{0 \leq x \leq L; y = 0\}$  и верхней  $\Gamma_t = \{0 \leq x \leq L; y = L\}$  границами.

### 2.1. Граничные и начальные условия

Рассматриваются фильтрационные потоки в горизонтальном направлении, вызванные постоянным перепадом давления между левой и правой границами расчетной области  $P_{in} - P_{out} = \Delta P$ . На верхней и нижней границах расчетной области задано условие непротекания. Таким образом, граничные условия для давления имеют вид:

$$P|_{\Gamma_r} = P_{out}, \quad \frac{\partial P}{\partial n}|_{\Gamma_l} = 0, \quad P|_{\Gamma_l} = P_{in}, \quad \frac{\partial P}{\partial n}|_{\Gamma_b} = 0$$

Трещиновато-пористая среда находится под воздействием полных сжимающих напряжений, действующих перпендикулярно границам области. Для учета влияния прилегающих к расчетной области горных пород используются граничные условия “абсолютно жесткой пластины” [27], что приводит к граничным условиям следующего вида:

$$\int_{\Gamma_r} \sigma dy = \sigma_b L, \quad \int_{\Gamma_l} \sigma dx = \sigma_b L, \quad u_n|_{\Gamma_l} = 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial n}|_{\Gamma_l} = 0, \quad u_n|_{\Gamma_b} = 0, \quad \frac{\partial u_t}{\partial n}|_{\Gamma_b} = 0,$$

где  $u_n$  и  $u_t$  — нормальная и сдвиговая компоненты вектора перемещений.

В начальный момент времени давления жидкости в поровом пространстве и трещинах равны между собой  $P_m|_{\Omega} = P_f|_{\Omega} = P_i$ , а поле перемещений  $u_i$  и раскрытие трещин  $\delta_i$  определяются из решения поставленной задачи для невозмущенного поля давления при  $P_{in} = P_{out} = P_i$ . Все значения давлений и напряжений отсчитываются от величины начального давления  $P_i$ .

## 2.2. Трещиноватость

В рассматриваемой области расположена система трещин, состоящая из трещин со случайным положением и ориентацией. Распределение трещин по длинам подчиняется степенному закону [18]

$$n(l) = Al^{-a}, \quad (2.1)$$

где  $l \in [l_{\min}, l_{\max}]$  — длина трещины,  $n(l)dl$  — количество трещин с размером  $l$  попадающих в интервал  $[l, l + dl]$ ,  $a$  — показатель степени,  $A$  — нормировочная константа.

Систему трещин можно охарактеризовать плотностью  $\gamma$  и параметром перколяции  $p$ , выражения для которых имеют вид [22]:

$$\gamma = \frac{1}{L^2} \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} n(l)l' dl,$$

и

$$p = \frac{1}{L^2} \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} n(l)l'^2 dl,$$

где  $l'$  — длина трещины, включенной в рассматриваемую область. Параметр перколяции  $p$  характеризует степень связности системы трещин. При  $p > p_c$ , где  $p_c$  — порог перколяции, трещины статистически связывают противоположные границы рассматриваемой области.

## 3. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для численного решения приведенной выше системы уравнений использовался метод контрольных объемов [28]. Совместное решение уравнений пороупругости для трещиноватой среды реализовано с помощью итерационного алгоритма “с фиксированными напряжениями” [29], который является безусловно устойчивым. Для учета положения трещин внутри расчетной области использованы неструктурированные расчетные сетки, построение которых проведено с помощью открытого пакета Gmsh [30]. Численные расчеты проведены с использованием разработанного программного модуля [31].

Несмотря на то что модель дискретных трещин позволяет наиболее точно описать трещиноватость среды, ее использование осложняется высокими вычислительными затратами, связанными с необходимостью построения детальных расчетных сеток. Варианты системы трещин, полученные при случайной генерации, могут обладать геометрией, требующей чрезмерного измельчения расчетной сетки [32]. В связи с этим на процесс генерации системы трещин были наложены ограничения, позволяющие избежать подобного измельчения: заданы минимальное расстояние между непересекающимися трещинами  $d_{\min}$ , минимальное расстояние между точками пересечения трещин  $d_{\min}$  и минимальный угол пересечения трещин  $\theta_{\min}$ .

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Важным вопросом при изучении влияния трещиноватости на фильтрационные свойства горных пород является исследование зависимости эквивалентной проницаемости среды от структуры системы трещин. Эквивалентная абсолютная проницаемость трещиновато-пористой среды  $k_{eq}$  может быть найдена из уравнения Дарси при заданном перепаде давления между границами расчетной области  $\Delta P$  и известном расходе жидкости  $q$  при установившемся потоке:

$$q = -\frac{k_{eq} \Delta P}{\mu_l L}$$

откуда

$$k_{eq} = -\frac{q\mu_l L}{\Delta P}$$

В работе выполнено исследование зависимости эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды от ее напряженно-деформированного состояния и параметров, характеризующих

ющих структуру системы трещин. Для этого проведена множественная случайная генерация систем трещин. Для каждого созданного варианта численно решалась задача о фильтрации однофазной жидкости в деформируемой трещиновато-пористой среде. Расчет эквивалентной проницаемости проведен на основе полученных из численного решения расходов жидкости на противоположных границах расчетной области. Решение для стационарного режима фильтрации было получено методом установления. Размер шага по времени и характерные размеры расчетных узлов выбраны таким образом, чтобы их дальнейшее уменьшение не оказывало существенного влияния на результаты расчетов.

Во всех расчетах использовались следующие значения параметров горной породы и насыщающей ее жидкости: пористость матрицы  $\phi_m = 0.14$ , пористость трещин  $\phi_f = 1.0$ , проницаемость матрицы  $k_m = 1 \times 10^{-15} \text{ м}^2$ , раскрытие трещин в недеформированном состоянии  $\delta_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ м}$ , модуль Юнга  $E = 2 \times 10^4 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ , объемный модуль материала зерен  $K_s = 2.7 \times 10^5 \text{ МПа}$ , нормальная жесткость трещин  $k_n = 2 \times 10^5 \text{ МПа/м}$ , сдвиговая жесткость трещин  $k_s = 1 \times 10^5 \text{ МПа/м}$ , коэффициент Био матрицы  $b_m = 1.0$ , коэффициент Био трещин  $b_f = 1.0$ , коэффициент сжимаемости жидкости  $C_l = 3.7 \times 10^{-4} \text{ МПа}^{-1}$ , вязкость жидкости  $\mu_l = 1.0 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ .

Проницаемость трещин  $k_f$  зависит от их раскрытия, определяемого напряженно-деформированным состоянием среды. Изменением проницаемости пористой среды, вызванным изменением напряженно-деформированного состояния, можно пренебречь по сравнению с изменением проницаемости трещин. Для трещин всех размеров использовано одинаковое значение раскрытия  $\delta_0$ . Отношение проницаемостей трещин и пористой матрицы при  $\delta = \delta_0$  составляет  $k_f/k_m \approx 10^4$ . Размер стороны расчетной области  $L$  задавался равным 250 м, что соответствует характерному расстоянию между скважинами при разработке нефтяных пластов.

#### 4.1. Варианты системы трещин

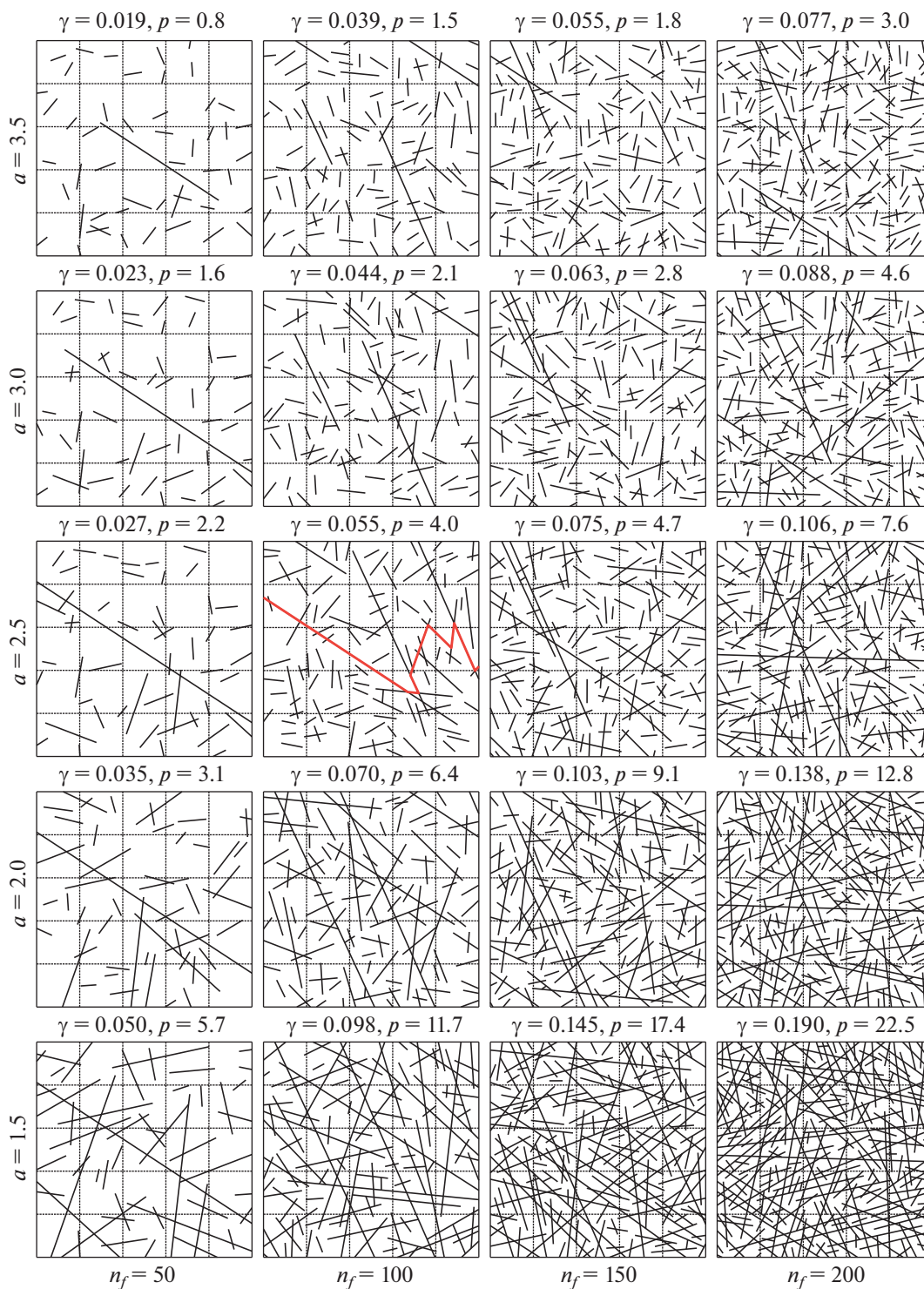
Для исследования влияния трещиноватости на фильтрационные свойства среды рассмотрены системы трещин с различными показателями степени  $a$  в степенном законе (2.1) и количеством трещин в системе  $n_f$ . Показатель степени в законе распределения принимал значения  $a = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$ , количество трещин в системе  $n_f = 50, 100, 150, 200$ . Для каждой пары значений параметров  $a$  и  $n_f$  было создано 40 реализаций систем трещин. Таким образом, всего в работе рассмотрено  $N = 5 \cdot 4 \cdot 40 = 800$  вариантов систем трещин. Для всех вариантов выбраны значения  $l_{\max} = 2L = 500 \text{ м}$ ,  $l_{\min} = 0.06L = 15 \text{ м}$ . При генерации систем трещин использованы значения  $d_{\min} = 5 \text{ м}$ ,  $\theta_{\min} = 20^\circ$ . Плотность и параметр перколяции для всех созданных вариантов систем трещин принадлежали следующим интервалам:  $\gamma \in [0.016; 0.202]$ ,  $p \in [0.4; 26.2]$ .

Некоторые примеры сгенерированных систем трещин для каждой из пар  $(n_f, a)$  и соответствующие им значения  $\gamma$  и  $p$  приведены на рис. 1. Видно, что по мере уменьшения  $a$  увеличивается характерная длина трещин, возрастает их связность. Так, при  $a = 3.5$  в области преобладают трещины малой длины, изолированные друг от друга. При  $a = 1.5$  большинство трещин включено в один кластер, связывающий противоположные границы расчетной области.

Под перколяцией будем понимать связь противоположных границ расчетной области системой трещин. В таком случае существует как минимум один путь по трещинам от одной границы до другой. Набор трещин, связывающий границы, образует перколяционный кластер. Для каждого варианта системы трещин исследовано наличие связи противоположных границ области в горизонтальном направлении. Для рассматриваемого набора систем трещин в 357 случаях имеет место перколяция расчетной области и в 443 случаях противоположные границы несвязны. На рис. 2 приведена зависимость вероятности перколяции расчетной области от параметра перколяции, которая аппроксимирована функцией следующего вида

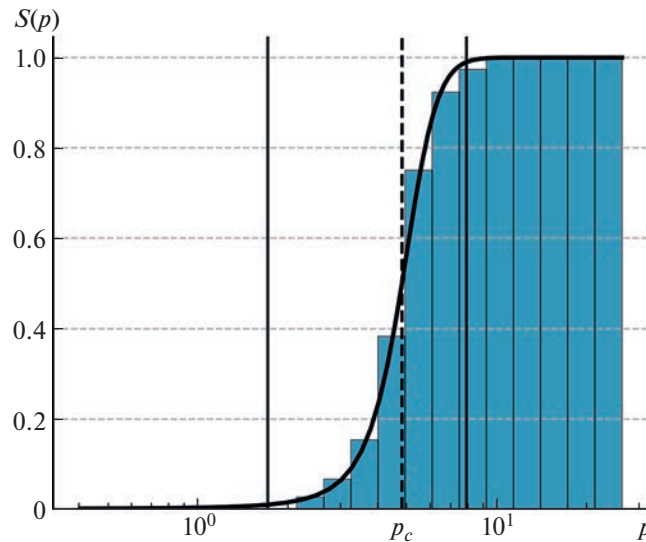
$$S(p) = \frac{1}{1 + e^{-\varepsilon(p-p_c)}}, \quad (4.1)$$

где  $p_c$  — пороговое значение параметра перколяции, параметр  $\varepsilon$  определяет ширину “переходной зоны”.



**Рис. 1.** Примеры вариантов сгенерированных систем трещин с различными значениями показателя  $a$  в законе распределения трещин по длинам (строки) и количеством трещин в системе  $n_f$  (столбцы). Для каждой системы трещин приведены значения плотности системы трещин  $\gamma$  и параметра перколяции  $p$ .

Для оценки качества аппроксимации использована средняя абсолютная ошибка  $mae = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\hat{y}_i - y_i|$ , где  $\hat{y}_i$  — результат аппроксимации,  $y_i$  — истинное значение. Полученное значение  $mae = 0.1$  свидетельствует об удовлетворительном качестве аппроксимации. За порог перколя-



**Рис. 2.** Зависимость вероятности связи противоположных границ расчетной области системой трещин от величины параметра перколяции  $p$ . Пороговое значение параметра перколяции  $p_c = 4.8$ .

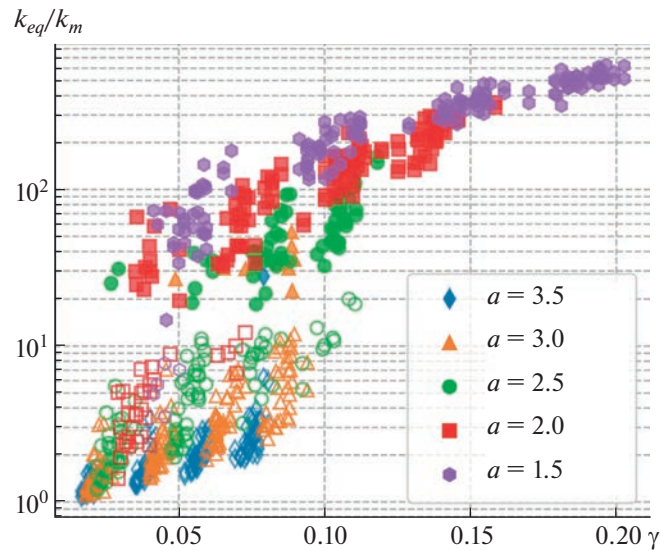
ции  $p_c$  принимается значение, при котором вероятность перколяции расчетной области  $S(p) = 0.5$ . В результате аппроксимации из (4.1) получено значение  $p_c = 4.8$ . В зависимости от вероятности перколяции каждая система трещин может быть условно отнесена к одной из трех групп, разделенных на рис. 2 вертикальными линиями. К системам слабосвязных трещин отнесены варианты, для которых вероятность появления перколяционного кластера  $S(p) \leq 0.01$ , что соответствует параметру перколяции  $p \leq 1.7$ . Варианты систем трещин, для которых  $S(p) \geq 0.99$  отнесены к сильно связным:  $p \geq 7.9$ . Системы трещин из интервала  $1.7 < p < 7.9$  отнесены к “переходной зоне”, где появление перколяционного кластера имеет случайный характер.

#### 4.2. Влияние параметров трещиноватой среды на эквивалентную проницаемость

Сперва рассмотрим влияние структуры трещиноватой среды на ее эквивалентную проницаемость при фиксированном раскрытии трещин  $\delta_i$ , которое соответствует начальному напряженно-деформированному состоянию среды при величине внешней нагрузки  $\sigma_b = 15$  МПа. В этом случае для определения эквивалентной проницаемости среды может быть выбран произвольный перепад давления, для расчетов выбрано значение  $\Delta P = 5$  МПа.

На рис. 3 приведена зависимость  $k_{eq}/k_m$  от  $\gamma$  в полулогарифмических координатах при различных значениях  $a$ . Закрашенные маркеры соответствуют высокопроницаемым средам с трещинами, образующими перколяционный кластер. При слабой связности трещин и отсутствии перколяционного кластера наблюдается низкая эквивалентная проницаемость среды, данные варианты обозначены полыми маркерами. Таким образом, при рассматриваемых значениях проницаемостей  $k_f \gg k_m$  наличие перколяционного кластера оказывает определяющее влияние на эквивалентную проницаемость трещиноватой среды. Видно, что расчетные значения можно разделить на 2 “облака” точек. Область между “облаками”, в которой расчетные точки отсутствуют, соответствует порогу перколяции, а ее наличие объясняется использованием в алгоритме генерации системы трещин ограничения на минимальное расстояние между непересекающимися трещинами  $d_{min}$ .

Для анализа поведения эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды вблизи порога перколяции рассмотрим идеализированную трещиноватую среду, состоящую из набора параллельных трещин [33]. Трещины равной длины  $l_{||}$  расположены на одинаковом друг от друга расстоянии и ориентированы по направлению потока. При этом, если длина трещин больше размеров расчетной области  $l_{||} \geq L$ , то проницаемость среды может быть определена как среднее арифметическое взвешенное проницаемостей пористой среды и трещин:



**Рис. 3.** Зависимость отношения  $k_{eq}/k_m$  от плотности системы трещин  $\gamma$  при различных показателях степени  $a$ . Закрашенные маркеры соответствуют случаю перколяции расчетной области, полые – отсутствию перколяционного кластера.

$$k_{\parallel}^I = k_m \left( 1 - \frac{\delta n_f}{L} \right) + k_f \frac{\delta n_f}{L} \quad (4.2)$$

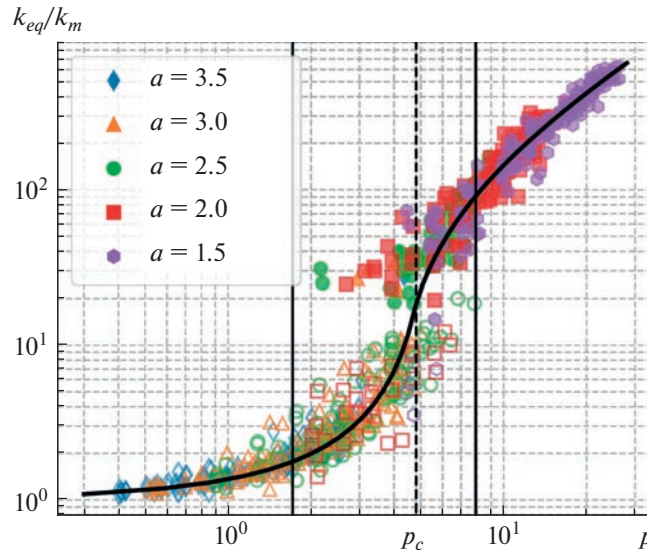
В противном случае, если длина трещин в системе меньше размеров расчетной области  $l_{\parallel} < L$ , то для оценки проницаемости используется среднее гармоническое взвешенное проницаемостей модельной трещиновато-пористой среды (4.2) и матрицы горной породы:

$$k_{\parallel}^{II} = \frac{L k_m k_{\parallel}^I}{l_{\parallel} k_m + (L - l_{\parallel}) k_{\parallel}^I} \quad (4.3)$$

Отношение  $l_{\parallel}/L$  имеет смысл доли расчетной области, занятой трещинами. Как следует из (4.3), при  $k_m \ll k_f$  матрица горной породы ограничивает величину фильтрационных потоков. В то же время при  $l_{\parallel} \rightarrow L$  проницаемость расчетной области быстро возрастает до величины  $k_{\parallel}^I$ , которая главным образом определяется величиной  $k_f$ . Таким образом, поведение эквивалентной проницаемости вблизи порога перколяции носит непрерывный характер.

Из рис. 3 также следует, что при близких значениях плотности системы трещин могут реализовываться существенно различные значения эквивалентной проницаемости. Для примера рассмотрим величины эквивалентной проницаемости для систем трещин, приведенных на рис. 1. Так, для вариантов ( $a = 1.5, n_f = 50$ ), ( $a = 2.5, n_f = 100$ ) и ( $a = 3.5, n_f = 150$ ) эквивалентная проницаемость составляет  $k_{eq} = 70.5, 18.9$  и  $1.91 \times 10^{-15} \text{ м}^2$  соответственно. Отличие проницаемостей между вариантами при достаточно близких плотностях  $\gamma \in [0.05, 0.055]$  может достигать 37 раз. Поэтому в данном случае не представляется возможным построение функциональной зависимости между плотностью системы трещин и эквивалентной проницаемостью среды. Таким образом, можно сделать вывод о том, что при выбранном законе распределения трещин по длинам плотность системы не может однозначно охарактеризовать фильтрационные параметры трещиновато-пористой среды.

Далее рассмотрим приведенную на рис. 4 зависимость  $k_{eq}/k_m$  от параметра перколяции  $p$ . Видно, что на данной зависимости можно выделить два участка с разным характером функциональной зависимости  $k_{eq}(p)$ : до порогового значения параметра перколяции ( $0 \leq p < p_c$ ) и после него ( $p \geq p_c$ ). На первом участке, при малых значениях параметра перколяции ( $p < 1.7$ ), величина эквивалентной проницаемости среды определяется матричной проницаемостью: в этой области



**Рис. 4.** Зависимость отношения  $k_{eq}/k_m$  от параметра перколяции  $p$  при различных показателях степени  $a$  и его аппроксимация. Закрашенные маркеры соответствуют случаю перколяции расчетной области, полые — отсутствию перколяционного кластера.

трещины изолированы друг от друга матрицей горной породы. Затем, по мере увеличения  $p$  и приближению его к порогу перколяции, наблюдается рост проницаемости, вызванный увеличением степени связности системы трещин. На втором участке развитая система трещин образует перколяционный кластер, который оказывает определяющее влияние на поток жидкости. Трещины в таком случае выступают в роли “магистральных каналов” для фильтрационных потоков. При этом наибольшая неопределенность значений эквивалентных проницаемостей имеет место в “переходной зоне” ( $1.7 < p < 7.9$ ).

Учитывая вышеизложенное, аппроксимация эквивалентной проницаемости  $k_{eq}(p)$  проведена с помощью непрерывной кусочно-заданной функции, учитывающей особенности структуры системы трещин. При  $p \leq p_c$  для аппроксимации эквивалентной проницаемости используется среднее гармоническое взвешенное, определяемое формулой (4.3), где в качестве доли расчетной области, занятой трещинами,  $l_{||}/L$  использована величина  $p/p_c \in [0;1]$ . Также учитывался предложенный в [34] степенной характер зависимости эквивалентной проницаемости от параметра перколяции. Кроме того, аппроксимирующая функция должна удовлетворять следующим условиям:  $k_{eq} = k_m$  при  $p = 0$  и  $k_{eq} = k_c$  при  $p = p_c$ , где  $k_c$  — проницаемость трещиновато-пористой среды на пороге перколяции. Таким образом, для аппроксимации эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды при  $p \leq p_c$  выбрана функция в виде:

$$k_{eq} = \left( \frac{p_c(k_m)^{1/\alpha}(k_c)^{1/\alpha}}{p(k_m)^{1/\alpha} + (p_c - p)(k_c)^{1/\alpha}} \right)^\alpha \quad (4.4)$$

Известно, что поведение проницаемости системы трещин выше порога перколяции имеет степенной характер [35, 36]. Поэтому при  $p \geq p_c$  использована степенная функция в виде:

$$k_{eq} = k_c(p - p_c + 1)^\beta, \quad (4.5)$$

где  $k_{eq} = k_c$  при  $p = p_c$ .

Таким образом, выражения (4.4) и (4.5) определяют непрерывную кусочно-заданную функцию с настраиваемыми параметрами:  $\alpha, k_c, \beta$ . Результат аппроксимации результатов численного моделирования приведен на рис. 4. Для численной оценки аппроксимации использована сред-

няя относительная ошибка  $mare = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{|y_i|} = 0.2$ . Полученное качество аппроксимации явля-

ется удовлетворительным в условиях того, что в переходной зоне эквивалентные проницаемости сред при близких значениях параметра перколяции могут отличаться на порядок.

В результате аппроксимации для параметров  $\alpha$  и  $\beta$  получены значения 1.6 и 1.11 соответственно. При этом значение  $\beta$  хорошо согласуется с данными, приведенными в литературе  $\beta \approx 1.1$  [35]. Для оценки величины  $k_c$  необходимо отметить, что вблизи порога перколяции существует единственный путь связи противоположных границ расчетной области трещинами, который при  $k_m \ll k_f$  определяет фильтрационные свойства среды. Тогда эквивалентная проницаемость вблизи порога перколяции  $k_c$  может быть оценена из выражения (4.2)  $k_{||}^I = 26.6 \times 10^{-15} \text{ м}^2$  при  $n_f = 1$ . Полученное при аппроксимации результатов численного моделирования значение  $k_c = 18.8 \times 10^{-15} \text{ м}^2$  несколько ниже аналитической оценки, что может быть объяснено извилистостью системы трещин, связывающей противоположные границы области. Например, на рис. 1 ( $a = 2.5$   $n_f = 100$ ) красной линией выделен обладающий извилистостью кратчайший путь по системе трещин между левой и правой границами расчетной области.

В частном случае при  $k_m/k_c \rightarrow 0$  формула (4.4) может быть сведена к виду [34]:

$$k_{eq} = k_m \left( \frac{p_c}{p_c - p} \right)^\alpha$$

Также формула (4.4) учитывает предельный случай непроницаемой матрицы горной породы  $k_m = 0$ . В этом случае величина  $k_{eq} = 0$  при  $p < p_c$  и изменяется скачком до значения  $k_c$  при  $p = p_c$ .

### 4.3. Влияние напряженно-деформированного состояния

В данном пункте исследовано изменение эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды при изменении ее напряженно-деформированного состояния, вызванного закачкой жидкости в расчетную область. Исследование проведено при трех значениях давления закачки жидкости  $P_{in} = 5, 10, 15$  МПа и постоянных величинах внешней нагрузки  $\sigma_b = 15$  МПа и давления  $P_{out} = 0$ . Изменение эквивалентной проницаемости рассматривается относительно ее величины  $k_{eq,i}$ , соответствующей начальному состоянию среды, которая исследована в предыдущем пункте.

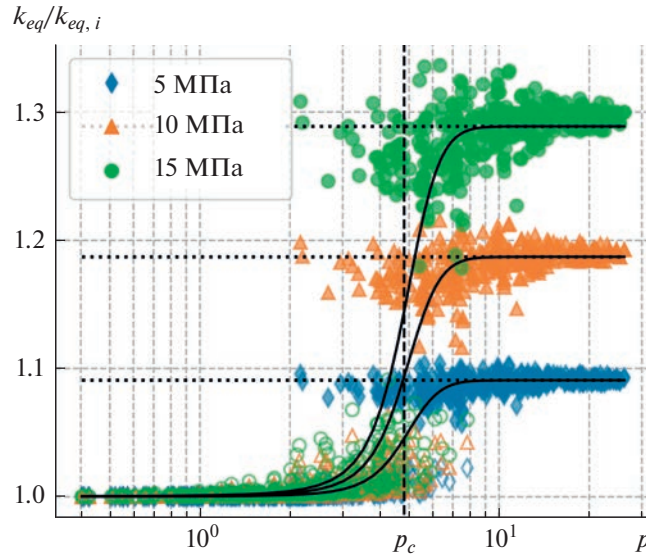
На рис. 5 представлена зависимость относительного изменения эквивалентной проницаемости среды  $k_{eq}/k_{eq,i}$  от параметра перколяции  $p$  при различных давлениях  $P_{in}$ . Видно, что при увеличении параметра перколяции влияние напряженно-деформированного состояния на проницаемость среды возрастает. Так, при  $p < p_c$  не наблюдается существенного влияния давления закачки на эквивалентную проницаемость среды. Напротив, при  $p > p_c$  изменение проницаемости трещин начинает оказывать влияние на фильтрационные свойства среды: величина относительного изменения эквивалентной проницаемости достигает 30%.

Для выбора аппроксимирующей функции рассмотрим влияние напряженно-деформированного состояния на проницаемость трещиноватой среды, состоящей из набора параллельных трещин при  $l_{||} \geq L$ . Для простоты получаемых далее оценок пренебрежем в (4.2) проницаемостью матрицы горной породы по сравнению с проницаемостью трещин. Тогда выражение для проницаемости системы параллельных трещин с учетом зависимости их раскрытия от эффективных напряжений (1.3) можно записать в виде:

$$k_{||}^I = \frac{\left( \delta_0 + \frac{\sigma'_n}{k_n} \right)^3}{12} \frac{n_f}{L}$$

В этом случае выражение для относительного изменения проницаемости набора параллельных трещин при изменении нормальных эффективных напряжений примет вид

$$\frac{k_{||}^I}{k_{||i}^I} = \left( \frac{\delta_0 k_n + \sigma'_{ni} + \Delta \sigma'_n}{\delta_0 k_n + \sigma'_{ni}} \right)^3 = \left( 1 + \frac{\Delta \sigma'}{\delta_0 k_n + \sigma'_{ni}} \right)^3 = (1 + b \Delta \sigma'_n)^3, \quad (4.6)$$



**Рис. 5.** Зависимость относительного изменения эквивалентной проницаемости  $k_{eq}/k_{eq,i}$  от параметра перколяции  $p$  при различных давлениях закачки жидкости  $P_{in}$ . Закрашенные маркеры соответствуют случаю перколяции расчетной области, полые — отсутствию перколяционного кластера.

где  $k_{\parallel i}$  — проницаемость упорядоченной системы трещин при начальных условиях,  $\Delta\sigma'_n$  — изменение эффективных нормальных напряжений относительно начального состояния,  $b = \frac{1}{\delta_0 k_n + \sigma'_{ni}}$  — параметр трещиноватой среды, зависящий от начального напряженно-деформированного состояния среды, фильтрационных и упругих свойств трещин,  $\delta_0 k_n$  — величина, соответствующая напряжению смыкания трещины при ее постоянной жесткости.

На рис. 5 в виде горизонтальных пунктирных линий приведены значения  $k_{\parallel}^I/k_{\parallel i}^I$  для различных давлений закачки  $P_{in}$ . В качестве  $\Delta\sigma'_n$  в формуле (4.6) использовалась следующая оценка изменения среднего эффективного напряжения в расчетной области  $\Delta\sigma'_n = \sigma_b + b_f \left( \frac{P_{in} + P_{out}}{2} - P_i \right)$ . Видно, что при  $p > 7.9$  полученная оценка имеет удовлетворительное приближение к результатам прямого численного моделирования. Выражение (4.6) принято за величину максимального относительного изменения проницаемости  $k_{eq}/k_{eq,i}$ . С другой стороны, при  $p = 0$  проницаемость среды  $k_{eq} = k_{eq,i}$ . Для построения зависимости эквивалентной проницаемости от  $p$  во всем диапазоне значений использована аппроксимация вероятности перколяции расчетной области  $S(p)$ , которая связывает области  $p < 1.7$  и  $p > 7.9$ . Тогда аппроксимацию эквивалентной проницаемости среды с учетом изменения ее напряженно-деформированного состояния окончательно можно представить в виде:

$$k_{eq} = [((1 + b\Delta\sigma'_n)^3 - 1)S(p) + 1]k_{eq,i} \quad (4.7)$$

Результат аппроксимации изменения эквивалентной проницаемости функцией (4.7) приведен на рис. 5. Получено удовлетворительное качество аппроксимации, средняя относительная ошибка для различных давлений закачки жидкости принимала значения:  $mare = 0.007$  при  $P_{in} = 5$  МПа,  $mare = 0.015$  при  $P_{in} = 10$  МПа и  $mare = 0.023$  при  $P_{in} = 15$  МПа.

Таким образом, предложенная аппроксимация (4.7) учитывает зависимость эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды от всех основных параметров задачи: структуры системы трещин (параметра перколяции  $p$  и его порогового значения  $p_c$ ), напряженно-деформированного состояния системы (величины эффективных напряжений  $\sigma'_n$ ), упругих и фильтрационных свойств трещин (нормальной жесткости  $k_n$  и раскрытия  $\delta$  трещин).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнено исследование зависимости фильтрационных свойств трещиновато-пористых сред от их напряженно-деформированного состояния и структуры системы трещин. Для моделирования фильтрации в деформируемой трещиновато-пористой среде использована модель пороупругой среды, моделирование трещиноватости проведено с помощью модели дискретных трещин. Распределение трещин по длинам подчинялось степенному закону. Численное исследование выполнено для вариантов систем трещин, полученных путем множественной случайной генерации.

Полученные результаты показывают, что фильтрационные свойства трещиновато-пористой среды определяются главным образом структурой системы трещин, характеризуемой параметром перколяции. При этом вблизи порога перколяции наблюдаются изменение характера поведения эквивалентной проницаемости и ее резкий рост. В то же время плотность системы трещин для использованного степенного закона распределения трещин по длинам не позволяет с удовлетворительной точностью описать эквивалентную проницаемость среды.

Установлено, что для сильно связных систем трещин со значением параметра перколяции  $p > 7.9$  напряженно-деформированное состояние существенно влияет на фильтрационные свойства среды: изменение эквивалентной проницаемости для проведенных расчетов достигало 30%. Для слабосвязных систем трещин ( $p < 1.7$ ) максимальное относительное изменение проницаемости составляет менее 1%.

Предложена формула для аппроксимации зависимости эквивалентной проницаемости трещиновато-пористой среды от параметров, характеризующих связность системы трещин, напряженно-деформированное состояние среды, деформационные и фильтрационные свойства трещин.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030500156-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Kolenkina (Skryleva) E.I., Gazizova. D. R.* Evolution of a phase interface in the displacement of viscous fluids from a porous medium // *Fluid Dynamics*. 2021. V. 56. № 1. P. 79–92.  
<https://doi.org/10.1134/S0015462821010122>
2. *Nikitin V.F., Skryleva E.I., Weisman Yu. G.* Control of capillary driven fluid flows for safe operation of spacecraft fluid supply systems using artificial porous media // *Acta Astronautica*. 2022. V. 194. P. 544–548.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.12.009>
3. *Dushin V.R., Smirnov N.N., Nikitin V.F., Skryleva E. I., Weisman Yu.G.* Multiple capillary-driven imbibition of a porous medium under microgravity conditions: Experimental investigation and mathematical modeling // *Acta Astronautica*. 2022. V. 193. P. 572–578.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.06.054>
4. *Kiselev A.B., Kay-Zhui L., Smirnov N.N., Pestov D.A.* Simulation of Fluid Flow through a Hydraulic Fracture of a Heterogeneous Fracture-Tough Reservoir in the Planar 3D Formulation // *Fluid Dynamics*. 2021. V. 56. № 2. P. 164–177.  
<https://doi.org/10.1134/S0015462821020051>
5. *Smirnov N., Li K., Skryleva E., Pestov D., Shamina A., Qi C., Kiselev A.* Mathematical Modeling of Hydraulic Fracture Formation and Cleaning Processes // *Energies*. 2022. V. 15. № 6.  
<https://doi.org/10.3390/en15061967>
6. *Голф-Рахт Т.Д.* Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. М.: Недра, 1986. 608 с.
7. *Nelson R.A.* Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs. Gulf Professional Publishing, 2001. 352 p.
8. *Пичугин О.Н., Родионов С.П., Соляной П.Н., Гавриль А.С., Косяков В.П., Кошечев Г.Г.* Принципы оптимизации систем заводнения месторождений, осложненных малоамплитудными тектоническими нарушениями // Российская нефтегазовая техническая конференции SPE, Москва, Россия. 2015.
9. *Karimi-Fard M., Durlofsky L.J., Aziz K.* An Efficient Discrete-Fracture Model Applicable for General-Purpose Reservoir Simulators // *SPE Journal*. 2004. V. 9. № 2. P. 227–236.  
<https://doi.org/10.2118/88812-PA>
10. *Garipov T.T., Karimi-Fard M., Tchelepi H.A.* Discrete fracture model for coupled flow and geomechanics // *Computational Geosciences*. 2016. V. 20. № 1. P. 149–160.  
<https://doi.org/10.1007/s10596-015-9554-z>

11. *Bai M.* On equivalence of dual-porosity poroelastic parameters // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1999. V. 104. № B5. P. 10461–10466.  
<https://doi.org/10.1029/1999JB900072>
12. *Chen H.-Y., Teufel L.W.* Coupling Fluid-Flow and Geomechanics in Dual-Porosity Modeling of Naturally Fractured Reservoirs – Model Description and Comparison // *SPE International Oil Conference and Exhibition in Mexico*. 2000.  
<https://doi.org/10.2118/59043-MS>
13. *Rutqvist J., Stephansson O.* The role of hydromechanical coupling in fractured rock engineering // *Hydrogeology Journal*. 2003. V. 11. № 1. P. 7–40.  
<https://doi.org/10.1007/s10040-002-0241-5>
14. *Biot M.A.* General Theory of Three-Dimensional Consolidation // *Journal of Applied Physics*. 1941. V. 12. № 2. P. 155–164.  
<https://doi.org/10.1063/1.1712886>
15. *Coussy O.* Poromechanics. John Wiley and Sons, Ltd, 2004. 315 p.
16. *Gutierrez M., Youn D.-J.* Effects of fracture distribution and length scale on the equivalent continuum elastic compliance of fractured rock masses // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2015. V. 7. № 6. P. 626–637.  
<https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2015.07.006>
17. *Liu R., Li B., Jiang Y., Huang N.* Review: Mathematical expressions for estimating equivalent permeability of rock fracture networks // *Hydrogeology Journal*. 2016. V. 24. № 7. P. 1623–1649.  
<https://doi.org/10.1007/s10040-016-1441-8>
18. *Bonnet E., Bour O., Odling N.E., Davy P., Main I., Cowie P., Berkowitz B.* Scaling of fracture systems in geological media // *Reviews of Geophysics*. 2001. V. 39. № 3. P. 347–383.  
<https://doi.org/10.1029/1999RG000074>
19. *Bogdanov I.I., Mourzenko V.V., Thovert J.-F., Adler P.M.* Effective permeability of fractured porous media in steady state flow // *Water Resources Research*. 2003. V. 39. № 1.  
<https://doi.org/10.1029/2001WR000756>
20. *Hyman J.D., Karra S., Carey J.W., Gable C.W., Viswanathan H., Rougier E., Lei Z.* Discontinuities in effective permeability due to fracture percolation // *Mechanics of Materials*. 2018. V. 119. P. 25–33.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2018.01.005>
21. *Jafari A., Babadagli T.* A Sensitivity Analysis for Effective Parameters on 2D Fracture-Network Permeability // *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*. 2009. V. 12. № 3. P. 455–469.  
<https://doi.org/10.2118/113618-PA>
22. *Bour O., Davy P.* Connectivity of random fault networks following a power law fault length distribution // *Water Resources Research*. 1997. V. 33. № 7. P. 1567–1583.  
<https://doi.org/10.1029/96WR00433>
23. *de Dreuzy J.-R., Davy P., Bour O.* Hydraulic properties of two-dimensional random fracture networks following a power law length distribution: 1. Effective connectivity // *Water Resources Research*. 2001. V. 37. № 8. P. 2065–2078.  
<https://doi.org/10.1029/2001WR900011>
24. *de Dreuzy J.-R., Davy P., Bour O.* Hydraulic properties of two-dimensional random fracture networks following a power law length distribution: 2. Permeability of networks based on lognormal distribution of apertures // *Water Resources Research*. 2001. V. 37. № 8. P. 2079–2095.  
<https://doi.org/10.1029/2001WR900010>
25. *Masihi M., King P.R.* Connectivity Prediction in Fractured Reservoirs With Variable Fracture Size: Analysis and Validation // *SPE Journal*. 2008. V. 13. № 1. P. 88–98.  
<https://doi.org/10.2118/100229-PA>
26. *Witherspoon P.A., Wang J.S.Y., Iwai K., Gale J.E.* Validity of Cubic Law for fluid flow in a deformable rock fracture // *Water Resources Research*. 1980. V. 16. № 6. P. 1016–1024.  
<https://doi.org/10.1029/WR016i006p01016>
27. *Gao K., Lei Q.* Influence of boundary constraints on stress heterogeneity modelling // *Computers and Geotechnics*. 2018. V. 99. P. 130–136.  
<https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.03.003>
28. *Tang T., Hededal O., Cardiff P.* On finite volume method implementation of poro-elasto-plasticity soil model // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2015. V. 39. № 13. P. 1410–1430.  
<https://doi.org/10.1002/nag.2361>
29. *Kim J., Tchelep H.A., Juanes R.* Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 200. № 13. P. 1591–1606.  
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.12.022>

30. *Geuzaine C., Remacle J.-F.* Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. V. 79. № 11. P. 1309–1331. <https://doi.org/10.1002/nme.2579>
31. *Легостаев Д.Ю., Родионов С.П.* Численное исследование двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде на основе моделей пороупругости и дискретных трещин // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62. № 3. С. 126–136. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210312>
32. *Berre I., Doster F., Keilegavlen E.* Flow in Fractured Porous Media: A Review of Conceptual Models and Discretization Approaches // Transport in Porous Media. 2019. V. 130. № 1. P. 215–236. <https://doi.org/10.1007/s11242-018-1171-6>
33. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 р.
34. *Lei Q., Wang X., Min K.-B., Rutqvist J.* Interactive roles of geometrical distribution and geomechanical deformation of fracture networks in fluid flow through fractured geological media // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2020. V. 12. № 4. P. 780–792. <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2019.12.014>
35. *Hestir K., Long J.C.S.* Analytical expressions for the permeability of random two-dimensional Poisson fracture networks based on regular lattice percolation and equivalent media theories // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 1990. V. 95. № B13. P. 21565–21581. <https://doi.org/10.1029/JB095iB13p21565>
36. *Berkowitz B., Balberg I.* Percolation theory and its application to groundwater hydrology // Water Resources Research. 1993. V. 29. № 4. P. 775–794. <https://doi.org/10.1029/92WR02707>

УДК 532.5:537.7

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УГЛЕВОДОРОДНОГО ПЛАМЕНИ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

© 2023 г. П. А. Власов<sup>а</sup>, И. Л. Панкратьева<sup>б</sup>, В. А. Полянский<sup>б,\*</sup>

<sup>а</sup>Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва, Россия

<sup>б</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

\*E-mail: ilpan@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Рассматривается один из возможных механизмов взаимодействия ограниченной области горения (факела пламени) с приложенным электрическим полем. Исследование основано на применении методов электрогидродинамики (ЭГД) для описания химически реагирующих многокомпонентных неравновесных частично ионизованных газовых смесей. Показано, что в окрестности границ пламени при определенных условиях образуются зоны объемного электрического заряда, на которые можно воздействовать полем. Исследуется характер изменения этих зон под влиянием поля.

**Ключевые слова:** высокотемпературная газовая смесь, молекулярные газы, хемоионизация, объемный электрический заряд, кулоновская сила, электрогидродинамика

**DOI:** 10.31857/S1024708423600136, **EDN:** WLTKKG

Горение различного типа газовых смесей является широко распространенным технологическим процессом, поэтому повышение его эффективности различными способами представляет актуальную задачу. Один из них связан с воздействием на пламя внешним, приложенным электрическим полем [1–5]. В экспериментах и теоретических расчетах с различными моделями химической кинетики, при разной конфигурации электродов и варьировании величины прикладываемого к ним напряжения наблюдались следующие эффекты. Немонотонное растяжение фронта пламени, увеличение скорости и температуры пламени, прижатие пламени к одному из электродов с расширением факела, гашение пламени в микрогорелках с ростом напряженности поля, изменение содержания  $\text{NO}_x$  и сажи в продуктах горения и т.п. Однако гидродинамический механизм взаимодействия поля и квазинейтральной частично ионизованной среды, образующей пламя, до сих пор остается до конца не выясненным. Используемое в литературе понятие “ионного ветра”, как причины наблюдаемых эффектов в пламени при воздействии на него электрического поля, физически недостаточно обосновано. В [6] в рамках ЭГД проведено исследование электрической структуры пламени при отсутствии приложенных внешних электрических полей. В данной работе рассмотрено влияние постоянного приложенного электрического поля различной интенсивности на изменение формы и структуры пламени.

В углеводородно-воздушном пламени, типичном для технологических процессов, концентрация заряженных частиц относительно мала и в зависимости от конкретных условий составляет величину порядка  $10^{10}$ – $10^{12}$  см<sup>-3</sup>. Для пламен различных углеводородов основной механизм появления ионов и свободных электронов связан с реакциями ассоциативной ионизации и ионно-молекулярной перезарядки:  $\text{CH} + \text{O} = \text{CHO}^+ + \text{e}^-$ ,  $\text{CH} + \text{C}_2\text{H}_2 = \text{C}_3\text{H}_3^+ + \text{e}^-$ ,  $\text{CHO}^+ + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_3\text{O}^+ + \text{CO}$  [7, 8]. Вклад термической ионизации примесей с низким потенциалом ионизации в суммарную концентрацию заряженных частиц незначителен. Исчезновение заряженных частиц происходит в реакциях диссоциативной рекомбинации:  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{e}^- = \text{H}_2\text{O} + \text{H}$ . В результате протекания быстрых реакций перезарядки, в зависимости от условий в реагирующей газовой смеси, часто наблюдается преобладающий сорт ионов. Эксперименты и кинетическое моделирование показывает, что в углеводородном пламени при давлениях порядка атмосферного и температурах в диапазоне 1200–3000 К присутствуют электроны и несколько сортов положительных

ионов с концентрацией порядка  $10^{10} - 10^{12} \text{ см}^{-3}$  [8]. Поскольку реагирующая газовая смесь в целом квазинейтральна, а степень ионизации мала, то в отсутствие приложенных электрических и магнитных полей влиянием заряженных частиц на движение среды в целом можно пренебречь. При описании пламени с позиций ЭГД целесообразно для упрощения объединить все сорта ионов в одну заряженную компоненту газовой смеси, имеющую положительный заряд и свойства переноса, характерные для преобладающего сорта ионов. Следует заметить, что нет необходимости детального учета всей цепочки реакций хемоионизации, поскольку можно обоснованно считать, что константы скоростей химических процессов не зависят от величины реально применяемых напряженностей электрического поля. В соответствии с этим при численном моделировании задачи всю совокупность реакций заменим некоторым не зависящим от поля эффективным источником заряженных частиц, неравномерно распределенным по всему объему реагирующей смеси. Неоднородность источника связана, например, с неоднородностью распределения температуры, вызванной экзотермическими химическими реакциями при горении. В дальнейшем, как и в [6], используем модельную функцию объемного источника, зависящую от пространственной координаты. Эта зависимость приближенно соответствует реальным химическим процессам горения и позволяет выявить основные особенности взаимодействия пламени с полем.

## 1. ЭГД-МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается неизотермическое течение в плоском канале многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси, содержащей заряженные частицы двух сортов: с положительным и отрицательным знаком заряда (однократно положительно заряженные доминирующие ионы и свободные электроны). Движение среды в целом описывается обычными уравнениями сохранения импульса и энергии для вязкой жидкости, в которые добавлена объемная кулоновская сила. В уравнениях для заряженных частиц учитываются диффузия и дрейф в электрическом поле, объемные реакции химической ионизации и диссоциативной рекомбинации, а также возможные поверхностные электрохимические процессы. Объемный источник заряженных частиц зависит от концентраций реагирующих компонент смеси и от констант скоростей реакций хемоионизации и диссоциативной рекомбинации, величина которых, в основном, определяется температурой и сортом доминирующих ионов. В окрестности границ пламени и в самом пламени, очевидно, имеются большие градиенты указанных выше параметров, следовательно, существует сильная неоднородность источника заряженных частиц. В данной работе, как и в [6], для анализа ЭГД характеристик среды пространственная неоднородность задается в виде некоторой модельной ступенчатой функции  $W(x)$ . Эта функция  $W(x)$ , зависит только от координаты  $x$ , поперечной к стенкам плоского канала. Везде далее координата  $x$  отнесена к ширине канала  $L$ , функция  $W(x)$  — к некоторой характерной величине эффективной скорости ионизации  $w_0$ . По порядку величины в области максимальных значений использованная модельная функция соответствует наблюдаемым в экспериментах значениям.

Для качественной оценки электрогидродинамических свойств выбрана следующая упрощенная схема течения: область тепловыделения и ионизации за счет экзотермических реакций горения и реакций хемоионизации располагается между пристеночными холодными слоями, где величина ионизационного источника мала, хотя там и содержатся заряженные частицы из-за переноса их из горячей области. Заметим, что в используемом модельном представлении зона, где  $W(x) \neq 0$ , включает в себя как фронт горения, так и область продуктов горения.

Система уравнений для параметров реагирующей среды, характеризующих ее электрические свойства при наличии внешнего приложенного электрического поля, а именно, для концентраций ионов и электронов, электрического потенциала и напряженности электрического поля, в стационарном приближении имеет вид [9]

$$\frac{d}{dx}(n_i U_i) = W(x) - a n_1 n_2, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$n_i U_i = \text{sign}(e_i) b_i n_i E - D_i \frac{d}{dx} n_i \quad (1.2)$$

$$E = -\frac{dF}{dx}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\right) = -4\pi q, \quad q = \sum_i e_i n_i, \quad e_1 > 0, \quad e_2 < 0 \quad (1.3)$$

$$J_s = \sum_i e_i n_i U_i$$

Здесь величины  $n_i$ ,  $U_i$ ,  $D_i$ ,  $b_i$  — соответственно, концентрации ионов ( $i = 1$ ) и электронов ( $i = 2$ ), нормальные к стенкам компоненты диффузионной скорости этих частиц, коэффициенты диффузии и подвижности,  $F$  — электрический потенциал,  $E$  — поперечная компонента напряженности электрического поля,  $q$  — плотность объемного заряда,  $J_s$  — плотность полного тока,  $e_i$  — заряд частицы. Как уже говорилось,  $W(x)$  представляет собой модельную эффективную скорость объемной реакции ионизации, основанную на обработке экспериментальных измерений,  $a$  — задаваемая по литературным данным константа скорости объемной электрон-ионной диссоциативной рекомбинации.

При записи уравнений сделано предположение, что процесс стационарный, несущая среда движется по плоскому каналу с постоянной скоростью, вязкими эффектами вблизи стенок пренебрегается. В этих предположениях параметры среды зависят только от координаты  $x$ , перпендикулярной стенкам канала.

Рассматривается случай проводящих стенок, идеально каталитических для заряженных частиц. Детально исследована ситуация при различных отрицательных потенциалах одной из стенок. При этом потенциал другой стенки во всех случаях принимается нулевым. В соответствии с этим граничные условия для уравнений (1.1)–(1.3) запишем в виде ( $x = 0, 1$  — координаты стенок канала)

$$F(0) = Fw, \quad F(1) = 0, \quad n_i(0) = n_i(1) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.4) решается численно методом установления с явно-неявными разностными схемами с применением матричной прогонки (использовался разработанный авторами пакет CELL).

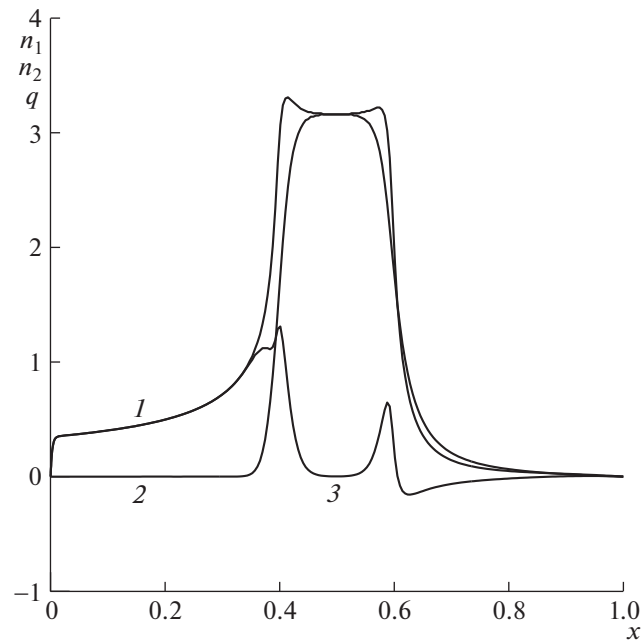
Уравнения и граничные условия записаны в безразмерном виде с характерными значениями входящих в задачу параметров: концентрации заряженных частиц отнесены к  $n_0 = (w_0/a_0)^{-0.5}$ , где  $w_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $a_0 = 6 \times 10^{-7} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ , скорость ионизации — к величине  $w_0$ , объемный заряд — к  $en_0$ , электрический потенциал к тепловому  $kT_0/e$ , поле — к  $kT_0/eL$ ,  $T_0 = 1600 \text{ К}$ .

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

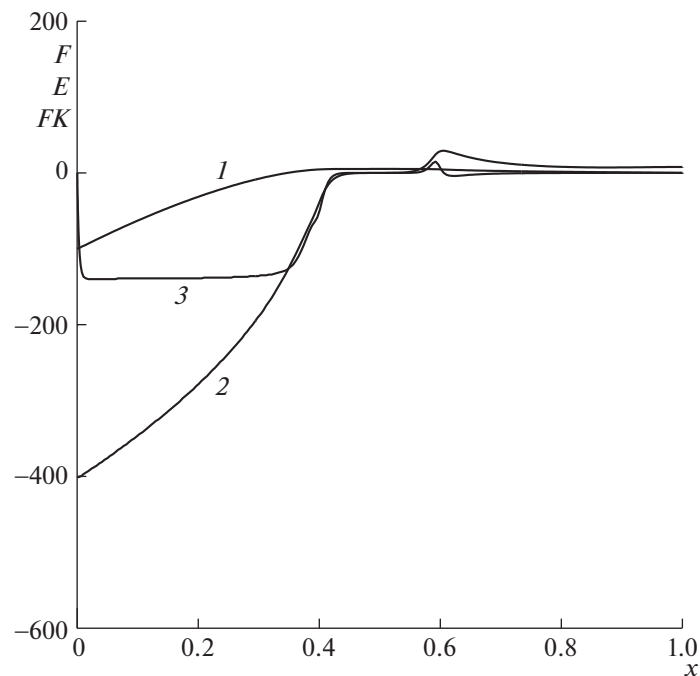
В данном параграфе представлены результаты решения задачи и проведен анализ влияния приложенного электрического поля на ионизационное состояние факела углеводородного пламени. Во всех расчетах считается, что электроды проводящие. Рассмотрены два варианта задачи: высота ступеньки функции  $W(x)$ , моделирующей широкий факел ( $0.4 < x < 0.6$ ), равна  $W = 10$  и, соответственно, узкий факел ( $0.47 < x < 0.53$ ) равна  $W = 4$ . Вне указанных интервалов  $W(x) = 0$ . Во всех расчетах безразмерный коэффициент рекомбинации  $a = 1$ . В каждом варианте исследуется изменение картины течения с увеличением приложенной разности потенциалов электродов.

### 2.1. Расчеты для широкого факела ( $W = 10$ , $0.4 < x < 0.6$ )

Рисунки 1, 2 показывают трансформацию ЭГД-параметров факела при наложении небольшого отрицательного потенциала ( $Fw = -100$ ) к левому электроду ( $x = 0$ ). Видно, что прилегающая к этому электроду область заряжается положительно за счет притяжения ионов из факела, электроны здесь практически отсутствуют. Биполярная структура, которая возникает на каждой границе факела при отсутствии приложенного поля [6], сохраняется только на правой границе и является причиной немонотонного изменения поля в этой области, где имеет место также противоположная направленность кулоновских сил. Большая часть поперечного сечения факела остается квазинейтральной, напряженность поля здесь близка к нулю. С увеличением приложенной к стенкам разности потенциалов ( $Fw = -1000$ ) квазинейтральность факела постепенно исчезает и факел становится положительно заряженным практически во всем поперечном сечении. Небольшой отрицательный заряд образуется в правой от зоны горения области среды (рис. 3). Квазинейтральной части факела не существует. Кулоновские силы действуют в направлении левой отрицательно заряженной стенки канала, стремясь прижать область горения к левому, отри-

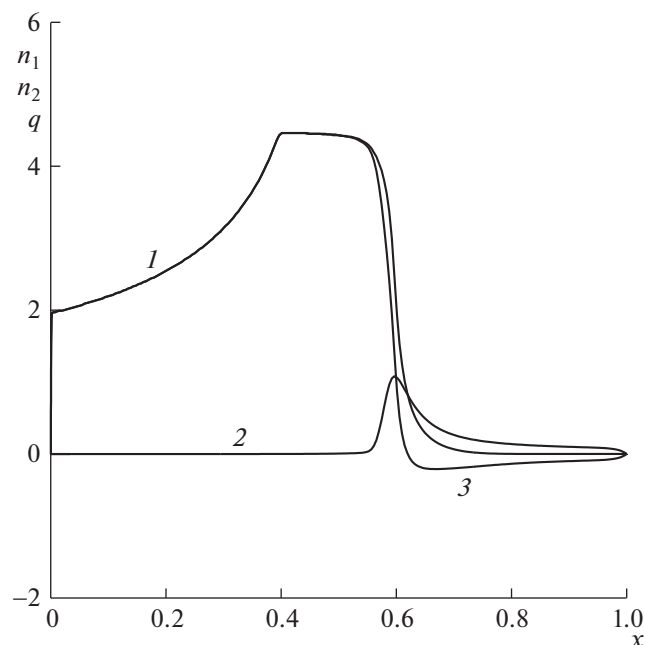


**Рис. 1.** Распределения концентраций ионов  $n_1$  (линия 1), электронов  $n_2$  – 2 и плотности объемного заряда  $q$  – 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками,  $F(0) = -100$ ,  $W = 10$ ,  $0.4 < x < 0.6$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .

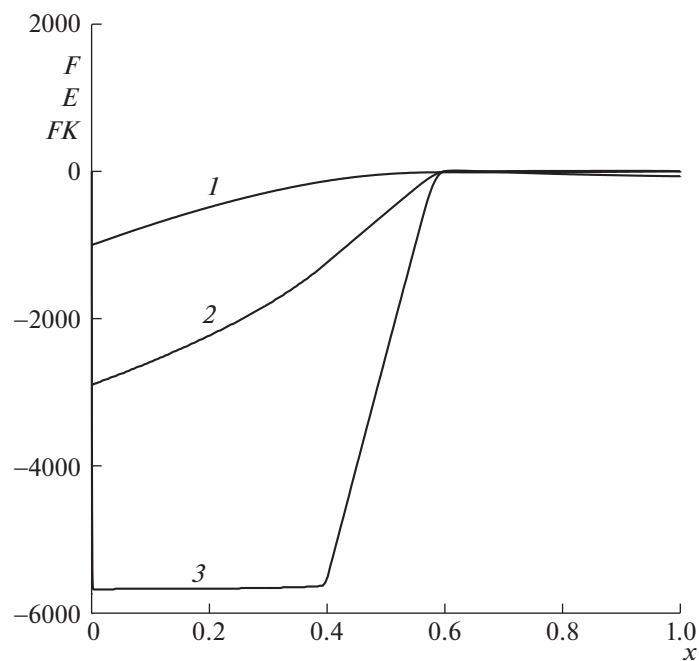


**Рис. 2.** Распределения электрического потенциала  $F$  (линия 1), напряженности поперечного электрического поля  $E$  – 2, кулоновской силы  $FK$  – 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками. Приложенный электрический потенциал  $F(0) = -100$ ,  $W = 10$ ,  $0.4 < x < 0.6$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .

цательно заряженному электроду (рис. 4). Поперечная составляющая напряженности поля почти везде направлена к левому электроду. При этом поле в окрестности заряженного электрода и в реагирующей зоне достигает довольно больших значений. Ионизационное равновесие в области горения из-за действия сильного поля отсутствует, при этом концентрация ионов заметно



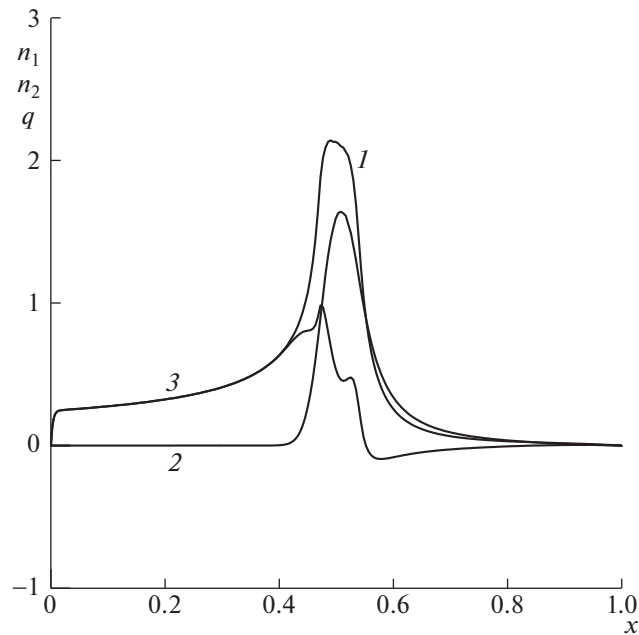
**Рис. 3.** Распределения концентраций ионов  $n_1$  (линия 1), электронов  $n_2$  – 2 и плотности объемного заряда  $q$  – 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками,  $F(0) = -1000$ .  $W = 10$ ,  $0.4 < x < 0.6$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .



**Рис. 4.** Распределения потенциала  $F$  (линия 1), напряженности поперечного электрического поля  $E$  – 2, кулоновской силы  $FK$  – 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками. Приложенная к стенкам разность электрических потенциалов  $F(0) = -1000$ .  $W = 10$ ,  $0.4 < x < 0.6$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .

превышает их равновесное значение вследствие уменьшения скорости рекомбинационного процесса, вызванного низкой концентрацией электронов.

В используемой модели факела пламени область горения (зона, где источник заряженных частиц  $W > 0$ ) считается неизменной при деформации профилей концентраций ионов и электро-



**Рис. 5.** Распределения концентраций ионов  $n_1$  (линия 1), электронов  $n_2$  – 2 и плотности объемного заряда  $q$  – 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками,  $F(0) = -100$ .  $W = 4$ ,  $0.47 < x < 0.53$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .

нов под действием поля. Это соответствует представлениям, что процесс горения многокомпонентной газовой смеси является результатом большой цепочки экзотермических реакций между компонентами смеси. Энергетический вклад в этот процесс реакций ассоциативной ионизации незначителен и не оказывает заметного влияния на термодинамическое состояние среды [7], тем более, что под действием поля в области горения изменяются концентрации только продуктов реакций хемоионизации.

Дальнейшее увеличение прикладываемой к стенкам канала разности потенциалов не меняет качественную картину распределений ЭГД-параметров факела пламени под действием поля.

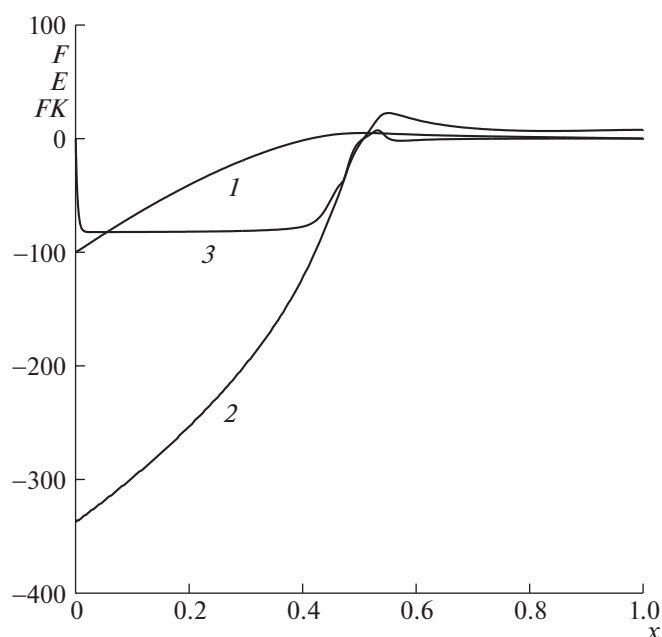
## 2.2. Расчеты для узкого факела ( $W = 4$ , $0.47 < x < 0.53$ )

Выше обсуждалась ситуация взаимодействия поля с пламенем в условиях, когда ширина факела была достаточной для реализации ионизационного равновесия в области горения. Представляет интерес другой случай, когда такого равновесия нет (узкий факел).

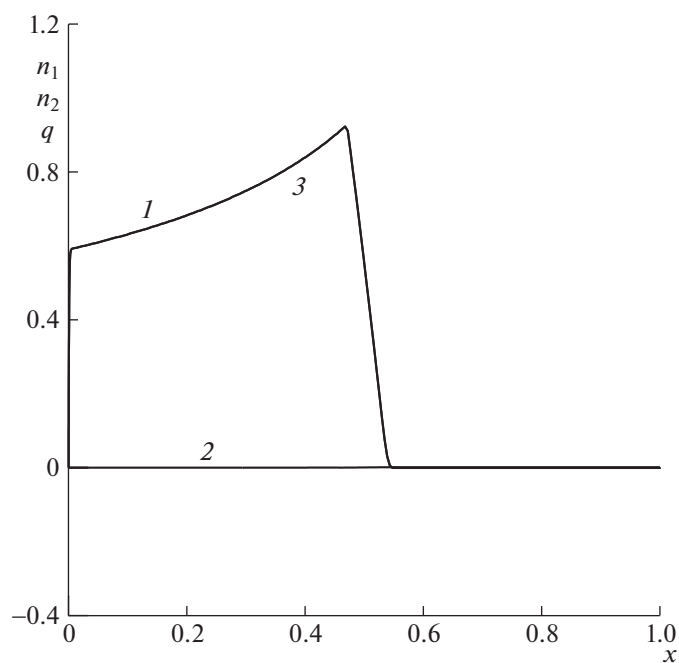
В [6] обнаружено, что ионизационная неравновесность приводит к положительной зарядке всего поперечного сечения факела даже в отсутствие приложенного внешнего поля. Результаты расчетов ЭГД-параметров для узкого факела горения при воздействии на него приложенной к стенкам разности потенциалов приведены на рис. 5–8.

Из рис. 5 видно, что почти вся зона горения имеет положительный заряд (линия 3), при этом концентрация ионов здесь превышает, а концентрация электронов, наоборот, меньше их равновесных значений. Под действием поля положительно заряжается также область вне зоны горения (там, где  $W = 0$ ), прилегающая к левому, отрицательно заряженному электроду. На правой границе пламени образуется небольшой слой отрицательного заряда, что приводит к немонотонному изменению напряженности поля. Далее среда квазинейтральна, потенциал и поле меняются слабо и имеют близкие к нулю значения.

С увеличением приложенной разности потенциалов ( $F(0) = -1000$ ) концентрация электронов в факеле под действием поля становится малой (рис. 7, 8). Также значительно ниже равновесного значения падает концентрация ионов в максимуме (порядка 1 вместо 2). При этом ионы в основном сосредоточены в зоне без реакций у левого отрицательного электрода, к которому также направлена кулоновская сила. Справа от факела среда нейтральна с малым количеством заря-



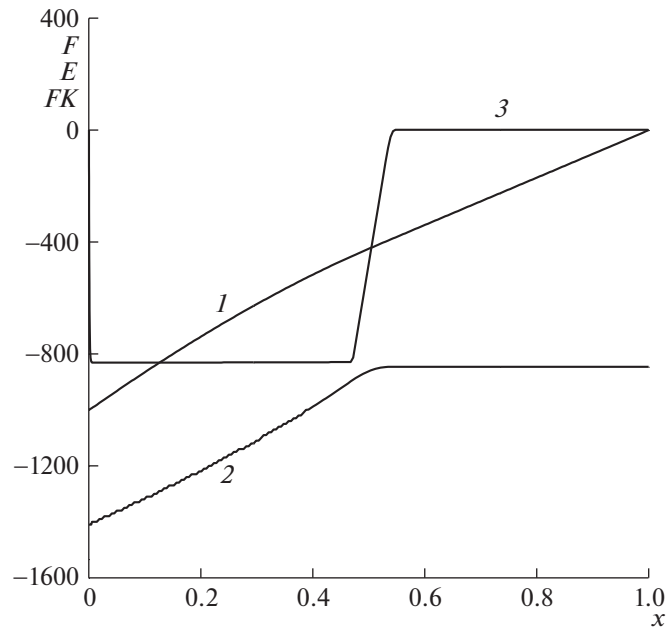
**Рис. 6.** Распределения потенциала  $F$  (линия 1), напряженности поперечного электрического поля  $E$  — 2, кулоновской силы  $FK$  — 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками. Приложенная к стенкам разность электрических потенциалов  $F(0) = -100$ .  $W = 4$ ,  $0.47 < x < 0.53$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .



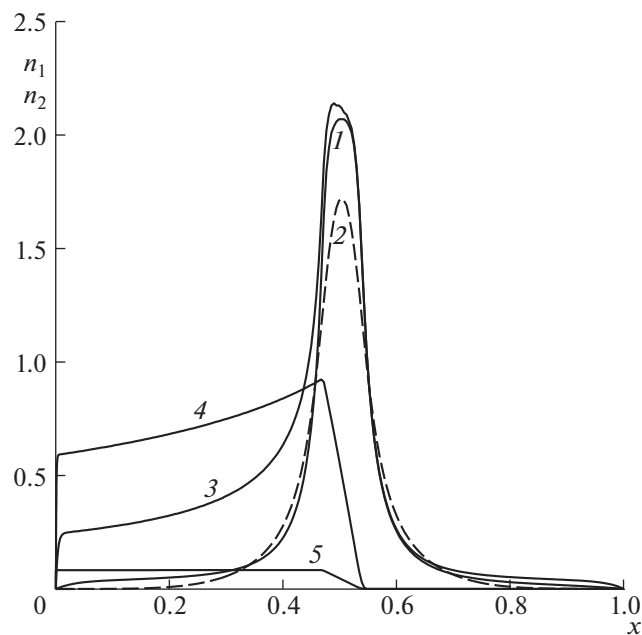
**Рис. 7.** Распределения концентраций ионов  $n_1$  (линия 1), электронов  $n_2$  — 2 и плотности объемного заряда  $q$  — 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками,  $F(0) = -1000$ .  $W = 4$ ,  $0.47 < x < 0.53$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .

женных частиц. Поле в этой области постоянно, потенциал меняется линейно, нормальная к электродам кулоновская сила отсутствует.

Изменение профиля ионной концентрации в межэлектродном пространстве с увеличением разности потенциалов на стенках для случая узкой области горения показано на рис. 9. В силь-



**Рис. 8.** Распределения потенциала  $F$  (линия 1), напряженности поперечного электрического поля  $E$  — 2, кулоновской силы  $FK$  — 3 в поперечном сечении канала с проводящими стенками. Приложенная к стенкам разность электрических потенциалов  $F(0) = -1000$ .  $W = 4$ ,  $0.47 < x < 0.53$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .



**Рис. 9.** Распределения концентраций ионов (линии 1, 3, 4, 5) и электронов (штриховая линия 2) для разных значений приложенной разности электрических потенциалов. Линии 1, 2:  $F(0) = 0$ , Линии 3, 4, 5:  $F(0) = -100, -1000, -10000$  соответственно.  $W = 4$ ,  $0.47 < x < 0.53$ . Вне указанного интервала  $W = 0$ .

ных приложенных электрических полях объемный положительный заряд в области левого отрицательно заряженного электрода перестает влиять на величину напряженности суммарного поля в среде. Концентрация ионов здесь меняется с увеличением поля немонотонно, сначала растет выше равновесного значения в факеле, когда нет внешнего поля, затем становится существенно меньше его. Это объясняется тем, что при больших напряженностях источник ионов не успевает компенсировать поток ионов на стенку под действием поля.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Образование областей объемного заряда в зонах больших градиентов источника заряженных частиц в пламенах создает благоприятные условия для гидродинамического воздействия на них внешним электрическим полем и может служить одним из объяснений наблюдаемых в экспериментах проявлений такого рода взаимодействия пламени с полем [1–5]. Следует отметить, что другой аспект влияния поля на пламя, связанный с изменением состава продуктов горения (типа содержания  $\text{NO}_x$ , сажеобразования и т.п.) за счет перераспределения ионных компонент в смеси под действием поля, в данной работе не рассматривался.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jianfeng Fang, Xiaomin Wu, Hao Duan, Chao Li, Zhongquan Gao.* Effects of electrode configurations on the combustion characteristics of premixed methane-air flames // *J. Thermal Science and Technology*. 2015. V. 10 (1). <https://doi.org/10.1299/jtst.2015jtst0020>
2. *Tao Xu, Qinglin Chen, Bingjian Zhang, Shushen Lu, Dongchuan Mo, Zhengguo Zhang, Xuenong Gao.* Effects of electric field on micro-scale flame properties of biobutanol fuel // *Nature. Scientific Reports*. 2016. 16 September. <https://doi.org/10.1038/srep32938>
3. *Park D.G., Chung S., Cha M.* Visualization of ionic wind in laminar jet flames. *Combust. Flame*. 2017. V. 184. P. 246–248. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aa94bb>
4. *Ватажин А.Б., Лихтер В.А., Сепн В.А., Шульгин В.И.* Влияние электрического поля на эмиссию окислов азота и структуру диффузионного ламинарного пропанового пламени // *Изв. РАН. МЖГ*. 1995. № 2. С. 13–23.
5. *Karnani S., Dunn-Rankin D.* Detailed characterization of DC electric field effects on small non-premixed flames. // *Combust. Flame*. 2015. V. 162 (7). P. 2865–2872.
6. *Власов П.А., Панкратьева И.Л., Полянский В.А.* Исследование ЭГД-структуры течения высокотемпературной газовой смеси с неоднородным источником заряженных частиц. // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. № 6. С. 97–110.
7. *Calcote H.F.* Mechanisms for the formation of ions in flames. // *Combust. Flame*. 1957. V. 1(3). P. 385–403.
8. *Lawton J., Weinberg F.J.* Electrical aspects of combustion. Clarendon Press. 1969. 355 p.
9. *Гогосов В.В., Полянский В.А., Семенова И.П., Якубенко А.Е.* Уравнения электродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1969. № 2. С. 31–45.

УДК 532.591

## ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ЗА ТЕЛОМ, ДВИГАЮЩИМСЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. П. В. Матюшин\*

*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия*

*\*E-mail: pmatyushin@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.12.2022 г.

После доработки 27.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

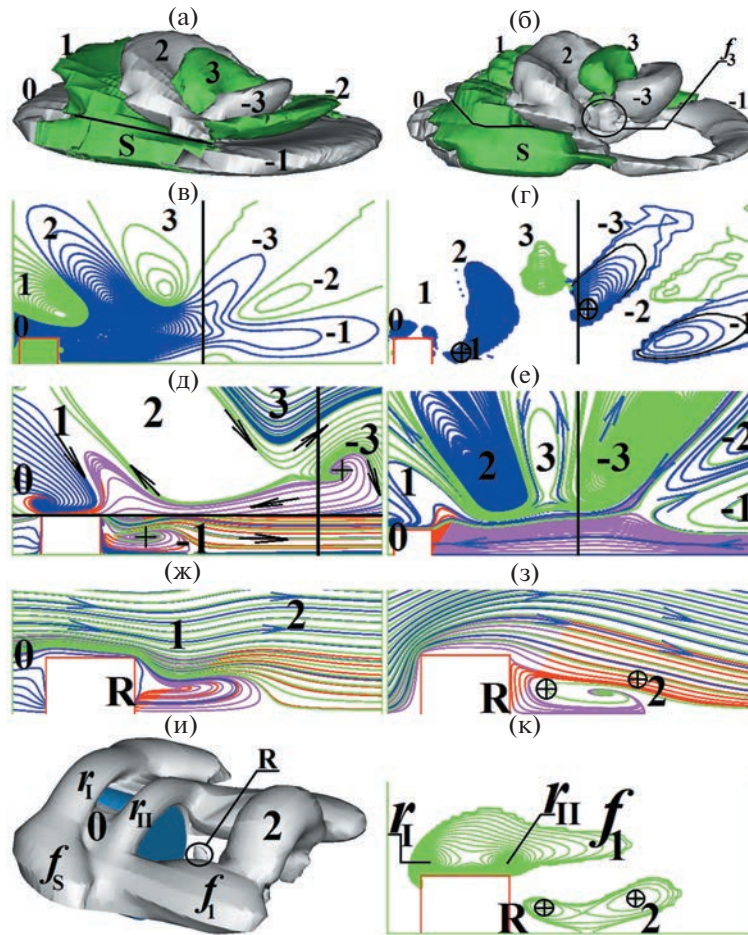
Рассмотрено равномерное движение диска в горизонтальном направлении вдоль оси его симметрии в покоящейся стратифицированной вязкой жидкости. Диск генерирует пространственные гравитационные внутренние волны, занимающие все пространство между диском и местом его старта. Волны наблюдаются при помощи двухцветной бета-плюс-визуализации вихревой структуры течения, рассчитанного при помощи системы уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска. В настоящей работе существенно дополнен опубликованный ранее механизм формирования полуволн над осью симметрии диска, где основное внимание уделялось периодическому процессу зарождения деформированных вихревых колец над местом старта диска, происходящему в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей; левое полукольцо трансформируется в полуволну впадин или гребней, а правое полукольцо исчезает со временем. В настоящей работе установлено, что левые части правых нечетных полуколец превращаются в осевые части полуволн гребней.

**Ключевые слова:** диск, стратифицированная вязкая жидкость, вихревая структура, волна, нить, петля

**DOI:** 10.31857/S1024708422601019, **EDN:** WKFNOM

Понимание процесса формирования сложных пространственных (3D) вихревых структур в жидкости, инициированного прохождением тела конечных размеров сквозь нее, всегда вызывало большой интерес. Одним из способов получения этой сложной 3D-структуры была визуализация полей векторов скорости, рассчитанных при помощи математического моделирования этого процесса. Если использовать сферу, как простейшее 3D-тело конечных размеров, и однородную несжимаемую вязкую жидкость, то топология 3D вихревой структуры будет достаточно сложной. В 1987 г. в [1] начало процесса формирования цепочки вихревых петель в следе за сферой визуализировали при помощи нескольких мгновенных 3D-линий завихренности. Этот процесс довольно трудоемкий, так как для каждой такой линии надо грамотно задать ее начальную точку. В результате появления в 1988–1995 гг. новых подходов к визуализации вихревых структур в жидкости и газе, описанных в [2], стало возможным получать рассчитанные 3D вихревые структуры в следе за сферой [3, 4], топологии которых качественно совпадали с экспериментом [5]. В 2006 г. был впервые детально рассмотрен механизм формирования вихрей (МФВ) в следе за сферой, равномерно двигающейся в однородной несжимаемой вязкой жидкости, приводящий к формированию цепочки вихревых петель в виде шпильки для волос [6]. МФВ здесь работает в рециркуляционной области  $R$  следа, расположенной за сферой (рис. 1ж–1з).

В случае линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости наблюдается симметрия поля векторов скоростей жидкости относительно горизонтальной плоскости, проходящей через геометрический центр  $O$  выпуклого симметричного тела. Поэтому, для определенности, динамика изменения структуры течения стратифицированной жидкости описывается только в верхнем полупространстве над точкой  $O$ . Пусть точка  $F$  находится над точкой  $O$  на пересечении поверхности тела с вертикальной осью  $X$ , проходящей через точку  $O$  и направленной вверх. Например, для сферы точка  $F$  будет ее верхним полюсом. В [7] сфера покоится на уровне нейтральной плавучести в покоящейся стратифицированной вязкой жидкости. Несмот-

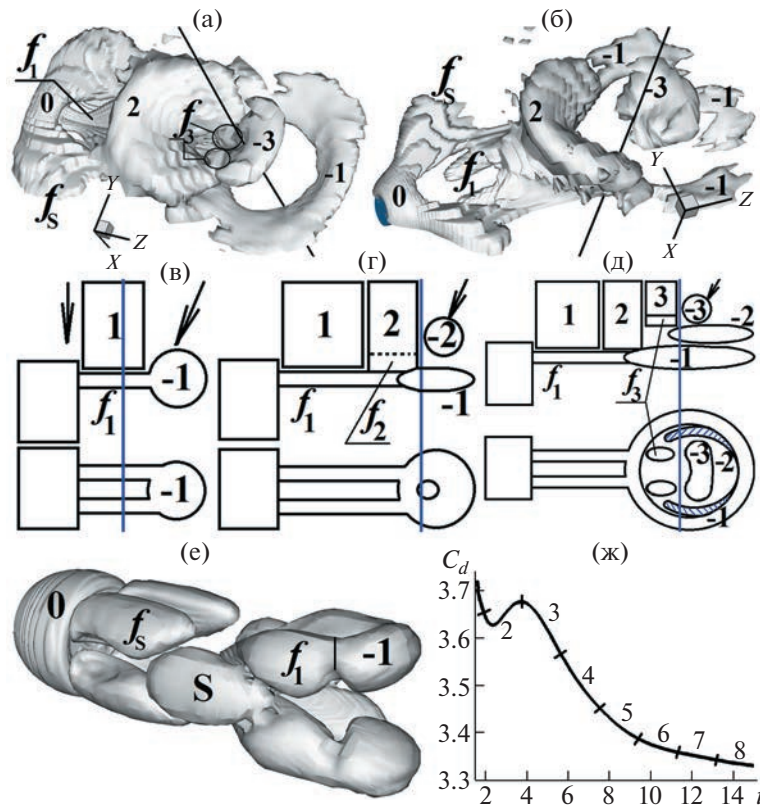


**Рис. 1.** Течение около диска при  $T = 1.5$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с: а–б, и – изоповерхности  $\omega_+ = |\text{rot } \mathbf{v}|_+ = \pm 0.01$ ,  $\beta_+ = \pm 0.01$ ,  $\beta = 0.2$ ; в–г, к – изолинии  $\omega_\phi = (\text{rot } \mathbf{v})_\phi$  с шагом 0.02 (в) и  $\beta_+$  с шагом  $2 \times 10^{-3}$  (г) в вертикальной плоскости  $x-z$  и  $\beta_+$  с шагом 0.04 в плоскости  $y-z$  (к); д–з – мгновенные линии тока в СК3(0, -0.01, 0) при  $0 \leq x \leq d/2$  и в СК3(0.973, 0.005, 0) при  $x > d/2$ , соответственно (д), в СК2 (е) и в СК1 в плоскостях  $x-z$  (ж) и  $y-z$  (з).

ря на то что силы диффузии толкают жидкость во всех направлениях, и в силу того, что многие части поверхности сферы находятся под углом к горизонту, около них при  $X > 0$  создаются течения жидкости, индуцированные диффузией, направленные к точке  $F$ . Течение это будет очень медленным и осесимметричным относительно оси  $X$ . В [7] показано, что в окрестности прямой  $X$  периодически над самым верхним кольцом в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей генерируется новое осесимметричное вихревое кольцо, которое уменьшает вертикальные размеры ранее сгенерированных колец. Каждая пара колец составляет одну гравитационную внутреннюю волну. Групповые скорости этих волн перпендикулярны их фазовой скорости и направлены по радиус-векторам от точки  $F$  [7]. Далее около точки  $F$  остаются только два вихревых кольца, сильно сплюснутых в вертикальном направлении и наблюдаемых в эксперименте [7]. Таким образом, краткая формулировка МФВ в [7] звучит так: “На точку  $F$  падают кольца”.

Если вместо сферы взять диск с горизонтальной осью симметрии  $Z$ , то диффузия индуцирует течение жидкости только около боковой поверхности диска [8]. Поэтому в [7] сингулярная точка  $F$  – узел, а в [8] – седло. В [8] на точку  $F$  сначала падают деформированные вихревые прямоугольники вместо колец. Далее вихревая структура течения становится все более хаотичной.

В настоящей статье рассмотрено равномерное движение диска из статьи [8] вдоль оси  $Z$  справа налево. Пусть  $Q$  – место старта центра тыльной стороны диска. На рис. 1в–1е точка  $Q$  находится на пересечении черной вертикальной прямой и оси  $Z$ , совпадающей с нижней границей рисунков. Из линейной теории и экспериментов известно, что старт тела сопровождается излу-



**Рис. 2.** Течение около диска при  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с:  $a$ – $б$  – изоповерхности  $(\beta_-) = 2 \times 10^{-3}$  и  $(\lambda_2-) = -3 \times 10^{-6}$  при  $x < 0$ ,  $Fr = 0.8$ ,  $T = 1.51$ ;  $в$ – $д$  – схематическое представление изоповерхностей  $\beta$  при  $x > 0$ ,  $Fr \leq 4$ ,  $0.28 \leq T \leq 1.4$ : *вверху* – вид сбоку, *внизу* – вид снизу;  $е$  – изоповерхность  $\beta = 0.003$  при  $Fr = 4$ ,  $T = 0.28$ ;  $ж$  – временная зависимость коэффициента  $C_d$  сопротивления диска при  $Fr = 0.3$ , цифрам  $k$  соответствуют временные промежутки  $[0.5T_b(k-1), 0.5T_b k]$ .

чением пучка нестационарных гравитационных внутренних волн, которые распространяются от  $Q$  вдоль радиус-векторов [9, 10]. Математическое моделирование позволяет детально изучить этот процесс излучения пучка волн, подробно исследуя динамику 3D вихревой структуры течения жидкости. Детальное описание этого процесса было дано в [11]. Сначала между диском и точкой  $Q$  формируются две вихревые нити  $f_1$ , которые потом трансформируются в ножки вихревой петли  $-1$ , головная часть  $-1$  которой расположена правее  $Q$  (рис. 2е). Потом над  $Q$  периодически зарождаются деформированные вихревые кольца  $k$ , где  $k = 2, 3, 4 \dots$ . Таким образом, краткая формулировка МФВ в [11] звучит так: “На точку  $Q$  падают деформированные кольца”. То есть краткие формулировки МФВ в статьях [7] и [11] практически совпадают.

Здесь надо подчеркнуть важное различие МФВ для однородной и стратифицированной жидкостей. Если в однородной жидкости вихревая структура течения формируется непосредственно за телом [6], то в стратифицированной жидкости – над местом старта тела [11].

В [11] большое внимание уделяется объяснению механизма формирования вихревых колец над  $Q$ , происходящего из-за гравитационной и сдвиговой неустойчивостей. В [11] демонстрируется, что левое полукольцо  $k$  трансформируется в полуволну впадин или гребней, а правое полукольцо  $-k$  исчезает со временем. Дело в том, что водоворот жидкости, инициируемый стартом диска, заставляет левые полукольца крутиться сильнее, чем правые. В результате этого размеры левых полуколец увеличиваются, а величина завихренности в них будет на порядок больше, чем в правых полукольцах (рис. 1а, 1в). Таким образом, внутренние полуволны (бывшие левые полукольца) занимают все пространство между диском и точкой  $Q$ .

Начальная и последующие стадии МФВ сильно отличаются в приведенном выше кратком изложении. Желание получить более универсальный МФВ в широком диапазоне чисел  $Fr$  и дополнительные всесторонние исследования динамики 3D вихревой структуры течений стратифици-

рованной вязкой жидкости привели к появлению настоящей статьи. В ней МФВ существенно доработан по сравнению с [11], и переименован в механизм формирования внутренних волн (МФВВ). Формулировка этого МФВВ будет дана после описания постановки этой задачи, методов ее численного решения и визуализации 3D вихревой структуры течений жидкости.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Диск с диаметром  $d$  и толщиной  $h = 0.76d$  вносится в покоящуюся линейно стратифицированную по плотности несжимаемую вязкую жидкость и сразу же начинает равномерное движение со скоростью  $U$  вдоль горизонтальной оси симметрии  $Z$  диска справа налево. Пусть точка  $Q$  старта центра тыльной стороны диска будет началом покоящейся декартовой системы координат СК2 ( $z, x, y$ ), где ось  $x$  — вертикальна, ось  $z$  совпадает с осью  $Z$ . Пусть начало движущейся декартовой системы координат СК1 ( $Z, X, Y$ ) с вертикальной осью  $X$  связано с геометрическим центром  $O$  диска. Для решения поставленной задачи моделируется вспомогательная задача обтекания диска равномерным потоком жидкости со скоростью  $U$  в СК1. Направление потока жидкости совпадает с положительным направлением оси  $Z$ .

Пусть  $T_b$  — период плавучести жидкости,  $T$  — обезразмеренное на  $T_b$  время, прошедшее с момента внесения диска в жидкость. Плотность жидкости  $\rho(Z, X, Y) = 1 - 0.5 \cdot X/A + S(Z, X, Y)$  обезразмерена на плотность  $\rho_0$  на уровне центра диска, а координаты  $Z, X, Y$  — на  $d/2$ , где  $A = \Lambda/d$  — отношение масштабов,  $N_b = 2\pi/T_b$  и  $\Lambda = g/N_b^2$  — частота и масштаб плавучести жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $S(Z, X, Y)$  — обезразмеренное на  $\rho_0$  возмущение солёности, которое при  $T = 0$  равно нулю.

Для математического моделирования вспомогательной задачи обтекания диска в СК1 решается следующая обезразмеренная система уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска [12]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)S = \frac{2}{Sc \cdot Re} \Delta S + \frac{v_x}{2A} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{2}{Re} \Delta \mathbf{v} + \frac{A}{2Fr^2} S \frac{\mathbf{g}}{g} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.3)$$

Она записана в цилиндрической системе координат ( $Z, R, \varphi$ ):  $Z = Z, X = R \cos \varphi, Y = R \sin \varphi$ , где  $\mathbf{v} = (v_Z, v_X, v_Y)$  — вектор скорости, нормированный по  $U$ ;  $p$  — возмущение давления, обезразмеренное на  $\rho_0 U^2$ ;  $t$  — время (обезразмеренное на  $f = d/(2U) = 1/(2Fr \cdot N_b)$ );  $Re = Ud/\nu$  — число Рейнольдса,  $Fr = UT_b/(2\pi d)$  — внутреннее число Фруда,  $Sc = \nu/\kappa = 709.22$  — число Шмидта;  $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$  — коэффициент кинематической вязкости воды,  $\kappa = 4.1 \times 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$  — коэффициент диффузии соли;  $\nabla$  и  $\Delta$  — операторы Гамильтона и Лапласа.

Для решения этой задачи используется численный метод расщепления по физическим факторам МЕРАНЖ [13], который успешно применялся для моделирования течений несжимаемой вязкой жидкости около сфер, цилиндров и дисков [4, 6–8, 11, 14–16], а также для течений со свободной поверхностью [13]. Детали численного метода, цилиндрической расчетной сетки, граничных условий и результатов тестирования программного комплекса математического моделирования и визуализации 3D-течений стратифицированной вязкой жидкости около диска опубликованы в [11, 14]. Приведенная в [14] классификация течений стратифицированной вязкой жидкости около диска толщиной  $h = 0.76d$  при  $0.05 < Fr < 100$  и  $50 < Re < 500$  хорошо согласуется с трехмерными расчетами [15, 16] и с экспериментами [17, 18].

Внешняя правая граница расчетной области удалена от центра диска на  $25d$ . При  $Fr \geq 10$  длина внутренней волны  $\lambda = 2\pi Frd \geq 20\pi d \approx 62.83d$ , т.е. на выбранной расчетной сетке уместится менее чем 40% длины первой волны. Более того, амплитуда этой волны будет мала. Поэтому характер течения около диска будет эквивалентен течению однородной вязкой жидкости [6]. При  $Fr = 4 - \lambda = 8\pi d \approx 25.13d$ , т.е. только одна волна будет доступна для наблюдения [11]. Поэтому для рассмотренной расчетной области именно при  $Fr \leq 4$  возможно исследовать генерацию внутренних волн, которые занимают все пространство расчетной сетки левее точки  $Q$  [11] (рис. 1а). Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

В СК2 значения безразмерных горизонтальных компонент  $v_z$  векторов скорости, рассчитанные в СК1, уменьшаются на единицу ( $v_z = v_z - 1$ ), а значения переменных  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $S$  и  $p$  в СК2 те же, что и в СК1. Таким образом, в СК2 скорость набегающего на диск потока равна нулю, а безразмерная скорость диска равна  $-1$ , т.е. диск равномерно двигается справа налево в покоящейся жидкости. Центр тыльной стороны диска за время  $T = [tf]/T_b = [t/(2FrN_b)] [N_b/2\pi] = t/(4\pi Fr)$  смещается в покоящейся СК2 на расстояние  $L = U[tf]/(0.5d) = t = 4\pi Fr T$  влево от точки  $Q$  (рис. 1е).

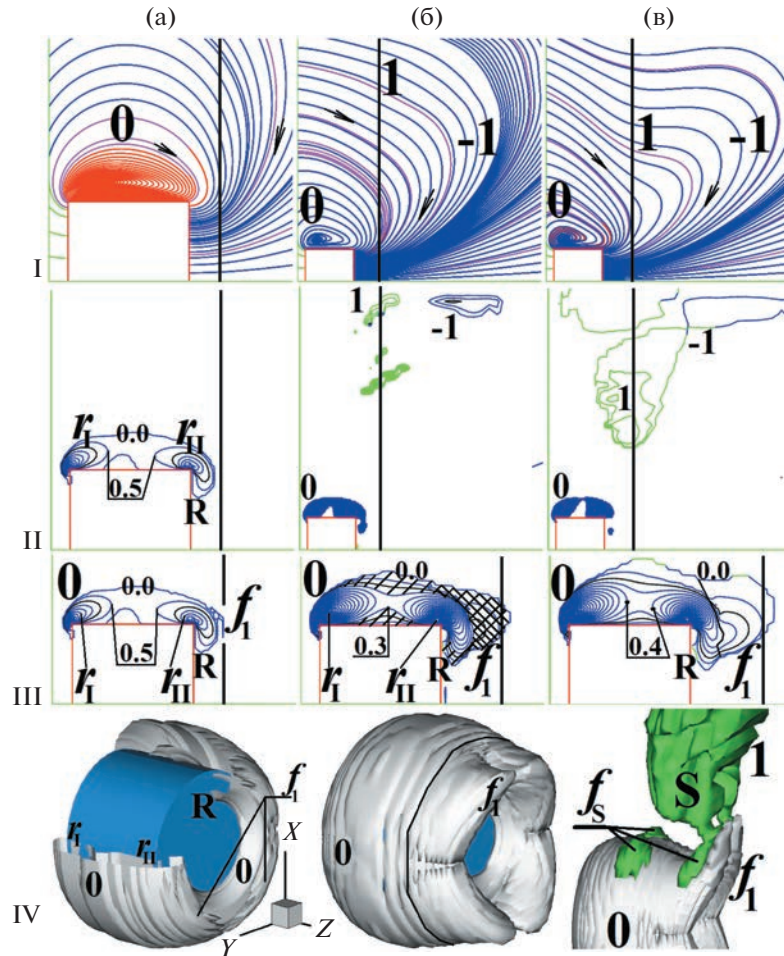
## 2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Из-за стратификации жидкости, медленной скорости диска ( $Re = 50$ ) и симметричности диска относительно плоскости  $x-z$  рассчитанные 3D-поля векторов скорости в любой момент времени характеризуются горизонтальной  $y-z$  и вертикальной  $x-z$  плоскостями симметрии. Следовательно, имеют смысл картины мгновенных линий тока в плоскостях  $x-z$  (рис. 1е–1ж) и  $y-z$  (рис. 1з). На рис. 1е для СК2 визуализируются вихревые ячейки 1, 2, 3, соответствующие внутренним полуволам 1, 2, 3, сгенерированным при  $T = 1.5$  для  $Fr = 0.3$ . На рис. 1ж–1з для СК1 показана рециркуляционная зона  $R$ , сформированная в результате отрыва набегающего на диск потока от тыльной стороны диска.

Известно, что построение 3D мгновенных линий тока с целью визуализации 3D вихревой структуры течения – трудное и неблагодарное дело. Можно легко потерять многие вихри. Поэтому для визуализации этой 3D-структуры естественно было бы использовать изоповерхности модуля завихренности  $\omega = |\omega| = |\text{rot } \mathbf{v}|$  (рис. 1а). Рассмотрим сначала картины изолиний фитоид компоненты завихренности  $\omega_\phi$  в вертикальной плоскости  $x-z$  (рис. 1в). Из определения  $\omega_\phi$  следует, что в ячейках 1, 3 и  $-2$  на рис. 1в, где  $\omega_\phi > 0$ , жидкость вращается против часовой стрелки, что подтверждается рисунком 1е. В ячейках 0, 2,  $-3$ ,  $-1$  на рис. 1в, где  $\omega_\phi < 0$ , жидкость вращается по часовой стрелке (см. рис. 1е). Изоповерхность  $\omega = 0.01$  на рис. 1а визуализирует внутренние полувола 1–3 (области течения со значительным вращением сплошной среды), но не способна показать структуру более слабых вихрей около оси  $z$  [4]. Для визуализации всей вихревой структуры 3D течения несжимаемой жидкости в статье [2] было предложено использовать изоповерхность  $\lambda_2 < 0$  (рис. 2б). Здесь  $\lambda_2$  – второе собственное значение симметричного тензора  $\mathbf{F}^2 + \mathbf{B}^2$ , где  $\mathbf{F} + \mathbf{B} = \mathbf{G}$  – тензор градиента скорости с элементами  $v_{i,j} = \partial v_i / \partial x_j$ ,  $F_{i,j} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i})$ ,  $B_{i,j} = 0.5(v_{i,j} - v_{j,i})$ . В [2] также упоминается визуализация 3D-течений при помощи изоповерхности мнимой части  $\beta$  двух комплексно-сопряженных собственных значений тензора  $\mathbf{G}$  (рис. 1б, 1и). Интересно отметить, что в [2] эта мнимая часть никак не обозначается. Поэтому в разных статьях ее обозначают при помощи разных символов:  $\text{Im}(\sigma_{1,2})$  [6, 15],  $\beta$  [8, 11, 14, 16],  $\lambda_{ci}$  [19],  $\lambda_{cx}$  [20] и т.п. Сначала использовалась  $\lambda_2$ -визуализация [4], а потом  $\beta$ -визуализация [6, 8, 11, 14–16], которая имеет следующий ясный физический смысл. Выберем в СК1 произвольную точку  $M$  со скоростью жидкости  $\mathbf{v}_M$  в ней. Перейдем в систему отсчета СК3( $\mathbf{v}_M$ ), двигающуюся относительно СК1 со скоростью  $\mathbf{v}_M$ . Тогда скорость в точке  $M$  в СК3( $\mathbf{v}_M$ ) станет равной нулю, а для скоростей в малой окрестности этой точки будет справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt \approx \mathbf{G}\mathbf{x}$ . Известно, что наличие двух комплексно-сопряженных собственных значений  $\sigma = \alpha + i\beta$  и  $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$  тензора  $\mathbf{G}$  в точке  $M$  дает следующее решение этого ОДУ [21]:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{h} \exp(\sigma t) + \bar{C}\bar{\mathbf{h}} \exp(\bar{\sigma} t) + C_3\mathbf{h}_3 \exp(\sigma_3 t) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3$$

Здесь величины  $C$  и  $C_3$  – комплексная и действительная константы соответственно,  $\sigma_3$  – третье (действительное) собственное значение тензора  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{h}_3$  – третий (действительный) собственный вектор,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 - i\mathbf{h}_2$  и  $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{h}_1 + i\mathbf{h}_2$  – два комплексно-сопряженных собственных вектора тензора  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{h}_1$  и  $\mathbf{h}_2$  – два линейно независимых действительных вектора, которые являются базисом в плоскости  $P$ . Пусть комплексное число  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 = C \exp(\sigma t)$ , тогда мы имеем:  $\mathbf{x}_1 = \xi_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{h}_2$ . Отобразим аффинно плоскость  $P$  на вспомогательную плоскость  $P^*$  комплексного переменного  $\zeta$ , чтобы вектор  $\mathbf{h}_1$  перешел в единицу, а вектор  $\mathbf{h}_2$  – в  $i$ . Тогда вектору  $\mathbf{x}_1 = \xi_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{h}_2$  будет соответствовать комплексное число  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ . В силу этого отображения траектория в плоскости  $P$  перейдет в траекторию в плоскости  $P^*$ , описываемую уравнением  $\zeta = C \exp(\sigma t)$ . В полярных координатах  $(r, \theta)$   $\zeta = r \exp(i\theta)$ , т.е.  $\xi_1 = r \cos \theta$ ,  $\xi_2 = r \sin \theta$ . Пусть  $C = C_{\text{real}} \exp(iD)$ , тогда  $r = C_{\text{real}} \exp(\alpha t)$ ,  $\theta = \beta t + D$ . Таким образом, если  $\beta \neq 0$ , то можно говорить о вихревом характере движения жидкости в малой окрестности точки  $M$  в СК3( $\mathbf{v}_M$ ): молекулы жидкости движутся по овалам (при  $\alpha = 0$ )

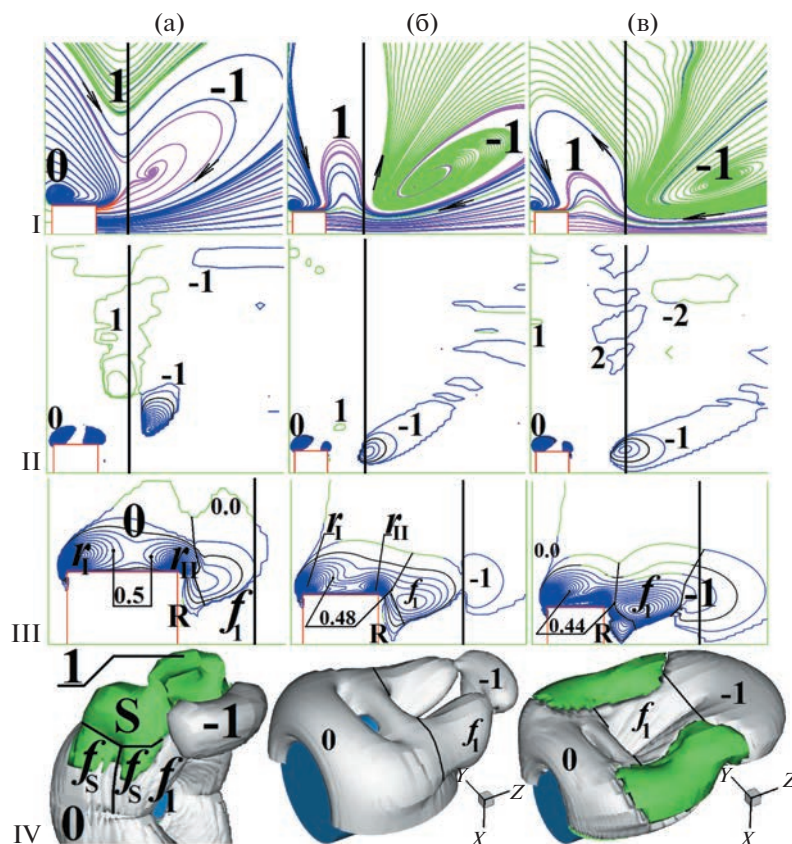


**Рис. 3.** Течение около диска при  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с: а–в – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии  $10^3\beta+$  с шагами 500, 0.1, 1 (II) в вертикальной плоскости  $x$ – $z$ , изолинии  $\beta+$  с шагами 0.5, 0.1, 0.1 в плоскости  $\varphi = \pi/4$  (III), изоповерхности  $10^3\beta = 0.5, 5$  и  $10^3\beta+ = \pm 0.5$  (IV) при  $T = 0.1, 0.2, 0.24$ .

или овальным спиралям (при  $\alpha \neq 0$ ) и  $\beta$  – это усредненная по времени угловая скорость вращения молекул жидкости около точки  $M$  в СК3 ( $v_M$ ) [21]. Для удобства построения одноцветной изоповерхности  $\beta = \beta_0 > 0$  (рис. 1и), демонстрирующей вихревую структуру течения жидкости, в тех ячейках расчетной сетки, где  $\beta = 0$ , функция  $\beta$  переопределяется:  $\beta = -0.01$  [6, 8, 11, 14–16].

В [22] была введена двухцветная  $\beta+$ -визуализация, которая при помощи знака  $\omega_\varphi$  окрашивает полуволны впадин 1, 3 и гребней 2 на рис. 1б разными цветами, что очень удобно для исследования вихревой структуры внутренних волн (рис. 3–5, IV). Функция  $\beta+$  определена при  $\beta > 0$ :  $\beta+ = \text{sign}(\omega_\varphi)\beta$ , где функция  $\text{sign}(\omega_\varphi) = 1$  при  $\omega_\varphi \geq 0$ ,  $\text{sign}(\omega_\varphi) = -1$  при  $\omega_\varphi < 0$ . Аналогичным образом можно ввести двухцветную  $\omega+$ -визуализацию:  $\omega+ = \text{sign}(\omega_\varphi)\omega$  (рис. 1а).

Далее было замечено, что на большей площади рис. 1в  $\omega_\varphi < 0$ . Поэтому, если на рис. 1в убрать вихревые структуры, для которых  $\omega_\varphi \geq 0$ , то структура течения станет в два раза проще, но при этом удаленные структуры можно легко мысленно восстановить. Поэтому в [22] была введена одноцветная ( $\beta-$ )-визуализация течения жидкости. Функция ( $\beta-$ ) определена при  $\beta > 0$  и  $\omega_\varphi < 0$ :  $(\beta-) = \beta$  (рис. 2а). В 3D-случае при сравнении изоповерхностей  $\beta+$  на рис. 1б и изоповерхностей  $\beta-$  на рис. 2а видно, что на рис. 2а все полуволны впадин, кроме первой, бесследно исчезают. На рис. 1б черной линией отмечена примерная граница между областями  $(0 + S)$  и 1, где  $S$  – это головная часть боковой вихревой петли (рис. 2е) [11]. Удаление области  $(S+1)$  оставляет грубый след на оболочке следа 0 (сравните рис. 4в, IV и 5а, IV).



**Рис. 4.** Течение около диска при  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$ : а–в – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии  $10^2\beta$  с шагами 0.2, 5, 5 (II) в плоскости  $x-z$ , изолинии  $\beta$  с шагами 0.1, 0.08, 0.04 в плоскости  $\varphi = \pi/4$  (III), изо-поверхности  $\beta + = \pm 0.0052$ ,  $\beta = 0.15$ ,  $\beta + = \pm 0.05$  (IV) при  $T = 0.28, 0.45, 0.68$ .

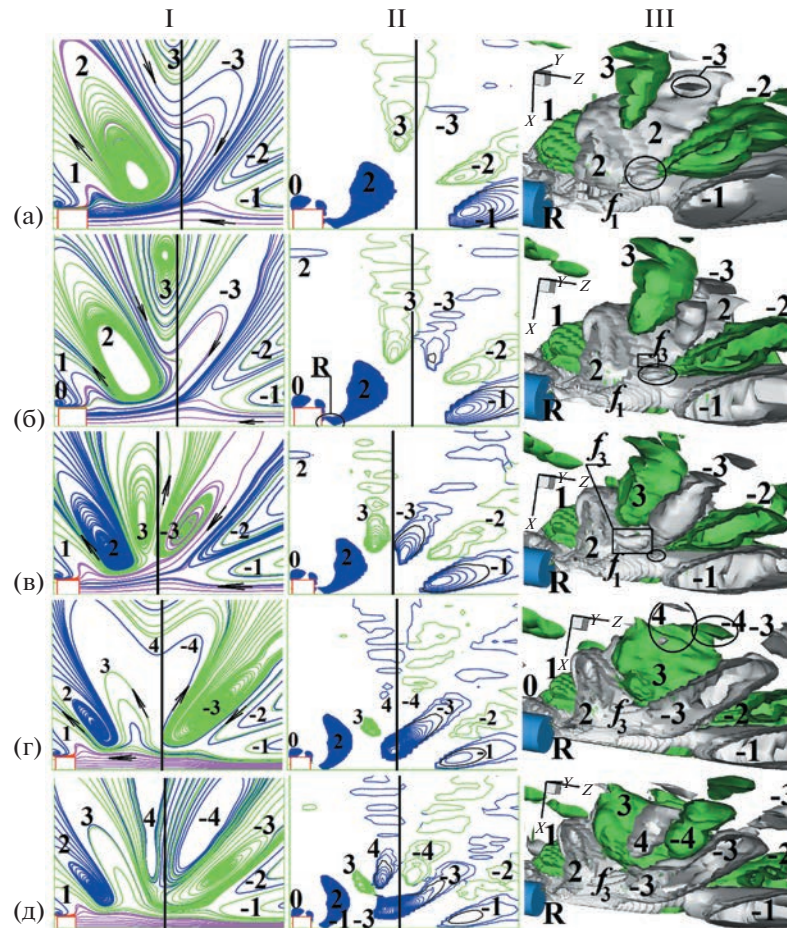
Рис. 1г–1д демонстрируют физический смысл  $\beta$  для двух точек  $M_1$  и  $M_2$  со скоростями в СК1  $(v_z, v_R, v_\varphi) = (0.973, 0.005, 0)$  (при  $x > d/2$ ) и  $(0, -0.01, 0)$ , соответственно, отмеченных черными крестами. Рис. 1д разделен черной прямой  $x = d/2$  на верхнюю и нижнюю части. Картины линий тока в верхней и нижней частях рис. 1д показаны в СК3  $(0.973, 0.005, 0)$  и СК3  $(0, -0.01, 0)$ , соответственно, и демонстрируют вращение жидкости в окрестностях точек  $M_1$  и  $M_2$ . Картины линий тока в верхней и нижней частях рис. 1д похожи на картины линий тока в СК2 (рис. 1е) и СК1 (рис. 1ж) соответственно. Так, на рис. 1д и 1ж при  $0 \leq x \leq d/2$  мы видим зону R. А на рис. 1д и 1е при  $x > d/2$  мы видим полуволны впадин и гребней. Поэтому для приблизительного описания изменения кинематики внутренних волн и отрывных течений около оси  $z$  в вертикальной плоскости можно использовать мгновенные линии тока в СК2 и СК1 соответственно. Так, на рис. 1, 3–6 для каждой картины изолиний  $\beta +$  в плоскости  $x-z$  приводится соответствующая ей картина мгновенных линий тока в СК2.

По аналогии с  $\beta +$  и  $\beta -$ -визуализациями можно определить  $\lambda_{2+}$  и  $(\lambda_{2-})$ -визуализации (рис. 2б). Функция  $\lambda_{2+}$  определена при  $\lambda_2 < 0$ :  $\lambda_{2+} = \text{sign}(\omega_\varphi)|\lambda_2|$ . Функция  $(\lambda_{2-})$  определена при  $\lambda_2 < 0$  и  $\omega_\varphi < 0$ :  $(\lambda_{2-}) = \lambda_2$ . Сравнение рис. 2а и 2б для  $T = 1.5$  и  $Fr = 0.8$  показывает, что топологии вихревых структур, полученные при помощи  $(\beta -)$  и  $(\lambda_{2-})$ -визуализаций, практически совпадают, но  $(\beta -)$ -визуализация более гармонично представляет вихревую структуру течения жидкости. Так, на рис. 2а нити  $f_1$  соединяются с кольцом R, а на рис. 2б не соединяются. На рис. 2а вихревое кольцо  $-1$  цельное, а на рис. 2б – разорвано на три части.

### 3. МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ $Fr \leq 4$

При  $T = 0$  диск вносится в покоящуюся стратифицированную вязкую жидкость и сразу же начинает равномерное движение вдоль горизонтальной оси  $z$  симметрии диска справа налево.





**Рис. 6.** Течение около диска при  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$ : а–д – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии  $10^3\beta+$  с шагом 2 (II) в плоскости  $x-z$ , изоповерхности  $\beta+ = \pm 10^{-3}$  (III) при  $T = 1.25, 1.3, 1.4, 1.73, 1.9$ .

сечении оболочки  $0_2$  при  $\varphi = \pi/4$  можно выделить нити  $f_1$ , заштрихованные в клеточку, зону R у тыльной стороны диска и остальную часть  $0_2$  над боковой стороной диска. При  $x > 0$  и  $0.2 \leq T \leq 1$  две вихревые нити  $f_1$  (ножки вихревой петли –1) являются частью каскада –1, а петля –1 – сердцевинкой каскада –1. Генерация двух симметричных петель –1 при  $x > 0$  и  $x < 0$  сопровождается зарождением боковых петель S, как боковых частей двух симметричных каскадов 1. При  $x > 0$  и  $0.24 \leq T \leq 0.32$  для  $Fr = 0.3$  наблюдаются четыре боковые нити  $f_s$  (рис. 3в, 4а, IV), для  $Fr = 4$  – две нити  $f_s$  (рис. 2е). Появление петель S связано с присутствием диска и не упоминается в обсуждаемом здесь МФВВ, так как этот МФВВ посвящен непосредственно генерации внутренних волн.

Таким образом, при  $0.1 \leq T \leq 0.32$  формируются две вихревые петли –1 с ножками  $f_1$  и боковые петли S. При  $T = 0.28$  для  $Fr = 0.3$  сердцевинки каскадов 1 и –1 образуют кольцо 1 (рис. 4а, IV), а для  $Fr = 4$  полукольцо 1 похоже на арку (как на рис. 3б в статье [11]), радиус которой примерно в пять раз больше радиуса полукольца –1. Поэтому в формулировке МФВВ надо говорить о формировании не одного вихревого кольца 1, а двух каскадов вихрей 1 и –1, сердцевинами которых будут полукольца 1 и –1.

При  $0.28 < T \leq 0.45$  и  $Fr = 0.3$  диаметр  $D(1)$  сечения полукольца 1 плоскостью  $x-z$  уменьшается в три раза, а далее исчезает совсем.  $D(1) = 0$  говорит о том, что полукольцо 1 при  $x > 0$  разделилось на две половинки, симметричные относительно плоскости  $x-z$ . При  $x > 0$  и  $0.28 \leq T \leq 0.8$  диск сдвигается влево, а каскад –1 остается у точки Q, поэтому ножки  $f_1$  петли –1 вытягивается в горизонтальном направлении (рис. 4б–4в, 5а, IV); полукольцо –1 сплющивается в вертикальном направлении и превращается в полукруг –1. На рис. 4б и 4в, IV показаны только половины изоповерхностей  $\beta$  для того, чтобы показать диск. При  $0.5 \leq T \leq 0.8$  над Q из-за гравитационной и

сдвиговой неустойчивостей генерируются каскады вихрей 2 и  $-2$ . Каскад вихрей 2 со временем станет полуволной гребней 2. Вихревые нити  $f_2$ , обведенные черными кругами на рис. 5а, IV для  $Fr = 0.3$  или представленные в форме полукольцевой перемычки между нитями  $f_1$  на рис. 3а из [11] для  $Fr = 4$ , – это нижние части каскада вихрей 2. Таким образом, при  $Fr = 4$  полуволны гребней формируются из четных нитей около  $Q$ , а не из полуколец над  $Q$  как при  $Fr = 0.3$ .

Пусть  $\beta_{\max}(k)$  – значение локального максимума функции  $\beta$  в сечении полукольца  $k$  плоскостью  $x-z$ . При  $T = 0.8$  и  $Fr = 0.3$  сердцевина каскада 2 приближается к оси  $z$ ,  $\beta_{\max}(2) = 0.025$ ,  $\beta_{\max}(-1) = 0.142$ , т.е. полукруг  $-1$  обладает наибольшим  $\beta_{\max}$  в сечении  $\varphi = 0$  вне оболочки диска (рис. 5а, II). При  $x > 0$  и  $T = 0.86$  каскад 2 садится на левый край полукруга  $-1$ ,  $\beta_{\max}(2)$  увеличивается до 0.088, значения  $\beta$  перераспределяются между левым и правым краями полукруга  $-1$ :  $\beta_{\max}(-1, \text{левый}) = 0.12$ ,  $\beta_{\max}(-1, \text{правый}) = 0.068$  (рис. 5б, II). Теперь в СК2 через нити  $f_1$  прокачивается жидкость, поступившая как из полукруга  $-1$ , так и из каскада 2, что в дальнейшем при  $T = 1$  приводит к трансформации полукруга  $-1$  в кольцо  $-1$  (рис. 5в, II,  $\beta_{\max}(2) = 0.22$ ,  $\beta_{\max}(-1) = 0.038$ ). На рис. 5б и 5в, IV изоповерхности  $\beta$  показаны при  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/10$  для того, чтобы показать диск. Таким образом, в результате слияния при  $0.86 \leq T \leq 1$  сердцевин каскада 2 и левой части полукруга  $-1$  каскад 2 стал обладать наибольшим  $\beta_{\max}$  в сечении  $\varphi = 0$  вне оболочки диска.

Итак, при  $T \leq 1$  над  $Q$  периодически в течение каждой  $\Delta T = 0.5$  формируются каскады вихрей  $k$  и  $-k$ , где  $k = 1, 2$ . Сердцевин каскадов  $-1$  и 1 состоят из вихревой петли  $-1$  (с ножками  $f_1$  и полукольцом  $-1$ ) и из полукольца 1 с боковыми петлями  $S$  соответственно. Сначала каскад 2 состоит из нитей  $f_2$  (около  $Q$ ) и полукольца 2, которое потом садится на левую часть полукольца  $-1$ . В результате формируются полуволна впадин 1 (над нитями  $f_1$ ) и полуволна гребней 2. Фундаментом вихревой структуры первой волны при  $T = 1$  является горизонтальное кольцо  $-1$ , сформировавшееся из полукольца  $-1$ .

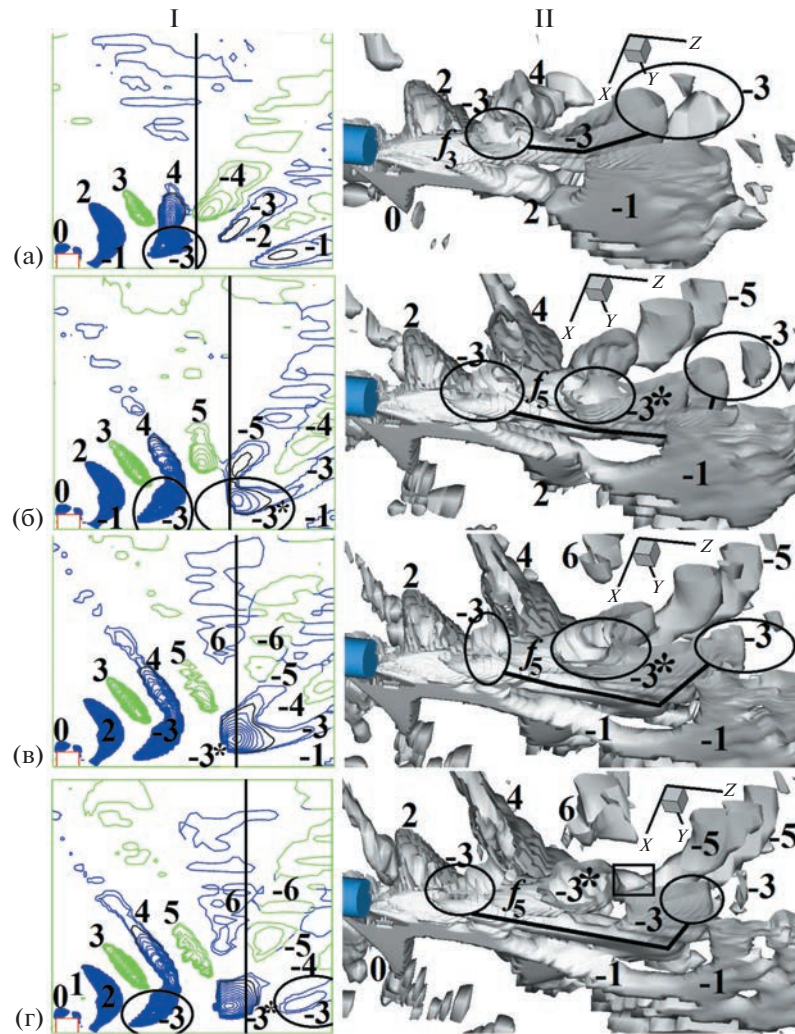
Описанный выше процесс формирования вихрей для  $T \leq 1$  схематически представлен на рис. 2в–2г. Его можно обобщить на любой другой интервал времени  $(n-1) < T \leq n$ , где  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Действительно, при  $T > 0$  над  $Q$  периодически в течение каждого интервала времени  $0.5(k-1) < T \leq 0.5k$  формируются левый  $k$  и правый  $-k$  каскады вихрей. Они состоят из нитей  $f_k$  около  $Q$  и деформированных полуколец  $k$  и  $-k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Для каждого нечетного  $k$  у оси  $z$  формируется вихревая петля  $-k$ . Она состоит из нитей  $f_k$  и нижнего полукольца  $-k$ , на которое потом садится четный каскад  $(k+1)$ . Далее нижнее полукольцо  $-k$  становится деформированным кольцом. Таким образом, в течение каждого интервала времени  $(n-1) < T \leq n$  формируется внутренняя волна  $n$ , состоящая из полуволн впадин  $k = (2n-1)$  и гребня  $(k+1) = 2n$ . Левая часть кольца  $-k$  становится осевой частью гребня  $(k+1)$ . В результате осевые части гребней оказываются связанными друг с другом нечетными нитями в цепочку. МФВВ для  $Fr \leq 4$  и  $\Delta T = 1$  можно сформировать короче. Нечетные каскады  $k$  и  $-k$ , нити  $f_k$  + нижний вихрь  $-k$ ; четные каскады  $(k+1)$  и  $-(k+1)$ , нити  $(k+1)$ , каскад  $(k+1)$  садится на нижний вихрь  $-k$  (рис. 2в–2д).

На рис. 2ж приведен график зависимости коэффициента  $C_d$  лобового сопротивления диска от времени  $t$  при  $Fr = 0.3$ . Волнообразная форма графика при  $T \leq 1$  обусловлена тем, что при  $T \leq 1$  точка  $Q$ , над которой работает МФВВ, находится около диска. Реализация МФВВ приводит к возмущению полей векторов скорости и давления у поверхности диска, которые и определяют  $C_d$ .

Если при  $T \leq 4$  и  $Fr = 0.3$  реализации МФВВ для разных временных интервалов  $\Delta T = 1$  немного отличаются друг от друга, то при  $T > 3$  и  $Fr = 0.3$  похожи друг на друга. Ниже подробно описываются реализации МФВВ при  $1 < T \leq 3$ ,  $Fr = 0.3$ ,  $T_b = 2\pi$  с и  $Re = 50$ , опираясь на рис. 1, 6–7. Описание особенностей МФВВ при  $T > 3$  приведено без помощи рисунков.

#### 4. ДЕТАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ПРИ $Fr = 0.3$ И $T > 1$

Рассмотрим теперь более детально МФВВ при  $1 < T \leq 2$  (рис. 6, 2д, 1). Так как при  $T = 1$  и  $Fr = 4$  точка  $Q$  достигла внешней границы расчетной сетки, то дальнейшее исследование МФВВ при  $Fr = 4$  стало невозможным. При  $1 < T \leq 1.3$  и  $Fr = 0.3$  над точкой  $Q$  генерируются каскады вихрей 3 и  $-3$  (рис. 6а–6б). При  $1 < T \leq 1.3$   $\beta_{\max}(2)$  увеличивается до 0.33. При  $T > 1.3$   $\beta_{\max}(2)$  больше не меняется, что говорит о том, что при  $T = 1.3$  гребень 2 и вихревая структура левее его уже примерно сформировались. На рис. 6, III и 7, II изоповерхности  $\beta$  показаны при  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$  для того, чтобы показать диск и для лучшего понимания 3D вихревой структуры течения жидкости. При  $T = 1.25$  на рис. 6а, III широкий “амфитеатр” полуволны 2 стоит перед меньшей по размерам “сценой” полукольца  $-2$ , боковые части которого выделены черной окружностью. Эти боковые



**Рис. 7.** Течение около диска при  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с: а–г – изолинии  $10^3\beta+$  с шагом 2 (I) в плоскости  $x-z$ , изоповерхности  $(\beta-) = 10^{-3}$  (II) при  $T = 2.05, 2.6, 2.8, 2.95$ .

части индуцируют появление нитей  $f_3$  над точкой  $Q$  при  $T = 1.3$ . Нити  $f_3$ , выделенные черным прямоугольником на рис. 6б–6в, III, являются частью формирующегося каскада  $-3$ . При  $T = 1.4$  полукольцо  $-2$  отрывается от полуволны 2,  $\beta_{\max}(3) = 0.021$ ,  $\beta_{\max}(-3) = 0.013$ , размеры нитей  $f_3$  увеличиваются (рис. 6в, III). Нити  $f_3$  расположены выше нитей  $f_1$ . Картина течения при  $T = 1.5$ , представленная на рис. 1а–1з и 2а–2б, уже была подробно описана в подразделе 2 настоящей статьи. Здесь к этому описанию остается добавить устоявшуюся внутреннюю структуру (“скелет”) первой волны на рис. 1и, где боковые нити  $f_5$  соединены с кольцом  $r_1$ , а нити  $f_1$  – с кольцом  $r_{II}$ . Здесь так же видно, что при  $T = 1.5$  сердцевина полуволны 2 – это деформированное кольцо 2 (рис. 1к). На рис. 6г, III при  $T = 1.73$  нити  $f_3$  соединены с кольцом 2. Таким образом, в стратифицированной жидкости каждое вихревое кольцо связано с четырьмя нитями. В то время как в однородной жидкости вихревое кольцо связано только с двумя нитями [6].

При  $1.5 < T \leq 1.73$  над точкой  $Q$  генерируются каскады вихрей 4 и  $-4$  (рис. 6г). При  $1.3 < T \leq 1.73$   $\beta_{\max}(-2)$  уменьшается до 0.003. При  $1.4 < T \leq 1.73$   $\beta_{\max}(3)$  и  $\beta_{\max}(-3)$  увеличиваются до 0.027 и 0.052, соответственно (рис. 6г, II), полукольцо  $-3$  превращается в полукруг  $-3$ , из нитей  $f_3$  и полукруга  $-3$  формируется вихревая петля  $-3$  (рис. 6г, III);  $D(3)$  уменьшается примерно в полтора раза (аналогично уменьшению  $D(1)$  при  $0.28 < T \leq 0.45$ ), но при этом объем полуволны впадин 3 значительно увеличивается. При  $1.73 < T \leq 1.9$   $\beta_{\max}(3)$  уменьшается до 0.023,  $\beta_{\max}(-3)$  увеличивается до 0.057 (рис. 6д, II). При  $T = 1.9$   $\beta_{\max}(4) = 0.0124$ ,  $\beta_{\max}(-4) = 0.0056$ .

При  $1.9 < T \leq 2.05$  развиваются две полуволны 4 и  $-4$ . Вертикальная полуволна 4 садится на левую часть вытянутого горизонтального полукруга  $-3$ , который затем трансформируется в деформированное кольцо  $-3$ , выделенное на рис. 7а, II двумя черными кругами с черной ломаной кривой между ними;  $\beta_{\max}(-3) = 0.0046$ ,  $\beta_{\max}(4)$  и  $\beta_{\max}(-4)$  увеличиваются до 0.08 и 0.0092 соответственно. Таким образом, при  $1 < T \leq 2$  формируются полуволна впадин 3 над нитями  $f_3$  и полуволна гребней 4. Фундаментом вихревой структуры второй волны при  $T = 2$  является горизонтальное кольцо  $-3$ . При  $2.05 < T \leq 2.95$  диаметры деформированных колец  $-1$  и  $-3$  постепенно увеличиваются (рис. 7, II).

При  $2.05 < T \leq 2.5$  над точкой  $Q$  генерируются каскады вихрей 5 и  $-5$ . Если каскады  $-1$  и  $-3$  во время своего зарождения при  $T = 0.28$  и 1.3, соответственно, имели одну ярко выраженную сердцевину, то на рис. 7б–7г при  $2.6 \leq T \leq 2.95$  наблюдаются сразу три сердцевинки каскада  $-5$  в форме полуколец. При  $2.1 \leq T \leq 2.5$  боковые части полукольца  $-4$  формируют нити  $f_5$  (аналогично формированию нитей  $f_3$ ), которые стыкуются с нижним полукольцом каскада  $-5$ , которое при  $T = 2.6$  соприкасается с верхней частью левого внутреннего куска  $-3^*$  правой части кольца  $-3$  (рис. 7б). В силу того, что кусок  $-3^*$  расположен ближе к оси  $z$ , то  $\beta_{\max}(-3) = 0.011 > 0.005 = \beta_{\max}(-5)$ . Поэтому при  $2.6 < T \leq 2.8$  кусок  $-3^*$  поглощает полукольцо  $-5$ , т.е.  $-3^* := (-3^*) + (-5)$ . В результате нити  $f_5$  соединяются с куском  $-3^*$  (рис. 7в). При  $2.5 < T \leq 2.95$  над точкой  $Q$  генерируются каскады вихрей 6 и  $-6$ . При  $2.8 < T \leq 2.95$  кусок  $-3^*$  отрывается от правой части кольца  $-3$  и трансформируется в сильно деформированное кольцо  $-3^* \equiv -5$ , боковая часть которого выделена черным прямоугольником на рис. 7г, II. Далее вертикальный каскад 6 садится на левую часть кольца  $-5$ , а полуволна 1, состоящая ранее из двух половинок, снова становится полноценным полукольцом,  $\beta_{\max}(1) = 0.008$  (рис. 7г, I). Таким образом, при  $2 < T \leq 3$  формируются полуволна впадин 5 над нитями  $f_5$  и полуволна гребней 6. Фундаментом вихревой структуры третьей волны является кольцо  $-5$ . При  $T \geq 2.8$   $\beta_{\max}(4) = 0.14 < 0.33 = \beta_{\max}(2)$ , т.е. при  $T = 2.8$  гребень 4 и вихревая структура левее его уже примерно сформировались. Поэтому ширина полуволн 2–4 на рис. 7в–7г, измеряемая вдоль прямой, перпендикулярной им, приблизительно равна  $\pi Frd \approx 0.94d$ . Это хорошо согласуется с линейной теорией внутренних волн.

При  $T = 2.95$  вихревые кольца  $-1$  и  $-3$  вместе с полукольцами  $-5$  и  $-6$  создают вихревое “гнездо” (рис. 7г). В нем потом генерируются каскады вихрей 7 и  $-7$  с несколькими сердцевинами, далее у оси  $z$  появляется вихревая петля  $-7$ , затем формируются вихревые каскады 8 и  $-8$  и каскад 8 садится на головную часть петли  $-7$ . При  $T = 4$  и  $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$  боковая часть кольца  $-5$  становится дополнительной нитью, связывающей осевые части гребней  $-5$  и  $-7$  наряду с нитью  $f_7$ . Для числа  $Fr = 0.3$  все МФВВ при  $T > 4$  похожи на МФВВ при  $3 < T \leq 4$ . В результате осевые части гребней оказываются связанными друг с другом в цепочку нечетными нитями как “позвонки” “скелета” вихревой структуры течения (рис. 7г, II). На каждый такой “позвонок” прикреплены две полуволны (впадин и гребня). По мере уменьшения  $Fr$  горизонтальные размеры между центрами “позвонков”, равные  $2\pi Frd$ , уменьшаются.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование равномерного движения диска с диаметром  $d$  и толщиной  $h = 0.76d$  в горизонтальном направлении вдоль его оси симметрии  $Z$  в покоящейся линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости при  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с и в широком диапазоне  $Fr$ . Диск генерирует пространственные (3D) гравитационные внутренние волны, занимающие все пространство между диском и местом  $Q$  его старта. Существенно дополнен опубликованный в [11] МФВ, работающий при формировании гравитационных внутренних волн, полученный на основе анализа динамики 3D вихревой структуры течения жидкости, визуализируемой при помощи изоповерхности мнимой части  $\beta > 0$  комплексно-сопряженных собственных значений тензора градиента скорости. Для нахождения  $\beta$  в каждом узле расчетной сетки при помощи численного метода МЕРАНЖ [13] решалась система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска, записанная в цилиндрической системе координат. Для большей наглядности полуволны гребней и впадин были окрашены разными цветами в зависимости от знака угловой компоненты завихренности  $\omega_\phi$  на них. Такая визуализация получила наименование  $\beta+$  [22].

В [11] основное внимание уделяется периодическому процессу зарождения деформированных вихревых колец над точкой  $Q$ , происходящему в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей. Тогда левое полукольцо трансформируется в полуволну впадин или гребней, а правое

полукольцо исчезает со временем. В настоящей работе подчеркивается важная роль нечетных правых полуколец в МФВ и сформулирован следующий универсальный МФВВ за диском для  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с и  $Fr \leq 4$  в верхнем полупространстве над осью  $z$ . При  $T > 0$  периодически в течение каждой  $\Delta T = 0.5$  над точкой  $Q$  формируются левый  $k$  и правый  $-k$  каскады вихрей, состоящие из нитей  $f_k$  около  $Q$  и деформированных полуколец  $k$  и  $-k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$  (см. рис. 3б–4а и 5а–5б для  $k = 1$  и  $2$  соответственно). Для каждого нечетного  $k$  у оси  $z$  формируется вихревая петля  $-k$ , состоящая из нитей  $f_k$  и нижнего полукольца  $-k$ , на которое потом садится четный каскад  $(k + 1)$ . Далее головная часть петли  $-k$  становится деформированным кольцом. Таким образом, в течение каждой  $\Delta T = 1$  формируется новая внутренняя волна, состоящая из полуволн впадин  $k$  и гребня  $(k + 1)$ . Левая часть кольца  $-k$  становится осевой частью гребня  $(k + 1)$ . В результате осевые части гребней оказываются связанными друг с другом в цепочку нечетными нитями. Чтобы увидеть эту вихревую цепочку, нужно визуализировать только ту часть изоповерхности  $\beta = \beta_0$ , на которой  $\omega_\phi < 0$ . Такая визуализация получила наименование  $(\beta-)$  [22]. Для разных интервалов  $\Delta T = 1$  МФВВ имеет свои особенности, подробно описанные в настоящей работе. Существует небольшая зависимость МФВВ от  $Fr$ . Например, при  $0.8 < Fr \leq 4$  полуволны гребней формируются из четных нитей около  $Q$ , а не из полуколец над  $Q$  как при  $Fr \leq 0.5$ . При  $Fr = 0.8$  и  $T \geq 1$  все МФВВ для разных временных интервалов  $\Delta T = 1$  похожи на МФВВ при  $Fr = 0.3$  и  $T \geq 3$ .

Таким образом, в настоящей работе приведены детальное описание и результаты расчетно-теоретического анализа динамики формирования пространственных вихревых структур в линейно стратифицированной вязкой сплошной среде, создаваемых движущимися в горизонтальном направлении объектами в форме диска.

Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСП РАН).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shirayama S., Kuwahara K. Patterns of three-dimensional boundary layer separation // AIAA-87-0461, 1987.
2. Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69–94.
3. Johnson T.A., Patel V.C. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // J. Fluid Mech. 1999. V. 378. P. 19–70.
4. Матюшин П.В. Численное моделирование пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2003. 194 с.
5. Sakamoto H., Haniu H. A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow // Trans. ASME: J. Fluids Engng. 1990. V. 112. P. 386–392.
6. Гуцин В.А., Матюшин П.В. Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при  $200 < Re < 380$  // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 135–151.
7. Байдулов В.Г., Матюшин П.В., Чашечкин Ю.Д. Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 130–143.
8. Матюшин П.В. Эволюция течения, индуцированного диффузией на диске, погруженном в стратифицированную вязкую жидкость // Журнал “Математическое моделирование”. 2018. Т. 30. № 11. С. 44–58.
9. Lighthill J. Waves in Fluids. Cambridge: CUP, 1978. = Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
10. Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д. Трансформация висящих разрывов в вихревые системы в стратифицированном течении за цилиндром // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 1. С. 15–28.
11. Матюшин П.В. Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83–97.
12. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes // Comptes rendus de l’Académie des Sciences. 1877. V. 23. P. 1–680.
13. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
14. Матюшин П.В. Классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около диска // Научный журнал “Процессы в геосредах”. 2017. № 4 (13). С. 678–687.
15. Matyushin P.V. The vortex structures of the 3D separated stratified fluid flows around a sphere // Сборник докладов Международной конференции “Потоки и структуры в жидкостях” (Санкт-Петербург, 2–5 июля 2007 г.). С. 75–78.

16. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–63.
17. *Lin Q., Lindberg W.R., Boyer D.L., Fernando H.J.S.* Stratified flow past a sphere // J. Fluid Mech. 1992. V. 240. P. 315–354.
18. *Chomaz J.M., Bonneton P., Hopfinger E.J.* The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 1–21.
19. *Wang Y., Gao Y., Liu J., Liu C.* Explicit formula for the Liutex vector and physical meaning of vorticity based on the Liutex-Shear decomposition // Journal of Hydrodynamics. 2019. V. 31. № 3. P. 464–474.
20. *Zhou J., Adrian R.J., Balachandar S., Kendall T.M.* Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow // J. Fluid Mech. 1999. V. 387. P. 353–396.
21. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
22. *Матюшин П.В.* Вихревая структура, генерируемая равномерным движением диска в сильно стратифицированной вязкой жидкости // “Волны и вихри в сложных средах”: 12-я Международная конференция – школа молодых ученых; 01–03 декабря 2021 г.; Сборник материалов школы. М.: ООО “ИСПО-принт”, 2021. С. 160–162.

УДК 533.1

## ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ФАКЕЛА ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ ЛАМИНАРНЫХ ГАЗОВЫХ СТРУЙ

© 2023 г. В. В. Козлов<sup>а,\*</sup>, Ю. А. Литвиненко<sup>а</sup>, М. М. Катасонов<sup>а</sup>,  
Д. В. Сарычев<sup>а</sup>, А. Г. Шмаков<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск, Россия

\*E-mail: kozlov@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 27.12.2022 г.

После доработки 12.03.2023 г.

Принята к публикации 20.03.2023 г.

Представлены результаты исследований процесса взаимодействия двух соударяющихся осесимметричных ламинарных микроструй пропан/бутановой смеси при диффузионном горении и без горения. Истечение газовой смеси осуществлялось через круглые трубки с равными скоростями. В процессе эксперимента варьировалось поперечное положение трубок относительно друг друга с сохранением угла между ними. Выявлены особенности формирования результирующей струи в зависимости от поперечного положения трубок. Если трубки находятся в одной плоскости, то результирующая струя формируется в ортогональной к ней плоскости. Данный процесс наблюдается при взаимодействии горящих и не горящих струй. При увеличении скорости истечения струй обнаружена область локального разрыва фронта пламени.

**Ключевые слова:** соударение газовых микроструй, деформация факела, диффузионный факел, ламинарные струи

**DOI:** 10.31857/S1024708422601007, **EDN:** WKERLL

Решение целого ряда практических задач, связанных, в частности, с разработкой оптимальной конструкции тепло- и массообменных устройств, камер сгорания, топочных печей и т.п., требует изучения как химических, так и газодинамических процессов, протекающих в таких системах. Развитие струйных течений связано с возникновением различных типов гидродинамической неустойчивости. Так, например, для струй, сформированных в каналах с малым удлинением, характерно развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца варикозного или синусоидального типа с ранней турбулизацией. Для струй, сформированных каналами с большим удлинением, такая неустойчивость не реализуется, и струя имеет протяженный ламинарный участок [1]. Указанные особенности проявляются и при реализации соударяющихся струй. Использование соударяющихся струй позволяет, например, управлять скоростными параметрами результирующей струи [2–4], формировать форму факела, тем самым увеличивать полноту сгорания топлива. Особенность данных исследований состоит в том, что оси симметрии соударяющихся струй расположены под острым углом друг к другу, а поперечное положение сопел изменяется от полного перекрытия струй, когда оси симметрии находятся в одной плоскости, до полного расхождения струй, когда сопла разведены в поперечном направлении. Аналитическое описание столь сложной экспериментальной постановки создает значительные трудности и в настоящее время вряд ли может быть проведено известными методами. В этой связи экспериментальные исследования газодинамической структуры течения соударяющихся струй, в том числе и при наличии процессов диффузионного горения, вызывают большой интерес и несомненно актуальны. Цель данного экспериментального исследования состоит в определении структуры результирующей газовой струи при столкновении двух струй с различной степенью перекрытия, без горения и при диффузионном горении газа.

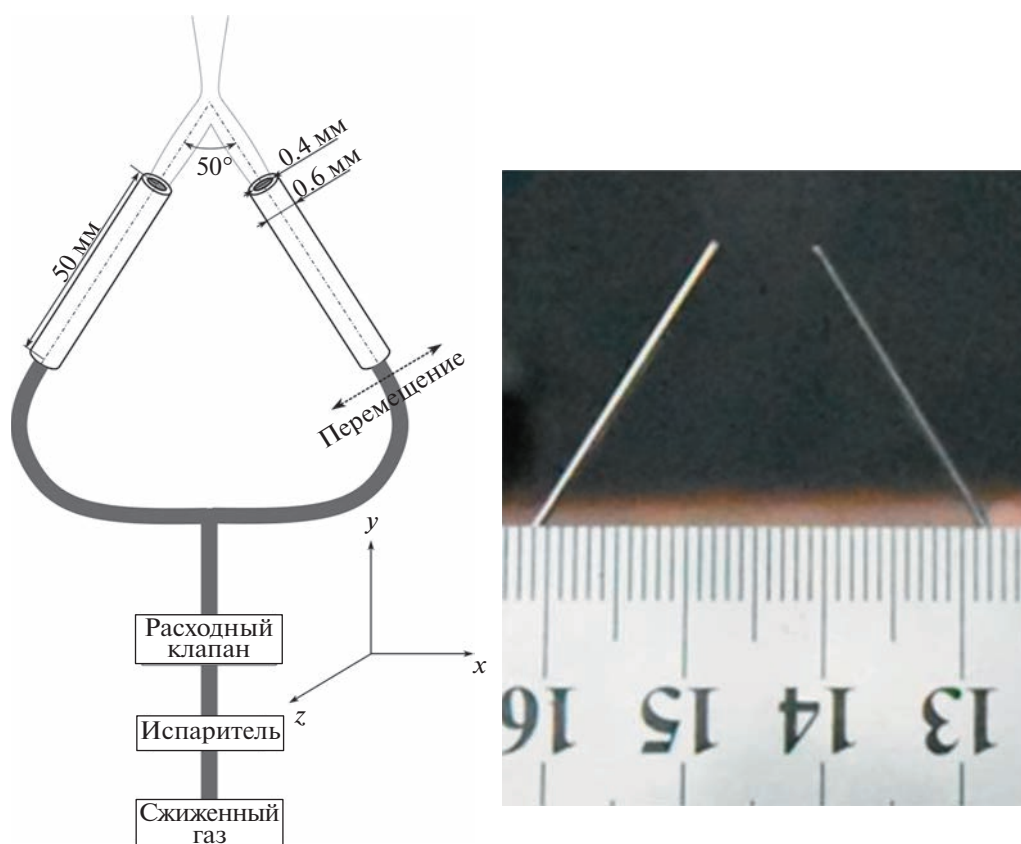


Рис. 1. Схема струйной установки и расположение трубок.

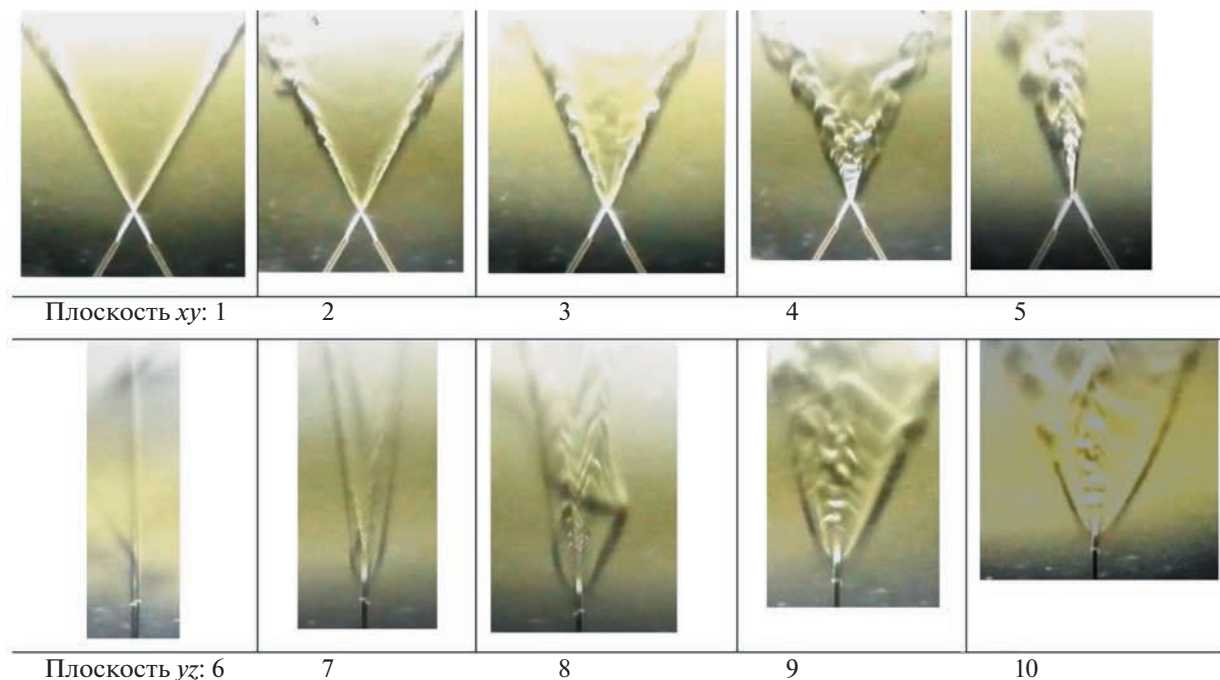
### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА

Эксперименты проводились на струйной установке в Институте теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН.

Установка состояла из двух идентичных цилиндрических трубок длиной 50 мм и внутренним диаметром 0.4 мм, расположенных под углом  $50^\circ$  между осями симметрии трубок. Расстояние между срезами трубок 7 мм. Схема установки представлена на рис. 1. В качестве газа использовалась пропан/бутановая смесь в процентном соотношении 70/30. Сжиженный газ подавался из баллона через испаритель на редуктор GCE DINOX 03-10, затем на регулятор массового расхода MKS MASS FLOW, после чего разделялся тройником на две трассы, подводящие газ к трубкам. Управление регулятором массового расхода осуществлялось через двухканальный модуль MKS PR4000B. Расход газа контролировался с точностью  $\pm 0.7\%$ . Перед регулятором массового расхода создавалось избыточное давление. Истечение осуществлялось в воздушное пространство при  $20^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении.

Поджог осуществлялся без предварительного смешения, таким образом реализовывался диффузионный режим горения. Расход газа через каждую трубку соответствовал  $\frac{1}{2}$  устанавливаемого расхода на регуляторе и был равен  $1.0 \times 10^{-7} \text{ м}^3/\text{с}$ . Учитывая диаметр трубки 400 мкм, расчетная скорость газа, истекающего через каждую трубку  $U_1 = U_2 = 0.39 \text{ м/с}$ , что соответствовало числу  $Re_{\text{пропан}} = 42$ . При данном числе Рейнольдса режим горения факела являлся ламинарным, при увеличении скорости истечения до  $U \geq 0.53 \text{ м/с}$  ( $Re \geq 55$ ) режим горения становился турбулентным, пламя отрывалось от среза сопел, реализовывался так называемый поднятый факел. Точка поджога или стабилизации факела соответствовала области пересечения двух струй.

Регистрация процесса горения осуществлялась на цифровую камеру Nikon D7500 с объективом AF-S NIKKOR 18-105mm, в том числе с использованием теневого метода на базе прибора ИАБ-461. Измерение температуры факелов производилось с использованием платина-платинородиевой термопары S-типа с толщиной нити 50 мкм. Поскольку процесс диффузионного горения пропан/бутановой смеси связан с образованием твердых частиц сажи, в качестве регистра-

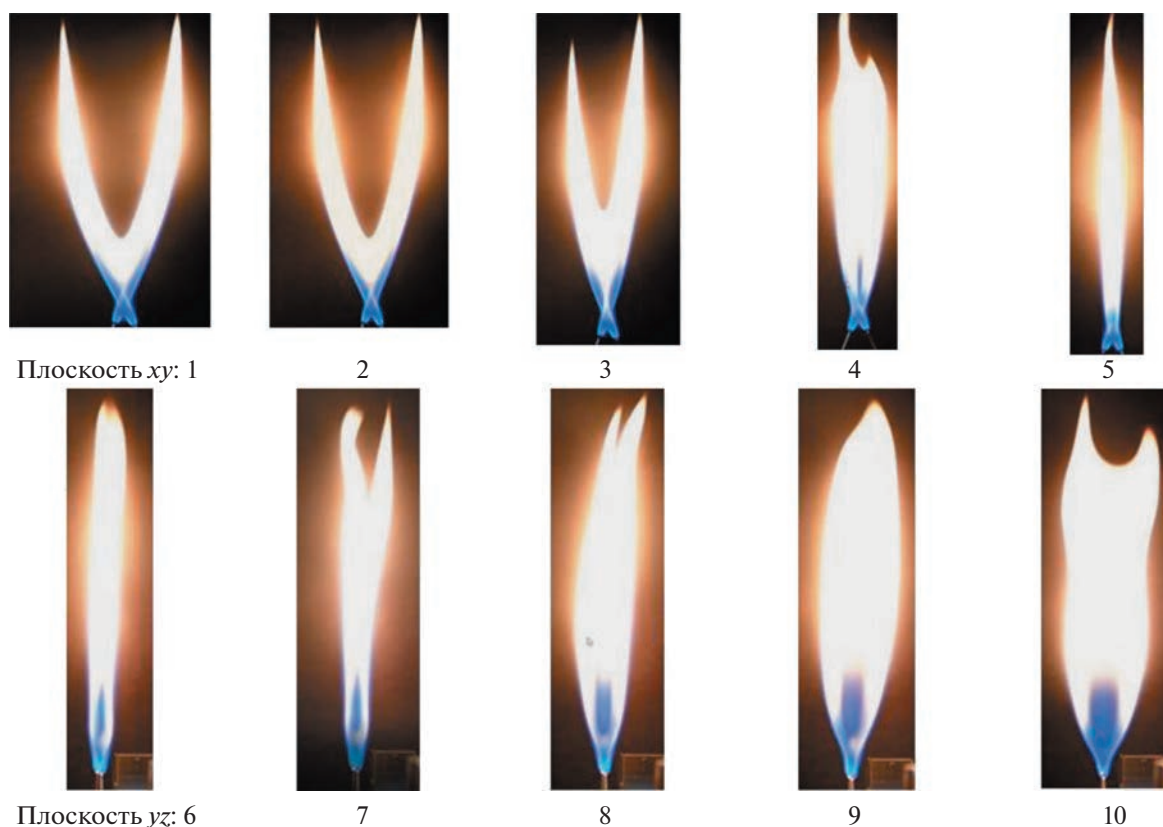


**Рис. 2.** Теневые фотографии сталкивающихся ламинарных газовых струй при различной степени перекрытия, в плоскости  $xy$  (1–5) и  $yz$  (6–10): 1, 6 – без перекрытия; 2, 7 – перекрытие  $\sim 20\%$ ; 3, 8 – перекрытие  $\sim 50\%$ ; 4, 9 – перекрытие  $\sim 75\%$ ; 5, 10 – перекрытие  $\sim 100\%$ ;  $U_1 = U_2 = 0.39$  м/с,  $Re_{\text{пропан}} = 42$ .

тора полей концентрации сажи использовался инфракрасный тепловизор RGK TL-80. Частота обновления кадров 50 Гц, микроболометр  $80 \times 80$  пикселей, регистрация данных производилась на microSD-карту. Полученные с его помощью тепловизионные картины факелов сопоставлялись с данными по температуре, полученными термопарой в определенных областях факела. Таким образом, оттенки цветовой гаммы соответствовали определенной температуре.

На рис. 2 представлены теневые фотографии развития двух сталкивающихся струй газа без поджога с различной степенью перекрытия. Фото 1 и 6 на рис. 2 соответствуют одному положению трубок, представленному в плоскости  $xy$  и  $yz$ , соответственно, при котором струи не взаимодействуют. Следующая пара фото 2 и 7 рис. 2 выполнена в тех же плоскостях, при этом перекрытие струй составляет  $\sim 20\%$  площади сечения каждой трубки. Далее представлены фотографии с перекрытием 50%, 75% и 100%. По мере сближения трубок от положения без взаимодействия струй к положению с полным перекрытием при расположении трубок в одной плоскости наблюдается изменение структуры результирующей струи. Частичное перекрытие сталкивающихся струй формирует струю, отклоняющуюся от начальной плоскости развития, происходит поворот результирующей струи. Фото 5, 10 рис. 2 демонстрируют истечение струй с полным перекрытием.

В результате реализуется разворот результирующей струи в плоскость, ортогональную по отношению к начальной плоскости развития струй. В центральной части результирующей струи отмечается развитие периодического колебательного процесса, его можно наблюдать на фото, выполненных в плоскости  $yz$ . По мере нарастания площади перекрытия струй частота понижается. На рис. 3 показан сценарий развития сталкивающихся газовых струй при диффузионном горении при различной степени перекрытия. Как и выше, пары фотографий 1–6, 2–7, 3–8 и т.д. иллюстрируют факелы в двух плоскостях  $xy$  и  $yz$  при различной степени перекрытия. По мере нарастания степени перекрытия наблюдается слияние факелов с формированием ортогонального факела в плоскости  $yz$ . Подобные явления характерны при истечении сталкивающихся жидких струй с формированием нескольких ортогональных плоскостей [5]. В случае без горения струи газа развиваются прямолинейно и имеют большую протяженность ламинарного участка, также отмечается развитие неоднородностей в виде волн неустойчивости. При наличии горения происходит деформация факелов под действием конвективных сил в поле тяжести земли. Оба факела имеют саблеобразную форму.

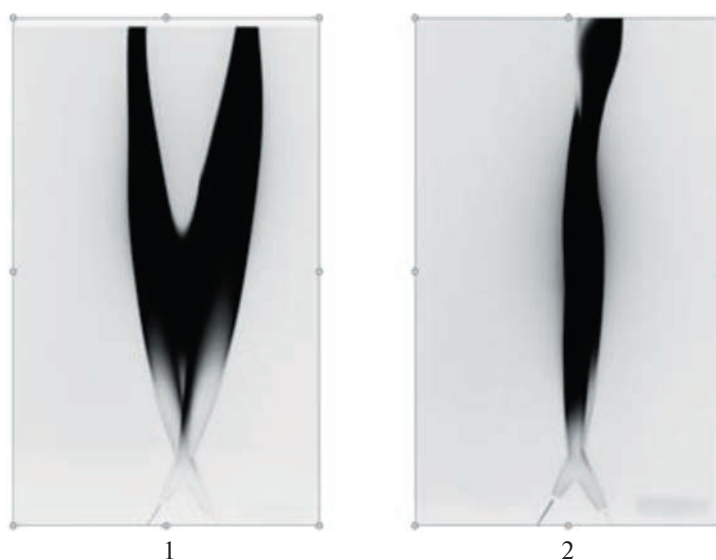


**Рис. 3.** Визуализация ламинарного диффузионного пламени сталкивающихся газовых струй при различной степени перекрытия, в плоскости  $xy$  (1–5) и  $yz$  (6–10): 1, 6 – без перекрытия; 2, 7 – перекрытие  $\sim 20\%$ ; 3, 8 – перекрытие  $\sim 50\%$ ; 4, 9 – перекрытие  $\sim 75\%$ ; 5, 10 – перекрытие  $\sim 100\%$ ;  $U_1 = U_2 = 0.39$  м/с,  $Re_{\text{пропан}} = 42$ .

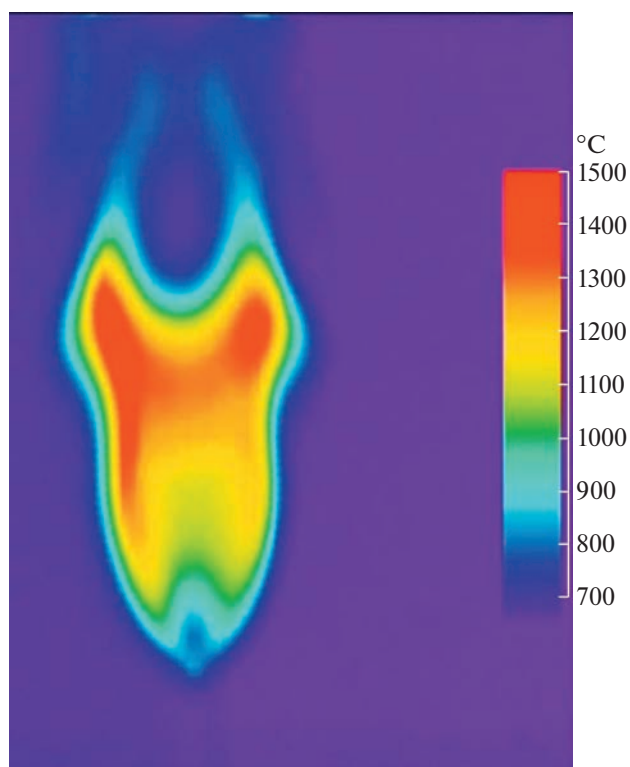
На фото 1, 2 рис. 4 сравниваются факелы при различной степени перекрытия. Факелы представлены в виде обращенного цвета в оттенках серого. Так, при перекрытии струй до 50% в плоскости  $xy$  (фото 1) наблюдаются два факела, что свидетельствует о том, что зона взаимного торможения встречных струй незначительна и деформации факелов практически не наблюдается. На фото 2 картина существенно изменилась – при перекрытии более 75% происходит слияние факелов в области торможения струй, где и стабилизируется процесс горения. Выше этой зоны развивается факел в ортогональной плоскости по отношению к плоскости расположения сопел. Такой режим горения способствует ряду преимуществ, например, повышению диапазона устойчивости процесса горения, увеличению теплонапряженности, интенсификации передачи тепла в камерах сгорания.

Как упоминалось выше, для получения осредненной картины распределения температуры факела использовались термопара и тепловизор. Как известно, диффузионное горение углеводородных топлив происходит с образованием твердых частиц сажи, воды и т.д., в результате излучения такого факела в инфракрасном диапазоне наблюдается сложная термическая картина рис. 5. В нашем случае тепловизор не дает полноценной температурной картины, поскольку предназначен для измерения температуры твердых тел. Измерение температуры производилось сканированием факела термопарой, после чего сопоставлялись тепловизионная картина и показания термопары. Такой подход позволил получить термическую картину факела с распределением температурных зон. Режим горения в данном случае является ламинарным.

При увеличении расхода газа картина горения меняется. На рис. 6 представлена серия снимков, демонстрирующих процесс перестроения факела, формирующегося из двух присоединенных факелов в поднятый факел с увеличением скорости от  $U = 0.46$  м/с на фото 1, до  $U = 0.53$  м/с на фото 5–6 рис. 6. При этом в пламени наблюдаются периодические кольцеобразные разрывы фронта пламени. Развитие такого разрыва показано на фото 2–4 рис. 6. (показано стрелкой). Процесс развития разрыва сопровождается генерацией акустических колебаний. При увеличе-

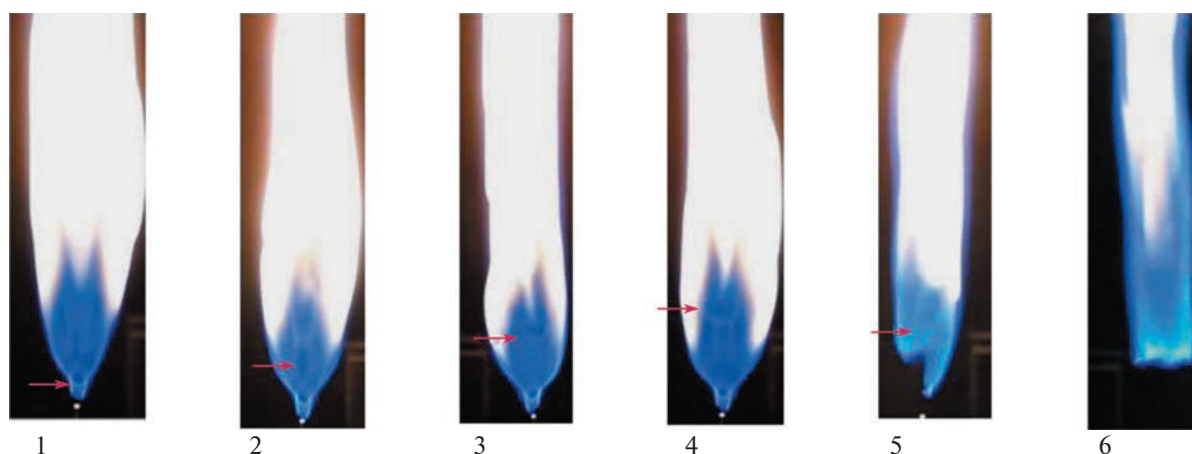


**Рис. 4.** Визуализация ламинарного диффузионного пламени сталкивающихся газовых струй при различной степени перекрытия, в плоскости  $xu$ : 1, 2 – перекрытие 50 и 100%;  $U_1 = U_2 = 0.39$  м/с,  $Re_{\text{пропан}} = 42$ .



**Рис. 5.** Тепловизионное изображение диффузионного факела сталкивающихся газовых струй при полном перекрытии, в плоскости  $uz$ .  $Re_{\text{пропан}} = 48$ .

нии скорости до  $U = 0.53$  м/с происходит турбулизация струй со стабилизацией единого факела на уровне точки пересечения струй фото 5–6 рис. 6. При этом явление разрыва факела исчезает. По-видимому, развитие разрыва связано с относительно высокими градиентами скорости пересекающихся струй и вихревым взаимодействием внутри факела. Например, в [6] представлен случай диффузионного горения одиночной газовой микроструи, взаимодействующей с преградой и



**Рис. 6.** Визуализация ламинарного диффузионного пламени сталкивающихся газовых струй при полном перекрытии в плоскости  $yz$  с ростом скорости истечения,  $U_1 = U_2$ : 1 –  $U = 0.46$  м/с ( $Q = 1.16 \times 10^{-7}$  м<sup>3</sup>/с); 2–4 –  $U = 0.5$  м/с ( $Q = 1.25 \times 10^{-7}$  м<sup>3</sup>/с); 5, 6 –  $U = 0.53$  м/с ( $Q = 1.33 \times 10^{-7}$  м<sup>3</sup>/с).

на начальном этапе показано, что процесс горения протекает кольцеобразно. Отмечается также возможность управления периодическим акустическим воздействием развитием такого пламени. Можно предположить, что в нашем случае два факела на начальном этапе также имеют кольцеобразную структуру и дальнейшее их взаимодействие приводит к образованию вышеупомянутых разрывов. Возможность акустического управления такой структурой на данном этапе не исследовалась.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований взаимодействия двух микроструй пропан/бутана, включая процесс диффузионного горения, установлено следующее.

При истечении с 100% перекрытием газовых микроструй происходит формирование ортогонального к плоскости микроструй результирующего факела. При отсутствии горения формирование результирующей газовой струи происходит аналогично, в ортогональной плоскости.

Установлено, что форма факела и во многом процесс диффузионного горения двух сталкивающихся газовых микроструй определяются гидродинамическими свойствами струйных течений.

В результате взаимодействия двух микроструй с 100% перекрытием реализуется плоский ортогональный факел большой относительной ширины, поле температур свидетельствует о наличии обширной высокотемпературной зоны в таком факеле.

Подготовка статьи поддержана грантом Российского научного фонда № 22-19-00151, <https://rscf.ru/project/22-19-00151/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грек Г.Р., Козлов В.В., Литвиненко Ю.А. Устойчивость дозвуковых струйных течений и горение: Учеб. пособ. 2-е изд., перераб. и доп. // Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2013. 240 с.
2. Кулумбаев Э.Б., Никуличева Т.Б. Взаимодействие плазменных струй в двухструйной электрической дуге // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 4. С. 483–490.
3. Laurendeau E., Jordan P., Bonnet J.P., Delville J., Parnaudeau P., and Lamballais E. Subsonic jet noise reduction by fluidic control: The interaction region and the global effect // Phys. Fluids. 2008. V. 20. P. 101519.
4. Жилкин Б.П., Зайков Н.С., Кисельников А.Ю., Худяков П.Ю. Особенности изменения термической структуры газовых импактных струй // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 2. С. 104–111.
5. Navish Wadhwa and Sunghwan Jung Non-coalescence of jets // Phys. Fluids. 2011. V. 23. P. 091105.

УДК 533.533.9

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА С ОБЛАСТЬЮ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫМ РАЗРЯДОМ

© 2023 г. К. Н. Корнев<sup>a,\*</sup>, А. А. Логунов<sup>a,\*\*</sup>, В. М. Шибков<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Москва, Россия

\*e-mail: [singuliarnost@yandex.ru](mailto:singuliarnost@yandex.ru)

\*\*e-mail: [logunov\\_aa@physics.msu.ru](mailto:logunov_aa@physics.msu.ru)

\*\*\*e-mail: [valshibmsu@gmail.com](mailto:valshibmsu@gmail.com)

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.

После доработки 08.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

Проведено численное моделирование сверхзвукового стационарного воздушного потока внутри расширяющегося аэродинамического канала с прямоугольным сечением — лабораторной модели прямоточного воздушно-реактивного двигателя. С помощью экспериментальных данных была проведена валидация аэродинамической модели в случае отсутствия зоны объемного тепловыделения. После валидации модели было проведено численное моделирование сверхзвукового потока с включенной зоной объемного тепловыделения. Получены трехмерные распределения скорости, температуры и давления в сверхзвуковом стационарном воздушном потоке. Показано, что при объемной плотности тепловой мощности источника эквивалентной средней общей мощности разряда  $W = 10$  кВт разряд нагревает газ до температуры  $T = 1700\text{--}4200$  К, что приводит к ускорению потока без его теплового заклинивания. При плотности тепловой мощности источника эквивалентной средней общей мощности разряда  $W = 20$  кВт газ нагревается сильнее до 6700 К, но начинается локальное тепловое заклинивание потока.

**Ключевые слова:** CFD-моделирование, сверхзвуковой воздушный поток, тепловыделение в газе, поперечно-продольный разряд

**DOI:** 10.31857/S1024708422601020, **EDN:** WKJDZT

### ВВЕДЕНИЕ

Исследования разрядов в сверхзвуковом потоке газа вызывают в последние годы большой интерес в связи с проблемой создания равновесных или неравновесных плазменных сред для модификации пограничного слоя, воздействия на течение с целью понижения лобового сопротивления, а также для воспламенения горючей смеси в сверхзвуковом потоке [1]. В работе Г.Г. Черного, В.А. Левина и др. [2] дано теоретическое обоснование возможности влияния на аэродинамику сверхзвуковых летательных средств с помощью локальных зон энерговыделения.

Существует огромное число разновидностей газовых разрядов, которые возможно использовать для плазменно-стимулированного горения. Например, изучается возможность применения высоковольтных разрядов с длительностью импульсов в наносекундном диапазоне [3], а также других разрядов, отличающихся геометрией электродов или наличием диэлектрических вставок, таких как диэлектрический барьерный разряд (DBD), на основе которого конструируются и изучаются различные плазменные актуаторы для модификации течения приповерхностных слоев газа и создания микротяги [4]. В [5, 6] исследуются скользящие по диэлектрической поверхности электродные разряды типа “плазменный лист”. Приведены результаты экспериментов по определению структуры плазменного слоя скользящего разряда в неподвижном воздухе и в однородном потоке за плоской ударной волной. Для стабилизации горения топливно-воздушных смесей в сверхзвуковом потоке предлагается использовать, например, продольно-поперечный разряд [7–11] или свободно-локализованный СВЧ-разряд [12–14]. Был изучен поверхностный СВЧ-разряд [15–19], который создается поверхностной волной на диэлектрической антенне, обтекаемой сверхзвуковым потоком воздуха. Воспламенение с помощью СВЧ-разряда происходит эф-

фективно, но оборудование для его генерации достаточно громоздко, необходима защита экипажа летательного аппарата и бортовой электроники от воздействия СВЧ-излучения.

В статьях [7–10] приведено подробное экспериментальное исследование продольно-поперечного разряда в высокоскоростном воздушном потоке и показано, что в этих условиях реализуется сильноточный дуговой периодический разряд характерной формы. В работах [20, 21] представлены зависимости частоты пульсации продольно-поперечного разряда от скорости воздушного и пропан-воздушного потоков, от разрядного тока и эквивалентного отношения для пропана, а также выявлены основные зависимости длины плазменного канала, максимальное достигаемое напряжение на разряде и средняя по длине канала напряженность электрического поля, частота пульсаций от минимального межэлектродного расстояния.

В отличие от эксперимента, компьютерное моделирование может предоставить полное трехмерное распределение таких свойств потока, как скорость, давление и температура. Именно поэтому моделирование в области плазменного горения является крайне актуальной задачей. Моделирование электрического разряда в газовом потоке уже проводилось ранее с использованием различных электродинамических моделей. Работа [22] посвящена исследованию характеристик разряда постоянного тока в поперечном потоке газа. Результаты численного моделирования сопоставлены с экспериментом. Показано, что в зависимости от скорости течения газа разряд может существовать в нескольких формах. При определенных условиях разряд переходит в импульсно-периодическую форму, когда формирование структуры из катодного и анодного плазменных следов прерывается новым пробоем газа. В [23–25] было проведено двумерное моделирование сечения разряда, который движется под воздействием постоянного магнитного поля. Скорость разряда, его полный ток и распределение в плоскости моделирования сравнивались с экспериментальными данными.

Продольно-поперечный разряд, исследуемый в [7–10], является достаточно сложной нестационарной системой. Основными целями данной работы являются моделирование влияния простой модели продольно-поперечного разряда и создающих его электродов на сверхзвуковой воздушный поток в типичных условиях эксперимента и определение характерных достигаемых температур газа. Изложенный ниже в статье подход учитывает в основном влияние средней величины выделяемой в воздушный поток тепловой мощности, и стоит отметить, что он не может описать эффекты, возникающие из-за нестационарности и сильной контрагированности дугового разряда.

## 1. ПАРАМЕТРЫ РАСЕТНОЙ МОДЕЛИ

Расчеты проводились в ПО ANSYS Fluent, позволяющем выполнять решение уравнений Навье–Стокса, усредненных по числу Рейнольдса (RANS) для 2D, 3D осесимметричных и 3D стационарных и нестационарных моделей.

Расчетная область (см. рис. 1) состояла из соответствующих экспериментам [7–10] сопла Лавала длиной 120 мм и расширяющегося аэродинамического канала длиной 500 мм прямоугольного сечения. Профиль сопла был снят с реально существующего, рассчитанного на число Маха  $M = 2$ . На входном сечении сопла площадью  $11.5 \times 11.5 \text{ мм}^2$  ставилось граничное условие фиксированной статической температуры 300 К и фиксированного статического давления  $p_{in}$  (в диапазоне 100–500 кПа), так как это значение измерялось в эксперименте и задавало массовый расход воздуха через сопло. На выходном сечении аэродинамического канала ( $30 \times 30 \text{ мм}^2$ ) ставилось граничное условие фиксированного давления  $p_{out}$  (в диапазоне 10–100 кПа), соответствующего давлению в откачиваемой барокамере, служащей в эксперименте откачиваемой буферной емкостью и приемником отработанных газов. Две примыкающие друг к другу боковые поверхности сопла и канала, пересекающиеся на оси, были выставлены с условием симметрии. Так как у любого поперечного прямоугольного сечения экспериментального аэродинамического канала есть 2 оси симметрии, можно проводить моделирование только в четверти объема модели, экономя вычислительные ресурсы. В одной из двух плоскостей симметрии модели расположены электроды. Остальные поверхности модели (в том числе поверхности электродов) были заданы как стенки с условием без проскальзывания.

Форма электрода также соответствовала проведенным ранее экспериментам (длина 70 мм, минимальное расстояние от оси 1 мм, максимальное — 10 мм, ромбическое сечение). Второй электрод учитывается моделью из-за условия симметрии на двух боковых поверхностях. Электрод отстоит на 110 мм от выходного сечения сопла Лавала. Неподвижная область тепловыделения объемом  $2 \times 1 \times 9 \text{ мм}^3$ , имитирующая продольно-поперечный разряд, расположена у конца

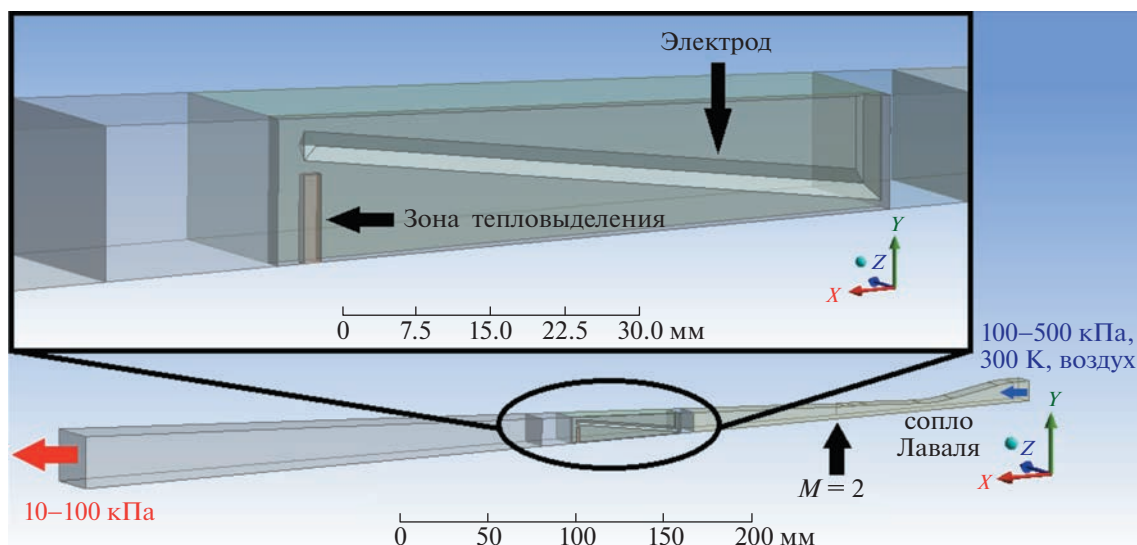


Рис. 1. Геометрия расчетной области.

электрода. При данном подходе однако не учитывается движение разряда при его сносе вниз по потоку и изменение формы при его развитии.

Расчетная область была разбита на несколько доменов с размером ячейки от 0.25 мм вблизи электродов до 2.5 мм у входного и выходного сечений модели. Разбиение расчетной области на домены позволило обеспечить не менее 10 узлов на каждом ребре геометрической модели канала, в том числе на сечениях электрода миллиметровых размеров. Примененные при построении сетки встроенные программные методы позволили создать правильную ориентированную сетку со сгущением у пограничных слоев на стенках. Общее число ячеек сетки составило 2 млн, степень сгущения (отношение характерных линейных размеров элементов в глубине потока и у стенок) равно 5, характерное число узлов в поперечном потоку сечении канала 10000, характерное число узлов вдоль оси канала 1000. Во всех доменах, кроме содержащего поверхности электрода, использовались ориентированные ячейки-параллелепипеды. Сложная форма электрода с наличием большого числа не прямых углов не позволила применить такие же ячейки, вместо них использовались тетраэдрические.

В расчете использовались модели вязкости *Spalart-Allmaras* и *standart k-ε*, дававшие качественно одинаковую картину течения воздуха, а также выбран стационарный режим.

Термодинамические и транспортные свойства воздуха (теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$ , коэффициенты теплопроводности  $k$  и динамической вязкости  $\eta$ ) в широком диапазоне температур до 24000 К были взяты из [26]. Их зависимости в этом диапазоне имеют крайне нелинейный характер, обусловленный, например, такими процессами как однократная и многократная ионизация, диссоциация азота, кислорода воздуха и других составляющих его газов.

## 2. ВАЛИДАЦИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Были проведены расчеты стационарного течения воздуха в модели в зависимости от входного и выходного давлений и без зоны тепловыделения. Правильность всех размеров и параметров модели определялась при сравнении расчетных зависимостей массового расхода воздуха, генерируемой моделью тяги и давлению на стенку от давления на входе в сопло с полученными экспериментально (рис. 2).

В эксперименте калибровка массового секундного расхода воздуха проводилась путем измерения начальных давлений в барокамере и ресивере высокого давления воздуха. Зная время пуска и отношение объемов барокамеры ( $V = 2.61 \text{ м}^3$ ) и ресивера ( $V_r = 0.561 \text{ м}^3$ ) возможно вычислить массовый расход воздуха в зависимости от давления в ресивере. В эксперименте измерялась сила, с которой давит подвижно закрепленный (подвешенный) аэродинамический расширяющийся канал установки на неподвижную ее часть, с помощью тензорезистивного датчика. Датчик и канал закреплялись таким образом, что измерялось только осевое усилие. В программе

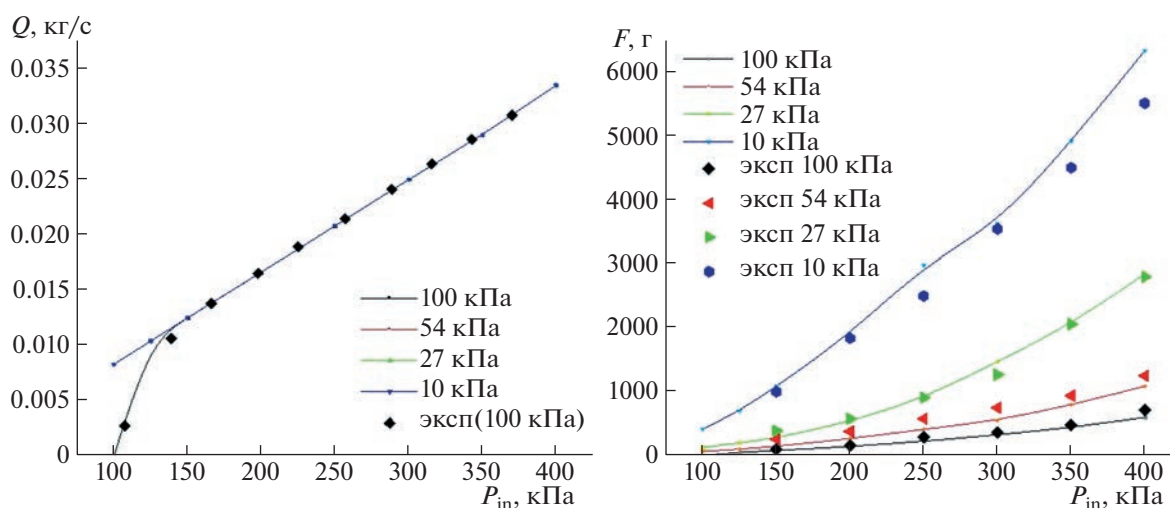


Рис. 2. Зависимости массового расхода воздуха  $Q$  и силы тяги  $F$  от давления на входе в сопло  $p_{in}$ . Точки — экспериментальные значения, линии — результат моделирования.

рассчитывались с помощью встроенного инструмента величины массового среднего осевой проекции скорости потока на входном и выходном сечении аэродинамической модели. Среднее необходимо было рассчитывать из-за неоднородного профиля скорости потока в сечениях, особенно при наличии обратных течений. С учетом известного массового расхода воздуха  $Q$ , сила тяги вычислялась как произведение расхода  $Q$  на разность массовых средних осевых проекций скорости потока на входном и выходном сечении модели. Статические давления на стенку аэродинамического канала измерялись с помощью трех предварительно откалиброванных датчиков, вмонтированных в различных точках канала (первый на расстоянии 4 см от входного сечения канала, второй — 20 см, третий — 45 см, т.е. в 5 см от выходного сечения).

Хорошее совпадение зависимости массового расхода воздуха говорит о правильно построенном профиле сопла Лавалья, выбранных площадей критического, входного и выходного сечений модели. При давлении на выходном сечении  $p_{out} = 100$  кПа и низких давлениях на входе в сопло  $p_{in} < 150$  кПа в критическом его сечении не достигается скорости звука и осуществляется дозвуковой режим протекания воздуха в сопле. Зависимость массового расхода воздуха  $Q$  при этом отклоняется от прямой. Существенная тяга  $F$  до 5 кгс наблюдается только при давлении  $p_{out} < 27$  кПа, которое обеспечивает правильный режим работы расширяющегося канала. Рост тяги с увеличением давления на входе вызван увеличением массового расхода воздуха. Характер зависимостей статического давления на стенку  $p$  при давлении  $p_{out} = 740$  Торр говорит о дозвуковом течении воздуха в аэродинамическом канале модели (рис. 3).

При высоком давлении на выходе ( $p_{out} > 250$  Торр) в некотором сечении канала происходит отрыв течения от стенок с последующим образованием системы ударных волн, зон рециркуляции и торможением потока до дозвуковых скоростей, что говорит о перерасширенном для этого режима выходном сечении канала. При давлении  $p_{out} < 100$  Торр отрыв происходит только в последних 5 см канала (обратное течение занимает 25% площади выходного сечения), а практически весь канал заполнен сверхзвуковым потоком воздуха с  $M = 2\text{--}3.5$  (рис. 4). Массовое среднее осевой проекции скорости по площади выходного сечения  $\langle v_{out} \rangle$  составило 440 м/с с учетом обратного течения. Наблюдается падение на стенку косога скачка уплотнения от передней кромки электрода с последующим отражением от нее. В месте падения происходит отрыв пограничного слоя, а затем его присоединение [27]. Поток ускоряется после сопла из-за расширения канала до характерных скоростей  $u = 580\text{--}640$  м/с при значениях его статической температуры  $T = 85\text{--}120$  К. При таких условиях воспламенение и поддержание горения топлив без дополнительных мер (разряд или застойные зоны) невозможны.

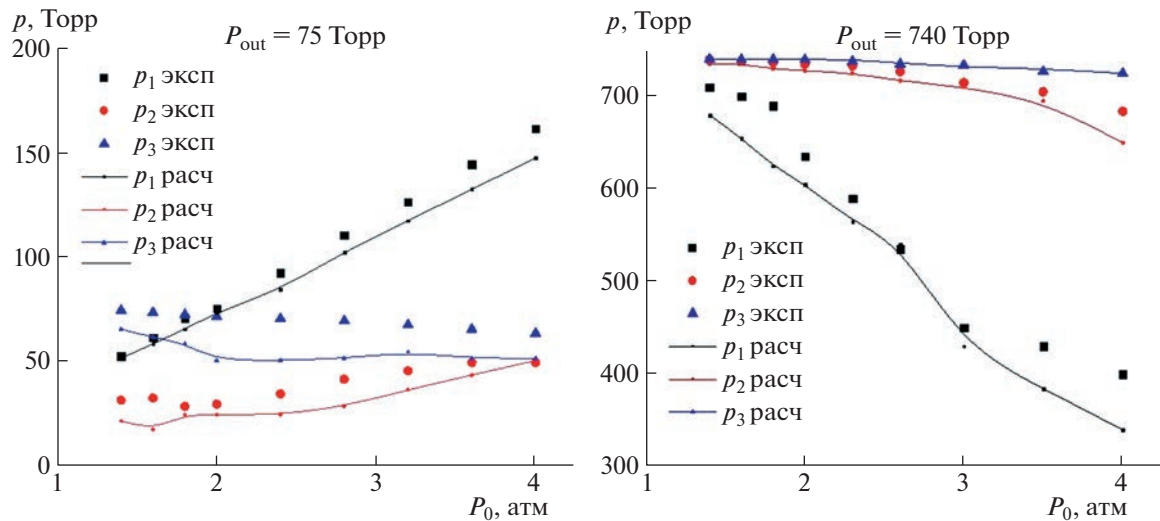


Рис. 3. Зависимости статического давления на стенку  $p$  от давления на входе в сопло  $p_{in}$  при различных давлениях  $p_{out}$ . Точки – экспериментальные значения, линии – результат моделирования.

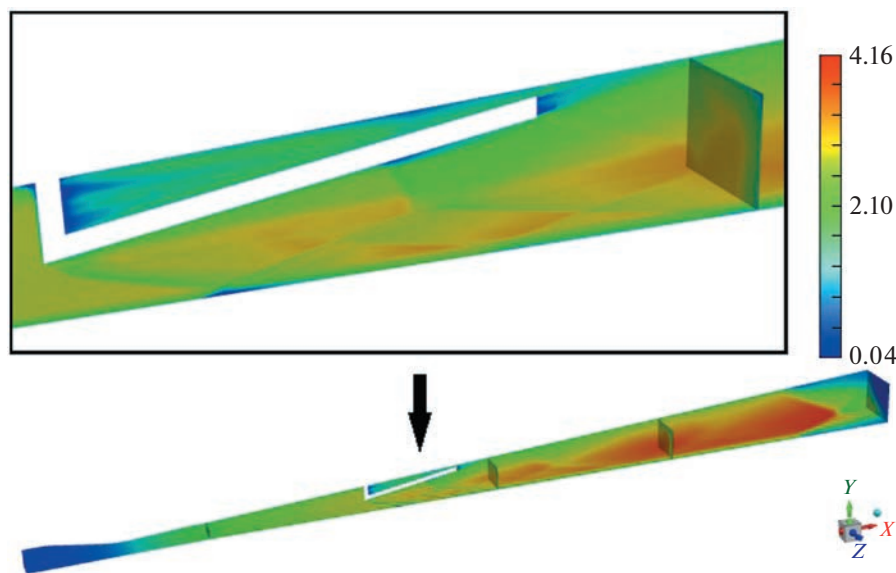
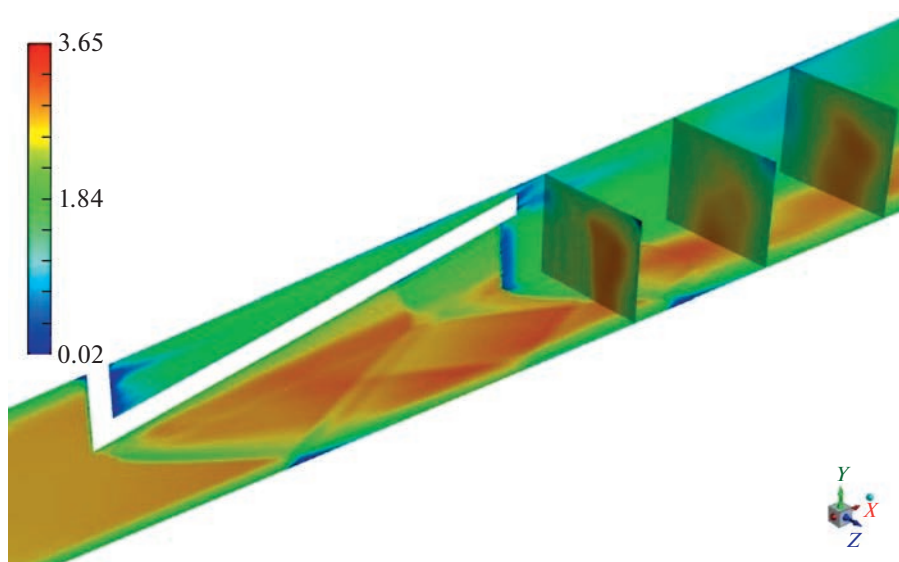


Рис. 4. Контур числа Маха в потоке на плоскостях симметрии модели (пересекаются на центральной оси) и пяти поперечных сечениях.  $p_{in} = 400$  кПа,  $p_{out} = 10$  кПа, зона тепловыделения неактивна.

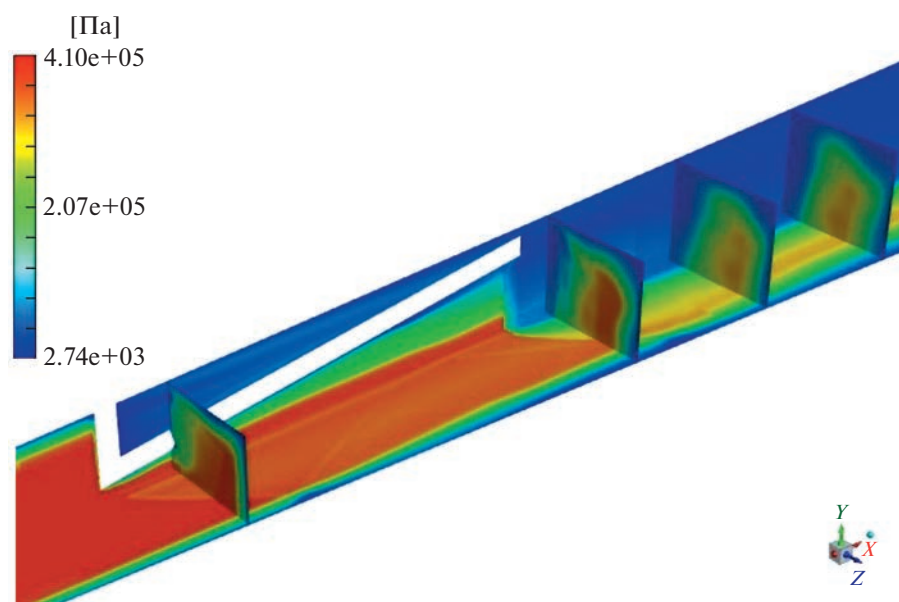
### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЯ

Были проведены расчеты течения воздуха в модели при включенном источнике тепловой плотности мощности  $w = 0.7\text{--}2.8 \times 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup>, соответствующей суммарной мощности  $W = 5\text{--}20$  кВт в зоне выделения тепла объемом 72 мм<sup>3</sup>, выделяемой продольно-поперечным разрядом в типичных экспериментальных условиях. Давление на входе и выходе модели 400 и 10 кПа соответственно.

Так как область тепловыделения неподвижна, газ нагревается только в малой области поперечного сечения канала шириной около 2–3 диаметров разряда и выносится потоком вниз на 10–20 см от конца электродов. При плотности тепловой мощности источника  $w = 1.4 \times 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup> (эквивалентной средней общей мощности разряда  $W = 10$  кВт) в центральной части потока газ, проходя область тепловыделения, нагревается до температур  $T = 1700\text{--}2500$  К, хотя вблизи конца электрода, где скорость потока снижена, газ нагревается до более высокой температуры  $T$  поряд-



**Рис. 5.** Контуры числа Маха в потоке на плоскостях симметрии модели (пересекаются на центральной оси) и трех поперечных сечениях. Источник объемного тепловыделения активен ( $W = 10$  кВт).  $p_{in} = 400$  кПа,  $p_{out} = 10$  кПа.

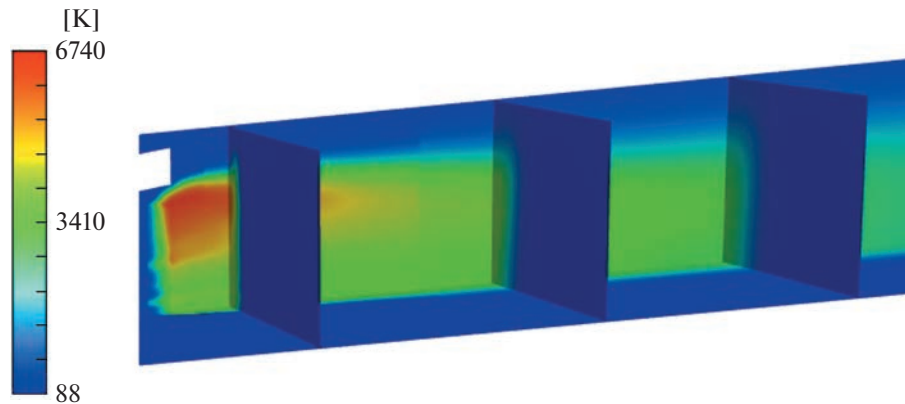


**Рис. 6.** Контуры полного давления  $p_0$  в потоке на плоскостях симметрии модели (пересекаются на центральной оси) и четырех поперечных сечениях. Источник объемного тепловыделения активен ( $W = 10$  кВт).  $p_{in} = 400$  кПа,  $p_{out} = 10$  кПа.

ка 3500–4200 К. В этих областях может происходить быстрое воспламенение топливно-воздушной смеси при ее подаче в аэродинамический канал.

Несмотря на снижение из-за повышения температуры и потерь на ударных волнах в нагретой разрядом области газа числа Маха с 2–3 до 1.1–1.8 (см. рис. 5) величина скорости потока  $u$  в ней возрастает с 600 м/с до 1000–1800 м/с и тепловое запыление потока при данной плотности тепловой мощности источника не происходит. Около выходного сечения модели по-прежнему наблюдаются отрыв от стенки и рециркуляция, обратное течение занимает 20% его площади. Массовое среднее осевой проекции скорости по площади выходного сечения  $\langle v_{out} \rangle$  составило 460 м/с с учетом обратного течения.

Наблюдаются значительные потери полного давления  $p_0$  в потоке в основном в трех местах: на стенках канала, на ударной волне от электрода и на области тепловыделения (см. рис. 6). По-



**Рис. 7.** Контуры статической температуры в потоке на плоскостях симметрии модели (пересекаются на центральной оси) и трех поперечных сечениях. Источник объемного тепловыделения активен ( $W = 20$  кВт).  $p_{in} = 400$  кПа,  $p_{out} = 10$  кПа.

сле ударной волны полное давление  $p_0$  падает с 400 до 320 кПа (снижение на 20%), а после зоны объемного нагрева падает с 320 до 80–100 кПа. Стоит отметить, что в частях поперечного сечения, далеко отстоящих от стенок и разрядной области, сохраняется высокое значение давления около 320 кПа, т.е. поток остается сравнительно слабо возмущен.

При плотности тепловой мощности источника  $w = 2.8 \times 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup> (эквивалентной средней общей мощности разряда  $W = 20$  кВт) газ нагревается сильнее, достигая температур до 6700 К, типичных для воздушного дугового разряда атмосферного давления (рис. 7). Стоит отметить, что в реальных условиях свободного токопроводящего канала разряда может происходить больший нагрев, так как область тепловыделения будет перемещаться вместе с нагреваемой газовой областью. В экспериментах [7–10] наблюдается нагрев до 7000–9000 К. Распределение числа Маха в потоке в целом схожее, но большая величина вкладываемой в поток мощности приводит к локальному его снижению до  $M < 1$  в нагретом следе области объемного тепловыделения. Площадь выходного сечения, занимаемая обратным течением, снизилась до 10–15%, а массовое среднее осевой проекции скорости по площади выходного сечения  $\langle v_{out} \rangle$  составило 600 м/с. Полное тепловое запыривание аэродинамического канала происходит только при  $w = 1.12 \times 10^{12}$  Вт/м<sup>3</sup> ( $W = 80$  кВт). Во избежание теплового запыривания потока при инжекции и воспламенении в нем топлив опыты следует проводить при меньших мощностях разряда.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе были получены трехмерные распределения скорости, температуры и давления в сверхзвуковом воздушном потоке. С помощью экспериментальных данных давлений на стенку и создаваемой моделью тяги была проведена валидация аэродинамической модели в случае отсутствия зоны объемного тепловыделения. Получена верхняя граница давления ( $p_{out} = 100$ –200 Торр) на выходном сечении канала, обеспечивающего правильный режим течения воздуха в модели. Показано, что при плотности тепловой мощности источника  $w = 1.4 \times 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup> (эквивалентной средней общей мощности разряда  $W = 10$  кВт) разряд нагревает газ до температуры от 1700–2500 К в середине потока до  $T = 3500$ –4200 К вблизи конца электрода, что приводит к ускорению потока без его теплового запыривания. При плотности тепловой мощности источника  $w = 2.8 \times 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup> (эквивалентной средней общей мощности разряда  $W = 20$  кВт) газ нагревается сильнее до 6700 К, но начинается локальное тепловое запыривание потока. Возможность достижения таких высоких температур газа с помощью разряда может быть использована для быстрого воспламенения топлив в сверхзвуковых воздушных потоках.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 23-22-00233. К.Н. Корнев является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и благодарит его за финансовую поддержку.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leonov S.B. Electrically Driven Supersonic Combustion // *Energies* 2018, 11, 1733. <https://doi.org/10.3390/en11071733>
2. Chernyi G.G. Some recent results in aerodynamic applications of flows with localized energy addition // 9 International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference and 3 Weakly Ionized Gases Workshop, 1–5 November 1999, Norfolk, VA, USA, AIAA-99-4819. <https://doi.org/10.2514/6.1999-4819>
3. Lin Bing-xuan, Wu Yun, Zhang Zhi-bo, Chen Zheng Multi-channel nanosecond discharge plasma ignition of premixed propane/air under normal and sub-atmospheric pressures // *COMBUSTION AND FLAME*. 2017. V. 182. P. 102–113. <https://doi.org/10.1016/j.combustflame.2017.04.022>
4. Enloe C.L., McLaughlin T.E., VanDyken R.D., Kachner K.D., Jumper E.J., Corke T.C. Mechanisms and Responses of a Single Dielectric Barrier Plasma Actuator: Plasma Morphology // *AIAA JOURNAL*. 2004. V. 42. № 3. P. 589–594. <https://doi.org/10.2514/1.2305>
5. Знаменская И.А., Луцкий А.Е., Мурсенкова И.В. Исследование поверхностного энерговклада в газ при инициировании импульсного разряда типа „плазменный лист“ // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30. № 24. С. 38–42. [http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/pztf/2004/24/pztf\\_t30v24\\_07.pdf](http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/pztf/2004/24/pztf_t30v24_07.pdf)
6. Знаменская И.А., Латфуллин Д.Ф., Луцкий А.Е., Мурсенкова И.В., Сысоев Н.Н. Развитие газодинамических возмущений из зоны распределенного поверхностного скользящего разряда // *ЖТФ*. 2007. Т. 77. № 5. С. 10–18. [http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/ztf/2007/05/ztf7705\\_02.pdf](http://elibrary.lt/resursai/Uzsienio%20leidiniai/ioffe/ztf/2007/05/ztf7705_02.pdf)
7. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. Влияние скорости воздушного потока на основные характеристики нестационарного пульсирующего разряда, создаваемого с помощью стационарного источника питания // *Физика плазмы*. 2018. Т. 44. № 8. С. 661–674. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35642593>
8. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. Параметры плазмы пульсирующего в сверхзвуковом потоке воздуха разряда постоянного тока // *Физика плазмы*. 2017. Т. 43. № 3. С. 314–322. <https://doi.org/10.7868/S0367292117030118>
9. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. Степень ионизации воздуха в плазме нестационарного пульсирующего разряда в дозвуковых и сверхзвуковых потоках // *Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия*. 2018. № 5. С. 44–49. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36992595>
10. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Логунов А.А. Температура электронов в плазме разряда постоянного тока, создаваемого в сверхзвуковом воздушном потоке // *Вестник Московского университета. Сер. 3. Физика. Астрономия*. 2017. № 3. С. 76–82. <http://vnu.phys.msu.ru/file/2017/3/17-3-075.pdf>
11. Копыл П.В., Сурконт О.С., Шибков В.М., Шибкова Л.В. Стабилизация горения жидкого углеводородного топлива с помощью программированного СВЧ-разряда в дозвуковом воздушном потоке // *Физика плазмы*. 2012. Т. 38. № 6. С. 551. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17726891>
12. Зарин А.С., Кузовников А.А., Шибков В.М. Свободно локализованный СВЧ-разряд в воздухе. М.: Нефть и газ., 1996.
13. Шибков В.М., Александров А.Ф., Ершов А.П., Тимофеев И.Б., Черников В.А., Шибкова Л.В. Свободнолокализованный сверхвысокочастотный разряд в сверхзвуковом потоке газа // *Физика плазмы*. 2005. Т. 31. № 9. С. 857. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9175972>
14. Shibkov V.M., Aleksandrov A.F., Chernikov V.A., Ershov A.P., Shibkova L.V. Microwave and Direct-Current Discharges in High-Speed Flow: Fundamentals and Application to Ignition // *Journal of Propulsion and Power*. 2009. V. 25. № 1. P. 123. <https://doi.org/10.2514/1.24803>
15. Шибков В.М., Двинин С.А., Ершов А.П., Константиновский Р.С., Сурконт О.С., Черников В.А., Шибкова Л.В. Поверхностный СВЧ разряд в воздухе // *Физика плазмы*. 2007. Т. 33. № 1. С. 77–85. <https://elibrary.ru/item.asp?id=9444599>
16. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Громов В.Г., Карачев А.А., Константиновский Р.С. Влияние поверхностного СВЧ-разряда на воспламенение высокоскоростных пропан-воздушных потоков // *Теплофизика высоких температур*. 2011. 49. № 2. С. 163. [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tv&paperid=277&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tv&paperid=277&option_lang=rus)
17. Шибков В.М., Ершов А.П., Черников В.А., Шибкова Л.В. Сверхвысокочастотный разряд на поверхности диэлектрической антенны // *ЖТФ*. 2005. Т. 75. № 4. С. 67–73. <https://journals.ioffe.ru/articles/8529>
18. Шибков В.М., Двинин С.А., Ершов А.П., Шибкова Л.В. Механизмы распространения поверхностного сверхвысокочастотного разряда // *ЖТФ*. 2005. Т. 75. № 4. С. 74–79. <https://journals.ioffe.ru/articles/8530>
19. Шибков В.М., Шибкова Л.В., Карачев А.А. Поверхностный сверхвысокочастотный разряд при повышенных давлениях воздуха // *Теплофизика высоких температур*. 2009. Т. 47. № 5. С. 650–658. [https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tv&paperid=902&option\\_lang=rus](https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tv&paperid=902&option_lang=rus)

20. Logunov A.A., Kornev K.N., Shibkova L.V., Shibkov V.M. Influence of the Interelectrode Gap on the Main Characteristics of a Pulsating Transverse-Longitudinal Discharge in High-Velocity Multicomponent Gas Flows // High Temperature. 2021. V. 59. № 1. P. 19–26. <https://link.springer.com/article/10.1134/S0018151X21010119>
21. Шибкова Л.В., Шибков В.М., Логунов А.А., Долбня Д.С., Корнев К.Н. Параметры плазмы пульсирующего разряда, создаваемого в высокоскоростных потоках газа // Теплофизика высоких температур. 2020. Т. 58. № 6. С. 1–8. <https://doi.org/10.31857/S0040364420060198>
22. Двинин С.А., Ершов А.П., Тимофеев И.Б., Черников В.А., Шибков В.М. Моделирование разряда постоянного тока в поперечном сверхзвуковом потоке газа // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 2. С. 181–191. <https://doi.org/10.1023/B:HITE.0000026147.82949.36>
23. Toktaliev P.D., Semenev P.A., Moralev I.A., Kazanskii P.N., Bityurin V.A. and Bocharov A.N Numerical modeling of electric arc motion in external constant magnetic field // Journal of Physics: Conference Series 2020 1683 032009. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1683/3/032009>
24. Moralev I., Kazanskii P., Bityurin V., Bocharov A., Firsov A., Dolgov E. and Leonov S. Gas dynamics of the pulsed electric arc in the transversal magnetic field // Journal of Physics D: Applied Physics. 2020. V. 53. № 42. 425203. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ab9d5a>
25. Rakhimov R.G., Moralev I.A., Firsov A.A., Bityurin V.A. and Bocharov A.N. On the gasdynamics of the electric discharge in external magnetic field // Journal of Physics: Conf. Ser. 2019. V. 1147. 012128. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1147/1/012128>
26. Boulous M.I., Fauchais P., and Pfender E., Thermal Plasmas: Fundamentals and Applications. Plenum Press-Springer, 1994.
27. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976.

УДК 533.6.011.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ ТЕПЛООБМЕНА В ДОЗВУКОВЫХ СТРУЯХ ДИССОЦИИРОВАННОГО АЗОТА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПЛАЗМОТРОНА ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ НАГРЕВЕ ПОВЕРХНОСТИ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

© 2023 г. С. А. Васильевский<sup>а</sup>, С. С. Галкин<sup>а</sup>, А. Ф. Колесников<sup>а</sup>, М. А. Котов<sup>а</sup>,  
И. В. Лукомский<sup>а</sup>, Н. Г. Соловьев<sup>а</sup>, Е. С. Тептева<sup>а</sup>, А. В. Чаплыгин<sup>а,\*</sup>,  
А. Н. Шемякин<sup>а</sup>, М. Ю. Якимов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*E-mail: chaplygin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 06.01.2023 г.

После доработки 28.02.2023 г.

Принята к публикации 28.02.2023 г.

На индукционном ВЧ-плазмотроне ВГУ-4 (ИПМех РАН) проведены эксперименты по исследованию теплообмена цилиндрической водоохлаждаемой медной модели диаметром 30 мм, оснащенной калориметрическим датчиком с тепловоспринимающей поверхностью диаметром 13.8 мм из графита, при комбинированном режиме нагрева поверхности плазмой азота и лазерным излучением, а также для случаев нагрева поверхности только лазерным излучением или только струей плазмы азота. Эксперименты в струях ВЧ-плазмотрона проведены при давлении в барокамере установки  $p = 1 \times 10^4$  Па, массовом расходе азота  $G = 2.4$  г/с, мощности ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию  $N_{a.p.} = 22$  кВт. Для выбранных экспериментальных режимов установлено, что струя диссоциированного азота и высокочастотный индукционный разряд не оказывают заметного влияния на проходящий через них лазерный луч. Получены значения плотности теплового потока в зависимости от подведенной мощности лазерного излучения. Для рассмотренных условий экспериментов проведено численное моделирование дозвукового течения плазмы азота в кварцевом разрядном канале и в пространстве барокамеры установки ВГУ-4, основанное на решении полных уравнений Навье–Стокса методом Патанкара–Сполдинга.

**Ключевые слова:** индукционный ВЧ-плазмотрон, плазма, азот, лазер, теплообмен, комбинированный нагрев, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S1024708423600112, **EDN:** WLNQXY

Для атмосферного участка полета спускаемого космического аппарата в некоторых точках траектории радиационные тепловые потоки могут достигать значений, сопоставимых с конвективными тепловыми потоками [1–3]. В [4] показано, что радиационный тепловой поток со стороны излучающего газа к донной области аппарата Schiaparelli при спуске в атмосфере Марса может составлять до 70% от суммарного теплового потока. Задачи создания и исследования материалов тепловой защиты будущих межпланетных миссий потребуют глубокой модернизации существующих наземных экспериментальных установок для более достоверного моделирования условий радиационно-конвективного нагрева [5–7]. Примером такой модернизации служит создание в Центре Эймса (США) испытательного комплекса, где реализован нагрев поверхности плоских образцов потоком воздушной плазмы и лазерным излучением [8–10].

В ИПМех РАН выполнены эксперименты, демонстрирующие возможность комбинированного нагрева поверхности образца теплозащитного материала дозвуковыми струями плазмы азота индукционного ВЧ-плазмотрона ВГУ-4 и лучом иттербиевого импульсного волоконного лазера. Детальное описание экспериментов представлено в [11]. Целью данной работы являлось более подробное исследование особенностей режимов течения плазмы и теплообмена в условиях, близких к проведенным демонстрационным экспериментам.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

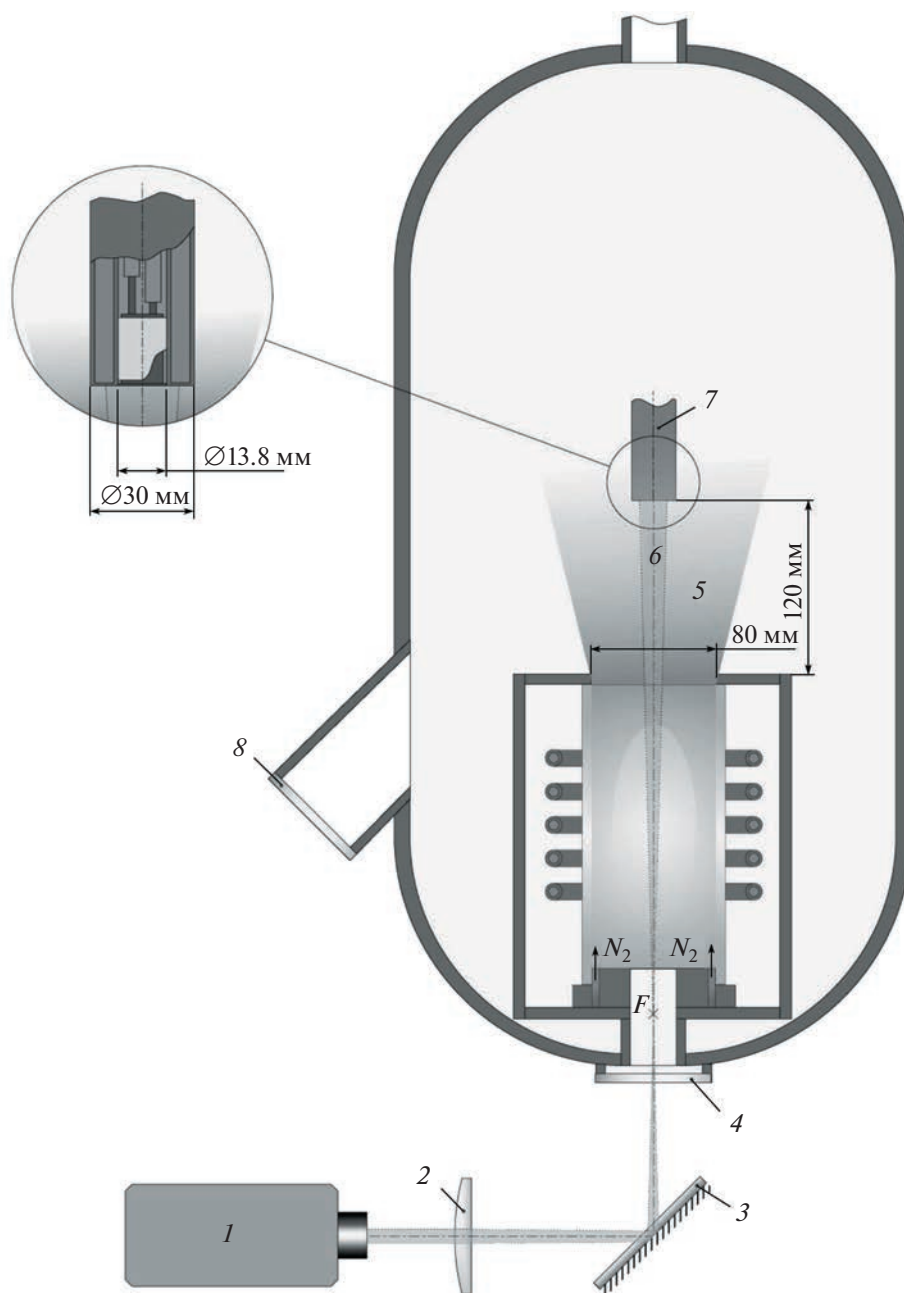
Подробное описание 100-киловаттного ВЧ-плазмотрона ВГУ-4 (ИПМех РАН) приведено в [12]. Для реализации режимов комбинированного радиационно-конвективного нагрева установка была модернизирована: 1) в состав установки включен импульсный волоконный лазер; 2) изменена конструкция формирователя потока газа в нижнем интерфейсе разрядного канала плазмотрона (предусмотрено кварцевое окно и канал для наведения лазерного луча на поверхность образцов материалов или моделей). Схема ВЧ-плазмотрона ВГУ-4, дополнительно оснащенного источником лазерного излучения, приведена на рис. 1.

В качестве источника лазерного излучения выбран иттербиевый волоконный лазер IPG Photonics YPLN-1-100-200-R с высокой направленностью и стабильностью излучения. Коэффициент поглощения излучения на длине волны лазерного излучения 1.064 мкм составляет 0.8–0.9 для широкого спектра высокотемпературных материалов. Для транспортировки излучения от лазерной головки 1 (рис. 1) к поверхности водоохлаждаемой цилиндрической медной модели 7 вдоль оси плазменного потока индукционного плазмотрона 5 была собрана внешняя оптическая система, формирующая пятно облучения с известным распределением интенсивности. Система транспортировки излучения включала поворотное зеркало 3, предназначенное для совмещения осей лазерного луча 6 и плазменного потока. Положение зеркала и угол его наклона регулировались с помощью микрометрических винтов для точной настройки положения пятна облучения на поверхности модели. Размер пятна облучения определялся пространственными характеристиками лазерного луча и параметрами линзы 2, расположенной на оси системы транспортировки излучения. Модель помещалась в расходящуюся часть лазерного пучка за фокусом линзы F, так что размер пятна зависел от отношения фокусного расстояния линзы к расстоянию от линзы до модели вдоль оптической оси. Лазерный луч вводился в вакуумный объем испытательной камеры через прозрачное кварцевое окно 4. В экспериментах распределение облученности поверхности модели в пятне было близко к гауссовскому распределению с радиусом 10 мм. В лобовой части модели предусмотрено гнездо для установки образцов исследуемых материалов. В представленной работе вместо образца в лобовой части водоохлаждаемой цилиндрической медной модели располагался датчик теплового потока. Через смотровое окно 8 с помощью тепловизора проводились измерения температуры поверхности датчика.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В экспериментах исследовался теплообмен лобовой части цилиндрической водоохлаждаемой медной модели диаметром  $d_m = 30$  мм с плоским торцом в режимах радиационного нагрева поверхности лазерным лучом, а также в режимах комбинированного радиационно-конвективного нагрева поверхности лазерным лучом и дозвуковым потоком плазмы азота. Расстояние от торца модели до выходного сечения разрядного канала плазмотрона составляло  $Z = 120$  мм. Диаметр цилиндрического кварцевого разрядного канала плазмотрона  $D = 80$  мм. Эксперименты проводились при давлении в барокамере установки  $p = 1 \times 10^4$  Па. Массовый расход азота во всех экспериментах составлял  $G = 2.4$  г/с и контролировался с помощью электронного газового ротаметра Bronkhorst MV-306. Мощность ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию при комбинированном нагреве поверхности поддерживалась постоянной  $N_{a.p.} = 22$  кВт.

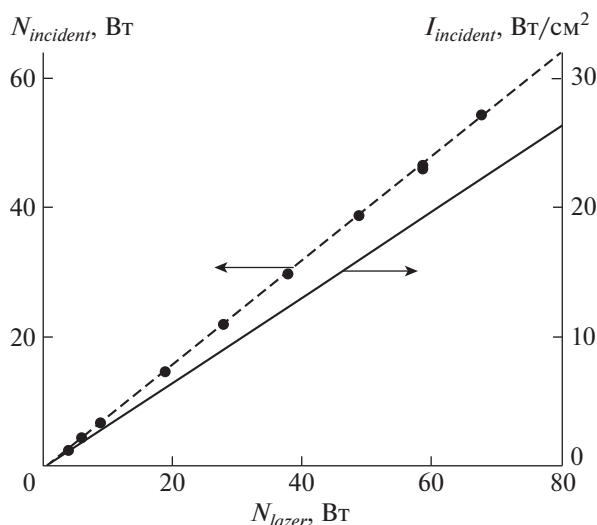
Тепловые потоки определялись с помощью цилиндрического проточного стационарного калориметра [13], установленного в центре лобовой части модели. Диаметр тепловоспринимающей поверхности калориметра составлял 13.8 мм. Калориметр был теплоизолирован от модели с помощью фторопластовой втулки. Погрешность измерений для проточного калориметра не превышала 10% [14]. При измерениях тепловых потоков от радиационного нагрева или в режиме комбинированного радиационно-конвективного нагрева не представлялось возможным использовать калориметры с тепловоспринимающей поверхностью из высокотемпературной меди, которые широко распространены в исследованиях конвективного теплообмена моделей, обтекаемых струями высокоэнтальпийных химически активных газов; полированная медная поверхность отразила бы основную часть лазерного излучения, и потребовалось чернение поверхности датчика. Для решения проблемы использован калориметр с тепловоспринимающей поверхностью из графита, обладающей высокой поглощательной способностью на длине волны  $\sim 1$  мкм [15]. Массовый расход охлаждающей воды в калориметре измерялся ультразвуковым жидкостным расходомером Bronkhorst ES-FLOW и составлял 2 г/с во всех экспериментах. Разность температур охлаждающей воды на выходе из калориметра и на входе в него измерялась экранированной дифференциальной термопарой типа ХА (хромель-алюмель).



**Рис. 1.** Схема ВЧ-плазмотрона ВГУ-4, дополнительно оснащенного источником лазерного излучения: 1 – импульсный волоконный лазер; 2 – линза; 3 – поворотное зеркало; 4 – кварцевое окно; 5 – дозвуковая струя плазмы азота; 6 – лазерный луч; 7 – медная водоохлаждаемая модель с калориметрическим датчиком; 8 – смотровое окно.

В экспериментах использовался импульсно-периодический режим работы лазера с высокой частотой следования импульсов. При частоте 1 МГц импульсная мощность излучения превышала среднюю менее чем в 10 раз. Для нагрева поверхности режим работы лазера с высокой частотой повторения импульсов практически не отличается от непрерывного режима.

Потери излучения на элементах оптической системы складывались из поглощения, рассеяния и обратного отражения от прозрачных поверхностей. Пропускание кварцевой линзы и кварцевого окна ( $\tau_{win} = \tau_{lens} = 0.935$ ) без просветляющих покрытий составляло суммарно  $\tau_{win} \cdot \tau_{lens} = 0.87$ . Поглощение на поворотном зеркале приводило к коэффициенту пропускания  $\tau_{mir} = 0.92$ . Таким образом, суммарно пропускание оптической системы составляло  $\tau_s = \tau_{win} \cdot \tau_{lens} \cdot \tau_{mir} = 0.8$ ,



**Рис. 2.** Измеренные значения мощности лазерного излучения ( $N_{incident}$ ), подводимой к модели, и рассчитанная зависимость средней интенсивности излучения ( $I_{incident}$ ) на поверхности проточного калориметра диаметром 13.8 мм, установленного в лобовой части модели, в зависимости от выходной мощности лазерного излучения ( $N_{laser}$ ).

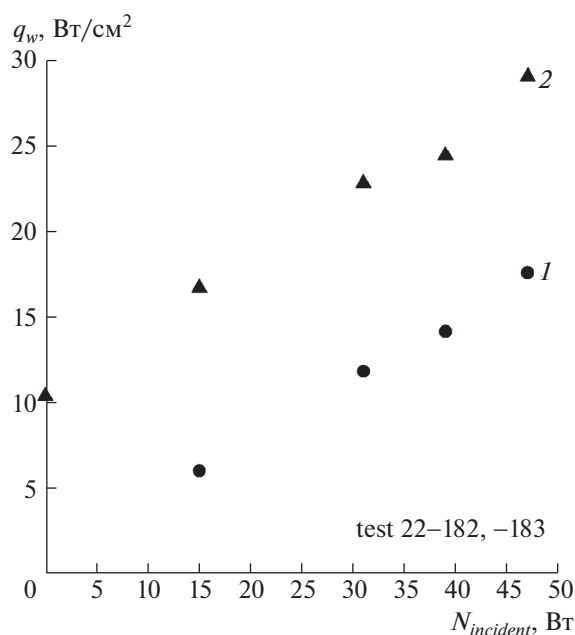
т.е. мощность лазерного излучения, подводимая к модели,  $N_{incident}$  была на 20% ниже выходной мощности лазера. Для проверки этого соотношения была измерена зависимость  $N_{incident}$  от заданной выходной мощности лазера.  $N_{incident}$  контролировалась с помощью предварительно откалиброванного измерителя мощности лазера OPHIR Starlite с термопарной измерительной головкой 50(150)A-BB-26. Измерительная головка располагалась в расходящемся пучке таким образом, чтобы соотношение диаметров пятна излучения и приемной площадки было таким же, как на исследуемой модели. При расчете средней интенсивности излучения на поверхности датчика  $I_{incident}$  мощность излучения, подводимая к поверхности датчика, рассчитывалась как интеграл от распределения интенсивности по поверхности датчика. Распределение интенсивности считалось гауссовским и нормировалось на измеренную величину  $N_{incident}$ .

На рис. 2 точками показана измеренная величина  $N_{incident}$  в зависимости от задаваемой выходной мощности лазера  $N_{laser}$ . Пунктиром показана линейная интерполяция зависимости  $N_{incident} = 0.8 \cdot N_{laser} - 0.4$ . Сплошной линией показана рассчитанная из данных измерения зависимость средней интенсивности излучения  $I_{incident}$  на поверхности проточного калориметра диаметром 13.8 мм, расположенного на месте облучаемого образца, от выходной мощности излучения лазера  $N_{laser}$  (ось ординат  $I_{incident}$  справа).

Результаты измерений тепловых потоков стационарным проточным калориметром с тепло-воспринимающей поверхностью из графита в режиме радиационного нагрева лобовой поверхности модели лучом лазера и в режиме комбинированного радиационно-конвективного нагрева поверхности лучом лазера и дозвуковым потоком плазмы азота приведены на рис. 3.

В табл. 1 представлены значения измеренных калориметром плотностей тепловых потоков ( $q_w$ ) для режимов радиационного нагрева поверхности лучом лазера без воздействия плазмы азота и рассчитанные значения средней интенсивности излучения на поверхности калориметра ( $I_{incident}$ ) в зависимости от подведенной мощности лазерного излучения ( $N_{incident}$ ).

В табл. 2 представлены значения измеренных калориметром плотностей тепловых потоков ( $q_w$ ) для режимов комбинированного радиационно-конвективного нагрева поверхности лучом лазера и дозвуковым потоком плазмы азота (при мощности ВЧ-генератора плазмотрона  $N_{a.p.} = 22$  кВт) в зависимости от подведенной мощности лазерного излучения ( $N_{incident}$ ). Также в табл. 1, 2 приведены температуры поверхности датчика ( $T_w$ ), измеренные с помощью тепловизора Testo 890.



**Рис. 3.** Измеренные значения плотности теплового потока в области лобовой точки цилиндрической медной модели в зависимости от подводимой мощности лазерного излучения ( $N_{incident}$ ): 1 — радиационный нагрев лазерным излучением; 2 — комбинированный нагрев при одновременном воздействии дозвуковой струи диссоциированного азота и лазерного излучения.

Как видно из табл. 1 и 2, несмотря на водяное охлаждение калориметра и высокую теплопроводность графита, наблюдается рост температуры нагреваемой поверхности по мере роста подводимого теплового потока, как в режимах комбинированного нагрева, так и при воздействии только лазерного луча.

Как видно из рис. 3, тепловые потоки в режиме комбинированного нагрева превышают тепловые потоки, полученные в режиме радиационного нагрева при тех же мощностях подводимого лазерного излучения, на величину вклада конвективного теплового потока от струи азотной плазмы, зарегистрированную при выключенном источнике лазерного излучения. Таким образом, струя плазмы азота и высокочастотный индукционный разряд не оказывают заметного влияния на проходящий через них лазерный луч для выбранных экспериментальных режимов. В первую очередь это связано с относительно низким давлением в барокамере установки ( $p = 1 \times 10^4$  Па).

### 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для рассмотренных условий экспериментов в ВЧ-плазмотроне ВГУ-4 проведено численное моделирование течения плазмы азота, включавшее решение двух задач:

1) численное моделирование дозвукового течения плазмы азота в цилиндрическом кварцевом разрядном канале диаметром 80 мм;

**Таблица 1.** Радиационный нагрев

| $N_{incident}$ (Вт) | $I_{incident}$ (Вт/см²) | $q_w$ (Вт/см²) | $T_w$ (°C) |
|---------------------|-------------------------|----------------|------------|
| 15                  | 6.2                     | 6.0            | 30         |
| 31                  | 12.7                    | 11.8           | 36         |
| 39                  | 16.0                    | 14.1           | 39         |
| 47                  | 19.3                    | 17.6           | 42         |

**Таблица 2.** Комбинированный радиационно-конвективный нагрев

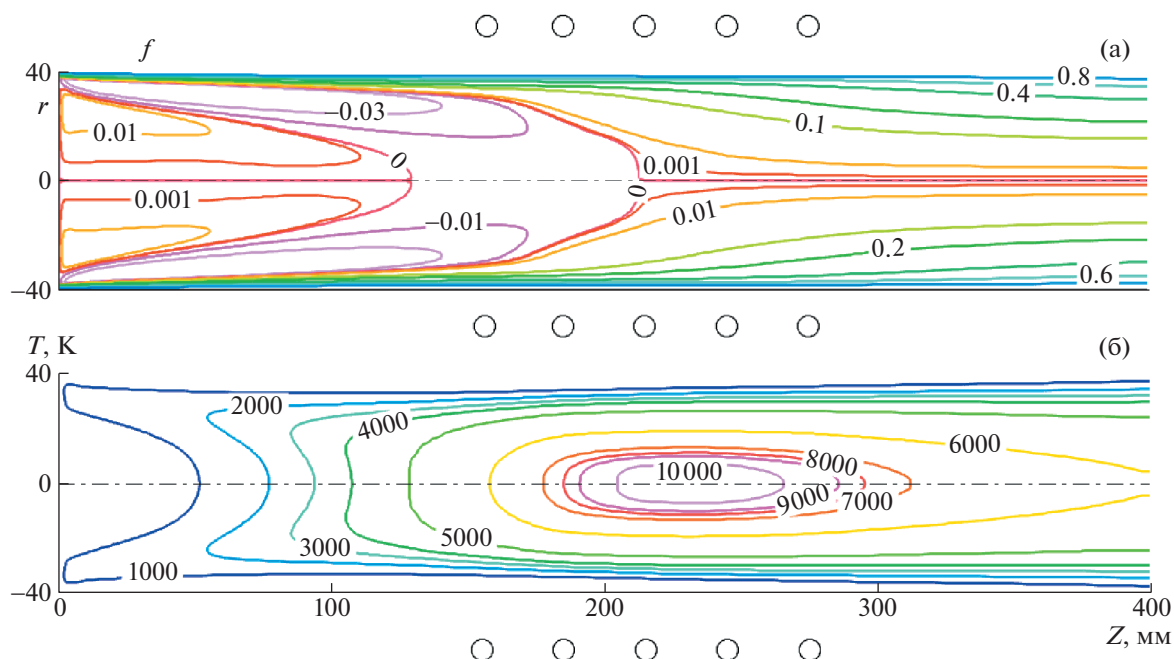
| $N_{incident}$ (Вт) | $q_w$ (Вт/см <sup>2</sup> ) | $T_w$ (°C) |
|---------------------|-----------------------------|------------|
| 0                   | 10.4                        | 54         |
| 15                  | 16.7                        | 60         |
| 31                  | 22.8                        | 61         |
| 39                  | 24.4                        | 64         |
| 47                  | 29.0                        | 66         |

2) численное моделирование течения в струе, истекающей из разрядного канала в пространство барокамеры установки ВГУ-4 и обтекающей цилиндрическую модель диаметром 30 мм с плоским носком.

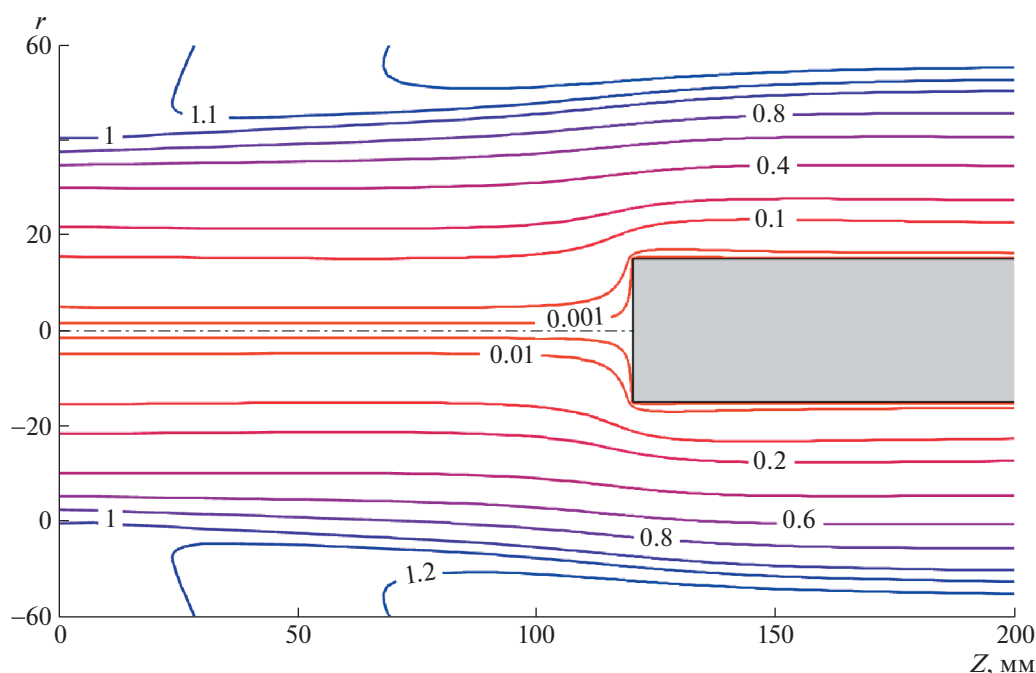
Расчет течения равновесной плазмы азота в разрядном канале проводился по программе Alpha [16] на основе уравнений Навье—Стокса. Потери энергии, связанные с излучением плазмы, принимались малыми и не учитывались. Течение в разрядном канале считалось ламинарным, стационарным и осесимметричным с азимутальной закруткой потока. Полные уравнения Навье—Стокса решались методом конечных объемов по алгоритму SIMPLE Патанкара—Сполдинга [17]. На рис. 4 показаны результаты расчета изолиний безразмерной функции тока (а) и изотерм (б).

Численное моделирование течения в струе, истекающей из разрядного канала и обтекающей цилиндрическую модель, проводилось по программе Beta [16]. Уравнения Навье—Стокса также решались методом Патанкара—Сполдинга. В качестве граничных условий в начале расчетной области использованы параметры газа на срезе разрядного канала, полученные в результате решения предыдущей задачи в программе Alpha. Расчет по программе Beta тоже проводится в предположении термодинамически и химически равновесного течения плазмы азота.

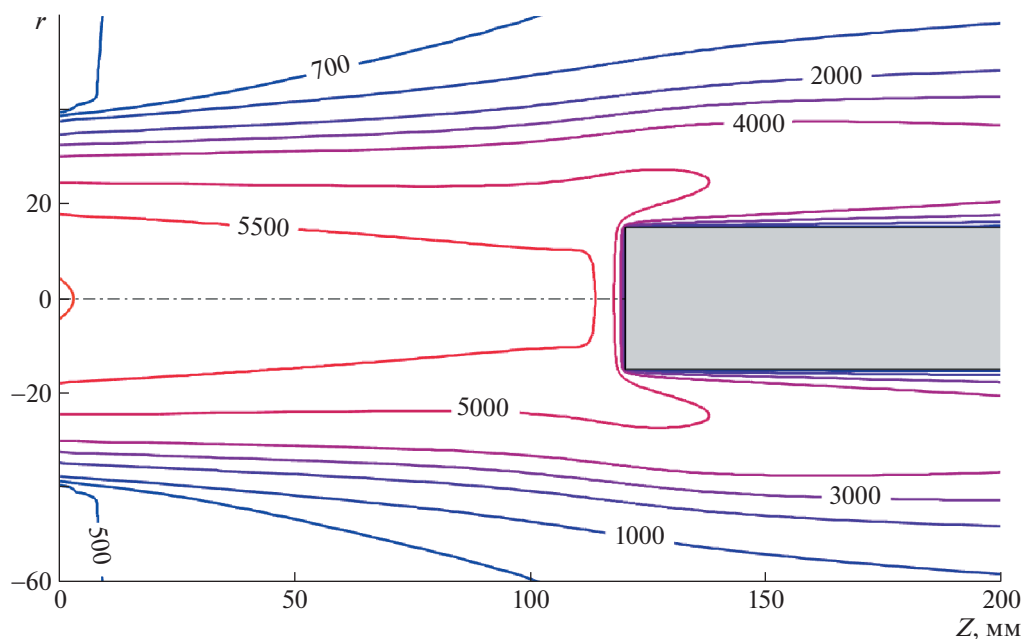
Результаты расчета по программе Beta показаны на рис. 5–7. На рис. 5 приведены изолинии безразмерной функции тока. На рис. 6 приведены изотермы струи диссоциированного азота. На рис. 7 представлены распределения скорости (а), энтальпии (б), динамического давления (в)



**Рис. 4.** Изолинии безразмерной функции тока (а) и изотермы (б) плазмы азота в разрядном канале установки ВГУ-4 для  $p = 1 \times 10^4$  Па,  $N_{a.p.} = 22$  кВт,  $N_{pl} = 12.65$  кВт,  $G = 2.4$  г/с.

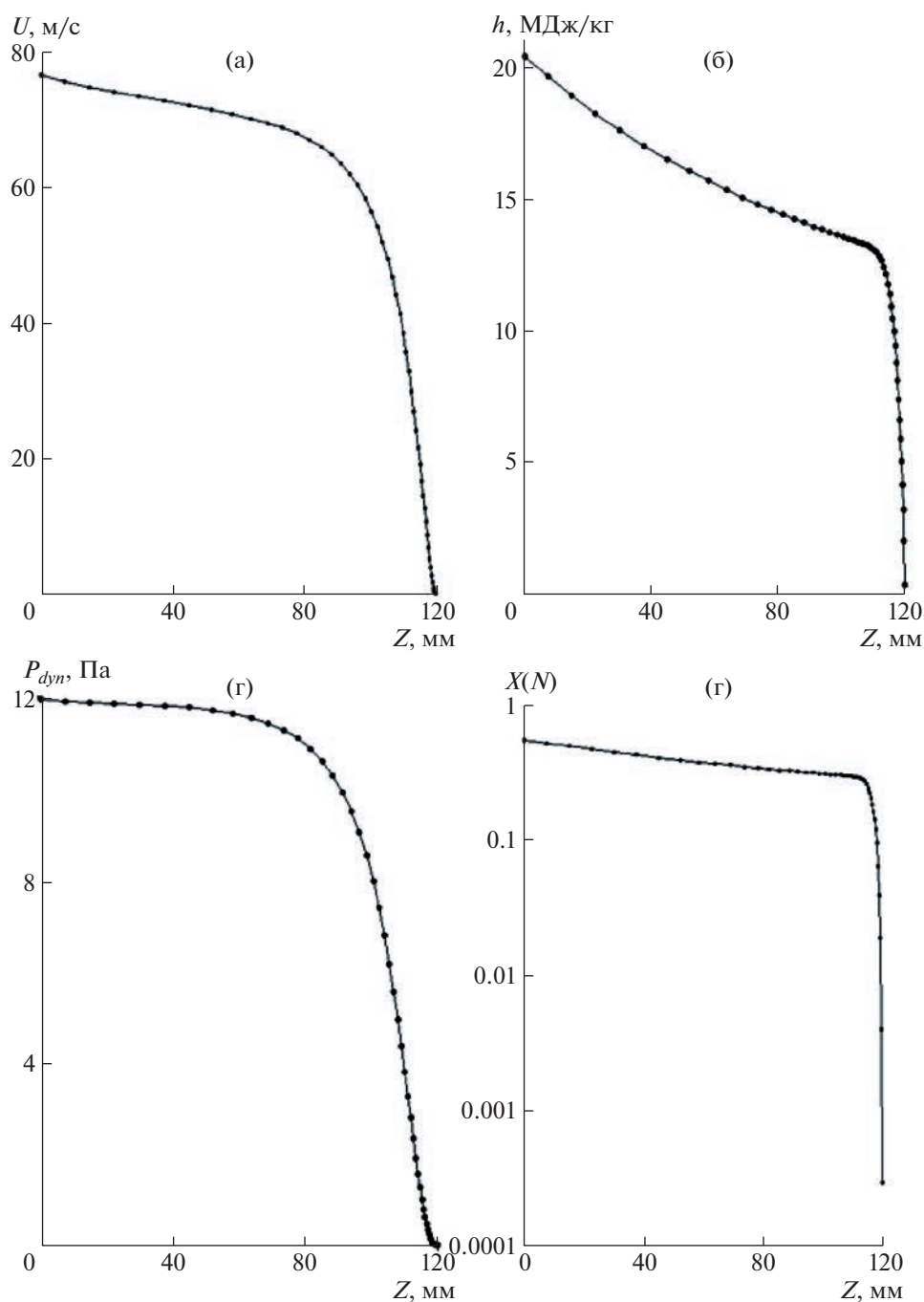


**Рис. 5.** Изолинии безразмерной функции тока дозвуковой струи диссоциированного азота, обтекающей цилиндр с плоским торцом диаметром 30 мм для  $p = 1 \times 10^4$  Па,  $N_{a.p.} = 22$  кВт,  $N_{pl} = 12.65$  кВт,  $G = 2.4$  г/с,  $Z = 120$  мм.



**Рис. 6.** Изотермы дозвуковой струи диссоциированного азота, обтекающей цилиндр с плоским торцом диаметром 30 мм для  $p = 1 \times 10^4$  Па,  $N_{a.p.} = 22$  кВт,  $G = 2.4$  г/с,  $Z = 120$  мм.

и молярной концентрации атомов азота ( $\gamma$ ) на оси струи между выходным сечением разрядного канала и лобовой поверхностью цилиндрической модели в зависимости от расстояния  $Z$  до выходного сечения разрядного канала. Энтальпия на оси струи вблизи выходного сечения канала  $h = 20.4$  МДж/кг, скорость  $U = 76$  м/с, молярная концентрация атомов азота  $X_N = 0.53$ . Из рис. 7 видно, что в рассмотренном режиме дозвуковая струя плазмы азота низконапорная (максимальное расчетное значение динамического давления на оси струи  $P_{dyn} = 12$  Па), что затрудняет экс-



**Рис. 7.** Распределение скорости (а), энтальпии (б), динамического давления (в) и молярной концентрации атомов азота (г) на оси струи между выходным сечением разрядного канала и лобовой поверхностью цилиндрической модели в зависимости от расстояния  $Z$  до выходного сечения разрядного канала для  $p = 1 \times 10^4$  Па,  $N_{a.p.} = 22$  кВт,  $G = 2.4$  г/с.

периментальные измерения динамических давлений с помощью трубки Пито и дифференциального мембранного преобразователя давления “Элемер” АИР-20/М2-ДД (максимальный верхний предел измерений 1.6 кПа, предел допускаемой основной приведенной погрешности  $\pm 0.2\%$ ).

Основные рабочие параметры ВЧ-плазмотрона ВГУ-4 (давление в барокамере установки, массовый расход азота и мощность ВЧ-генератора плазмотрона по анодному питанию), исполь-

зованные при численном моделировании течения плазмы и в экспериментах по определению тепловых потоков в данной работе, соответствовали реализованным в [11] при нагреве образца низкотеплопроводного теплозащитного материала. Геометрия передней части водоохлаждаемой медной модели отличалась от геометрии образца теплозащитного материала: образец был выполнен со скругленной лобовой частью (радиусом 62.3 мм) и скругленными кромками (радиусом 4 мм), в то время как лобовая часть медной модели представляла собой плоский торец. При этом совпадали расстояния от выходного сечения разрядного канала до лобовой части образца и модели (Z), максимальный диаметр образца и диаметр цилиндрической медной модели. Таким образом, результаты численного моделирования основных параметров дозвуковой струи плазмы азота, истекающей из разрядного канала ВЧ-плазмотрона ВГУ-4, можно также распространить на соответствующие режимы течения в экспериментах [11] и использовать при анализе их результатов. Численное моделирование течения вблизи поверхности образца низкотеплопроводного теплозащитного материала потребует уточнения геометрии расчетной области и граничных условий на поверхности образца.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно и экспериментально исследованы новые режимы радиационно-конвективного нагрева водоохлаждаемой цилиндрической медной модели, оснащенной проточным калориметром с тепловоспринимающей поверхностью из графита, в дозвуковых струях плазмы азота ВЧ-плазмотрона ВГУ-4 при одновременном воздействии лазерного излучения.

В условиях радиационного нагрева лазерным лучом (без воздействия плазмы азота) плотность теплового потока к графитовой поверхности проточного калориметра составляла от 6.0 до 17.6 Вт/см<sup>2</sup>. При комбинированном воздействии плазмы азота и лазерного излучения на графитовой поверхности проточного калориметра реализована плотность теплового потока от 16.7 до 29.0 Вт/см<sup>2</sup>. Установлено, что для выбранных режимов дозвуковая струя плазмы азота и индукционный высокочастотный разряд не оказывают заметного влияния на проходящий через них лазерный луч.

Представленные результаты будут использованы при анализе данных экспериментов по теплообмену образцов теплозащитных материалов для соответствующих режимов комбинированного радиационно-конвективного нагрева.

Работа выполнена по теме гранта РНФ 22-79-10083 (<https://rscf.ru/project/22-79-10083/>) с использованием ВЧ-плазмотрона ВГУ-4, который входит в состав уникальной научной установки РФ “Высокочастотные индукционные плазмтроны ВГУ-3 и ВГУ-4” (<http://www.ckp-uf.ru/usu/441568>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Park C.* Calculation of stagnation-point heating rates associated with stardust vehicle // *J. Spacecr. Rockets*. 2007. V. 44. № 1. P. 24–32.  
<https://doi.org/10.2514/1.15745>
2. *Dikalyuk A., Kozlov P., Romanenko Y., Shatalov O., Surzhikov S.* Nonequilibrium Spectral Radiation Behind the Shock Waves in Martian and Earth Atmospheres // 44th AIAA Thermophysics Conf. Reston, Virginia. 2013. P. 1–27.  
<https://doi.org/10.2514/6.2013-2505>
3. *Surzhikov S.T.* Radiative-Collisional Models in Non-Equilibrium Aerothermodynamics of Entry Probes // *J. Heat Transfer*. 2012. V. 134. № 3. P. 1–11.  
<https://doi.org/10.1115/1.4005127>
4. *Суржи́ков С.Т., Яцухно Д.С.* Анализ летных данных по конвективному и радиационному нагреву поверхности спускаемого марсианского космического аппарата Schiaparelli // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. № 6. С. 74–85.  
<https://doi.org/10.31857/S0568528122600394>
5. *Venkatapathy E., Ellerby D., Gage P., Prabhu D., Gasch M., Kazemba C., Kellerman C., Langston S., Libben B., Mahzari M., Milos F., Murphy A., Nishioka O., Peterson K., Poteet C., Splinter S., Stackpoole M., Williams J., Young Z.* Entry system technology readiness for ice-giant probe missions // *Space Sci. Rev.* 2020. V. 216. № 2. P. 1–21.  
<https://doi.org/10.1007/s11214-020-0638-2>
6. *Laub B., Venkatapathy E.* Thermal protection system technology and facility needs for demanding future planetary missions // *Planetary Probe Atmospheric Entry and Descent Trajectory Analysis and Science*. ESA Publications Division. 2004. V. 544. P. 239–247.

7. Venkatapathy E., Laub B., Hartman G.J., Arnold J.O., Wright M.J., Allen Jr G.A. Thermal protection system development, testing, and qualification for atmospheric probes and sample return missions: Examples for Saturn, Titan and Stardust-type sample return // Adv. Sp. Res. 2009. V. 44. № 1. P. 138–150.  
<https://doi.org/10.1016/j.asr.2008.12.023>
8. Cushman G., Alunni A., Balboni J., Zell P., Hartman J., Empey D. The Laser Enhanced Arc-Jet Facility (LEAF-Lite): Simulating Convective and Radiative Heating with Arc-jets and Multiple 50-kW CW Lasers // Joint Thermophysics and Heat Transfer Conf. 2018. P. 3273.  
<https://doi.org/10.2514/6.2018-3273>
9. Gokcen T., Alunni A. CFD Simulations of the IHF Arc-Jet Flow: 9-Inch Nozzle, Flow Surveys, LEAF Wedge Calibration Data // AIAA Aviation Forum. 2019. P. 3008.  
<https://doi.org/10.2514/6.2019-3008>
10. Alunni A.I., Gokcen T., Boghazian T. Laser-Enhanced Arc-Jet Facility Wedge Tests: Avcoat Material Performance Under Convective and Radiative Heating Environments // Joint Thermophysics and Heat Transfer Conf. 2019. № ARC-E-DAA-TN62912.
11. Chaplygin A., Kotov M., Yakimov M., Lukomskii I., Galkin S., Kolesnikov A., Shemyakin A., Solovyov N. Combined Surface Heating by Laser Beam and Subsonic Nitrogen Plasma Jet // Fluids. 2023. 8 (1): 11.  
<https://doi.org/10.3390/fluids8010011>
12. Колесников А.Ф., Гордеев А.Н. Высокочастотные индукционные плазмотроны серии ВГУ // Актуальные проблемы механики: Физико-химическая механика жидкостей и газов. М.: Наука, 2010. С. 151–177.
13. ASTM E422-05(2016). Standard Test Method for Measuring Heat Flux Using a Water-Cooled Calorimeter // ASTM International, West Conshohocken, PA. 2016.
14. Bottin B., Chazot O., Carbonaro M., Van Der Haegen V., Paris S. The VKI plasmatron characteristics and performance: tech. rep. Von Karman Institute For Fluid Dynamics. Rhode-Saint-Genese (Belgium). 2000. 27 p.
15. Touloukian Y.S., DeWitt D.P. Thermophysical properties of matter. Purdue Univ. 1972. V. 8. P. 1890.
16. Васильевский С.А., Колесников А.Ф. Численное исследование течений и теплообмена в индукционной плазме высокочастотного плазмотрона // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б. 2008. Т. 1, Ч. 2. С. 220–234.
17. Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. CRC Press, 2018. 214 p.

УДК 533.6.011

## АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В КАВЕРНЕ С ОТКРЫТЫМ ТИПОМ ТЕЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩИХ РАСЧЕТОВ

© 2023 г. Б. Н. Даньков<sup>а</sup>, А. П. Дубень<sup>а,\*</sup>, Т. К. Козубская<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

\*E-mail: aduben@keldysh.ru

Поступила в редакцию 17.10.2022 г.

После доработки 13.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Рассматриваются механизмы автоколебательных процессов, возникающих в каверне с открытым типом течения, и дается их обоснование, полученное в результате детального изучения взаимодействия явлений гидродинамической, расходно-волновой и резонансной природы. Теоретические выводы подкрепляются анализом данных вычислительных экспериментов, проведенных различными авторами.

**Ключевые слова:** открытая каверна, автоколебательный процесс, волновое возмущение, вихревая структура, зона отрыва, спектральный состав, вихреразрешающее моделирование, гибридный RANS–LES–метод

DOI: 10.31857/S1024708422600774, EDN: WJUNFI

Исследование механизмов автоколебательных процессов, возникающих в каверне с открытым типом течения, когда поток, оторвавшийся с передней кромки каверны, присоединяется на ее задней стенке, не теряет своей актуальности. Это связано с тем, что, несмотря на многочисленные работы, до сих пор не существует всеми признанного однозначного и полного представления о сложных взаимодействующих явлениях в такой каверне и, в частности, детального обоснования спектрального состава генерируемых пульсаций давления.

Начиная с середины прошлого века, изучению автоколебательных процессов в каверне с открытым типом течения посвящено множество работ (см., например, [1–7]). В большинстве из них понимание о механизме нестационарного течения в каверне основывается на представлении Росситера [1]. Использование выведенной на основе этого представления полуэмпирической формулы Росситера для расчета частоты колебаний давления в каверне во многих случаях позволяло получить результат, близкий к экспериментальным данным. Вместе с тем, более поздние экспериментальные и численные исследования нестационарных течений в различных кавернах, а также в кормовом отрыве за трехмерным уступом выявили некоторые принципиальные отличия [8, 9] от общепризнанной теории. В связи с этим возникла необходимость уточнить характер обтекания указанной каверны.

Согласно [1–7] нестационарный процесс в каверне имеет, прежде всего, гидродинамическую природу (по терминологии Д. Рокуэлла [10]) и при турбулентном режиме течения связан с возникновением неустойчивости в слое смещения отрыва, образованием в этом слое крупномасштабных вихрей, их перемещением вниз по потоку и деформацией при взаимодействии с задней стенкой. Задняя стенка при этом становится источником волновых возмущений, которые, распространяясь вверх по потоку через зону отрыва, приводят к росту неустойчивости слоя смещения в его чувствительной зоне (вблизи угловой кромки передней стенки). Вследствие установления обратной связи между колебаниями в области взаимодействия слоя смещения с препятствием и около передней стенки возникает упорядоченная в среднем амплитудная и частотная модуляция пульсаций в каверне. Согласно [11] слой смещения играет роль фильтра (или резонатора), который отбирает из внешнего поля энергию колебаний, определяемых волновыми возмущениями, лишь в малом интервале частот около некой критической частоты, зависящей от длины слоя смещения, массы газа в нем, скорости звука и т.д.

Исследования взаимодействующего сдвигового слоя показали, что необходимыми условиями для возникновения неустойчивости являются нахождение слоя в неравномерном поле течения и наличие поперечной возмущающей силы определенной величины [12–15].

Опираясь на вышеописанную модель нестационарного процесса и приняв, что генерация вихрей и волн давления происходит с одинаковой частотой, Росситер получил полуэмпирическую формулу для расчета числа Струхала автоколебаний. В формулу вошли две константы  $\alpha$  и  $k$ , характеризующие, соответственно, фазовый сдвиг – задержку начала генерации волнового возмущения после взаимодействия вихря с задней стенкой, и отношение конвективной скорости смещения вихрей к скорости набегающего потока. Принималось, что скорость звука в зоне отрыва соответствует скорости звука в набегающем потоке, а образование вихря происходит непосредственно у передней стенки каверны сразу же после взаимодействия с ней волны давления. Было определено значение константы  $\alpha$  при различных величинах относительной длины каверны [1].

Позднее для более полного описания течения в каверне предлагалось учитывать и задержку схода вихрей с кромки передней стенки [4, 16]. В [7] период колебаний давления  $t_\Sigma$  на частоте первой моды для случая одного источника определялся суммой времен задержки схода вихря  $t_1$ , сноса его вниз по потоку до взаимодействия с задней стенкой  $t_2$  и перемещения волны давления внутри каверны от задней стенки к передней  $t_3$  (с некоторым учетом времени отражения от стенок). Полученное отношение оказалось идентичным формуле Росситера. Однако константа  $\alpha$ , определяемая как  $\alpha = t_1/t_\Sigma$ , в данном случае характеризовала задержку между поступлением к передней стенке каверны волнового возмущения и началом переноса вихря. Аналогичный подход использовался и в работе [17].

В работах [6, 15, 18] показано, что вторая и третья моды колебаний, обусловленные потерей устойчивости сдвигового слоя, являются преобладающими тонами в спектрах пульсаций давления.

В [3] при изучении особенности сверхзвукового обтекания каверны установлено, что неустойчивость сдвигового слоя приводит к периодическому подводу в каверну и отводу из нее массы газа и, как следствие этого, к колебанию давления на задней стенке. При отводе массы газа и росте давления на указанной стенке генерируются волны сжатия, которые распространяются вверх по потоку со сверхзвуковой абсолютной скоростью. Внутри зоны отрыва волна является прямой, а в области невязкого течения наклонной. В процессе взаимодействия с передней стенкой отражается лишь внутренняя, прямая, часть этой волны. При ее смещении вниз по потоку происходит выпучивание сдвигового слоя. Когда волна достигает задней стенки, масса газа, находящаяся в наружной части отрывного течения, вытесняется из каверны. Далее процесс повторяется. Таким образом, было констатировано существование помимо нестационарного процесса гидродинамической природы еще и расходно-волновой (“акустической” по определению [3]). Позднее было показано, что к образованию крупномасштабных вихрей в рассмотренном случае приводят, прежде всего, волны, отраженные от передней стенки [5, 19].

В связи с возникновением при сверхзвуковой скорости набегающего потока волновой системы в [6] предложено определять частоту вышеописанного “акустического” автоколебательного процесса из условия, отражающего чисто волновой процесс. При этом скорость перемещения отраженной волны принималась равной конвективной скорости сноса вихря вниз по потоку. Этими же авторами было обращено внимание на возможность возникновения в каверне резонансного процесса при условии равенства частот прямой и обратной бегущих волн [6].

Дальнейшее понимание природы нестационарного течения в каверне было достигнуто при проведении комплексных экспериментально-теоретических исследований, когда для численного моделирования турбулентного течения стали использоваться вихреразрешающие методы [8, 9, 20–24], а при обработке полученных численных данных – спектрально-корреляционный анализ полей пульсаций давления [22]. Прежде всего следует остановиться на результатах изучения особенностей течения в протяженной (переходной по терминологии [25]) каверне, когда отодранный поток присоединялся на дно. Исследования [8] проводились при  $M_\infty = 0.9$  и относительной длине каверны  $L/H = 7$  ( $H$  – глубина каверны). Было показано, что вначале, под влиянием волновых возмущений, перемещающихся внутри отрыва, происходит повышение давления в передней части каверны. Следствием этого является выпучивание границы сдвигового слоя у передней стенки с последующим падением давления внутри отрыва. Это, в свою очередь, приводит к развороту потока вглубь каверны. При этом несколько ниже по течению граница кормового отрыва на начальной стадии разворота остается еще выпуклой. За образовавшейся

точкой перегиба слоя смещения к возникшей волне неустойчивости с областью пониженного давления начинают перетекать массы газа из прилегающих частей отрывного течения, что в совокупности с эжекцией внешним потоком приводит вначале к зарождению, а затем и формированию крупномасштабного вихря. Таким образом, установлено, что крупномасштабные вихревые структуры, определяющие автоколебательный процесс гидродинамической природы, возникают не на передней угловой кромке, как полагал Росситер [1], а ниже по течению — в первой (по потоку) выпуклости (гребне) волн неустойчивости. Распространение волны давления вверх по потоку от задней стенки происходит вначале через область дозвукового течения, располагающуюся в задней части каверны. Затем волна огибает вихрь, который выделяется из кормового отрыва и движется к задней стенке вблизи дна каверны. После этого часть волны распространяется внутри, а другая ее часть снаружи отрыва.

Показано также, что источником волновых возмущений является не только задняя стенка каверны, но и области повышенного давления в слое смещения, возникающие перед и за крупномасштабными вихрями в момент их образования, выделения и взаимодействия с дном каверны. Выявлены случаи согласования моментов появления областей повышенного давления в слое смещения с приходом волн давления, распространяющихся от задней стенки с частотой определенных гармоник колебаний. Установлено, что усиление колебаний на модах, отличных от первой, обуславливается интерференцией указанных волн давления и волновых возмущений. Нестационарный процесс в этом случае представлялся как совокупность синхронных взаимозависимых автоколебаний, характерное время которых определялось положением источника волновых возмущений.

Проведенные оценки позволили понять, каким образом сосуществуют различные моды колебаний. При этом само расположение источников волновых возмущений зависит, прежде всего, от газодинамических и физических параметров слоя смещения в каверне. Было подтверждено, что в каверне при некоторых режимах обтекания реализовываются одновременно несколько нестационарных процессов: гидродинамической, расходно-волновой и резонансной природы, причем волна давления, генерируемая задней стенкой, участвует во всех этих процессах, но в разных гармониках колебаний. Нестационарные процессы гидродинамической и расходно-волновой природы могут быть не совсем регулярными и стабильными, т.е. они близки к так называемым релаксационным автоколебаниям. Наиболее устойчивым является резонансный процесс. Рассмотренные автоколебания взаимосвязаны, поддерживают друг друга, что не дает им затухнуть под воздействием диссипативных потерь.

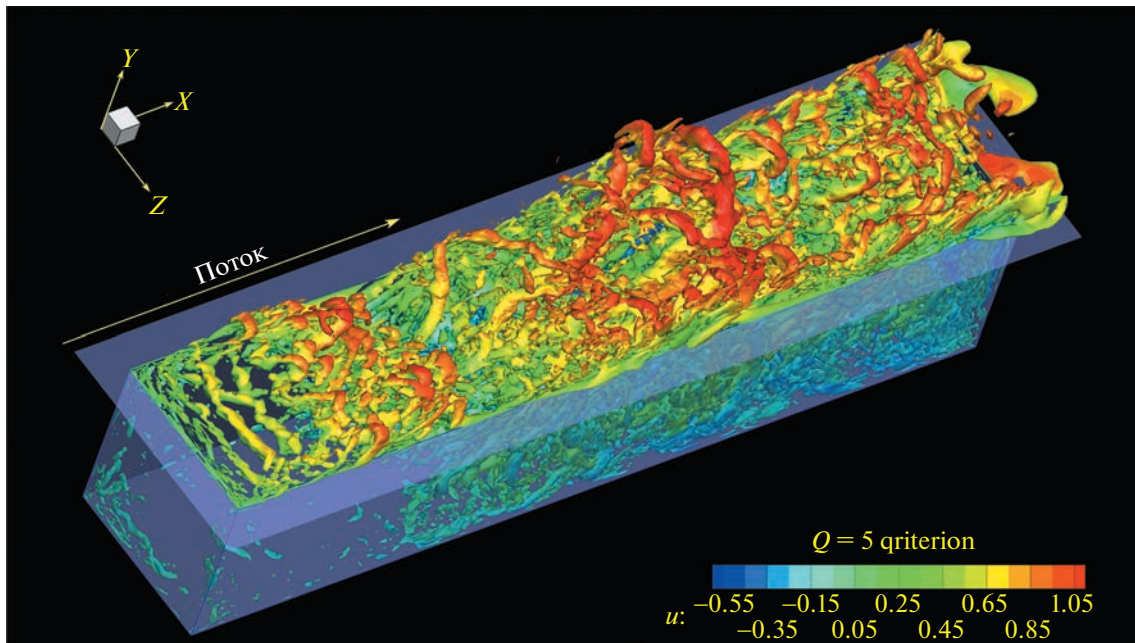
Автоколебательные процессы гидродинамической и расходно-волновой природы были установлены и при изучении нестационарного обтекания трехмерного уступа, когда за ним происходила транзвуковая перестройка течения. Резонансный процесс в этом случае отсутствовал [9].

Исследования обтекания каверны с открытым типом течения ( $L/H = 5$ ) при  $M_\infty = 0.85$  (каверна M219) проводились экспериментальными и численными методами большим количеством авторов [21–23, 26–28]. Характеристики течения в ней используются для проверки разрабатываемых методов и программ. Численные исследования такой каверны при том же числе Маха были проведены и авторами данной статьи [9]. Эти исследования показали, что и при обтекании каверны с открытым типом течения крупномасштабные вихревые структуры образуются на некотором расстоянии вниз по потоку от задней стенки — в выпуклостях волн неустойчивости. Нашли свое подтверждение и некоторые другие особенности автоколебательного процесса гидродинамической природы, установленные ранее при изучении течения в протяженной каверне. В связи с этим в данной работе проводится более углубленный анализ обтекания такой каверны и сопоставление полученных данных с результатами других работ с целью установления общности природы автоколебаний, возникающих в различных кавернах.

## МЕХАНИЗМЫ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В КАВЕРНЕ

Математическая модель, численные методы и вычислительная постановка, использованные при проведении анализируемого в данной работе расчета турбулентного течения в каверне M219, подробно представлены в [9]. Здесь приводим их краткое описание.

Математическая модель для численного решения задачи строилась на основе полных уравнений Навье—Стокса для идеального сжимаемого газа. Течения возле каверны относятся к классу течений с ярко выраженным отрывом и присоединением. Для воспроизведения таких течений наиболее эффективными признаны вихреразрешающие подходы и, в частности гибридные RANS-LES методы семейства DES [29]. В [9] использовался принадлежащий этому семейству



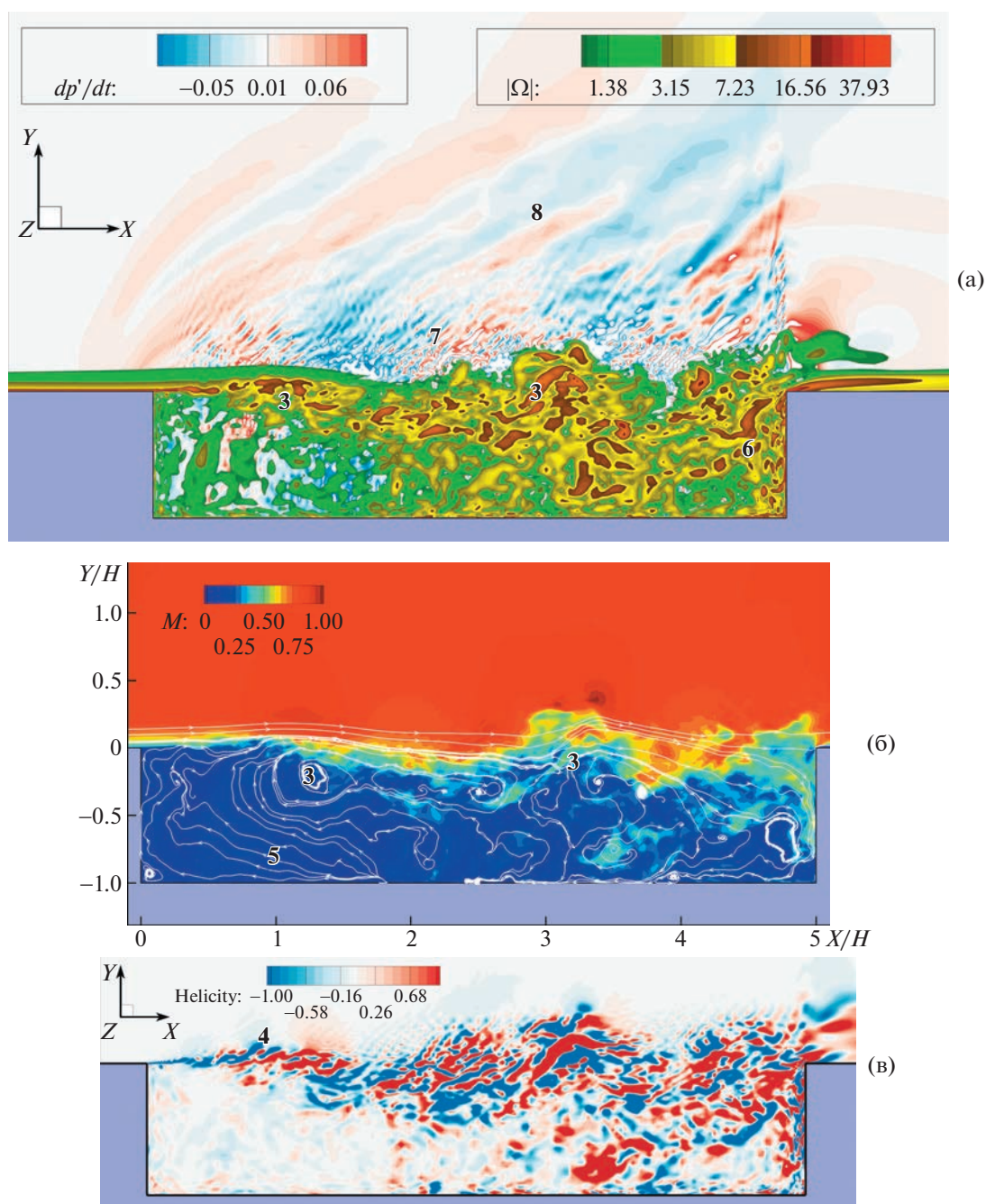
**Рис. 1.** Мгновенные поля изоповерхностей Q-критерия ( $Q = 5$ ); палитра соответствует уровням относительной продольной скорости при начале слива массы газа из каверны.

метод IDDES [30]. В качестве модели замыкания при этом применялась модель Спаларта—Аллараса для модифицированной турбулентной вязкости. Численное моделирование течения проводилось согласно так называемому “полностью турбулентному подходу”, при котором предполагается, что переход пограничного слоя в турбулентный режим совершается очень быстро. Это обеспечивалось достаточно высоким уровнем турбулентности набегающего потока, который возникал из-за приравнивания турбулентной вязкости к молекулярной на входной границе. На поверхностях каверны и пластины, в которую она встраивалась, ставились условия прилипания для скорости ( $u = 0$ ) и адиабатической стенки ( $\partial T / \partial n = 0$ ), турбулентная вязкость на стенках полагалась равной нулю.

Для проведения расчетов использовался программный комплекс NOISEtte, в котором реализован вычислительный алгоритм с определением переменных в узлах неструктурированной сетки. В его основе лежит EBR схема повышенной точности [31] для аппроксимации конвективных потоков. Ввиду того, что рассматривались трансзвуковые режимы обтекания каверны, характеризующиеся наличием высоких градиентов решения и скачков, для проведения расчетов использовалась WENO модификация EBR схемы [32]. Интегрирование по времени проводилось с помощью неявной схемы второго порядка точности с линеаризацией по Ньютону разностной системы уравнений. Необходимо отметить, что при проведении численного моделирования число Куранта выбиралось таким образом, чтобы в области возмущенного турбулентного взаимодействия (в области отрыва внутри каверны) его локальное значение на некотором удалении от твердых стенок не превышало единицы. На каждом шаге по времени проводилось несколько итераций по Ньютону до сходимости по относительной невязке.

Входная граница расчетной области находилась на расстоянии  $7.75H$  от передней кромки каверны вверх по потоку. Выходная граница вниз по потоку находилась на расстоянии  $5.25H$  от задней кромки каверны. Верхняя выходная граница располагалась на расстоянии  $16H$  от поверхности пластины. Наконец, поперечные границы с условиями отражения имели координаты  $z/H = \pm 4.5$ . Используемая система координат представлена на рис. 1 и 2.

Численное моделирование задачи проводилось на неструктурированной гексаэдральной сетке, построенной исходя из требований, предъявляемым к сеткам для расчетов с помощью гибридных RANS—LES-методов. В частности, в зоне основного турбулентного взаимодействия в задней части каверны характерный размер ячейки не превышал  $H/33$ . Разрешение пограничного слоя на поверхностях, на которых ставились условия прилипания, было относительно грубым и составляло  $10^{-3}H$ , при этом безразмерное значение величины первого пристеночного ша-



**Рис. 2.** Мгновенные картины течения возле каверны (сверху вниз соответственно): а – уровни модуля завихренности и производной от давления по времени; б – распределение числа Маха с линиями тока; в – уровни спиральности.

га в переменных закона стенки  $\Delta y^+$  варьировалось от 5 до 10. В итоге общее число узлов вычислительной сетки составило 4048149.

Данные по полям мгновенных значений газодинамических параметров течения, полученные в численных исследованиях [9], представлены на рис. 1 и 2. Иллюстрируется характер течения в каверне на стадии начала слива массы газа. Анализ данных показывает, что вначале с передней угловой кромки каверны срываются вихри 1, имеющие квазидвумерный характер (так называемые поперечно-ориентированные вихревые структуры). Затем ниже по течению они теряют устойчивость, отдельные их звенья приобретают большую скорость, вытягиваются, образуют

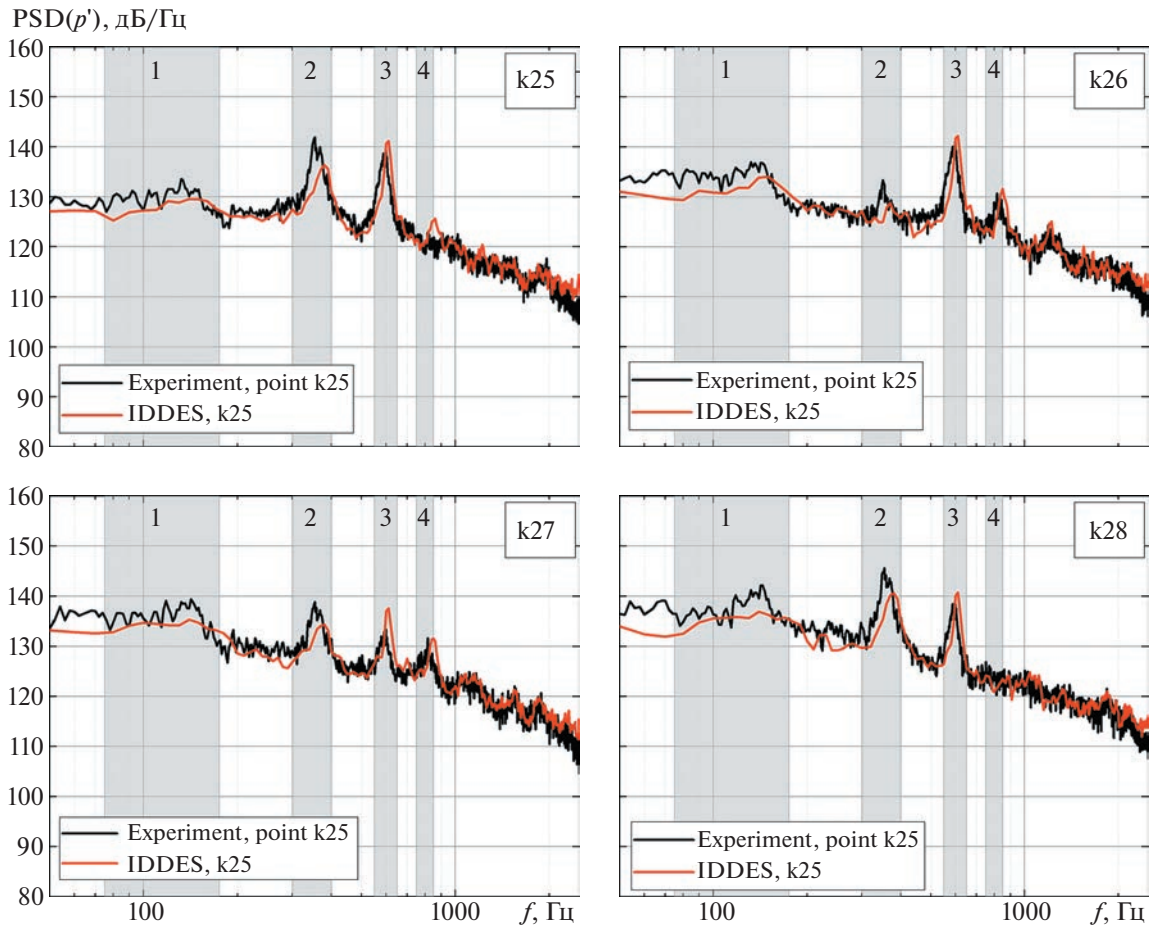


Рис. 3. Сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными по спектральной плотности мощности пульсаций давления в точках k25, k26, k27 и k28 (в дБ/Гц).

петли. Возникают трехмерные вихри 2, которые входят в слой смешения крупномасштабных вихревых структур 3. Но сами эти структуры возникают в первом по потоку гребне волн неустойчивости 4. Механизм их образования оказался таким же, как и в протяженной каверне [8], включая и вовлечение в вихревые структуры массы газа из окружающих областей кормового отрыва. Видно, что затекание осуществляется и из возвратного течения 5. Таким образом, точнее надо говорить о потере устойчивости всего сдвигового слоя зоны отрыва, а не только ее слоя смешения.

Благодаря возрастанию эжекционных свойств внешнего потока на выпуклостях волн неустойчивости вихревое течение упорядочивается, становится более организованным. Масштаб структур при их смещении вниз по потоку увеличивается. Процесс изменения вихревых структур схож с бифуркацией течения при развитии неустойчивости Кельвина–Гельмгольца с той лишь разницей, что он протекает при сильном влиянии волновых возмущений, усиливающих благодаря наличию стенок каверны, и возвратного течения зоны отрыва.

При подходе к задней стенке происходит деформация вихревых структур, вихри дробятся, налегают друг на друга, нарастающая масса газа выдавливается наружу (область потока 6). На приведенных рисунках видны и волновые возмущения 7, генерируемые крупномасштабными вихревыми структурами, и волна давления 8, возникающая при взаимодействии потока с задней стенкой после слива.

Таким образом, результаты исследований особенностей обтекания каверны с открытым типом течения согласуются по многим деталям с данными по характеру обтекания протяженной каверны [8]. В описанных автоколебательных процессах гидродинамической и расходно-волновой природы много общего оказалось и с особенностями нестационарного обтекания трехмерного уступа, когда за ним происходила трансзвуковая перестройка течения [9].

На рис. 3 проводится сравнение функций спектральной плотности пульсаций давления, полученных в данных численных исследованиях и в экспериментах [28]. Пульсации давления

**Таблица 1.** Характерные частоты колебаний давления в каверне, полученные как в экспериментальных, так и численных для каверны M219

|                                                             | Частоты, Гц |         |         |     |     |         |         |     |         |         |     |         |         |          |          |
|-------------------------------------------------------------|-------------|---------|---------|-----|-----|---------|---------|-----|---------|---------|-----|---------|---------|----------|----------|
| Эксперимент [21]                                            | 139*        |         | 231     |     |     | 352*    | 443     | 491 | 534     | 591*    | 660 |         | 811*    |          |          |
| Эксперимент [27]                                            | 137*        | 200     | 248     | 318 |     | 357*    | 400     | 446 | 536     | 589*    | 659 | 714     | 786*    |          |          |
| Эксперимент [28]                                            | 140*        |         | 250     |     |     | 355*    |         |     |         | 600*    |     |         | 840*    | 1170     | 1500     |
| Расчет DES [21]                                             | 143*        | 211     | 234     | 274 | 354 | 369*    | 389     | 491 | 571     | 600*    | 657 | 711     | 760     |          |          |
|                                                             |             |         | 251     | 291 |     |         | 429     |     |         |         |     | 743     | 811*    |          |          |
|                                                             |             |         |         |     |     |         | 411     |     |         |         |     |         |         |          |          |
| Расчет LES [22]                                             | 125*        | 200     |         |     |     | 360*    |         | 450 |         | 585*    | 650 | 700     | 825*    |          |          |
|                                                             |             |         |         |     |     |         |         | 500 |         |         |     | 750     |         |          |          |
| Расчет DES [23]                                             | 150*        | 200     | 246     | 289 | 345 | 371*    | 418     | 471 | 578     | 618*    | 661 | 728     | 800     |          |          |
|                                                             |             |         |         |     |     |         |         | 521 |         |         |     |         |         |          |          |
| Расчет IDDES [9]                                            | 140*        | 209     | 239     | 312 |     | 375*    | 408     | 500 |         | 595*    |     | 700     | 835*    | 1170     | 1500     |
| Оценка частот по формуле Росситера                          | 148*        |         |         |     |     | 357*    |         |     |         | 566*    |     |         | 775*    |          |          |
| Оценка частоты автоколебаний гидродинамической природы      | 139 (1)     |         | 278 (2) |     |     |         | 417 (3) |     | 556 (4) |         |     |         |         |          |          |
| Оценка частоты автоколебаний расходно-волновой природы      |             | 189 (1) |         |     |     | 378 (2) |         |     |         | 567 (3) |     |         | 756 (4) |          |          |
| Оценка частоты генерации крупномасштабных вихревых структур |             |         |         |     |     |         |         | 462 |         |         |     |         |         |          |          |
| Оценка частоты автоколебаний резонансной природы            |             |         |         |     |     | 342 (1) |         |     |         |         |     | 684 (2) |         | 1026 (3) | 1368 (4) |
|                                                             |             |         |         |     |     |         |         |     |         |         |     |         |         |          | 1710 (5) |

определялись на дне каверны, в точках с относительными продольными координатами  $x/H$ , равными 2.75 (κ25), 3.25 (κ26), 3.75 (κ27), 4.25 (κ28). Отмечается хорошее согласование экспериментальных и численных результатов.

Проведем анализ численных исследований с целью детального изучения механизма нестационарного процесса в каверне с открытым типом течения. Проверим, идентичен ли он процессу, установленному при исследованиях протяженной каверны. В табл. 1 приведены данные по характерным частотам колебаний давления в каверне, полученные как в экспериментальных [26–28], так и численных [9, 21–23] исследованиях при следующих условиях [22]:  $M_\infty = 0.85$ ,  $V_\infty = 276.45$  м/с,  $T_0 = 301^\circ\text{K}$ ,  $C_0 = 347$  м/с,  $L = 0.508$  м ( $T_0$ ,  $C_0$  – температура и скорость звука в заторможенном потоке). Здесь же помещены результаты вычислений частот с использованием исходной формулы Росситера [1] при  $\alpha = 0.29$  и  $k = 0.5$ ). Из анализа приведенных материалов следует, что пульсации давления в каверне характеризуются целым рядом частот, которые по данным различных работ неплохо согласуются друг с другом. Из них выделяются четыре частоты (помечены звездочками), на которых уровни узкополосных составляющих достигают повышенных значений. Расчеты по формуле Росситера отражают именно эти частоты – табл. 1.

Согласно [8] большое количество наблюдаемых характерных частот может быть обусловлено возникновением в каверне автоколебательных процессов различной природы, которые протекают одновременно. А именно: гидродинамической природы, расходно-волновой и резонансной. Выясним, возможно ли существование такого сложного нестационарного течения в рассматриваемой каверне. Проведем оценку частот. В этом случае при анализе необходимо будет уделять

внимание всем характерным частотам, а не только тем, на которых реализуются максимальные уровни узкополосных составляющих. При наличии корреляционных характеристик возможно точное определение фазовой скорости распространения волновых возмущений, являющихся составными элементами указанных процессов. Однако для получения таких данных требуется временная выборка данных большой длины. При небольших по времени реализациях для нахождения фазовых скоростей проводятся оценки. Применим методику [8], согласно которой для определения характерных времен используются поля газодинамических параметров. За основу примем поля течения, соответствующие началу слива (рис. 2).

Рассмотрим, какие частоты должны относиться к автоколебательному процессу гидродинамической природы. Согласно полученным данным, частота колебаний первой моды определяется суммой времен формирования крупномасштабной вихревой структуры вблизи передней стенки (но на некотором расстоянии от нее) —  $t_1$ , сноса ее вниз по потоку до взаимодействия с задней стенкой —  $t_2$  и перемещения волны давления от задней стенки к передней —  $t_3$ . Однако генерация новой волны давления наступает после слива накопившейся массы газа, когда на периферии задней стенки достигается максимум давления. Следовательно, надо учесть и время слива  $t_4$ . Тогда частоты колебаний будут определяться формулой:  $f = n/(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)$ , где  $n$  — частотный номер моды ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Как уже отмечалось, формирование крупномасштабной вихревой структуры связано с выпучиванием границы сдвигового слоя после прихода к передней стенке волны давления и начала повышения здесь давления. Следовательно, время  $t_1$  будет зависеть от длины слоя смещения зоны отрыва в каверне и скорости набегающего потока. Принимаем за основу время  $t_1$ , равное 0.0022 с, которое было определено при численных исследованиях течения в протяженной каверне [8]. Время  $t_1$  для рассматриваемого случая обтекания каверны с открытым типом течения найдем из условия равенства характеризующего его относительного времени  $t_1^*$  ( $t_1^* = (t_1 \times V_\infty)/l$ ) обратному числу Струхала и соответствующего времени, определенного при численных исследованиях течения в протяженной каверне [8]. Принимаем за основу время  $t_1$ , равное 0.0022 с [8]. Вносим поправку, учитывающую различие в скоростях набегающего потока  $V_\infty$  и длине характерных участков слоя смещения  $l$ , которые реализовывались в протяженной каверне ( $V_\infty = 274.4$  м/с,  $l = 0.369$  м,  $L = 0.9$  м) и каверне с открытым типом течения ( $V_\infty = 276.45$  м/с,  $l = 0.366$  м,  $L = 0.508$  м). В первом случае длина слоя смещения  $l$  определялась до области присоединения кормового отрыва ко дну каверны, а во втором учитывалась лишь протяженность слоя смещения до начала области деформации в момент начала слива массы газа из каверны. Согласно данным рис. 2 и работы [23], в открытой каверне при рассматриваемых условиях величина указанной части слоя смещения составляет  $l/L = 0.72$ , т.е. 0.366 м. В итоге время  $t_1$  оказалось равным 0.00217 с. Из [8] следует, что обратная величина этого времени (461 Гц) должна быть близкой к частоте генерации крупномасштабных вихревых структур.

Проведем оценку времени сноса крупномасштабной вихревой структуры вниз по потоку до взаимодействия с задней стенкой —  $t_2$ . Согласно результатам исследований течения в протяженной каверне [8] место образования крупномасштабной вихревой структуры находится на относительном (в долях  $L$ ) расстоянии от передней стенки, равном 0.16. По данным настоящих расчетов и работы [23] соответствующее расстояние для каверны с открытым типом течения равно 0.19 (определялось по положению первого гребня волны неустойчивости). Следовательно, путь, пройденный вихревой структурой от места образования до задней стенки, составит 0.41 м ( $0.81L$ ). Значение скорости смещения крупномасштабной вихревой структуры вниз по потоку определим по численным данным [8], согласно которым средняя относительная скорость конвекции вихревой структуры в слое смещения  $V/V_\infty$  при рассматриваемых условиях соответствует 0.49–0.55 (примем равной 0.5). Это согласуется с результатами исследований [22], согласно которым указанная скорость в слое смещения составляет 0.57. Тогда  $V = 138.23$  м/с и время  $t_2$  составит 0.00297 с.

Оценим время распространения волны давления от задней стенки к передней —  $t_3$ . Примем, что перемещение волны давления от задней стенки к передней происходит через область зоны отрыва, располагающуюся вблизи дна каверны, где скорость потока близка к нулю. В этом случае получим  $t_3 = L/C_0 = 0.00146$  с.

Определим время слива  $t_4$ . В области течения, где происходит слив массы газа, протяженностью (если отсчитывать от задней стенки) 0.71 Н (0.0707 м), осредненное значение местного числа Маха сносимого потока равно 0.35, что соответствует скорости потока 121.45 м/с (см. рис. 2).

Приняв, что осредненная скорость слива близка к скорости местного сносящего потока, найдем, что  $t_4$  равно 0.000582 с. В итоге суммарное время ( $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ ) составляет 0.00718 с, а частота первой гармоники автоколебаний гидродинамической природы – 139 Гц.

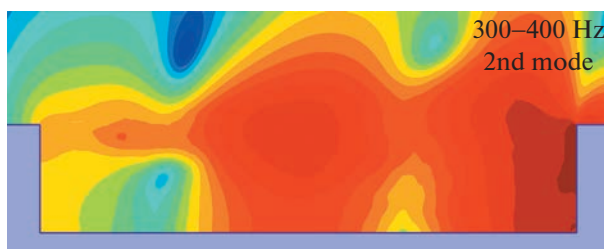
Проверим возможность возникновения в рассматриваемых условиях расходно-волнового процесса. Оценим частоту первой гармоники этих автоколебаний. Как указывалось выше, время процесса будет определяться суммой времени распространения волны давления от задней стенки к передней, т.е. временем  $t_3$ , и временем перемещения отраженной от передней стенки волны вниз по потоку. Принималось, что отраженная волна смещается вниз по потоку со скоростью конвекции крупномасштабных вихревых структур, т.е. вместе с ними. Однако до первой структуры отраженная волна давления должна смещаться вниз по потоку со скоростью звука, т.е. в нашем случае со скоростью 347 м/с. Определим это время:  $t'_2 = 0.19L/C_0 = 0.000278$  с. Время смещения волны вниз по потоку со скоростью конвекции крупномасштабных вихревых структур было определено раньше,  $t_2 = 0.00297$  с. Опять учтем время слива  $t_4$ :  $t_4 = 0.000582$  с. Раньше было найдено и время  $t_3$ :  $t_3 = 0.00146$  с. В итоге частоты тональных колебаний при возникновении в каверне нестационарного процесса расходно-волновой природы будут определяться формулой:  $f = n / (t'_2 + t_2 + t_4 + t_3)$ . Здесь  $n$  – частотный номер моды ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Тогда частота первой гармоники колебаний расходно-волновой природы составит 189 Гц.

В заключение проведем оценку частот автоколебаний резонансной природы. Рассмотрим возможность возникновения в каверне продольного линейного резонансного процесса. Известно, что эти автоколебания порождаются чисто волновым процессом и возникают в случае взаимодействия двух звуковых волн, распространяющихся на определенной частоте навстречу друг к другу. Следовательно, в рассматриваемом случае передвижение отраженной волны, участвующей в резонансном процессе, не может быть ограничено перемещением вихревой структуры в слое смещения. Следовательно, часть волны давления, отраженной от передней стенки, огибает первую по потоку крупномасштабную вихревую структуру (рис. 2) и распространяется к задней стенке через область течения вблизи дна каверны, причем со скоростью, соответствующей местной скорости звука. В этом случае условия для возбуждения в каверне стоячей звуковой волны будут существовать: наличие источника волновых возмущений (прежде всего, вихревое течение у периферии задней стенки), отражающих поверхностей (передняя и задняя стенки каверны) и области дозвукового течения (внутренняя часть зоны отрыва). При жестких стенках каверны вдоль нее на частоте первой гармоники колебаний будет размещаться половина длины стоячей звуковой волны с пучностями, располагающимися на этих стенках.

Примем, как и прежде, скорость распространения звуковой волны внутри зоны отрыва равной скорости звука заторможенного потока. Тогда частоты резонансных колебаний в рассматриваемом случае будут определяться формулой:  $f_n = n \times C_0 / (2L)$ , а частота первой гармоники колебаний резонансной природы составит 342 Гц.

Результаты проведенных оценок частот автоколебаний гидродинамической, расходно-волновой и резонансной природы, с добавлением частот гармоник, представлены в табл. 1. Видно, что приведенные данные находятся в хорошем согласии с результатами экспериментальных и численных исследований. Таким образом, проведенные оценки позволили провести селекцию частот и показать, что в каверне открытого типа течения при некоторых режимах обтекания реализовываются одновременно несколько нестационарных процессов: гидродинамической, расходно-волновой и резонансной природы. Обращает на себя внимание близость частоты первой гармоники автоколебаний резонансной природы к частотам второй и третьей гармоник колебаний соответственно расходно-волновой и гидродинамической природы, что свидетельствует о взаимозависимости выявленных процессов. Полученный вывод согласуется с результатами ранних исследований [3] и обтекания переходной каверны [8]. Отметим, что полученные данные по характерным частотам автоколебаний различной природы (см. табл. 1) могут незначительно (в пределах 1–5%) варьироваться в случае несущественных изменений в оценке характерных скоростей и длин, их определяющих. Однако это не влияет на правомерность утверждения и выводов настоящей работы.

Численные исследования показали, что в местах генерации волны давления и волновых возмущений отмечаются повышенные уровни пульсаций давления (см. рис. 4). Как уже отмечалось, положение гребня волны неустойчивости в момент возникновения местной области повышенного давления и начала генерации волнового возмущения определяет гармоники колебаний гидродинамической природы [8]. Из рассмотрения полей среднеквадратичных значений пульсаций давления и газодинамических параметров, полученных в данных исследованиях и в работе [23],



**Рис. 4.** Поле среднеквадратичных значений пульсаций давления на частоте второй моды автоколебательного процесса гидродинамической природы.

следует, что автоколебательный процесс гидродинамической природы в рассмотренном случае не может иметь количество гармоник больше четырех.

Из данных, приведенных в табл. 1, следует, что расчеты частот по эмпирической формуле Росситера позволяют оценить частоты, на которых уровни узкополосных составляющих достигают существенных значений. Однако для поиска путей снижения нестационарных нагрузок надо знать природу и механизмы автоколебательных процессов, их порождающих.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных численных исследований и их детального анализа установлены особенности нестационарного трансзвукового обтекания каверны с открытым типом течения. Сравнение полученных данных с результатами исследований обтекания каверн различной относительной длины, в том числе и более протяженной, позволило подтвердить теоретические выводы авторов о механизмах автоколебательных процессов, протекающих в каверне, и выявить их идентичность.

Показано, что возникающие автоколебания имеют различную физическую природу: гидродинамическую, расходно-волновую, резонансную, и взаимосвязаны друг с другом. Учет взаимодействия в каверне процессов трех типов позволяет более корректно обосновать отсутствие кратности мод в спектральном составе результирующих пульсаций давления, а также разную амплитуду узкополосных составляющих. Отмечено, что расчеты по формуле Росситера позволяют определить лишь те частоты, на которых уровни узкополосных составляющих достигают существенных значений независимо от природы порождающих их физических процессов.

Автоколебательные процессы в кавернах определяются газодинамическими и физическими параметрами слоя смещения и волнами давления. Подтверждено, что и при обтекании каверны с открытым типом течения источником волновых возмущений является не только задняя стенка каверны, но и гребни волн неустойчивости. Возникновение крупномасштабных вихревых структур происходит на некотором расстоянии от передней стенки, в первом гребне волн неустойчивости, при определенном поперечном перепаде давления, возникающим под воздействием волн давления. Происходит вовлечение в эту структуру массы газа не только мелкомасштабных вихрей, образующихся на начальном участке слоя смещения, но и турбулентных структур из области возвратного течения отрывной зоны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rossiter J.E.*, Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds // Aeronautical Research Council Reports & Memoranda. October 1964. № 3438.
2. *Heller H.H., Holmes D.G. and Covert E.E.*, Flow Induced Pressure Oscillations in Shallow Cavities // J. Sound Vib. 1971. V. 18. № 4. P. 545–553.
3. *Heller H.H. and Bliss D.B.*, The Physical Mechanism of Flow Induced Pressure Fluctuations in Cavities and Concepts for their Suppression // AIAA Paper 75–491. 1975.
4. *Bloch P.J.W.*, Noise response of cavity of varying dimensions at subsonic speeds // NASA TN D- 8351. 1976. P. 1–67.
5. *Tam C.K.W. and Bloch P.T.W.*, On the Tones and Pressure Oscillations Induced by Flow over Rectangular Cavities // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. Part 2. P. 373–399.
6. *Hankey W.L. and Shang J.S.*, Analyses of Pressure Oscillations in an Open Cavity // AIAA J. 1980. V. 18. № 8. P. 892–898.

7. Антонов А.Н., Вишняков А.Н., Шалаев С.П., Экспериментальное исследование пульсаций давления в выемке, обтекаемой дозвуковым или сверхзвуковым потоком газа // ПМТФ. 1981. № 2. С. 89–97.
8. Абдрашитов Р.Г., Архиреева Е.Ю., Даньков Б.Н., Меньшов И.С., Северин А.В., Семенов И.В., Требунских Т.В., Чучкалов И.Б., Механизмы нестационарных процессов в протяженной каверне // Ученые записки ЦАГИ. 2012. Т. XLIII. № 4. С. 39–56.
9. Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К., Численное моделирование возникновения автоколебательного процесса возле трехмерного обратного уступа при трансзвуковом режиме обтекания // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 4. С. 108–119.
10. Рокуэлл Д., Колебания сдвиговых слоев, взаимодействующих с препятствиями // Аэрокосмическая техника. 1984. Т. 2. № 2.
11. Лебедев М.Г., Теленин Г.Ф. Взаимодействие сверхзвуковой струи с акустическим полем // Институт механики МГУ. Науч. тр. 1970. № 5. С. 88–107.
12. Morkovin M.V. and Paranjape S.V., On Acoustic Excitation of Shear Layers // Zeitschrift für Flugwissenschaften. 1971. V. 19. Heft 8/9. P. 328–335.
13. Tam C.K.W. Excitation of Instability Waves in a Two-Dimensional Shear Layer by Sound // J. Fluid Mech. 1978. V. 89. Part 2. P. 357–371.
14. Tam C.K.W. The Effects of Upstream Tones on the Large Scale Instability Waves and Noise of Jets // in Mechanics of Sound Generation in Flows, edited by E. Mueller. Springer-Verlag. New York. IUTAM. ICA, AIAA-Symposium. 1979. P. 41–47.
15. Ahuja K., Mendoza J., Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes // NASA CR. 1995. № 4653. P. 1–284.
16. Blake W.K., Mechanics of flow-induced sound and vibration // General concepts and elementary sources. Academic Press, Inc. 1986. V. 1. Chap. 3. 1986. P. 130–149.
17. Sarno R.L., Franke M.E., Suppression of Flow-Induced Pressure Oscillations in Cavities // J. Aircr. 1994. V. 31. № 1. P. 90–96.
18. Rubio G., De Roeck W., Baelmans M., Desmet W., Numerical study of noise generation mechanisms in rectangular cavities // Europ. Colloquium 467: Turbulent Flow and Noise Generation. Marseille. France. 2005. P. 1–4.
19. Keller J.J. and Escudier M.P., Periodic Flow Aspects of Throttles, Cavities, and Diffusers // Brown Boveri Research Center Rept. KCR-79-144B. Nov. 1979.
20. Arunajatesan S., Shipman J.D., Sinha N. Mechanisms in high-frequency control of cavity flows // AIAA-2003-0005.
21. Mendonca F., Richard A., de Charentenay J., Kirkham D., CFD Prediction of Narrowband and Broadband Cavity Acoustics at  $M = 0.85$  // AIAA-2003-33303. 2003. P. 1–11.
22. Larcheveque L., Sagaut P., Le T-H., Comte P., Large-eddy simulation of a compressible flow in a three-dimensional open cavity at high Reynolds number // Fluid Mech. 2004. V. 516. P. 265–301.
23. Nayyar P., Barakos G N. and Badcock K.J., Analysis and Control of Weapon Bay Flows // RTO-MP-AVT-123. 2005. P. 24-1–24-25.
24. Arunajatesan S., Kannepalli C., Sinha N., Analysis of control concepts for cavity flows // AIAA-2006-2427.
25. Plentovich E.B., Tracy M.B., Stallings R.L., Experimental cavity pressure measurements at subsonic and transonic speeds // NASA Technical Paper 3358. 1993.
26. Ross J.A., Private Communications, QinetiQ, Bedford, MK41 6AE, UK.
27. Ross J.A. and Peto J.W., The Effect of Cavity Shaping, Front Spoilers and Ceiling Bleed on Loads Acting on Stores, and on the Unsteady Environment Within Weapon Bays // Technical report. QinetiQ. March 1997.
28. De Henshaw M.J.C., M219 cavity case: verification and validation data for computational unsteady aerodynamics // Tech. Rep. RTO-TR-26, AC/323. (AVT) TR/19. QinetiQ. UK. 2002. P. 453–472.
29. Spalart P.R., Detached-Eddy Simulation // Annu. Rev. Fluid Mech. 2009. V. 41. P. 181–202.
30. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh., Travin A.K., A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wallmodeled LES capabilities // Intern. J. Heat and Fluid Flow. 2008. V. 29. № 6. P. 1638–1649.
31. Bakhvalov P.A., Abalakin I.V., Kozubskaya T.K., Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2016. V. 81. № 6. P. 331–356.
32. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // Comput. Fluids. 2018. V. 169. P. 98–111.