

Номер 3

ISSN 1024-7084

Май–Июнь 2024



ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



НАУКА
— 1727 —

Известия Российской академии наук

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Май—Июнь № 3 2024

*Выходит 6 раз в год
Основан в январе 1966 г.*

ISSN: 1024-7084

*Журнал издается под руководством
Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН*

Главный редактор С.Т. Суржиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.В. Аксенов, В.Б. Баранов, А.М. Гайфуллин, А.Н. Голубятников,
В.В. Измоденов, С.А. Исаев, В.П. Карликов, А.Н. Крайко,
А.Г. Куликовский, В.А. Левин, Н.В. Никитин,
А.Н. Осипцов (заместитель главного редактора),
В.В. Пухначев, Е.М. Смирнов, С.А. Таковицкий, Г.Г. Цыпкин

Зав. редакцией Т.А. Каллаур

*Адрес редакции: 119526, Москва,
проспект Вернадского, 101, корп. 1, тел. 8-495-434-22-21
e-mail: mzg@ipmnet.ru; http: //mzg.ipmnet.ru*

Москва
ФГБУ «Издательство «Наука»

© Российская академия наук, 2024

© Редколлегия журнала «Механика жидкости
и газа» (составитель), 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2024

Пространственная континуальная модель формирования просвета в кластере клеток, погруженном во внеклеточный матрикс: роль механических факторов <i>С. А. Логвенков</i>	3
Экспериментальное и численное исследование эффекта кавитационного присасывания <i>А. И. Уколов, В. П. Родионов</i>	20
Влияние электрического поля на динамику структурных компонентов течения при гравитационном отрыве капли воды <i>Ю. Д. Чашечкин, В. Е. Прохоров</i>	30
Изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове от движущихся периодически изменяющихся возмущений <i>Ж. В. Маленко, А. А. Ярошенко</i>	45
Математическая модель переноса водо- и нефтерастворимых трассеров при исследовании многозонного гидроразрыва пласта <i>А. Б. Мазо, М. Р. Хамидуллин, К. А. Поташев, А. А. Ураимов</i>	57
Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и перехода к развитой турбулентности <i>В. В. Змушко, М. И. Полищук, А. Н. Разин, А. А. Синельникова, А. Н. Щербаков</i>	75
Численное моделирование кризиса сопротивления при обтекании сферы с использованием вихреразрешающего подхода <i>А. С. Стабников, А. В. Гарбарук, М. Х. Стрелец</i>	97
Пристенные турбулентные закрученные струи <i>А. М. Гайфуллин, А. С. Щеглов</i>	112
Численное моделирование генерации волн Толлмина–Шлихтинга турбулентностью потока <i>М. В. Устинов</i>	122
Режимы вытеснения из анизотропного пласта при закачке жидкости через вертикальную скважину <i>А. И. Андреева, А. А. Афанасьев</i>	137
Особенности распределения межзвездной пыли в гелиосфере с учетом нестационарного магнитного поля <i>Е. А. Годенко, В. В. Измоденов</i>	154
Асимптотический анализ притока к трещине в нефтегазовой залежи с подошвенной водой <i>Р. Д. Каневская, П. В. Кузнецов, Л. Л. Рыжова</i>	167
Дифракция волн на ледяном покрове при наличии течения со сдвигом скорости <i>Л. А. Ткачева</i>	181
Влияние снежного покрова на гидродинамические нагрузки тонкого тела, движущегося в жидкости под ледяным покровом <i>В. Л. Земляк, В. М. Козин, А. В. Погорелова</i>	198
Динамика ионных и электронных потоков в разрядной камере Пеннинга <i>С. Т. Суржиков</i>	211

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2024

Three-Dimensional Continuum Model of Lumen Formation in a Cluster of Cells Immersed in an Extracellular Matrix: The Role of Mechanical Factors <i>S. A. Logvenkov</i>	3
Experimental and Numerical Investigation of the Cavitation-Induced Suction Effect <i>A. I. Ukolov, V. P. Rodionov</i>	20
Electric Field Effect on the Dynamics of the Structural Flow Components in the Case of Gravity-Induced Separation of a Water Drop <i>Yu. D. Chashechkin, V. E. Prokhorov</i>	30
Flexural-Gravity Waves in an Ice Cover Exited by Periodically Varying Moving Perturbations <i>Zh. V. Malenko, A. A. Yaroshenko</i>	45
Mathematical Model of Water- and Oil-Soluble Tracers Transfer in Studying Multistage Hydraulic Fracturing <i>A. B. Mazo, M. R. Khamidullin, K. A. Potashev, A. A. Uraimov</i>	57
Simulation of the Development of Richtmyer-Meshkov Instability and Transition to Developed Turbulence <i>V. V. Zmushko, M. I. Polishchuk, A. N. Razin, A. A. Sinel'nikova, A. N. Shcherbakov</i>	75
Numerical Modeling of the Drag Crisis in Flow past a Sphere Using a Vortex-Resolving Approach <i>A. S. Stabnikov, A. V. Garbaruk, M. Kh. Strelets</i>	97
Turbulent Swirled Wall Jets <i>A. M. Gaifullin, A. S. Shcheglov</i>	112
Numerical Simulation of Tollmien-Schlichting Wave Generation by Flow Turbulence <i>M. V. Ustinov</i>	122
Regimes of Displacement from an Anisotropic Formation during Injection of Fluid through a Vertical Well <i>A. I. Andreeva, A. A. Afanasyev</i>	137
Peculiarities of the Interstellar Dust Distribution in the Heliosphere Induced by the Time-Dependent Magnetic Field <i>E. A. Godenko, V. V. Izmodenov</i>	154
Asymptotic Analysis of the Inflow to a Fracture in an Oil-Gas Pool in Bottom Water <i>R. D. Kanevskaya, P. V. Kuznetsov, L. L. Ryzhova</i>	167
Wave Diffraction on an Ice Sheet in the Presence of Shear Current <i>L. A. Tkacheva</i>	181
Influence of a Snow Cover on Hydrodynamic Loads of a Slender Body Moving in Fluid beneath an Ice Cover <i>V. L. Zemlyak, V. M. Kozin, A. V. Pogorelova</i>	198
Dynamics of Ion and Electron Flows in the Penning Discharge Chamber <i>S. T. Surzhikov</i>	211

УДК 532.5: 576.7

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОСВЕТА В КЛАСТЕРЕ КЛЕТОК, ПОГРУЖЕННОМ ВО ВНЕКЛЕТОЧНЫЙ МАТРИКС: РОЛЬ МЕХАНИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

© 2024 г. С.А. Логвенков^{a, b}

^aНациональный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

^bМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

e-mail: logv@bk.ru

Поступила в редакцию 03.12.2023 г.

После доработки 12.02.2024 г.

Принята к публикации 15.02.2024 г.

Исследуется степень участия механизмов, таких как активные взаимодействия клеток между собой и с внеклеточным матриксом, повышенное гидростатическое давление в межклеточной жидкости и ферментативная активность клеток, приводящая к разрушению внеклеточного матрикса, в процессе формирования полостей в кластерах клеток, образующихся во время кластерного васкулогенеза. В рамках разработанной ранее континуальной многофазной модели среды, образованной двумя активно взаимодействующими твердыми фазами и жидкостью, решена задача об эволюции одиночного кластера клеток, погруженного в деформируемый внеклеточный матрикс и проведено исследование роли различных клеточных механизмов, обсуждаемых при формировании полых структур. Расчеты показали, что доминирование активных взаимодействий типа клетка–матрикс над межклеточными взаимодействиями приводит к смещению клеток в сторону внешней границы кластера и созданию условий для образования полости внутри него. Ферментативная активность клеток способствует освобождению свободного пространства для уплотнения кластера вследствие активных межклеточных взаимодействий и замедлению формирования возрастающего профиля концентрации клеточной фазы. Увеличение давления жидкости в занятой клетками области приводит к ускорению перераспределения концентраций клеточной фазы и матрикса. Давление жидкости способствует накоплению клеточной фазы около границы кластера и росту концентрации матрикса в центральной его части. И лишь совместное участие всех рассмотренных механизмов приводит к формированию структуры, в которой слой, образованный клеточной фазой, окружает заполненную жидкостью полость, при этом концентрация матрикса в полости демонстрирует тенденцию к его полному исчезновению.

Ключевые слова: клеточные системы, формирование просвета, континуальное моделирование.

DOI: 10.31857/S1024708424030012, **EDN:** PGHAUN

В настоящее время появляется все большее количество данных, которые указывают на важное значение активных напряжений, возникающих в биологических тканях в результате механических взаимодействий клеток как между собой, так и с внеклеточным матриксом [1–5]. Активные взаимодействия клеток важны, в частности, при формировании в многоклеточных организмах различных полых структур, которые в дальнейшем выполняют определенные физиологические функции, связанные с кровотоком, деятельностью почечной системы, трубчатой системы желез и пр. [5–8]. Проявление механической активности клеток в каждом отдельном случае носит индивидуальный характер и требует отдельного рассмотрения. В данной работе будут рассмотрены процессы, которые имеют место при формировании новых кровеносных сосудов в условиях гипоксии (недостатка кислорода).

Известны два основных процесса образования новой сети кровеносных сосудов – это ангиогенез и васкулогенез [9]. В процессе ангиогенеза новые сосуды формируются из существующих путем их ветвления. В процессе васкулогенеза происходит миграция эндотелиальных клеток-предшественников (клеток, участвующих в формировании сосудов), приводящая к формированию клеточных структур, которые напоминают своим строением сеть мелких кровеносных сосудов.

В процессе васкулогенеза выделяют так называемый кластерный васкулогенез [6], наблюдаемый только в тканях, испытывающих гипоксию. При кластерном васкулогенезе клетки-предшественники, оказавшиеся в условиях гипоксии, начинают активно вырабатывать фермент, способствующий разрушению внеклеточного матрикса, мигрируют и организуются в кластеры, и лишь затем образуют новую сосудистую сеть, прорастая из этих кластеров и сливаясь с ранее существовавшей сосудистой сетью.

Континуальные модели, представленные в работах [10–14], описывают начальную стадию экспериментов, в которых изучается развитие кровеносной системы в результате васкулогенеза. Модели описывают движение сплошной среды, образованной клетками, по плоскому субстрату из внеклеточного матрикса. Начальное распределение плотности клеток задается в виде расположенных случайным образом гауссовых колоколообразных распределений, имеющих среднюю ширину порядка диаметра клетки.

Движение клеточной среды в этих моделях происходит под действием сил, связанных с градиентом химического регулятора (хемотаксис) [10], а также вязкого трения между клетками и субстратом и сил, связанных с градиентом давления в клеточной среде, которое нелинейно зависит от плотности клеток [11, 12]. В работе [13] учитывалась сила вязкого трения в клеточной среде, несмотря на малую плотность клеток на начальной стадии рассматриваемого процесса. Модели содержат также и уравнение диффузии химического регулятора, продуцируемого клетками. Более подробный обзор моделей васкулогенеза можно найти в [14].

Образование сети кровеносных сосудов связывают с формированием клеточных структур в виде узлов, соединенных хордами, которые клеточная среда образует на плоской поверхности в результате самоорганизации.

Работы [15, 16] являются продолжением подхода, развитого в работах [17, 18], в которых было рассмотрено влияние активных взаимодействий клеток с деформируемым матриксом на формирование двумерных клеточных структур. В [15, 16] выполнено моделирование развития структур в двуслойной системе, образованной плоским слоем клеток, который располагается поверх вязкоупругого плоского слоя матрикса, лежащего на неподвижном основании. Ключевыми факторами, контролирующими формообразование, являются жесткость внеклеточного матрикса, сила активных взаимодействий между клетками и матриксом, и параметры, характеризующие активную миграцию клеток. В работе [12] высказаны критические замечания по поводу применения этих моделей к описанию формирования характерных для васкулогенеза клеточных структур. Более корректная модель, описывающая формирование структур в двуслойной среде представлена в работе [19] и дополнена в [14].

В настоящее время широкое распространение получило использование различных дискретных методов моделирования эволюции клеточных систем. Их подробное описание можно найти в [20, 21].

Модель, учитывающая основные механизмы, вовлеченные в процесс кластерного васкулогенеза, представлена в единственной работе [22]. Она описывает миграцию клеток, первоначально рассеянных по плоскому недеформируемому субстрату, и формирование рыхлых кластеров, трансформирующихся далее в более плотные клеточные агрегаты в результате совместного действия хемотаксиса, активных взаимодействий типа клетка–клетка и клетка–матрикс и ферментативной клеточной активности, приводящей к разрушению матрикса. Описание миграции клеток выполнено посредством постулирования выражения для их потока, учитывающего помимо диффузии также и активные нелокальные взаимодействия клеток между собой и с матриксом.

Важной составляющей кластерного васкулогенеза, не описываемой моделью [22], является образование просвета в клеточных агрегатах. Образование просветов в сочетании с последующим ангиогенезом приводит к формированию новой сети кровеносных сосудов.

Использование континуальных моделей при описании образования просвета в клеточных агрегатах довольно малочисленно. Модель сплошной среды, образованной клетками, проявляющими механическую активность, и жидкостью [23], использовалась в [23, 24] при решении задачи об образовании и эволюции заполненной жидкостью полости в сферическом клеточном агрегате постоянного радиуса при отсутствии внеклеточного матрикса. Было исследовано влияние различных механизмов активных межклеточных взаимодействий (хаотического и направленного нелокального) на самоорганизацию в клеточной системе и эволюцию радиуса просвета.

В данной работе будет сформулирована и решена задача об эволюции одиночного рыхлого кластера клеток, погруженного в деформируемый внеклеточный матрикс, а также изучена роль различных

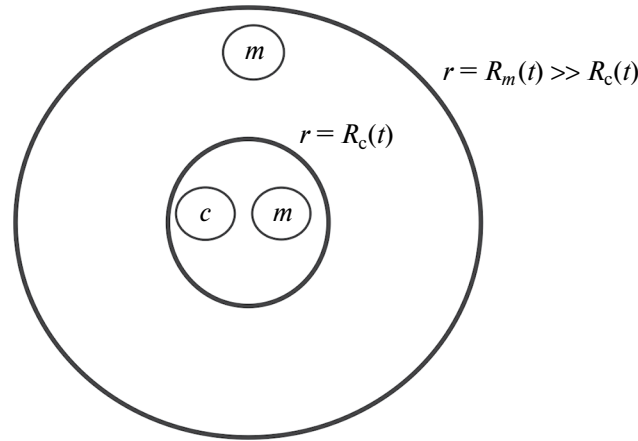


Рис. 1. Схематическое изображение кластера клеток, погруженного в матрикс. Буквенные обозначения c и m , обведенные маленькими кругами, обозначают присутствие клеток и матрикса в разных областях. Координата $r = R_c(t)$ является радиусом сферы, ограничивающей клетки, сфера радиуса $R_m(t)$ ограничивает матрикс.

проявлений клеточной активности в формировании просвета в клеточном агрегате. Постановка задачи использует модификацию континуальной модели биологической многофазной среды, образованной двумя активно взаимодействующими клеточными фазами и жидкостью, предложенную в [25].

1. КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим задачу о перераспределении объемной концентрации клеток, образующих в начальный момент времени рыхлый кластер сферической формы, который погружен в неограниченный внеклеточный матрикс (рис. 1). Область, занятая совместно клетками и матриксом, ограничена сферой радиуса $R_c(t)$. Неограниченная область пространства, занятая матриксом, моделируется сферой большого радиуса $R_m(t)$. В среде также присутствует жидкость.

Континуальная модель биологической среды, образованной двумя активно взаимодействующими твердыми фазами и жидкостью [25], будет адаптирована для данного случая, когда одна из твердых фаз образована клетками, а другая – внеклеточным матриксом. Основные отличия от [25] состоят в отсутствии активных взаимодействий в фазе матрикса, а также в изменении определяющих соотношений для активных перекрестных взаимодействий между клетками и матриксом, учитывающим нелокальную стягивающую составляющую в этих взаимодействиях.

Решение задачи будет выполнено в предположении сферической симметрии, и все уравнения будут написаны в физическом базисе сферической системы координат с началом в центре сферы. У всех тензоров смешанные компоненты считаются равными нулю. Будем отмечать компоненты тензоров в направлениях r , ϕ и θ соответствующим буквенным индексом, заменяя повторяющийся индекс однократным. У единственной отличной от нуля компоненты векторов скорости в радиальном направлении индекс r опускается, а нижним индексом c , m и w будем обозначать принадлежность к клеточной фазе, фазе матрикса или жидкой фазе. Предполагается, что в среде отсутствуют деления и гибель клеток, а также массообмен между клеточной и другими фазами. При этом будем учитывать разрушение матрикса посредством вырабатываемых клетками ферментов. Истинные плотности фаз считаются постоянными и равными между собой, поэтому объемные концентрации фаз совпадают с массовыми. Тогда уравнения неразрывности для фаз примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_c}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \phi_c v_c}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \phi_m v_m}{\partial r} = -G(t, \phi_c, \phi_m) \\ \frac{\partial (1 - \phi_c - \phi_m)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 (1 - \phi_c - \phi_m) v_w}{\partial r} &= G(t, \phi_c, \phi_m) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ϕ_c и ϕ_m — объемные концентрации клеточной фазы и матрикса соответственно, а v_c , v_m и v_w — радиальные компоненты векторов скорости клеточной фазы, матрикса и жидкости, функция $G(t, \phi_c, \phi_m)$ описывает скорость разрушения матрикса.

Активные взаимодействия между клетками, а также между клетками и матриксом обеспечиваются механизмами, в основном связанными с проявлением адгезии (скрепления поверхностей соседних клеток или участков клеточной поверхности с волокнами матрикса, опосредованные специфическими молекулами) и сократимости элементов цитоскелета (клеточного скелета). При взаимодействии клеток с матриксом наблюдается образование псевдоподий (выростов клеточной мембраны), которые образуют прочные контакты с волокнами матрикса [5, 26]. Развитие сократительных усилий в них приводит к развитию сил активных механических взаимодействий между клетками и матриксом. Проявление механизмов адгезии и сократимости цитоскелета при активных силовых взаимодействиях между клетками может существенно различаться для клеток разных типов и разных тканей (кратко изложено во введении [27]).

В работе [28] было предложено введение дополнительных фаз, в которых развиваются напряжения, обеспечивающие активные взаимодействия клеток со своим окружением. Дополнительные фазы могут отождествляться, например, с псевдоподиями, содержащими сократительные элементы цитоскелета или с единой механически напряженной сетью, составленной мембранами контактирующих клеток и выстилающими их поверхностными сократительными структурами.

Введем две дополнительные фазы, первая из которых характеризуется тензором напряжений $\tau^{(c)}$ и обеспечивает активные взаимодействия между клетками. Вторая дополнительная фаза с тензором напряжений $\tau^{[cm]} = \tau^{(cm)} + \tau^{(mc)}$ обеспечивает перекрестные активные взаимодействия между клеточной фазой и матриксом. Составляющие $\tau^{(cm)}$ и $\tau^{(mc)}$ перекрестного тензора напряжений описывают активные (нелокальные) взаимодействия между частицей клеточной фазы, находящейся в рассматриваемой точке, и матриксом, а также частицей матрикса в рассматриваемой точке и клеточной фазой соответственно. Объемы, занимаемые дополнительными фазами, считаются пренебрежимо малыми в сравнении с объемами основных фаз. Напряжения в клеточной фазе и фазе матрикса характеризуются тензорами $\sigma^{(c)}$ и $\sigma^{(m)}$.

Уравнения импульса для фаз в радиальном и азимутальном направлениях, пренебрегая инерционными эффектами, примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} (\phi_c \sigma_r^{(c)} + \tau_r^{(c)} + \tau_r^{(cm)}) + \\ & + \frac{1}{r} \left(2(\phi_c \sigma_r^{(c)} + \tau_r^{(c)} + \tau_r^{(cm)}) - (\phi_c \sigma_\phi^{(c)} + \tau_\phi^{(c)} + \tau_\phi^{(cm)}) - (\phi_c \sigma_\theta^{(c)} + \tau_\theta^{(c)} + \tau_\theta^{(cm)}) \right) + F + F_{wc} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\phi_c \sigma_\phi^{(c)} + \tau_\phi^{(c)} + \tau_\phi^{(cm)} = \phi_c \sigma_\theta^{(c)} + \tau_\theta^{(c)} + \tau_\theta^{(cm)} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} (\phi_m \sigma_r^{(m)} + \tau_r^{(mc)}) + \\ & + \frac{1}{r} \left(2(\phi_m \sigma_r^{(m)} + \tau_r^{(mc)}) - (\phi_m \sigma_\phi^{(m)} + \tau_\phi^{(mc)}) - (\phi_m \sigma_\theta^{(m)} + \tau_\theta^{(mc)}) \right) - F + F_{wm} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\phi_m \sigma_\phi^{(m)} + \tau_\phi^{(mc)} = \phi_m \sigma_\theta^{(m)} + \tau_\theta^{(mc)} \quad (1.5)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} ((1 - \phi_c - \phi_m) p_w) - F_{wc} - F_{wm} = 0 \quad (1.6)$$

Здесь p_w — давление жидкости; F — радиальная компонента силы межфазного взаимодействия между клеточной фазой и матриксом; F_{wc} и F_{wm} — радиальные компоненты сил межфазного взаимодействия жидкости с клеточной фазой и матриксом соответственно. Второе и третье слагаемые в скобках в уравнениях

(1.2), (1.3) и второе слагаемое в скобках в (1.4), (1.5) учитывают силы взаимодействия с дополнительными фазами ([25]). Уравнения импульса по зенитному направлению выполнено тождественно.

Выражения для сил межфазного взаимодействия имеют следующий вид [25]:

$$\begin{aligned}
 F &= \phi_m p_c \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_c}{\phi_c + \phi_m} \right) - \phi_c p_m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_m}{\phi_c + \phi_m} \right) + k_{cm} \phi_c \phi_m (v_m - v_c) \\
 F_{wc} &= p_w \frac{\partial \phi_c}{\partial r} + k_{wc} (1 - \phi_c - \phi_m) \phi_c (v_w - v_c), \\
 F_{wm} &= p_w \frac{\partial \phi_m}{\partial r} + k_{wm} (1 - \phi_c - \phi_m) \phi_m (v_w - v_m) \\
 p_c &= -\frac{1}{3} I_1(\sigma^{(c)}), \quad p_m = -\frac{1}{3} I_1(\sigma^{(m)})
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $I_1(\sigma^{(c)})$ и $I_1(\sigma^{(m)})$ — первые инварианты тензоров напряжений в клеточной фазе и фазе матрикса. Первое выражение (1.7) учитывает две составляющие силы межфазного взаимодействия между клеточной фазой и матриксом, одна из которых связана с действием сил давления (первое и второе слагаемое), вторая с силой вязкого трения на межфазных поверхностях. В последующих двух выражениях (1.7) первое и второе слагаемое описывают две аналогичные составляющие межфазных взаимодействий жидкой фазы с клеточной фазой и матриксом.

Определяющие соотношения для активных напряжений в дополнительных фазах учитывают как хаотическую активность клеток в создании активных напряжений при взаимодействии между собой и с матриксом, которая характеризуется давлениями $\Pi_c(\phi_c, \phi_m)$, $\Pi_{cm}(\phi_c, \phi_m)$ и проявляется в отталкивании частиц соответствующих фаз, так и направленные стягивающие усилия, определяемые неоднородными внешними стимулами — соседством с другими клетками и матриксом. В [25] использовалось предположение, что активные стягивающие взаимодействия развиваются только между клетками внутри фазы, а в перекрестных взаимодействиях учитывалась только расталкивающая составляющая. В данном случае в составляющих $\tau^{(cm)}$ и $\tau^{(mc)}$ перекрестного тензора напряжений будем учитывать нелокальные силы, действующие в данной точке на частицу одной фазы со стороны удаленных на определенное расстояние частиц другой фазы. Определяющие соотношения для активных напряжений примем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \tau^{(c)} &= -\Pi_c \cdot \mathbf{I} + m_c \frac{3}{4\pi R_s^2} \cdot \phi_c \int_S \phi_c \cdot \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} ds, \\
 \tau^{(cm)} &= -\Pi_{cm} \cdot \mathbf{I} + m_{cm} \frac{3}{4\pi R_s^2} \cdot \phi_c \int_S \phi_m \cdot \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} ds, \\
 \tau^{(mc)} &= -\Pi_{cm} \cdot \mathbf{I} + m_{mc} \frac{3}{4\pi R_s^2} \cdot \phi_m \int_S \phi_c \cdot \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} ds, \\
 \Pi_c &= E_c \frac{\phi_c^2}{1 - \phi_c - \phi_m}, \quad \Pi_{cm} = E_{cm} \frac{\phi_c \phi_m}{1 - \phi_c - \phi_m}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Интегрирование выполняется по сферической поверхности S фиксированного радиуса R_s (радиуса дальнего действия) с центром в рассматриваемой точке, $\mathbf{N}$ вектор нормали к поверхности сферы. Если интегрирование ведется по той части поверхности, на которой подынтегральная функция не определена, то в этих точках она доопределяется нулем. Из третьего закона Ньютона следует, что $m_{cm} = m_{mc}$. В дальнейшем для этих величин будут использоваться одинаковые обозначения m_{cm} .

Тензор скоростей деформации клеточной фазы можно представить в виде суммы двух составляющих, первая из которых связана с деформацией клеток, а вторая с их с переупаковкой: перемещением друг относительно друга [29]. Первая составляющая может быть описана одной из моделей упругости. Такое же представление справедливо и для тензора скоростей деформации матрикса. В настоящей работе примем допущение о малости слагаемых, описывающих скорость деформирования этих фаз за счет деформации клеток и волокон матрикса в сравнении со скоростью неупругого деформирования, связанного с переупаковками.

Будем рассматривать переупаковку клеток и волокон матрикса как течение, управляемое напряжениями в самих фазах, давлением жидкости и активными напряжениями. Выражения для тензоров скоростей деформации $\mathbf{e}^{(c)}$ и $\mathbf{e}^{(m)}$ клеточной фазы и матрикса соответственно примем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{(c)} &= \frac{1}{2\mu_1}(\phi_w p_w \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^{(c)} - \phi_m \boldsymbol{\sigma}^{(m)}) - \frac{1}{2\mu_{11}}\boldsymbol{\tau}^{(c)} - \frac{1}{2\mu_{12}}\boldsymbol{\tau}^{(cm)} \\ \mathbf{e}^{(m)} &= \frac{1}{2\mu_2}(\phi_w p_w \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^{(m)} - \phi_c \boldsymbol{\sigma}^{(c)} - \boldsymbol{\tau}^{(mc)})\end{aligned}\quad (1.9)$$

Выбор знаков учитывает, что растягивающие напряжения во вспомогательных фазах стимулируют сближение клеток (уплотнение клеточной фазы), а давление жидкости, растягивающие напряжения в рассматриваемой фазе и сжимающие напряжения в соседней фазе этому уплотнению препятствуют.

Система уравнений дополняется кинематическими соотношениями для компонент тензоров скоростей деформации фаз:

$$e_r^{(c)} = \frac{\partial v_c}{\partial r}, \quad e_\phi^{(c)} = e_\theta^{(c)} = \frac{v_c}{r}, \quad e_r^{(m)} = \frac{\partial v_m}{\partial r}, \quad e_\phi^{(m)} = e_\theta^{(m)} = \frac{v_m}{r} \quad (1.10)$$

Уравнения (1.1), (1.2), (1.4), (1.6), (1.8)-(1.10) образуют полную систему для нахождения всех неизвестных в области $r < R_c(t)$, занятой совместно клеточной фазой и фазой матрикса. Во внешней области $r > R_c(t)$, где присутствует только матрикс, $\phi_c = 0$, $\boldsymbol{\sigma}^{(c)} = \boldsymbol{\tau}^{(c)} = \boldsymbol{\tau}^{(cm)} = 0$, и уравнения системы, относящиеся к клеточной фазе выполняются тождественно.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим две постановки задачи о перераспределении объемной концентрации клеток в сферически симметричном кластере, погруженном во внеклеточный матрикс. Постановки задач будут различаться условиями на границе клеточной фазы $r = R_c(t)$. Граничные условия в первой постановке будут учитывать возможность свободного перетекания жидкости через эту границу, во второй будет предполагаться существование осмотического барьера при $r = R_c(t)$, разделяющего систему клетки-матрикс на две области, характеризующиеся различными давлениями жидкости. Граничные условия на бесконечности для матрикса и жидкости будут заменяться условиями на поверхности сферы большого радиуса $R_m(t)$. Начальное значение R_{m0} будет подбираться таким, чтобы в процессе численного решения скорость матрикса при $r = R_m(t)$ оставалась достаточно близка к нулю. Граничные условия будут учитывать возможность независимого перемещения граничных поверхностей $r = R_c(t)$ и $r = R_m(t)$.

Перемещение границ $r = R_c(t)$ и $r = R_m(t)$ определяется движением соответствующих фаз, поэтому считаются выполненными условия $\dot{R}_c(t) = v_c$ при $r = R_c(t)$ и $\dot{R}_m(t) = v_m$ при $r = R_m(t)$.

В начальный момент времени при $t = 0$ будем задавать положение границ твердых фаз $R_c(0) = R_{c0}$, $R_m(0) = R_{m0}$ и начальные распределения концентраций фаз $\phi_1(0, r) = \phi_{10}(r)$, $\phi_2(0, r) = \phi_{20}(r)$.

Для обеих постановок задач считаются выполненными следующие условия. Сила, действующая на удаленной внешней границе $r = R_m(t)$ со стороны окружающей среды, сводится к давлению жидкости, которое считается равным нулю. В качестве условий при $r = R_m(t)$ примем, что

$$\sigma_r^{(m)} = 0, \quad p_w = 0 \quad (2.1)$$

Из уравнений неразрывности и условия ограниченности скоростей фаз в центре сферы следует, что при $r = 0$

$$v_c = v_m = 0 \quad (2.2)$$

Граница клеточной фазы $r = R_c(t)$ является поверхностью разрыва для фазы матрикса. В первой постановке на этой границе должны быть сформулированы условия, учитывающие непрерывность потока массы матрикса и перераспределение нагрузки между фазами.

Условие непрерывности потока массы матрикса при $r = R_c(t)$ имеет вид

$$\left[\phi_m (v_m - \dot{R}_c) \right] = 0 \quad (2.3)$$

Квадратные скобки обозначают разность соответственных величин по разные стороны разрыва, точкой обозначена производная по времени.

Условия для напряжений, учитывающие перераспределение нагрузки в результате силового взаимодействия частиц клеточной фазы и матрикса по разные стороны от разрыва, было предложено в [30]. Оно имеет следующий вид:

$$\phi_c \sigma_r^{(c)} + \tau_r^{(c)} + \tau_r^{(cm)} = -p^* \phi_c^- \phi_m^+, \quad \left[\phi_m \sigma_r^{(m)} + \tau_r^{(m)} + \tau_r^{(mc)} \right] = -p^* \phi_c^- \phi_m^+ \quad (2.4)$$

$$p^* = \frac{p_c^- \phi_m^+ - p_m^+ \phi_c^-}{\phi_c^- + \phi_m^+}$$

Здесь p^* является средним давлением на поверхности межфазного контакта при $r = R_c(t)$. Верхний индекс “плюс” или “минус” указывает на значение соответствующей величины справа или слева от разрыва.

Во второй постановке задачи будем считать, что осмотический барьер при $r = R_c(t)$ отделяет клетки и матрикс во внутренней области ($r < R_c(t)$) от окружающего их матрикса. Различие концентраций ионов во внутренней и внешней областях, поддерживаемое благодаря присутствию осмотического барьера, препятствующего их свободному переносу с током жидкости, приводит к формированию разности гидростатических давлений по разные стороны от барьера. Полная постановка задачи в этом случае должна включать в себя дополнительное уравнение диффузии ионов с привлечением гипотез о работе активных насосов, перекачивающих ионы из внутриклеточного пространства наружу, и условия мембранного типа для потоков жидкости и ионов при $r = R_c(t)$. Усложнения задачи можно избежать, полагая в дальнейшем величину разности гидростатических давлений по разные стороны от осмотического барьера заданной величиной p_w^Σ .

В качестве условий при $r = R_c(t)$ во второй постановке задачи примем, что

$$v_c^- = v_m^-, \quad v_m^- = v_m^+, \quad [T_r] = \frac{\Sigma}{R_c} \quad (2.5)$$

Здесь $\mathbf{T} = -(1 - \phi_c - \phi_m)p_w \mathbf{I} + \phi_c \boldsymbol{\sigma}^{(c)} + \phi_m \boldsymbol{\sigma}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}^{(c)} + \boldsymbol{\tau}^{(cm)} + \boldsymbol{\tau}^{(mc)}$ тензор напряжений для среды в целом, Σ поверхностное натяжение. Во этой постановке задачи (в отличии от первой) условие (2.3) и два условия (2.4) заменяются тремя условиями (2.5).

Граничные условия для ϕ_c при $r = 0$ и $r = R_c(t)$, а также ϕ_m при $r = 0$ и $r = R_m(t)$ не ставятся, так как границы фаз перемещаются со скоростями равными скоростям частиц соответствующих фаз на этих границах. То есть, границы $r = 0$ и $r = R_c(t)$ являются характеристиками для первого уравнения (1.1), а $r = 0$ и $r = R_m(t)$ для второго. Соответствующие граничные условия получаются из решения уравнений (1.1), записанных в соответствующих точках.

3. ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Введем безразмерные величины:

$$R_s^* = \frac{R_s}{R_{c0}}, \quad E_{cm}^* = \frac{E_{cm}}{E_c}, \quad \mu_1^* = \frac{\mu_1}{\mu}, \quad \mu_2^* = \frac{\mu_2}{\mu}, \quad \mu_{12}^* = \frac{\mu_{12}}{\mu}, \quad m_c^* = \frac{m_c}{E_c}, \quad m_{cm}^* = \frac{m_{cm}}{E_c}, \quad k_{cm}^* = \frac{k_{cm} R_{c0}^2}{\mu},$$

$$k_{wc}^* = \frac{k_{wc} R_{c0}^2}{\mu}, \quad k_{wm}^* = \frac{k_{wm} R_{c0}^2}{\mu}$$

Здесь μ характерное значение группы коэффициентов.

Введение безразмерных неизвестных выполнено с использованием масштаба времени $\frac{\mu}{E_c}$, масштаба длины R_{c0} и величины E_c в качестве масштаба для неизвестных, имеющих размерность напряжений.

В настоящее время отсутствуют экспериментальные данные, позволяющие получить оценки числовых значений коэффициентов, относящихся непосредственно к рассматриваемому объекту. Поэтому свойства системы будут исследованы в зависимости от значений безразмерных параметров, полученных на основе значений размерных величин характерных для различных биологических сред.

Характерные значения коэффициента вязкости клеточной среды для эмбриональных тканей составляют $10^4 \div 10^6$ Па с [31–33]. В [34] оценки этой величины находятся в пределах $4 \cdot 10^4 \div 1.5 \cdot 10^7$ Па с. В дальнейшем примем $\mu = 8 \cdot 10^6$ Па с в качестве характерного значения.

Оценки коэффициента межфазного трения между клетками и жидкостью, выполненные с использованием формулы Стокса для силы, действующей на сферу в потоке вязкой жидкости, дали оценку $k_{wc} = 4.5 \cdot 10^7$ Па с м⁻² [35, 36]. Использование закона Дарси привело в [36] почти к такому же значению коэффициента трения между жидкостью и матриксом k_{wm} . Однако, экспериментальные измерения этого коэффициента для разных тканей дали значительно отличающиеся значения $10^{12} \div 10^{14}$ Па с м⁻² [37, 38]. В дальнейшем будем использовать $k_{wm} = 2 \cdot 10^{12}$ Па с м⁻². Оценка коэффициента межфазного трения между клеточной фазой и матриксом, выполненная в [36], дает значение $k_{cm} = 1.8 \cdot 10^{14}$ Па с м⁻².

Характерный размер кластеров клеток, образующихся при кластерном васкулогенезе, достигают величины порядка 400 мкм, а диаметр клеток 10 мкм [6]. Поэтому будем считать, что $R_{c0} = 200$ мкм, а $R_s = 5$ мкм. Начальный радиус сферы, ограничивающей матрикс должен значительно превышать R_{c0} . Последующие расчеты показали, что достаточно принять $R_{m0} = 5R_{c0}$.

При выборе параметров, характеризующих вязкость и межфазное трение, используются крайние значения их физиологических диапазонов. Такой выбор параметров позволяет выделить механизмы, которые представляются наиболее важными. Значения безразмерных коэффициентов межфазного трения между твердыми фазами и жидкостью k_{wc}^* и k_{wm}^* равны $2.3 \cdot 10^{-7}$ и 10^{-2} соответственно. Поэтому в выражениях (1.7) для сил межфазного взаимодействия между твердыми фазами и жидкостью будем пренебрегать составляющими, характеризующими межфазное вязкое трение (в том числе и во всей области, занятой матриксом). Это позволяет пренебречь изменением давления внеклеточной жидкости в областях $r < R_c$ и $R_c < r < R_m$. Тогда при решении задачи со свободным перетеканием жидкости через границу $r = R_c$ будем считать, что $p_w = 0$ во всей области, занятой матриксом. В задаче с осмотическим барьером при $r = R_c$ давление жидкости будем считать кусочно-постоянным: $p_w = 0$ при $R_c < r < R_m$ и $p_w = p_w^\Sigma$ при $r < R_c$. Это позволяет решать уравнения для клеточной фазы отдельно от уравнений, описывающих движение жидкости.

Решения задачи со свободным перетеканием жидкости через границу $r = R_c$ (при $p_w = 0$ и $G(t, \phi_c, \phi_m) = 0$) допускают преобразование

$$v_i(t, r, E_c, E_{cm}, m_c, m_{cm}, \dots) = \frac{1}{\lambda} \cdot v_i(t / \lambda, r, \lambda E_c, \lambda E_{cm}, \lambda m_c, \lambda m_{cm}, \dots),$$

$$\phi_i(t, r, E_c, E_{cm}, m_c, m_{cm}, \dots) = \phi_i(t / \lambda, r, \lambda E_c, \lambda E_{cm}, \lambda m_c, \lambda m_{cm}, \dots) \quad (i = c, m),$$

где λ — произвольное число, а многоточие заменяет все остальные параметры задачи, значения которых сохраняются неизменными. Компоненты тензоров напряжений твердых фаз преобразуются так же, как компоненты скоростей. Таким образом, пропорциональное изменение параметров E_c , E_{cm} и m_c , m_{cm} , характеризующих активные напряжения, оказывает влияние на скорость эволюции концентраций фаз (на масштабирование во времени), не меняя характерных особенностей их пространственных распределений. Существенным является соотношение между этими параметрами.

Оценки параметров E_c , E_{cm} и m_c , m_{cm} на основании существующих экспериментальных данных отсутствуют. Между E_c , E_{cm} и m_c будут использоваться соотношения такие же, как в [27, 39] при описании сортировки двух типов клеток, а значения m_{cm} и p_w будут варьироваться.

В дальнейшем звездочку при безразмерных параметрах будем опускать, а обозначения размерных неизвестных сохраним за соответствующими безразмерными величинами. В расчетах, если не сказано иначе, будут использоваться следующий базовый набор значения безразмерных параметров:

$$R_{c0} = 1, R_{m0} = 5, R_s = 0.025, m_c = 36, E_c = 1, E_{cm} = 0.5, p_w = 0,$$

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 10, \mu_{11} = \mu_{12} = 1, k_{cm} = 0.9, \Sigma = 0$$

Числовые значения параметров учитывают, что матрикс является значительно более вязкой средой, чем клеточная фаза.

Преобразование и схема численного решения системы уравнений (1.1), (1.2), (1.4), (1.6), (1.8)–(1.10) с граничными условиями (2.1)–(2.5) подробно описано в [39].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Развитие тканей и органов живых организмов связано с формированием в них полостей, которые необходимы для выполнения определенных физиологических функций. В каждом отдельном случае формирование полых клеточных структур имеет индивидуальный характер. Однако, несмотря на значительные различия, отмечается участие ряда общих для них механизмов, необходимых в разной степени для координации направленного движения клеток.

Для создания просвета в кластере клеток считаются необходимыми следующие основные механизмы [40–43]. Во-первых, это активные взаимодействия клеток между собой и с внеклеточным матриксом. Вторым важным механизмом является ферментативная активность клеток, приводящая к разрушению внеклеточного матрикса. В-третьих, образование просветов контролируется локальным повышением гидростатического давления, создаваемого вследствие активного переноса ионов низкомолекулярных веществ изнутриклеточного пространства во внеклеточное и тем самым создания градиента осмотического давления.

Далее в разд. 4.1–4.3 будет исследована степень участия каждого из указанных механизмов в эволюции объемной концентрации клеток. В разд. 4.4 будет показано, что только при совместном участии всех трех механизмов формируется полая структура, в которой слой клеточной фазы окружает заполненную жидкостью полость.

Примем, что в начальный момент времени клеточная фаза однородно распределена в занимаемой ей области: $\phi_c(0, r) = \phi_{c0}$ при $r < 1$. Начальное распределение концентрации матрикса имеет вид сглаженной ступени $\phi_m(0, r) = \phi_{m0}^- + (\phi_{m0}^+ - \phi_{m0}^-)H(r - 1)$, где $H(r)$ сглаженная функция Хевисайда, заданная формулой

$$H(r) = \begin{cases} 0, & r < -\varepsilon \\ \frac{r + \varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin(\pi r / \varepsilon), & |r| < \varepsilon, \varepsilon = 0.2 \\ 1, & r > \varepsilon \end{cases}$$

В последующих расчетах будут использованы следующие значения параметров: $\phi_{c0} = 0.4$, $\phi_{m0}^+ = 0.6$ и $\phi_{m0}^- = 0.05$. Такой выбор значений предполагает, что клетки расположены более рыхло, чем окружающий их матрикс, а в области, занятой совместно клетками и матриксом, плотность матрикса незначительна.

4.1. Исследование роли активных стягивающих взаимодействий клеток между собой и с матриксом

Исследование будет выполнено в рамках первой постановки задачи, учитывающей свободное перетеканием жидкости через границу клеточной фазы $r = R_c(t)$. Производство фермента, разрушающего матрикс отсутствует: $G(t, \phi_c, \phi_m) = 0$.

Распределения концентраций клеток и матрикса в разные моменты времени в случае, когда стягивающие активные перекрестные взаимодействия клеток с матриксом превышают активные взаимодействия клеток между собой $m_{cm} > m_c$ ($m_{cm} = 42$, $m_c = 36$) представлены на рис. 2.

В результате расчетов получено, что начальная стадия эволюции концентраций клеточной фазы и матрикса характеризуется резким уменьшением радиуса кластера клеток (график эволюции радиуса не приводится) и уплотнением клеточной фазы в результате развития активных напряжений, создаваемых клетками при взаимодействии друг с другом. На следующей стадии, в результате перекрестных взаимодействия клеток с матриксом, становится заметным втягивание матрикса в область, занятую клетками (рис. 2б) и вытеснение клеточной фазы из центральной области. Это приводит к формированию распределения концентрации клеточной фазы, которое характеризуется ее ростом в сторону внешней границы (рис. 2а). На этой стадии наблюдается слабый рост радиуса кластера клеток.

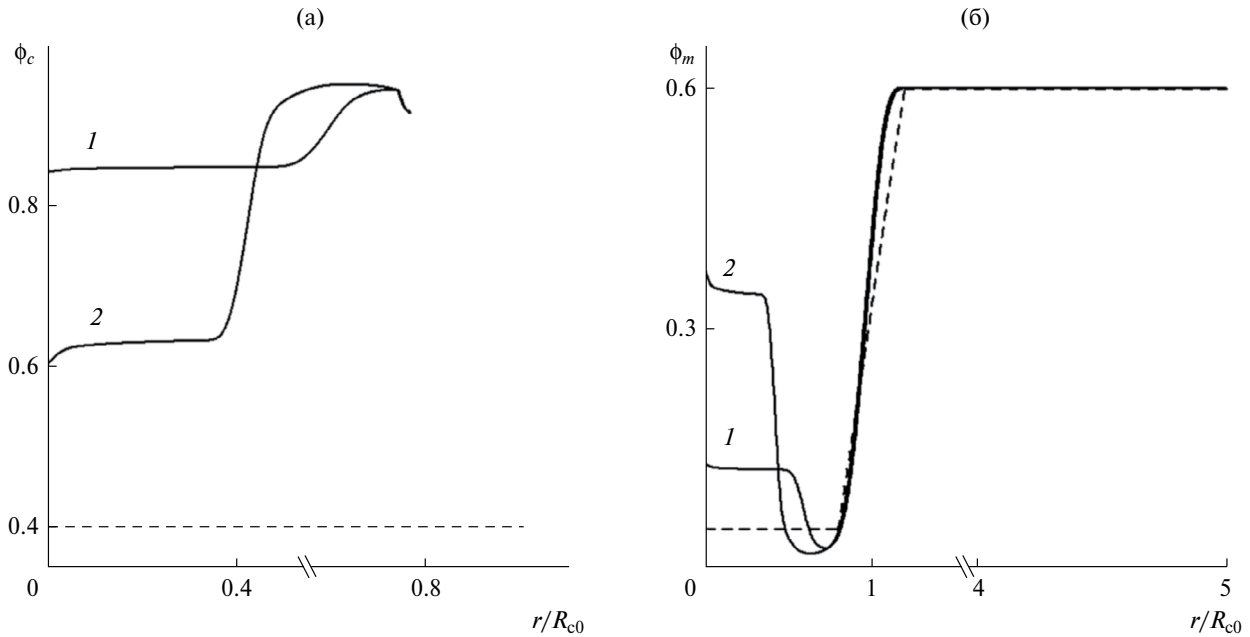


Рис. 2. Распределения концентрации клеточной фазы (а) и фазы матрикса (б) в разные моменты времени при $m_{cm} = 42$, $m_c = 36$ в задаче со свободным перетеканием жидкости через границу $r = R_c(t)$: 1 и 2 при $t = 1.15$ и $t = 1.62$ соответственно; пунктирные кривые — начальные распределения.

Слабая сократительная составляющая в перекрестных активных взаимодействиях между клетками и матриксом ($m_{cm} < m_c$, $m_{cm} = 12$, $m_c = 36$) создает условия только для уплотнения клеточного агрегата и вытеснения матрикса на периферию. Изменение радиуса кластера клеток демонстрирует постоянное уменьшение: быстрое на начальном этапе, сменяемое очень медленным стремлением к асимптотическому значению.

Таким образом, доминирование перекрестных активных стягивающих взаимодействий над межклеточными приводит к формированию клеточной структуры, которую можно рассматривать как предварительную разметку для последующего создания просвета в кластере клеток. Поэтому, во всех последующих пунктах (если не сказано иначе) будем считать, что $m_{cm} > m_c$.

4.2. Исследование роли разрушения внеклеточного матрикса с помощью вырабатываемых клетками ферментов в рамках первой постановки задачи

Следуя работе [44], будем использовать сильно упрощенную кинетику, считая, что скорость разрушения матрикса пропорциональна его концентрации и концентрации фермента. Концентрация фермента, в свою очередь, пропорциональна концентрациям клеточной фазы и матрикса.

Скорость разрушения матрикса предполагается отличной от нуля спустя некоторое время ($t > 0.4$), когда становится заметной неоднородность распределения клеточной фазы. Для правой части уравнения неразрывности для матрикса (1.1) используем следующую зависимость: $G(t, \phi_c, \phi_m) = 0$ при $t < 0.4$, и $G(t, \phi_c, \phi_m) = \gamma \phi_c \phi_m^2$ при $t > 0.4$. В расчетах примем $\gamma = 12$, что на порядок выше значения, принятого в [44]. Увеличение значения этого параметра делает более заметным эффект действия ферментативного разрушения матрикса. На рис. 3 приведены распределения концентраций клеточной фазы и матрикса, полученные как при отсутствии разрушения матрикса (штриховые кривые), так и при $G(t, \phi_c, \phi_m) \neq 0$ (сплошные линии) в один и тот же момент времени $t = 1.62$.

Видно, что разрушение матрикса приводит к уменьшению его концентрации в области, занятой клетками, и тем самым к ослаблению перекрестных взаимодействий между клетками и матриксом. Основным результатом ферментативного разрушения матрикса является образование свободного пространства, которое может быть занято клеточной фазой, что приводит к замедлению ее вытеснения из центральной области и формирования структуры, характерной для образования просвета.

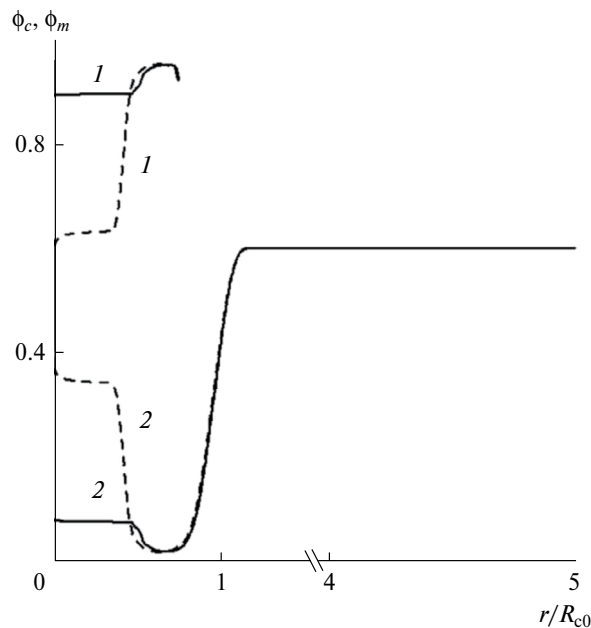


Рис. 3. Распределения концентраций клеточной фазы и матрикса (1 и 2 для ϕ_c и ϕ_m соответственно), полученные в задаче со свободным перетеканием жидкости через границу $r = R_c(t)$ при $m_{cm} = 42$, $m_c = 36$ в отсутствии разрушения матрикса (штриховые кривые) и при $G(t, \phi_c, \phi_m) \neq 0$ (сплошные линии) в один и тот же момент времени $t = 1.62$.

В случае, когда перекрестные стягивающие взаимодействия меньше межклеточных ($m_{cm} = 12$, $m_c = 36$), происходит только уплотнение клеточной фазы.

4.3. Исследование роли повышенного давления жидкости в области занятой клетками в рамках второй постановки задачи. Сравнение решений, полученных в рамках первой и второй постановок задач

Обнаруженное в результате расчетов увеличение концентрации клеточной фазы около внешней границы $r = R_c(t)$ в случае доминирования перекрестных активных взаимодействий над межклеточными будем рассматривать как формирование осмотического барьера, проницаемого только для воды.

Примем, что в некоторый момент времени ($t = 0.4$) область, занятая совместно клетками и матриксом, будет отделена от области, занятой только матриксом, границей, которая разделяет области, различающиеся давлениями жидкости.

Рассмотрим влияние повышенного давления жидкости p_w^Σ в области, занятой клетками, на формирование неоднородной клеточной структуры. Тогда при $t < 0.4$ будут использованы граничные условия, учитывающие свободное перетеканием жидкости через границу клеточной фазы (первая постановка задачи), а при $t > 0.4$ существование осмотического барьера (вторая постановка задачи). Ферментативное разрушение матрикса предполагается отсутствующим ($G(t, \phi_c, \phi_m) = 0$).

Распределения концентраций клеточной фазы и матрикса, полученные в случае появления осмотического барьера, при различных значениях давления жидкости представлены на рис. 4а. (штриховые и сплошные кривые). Решения задачи со свободным перетеканием жидкости через границу $r = R_c(t)$ изображены пунктирными кривыми.

Полученные результаты показывают, что увеличение давления жидкости в области, где совместно присутствуют клетки и матрикс, приводит к ускорению перераспределения их концентраций. Давление жидкости способствует накоплению клеточной фазы около осмотического барьера и снижению ее концентрации в центральной части. При этом оно также способствует росту концентрации матрикса в центральной части клеточного агрегата.

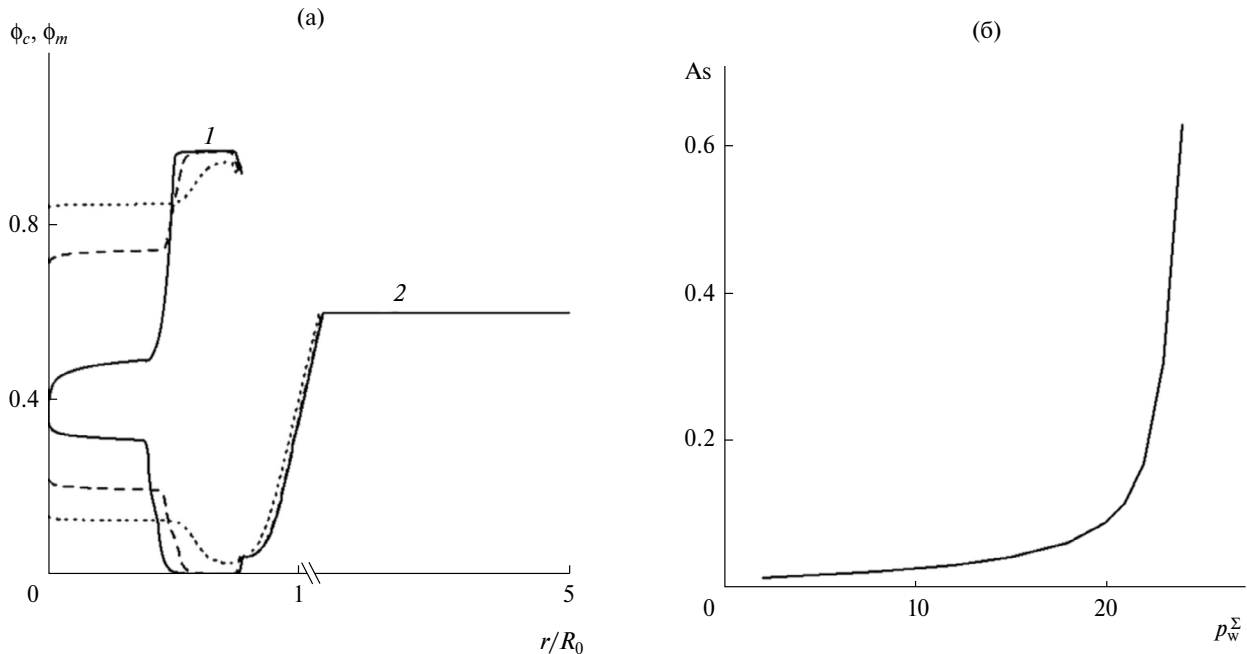


Рис. 4. (а) Решения задачи, учитывающей появление осмотического барьера при $r = R_c(t)$, и задачи со свободным перетеканием жидкости. Распределения концентраций клеточной фазы и матрикса (1 и 2 для ϕ_c и ϕ_m соответственно) получены в момент времени $t = 1.15$ при значениях параметров $m_{cm} = 42$, $m_c = 36$, $G(t, \phi_c, \phi_m) = 0$. Пунктирные кривые – решения задачи со свободным перетеканием жидкости, штриховые и сплошные кривые – решения задачи с осмотическим барьером при $p_w^\Sigma = 22.5$ и $p_w^\Sigma = 24$ соответственно; (б) зависимость параметра асимметрии распределений клеточной фазы в момент времени $t = 1.15$ от гидростатического давления в задаче с осмотическим барьером.

Зависимость эволюции клеточной структуры от давления жидкости является существенно нелинейной. В качестве количественной характеристики этой зависимости введем параметр асимметрии As распределения концентрации клеточной фазы. В математической статистике такой параметр характеризует асимметрию плотности распределения случайной величины относительно ее математического ожидания. В данном случае интерес представляет асимметрия распределения концентрации фазы в разных областях, то есть относительно некоторой радиальной координаты, выбор которой представляется достаточно условным. Параметр асимметрии распределения концентрации клеточной фазы относительно $r = 0.5R_c$ введем следующим образом:

$$As = \frac{\eta_3}{s^3}, \text{ где } \eta_3 = \int_0^{R_c} (r - 0.5R_c)^3 \phi_c(r) dr \text{ и } s^2 = \int_0^{R_c} (r - 0.5R_c)^2 \phi_c(r) dr$$

Зависимость параметра асимметрии от давления жидкости p_w^Σ в момент времени $t = 1.15$ представлен на рис. 4б. Из результатов расчетов можно заключить, что давление жидкости обеспечивает необходимую скорость перераспределения фаз, при этом слишком высокое гидростатическое давление приводит к жесткой зависимости от него.

4.4. Совместное участие всех трех механизмов (активные взаимодействия, ферментативная активность и гидростатическое давление) в формировании просвета в сферическом кластере клеток

Будем считать, что осмотический барьер и ферментативное разрушение матрикса проявляют себя лишь с момента времени $t = 0.4$. Потому при $t < 0.4$ используется постановка задачи, учитывающая свободное перетекание жидкости через границу клеточной фазы, а при $t > 0.4$ учитывающая существование осмотического барьера при $r = R_c(t)$.

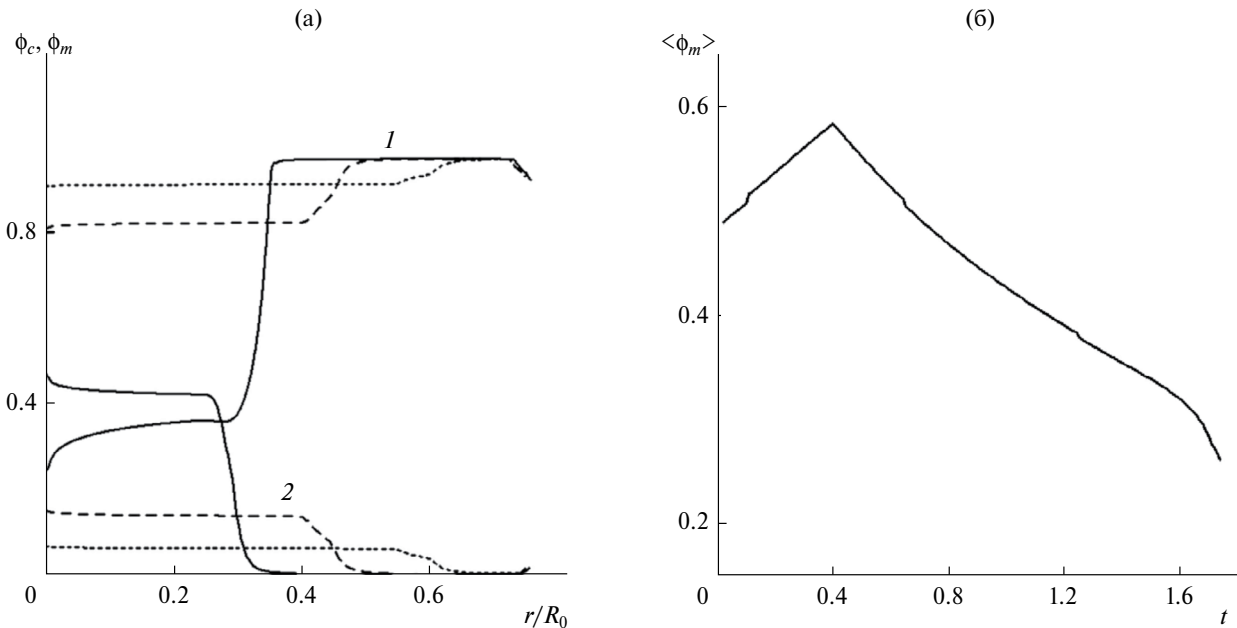


Рис. 5. Решения задачи с участием всех механизмов. (а) Распределения концентраций клеточной фазы и матрикса (1 и 2 для ϕ_c и ϕ_m соответственно) в совместно занимаемой ими области, в разные моменты времени при значениях параметров $m_{cm} = 42$, $m_c = 36$, $\gamma = 12$ и $p_w^\Sigma = 8$. Пунктирные кривые – $t = 1.56$, штриховые – $t = 1.66$ и сплошные кривые – $t = 1.74$ (б) Зависимость от времени среднего значения концентрации матрикса в области, занятой совместно с клетками $\langle \phi_m \rangle$.

На рис. 5а представлены распределения концентраций клеточной фазы и матрикса в совместно занимаемой ими области в разные моменты времени при значениях параметров $m_{cm} = 42$, $m_c = 36$, $\gamma = 12$ и $p_w^\Sigma = 8$. Видно, что после начальной стадии уплотнения кластера клеток происходит формирование клеточной структуры, характеризуемой значительным скоплением клеток около границы клеточной фазы и уменьшением их объемной концентрации в центральной области. Распределение концентрации матрикса демонстрирует распространение фронта, перемещающегося к центру и отделяющего центральную область, содержащую матрикс, от внешней области, где матрикс практически отсутствует.

Содержание матрикса в области, занимаемой вместе с клетками, характеризуется средней концентрацией матрикса $\langle \phi_m \rangle$, которая определяется следующим образом:

$$\langle \phi_m \rangle = \frac{1}{|V_c|} \int_{V_c} \phi_m(r) dv,$$

где V_c сферическая область, занятая клетками, а $|V_c|$ ее объем.

Зависимость от времени среднего значения концентрации матрикса представлена на рис. 5б. Расчеты показали, что результатом ферментативной активности является уменьшение при $t > 0.4$ содержания матрикса в области, занимаемой клетками. Таким образом, только совместное участие всех трех рассмотренных механизмов приводит к формированию структуры, в которой клеточная фаза образует сферический слой, окружающий заполненную жидкостью полость. При этом, содержание матрикса в полости демонстрирует тенденцию к его полному исчезновению, а необходимая скорость формирования структуры обеспечивается величиной гидростатического давления.

Значения гидростатических давлений, полученные различными методами при развитии полостей, приведены в [43]. В расчетах используется безразмерная комбинация p_w^Σ / E_c . Будем считать, что E_c является величиной порядка модуля упругости для биологической ткани. Оценка модуля упругости эмбриональной ткани, проведенная в работе [29] на основе данных [45], дает значение 3 кПа. Если принять

$E_c \approx 1$ кПа, то значения гидростатического давления, использованные в расчетах, лежат в приведенных в [43] физиологических диапазонах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована степень участия клеточных механизмов, связанных с активными взаимодействиями клеток между собой и с внеклеточным матриксом, поддержанием высокого осмотического давления в межклеточной жидкости и ферментативной активностью при формировании полостей в кластерах клеток, образующихся во время кластерного васкулогенеза. Образование просветов создает пространство, которые в дальнейшем в сочетании с другими механизмами формирует новую сеть сосудов и используется для кровотока. Сформулирована и решена задача, целью которой является исследование эволюции одиночного кластера клеток, погруженного во внеклеточный матрикс, и изучение роли различных проявлений клеточной активности в формировании полости в клеточном агрегате. Постановка задачи использует разработанную ранее [25] континуальную модель среды, образованной двумя активно взаимодействующими клеточными фазами и жидкостью.

Численное исследование роли активных взаимодействия типа клетка-клетка и клетка-матрикс показало, что доминирование активных стягивающих взаимодействий между клетками и матриксом создает предварительную разметку клеточного агрегата и условия для последующего формирования полости внутри него. Формирующееся при этом распределение концентрации клеточной фазы характеризуется ее скоплением в узкой области в окрестности внешней границы клеточной фазы. Ферментативная активность, приводящая к разрушению матрикса, способствует ослаблению перекрестных взаимодействий между клетками и матриксом, уплотнению клеточного агрегата и замедлению процесса формирования возрастающего профиля концентрации клеточной фазы. Важным фактором, оказывающим влияние на формирование полых клеточных структур, является повышенное давление жидкости в области, занятой клетками, которое поддерживается работой активных ионных насосов, локализованных в клеточных мембранах. Результаты расчетов показали, что увеличение давления жидкости в занятой клетками области ускоряет процесс формирования возрастающего профиля концентрации клеточной фазы. Однако внеклеточный матрикс при этом имеет тенденцию скапливаться в центральной части агрегата. И лишь совместное участие всех рассмотренных механизмов приводит к формированию структуры, в которой слой, образованный клеточной фазой, окружает заполненную жидкостью полость, при этом концентрация матрикса в полости демонстрирует тенденцию к его полному исчезновению в результате ферментативной клеточной активности.

Работа поддержана Госпрограммой АААА-А19-119012990119-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sutherland A., Keller R., Lesko A.* Convergent extension in mammalian morphogenesis // *Sem. Cell Dev. Biol.* 2020. V. 100. P. 199–211.
2. *Janiszewska M., Primi M.C., Izard T.* Cell adhesion in cancer: Beyond the migration of single cells // *J. Biol. Chem.* 2020. V. 295. № 8. P. 2495–2505.
3. *Tracqui P.* Biophysical models of tumour growth // *Rep. Progr. Phys.* 2009. V. 72. № 5. P. 056701.
4. *Mammoto T., Ingber D.E.* Mechanical control of tissue and organ development // *Development*. 2010. V. 137. № 9. P. 1407–1420.
5. *Friedl P., Gilmour D.* Collective cell migration in morphogenesis, regeneration and cancer // *Nat. Rev. Mol. Cell Biol.* 2009. V. 10. P. 445–457.
6. *Blatchley M.R., Hall F., Wang S., Pruitt H.C., Gerecht S.* Hypoxia and matrix viscoelasticity sequentially regulate endothelial progenitor cluster-based vasculogenesis // *Sci Adv.* 2019. V. 5. № 3. P. eaau7518.
7. *Wang S., Sekiguchi R., Daley W.P., Yamada K.M.* Patterned cell and matrix dynamics in branching morphogenesis // *J. Cell Biol.* 2017. V. 216. № 3. P. 559–570.
8. *Davis G.E., Senger D.R.* Endothelial extracellular matrix: biosynthesis, remodeling, and functions during vascular morphogenesis and neovessel stabilization // *Circulat. Res.* 2005. V. 97. № 11. P. 1093–1107.
9. *Poole T.J., Coffin D.* Vasculogenesis and angiogenesis: Two distinct morphogenetic mechanisms establish embryonic vascular pattern // *J. Exp. Zool.* 1989. V. 251. № 2. P. 224–231.
10. *Serini G., Ambrosi D., Giraudo E., Gamba A., Preziosi L., Bussolino F.* Modeling the early stages of vascular network assembly // *EMBO J.* 2003. V. 22. № 8. P. 1771–1779.

11. *Ambrosi D., Gamba A., Serini G.* Cell Directional and chemotaxis in vascular morphogenesis // *Bull. Math. Biol.* 2004. V. 66. № 6. P. 1851–1873.
12. *Ambrosi D., Bussolino F., Preziosi L.* A review of vasculogenesis models // *J. Theor. Med.* 2005. V. 6. № 1. P. 1–19.
13. *Kowalczyk R., Gamba A., Preziosi L.* On the stability of homogeneous solutions to some aggregation models // *Discrete Contin. Dyn. Syst. B.* 2004. V. 4. № 1. P. 203–220.
14. *Scianna M., Bell C.G., Preziosi L.* A review of mathematical models for the formation of vascular networks // *J. Theor. Biol.* 2013. V. 333. P. 174–209.
15. *Manoussaki D.* A mechanochemical model of angiogenesis and vasculogenesis // *Math. Model. Num. Anal.* 2003. V. 37. № 4. P. 581–599.
16. *Namy P., Ohayon J., Traqui P.* Critical conditions for pattern formation and in vitro tubulogenesis driven by cellular traction fields // *J. Theor. Biol.* 2004. V. 227. P. 103–120.
17. *Murray J.D., Oster G.F.* Cell traction models for generating pattern and form in morphogenesis // *J. Math. Biol.* 1984. V. 19. P. 265–279.
18. *Murray J.D., Maini P.K., Tranquillo R.T.* Mechanochemical models for generating biological pattern and form in development // *Phys. Rep.* 1988. V. 171, № 2. P. 59–84.
19. *Tosin A., Ambrosi D., Preziosi L.* Mechanics and Chemotaxis in the Morphogenesis of Vascular Networks // *Bull. Math. Biol.* 2006. V. 68. P. 1819–1836.
20. *Camacho-Gomez D., Garcia-Aznar J.M., Gomez-Benito M.J.* A 3D multi-agent-based model for lumen morphogenesis: the role of the biophysical properties of the extracellular matrix // *Eng. Comput.* 2022. V. 38. P. 4135–4149.
21. *Fuji K., Tanida S., Sano M., Nonomura M., Riveline D., Honda H., Hiraiwa T.* Computational approaches for simulating luminogenesis // *Sem. Cell Dev. Biol.* 2022. V. 131. P. 173–185.
22. *Villa C., Gerisch A., Chaplain M.A.J.* A novel nonlocal partial differential equation model of endothelial progenitor cell cluster formation during the early stages of vasculogenesis // *J Theor Biol.* 2022. V. 534. P. 110963.
23. *Логвенков С.А.* Математическая модель биологической среды с учетом активных взаимодействий и взаимных перемещений составляющих ее клеток // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. № 5. С. 3–16.
24. *Логвенков С.А., Юдина Е.Н.* Исследование развития полости в клеточном сфероиде в зависимости от механизмов активных межклеточных взаимодействий // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 2. С. 3–14.
25. *Логвенков С.А., Штейн А.А.* Континуальное моделирование биологической среды, составленной активно взаимодействующими клетками двух разных типов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2020. № 6. С. 3–16.
26. *Lecuit T., Lenne P.F., Munro E.* Force generation, transmission, and integration during cell and tissue morphogenesis // *Ann. Rev. Cell Dev. Biol.* 2011. V. 27. P. 157–184.
27. *Логвенков С.А.* Математическое моделирование влияния клеточной подвижности и межклеточных активных взаимодействий на сортировку двух типов клеток в культурах биологических тканей // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 2. С. 9–19.
28. *Stein A.A., Logvenkov S.A., Volodyaev I.V.* Continuum modeling of mechano-dependent reactions in tissues composed of mechanically active cells // *BioSystems.* 2018. V. 173. P. 225–234.
29. *Белосов Л.В., Логвенков С.А., Штейн А.А.* Математическая модель активной биологической сплошной среды с учетом деформаций и переупаковки клеток // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 1. С. 3–14.
30. *Логвенков С.А., Штейн А.А.* Континуальное моделирование сортировки клеток в плоском слое с учетом возможного расхождения границ областей, занятых клетками двух разных типов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 3. С. 1–14.
31. *Forgacs G., Foty R.A., Shafir Y., Steinberg M.S.* Viscoelastic properties of living embryonic tissues: a quantitative study // *Biophys. J.* 1998. V. 74. P. 2227–2234.
32. *Jakab K., Damon B., Marga F., Doaga O., Mironov V., Kosztin I., Markwald R., Forgacs G.* Relating cell and tissue mechanics: implications and applications // *Dev. Dyn.* 2008. V. 237. № 9. P. 2438–2449.
33. *Stirbat T.V., Mgharbel A., Bodennec S. et al.* Fine tuning of tissues viscosity and surface tension through contractility suggests a new role for a-catenin // *PLoS One.* 2013. V. 8. № 2. e52554.
34. *Gordon R., Goel N.S., Steinberg M.S., Wiseman L.L.* Arheological mechanism sufficient to explain the kinetics of cell sorting // *J. Theor. Biol.* 1972. V. 37. P. 43–73.
35. *Lubkin S.R., Jackson T.* Multiphase Mechanics of Capsule Formation in Tumors // *J. Biomech. Eng.* 2002. V. 124. P. 237–243.
36. *Lemon G., King J.R.* Multiphase modelling of cell behaviour on artificial scaffolds: effects of nutrient depletion and spatially nonuniform porosity // *Math.Med.Biol.* 2007. V. 24. № 1. P. 57–83.

37. *Swabb E.A., Wei J., Cullino P.M.* Diffusion and Convection in Normal and Neoplastic Tissues // *Cancer Res.* 1974. V. 34. № 10. P. 2814–2822.
38. *Boucher Y., Brekken C., Netti P.A., Baxter L.T., Jain R.K.* Intratumoral infusion of fluid: estimation of hydraulic conductivity and implications for the delivery of therapeutic agents // *British J. Cancer.* 1998. V. 78. № 11. P. 1442–1448.
39. *Логвенков С.А.* Континуальное моделирование сортировки двух типов клеток в клеточном сфероиде с учетом подвижности границ областей, занятых клетками разных типов // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 6. С. 101–115.
40. *Davis G.E., Senger D.R.* Endothelial extracellular matrix: biosynthesis, remodeling, and functions during vascular morphogenesis and neovessel stabilization // *Circ. Res.* 2005. V. 97. № 11. P. 1093–1107.
41. *Datta A., Bryant D.M., Mostov K.E.* Molecular regulation of lumen morphogenesis // *Curr. Biol.* 2011. V. 21. № 3. P. R126–R136.
42. *Navis A., Bagnat M.* Developing pressures: fluid forces driving morphogenesis // *Curr. Opin. Genet. Dev.* 2015. V. 32. P. 24–30.
43. *Chan C.J., Hiiragi T.* Integration of luminal pressure and signalling in tissue self-organization // *Dev.* 2020. V. 147. № 5. P. dev181297.
44. *Painter K.J., Armstrong N.J., Sherratt J.A.* The impact of adhesion on cellular invasion processes in cancer and development // *J. Theor. Biol.* 2010. V. 264. № 3. P. 1057–1067.
45. *Mansurov A.N., Stein A.A., Belousov L.V.* A simple model for estimating the active reactions of embryonic tissues to a deforming mechanical force // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2012. V. 11. P. 1123–1136.

Three-Dimensional Continuum Model of Lumen Formation in a Cluster of Cells Immersed in an Extracellular Matrix: The Role of Mechanical Factors

S. A. Logvenkov^{a, b}

^a*National Research University "Higher School of Economics," Moscow, Russia*

^b*Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia*

e-mail: logv@bk.ru

The extent of participation of mechanisms such as the active interactions of cells with each other and with the extracellular matrix, the increased hydrostatic pressure in intercellular fluid, and enzymatic activity of cells that lead to the destruction of the extracellular matrix in the process of formation of cavities in clusters of cells formed during cluster vasculogenesis is studied. The problem of evolution of a single cluster of cells immersed in a deformable extracellular matrix is solved within the framework of a previously developed continuum multiphase model of the medium formed by two actively interacting solid phases and a fluid and the role of various cellular mechanisms discussed in the formation of hollow structures is studied. The calculations showed that the dominance of active interactions of the cell-matrix type over the intercellular interactions leads to a displacement of cells towards the outer boundary of the cluster and the creation of conditions for the formation of a cavity inside the cluster. The enzymatic activity of cells helps to free up a headroom for compaction of the cluster, due to the active intercellular interactions, and to slow down the formation of the increasing concentration profile of the cellular phase. An increase in the fluid pressure in the area occupied by cells leads to acceleration of the redistribution of concentrations of the cellular phase and matrix. The fluid pressure promotes accumulation of the cellular phase near the cluster boundary and increase in the matrix concentration in its central part. And only the joint participation of all the mechanisms considered leads to the formation of a structure in which a layer formed by the cellular phase surrounds a fluid-occupied cavity, while the matrix concentration in the cavity demonstrates the trend to its complete disappearance.

Keywords: cellular systems, lumen formation, continuum modeling.

УДК 532.5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА КАВИТАЦИОННОГО ПРИСАСЫВАНИЯ

© 2024 г. А. И. Уколов*, В. П. Родионов**

Керченский государственный морской технологический университет, Россия

**e-mail: ukolov_aleksei@mail.ru*

***e-mail: vik-rodio@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.10.2023 г.

После доработки 08.01.2024 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Рассматривается явление возникновения силы присасывания жесткого цилиндрического корпуса, ограничивающего затопленную кавитирующую струю, к твердой поверхности. На разработанной установке выполнен эксперимент по определению силы отрыва, необходимой для преодоления эффекта присасывания. Методом численного моделирования получены зависимости силы присасывания от диаметра корпуса и расстояния от сопла-кавитатора до поверхности. Проведены расчеты объемной доли паровой фазы внутри корпуса и статического давления вдоль поверхности присасывания. На основе полученных данных объясняется механизм появления и критерии исчезновения эффекта.

Ключевые слова: кавитация, давление, присасывание, затопленная струя, моделирование.

DOI: 10.31857/S1024708424030021, **EDN:** PGFDYS

Кавитация, как гидравлическое явление, относится к фазовому переходу, возникающему, когда давление ниже, чем давление насыщенного пара жидкости при данной температуре. В процессе фазового превращения газопаровой пузырек испытывает зарождение, рост и схлопывание. Коллапс пузырька пара сопровождается высокой температурой и давлением. Кавитирующая струя, создаваемая специальным соплом — кавитатором, является важным элементом использования гидравлической энергии. Исследования затопленных струйных потоков при кавитационных режимах истечения жидкости позволили определить уникальное конструктивное устройство кавитационной каверны [1]. В струях с развитой кавитацией, в отличие от автомодельных турбулентных струй, происходят деформация струйного потока, уменьшение величины переходного участка, расположенного между начальным и основным участками, а также появление неавтомодельного основного участка. Причиной деформации потока затопленных струй и их существенного отличия от автомодельных является образование и схлопывание внутри кавитационного потока газопаровых пузырьков. Их скопления определяют размеры каверны и создают область, где давление ниже, чем в остальном объеме жидкости. В гидродинамических устройствах, которые используют кавитирующие струи, область низкого давления может вызвать силу, действующую на корпус устройства и направленную к твердой преграде потоку — эффект присасывания. Авторы впервые обнаружили подобное поведение кавитирующей струи при испытании подводного инструмента [2–4]. Водолаз при выполнении очистки, приближая кавитационный инструмент к поверхности, испытывал притяжение, а не отталкивание, что должно наблюдаться при действии затопленной струи на твердую преграду потока.

Эффект присасывания, вызванный затопленной кавитирующей струей, мало изучен в настоящее время. В литературе встречаются работы, которые косвенно интерпретируют его. Авторами [5] предложено использовать эффект отрицательного давления кавитирующей струи для повышения эффективности полировки поверхности твердых тел водным раствором. Было показано, что эффект отрицательного давления усиливает кавитационную эрозию и улучшает удаление материала, а также способствует использованию для полировки растворов без абразивов.

Несколько исследований показали [6–8], что возникновение кавитации способно улучшить трибологические свойства подшипников и механических уплотнений. Для текстурированных подшипников,

когда кавитационный карман расположен рядом с входом, создается зона давления ниже атмосферного, и жидкость всасывается в подшипник.

Воздействие на твердую поверхность исследовано при акустической (ультразвуковой) кавитации. В работе [9] показано, что при стабилизации кавитационного кластера вблизи торца сплошного цилиндра на последний действует притягивающая сила, зависящая от интенсивности кавитации, а также динамики и формы кавитационного кластера.

Исследование эффекта присасывания кавитации имеет научную и практическую ценность. Возможность управления этим процессом позволит модернизировать множество подводных аппаратов, облегчить или вовсе исключить труд водолазов, активизировать роботизацию устройств, выполняющих технологические операции под водой.

Детальный экспериментальный анализ струйной кавитации ограничен производительностью насосных аппаратов и невозможностью испытаний множества различных комбинаций геометрии сопла–кавитатора. Ускорить исследование гидродинамической кавитации позволяет компьютерное моделирование струйного истечения. CFD – моделирование (вычислительная гидродинамика) с учетом кавитации появилось в коммерческих приложениях сравнительно недавно. Моделирование гидродинамических процессов средствами пакета конечных элементов ANSYS CFX – инструмент, который уже широко используется для оптимизации и проектирования различных частей турбомашин, их многофункционального анализа, в том числе и с учетом кавитации [10–13]. Однако появляются и работы по трехмерной визуализации кавитационной струи в затопленном пространстве [14–17].

В данной работе на основании физического эксперимента исследован эффект кавитационного присасывания. На разработанной экспериментальной установке обнаружено явление возникновения силы отрыва цилиндрического корпуса, ограничивающего затопленную кавитирующую струю. Кроме того, численным методом смоделирован процесс истечения кавитирующей струи на твердую поверхность, показан механизм появления эффекта присасывания.

1. МЕТОДИКА ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 1а представлена схема установки для исследования силы присасывания цилиндрического тела за счет растекания струйного кавитационного потока жидкости на поверхность. Установка состояла из консоли 1 с возможностью поворота механизмом реечной передачи, плеча 2 длиной L_1 , коромысла с центральным поворотным креплением 3, плеча 4 длиной L_2 , закрепленным поворотным креплением 5. Центральное крепление коромысла 3 смонтировано с осью 6 поршневого манометра 7. Измерительным элементом поршневого манометра 7 служит образцовый манометр 8 класса 0.6. Устройство 9 для создания затопленной кавитирующей струи в ограниченном пространстве располагалось на жесткой металлической поверхности 10, неподвижной относительно устройства 9, в открытой емкости 11 (показан контур на рис. 1а) с отводом для перелива 12.

Подробная конструкция устройства 9, представленная на рис. 1б, состояла из стержня, прикрепленного к переходнику 13 и установленному сверху корпуса 14. В конце переходника 13 устанавливалось сопло-кавитатор 15. Корпус 14 выполнен в виде цилиндра с внутренней полостью 16, открытой частью устанавливался на жесткую плоскость 10. Переходник 13 мог изменять расстояние h между соплом 15 и жесткой поверхностью 10. Внутренний диаметр d_1 корпуса 14 изготавливался следующих размеров: 60, 80, 100 мм. Внешний диаметр d_2 был на 20 мм больше, чем d_1 : 80, 100, 120 мм, соответственно. Сопло-кавитатор состояло из конического конфузорного участка с углом у вершины 16° и цилиндрического участка диаметром $d_0=2$ мм.

Установка на рис. 1 работала следующим образом. Для испытаний собиралась конструкция с соответствующими размерами корпуса 14 (рис. 1б), а именно внутренним диаметром d_1 и высотой h от среза сопла до твердой поверхности. Вода подавалась в сопло-кавитатор 15 от плунжерного насоса по шлангу высокого давления. В начале эксперимента сопло-кавитатор находится на одном уровне с отверстием перелива 12. После заполнения емкости 11 плечо 4 опускалось вниз до присасывания устройства 9. Во время прикладывания силы к поворотной консоли 1 фиксировались показания манометра 8 в момент отрыва корпуса 14. В процессе испытаний входное давление, подаваемое к соплу-кавитатору 15 $P_0=10$ МПа (рис. 1б). Расход жидкости – 25 л/мин. Максимальная скорость струи в цилиндрическом участке сопла – 127–140 м/с. Наличие кавитирующей струи определялось визуально на подготовительном этапе измерений

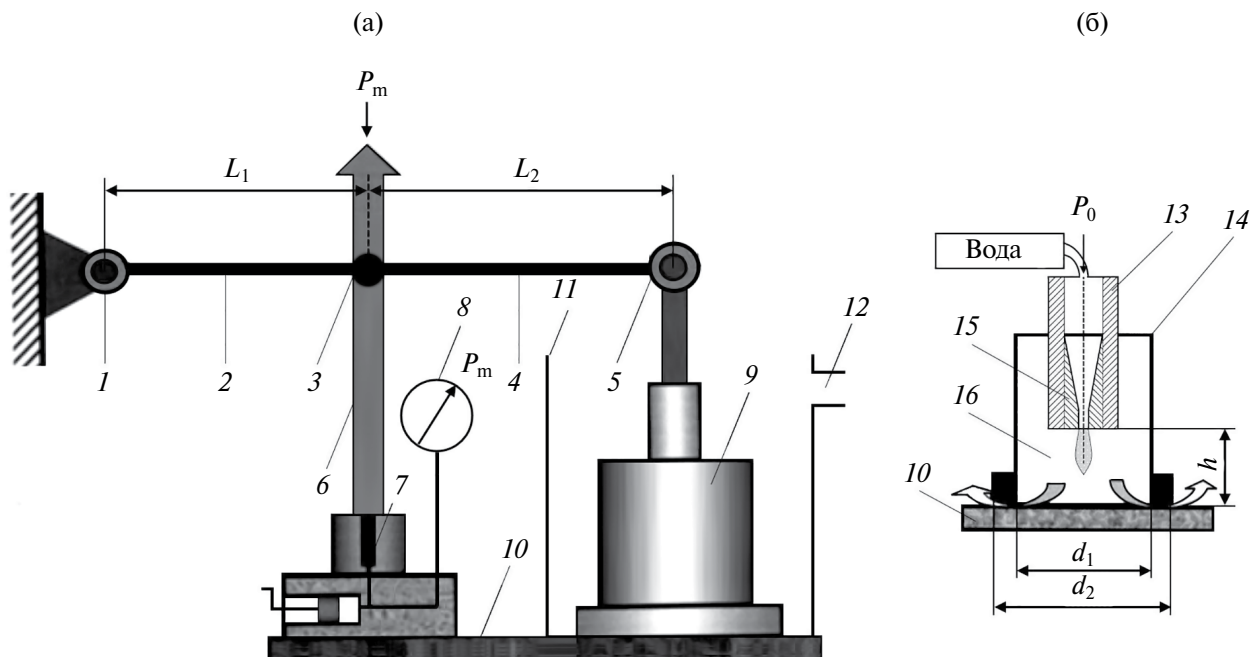


Рис. 1. Установка для исследования силы присасывания устройства к поверхности (а) и схема создания кавитирующей струи в ограниченном пространстве (б).

при истечении без корпуса 14. Эксперимент с одинаковыми геометрическими и гидродинамическими условиями повторялся 10 раз. Результирующая сила находилась как средняя арифметическая величина.

Для получения действительного значения силы F_w использовалась формула:

$$F_w = \frac{P_m L_1 S}{L_1 + L_2}$$

где F_w — сила отрыва установки от поверхности или сила присасывания к жесткой металлической поверхности, P_m — показание образцового поршневого манометра, L_1 — плечо коромысла, L_2 — плечо коромысла, S — площадь основания цилиндрического корпуса.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для анализа CFD использовалась модель турбулентности SST $k-\omega$ RANS (усредненная по Рейнольдсу Навье—Стокса) в системе уравнений энергии. Эта модель была разработана в [18] для эффективного сочетания модели $k-\omega$ в пристеночной области с независимостью модели $k-\epsilon$ от набегающего потока в дальней зоне, что делает ее более точной и надежной для широкого класса потоков [16]. Уравнения переноса (2.1) и (2.2) для модели SST $k-\omega$ имеют форму, аналогичную стандартной модели $k-\omega$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (2.2)$$

где G_k — кинетическая энергия турбулентности за счет градиентов средней скорости, G_ω — представляет собой генерацию ω , Γ_k и Γ_ω — эффективный коэффициент диффузии k и ω , Y_k и Y_ω — диссипация k и ω из-за турбулентности, D_ω — коэффициент перекрестной диффузии, S_k и S_ω — определяемые пользователем начальные условия. Модель кавитации была представлена уравнением Рэля—Плессета

$$R_B \frac{d^2 R_B}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR_B}{dt} \right)^2 + \frac{2\sigma}{\rho_f R_B} = \frac{P_v - P}{\rho_f}$$

или, в упрощенном виде

$$\frac{dR_B}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_f}}$$

где R_B – радиус кавитационного пузырька; P_v – давление внутри пузырька (в модели – давление насыщенных паров); P – локальное давление в жидкости (абсолютное давление CFD-решателя).

Скорость изменения объема пузырьков рассчитывается следующим образом:

$$\frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R_B^3 \right) = \pi R_B^2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_f}}$$

а скорость изменения массы пузырька равна:

$$\frac{dm_B}{dt} = \rho_g \frac{dV_B}{dt} = \pi R_B^2 \rho_g \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_f}}$$

Если N_B – количество пузырьков в единице объема, объемную долю r_g можно выразить как:

$$r_g = V_B N_B = \frac{4}{3} \pi R_B^3 N_B$$

а общая скорость межфазного массопереноса на единицу объема равна

$$\dot{m}_{fg} = N_B \frac{dm_B}{dt} = \frac{3\rho_g r_g}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_v - P}{\rho_f}} \quad (2.3)$$

Это выражение получено в предположении роста пузырьков (испарения). Для конденсации (2.3) можно обобщить следующим образом:

$$\dot{m}_{fg} = F \frac{3\rho_g r_g}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|P_v - P|}{\rho_f}} \operatorname{sgn}(P_v - P) \quad (2.4)$$

где F – эмпирический коэффициент, который может различаться для конденсации и испарения, предназначенный для учета того факта, что они могут происходить с разной скоростью (конденсация обычно происходит значительно медленнее, чем испарение). Хотя уравнение (2.4) было обобщено для испарения и конденсации, его можно дополнительно оптимизировать для процесса испарения. Испарение начинается в местах зарождения (чаще всего неконденсирующихся газов) и r_g в (2.4) заменяется на $1 - r_g$, что дает

$$\dot{m}_{fg} = F \frac{3r_{nuc}\rho_g(1 - r_g)}{R_B} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{|P_v - P|}{\rho_f}} \operatorname{sgn}(P_v - P)$$

где r_{nuc} – объемная доля центров зародышеобразования. Уравнение (2.4) сохраняется в случае конденсации, а R_B представляет собой радиус кавитационных пузырьков при зародышеобразовании.

Для численного решения основных уравнений использовался пакет программ ANSYS Workbench 23. Расчетная область показана на рис. 2а. Геометрические и гидродинамические параметры менялись в соответствии с учетом трех типов испытательных камер, которые использовались в физическом эксперименте (рис. 1б). Область моделирования включает: вход в сопло-кавитатор 1 (рис. 2а), стенки корпуса 2, выходы потока 3, стенку 4, выполняющую роль жесткой поверхности 10 на рис. 1. Дополнительная длина входа не рассматривалась. В качестве входных условий использовалась нормальная ориентация потока

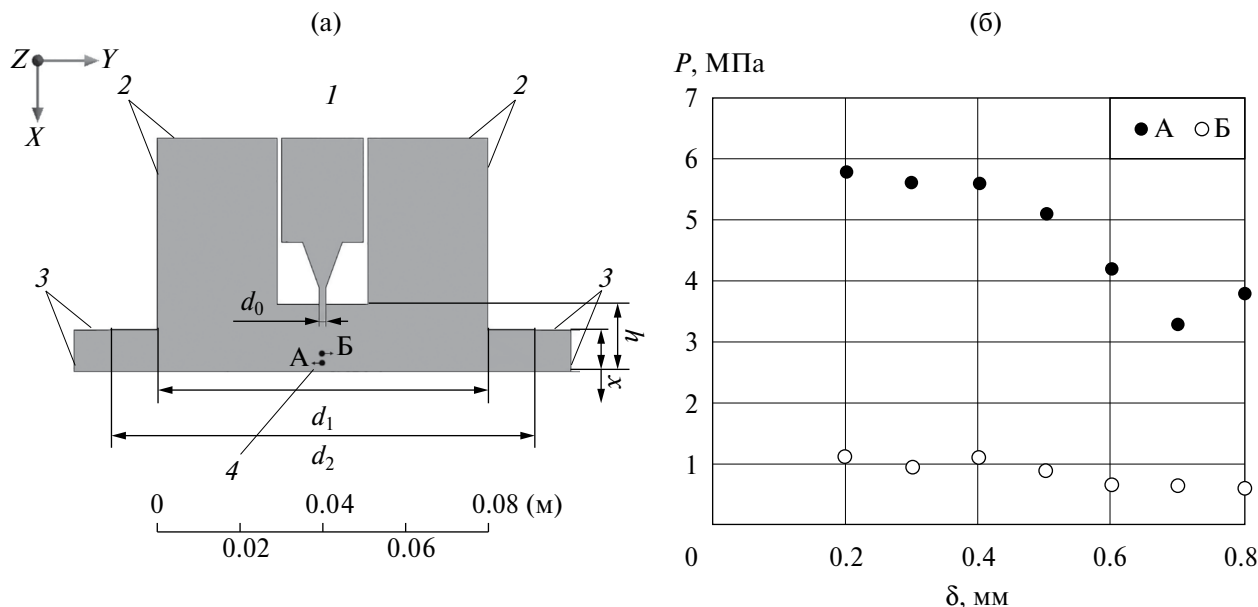


Рис. 2. Геометрия и размеры области моделирования (а); проверка независимости результатов от размера ячейки (б).

с нулевым уклоном. В отличие от экспериментальной установки в рамках численного моделирования вводилось расстояние x от корпуса устройства до поверхности присасывания 4 (рис. 2а).

Решение задачи на основе метода конечных объемов проводилось в два этапа. На первом этапе было получено конвергентное решение с выключенной кавитационной моделью, затем данные были импортированы в дублированный решатель, и проведен анализ кавитационного течения. В качестве жидкости использовалась вода (несжимаемая жидкость в условиях изотермического течения) с опорным давлением 1 атм при 25°C. Давление на входе $P_0 = 0.5\text{--}20$ МПа, на выходе равнялось опорному. Основным диаметр пузырьков пара в уравнении Рэлея–Плессета выбран $R_B = 2 \cdot 10^{-6}$ м, давление насыщенных паров с учетом температуры моделируемой жидкости 25°C $P_v = 3170$ Па. Остальные параметры моделирования, выбранные по умолчанию, считаются стандартными для большинства кавитационных течений.

Было проведено исследование расчетной сетки для определения размера ячеек δ , при котором дальнейшее его уменьшение не влияет на результаты моделирования (рис. 2б). Для сравнения использовалось статическое давление P в двух точках “А” и “Б” (рис. 2а). Результаты расчетов показали, что давление в этих точка не зависит от размера ячейки сетки при $\delta < 0.5$ мм. Для стабилизации результатов размер ячейки сетки был уменьшен до $\delta = 0.4$ мм. В среднем расчетная сетка состояла из 0.5 млн элементов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 3 показаны экспериментальные и численные зависимости силы присасывания F_w устройства 9 (рис. 1а) от расстояния h между соплом-кавитатором и жесткой поверхностью для трех диаметров цилиндрического корпуса d_1 .

График зависимости имеет максимум. Следовательно, существует оптимальное расстояние h для различных размеров области, ограждающей кавитирующую струю. На величину максимального значения силы отрыва также влияет внутренний диаметр цилиндрического корпуса d_1 . При указанном давлении на входе и геометрии сопла-кавитатора $d_1 = 80$ мм обеспечивал большую F_w , чем $d_1 = 60$ мм и $d_1 = 100$ мм.

Наличие силы присасывания подтверждает численное моделирование кавитирующей струи (рис. 3б). Кроме того, наблюдается максимальное значение F_w для каждого диаметра d_1 корпуса ограничивающего цилиндра. Однако спад силы F_w с увеличением h не такой стремительный, как при экспериментальном измерении. Отличие в характере кривых (рис. 3) связано с расстоянием x от основания корпуса до поверхности присасывания (рис. 2а). При численном моделировании x имеет постоянное значение,

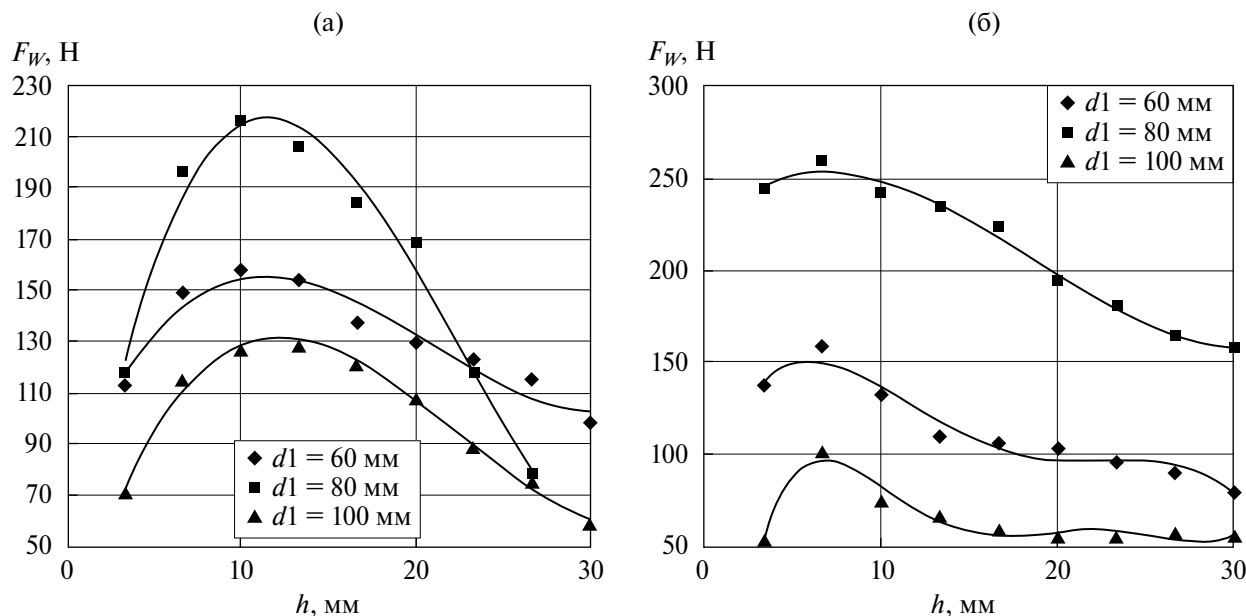


Рис. 3. Экспериментальная (а) и численная (б) зависимость силы отрыва F_w от расстояния h при разных значениях диаметра цилиндрического корпуса d_1 .

а решатель показывает результирующую силу, действующую на плоскость стенки 4 модели (рис. 2а). В процессе физического эксперимента x величина переменная. Момент отрыва корпуса происходит на различном расстоянии от металлической поверхности, определить которое затруднительно. Численное моделирование позволяет определить F_w на заданном расстоянии x . Результаты вычисления показаны на рис. 4а. Расстояние между соплом-кавитатором и поверхностью во всех расчета $h = 6$ мм соответствовало максимуму F_w на рис. 3б.

Из графиков (рис. 4а) следует, что F_w слабо меняется в определенном интервале x . Таким образом, для заданного значения входного давления P_0 геометрии сопла-кавитатора и корпуса, ограничивающего кавитирующую струю, существует интервал x , в котором F_w остается постоянной. Превышение определенного значения x приводит к быстрому снижению F_w и отрыву корпуса устройства от поверхности.

Величина $P_0 = 10$ МПа, выбрана с учетом характеристик плунжерного насоса в физическом эксперименте, не является оптимальной с точки зрения достижения максимальной силы присасывания цилиндра заданной геометрии (рис. 4б). Отрицательной F_w на графике является сила отталкивания, которая возникает после затухания кавитации. Уменьшение P_0 до 5 МПа при $h = 6$ мм приводит к повышению F_w . По всей видимости, $P_0 = 5$ МПа является пороговым значением зарождения кавитационной каверны, для используемой геометрии сопла-кавитатора и расхода насоса.

Для визуализации процесса кавитации были выполнены эксперимент и фотосъемка при отсутствии ограничивающего корпуса 14 (рис. 1б). На рис. 5а показан вид истечения затопленной струи в режиме кавитации на твердую поверхность. Вода поступает от высоконапорного насоса в сопло-кавитатор и при истечении в затопленное пространство образует каверну со скоплением огромного количества газопаровых пузырьков. В растекающемся по жесткой поверхности потоке образуется область с давлением ниже давления в затопленном пространстве и ниже атмосферного давления.

Конфигурация кавитационной каверны, полученной в эксперименте, качественно совпадает с результатами численного моделирования (рис. 5б). Представленное на рис. 5б распределение паровой фазы показано при наличии стенок корпуса. При помещении в ограничивающий цилиндр кавитирующей струи часть растекающегося потока не выходит в затопленное пространство, а образует кавитационные вихри внутри корпуса. Таким образом, возникает отрицательное давление, которое и вызывает эффект присасывания корпуса к твердой поверхности. В данной работе отрицательным считается давление ниже нормального атмосферного или опорного давления при численном моделировании. При

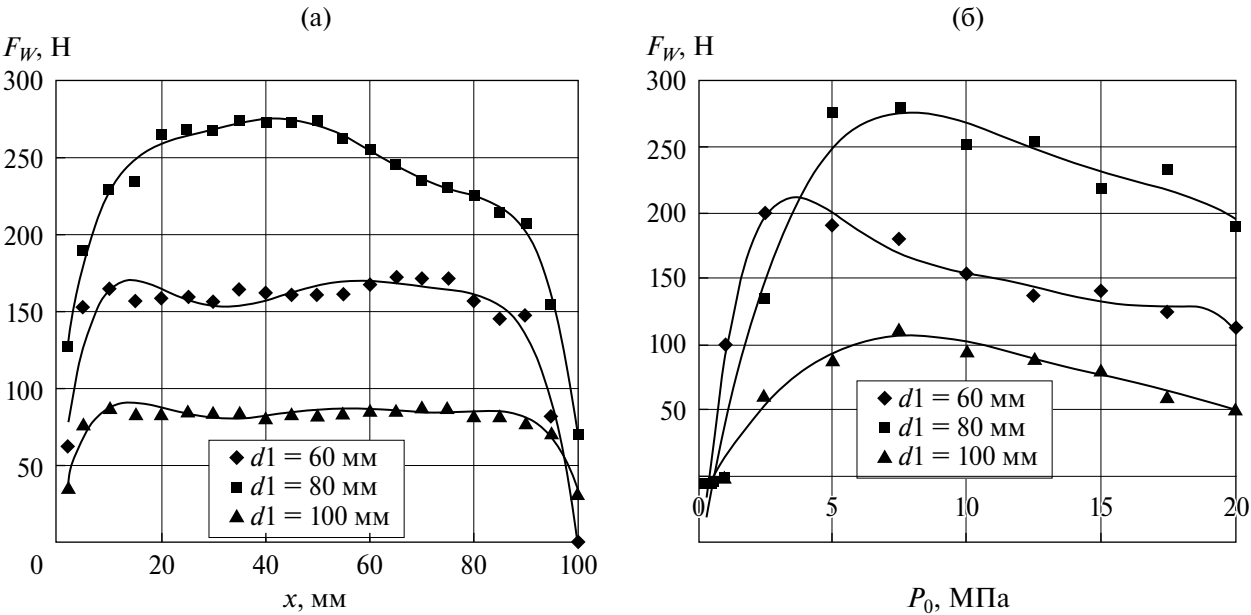


Рис. 4. Зависимость силы отрыва F_w от расстояния x (а) и давления на входе P_0 (б) при разных значениях диаметра цилиндрического корпуса d_1 .

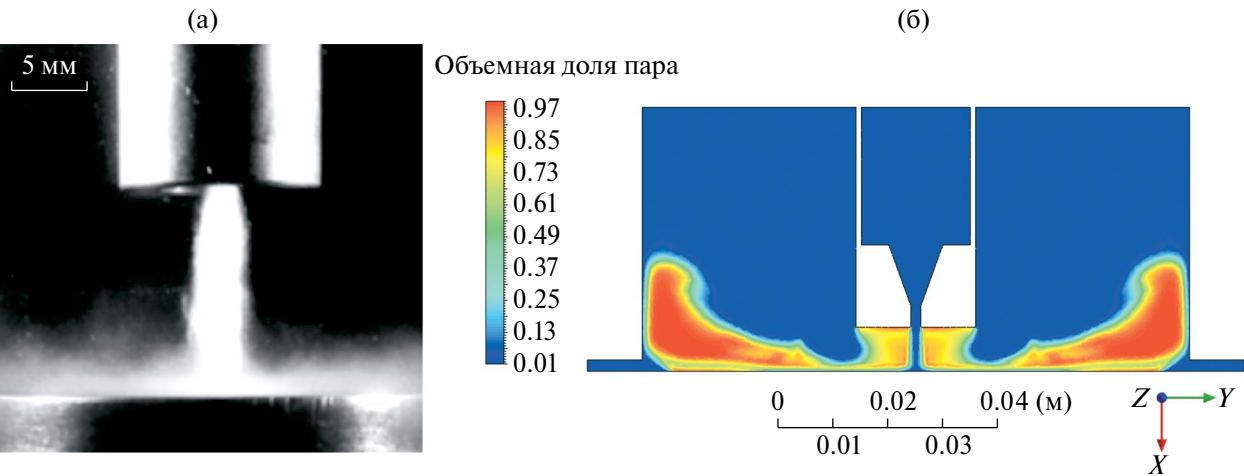


Рис. 5. Фото истечения струйного кавитационного затопленного потока из сопла-кавитатора на поверхность (а); распределение объемной доли паровой фазы внутри корпуса устройства (б).

погружении на глубину эффект присасывания будет усиливаться за счет увеличения давления в затопленном пространстве.

4. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Наличие отрицательно давления подтверждает зависимость статического давления $P = f(y)$ (рис. 6). Результаты получены для трех значений h на прямой Oy (рис. 5б), которая расположена на расстоянии 0.1 мм от поверхности присасывания. Начало координат совпадает с точкой пересечения оси струи и прямой Oy. В центре жесткой поверхности наблюдается пик положительных значений P_{max} . При малых h координата y перехода к отрицательному давлению совпадает с радиусом цилиндрического участка

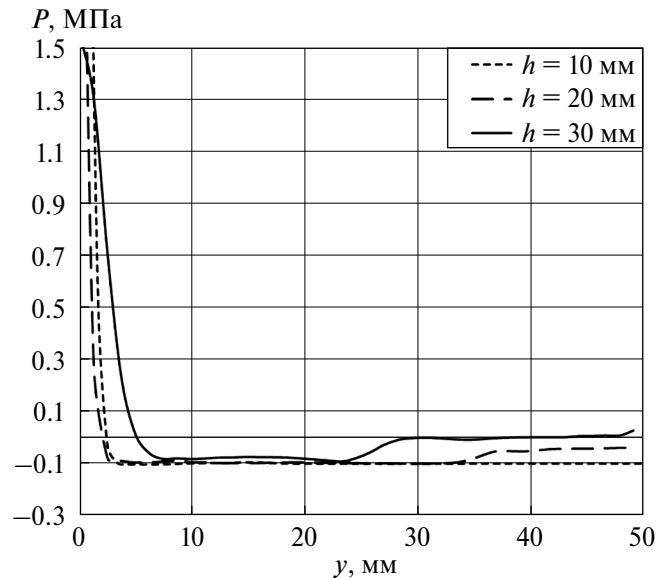


Рис. 6. Зависимость статического давления P от координаты y при разных значениях расстояния h .

сопла-кавитатора. С увеличением h максимальное значение $P_{\max}$ становится ниже, а координата y больше. Кавитация зарождается на срезе цилиндрического участка и корпуса сопла-кавитатора. Из-за близкого расположения преграды к потоку кавитационная каверна не успевает сомкнуться. Поэтому в центре поверхности давление остается положительным. Растекание кавитационных пузырьков приводит к переходу давления к отрицательным значениям и появлению зоны разрежения вдоль поверхности. При малых значениях h радиус этой зоны совпадает с радиусом цилиндрического корпуса. Кавитационные пузырьки достигают выхода жидкости из-под ограничивающего струю устройства. Увеличение h приводит к неполному покрытию поверхности кавитационной каверной. Пузырьки схлопываются, не достигая выхода устройства, что вызывает повышение давления и обратный переход к положительному значению (рис. 6).

Аналогична зависимость статического давления при увеличении x , когда осуществляется подъем устройства. Эффект присасывания является результатом превышения силы, возникающей под действием отрицательного давления над силой положительного давления.

По такому же физическому принципу можно объяснить существование оптимального диаметра корпуса d_1 . Сила присасывания прямо пропорциональна площади поверхности, где давление отрицательно. Уменьшение d_1 приводит к снижению F_w , что подтверждается результатами физического и численного эксперимента ($d_1 = 60$ мм на рис. 3). Если d_1 превышает определенное значение, то кавитационные пузырьки схлопываются раньше, чем достигнут выхода устройства. Следовательно, появляется зона, где статическое давление имеет положительное значение и F_w снижается.

К положительной части давления на поверхность под корпусом относится и центральный пик, обусловленный прямым воздействием струи (рис. 6). Затоженная струя является источником кавитационного и динамического воздействия на поверхность. Зарождение гидродинамической кавитации стремительный процесс, возникающий при снижении статического давления в потоке, ниже давления насыщенного пара жидкости при данной температуре. Переход определяется величиной входного давления P_0 . Преодоление порогового значения приводит к мгновенному росту кавитационной и падению динамической составляющей. Однако кавитация потока ограничена геометрией сопла-кавитатора. После достижения определенного объема и концентрации пара рост кавитационной каверны замедляется при увеличении P_0 . Вместе с тем, увеличивается динамическое воздействие струи и значение $P_{\max}$, что вызывает снижение F_w (рис. 4б).

Очевидно, что количественные значения силы F_w будут отличаться, если использовать иные геометрические размеры и форму сопла-кавитатора и ограничивающего корпуса. Варьируя набор параметров,

при заданных гидродинамических характеристиках насоса, возможно достигнуть баланса между величиной силы F_w и расстоянием x , которое будет постоянно, независимо от свойств и шероховатости поверхности присасывания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами физического и численного эксперимента исследовано явление возникновения силы присасывания корпуса, ограничивающего затопленную кавитирующую струю к твердой поверхности. Показано существование оптимальной величины внутреннего диаметра корпуса устройства для достижения максимальной силы присасывания при заданном входном давлении и геометрии сопла-кавитатора. Исследовано распределение статического давления вдоль поверхности присасывания. Обнаружено, что эффект присасывания является результатом привышения силы отрицательного давления над положительным. Увеличение расстояния от среза сопла-кавитатора до поверхности или отклонение внутреннего диаметра корпуса от оптимального являются причиной снижения и исчезновения эффекта присасывания. Выявленный в работе эффект может быть использован при разработке инновационных приложений в морской индустрии, бурении, металлургии и даже медицине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Родионов В.П. Струйная суперкавитационная эрозия. Краснодар: ГОУВПО КубГТУ, 2005. 223 с.
2. Старовойтов П.П., Уколов А.И., Родионов В.П. Инновационный инструмент подводной очистки // Вестник КГМУ. Сер. Морские технологии. 2019. № 4. С. 105–117.
3. Родионов В.П. Суперкавитационная струйная экотехнология водолазных работ. Краснодар: ГОУВПО КубГТУ, 2015. 160 с.
4. Родионов В.П., Герасимов В.И. Технологии очистки поверхностей корпусов судов от наслоений и обрастаний. М.: Эдитус, 2022, 190с.
5. Chena F., Wanga H., Yin S., Huang S., Tang Q., Luo H. Cavitation water-suction polishing of metallic materials under negative-pressure effect // J. Mater. Process. Technol. 2019. V. 273. P. 116257. doi:10.1016/j.jmatprotec.2019.116257.
6. Ma X., Meng X., Wang Y., Peng X. Suction effect of cavitation in the reverse-spiral-grooved mechanical face seals // Tribol. Int. 2019. V. 132. P. 142–153. doi:10.1016/j.triboint.2018.12.022
7. Cross A.T., Sadeghi F., Cao L.J., Rateick R.G., Rowan S. Flow visualization in a pocketed thrust washer // Tribol. Trans. 2012. V. 55. № 5. P. 571–581. doi:10.1080/10402004.2012.681343
8. Zhang J., Meng Y. Direct observation of cavitation phenomenon and hydrodynamic lubrication analysis of textured surfaces // Tribol. Lett. 2012. V. 46. № 2. P. 147–158. doi:10.1007/s11249-012-9935-6
9. Санкин Г.Н., Малых Н.В. Сила, действующая на цилиндр при ультразвуковой кавитации // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 7. С. 101–105.
10. Валухов С.Г., Крестинин А.В., Галдин Д.Н., Баранов С.С. Оптимизационное проектирование проточной части магистрального нефтяного насоса с использованием TURBO инструментов ANSYS // Насосы. Турбины. Системы. 2015. Т. 14. № 1. С. 56–68.
11. Tsutsumi K., Watanabe S., Tsuda S., Yamaguchi T. Cavitation simulation of automotive torque converter using a homogeneous cavitation model // Eur. J. Mech. B Fluids. 2017. Vol. 61. № 2. P. 263–270. doi.org/10.1016/j.euromechflu.2016.09.001
12. Уколов А.И., Родионов В.П., Старовойтов П.П. Моделирование колеса центробежного насоса с максимальным эффектом кавитации // Научно-технический вестник ИТМО. 2017. Т. 17. № 5. С. 910–919. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-910-919
13. Bakir F., Rey R., Gerber A.G., Belamri T., Hutchinson B. Numerical and experimental investigations of the cavitating behavior of an inducer // Int. J. Rotating Machinery. 2004. V. 10. P. 15–25. doi: 10.1080/10236210490258034
14. Уколов А.И., Родионов В.П. Верификация результатов численного моделирования и экспериментальных данных влияния кавитации на гидродинамические характеристики струйного потока // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 4. Т. 79. С. 102–114. doi:10.18698/1812-3368-2018-4-102-114

15. *Charriere B., Goncalves E.* Numerical investigation of periodic cavitation shedding in a Venturi // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2017. V. 64. P. 41–54.
doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.01.011
16. *Omelyanyuk M., Pakhlyan I., Ukolov A., Bukharin N., El Hassan M.* Experimental and numerical study of cavitation number limitations for hydrodynamic cavitation inception prediction // *Fluids.* 2022. V. 7. № 6. P. 198.
doi:10.3390/fluids7060198
17. *Wang X., Chen Y., Li M., Xu Y., Wang B., Dang X.* Numerical investigation of the cavitation performance of annular jet pumps with different profiles of suction chamber and throat inlet // *Eng. Appl. Comput. Fluid Mech.* 2020. V. 14. № 1. P. 1416–1428.
doi:10.1080/19942060.2020.1824875
18. *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // *AIAA J.* 1994. V. 32. P. 1598–1605.
doi:10.2514/3.12149

Experimental and Numerical Investigation of the Cavitation-Induced Suction Effect

A. I. Ukolov* and V. P. Rodionov **

Kerch State Naval Technological University, Kerch, 298309 Russia

**e-mail: ukolov_aleksei@mail.ru*

***e-mail: vik-rodio@yandex.ru*

The generation of the suction force between a rigid cylindrical frame constricting a submerged cavitating jet and a solid surface is considered. The separation force needed to overcome the suction effect is experimentally determined in a specially developed setup. The dependences of the suction force on the frame diameter and the distance from the nozzle cavitator are obtained using numerical modeling. The volume fraction of the vapor phase inside the frame and the static pressure along the suction surface are calculated. The mechanism of the appearance of the effect and the criteria of its vanishing are explained on the basis of the data obtained.

Keywords: cavitation, pressure, suction, submerged jets, modeling.

УДК 532.5

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ДИНАМИКУ СТРУКТУРНЫХ КОМПОНЕНТОВ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ГРАВИТАЦИОННОМ ОТРЫВЕ КАПЛИ ВОДЫ

© 2024 г. Ю. Д. Чашечкин*, В. Е. Прохоров**

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**e-mail: chakin@ipmnet.ru*

***e-mail: prohorov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 13.02.2024 г.

После доработки 16.03.2024 г.

Принята к публикации 16.03.2024 г.

Методом высокоскоростной видеорегистрации исследуется влияния электростатического поля (с потенциалом $\Phi = 0, 16$ и 18 кВ) на геометрию течения при гравитационном отрыве капли от капилляра. Проведен анализ видеogramм течения, определены размеры характерных элементов структур — собственно капель, перемычки и сателлитов. Прослежены осцилляции линейных размеров и объема остатка маточной жидкости после отрыва капли при $\Phi = 0$ и 18 кВ. В спектрах наблюдаются как основные частоты, так и их гармоники. Обнаружено, что небольшие изменения (12%) в значении потенциала вызывают качественные изменения картины течения, в частности, приводят к прямому отрыву капли от маточной жидкости без образования перемычки. При постоянном расходе жидкости в капилляре размер отрывающихся капель уменьшается с ростом напряжения. Опыты показывают возможность тонкого управления капельными течениями с помощью электростатического поля.

Ключевые слова: капля, сателлит, гравитация, электростатика, фрагментация, осцилляции.

DOI: 10.31857/S1024708424030039, **EDN:** PGEZAP

Распад вытекающей из отверстия струи на веер тонких струек под действием электрического поля, создаваемого с помощью лейденских банок с электрофорной машиной или атмосферного электричества, который описали еще в середине XVIII в., аббат Нолле [1] и естествоиспытатель М. В. Ломоносов («Текущая из узкой скважины вода разделяется, расшибается, дождь конической фигуры падением представляет и мелкими каплями ясно объявляет, что возбужденная через искусство электрическая сила и малейшие тел частицы от взаимного союза гонит и силу из вязкости слабит» [2]), более полутора столетий оставался научным курьезом. В начале прошлого века Дж. Зелены в серии опытов по наблюдениям вытекающей из стеклянного капилляра струйки в электростатическом поле с потенциалом в несколько киловольт, также создаваемым с помощью лейденских банок, выделил несколько устойчиво воспроизводимых форм течений, включавших режим образования веера тонких струек [3] и последовательностей отдельных капелек [4, 5]. В первых опытах [3] наблюдалось течение разбавленного раствора соляной кислоты, в последующих дополнительно изучалось вытекание этанола и раствора глицерина [5]. Картины течений, описанные в [3–5], составили основу большого числа промышленных технологий, включающих процессы «электроформирования» тонких волокон различного состава [6] и создания микрокапель, которые используются для контроля состава веществ, в том числе в микро-хромато-масс-спектрометрах с ионными ловушками [7].

Одновременно в серии независимых исследований экспериментально изучалась картина гравитационного отрыва от среза капилляра капель различных жидкостей без приложения электрического поля. Применяя наиболее совершенную, на тот момент, технику освещения при киносъемке картины капельного течения со скоростью 800 кадров/с, Эдгертон установил, что при гравитационном отрыве в воздухе от капилляров диаметром $1.9 < d_c < 15$ мм формируются капли воды диаметром $4.0 < D < 7.2$ мм, которые сопровождаются одним или несколькими сателлитами [8]. Размеры капель и сателлитов растут с увеличением диаметра капилляра. Приведенные фотографии картин отрыва капель жидкостей различной

плотности ρ , но с близкими значениями коэффициента поверхностного натяжения σ (нитробензол — $\rho = 1.199 \text{ г/см}^3$ и $\sigma = 48 \text{ эрг/см}^2$; 85.6% раствор этанола в воде — $\rho = 0.973 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 47.8 \text{ эрг/см}^2$; 0.00068% раствор олеата натрия в воде — $\rho = 1.0 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 48.1 \text{ эрг/см}^2$; 90.8% раствор глицерина в этаноле — $\rho = 1.219 \text{ г/см}^3$, $\sigma = 48.1 \text{ эрг/см}^2$) показали заметное влияние на динамику и тонкую структуру течения других физических свойств растворов.

Повышение яркости источников света и качества оптики позволило получить еще более детальные изображения картины течения при отрыве капли воды от капилляра с внешним диаметром $d_c = 5.2 \text{ мм}$, проследить трансформацию формы перемычки, переходящую от тонкой гладкой конической в набор сливающихся мелких капелек [9]. Серия опытов по изучению формы капли и последующих сателлитов при истечении с постоянным расходом воды из капилляра в воздух проведена в [10]. Детальные расчеты процесса формирования на срезе капилляра висящей капли объемом $V_d = 13 \text{ мкл}$, основанные на идеях замены действия сил поверхностного натяжения массовыми силами [11,12], позволили проследить эволюцию растущей капли, выделить рэлеевские осцилляции ее формы в процессе наполнения [13]. Эволюция формы перемычки и сателлита, возникающего после ее отделения, иллюстрируют фотографии [14]. Более детально динамика движения оторвавшейся капли воды и сопутствующих сателлита и субсателлита, вариации формы и осцилляции всех компонентов прослежены в [15]. Сравнения данных наблюдений и расчетов рэлеевских колебаний оторвавшейся от перемычки капли воды представлены в [16].

Распад вертикальных струек воды, этанола, глицерина и их растворов различной концентрации на отдельные капли прослежен в [17]. Гравитационный отрыв капель пищевого растительного и силиконового масла происходит с образованием тонких протяженных первичных и еще более тонких вторичных перемычек [18].

Отмеченные общие свойства картины течения сохраняются и при отрыве капель криогенных жидкостей. В серии опытов установлено, что диаметр отрывающейся капли здесь также зависит от величины поверхностного натяжения и определяется капиллярной длиной как в вязкой, так и в сверхтекучей жидкости [19]. Детальная регистрация эволюции геометрии течения при отрыве капли суспензии выполнена в [20]. Расчеты формы отрывающейся от капилляра капли воды и водного раствора глицерина различной концентрации согласуются с данными измерений в независимо выполненных экспериментах [21]. В алгоритме построения математической модели, так же, как и в [13], поверхностные эффекты моделируются объемными силами [11–13]. Однако разработанные алгоритмы не позволяют рассчитывать картину переноса вещества, выделять капиллярные волны и осцилляции оторвавшейся капли, наблюдаемые во многих опытах [8–10]. Развернутые исторические обзоры работ по визуализации отрыва капель от капилляров и распада струй с образованием капель приведены в [22, 23].

Начало нового цикла исследований отрыва микрокапель в электрическом поле связывается с экспериментами Дж. Тейлора по регистрации формы области отрыва тонкой струйки от конического выступа, образующегося на плоской поверхности заряженной жидкости [24], которые были проведены через пятьдесят лет после пионерских работ [3–5]. Наблюдения и оригинальные идеи [24] инициировали постановку циклов экспериментальных [25] и теоретических [26] исследований динамики капель, срывающихся с вершин конических заострений, образующихся на поверхности различных жидкостей в сильном электрическом поле — и классических электролитов, и расплавов металлов. Отдельно изучались деформация, движение, распад капли воды и вытягивание из капли нитей в жидком диэлектрике в сильном электрическом поле [27, 28]. Изменение формы растущей капли жидкости, вытекающей под действием электрического поля из круглого отверстия в пластине в воздушную среду, прослежено в [29]. Зависимость эксцентриситета капли, сохраняющей эллипсоидальную форму, вытянутую в направлении градиента электростатического поля, определена в диапазоне разности потенциалов $0 < \Delta\Phi < 4 \text{ кВ}$.

Влияние поля с потенциалом $\Phi < 20 \text{ кВ}$, приложенного между капилляром и кольцевым электродом на дне бассейна, на размеры, частоту формирования и траектории капли, образующейся при истечении с постоянным расходом воды из капилляра внешним диаметром $d_c^o = 0.8 \text{ мм}$ и внутренним $d_c^i = 0.6 \text{ мм}$ в силиконовое масло вязкостью 100 сСт , изучено в [30]. Размеры капель уменьшаются, а частота отрыва растет по мере увеличения напряжения. Влияние электрического поля на эволюцию формы свободной капли и изменение ее траектории также рассмотрено в [31]. Аналитическая теория гравитационного отрыва капли от капилляра в электрическом поле развивалась в [32, 33], расчеты течений жидкости в окрестности вершины конуса Тейлора проведены в [34, 35]. Данные исследований картины отрыва и оценки размеров заряженных капель воды в воздухе, циклогексане и трансформаторном масле

представлены в [36]. Расчеты электрокапельных течений выполняются в широком диапазоне температур, включающем и высокие [34], и криогенные значения на поверхности жидкого гелия [37], как в опытах [19].

В последние годы тематика исследований влияния электрического поля на процессы формирования, отрыва и свободного падения капель различных жидкостей заметно расширилась в связи с развитием техники высокоскоростной регистрации течений [38], совершенствованием методики электрогидродинамического эксперимента [39], новыми достижениями в быстро развивающихся микро- и нанотехнологиях [40], поисками методов оптимизации топливного цикла двигателей внутреннего сгорания [41], и в интересах многих областей химической, нефтехимической, фармацевтической и других отраслей промышленности.

Цель данной работы — изучение влияния постоянного электрического поля на динамику базовых структурных компонентов течения при гравитационном отрыве капель воды от капилляра. Регистрировалась форма и положение основной капли, сателлитов, предвестников и сохраняющегося на капилляре остатка маточной жидкости, объемные и линейные осцилляции которого, отмеченные еще в [3], ранее детально не анализировались.

1. РАЗМЕРНЫЕ И БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЙ

Математическую основу методики проводимых опытов составляет система фундаментальных уравнений механики жидкостей [42], дополненная уравнением состояния для потенциала Гиббса, учитывающего доступную потенциальную поверхностную энергию и энергию электростатического поля и его производных, в частности, гетерогенной плотности с физически обоснованным начальными и граничными условиями [43], которая здесь для краткости не приводится. Из анализа полной системы уравнений механики жидкостей применительно к задачам отрыва и падения капли следует, что в число основных размерных параметров входят потенциалы Гиббса капли G_d и воздушной среды G_a (индексы отмечают принадлежность параметра), плотности $\rho_{d,a}$, кинематические $\nu_{d,a}$ и динамические $\mu_{d,a}$ вязкости сред; полный σ_d^a и нормированный на плотность жидкости коэффициент поверхностного натяжения $\gamma_d^a = \sigma_d^a / \rho_d$, эквивалентный диаметр D , площадь поверхности S_d , объем V_d , масса $M = \rho V_d$, импульс $p_d = MU$ и скорость U в момент отсоединения капли от перемычки; кинетическая энергия $En_k = MU^2/2$, доступная потенциальная поверхностная энергия (ДППЭ) $En_\sigma = \sigma S_d$, заключенная в приповерхностном шаровом слое толщиной порядка молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см, объем и масса которого $V_\sigma = \delta_\sigma S_d$ и $M_\sigma = \rho V_\sigma$.

В число базовых размерных параметров процесса входит также энергия электрического поля $En_e = \frac{\epsilon \epsilon_0 V_d}{2} \left(\frac{\Phi_e}{H_e} \right)^2$, значение которой определяется объемом капли V_d и напряженностью приложенного поля $E_e = \Phi_e / H_e$, которое считается однородным [26]. Здесь ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость жидкости капли, ϵ_0 — универсальная диэлектрическая постоянная, H_e — расстояние между электродами, к которым приложено напряжение Φ_e .

Важную роль в процессах перестройки структуры течений играют процессы трансформации ДППЭ En_σ , обусловленной зарядом капли и анизотропией атомно-молекулярных взаимодействий в тонком приповерхностном слое жидкости и на границах отдельных ассоциатов физической или химической природы (кластеров, клатратов, кластатов, полос, войдов с изолированными атомами и других), которые спонтанно возникают в жидкости [44]. Неоднородности распределения плотности и других термодинамических величин в жидкости на масштабах порядка размера молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см зарегистрированы с помощью высокоразрешающих инструментов [45, 46]. При уничтожении контактирующих свободных поверхностей при слиянии капли ДППЭ за времена порядка $\tau_\sigma \sim \delta_\sigma / U$, где U — скорость течения, преобразуется в возмущения температуры, давления, энергию механического движения [43].

Базовая группа линейных масштабов, которые определяются физическими свойствами сред, включает капиллярно-гравитационное отношение $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma / g}$, входящее в дисперсионное уравнение коротких поверхностных волн [42], диссипативно-капиллярный масштаб $\delta_\gamma^\nu = \nu^2 / \gamma$. Группа линейных масштабов, зависящих от скорости капли, включает капиллярный $\delta_U^\gamma = \gamma / U^2$ и прандтлев $\delta_U^\nu = \nu / U$ масштабы.

Соответственно, одна часть временных масштабов задачи включает только параметры среды – $\tau_\gamma^v = v^3 / \gamma^2$, $\tau_g^\gamma = \sqrt[4]{\gamma / g^3}$, другая – размер капли – $\tau_\gamma^D = \sqrt{D^3 / \gamma}$, $\tau_\gamma^v = vD / \gamma$, третья – ее скорость – $\tau_U^D = D / U$, $\tau_g^U = U / g$. Отношения базовых масштабов длины и времени определяют набор характерных капиллярно-диссипативных скоростей: $U_\gamma^v = \delta_\gamma^v / \tau_\gamma^v = \gamma / v$, $U_g^\gamma = \delta_g^\gamma / \tau_g^\gamma = \sqrt[4]{\gamma g}$, $U_\gamma^v = \delta_\gamma^v / \tau_\gamma^\gamma = \sqrt[4]{v^8 g^3 / \gamma^5}$, $U_g^U = \delta_g^U / \tau_g^U = \sqrt{\gamma^5 / g v^6}$, а также капиллярную скорость $U_D^\gamma = \sqrt{\gamma / D}$ [43]. Большое число масштабов однородной размерности отражает многообразие и сложность процессов, протекающих в широком диапазоне масштабов – от надмолекулярных порядка $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см в процессах освобождения и накопления ДППЭ, до полного размера области течения.

Отношения характерных масштабов одинаковой размерности задают набор традиционных безразмерных параметров процесса [43, 47]. Он включает следующие числа: Рейнольдса со скоростью U капли в момент отрыва $Re = D / \delta_U^v = UD / v$, Фруда $Fr = E_k / E_p = U^2 / gD$, Бонда – капиллярное $Bo = gD^2 / \gamma$ и электрическое $Bo_e = \frac{\epsilon \epsilon_0 D}{\sigma} \left(\frac{\Phi_e}{H_e} \right)^2$ [29, 30], Онезорге $Oh = v / \sqrt{\gamma D}$, Вебера – капиллярное $We = DU^2 / \gamma$ и электрическое $We_e = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\rho U^2} \left(\frac{\Phi_e}{H_e} \right)^2$.

Временные и пространственные масштабы процесса определяют требования к методике экспериментов в части выбора размеров области наблюдения, чувствительности, пространственного и временного разрешения инструментов. Безразмерные отношения используются при описании условий проводимых опытов.

2. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Опыты выполнены на стенде ДЗК (Динамика заряженной капли), разработанном для изучения динамики и структуры капельных течений в электрическом поле, входящем в состав УИУ «ГФК ИПМех РАН» [48]. Стенд включает дозатор капель, резервуар с рабочей жидкостью, прозрачную приемную кювету, регулируемый источник высокого напряжения, осветители, фото- и видеорегистраторы, блок управления, компьютер.

Фотография экспериментальной установки приведена на рис. 1. Здесь 1 – изготовленный в лаборатории источник высокого напряжения (0–30 кВ), 2 – дозатор, состоящий из капилляра и сферического оголовка (приведен на вставке), соединенного через кольцевой электрод с положительным полюсом источника, 3 – матовый экран, обеспечивающий равномерное освещение поля зрения, 4 – кювета с электродом – алюминиевой пластиной, соединенной с отрицательным полюсом источника тока, 5 – видеокамера i-speed 717. Подсветка рабочей зоны экрана, производилась прожекторами Multiled и Godox, расположенными за экраном 3 (на рисунке не показаны).

Источник высокого постоянного напряжения 1 позволяет регулировать выходные значения разности потенциалов в диапазоне $\Phi = 0–30$ кВ с шагом $\Delta\Phi = 1$ кВ. Видеокамера (фокусное расстояние объектива 100 мм, рабочая диафрагма 5.6) устанавливалась на расстоянии 15 см от капилляра.

Система подачи жидкости обеспечивала постоянный расход $Q_w = 0.04$ мл/с, при котором на срезе капилляра диаметром 1 мм формировалась капля размером $D = 4$ мм при выключенном источнике напряжения. В настоящих опытах в резервуар дозатора добавлялся краситель (черные чернила), что обеспечивало контрастное изображение и отсутствие бликов, искажающих видимые контуры элементов течения и препятствующих дальнейшей математической обработке.

Видеосъемка проводилась на скорости 20000 к/с. Размеру кадра 319×1176 пикселей в физических координатах соответствовало пространственное разрешение 0.05 мм. Из полученных видеозаписей извлекались серии видеок кадров, которые затем подвергались обработке с помощью математических программ масштабного и спектрального анализа.

Отметим, что создаваемое в настоящих опытах электростатическое поле существенно неоднородно, причем при высоких напряжениях неоднородность заметно усиливается из-за вовлечения в зону действия поля участвующих в эксперименте металлических предметов – видеокамеры, осветителей. В таких условиях расчет пространственного распределения напряженности не представляется возможным. Однако результаты эксперимента представляют интерес для технологий, в которых требуется управление размером капли и возможна подобная конфигурация электродов и окружающих металлоконструкций. Поле также может использоваться для управления капельными течениями, исходящими из сопел и (форсунок) двигателей.

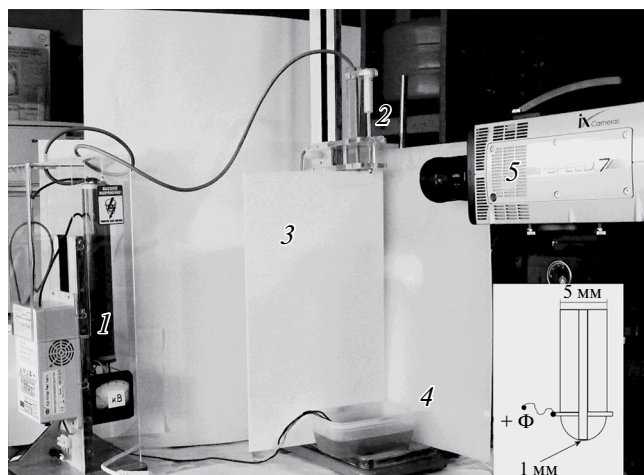


Рис. 1. Экспериментальный стенд: 1 – источник высокого напряжения; 2 – дозатор капель; 3 – экран; 4 – кювета с электродом; 5 – видеокамера. Вставка: схема капилляра с кольцевым электродом.

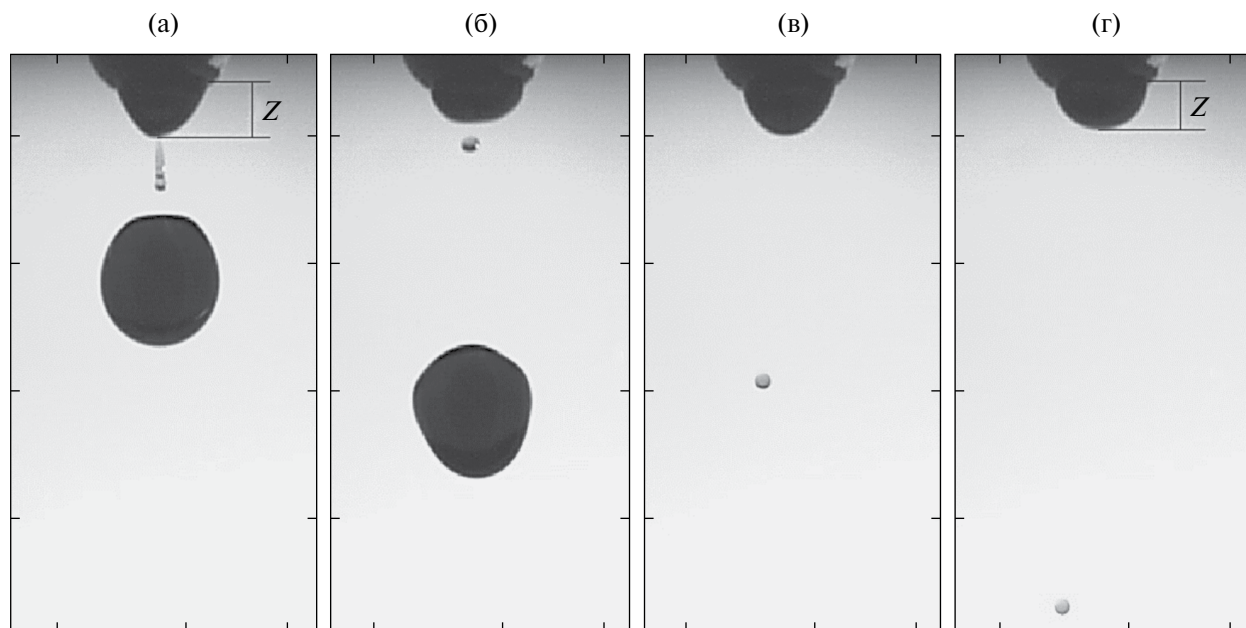


Рис. 2. Изменение положения маточной жидкости, капли и сателлита: (а–г) – $t = 0, 18, 59, 77$ мс после отрыва перемычки (деление шкалы 5 мм. $\Phi = 0$ кВ).

3. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ОТРЫВ КАПЛИ

Выборка из видеозаписи картины течения отрыва капли в вертикальной плоскости в отсутствии электрического поля показана на рис. 2. В начальный момент капля грушевидной формы связана с маточной жидкостью тонкой гладкой конической перемычкой. В отсутствии электрического поля капля всегда отрывается от нижнего истончающего конца перемычки, как было замечено в ранее выполненных опытах [15]. Далее истончается верхний край перемычки, и она полностью отрывается от маточной жидкости, нижняя кромка которой при этом начинает резко двигаться вверх. В дальнейшем описании время отсчитывается от момента отрыва верхнего конца перемычки.

На гладкой поверхности освободившейся перемычки появляются кольцевые выступы и впадины, и за короткое время поверхность трансформируется в цепочку длиной 2.1 мм из 7 капель, размер которых

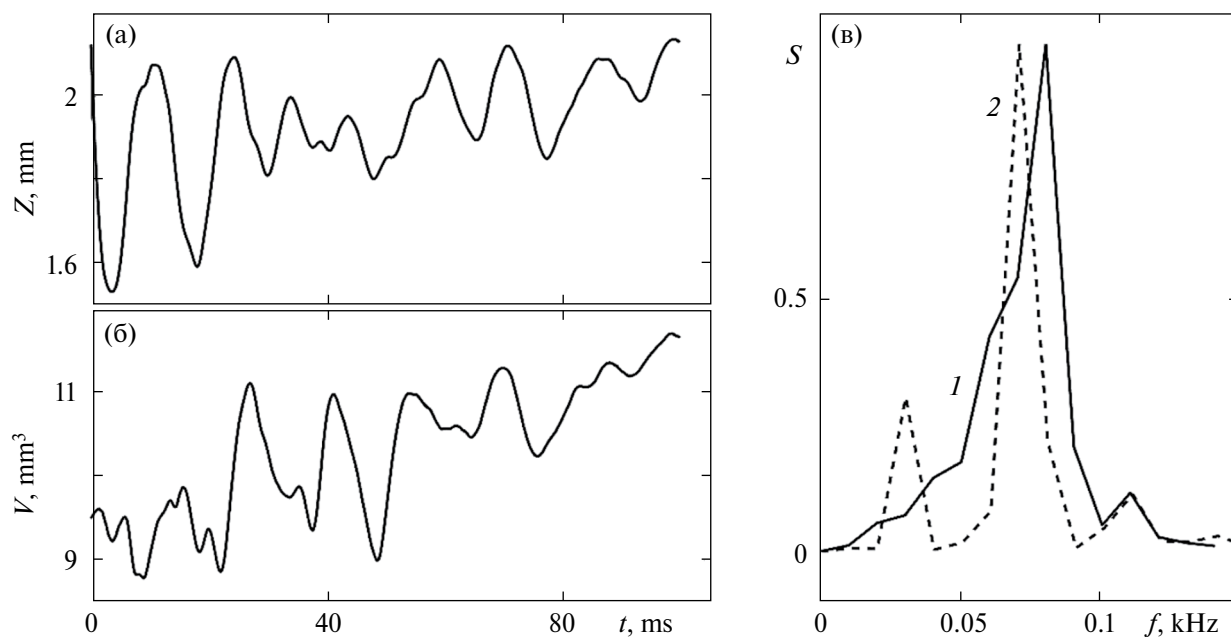


Рис. 3. Вариации высоты (а) и объема (б) маточной жидкости; спектры (в) вариаций высоты (1) и объема (2) с пиковыми частотами 30, 70, 80 и 112 Гц ($\Phi = 0$ кВ).

уменьшается в направлении маточной жидкости (рис. 2а). Жидкость в перемычке быстро перетекает и наибольший размер приобретает нижняя капля.

Основная капля в вертикальном сечении имеет форму неправильного ромба с симметрией относительно большей оси, которая наклонена к вертикали на $\theta = 5^\circ$. Максимальные размеры капли вдоль большой и малой осей – 5.3 и 4.7 мм. Через $\Delta t = 18$ мс перемычка стягивается в капельку (сателлит) диаметром $D = 0.7$ мм с центром, отстоящим от нижнего края маточной жидкости на $\Delta h = 0.8$ мм. Плоская вершина падающей капли постепенно выпучивается, и капля принимает обратную грушевидную форму (рис. 2б). На следующем кадре (рис. 2в) капля выходит из поля зрения. Сателлит продолжает равноускоренное падение, при этом его траектория отклоняется от вертикали, средняя скорость на данном временном интервале $\Delta t = 0.18$ мс достигает $u_s = 0.5$ м/с (рис. 2г). Небольшую долю горизонтальной компоненты импульса сателлит приобретает при отрыве от капли, а основную часть – при отрыве от маточной жидкости, которая совершает сложные трехмерные осцилляции.

Для описания поведения маточной жидкости, оставшейся на сопле после полного отрыва перемычки, выбраны временные зависимости двух переменных – высоты Z (рис. 3а, г) и объема V , заключенного внутри интервала $[0, Z]$.

Обе переменные совершают неравномерные осцилляции (рис. 3а, б), в спектре которых (рис. 3в) доминируют основные частоты (70 и 80 Гц). По обе стороны от них выделяются менее значимые пики на частотах 30 и 112 Гц. Близость частот доминирующих осцилляций отражает фактическое преобладание вертикальных смещений над другими направлениями. Полученные данные в целом согласуются с результатами ранее проведенных опытов [9, 10, 15].

4. ЭВОЛЮЦИЯ КАРТИНЫ ТЕЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ $\Phi = 16$ КВ

Подача напряжения приводит к изменению динамики отрыва и геометрии всех структурных элементов течения и, в первую очередь, растущей капли, приобретающей булавовидную форму (рис. 4а, $\Phi = 16$ кВ). На первом этапе отделяющийся объем движется как целое, при этом его форма непрерывно видоизменяется, а размеры увеличиваются по мере поступления и перераспределения жидкости. Нижняя часть объема наполняется, а верхняя утончается и вытягивается. Наиболее быстро

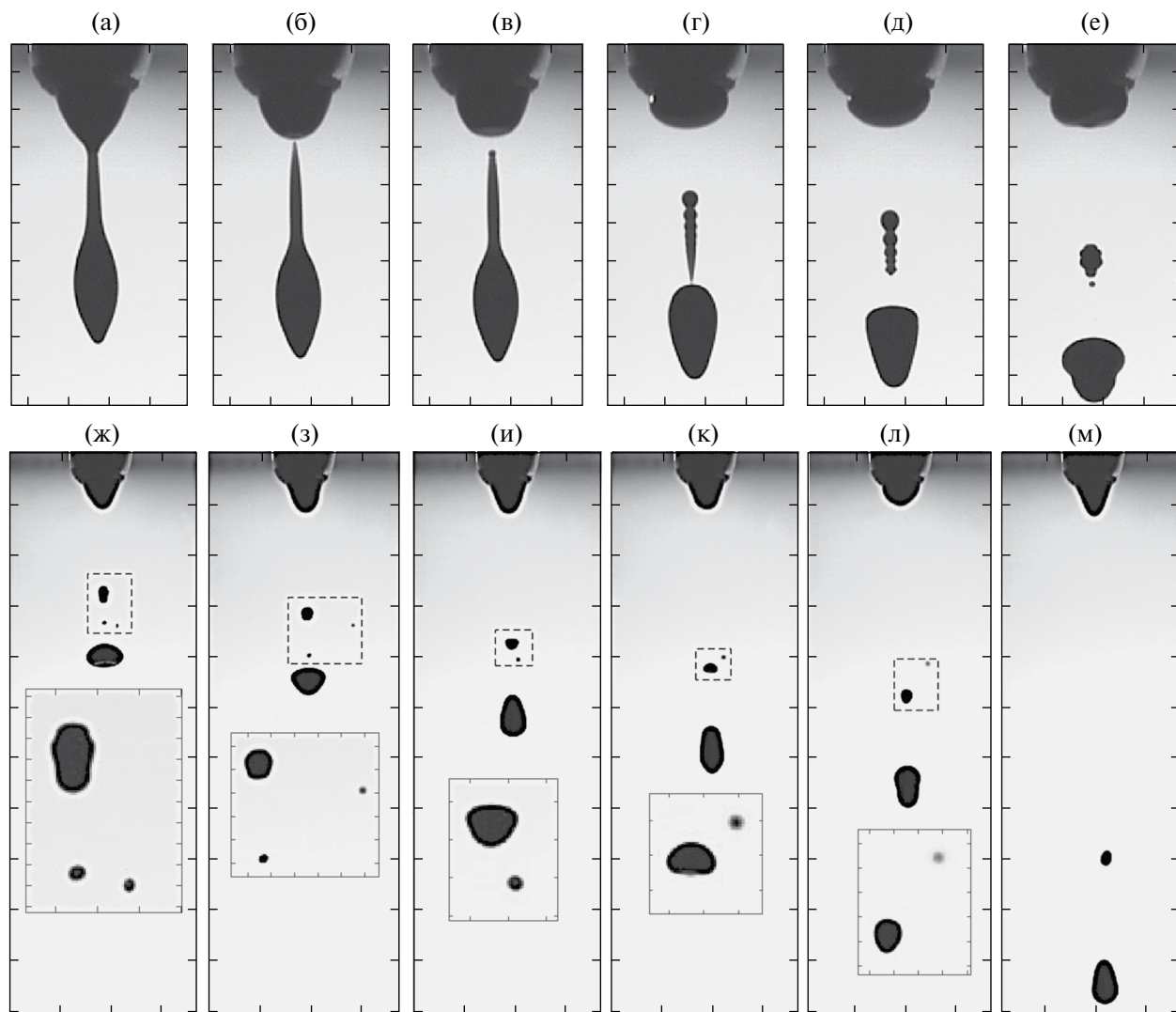


Рис. 4. Эволюция оторвавшейся заряженной капли при $\Phi = 16$ кВ, время отсчитывается от момента полного отрыва перемычки, (а–м) – $t = -1.65, 0, 0.45, 2.80, 4.0, 6.15, 10.35, 13.35, 17.55, 21.05, 24.35, 40.65$ мс, деление шкалы: (а–е) – 2 мм; (ж–м) – основное поле 5 мм, вставка 1 мм.

истончается область контакта отделяющейся части с маточной жидкостью, где и происходит разрыв течения (рис. 4б).

На верхнем конце отделившегося объема быстро формируется сферическая капелька (рис. 4в). Расширяющаяся в нижней части перемычка быстро перестраивается в сужающийся конус (рис. 4г), наиболее узкая часть которого примыкает к скругляющейся вершине падающей капли. В момент, предшествующий разрыву (рис. 4г) отделившегося объема жидкости, в его верхней части выделяются 5 сферических утолщений, размер которых увеличивается в направлении маточной жидкости. При разделении отделившегося объема образуется собственно капля с утолщенной верхней частью и остаток перемычки со сферическими утолщениями диаметрами от 0.6 до 0.9 мм (рис. 4д).

Падающая капля продолжает скругляться, в ней выделяется верхняя часть поперечником $D = 3.1$ мм и высотой $h_D = 2.0$ мм. Остаток перемычки, образующий сателлит, стягивается, в нем сохраняется два кольца с равными диаметрами $d_s = 1.2$ мм (рис. 4е). На данной стадии в процессе осцилляций от нижней кромки сателлита отделяется капелька диаметром $d_2 = 0.4$ мм, которая движется по направлению к основной капле. Сателлит продолжает стягиваться, и когда на нем остается только одно выступающее кольцо, от нижней кромки отделяется вторая капелька меньшего размера $d_3 = 0.3$ мм, которая движется вниз и вправо (рис. 4ж).

Основная капля совершает интенсивные колебания, ее форма непрерывно изменяется. Для иллюстрации формы основных компонентов на серии рисунков 4 (ж-м) изменен масштаб — деление шкалы принято равным 5 мм, а деление шкалы вставки — увеличенного изображения, ограниченного штриховыми линиями прямоугольника — составляет 1 мм (вставка выделена серым фоном). На вставке рис. 4ж отчетливо видно, что на сателлите сохранилось только одно утолщение, при этом его верхняя часть более выпуклая, чем нижняя.

За время между кадрами рис. 4ж и 4з основная капля вытягивается к низу, сателлит становится более выпуклым. Первый субсателлит максимально приближается к основной капле (рис. 4з). Второй сателлит продолжает отклоняться вправо и меняет направление движения по вертикали — начинает подниматься. При этом его изображение теряет четкость, что указывает на его перемещение в направлении, перпендикулярном плоскости экрана. Далее основная капля вытягивается вверх, у осциллирующего сателлита нижняя часть становится выпуклой, а верхняя — плоской. Более крупный первый субсателлит практически перестает смещаться по вертикали, и отклоняется вправо в плоскости экрана (рис. 4и).

Мелкий второй субсателлит ускоренно движется вправо и быстро уходит из плоскости наблюдения. Размытие его изображения указывает на перемещение вдоль оси зрения. Изменчивость картины течения за время кадров на рис. 4и-л показывает, что капля и сателлиты продолжают интенсивно осциллировать. При этом первый субсателлит практически прекращает вертикальное движение, начинает перемещаться по горизонтали и постепенно выходит из поля зрения.

Из сравнения всей совокупности кадров рис. 4в-м следует, что остаток маточной жидкости на срезе капилляра участвует в интенсивном движении по вертикали и горизонтали.

5. ОТРЫВ КАПЛИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ 18 КВ

Сравнительно небольшое увеличение приложенного электрического напряжения с 16 до 18 кВ приводит к существенному изменению картины течения, эволюцию которого иллюстрируют выборки из видеозаписи, приведенные на рис. 5.

Основное качественное отличие картин течений на рис. 4 и 5 — заметное уменьшение размеров отрывающейся капли и отсутствие перемычки — протяженной тонкой струйки, связывающей маточную жидкость с каплей. Перемычка отделяется с двух концов и со временем трансформируется в сателлит.

Типичный сценарий формирования капли включает образование булавовидной утолщенной внизу струйки переменного сечения с верхней перетяжкой в области примыкания к маточной жидкости (рис. 5а). Перетяжка постепенно истончается, верх струйки заостряется и разрывается (рис. 5б). После разрыва перемычки хвостовик булавовидной капли стягивается в шарик диаметром 0.4 мм, при этом ее длина резко сокращается. Уплощается и стягивается к срезу капилляра и маточная жидкость (рис. 5в). За время между кадрами $\Delta t = 2.35$ мс оторвавшийся объем превращается в короткую цилиндрическую каплю с двумя утолщениями на краях (рис. 5г).

В окрестности вершины и основания капли прослеживаются мелкие капельки диаметром 0.2 мм, что является признаком большого числа мод (в том числе высоких) ее энергичных осцилляций. Световые каустики и перетяжки на поверхности маточной жидкости также указывают на существование коротких кольцевых капиллярных волн. В течение $\Delta t = 3.35$ мс капля вытягивается по вертикали и принимает коническую форму со скругленными основаниями и зауженной к вершине (рис. 5д). Вертикальный размер маточной жидкости здесь существенно уменьшился, ее контур заметно утратил симметрию. На следующем кадре (рис. 5е, $t = 17.55$ мс) капля принимает сжатую по вертикали эллиптическую форму, а маточная жидкость вытягивается в длинный язык.

Для более детальной визуализации быстро изменяющейся картины течения масштаб изображения на следующих кадрах выбран равным 5 мм/дел. При $t = 36.35$ мс (рис. 5ж) в нижней части рисунка располагается вытянутая по вертикали капля эллиптической формы. Постепенно округлый язык маточной жидкости (рис. 5ж) существенно вытягивается по вертикали с образованием перетяжки, разделяющей коническую верхнюю часть и булавовидную нижнюю.

На следующей стадии развития хвостовик булавовидной части (рис. 5з) резко истончается. Далее капля отделяется от остатка маточной жидкости, который стягивается. За время $\Delta t = 0.95$ мс оторвавшаяся жидкость — вторичная капля — стягивается и приобретает грибовидную форму с вытянутой заостренной ножкой (рис. 5и), при этом падающая первичная капля заметно скругляется. В дальнейшей эволюции

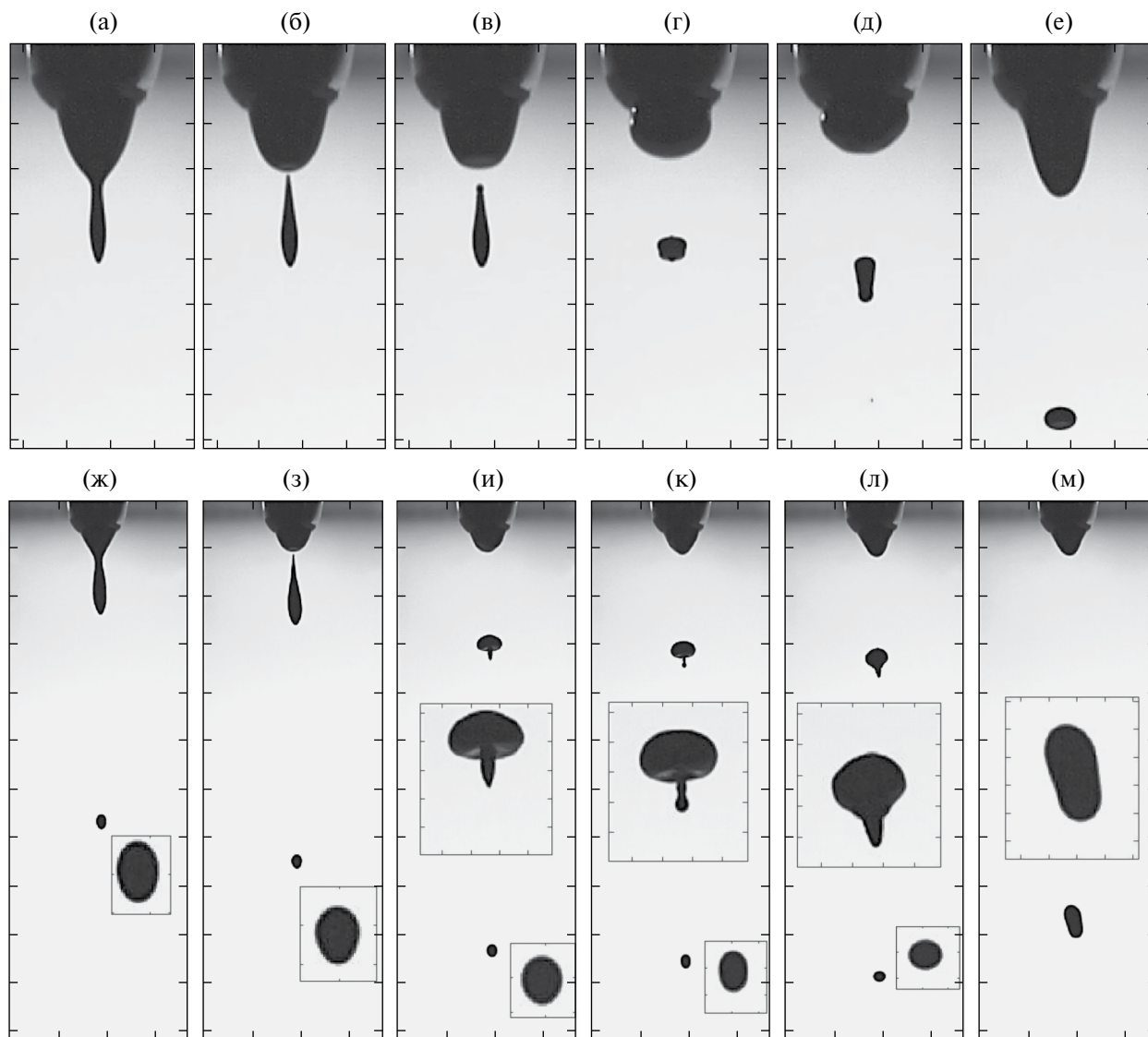


Рис. 5. Эволюция течения при отрыве заряженной капли в электрическом поле $\Phi = 18$ кВ, время отсчитывается от момента полного отрыва перемычки: (а–м) – $t = -1.65, 0, 0.45, 2.80, 6.15, 17.55, 36.35, 40.20, 48.15, 49.05, 50.30, 77.35$ мс. Деление шкалы: (а–е) – 2 мм; (ж–м) – основное поле – 5 мм, вставка – 1 мм.

течения вершина вторичной капли частично уплощается, а на ножке “гриба” появляются две дополнительные перетяжки (рис. 5к). Первичная капля, напротив, вытягивается по вертикали. Далее контуры вторичной капли продолжают сглаживаться вследствие перетекания жидкости в ее нижнюю часть, а первичная капля приобретает слегка сплюснутую по вертикали форму, близкую к сферической (рис. 5л). При $t = 77.35$ мс вторичная капля принимает овальную вытянутую по вертикали форму с наклонной продольной осью; первичная капля покидает поле зрения (рис. 5м).

Анализ видеозаписей при существенно меньшей скорости съемки (5000 к/с) показывает, что при $\Phi = 18$ кВ наблюдаются последовательные отрывы капли без образования перемычки. Период следования капель зависит от расхода Q_0 , установленного при отключенном электрическом поле ($\Phi = 0$). Так, при $Q_0 = 0.04$ мл/с период следования капель составлял $T_d = 0.6$ с, а при $Q_0 = 0.01$ мл/с – $T_d = 3$ с. При этом объем отрывающейся жидкости уменьшался с подачей напряжения. Форма оторвавшейся капли перестраивается настолько резко, что в некоторых случаях с поверхности (обычно дна или вершины оторвавшейся капли) вылетает небольшая капелька размером много меньше основной капли (около 0.2 мм).

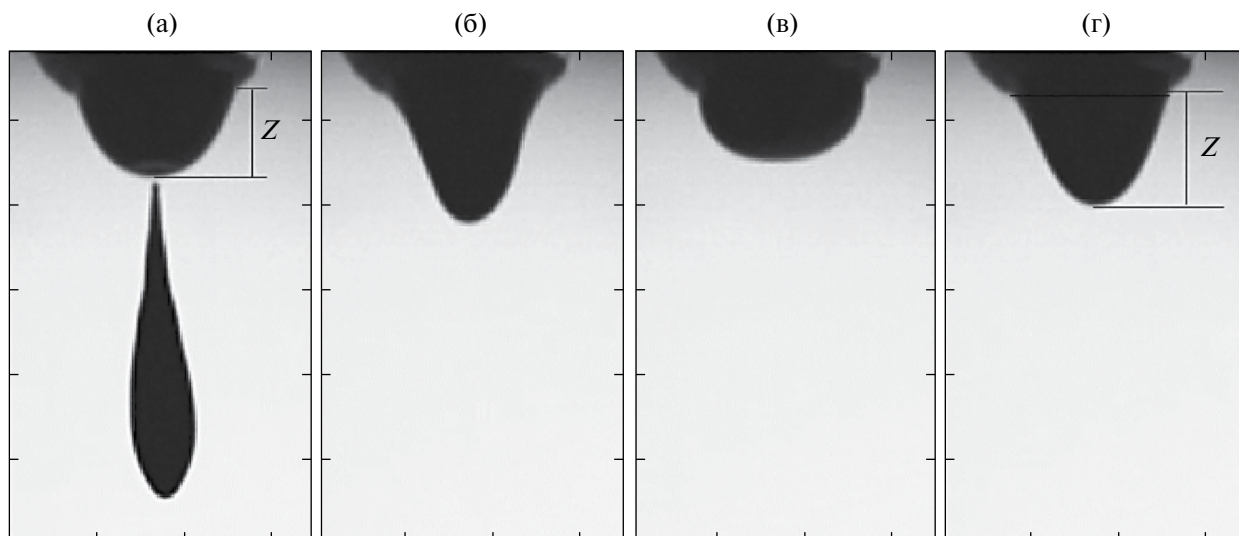


Рис. 6. Положение маточной жидкости при $\Phi = 18$ кВ после отрыва второй капли (а) объемом $V = 5.2$ мм³: (а–г) – $t = 0, 18, 56, 94$ мс; деление шкалы 2 мм.

В большинстве случаев капелька вылетает в направлении падения капли и движется гораздо быстрее основной капли. В редких случаях вылетевшая капелька движется в сторону маточной жидкости.

Эволюцию формы маточной жидкости иллюстрирует выборка из видеogramм, приведенная на рис. 6. После отрыва капли (рис. 6 а) высота жидкости на срезе капилляра несколько сокращается, затем начинает быстро увеличиваться и при $t = 18$ мс ее размер и достигает максимума $Z = 3$ мм (рис. 6б). Далее ее высота сокращается, донная часть скругляется (рис. 6в). Через $\Delta t = 38$ мс вертикальный размер вновь увеличивается до $Z = 2.6$ мм (рис. 6г).

Наглядное представление о поведении остатка маточной жидкости дают временные зависимости вертикального размера Z , горизонтальной координаты вершины X (отсчитывается от вертикальной оси кадра) и объема V (вычисляется в приближении остатка телом вращения), которые показаны на рис. 7 а–в. Вертикальное движение $Z(t)$ имеет вид почти гармонических колебаний (рис. 7а) с периодом $T_v = 25$ мс. Горизонтальное смещение $X(t)$ (рис. 7б) и флуктуации объема $V(t)$ (рис. 7в) выглядят намного сложнее, однако в них визуально заметен тот же период T_v . В частотных спектрах всех переменных (рис. 7г, д) наряду с общим пиком на частоте $1/T_v = 40$ Гц присутствует гармоника 80 Гц, а также пики на комбинационных частотах 110 Гц у объемных пульсаций (рис. 7г, кривая 2) и 190 Гц у горизонтального смещения (рис. 7д). На кривой $X(t)$ (рис. 7б) на интервале $11 < t < 35$ мс выделен участок с аномально интенсивными высокочастотными пульсациями, которые отсутствуют в поведении остальных переменных. Энергетический спектр данного участка занимает полосу 200–350 Гц с пиковой частотой 300 Гц (рис. 7д, вставка).

В данном диапазоне напряжений не наблюдалось формирование тонких заряженных нитей [3, 24]. Все компоненты течения сохраняли округлые формы на протяжении всех стадий эволюции, за исключением коротких интервалов при разрывах течения.

В процессах отрыва капель жидкости ключевое значение имеет стадия роста и формирования капли из маточной жидкости на выходном отверстии дозатора. При чисто гравитационном отрыве теоретическое описание базируется на уравнении Навье–Стокса с учетом осевой симметрии. Однако большое число влияющих факторов не позволяет построить аналитическое описание и проводится численное моделирование [49]. В экспериментах по исследованию влияния электростатического поля в качестве источника капель используется либо тонкостенный капилляр [27], либо отверстие в горизонтальной толстостенной крышке [50]. В последнем случае нижняя поверхность крышки выполняется из несмачиваемого материала, что позволяет задать граничные условия на окружности сечения капилляра и упростить теоретический анализ, сделав его результаты сопоставимыми с экспериментальными данными.

В то же время в интересах технологий требуются исследования более сложных дозаторов, в том числе из композитных материалов, обладающих контрастными степенями смачиваемости. Так, получение

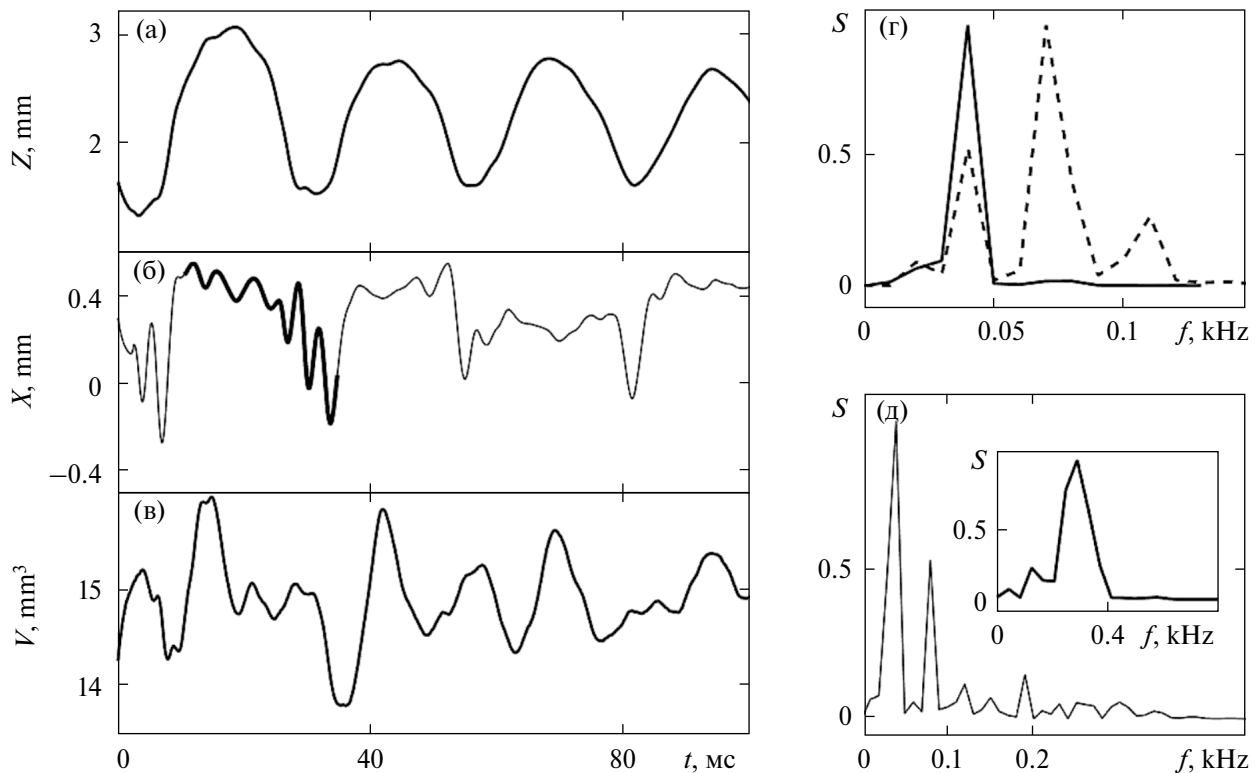


Рис. 7. Вариации параметров маточной жидкости при $\Phi = 18$ кВ: высоты (а), горизонтального смещения вершины (б) и объема (в) после отрыва второй капли; (г) – спектры вариаций высоты (1) и объема (2) – пиковые частоты 40, 80, и 110 Гц; (д) – спектры вариаций горизонтального смещения, пиковые частоты 40, 80 и 190 Гц; вставка – спектр выделенного участка (б), пиковая частота 300 Гц.

капель больших размеров на выходе тонкостенных капилляров ограничено из-за малых значений сил поверхностного натяжения вдоль внутренней окружности капилляра. Участие в формировании капли смачиваемой поверхности увеличивает площадь поверхности контакта, что приводит к увеличению размеров капель. Проведенные эксперименты по отрыву капли в оболочке со смачиваемой поверхностью (см. вставку на рис. 1) могут служить моделью формирования капли расплава, срывающегося с электрода при дуговой электросварке [51].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Созданная экспериментальная установка ДЗК позволяет изучать влияние внешнего электрического поля с потенциалом в диапазоне $0 < \Phi < 30$ кВ на динамику и структуру всех компонентов течений при гравитационном отрыве, свободном падении и столкновении капли с покоящейся принимающей жидкостью.

Проведены исследования течений при гравитационном отрыве капли ($\Phi = 0$) и приложенном постоянном напряжении $\Phi = 16$ и 18 кВ. Во всех случаях сохраняется общая картина течения, включающая округлые элементы – натекающую маточную жидкость, основную каплю, перемычку, сателлиты.

При разрыве течения (отрыв капли, выброс сателлита) разделенные объекты начинают совершать осцилляции, которые могут достигать такой интенсивности, что происходит выброс мелких капель, направление движения которых может не совпадать с направлением действия силы тяжести.

Небольшое увеличение потенциала (12%, с 16 до 18 кВ) вызывает качественные изменения картины течения, в частности, приводит к прямому отрыву капли от маточной жидкости без образования перемычки. При постоянном расходе жидкости в капилляре размер отрывающихся капель уменьшается с ростом напряжения.

Проведенные опыты показывают, что управление электрическим полем и расходом жидкости открывает дополнительные возможности совершенствования технологий капельных течений в части выбора размеров и формы сопутствующих структурных элементов в дополнение к развиваемым методам филаментизации (электроотрыва или спиннинга) течения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *abbé Nollet J.A.* Recherches sur les causes particulieres des phénomènes électriques, et sur les effets nuisibles ou avantageux qu'on peut en attendre. Paris: Chez les Freres Guerin, 1974. 444 p.
2. *Ломоносов М.В.* Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих. Избранные произведения. Т. 1. Естественные науки и философия. М.: Наука. 1986. С. 163–191.
3. *Zeleny J.* The electrical discharge from liquid points, and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces // *Phys. Rev.* 1914. V. 3(2), P. 69–91.
doi:10.1103/PhysRev.3.69
4. *Zeleny J.* On the conditions of instability of electrified drops, with applications to the electrical discharge from liquid points // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1915. V. 18(1), P. 71–83.
5. *Zeleny J.* Instability of electrified liquid surfaces // *Phys. Rev.* 1917. V. 10(1). P. 1–6.
doi:10.1103/PhysRev.10.1
6. *Tucker N., Stanger J.J., Staiger M.P., Razzaq H., Hofman K.* The history of the science and technology of electrospinning from 1600 to 1995 // *J. of Eng. Fibers and Fabrics, Special iss.* 2012. V. 7(2). P. 63–71.
doi:10.1177/155892501200702S10
7. *Wesdemiotis C., Williams-Pavlatos K.N., Keating A.R., McGee A.S., Bochenek C.* Mass spectrometry of polymers: A tutorial review // *Mass. Spec. Rev.* 2023. P. 1–50.
<https://doi.org/10.1002/mas.21844>
8. *Edgerton H.E., Hauser E.A., Tucker W.B.* Studies in drop formation as revealed by the high-speed motion camera // *J. Phys. Chem.* 1937. V. 41(7). P. 1017–1028.
<https://doi.org/10.1021/j150385a012>
9. *Peregrine D.H., Shoker G., Symon A.* The bifurcation of liquid bridges // *J. of Fluid Mech.* 1990. V. 212(1). P. 25–39.
doi:10.1017/S0022112090001835
10. *Zhang X., Basaran O.A.* An experimental study of dynamics of drop formation // *Phys. of Fluids.* 1995. V.7(6). P. 1184–1203.
doi:10.1063/1.868577
11. *van der Waals J.D.* The thermodynamic theory of capillarity flow under the hypothesis of a continuous variation of density (*transl. by Rowlinson J.S.*) // *J. Statist. Phys.* 1979. V. 20. P. 197–244.
12. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A new method for modeling surface tension effects on fluid // *J. Comp. Phys.* 1992. V. 100. P. 335–354.
doi:10.1016/0021-9991(92)90240-Y
13. *Bierbrauer F., Kapur N., Wilson M.C.T.* Drop pinch-off for discrete flows from a capillary // *ESAIM: Proc.* 2013. V. 40. P. 16–33.
<http://dx.doi.org/10.1051/proc/201340002>
14. *Notz P.K., Chen A.U., Basaran O.A.* Satellite drops: Unexpected dynamics and change of scaling during pinch-off // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13(3), P. 549–552.
doi:10.1063/1.1343906
15. *Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д.* Динамика отрыва одиночных капель в воздушной среде // *Изв. РАН. МЖГ.* 2014. № 4. С. 109–118. = *Prokhorov V.E., Chashechkin Yu.D.* Dynamics of separation of a single drop in air // *Fluid Dyn.* 2014, V. 60(8), P. 355–359.
doi:10.1134/S1028335815080054
16. *Коршунов А.И.* Колебания оторвавшейся от перемычки капли воды // *Изв. РАН. МЖГ.* 2015. № 4. С. 139–143. = *Korshunov A.I.* Oscillations of a water droplet separated from the connection // *Fluid Dyn.* 2015. V. 50. P. 585–589.
<https://doi.org/10.1134/S0015462815040134>

17. *Kowalewski T.A.* On the separation of droplets from a liquid jet // *Fluid Dyn. Res.* 1996. V. 17(3), P. 121–145. doi:10.1016/0169-5983(95)00028-3
18. *Henderson D.M., Pritchard W.G., Smolka L.B.* On the pinch-off of a pendant drop of viscous fluid // *Phys. Fluids.* 1997. V. 9(11). P. 3188–3200. <https://doi.org/10.1063/1.869435>
19. *Burton J.C., Rutledge J.E., Taborek P.* Fluid pinch-off in superfluid and normal // *Phys. Rev. E.* 2007. V. 75(3). P. 036311. doi:10.1103/physreve.75.036311
20. *Thirevenaz V., Saureta A.* The onset of heterogeneity in the pinch-off of suspension drops // *PNAS.* 2022. V. 119(13). P. 2120893119. <https://doi.org/10.1073/pnas.2120893119>
21. *Dinic J., Sharma V.* Computational analysis of self-similar capillary-driven thinning and pinch-off dynamics during dripping using the volume-of-fluid method // *Phys. Fluids.* 2019. V. 31. P. 021211. doi:10.1063/1.5061715
22. *Eggers J.* Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows // *Rev. of Modern Phys.* 1997. V. 69(3). P. 865–929. doi:10.1103/RevModPhys.69.865
23. *Eggers J., Villermaux E.* Physics of liquid jets // *Rep. Prog. Phys.* 2008. V. 71. P. 036601. doi:10.1088/0034-4885/71/3/036601
24. *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1964. V. 280(1382). P. 383–397. doi:10.1098/rspa.1964.0151
25. *Cloupeau M., Prunet-Foch B.* Electrostatic spraying of liquids: Main functioning modes // *J. of Electrostatics.* 1990. V. 25(2). P. 165–184. doi:10.1016/0304-3886(90)90025-q
26. *Notz P.K., Basaran O.A.* Dynamics of drop formation in an electric field // *J. of Colloid and Interface Sci.* 1999. V. 213(1). P. 218–237. doi:10.1006/jcis.1999.6136
27. *Eow J.S., Ghadiri M., Sharif A.* Experimental studies of deformation and break-up of aqueous drops in high electric fields // *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects.* 2003. V. 225. P. 193–210.
28. *Vlahovska P.M.* Electrohydrodynamics of drops and vesicles // *Ann. Rev. of Fluid Mech.* 2019. V. 51. P. 305–330. doi:10.1146/annurev-fluid-122316050120
29. *Byers C.H., Perona J.J.* Drop formation from an orifice in an electric field // *AIChE J.* 1988. V. 34(9). P. 1577–1580. doi:10.1002/aic.690340922
30. *Hokmabad B.V., Sadri B., Charan M.R., Esmaeilzadeh E.* An experimental investigation on hydrodynamics of charged water droplets in dielectric liquid medium in the presence of electric field // *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects.* 2012. V. 401. P. 17–28. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2012.02.043>
31. *Hokmabad B.V., Faraji S., Dizajyekan T.G., Sadri B., Esmaeilzadeh E.* Electric field-assisted manipulation of liquid jet and emanated droplets // *Int. J. of Multiphase Flow.* 2014. V. 65. P. 127–137.
32. *Zemskov A.A., Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I.* The theory of monodispersion of liquids by gravitational and electric fields // *J. Colloid Interface Sci.* 1993. V. 158(1). P. 54–63. doi:10.1006/jcis.1993.1228
33. *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.* The theoretical consideration of physical regularities of electrostatic dispersion of liquids as aerosols // *J. Aerosol Sci.* 1994. V. 25(6). P. 1079–1091. doi: 10.1016/0021-8502(94)90203-8
34. *Зубарев Н.М.* Формирование конических острий на поверхности жидкого металла в электрическом поле // *Письма в ЖЭТФ.* 2001. № 73(10). С. 613–617. = *Zubarev N.M.* Formation of conic cusps at the surface of liquid metal in electric field // *JETP Letters.* 2001. V. 73(10). P. 544–548. doi: 10.1134/1.1387524
35. *Karabut E.A., Zhuravleva E.N., Zubarev N.M., Zubarev O.V.* Evolution of nonlinear perturbations for a fluid flow with a free boundary. Exact results // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 953. A1. doi:10.1017/jfm.2022.918

36. *Takamatsu T., Yamaguchi M., Katayama T.* Formation of single charged drops in a non-uniform electric field // JCEJ. 1983. V.16(4). P. 267–272.
<https://doi.org/10.1252/jcej.16.267>
37. *Зубарев Н.М.* Развитие неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия: точные решения // Письма в ЖЭТФ. 2000. № 71(9). С. 534–538.
38. *Thoroddsen S.T., Etoh T.G., Takehara K.* High-speed imaging of drops and bubbles // Ann. Rev. of Fluid Mech. 2008. V. 40(1). P. 257–285.
[doi:10.1146/annurev.fluid.40.111406.102215](https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102215)
39. *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Андросенко В.Н.* Моделирование влияния электрического поля на капельные течения // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. № 24(4). С. 1–15.
[doi: 10.33257/PhChGD.24.4.1057](https://doi.org/10.33257/PhChGD.24.4.1057)
40. *Rai P., Gautam N., Chandra H.* An experimental approach of generation of micro/nano scale liquid droplets by electrohydrodynamic atomization (EHDA) process // Mater. Today: Proc. 2017. V.4(2). P. 611–620.
[doi:10.1016/j.matpr.2017.01.064](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.064)
41. *Jones A.R., Thong K.C.* The production of charged monodisperse fuel droplets by electrical dispersion // J. Phys. D: Appl. Phys. 1971. V.4. P. 1159–1168.
[doi: 10.1088/0022-3727/4/8/316](https://doi.org/10.1088/0022-3727/4/8/316)
42. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
43. *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10(4). P. 286.
<https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
44. *Эйзенберг Д., Кауцман В.* Структура и свойства воды. Л-д: ГИМИЗ, 1975.
45. *Teschke O., de Souza E.F.* Water molecule clusters measured at water/air interfaces using atomic force microscopy // Phys. Chem. Chem. Phys. 2005. V. 7(22). P. 3856–3865.
46. *Бункин Н.Ф., Индукаев К.В., Игнатьев П.С.* Спонтанная самоорганизация газовых микропузырей в жидкости // ЖЭТФ. 2007. № 131(3). С. 539–555.
47. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* Тонкая структура картины распределения вещества свободно падающей капли на поверхности и в толще принимающей жидкости в импактном режиме слияния // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. № 24(2). С. 1043.
[doi: 10.33257/PhChGD.24.2.1043](https://doi.org/10.33257/PhChGD.24.2.1043)
48. УИУ «ГФК ИПМех РАН: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере: [site http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip](http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip).
49. *Borthakur M.P., Biswas G., Bandyopadhyay D.* Formation of liquid drops at an orifice and dynamics of pinch-off in liquid jets // Phys. Rev. 2017. E96. P. 013115.
[doi: 10.1103/PhysRevE.96.013115](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.013115)
50. *Byers C.H., Perona J.J.* Drop formation from an orifice in an electric field // AIChE J. 1988. V.34. P. 1577–1580.
<https://doi.org/10.1002/aic.690340922>
51. *Cram L.E.* A numerical model of droplet formation. Proceedings of the 1983 International conference on computational techniques and applications held in University of Sydney, Australia. Elsevier, 1984. P. 182–187.

Electric Field Effect on the Dynamics of the Structural Flow Components in the Case of Gravity-Induced Separation of a Water Drop

Yu. D. Chashechkin* and V. E. Prokhorov**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

**e-mail: chakin@ipmnet.ru*

***e-mail: prohorov@ipmnet.ru*

The high-speed videorecording method is used to investigate the effect of an electrostatic field (with the potential 0, 16, and 18 kV) on the flow geometry in the case of gravity-induced separation of a drop from a capillary tube. The flow videograms are analyzed and the dimensions of the characteristic structural elements, that is, the drops themselves, a connection, and satellites, are determined. The oscillations of the linear dimensions and the mother liquid volume after drop separation are traced at 0 and 18 kV. Both fundamental frequencies and their harmonics are observable in the spectra. It is found that small (12%) variations in the potential value lead to qualitative variations in the flow pattern and, in particular, to direct separation of the drop from the mother liquid without the formation of a connection. At a constant liquid flow in the capillary the dimensions of the separated drops decrease with increase of the voltage. The experiments show the possibility of the fine controlling of drop flows using electrostatic fields.

Keywords: drops, satellites, gravity, electrostatics, fragmentation, oscillations.

УДК 532.5:539.3

ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

© 2024 г. Ж. В. Маленко^{a, b, *}, А. А. Ярошенко^{a, b, **}

^aМорской институт им. вице-адмирала В. А. Корнилова – филиал «ГМУ им. адмирала Ф. Ф. Ушакова»,
Севастополь, Россия

^bСевастопольский государственный университет, Севастополь, Россия

*e-mail: zhvla17@mail.ru

**e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.12.2023 г.

После доработки 30.01.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Проводится исследование колебаний плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений переменной интенсивности. В основу модели колебаний плавающего ледяного покрова положены линейаризованные уравнения гидромеханики и линейная классическая теория колебаний пластин. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая изотропная пластинка. Определены значения критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения, как впереди источника возмущений, так и за ним. Исследована зависимость критических скоростей от частоты колебаний источника; получено шесть значений критических скоростей. Показано, что в зависимости от скорости перемещения источника и частоты его колебаний образуется от одной до семи систем волн. Определены угловые зоны, в которых образуются эти волны. Исследовано влияние сил сжатия и растяжения на значения критических скоростей и угловых зон, в которых распространяются волны.

Ключевые слова: изгибно-гравитационные волны, ледяной покров, критическая скорость, упругая пластина.

DOI: 10.31857/S1024708424030042, **EDN:** PGCWOD

Исследование изгибно-гравитационных волн, возникающих в плавающем ледяном покрове при движении по нему различного рода нагрузок, имеет длинную историю. Развитие этих исследований было обусловлено использованием ледяного покрова в качестве ледовых переправ, обустройством на реках и озерах ледовых дорог, а также в некоторых случаях и для построения на льду взлетно-посадочных полос и аэродромов.

Одной и первых фундаментальных работ, посвященных распространению волн в ледяном покрове, в том числе и от движущихся возмущений, является монография [1], в которой в основном рассматриваются плоские (двухмерные) задачи. Исследуется реакция бесконечных пластин, плавающих на слое жидкости конечной глубины. Проанализированы прогибы, вызванные нагрузкой, движущейся с равномерной скоростью.

Экспериментальным исследованиям посвящена монография [2], в которой рассматриваются возможности резонансного метода разрушения ледяного покрова. В коллективной монографии зарубежных авторов [3] рассмотрены трехмерные задачи, приведена библиография и выполнен анализ работ, посвященных движущимся по льду источникам возмущений, вплоть до 1995 г. Теоретическим исследованиям волновых процессов в море с плавающим ледяным покровом посвящена монография [4]. В книге рассматриваются задачи, связанные с колебаниями ледяного покрова при движении по нему различного рода нагрузок. В [5] приводятся результаты теоретических расчетов и экспериментальных исследований, проведенных в опытовом ледовом бассейне; приводятся результаты модельных экспериментов по ледо-разрушающей способности изгибно-гравитационных волн, вызванных одиночной и парной нагрузками.

В [6–9] для решения задач о колебаниях ледяного покрова, вызванных движущейся нагрузкой, используются численные методы, причем алгоритм решения основан на методе конечных элементов

и методе конечных разностей. Путем численного решения дифференциальных уравнений колебаний ледяного покрова проводится исследование его напряженно-деформированного состояния. В [8, 9] для численного решения задачи разработан и обоснован новый конечно-разностный метод аппроксимации. В [8] приведены результаты численных экспериментов по изучению поведения плавающего ледяного покрова при движении по нему автомобилей. В [9] обсуждаются результаты численного моделирования посадки самолетов на ледовые аэродромы. Работа [10] посвящена исследованию прогибов и нормальных напряжений в ледяном покрове при взлете и посадке самолета. Исследовано влияние толщины и модуля упругости на напряжения в пластине. Получены графики прогибов ледяного покрова при взлете и посадке для различных значений скорости движения нагрузки, а также в различные моменты времени.

Среди последних работ, в которых для исследования полученного решения применяется метод стационарной фазы, можно отметить работы [11–13]. В статьях исследуются колебания ледяного покрова, плавающего на поверхности бесконечно глубокой жидкости при обтекании локализованного источника возмущений. Методом стационарной фазы построено асимптотическое представление дальних волновых возмущений ледяного покрова. Показано, что основными параметрами, влияющими на структуру волновых возмущений ледяного покрова, являются толщина ледяного покрова и скорость потока.

В работах [4, 14–16] исследуется влияние продольного, поперечного и сдвигового сжатий на поведение трехмерных изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове при равномерном прямолинейном движении по нему нагрузки. В [4, 14] исследуется структура фазовых портретов волн в зависимости от скорости движения источника и сил неравномерного сжатия. В статьях [15, 16] рассматривается задача о движении прямоугольной области по плавающему ледяному покрову с неравномерным сжатием. Учитываются продольное, поперечное и сдвиговое сжимающие усилия. Прямоугольной областью моделируется движение судна на воздушной подушке. В [15] показано, что неравномерное сжатие существенно влияет на волновое возмущение. Волновой след за нагрузкой несимметричен относительно курса движения. В [16] изучено влияние сил неравномерного сжатия при генерации волн внешней нагрузкой, движущейся по поверхности ледяного покрова, так и при движении погруженной в жидкость сферы.

В [17, 18] исследуются колебания ледяного покрова под действием движущейся нагрузки. При этом ледяной покров моделируется тонкой упругой пластинкой с учетом равномерного сжатия. Жидкость считается идеальной несжимаемой при наличии течения со сдвигом скорости. В [17] исследуются критические скорости и прогибы ледяного покрова в зависимости от скорости движения источника, сил сжатия и сдвигового течения. В [18] исследуются деформации ледяного покрова в зависимости от направления движения и градиента скорости течения, а также от коэффициента сжатия.

В зимний период многие реки и озера Крайнего Севера, Сибири и Дальнего Востока покрываются ледяным покровом. Возникает необходимость разрушения плавающего ледяного покрова с целью продления навигации на внутренних водных путях. Для этих целей, кроме обычных ледокольных средств используют суда на воздушной подушке (СВП) [19, 20]. Отсутствие у них осадки позволяет разрушать ледяной покров на акваториях любой глубины.

Одним из способов разрушения ледяного покрова при использовании СВП является резонансный метод, который основан на возбуждении в ледяном покрове изгибно-гравитационных волн достаточной амплитуды, чтобы произошло его разрушение [2, 21–23]. При этом важно знать значения критических скоростей, при которых наиболее вероятно разрушение ледяного покрова [24]. Эффективность применения СВП может быть увеличена, если при прямолинейном равномерном движении периодически менять давление в воздушной подушке судна [25, 26].

В [4, 27–30] проводится исследование колебаний ледяного покрова, вызванных движущимися возмущениями переменной интенсивности. В [27] рассматривается плоская задача о неустановившихся колебаниях ледяного покрова, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая пластина. Для решения задачи применяется преобразование Фурье по переменной x . Получено интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость в виде суммы трех интегралов. Для вычисления интегралов применяются методы теории функций комплексной переменной и метод стационарной фазы. В [4, 28] изучаются трехмерные неустановившиеся изгибно-гравитационные волны, которые образуются при движении области гармонически меняющихся со временем давлений по тонкой упругой пластинке, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины. Методом интегральных преобразований Фурье по горизонтальным

координатам x и y и Лапласа по времени получено интегральное представление для возвышения поверхности пластина-жидкость. Асимптотическое исследование интеграла проведено методом стационарной фазы для многомерных интегралов. Показано, что в зависимости от скорости и частоты колебаний источника, может возбуждаться от одной до семи систем волн. В [29] исследуется волновое движение в плавающем морском льду, возбуждаемое перемещением вибрирующего груза. Показано, что при фиксированной частоте увеличение скорости нагрузки приводит к появлению более коротких волн впереди и более длинных волн за нагрузкой. Амплитуда волн впереди нагрузки меньше амплитуды волн за ней. В [30] рассматриваются трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные давлениями переменной интенсивности. Ледяной покров моделируется тонкой упругой изотропной пластинкой. Определены шесть значений критических скоростей, при которых меняется характер волнового возмущения. Приводятся фазовые портреты образующихся волн в зависимости от скорости движения источника и частоты его колебаний. Определены угловые зоны распространяющихся волн.

В настоящей работе проводится исследование колебаний плавающего ледяного покрова под действием движущихся возмущений переменной интенсивности с учетом сил сжатия и растяжения. Исследуется влияние частоты колебаний источника, сил сжатия и растяжения на значения критических скоростей и угловых зон распространения волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть по поверхности сплошного ледяного покрова, плавающего на поверхности однородной идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H , перемещается нагрузка вида

$$p = p_0 f(x_1, y) \exp(i\sigma t), \quad x_1 = x - vt, \quad v = \text{const}. \quad (1.1)$$

Ледяной покров моделируем тонкой упругой изотропной пластинкой постоянной толщины h . Исследуем развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн, генерируемых движущимся источником возмущений. Полагаем, что до начала действия возмущений (1.1) жидкость не возмущена и граница поверхности пластина — жидкость горизонтальна. В рамках линейной теории в системе координат x_1, y, z , связанной с движущейся со скоростью v области давлений для потенциального движения жидкости задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta \phi = 0, \quad -H < z < 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (1.2)$$

со следующими граничными, кинематическим и начальными условиями:

$$\begin{aligned} D_1 \nabla^4 \zeta + Q_1 \Delta_l \zeta + \chi_1 F \zeta + \zeta + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{1}{g} &= p_1 \quad \text{при } z=0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = -H, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - v \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{при } z=0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\phi(x, y, z, 0) = \zeta(x, y, 0) = 0,$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $F = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_1 = \frac{D}{\rho g}$, $Q_1 = \frac{Q}{\rho g}$, $\chi_1 = \frac{\rho_1 h}{\rho g}$, $p_1 = \frac{p_0}{\rho g}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, ρ — плотность жидкости; D, Q, E, h, ρ_1, μ — цилиндрическая жесткость, сжимающее усилие, модуль нормальной упругости, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластинки. Здесь и далее у x_1 опущен индекс 1.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Применяя для решения задачи (1.2)–(1.3) преобразование Фурье по горизонтальным координатам x и y для возвышения поверхности пластина-жидкость получим следующее интегральное представление:

$$\zeta = \frac{p_1}{8\pi^2} e^{i\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(m, n) M(r) \psi(m, n, t) e^{i(mx+ny)} dm dn, \quad (2.1)$$

$$\psi = \frac{2}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{1}{\tau \Delta_1} e^{-i\Delta_1 t} + \frac{1}{\tau \Delta_2} e^{-i\Delta_2 t}, \quad (2.2)$$

где $r = (m^2 + n^2)^{1/2}$, $m = r \cos \theta$, $n = r \sin \theta$, $\Delta_j = \sigma + v m + \delta_j \tau$, $\delta_j = (-1)^j$, $j = 1, 2$, $\tau(r) = (l(r) M(r))^{1/2}$, $l(r) = 1 + Q_1 r^2 + D_1 r^4$, $M(r) = rg(1 + \chi_1 r g t h r H)^{-1} t h r H$, $f^*(m, n)$ – трансформанта Фурье функции $f(x, y)$. Первое слагаемое в выражении (2.2) представляет установившиеся колебания. Второе и третье слагаемые определяются начальными условиями и характеризуют развитие волнового движения.

Преобразуем (2.2) следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\Delta_1} (1 - e^{-i\Delta_1 t}) - \frac{1}{\Delta_2} (1 - e^{-i\Delta_2 t}) \right), \frac{i(1 - e^{-i\Delta_j t})}{\Delta_j} = - \int_0^t e^{-i\Delta_j \xi} d\xi.$$

После перехода к полярным координатам в случае осесимметричного распределения давлений (1.1) выражение (2.1) для ζ примет вид:

$$\zeta = - \frac{p_1}{8\pi^2} \text{Im}(e^{i\sigma t} (J_1 - J_2)), \quad (2.3)$$

$$J_j = \int_0^t \int_0^{3\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r f^*(r)}{\tau(r)} M(r) e^{-i(r R \cos(\theta - \gamma) - \Delta_j \xi)} d\theta d\xi dr, \quad R = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma.$$

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

Асимптотическое исследование выражения (2.3) для ζ , при больших значениях R и t , выполним методом стационарной фазы для многомерных интегралов [31]. Стационарные точки (r, θ, ξ) для J_j удовлетворяют системе уравнений (3.1)–(3.2):

$$R \cos(\theta - \gamma) - (v \cos \theta + \delta_j \tau') \xi = 0, \quad v \xi \sin \theta - R \sin(\theta - \gamma) = 0, \quad (3.1)$$

$$\sigma + \delta_j \tau + v r \cos \theta = 0, \quad (3.2)$$

где штрих означает производную по r .

Уравнение (3.2) имеет вещественные корни

$$\theta = \pm \theta_j, \quad \theta_j = \arccos(-\delta_j \tau_j), \quad \tau_j = (\tau + \delta_j \sigma) / v r, \quad (3.3)$$

при $|\tau_j| \leq 1$. После подстановки (3.3) в (3.1) получим

$$t g \gamma = \chi_j(r), \quad \chi_j = \tau'(1 - \tau_j^2)^{1/2} (v - \tau_j \tau')^{-1}, \quad (3.4)$$

$$\xi = R / u_j, \quad u_j = (v - \delta_j \tau') \cos^{-1} \gamma. \quad (3.5)$$

Из (3.4) определяются значения r , соответствующие стационарным точкам интегралов J_j , в установившемся и неустойчивом режимах. Принадлежность стационарных точек области интегрирования определяется условием $0 \leq \xi \leq t$. Это условие и соотношение (3.5) характеризуют распространение колебаний.

Из анализа поведения функций $\chi_j(r)$ следует, что число положительных корней α_{ik} уравнений (3.4) зависит от скорости v перемещения давлений, частоты колебаний σ источника и величины угла γ .

Таблица 1. Системы изгибно-гравитационных волн ζ_{ij}

σ	v	γ	ζ_{ij}
$0 < \sigma < \sigma_0$	$0 < v < v_{01}$ $v_{01} < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$ $0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14} ζ_{13}, ζ_{14}
	$v_{11} < v < v_{02}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_1$ $\gamma_1 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{11}, ζ_{14} $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$ ζ_{13}, ζ_{14}
	$v > v_{02}$ ($v_{02} < v < v_{10}, v > v_{10}$)	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$ $\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14} $\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$ ζ_{13}
$\sigma > \sigma_0$	$0 < v < v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14}
	$v > v_{11}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_2$ $\gamma_2 \leq \gamma \leq \gamma_3$ $\gamma_3 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{14} $\zeta_{12}, \zeta_{13}, \zeta_{14}$ ζ_{13}

Таблица 2. Системы изгибно-гравитационных волн ζ_{2j}

σ	v	γ	ζ_{2j}
$\sigma > 0$	$v_{03} < v < v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{23}
	$v > v_{12}$	$0 \leq \gamma \leq \gamma_{22}$ $\gamma_{22} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$ $\gamma_{11} \leq \gamma \leq \pi$	ζ_{21} $\zeta_{21}, \zeta_{22}, \zeta_{23}$ ζ_{23}

В табл. 1, 2 приведены системы волн ζ_{ij} , которые зависят от скорости перемещения и частоты колебаний источника, а также приведены угловые зоны, в которых распространяется каждая из этих волн.

В таблицах выражения для σ_0 и v_{ij} определяются следующим образом:

$\sigma_0 = (\beta_2 \tau(\beta_1) - \beta_1 \tau(\beta_2))(\beta_2 - \beta_1)^{-1}$, $v_{01} = \tau_5(\beta_2)$, $v_{02} = \tau_5(\beta_1)$, $v_{03} = \tau_6(\beta_3)$, $v_{11} = (\tau_7(\beta_4))^{1/2}$, $v_{12} = (\tau_8(\beta_6))^{1/2}$, $v_{10} = (\tau_9(\beta_8))^{1/2}$, $\tau_{5,6} = (\tau \pm \sigma)/r$, $\tau_7 = \tau_5^2 - r(\tau_5')^2 \tau' / \tau''$, $\tau_8 = \tau_6^2 - r(\tau_6')^2 \tau' / \tau''$, $\tau_9 = \tau_5 \tau'$, β_k ($k = 1 - 9$) являются корнями уравнений: $\tau_5'(\beta_{1,2}) = 0$, $\tau_6'(\beta_3) = 0$, $\chi_1''(\beta_{4,5}) = 0$, $\chi_2''(\beta_{6,7}) = 0$, $\tau_9'(\beta_{8,9}) = 0$, где $\beta_1 < \beta_2$, $\beta_4 < \beta_5$, $\beta_6 < \beta_7$, $\beta_8 < \beta_9$, $r_1 < r_2 < \beta_1 < r_3 < \beta_2 < r_4$, $r_5 < \beta_3 < r_6$, r_k ($k = 1 - 4$) положительные корни уравнения $1 - \tau_1^2 = 0$, а $r_{5,6}$ – уравнения $1 - \tau_2^2 = 0$, v_{ij} ($i=0, 1; j=1-3$) – значения скоростей при которых происходит изменение структуры волнового возмущения.

Размеры угловых зон определяются величинами углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_{11}, \gamma_{22}$.

$\gamma_1 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v_{11} < v < v_{02}$, $\gamma_3 = \arctg \chi_1(\alpha_1)$, если $v > v_{02}$, $\gamma_2 = \arctg \chi_1(\alpha_2)$, $\gamma_{11} = \arctg \chi_2(\alpha_3)$, $\gamma_{22} = \arctg \chi_2(\alpha_4)$, α_k ($k = 1-4$) корни уравнений: $\chi_1'(\alpha_{1,2}) = 0$, $\chi_2'(\alpha_{3,4}) = 0$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_3 < \alpha_4$.

Каждый корень α_{jk} уравнений (3.4) характеризует систему волн ζ_{jk} вида:

$$\zeta_{jk} = R^{-1/2} \Psi_j(\alpha_{jk}) \cos(R \Phi_j(\alpha_{jk}) + \sigma t + \delta_{jk} \pi / 4) + O(R^{-1}), \quad (3.6)$$

$$\Psi_j = -\frac{p_0}{\rho g} f^*(r) M(r) ((1 - \tau_j^2) \tau v)^{-1} (2\pi |\Phi_j'|)^{-1/2}, \quad \Phi_j = \delta_j r ((1 - \tau_j^2)^{1/2} \sin \gamma - \tau_j \cos \gamma),$$

$$j = 1, k = 1 - 4; j = 2, k = 1, 2, 3; \delta_{jk} = (-1)^{j+k}, k \neq 4, \delta_{14} = 1.$$

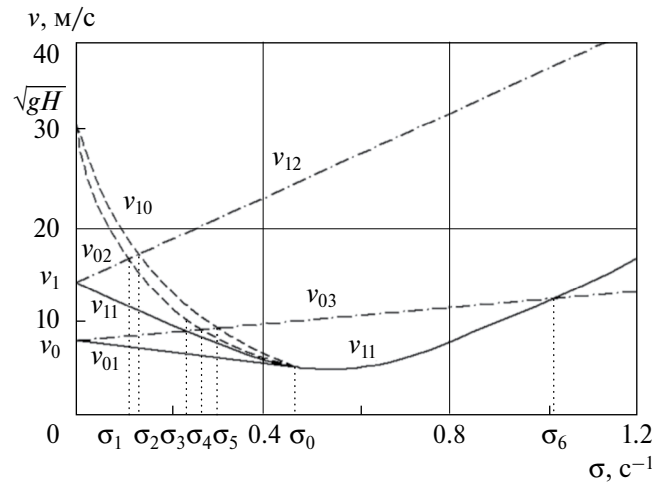


Рис. 1. Зависимость критических скоростей v_{ij} (м/с) от частоты колебаний источника σ (с^{-1}) для $Q=0$.

Волны образуются в областях $R < u_{jk}t$, $u_{jk} = u_j(\alpha_{jk})$ угловых зон соответствующих диапазону изменения скорости перемещения источника возмущений. Передние фронты этих волн перемещаются со скоростью u_{jk} .

Справедливы следующие оценки:

при $0 < \sigma < \sigma_0$ для α_{1k}

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ если } 0 < v < v_{01}, r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ если } v_{01} < v < v_{11},$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 < r_3 \leq \alpha_{11} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ если } v_{11} < v < v_{02},$$

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_4 \text{ если } v > v_{02};$$

при $\sigma > \sigma_0$ для α_{1k}

$$r_1 \leq \alpha_{14} \leq r_2 \text{ если } 0 < v < v_{11}, r_1 \leq \alpha_{14} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{12} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{13} \leq r_2 \text{ если } v > v_{11};$$

при $\sigma > 0$ для α_{2k}

$$r_5 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ если } v_{03} < v < v_{12}; r_5 \leq \alpha_{21} \leq \alpha_3 \leq \alpha_{22} \leq \alpha_4 \leq \alpha_{23} \leq r_6 \text{ если } v > v_{12}.$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для количественной оценки численные расчеты здесь и далее проводились для следующих параметров ледяного покрова и жидкости: $h=0.2$ м, $H=10^2$ м, $E=3 \times 10^9$ Н/м², $\mu=0.34$, $\rho_1=870$ кг/м³, $\rho=10^3$ кг/м³.

Рассмотрим случай, когда сжимающие усилие удовлетворяют условию $Q_1 < Q_0$, где $Q_0 = q_1(r_*)$, r_* — положительный корень уравнения $q_1'(r) = 0$, а q_1 имеет вид:

$$q_1 = r^{-2}((1 + D_1 r^4)q_2 + 4D_1 q_3 r^4)(q_2 + 2q_3)^{-1}, q_2 = th rH + rH(chrH)^{-2}, q_3 = (1 + \chi_1 r g th rH)th rH.$$

Для $Q_0 < Q_1 < 2\sqrt{D_1}$ существенно меняется структура волнового движения. За источником возмущений происходит наложение волн [32].

На рис. 1 и 2 приведены зависимости критических скоростей перемещения области возмущений от частоты колебаний при отсутствии сил сжатия и растяжения (рис. 1) и для сжимающего усилия (рис. 2).

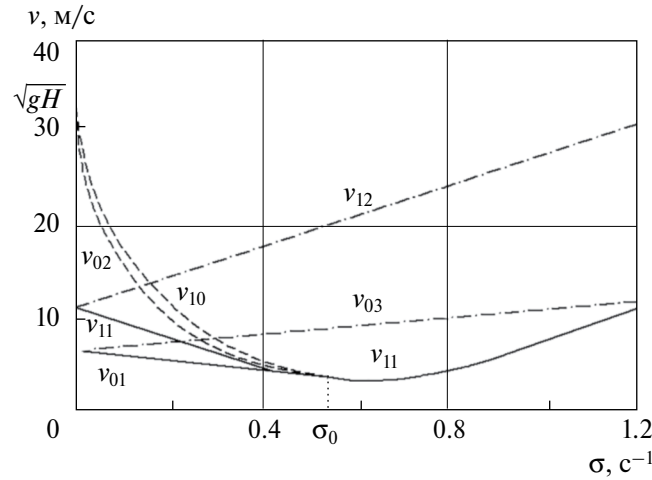


Рис. 2. Зависимость критических скоростей v_{ij} (м/с) от частоты колебаний источника σ (с^{-1}) для $Q = 0.5\sqrt{D\rho g}$.

Критические скорости v_{03} и v_{12} растут при увеличении σ , а скорости v_{01} , v_{02} и v_{10} убывают. Критическая скорость v_{11} имеет минимум. В окрестности этих скоростей меняется характер волнового возмущения. При $\sigma=0$ $v_{01}=v_{03}=v_0$, $v_{11}=v_{12}=v_1$, $v_{10}=v_{02}=\sqrt{gH}$. При увеличении сил сжатия уменьшаются значения критических скоростей.

При движении области давлений (1.1), в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний, может возбуждаться от одной до семи систем волн (4.1) с амплитудами затухания как $R^{-1/2}$ (3.6). Эти волны формируют колебания пластинки и волновое движение жидкости как перед областью давлений, так и за ней

$$\zeta = \begin{cases} \zeta_{14}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_0, 0 < v < v_{01}; \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, 0 < v < v_{11}; \\ \sigma > \sigma_6, 0 < v < v_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{13}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_3, v_{01} < v < v_{03}; \\ \sigma_3 < \sigma < \sigma_0, v_{01} < v < v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{21}, \text{ при: } \sigma > \sigma_6, v_{03} < v < v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_3, v_{03} < v < v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при: } \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, v_{02} < v < v_{03}; \\ \sigma_0 < \sigma < \sigma_6, v_{11} < v < v_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13}, \text{ при: } \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, v_{11} < v < v_{03}; \\ \sigma_4 < \sigma < \sigma_0, v_{11} < v < v_{03} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } \sigma_1 < \sigma < \sigma_4, v_{02} < v < v_{12}; \\ \sigma_4 < \sigma < \sigma_6, v_{03} < v < v_{12}; \sigma > \sigma_6, v_{11} < v < v_{12} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_1, v_{11} < v < v_{12}; \\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_3, v_{11} < v < v_{02}; \sigma_3 < \sigma < \sigma_4, v_{03} < v < v_{02} \\ \zeta_{14} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23}, \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_1, v > v_{02}; \\ \sigma > \sigma_1, v > v_{11} \\ \zeta_{14} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \zeta_{13} + \zeta_{21} + \zeta_{22} + \zeta_{23} \text{ при: } 0 < \sigma < \sigma_1, v_{12} < v < v_{02} \end{cases} \quad (4.1)$$

Волны ζ_{14} , ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} обусловлены периодическими изменениями давления и при $\sigma=0$ не образуются. Кроме этого волны ζ_{21} , ζ_{22} , ζ_{23} обусловлены наличием упругой пластинки.

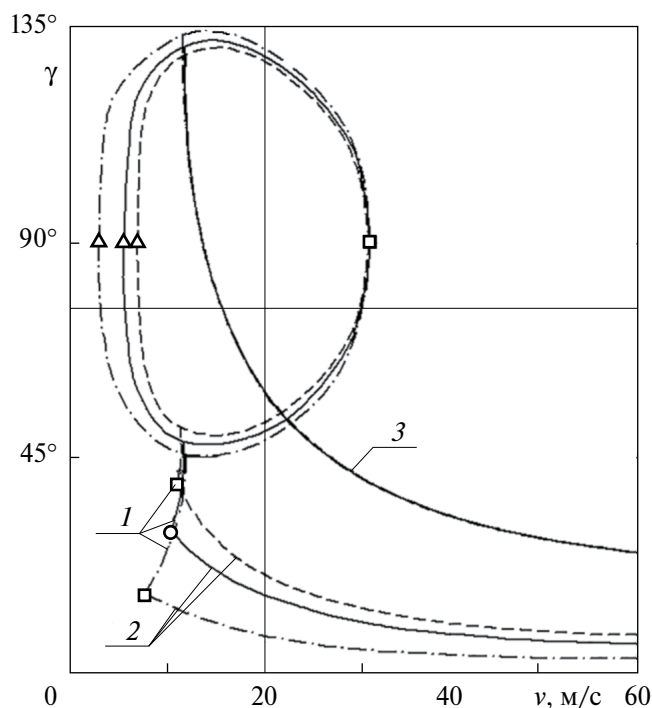


Рис. 3. Размеры угловых зон γ_k ($k=1, 2, 3$, кривые 1–3) для $\sigma=0.2 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$); $Q = -\sqrt{D\rho g}$ – штриховая; $Q = 0$ – сплошная; $Q = \sqrt{D\rho g}$ – штрихпунктирная.

Волны ζ_{14} имеют вид кольцевых волн и распространяются при любых значениях частоты колебаний ($\sigma > 0$) и скорости перемещения источника возмущений ($v > 0$). При $0 < \sigma < \sigma_0$ а $0 < v < v_{02}$ и при $\sigma > \sigma_0$ а $0 < v < v_{11}$ волны ζ_{14} распространяются вокруг источника возмущений ($0 \leq |\gamma| \leq \pi$). Если $0 < \sigma < \sigma_0$ а $v > v_{02}$ и если $\sigma > \sigma_0$ а $v > v_{11}$, то волны распространяются в угловой зоне $-\gamma_3 \leq \gamma \leq \gamma_3$.

Волны ζ_{21} носят характер поперечных, а ζ_{22} продольных корабельных волн, деформированных за счет упругих и массовых сил пластинки. Волны ζ_{21} распространяются в угловой зоне $-\gamma_{11} \leq \gamma \leq \gamma_{11}$, а ζ_{22} в угловых зонах $\gamma_{22} \leq |\gamma| \leq \gamma_{11}$ за движущейся областью периодических давлений при $v > v_{12}$ и $\sigma > 0$.

Изгибно-гравитационные волны ζ_{23} при $v_{03} < v < v_{12}$ и $\sigma > 0$ покрывают всю поверхность пластинки, распространяясь как впереди источника возмущений, так и за ним. При $v > v_{12}$ и $\sigma > 0$ они распространяются в угловой зоне $\gamma_{22} \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_{22}$.

Волны ζ_{11} , ζ_{12} , и ζ_{13} при движении источника возмущений образуются и при $\sigma = 0$ [33, 34]. Волны ζ_{11} и ζ_{12} носят характер продольных и поперечных корабельных волн, распространяющихся за источником возмущений. Волны ζ_{11} образуются при $v_{11} < v < v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ в угловой зоне $-\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_1$. Волны ζ_{12} образуются в угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_1$ при $v_{11} < v < v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и угловых зонах $\gamma_2 \leq |\gamma| \leq \gamma_3$ при $v > v_{02}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и $v > v_{11}$, $\sigma > \sigma_0$.

Волны ζ_{13} – изгибно-гравитационные волны. Они обусловлены наличием упругой пластины и при ее отсутствии не образуются. При $v_{01} < v < v_{11}$ и $0 < \sigma < \sigma_0$, волны распространяются как впереди области возмущений, так и за ней. Если $v > v_{11}$, $0 < \sigma < \sigma_0$ и $v > v_{11}$, $\sigma > \sigma_0$, эти волны распространяются в угловой зоне $\gamma_2 \leq \gamma \leq 2\pi - \gamma_2$.

Зависимость размеров угловых зон, покрытых волнами, от скорости перемещения области давлений приведена на рис. 3–5. Штриховая кривая на рисунках отвечает силам растяжения ($Q = -\sqrt{D\rho g}$), а сплошная – отсутствию сил сжатия и растяжения ($Q = 0$), и штрихпунктирная – силам сжатия ($Q = \sqrt{D\rho g}$).

На рис. 3 представлено распределение γ_k ($k=1, 2, 3$) в зависимости от скорости v . Линии 1–3 соответствуют γ_1 , γ_2 , γ_3 . Верхняя часть замкнутых кривых между треугольниками и квадратом представляют максимальные значения угла γ_3 , а нижняя – угла γ_1 . Квадратом помечены максимальные значения углов γ_1 и γ_3 для $\sigma = 0$, а треугольниками максимальные значения γ_1 и γ_3 для $\sigma = \sigma_0$. Минимальное значение угла

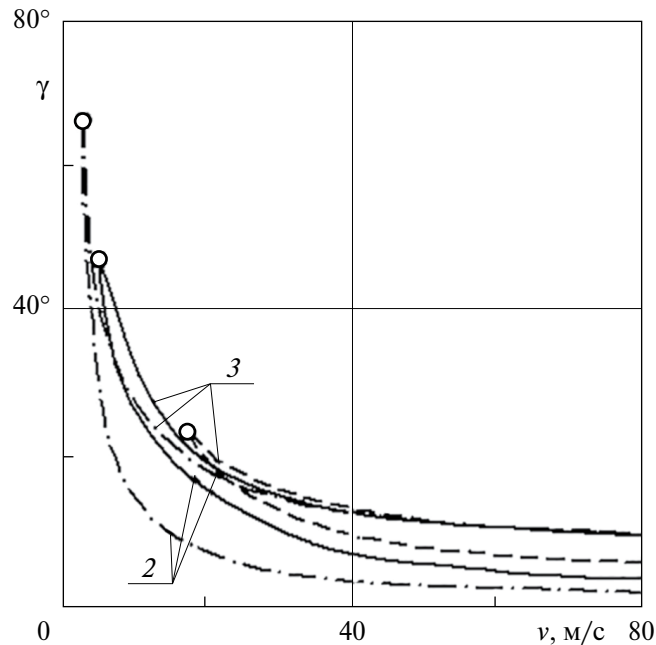


Рис. 4. Размеры угловых зон γ_k ($k=2, 3$) для $\sigma=0,8 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma > \sigma_0$); $Q = -\sqrt{D\rho g}$ – штриховая; $Q = 0$ – сплошная; $Q = \sqrt{D\rho g}$ – штрихпунктирная.

γ_1 и максимальное значение угла γ_2 совпадают, если $v=v_{11}$. Из рисунка видно, что с увеличением скорости v значения углов γ_2 и γ_3 убывают, а величина угла γ_1 растет. Силы сжатия и растяжения на величину угла γ_3 влияния не оказывают. Величина угла γ_2 уменьшается при увеличении сжатия и увеличивается при увеличении растяжения.

На рис. 4 представлены для частоты $\sigma > \sigma_0$ значения углов γ_2 и γ_3 , которые убывают с ростом v . При $v=v_{11}$ значения γ_2 и γ_3 равны. Это отмечено на рисунке кружками. Увеличение сил сжатия уменьшает значение угла γ_2 , а действие растяжения противоположно. Силы сжатия и растяжения при увеличении скорости v на величину угла γ_3 практически не оказывают влияния.

На рис. 5 дано распределение γ_{11} (кривые 1) и γ_{22} (кривые 2) в зависимости от скорости v для $\sigma=0,05 \text{ с}^{-1}$. Кружками отмечены значения углов при $v=v_{12}$. Значение γ_{22} убывает с ростом v . Значение угла γ_{11} сначала возрастает при увеличении v , а затем достигнув максимума убывает при дальнейшем увеличении скорости движения нагрузки. При увеличении сил сжатия значение угла γ_{22} уменьшается, а при увеличении растягивающих усилий увеличивается. Из рисунка видно, что сжатие и растяжение не оказывают влияния на величину угла γ_{11} при больших значениях v .

Направление гребней волн ζ_{13} и ζ_{23} определяется углами

$$\gamma_{01} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{01}^2} - 1\right)^{1/2}, \quad \gamma_{02} = \arctg\left(\frac{v^2}{v_{03}^2} - 1\right)^{1/2}.$$

Значения этих углов уменьшаются при увеличении скорости v . При этом $\gamma_{01} < \gamma_{02}$. Максимальные значения этих углов равны $\pi/2$ и достигаются для γ_{01} при $v=v_{01}$, а для γ_{02} при $v=v_{03}$. Увеличение σ приводит к уменьшению γ_{01} и росту γ_{02} . Увеличение сил сжатия приводит к уменьшению значений этих углов и уменьшению при увеличении сил растяжения и толщины ледяного покрова. Если $\sigma=0$, то $\gamma_{01}=\gamma_{02}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что при перемещении по ледяному покрову возмущений переменной интенсивности, в зависимости от частоты колебаний источника и скорости его перемещения, существует шесть значений

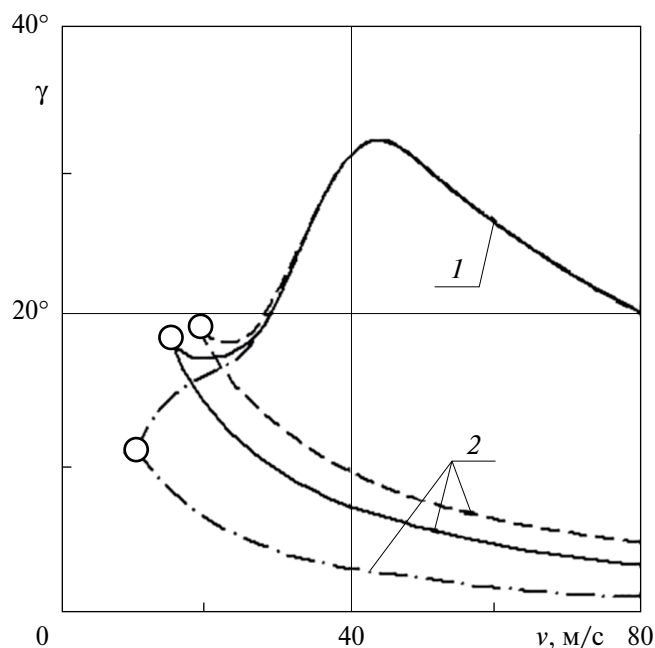


Рис. 5. Размеры угловых зон γ_{kk} ($k = 1, 2$) для $\sigma = 0,05 \text{ с}^{-1}$ ($\sigma < \sigma_0$) $Q = -\sqrt{D\rho g}$ – штриховая; $Q = 0$ – сплошная; $Q = \sqrt{D\rho g}$ – штрихпунктирная.

критических скоростей, если $0 < \sigma < \sigma_0$ и три, если $\sigma > \sigma_0$. При движении по упругой пластине возмущений постоянной интенсивности существует три значения критических скоростей – v_0 , v_1 и $(gH)^{1/2}$.

При $\sigma = 0$, значения критических скоростей v_{01} и v_{03} равны значению v_0 ($v_{01} = v_{03} = v_0$), где v_0 – минимальное значение фазовой скорости изгибно-гравитационной волны. Критические скорости v_{11} и v_{12} равны значению критической скорости v_1 ($v_{11} = v_{12} = v_1$), где v_1 – скорость при которой совпадают фазовые скорости гравитационной, упругой и изгибно-гравитационной волн. Значения критических скоростей v_{02} и v_{10} равны $(gH)^{1/2}$ ($v_{02} = v_{10} = (gH)^{1/2}$), где $(gH)^{1/2}$ – максимальное значение фазовой скорости гравитационной волны.

Движущимися возмущениями переменной интенсивности, в зависимости от скорости перемещения и частоты колебаний источника, может генерироваться от одной до семи систем волн, а движущимися возмущениями постоянной интенсивности $\sigma = 0$ генерируется от одной до трех систем волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. М.: Академия Естествознания, 2007. 355 с.
3. Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. 236 p.
4. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
5. Козин В.М., Земляк В.Л., Рогожникова Е.Г., Погорелова А.В. Влияние ледовых условий на деформированное состояние ледяного покрова от движения нагрузки. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. 123 с.
6. Жесткая В.Д. Численное решение задачи о движении нагрузки по ледяному покрову // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 243–248.
7. Жесткая В.Д., Чижимов С.Д. Численный расчет напряженно-деформированного состояния ледяного покрова, находящегося под действием нестационарной нагрузки. М.: Академия естествознания, 2007. 53 с.
8. Кулешов А.А., Мырзин В.В. Моделирование колебаний плавающего льда в приближении тонкой упругой пластины // Матем. моделирование. 2009. Т. 21. № 6. 28–40.

9. Кулешов А.А., Мырзин В.В. Моделирование колебаний плавающего льда при посадке самолетов на ледовые аэродромы // Выч. мет. программирование. 2010. Т. 11. № 1. С. 7–13.
10. Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5(333). С. 214–221. DOI: 10.15372/PMTF20150520
11. Булатов В.В., Владимиров И.Ю., Морозов Е.Г. Дальние поля возмущений поверхности раздела глубокого океана и ледяного покрова от локализованных источников // Докл. РАН. Науки о Земле. 2023. Т. 512. № 2. С. 302–307. DOI: 10.31857/S2686739723600716
12. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Дальние поля на поверхности раздела бесконечно глубокого океана и ледяного покрова, возбуждаемые локализованным источником // Изв. РАН. ФАО. 2023. Т. 59. № 3. С. 346–351. DOI: 10.31857/S0002351523030033
13. Булатов В.В., Владимиров И.Ю. Амплитудно-фазовая структура волновых возмущений на границе ледяного покрова и глубокой жидкости от локализованных источников // Вестник НИЯУ МИФИ. 2023. Т. 12. № 3. С. 135–142. DOI: 10.26583/vestnik.2023.267
14. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
15. Стурова И.В. Движение нагрузки по ледяному покрову с неравномерным сжатием // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 63–72. DOI: 10.31857/S0568528121040125
16. Стурова И.В., Ткачева Л.А. Влияние сжимающих усилий в ледяном покрове на генерацию изгибно-гравитационных волн // Труды Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Изд-во «ЛЕМА», 2023. С. 209–212.
17. Ткачева Л.А. Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 2. С. 113–122. DOI: 10.31857/S0568528123700044
18. Ткачева Л.А. Деформации и волновые силы при движении нагрузки по ледяному покрову и наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 6. С. 59–66. DOI: 10.31857/S1024708423600203
19. Зуев В.А. Средства продления навигации на внутренних водных путях. Л.: Судостроение, 1986. 208 с.
20. Зуев В.А., Козин В.М. Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова. Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1988. 128 с.
21. Жёсткая В.Д., Козин В.М. Исследования возможностей разрушения ледяного покрова амфибийными судами на воздушной подушке резонансным методом. Владивосток: Дальнаука, 2003. 161 с.
22. Козин В.М., Лебедев А.А. Энергоэффективные технологии разрушения ледяного покрова судами на воздушной подушке резонансным методом // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2022. № 3(52). С. 19–29. DOI: 10.24866/2227-6858/2022-3/19-29
23. Козин В.М. Результаты экспериментально-теоретических исследований возможностей резонансного метода разрушения ледяного покрова // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 3. С. 3–20. DOI: 10.31857/S0572329922600396
24. Козин В.М. Способы определения критических скоростей нагрузок, движущихся в условиях сплошного ледяного покрова (обзор) // Вестник инженерной школы ДВФУ. 2019. № 2(39). С. 30–38. DOI: 10.24866/2227-6858/2019-2-4
25. Козин В.М., Скрипачев В.В. Колебания ледяного покрова под действием периодически изменяющейся нагрузки // ПМТФ. 1992. № 5. С. 141–146.
26. Кожжаев А.В., Козин В.М. Повышение эффективности резонансного метода интерференцией изгибно-гравитационных волн от периодического изменения давления в подушке СВП // IV Всероссийская конференция с международным участием «Полярная механика-2017», 14–15 сентября 2017 г., Санкт-Петербург, Россия: сборник докладов. С. 265–271.
27. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Неустановившиеся колебания ледяного покрова, вызываемые периодически перемещающимися давлениями // Морские гидрофизические исследования. Севастополь: МГИ АН УССР, 1969. № 2 (44). С. 94–105.
28. Букатов А.Е., Ярошенко А.А. Развитие трехмерных изгибно-гравитационных волн при движении области давлений переменной интенсивности // ПМТФ. 1986. № 5. С. 54–60.

29. *Duffy D.G.* The response of floating ice to a moving, vibrating load // *Cold Regions Science and Technology*. 1991. V. 20. Iss. 1. P. 51–64.
DOI: 10.1016/0165-232X(91)90056-M
30. *Ярошенко А.А., Маленко Ж.В.* Неустановившиеся трехмерные изгибно-гравитационные волны, вызванные движущимися возмущениями переменной интенсивности // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2023. Т. 20. № 1. С. 41–51.
DOI: 10.31429/vestnik-20-1-41-51
31. *Федорюк М.В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. Серия: Физико-математическое наследие: математика (математический анализ). М.: URSS, 2022. 544 с.
32. *Ярошенко А.А., Маленко Ж.В., Маркина Е.В., Боран-Кешишьян А.Л., Кондратьев А.И.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений в условиях равномерного сжатия // *Морские интел. технол.* 2022. № 4(58). Т. 1. С. 251–257.
DOI: DOI: 10.37220/MIT.2022.58.4.050
33. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Изгибно-гравитационные волны в море с ледяным покровом от движущихся возмущений // *Морские интел. технол.* 2021. Т. 4. № 2. С. 157–161.
DOI: 10.37220/MIT.2021.52.2.086
34. *Маленко Ж.В., Ярошенко А.А.* Трехмерные изгибно-гравитационные волны в плавающем ледяном покрове от движущегося источника возмущений // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 6. С. 1037–1048.
DOI: 10.31857/S0032823523060115

Flexural-Gravity Waves in an Ice Cover Exited by Periodically Varying Moving Perturbations

Zh. V. Malenko^{a, b, *} and A. A. Yaroshenko^{a, b, **}

^a*Kornilov Marine Institute, the branch of the Ushakov State Marine University, Sevastopol, Russia*

^b*Sevastopol State University, Sevastopol, Russia*

^{*}*e-mail: zhvla17@mail.ru*

^{**}*e-mail: yaroshenko.575@yandex.ru*

The vibrations of a floating ice cover under the action of moving disturbances of variable intensity are studied. The model of vibrations of a floating ice cover is based on the linearized fluid mechanics equations and the linear classical theory of vibrations of plates. The ice cover is considered as a thin elastic isotropic plate. The critical velocities at which the nature of the wave disturbances changes both in front of the disturbance source and behind it are determined. The critical velocities as functions of the source oscillation frequency are studied, six critical velocities being obtained. It is shown that from one to seven wave systems are formed depending on the velocity of the source and the frequency of its oscillations. The corner zones in which these waves are formed are determined. The effect of compression and tension forces on the critical velocities and the corner zones in which the waves propagate has been studied.

Keywords: flexural-gravity waves, ice cover, critical velocity, elastic plate.

УДК 532.517

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ВОДО- И НЕФТЕРАСТВОРИМЫХ ТРАССЕРОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МНОГОЗОННОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

© 2024 г. А. Б. Мазо^{a, *}, М. Р. Хамидуллин^{b, **}, К. А. Поташев^{a, ***}, А. А. Ураимов^{b, ****}

^aИнститут математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, Казань, Россия

^bКазанское отделение Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН, Казань, Россия

*e-mail: abmazo1956@gmail.com

**e-mail: marseille.ksu@gmail.com

***e-mail: kpotashev@mail.ru

****e-mail: aauraimov@gmail.com

Поступила в редакцию 31.10.2023 г.

После доработки 28.01.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Предложена упрощенная математическая модель двухфазного многокомпонентного течения в системе пласт – трещины многостадийного гидроразрыва – горизонтальная скважина. На основе анализа размерностей и теории подобия упрощена формулировка задач переноса в скважине и в трещинах гидроразрыва. Показана возможность перехода к квазистационарной задаче распределения компонент смеси в высокопроницаемых трещинах гидроразрыва. Выполнено понижение размерности задачи в пласте за счет ее декомпозиции на набор задач в независимых фиксированных трубках тока. Итоговое сокращение машинного времени численного решения задачи достигает двух порядков величины и может быть далее сокращено при использовании параллельных вычислений. Ускорение решения прямой задачи является принципиально необходимым для возможности решения обратной задачи идентификации фильтрационно-емкостных параметров трещин по результатам интерпретации трассерных исследований.

Ключевые слова: нефтяной пласт, многозонный гидроразрыв, горизонтальная скважина, многокомпонентная фильтрация, высокопроизводительные вычисления, аналитическое решение, численное моделирование, трубки тока.

DOI: 10.31857/S1024708424030058, **EDN:** PFXGVK

При разработке нефтяных месторождений часто применяется бурение горизонтальных скважин (ГС) с многостадийным (многозонным) гидроразрывом пласта (МГРП) с трансверсальными трещинами [1–3]. При проектировании, оценке эффективности и прогнозе данного способа добычи нефти возникают вопросы об индивидуальных геометрических и фильтрационных свойствах каждой трещины гидроразрыва и её вкладе в суммарную продукцию скважины [4,5]. Одним из мероприятий по определению указанных свойств трещин МГРП являются индикаторные (трассерные) исследования с использованием набора химических веществ, одни из которых растворяются в воде, а другие – в нефти [6–12].

На первом этапе проводится т.н. мини-ГРП, когда на месте будущей трещины МГРП (с номером j) под действием локализованного импульса высокого давления создается небольшая трансверсальная трещина с размерами $[-h_j^{mini}, h_j^{mini}] \times [-H_j^{mini}, H_j^{mini}] \times [-\delta_j^{mini}, \delta_j^{mini}]$. Здесь и далее h – размер трещины в поперечном направлении x , H обозначает размер по вертикали z , а δ – это половина раскрытия трещины в направлении y , совпадающем с осью ГС. Образование мини-ГРП сопровождается сбросом давления, которое все же остается достаточно высоким для того, чтобы закачать через мини-трещину в пласт конечный объем V_j^{mini} флюида с растворенным в нем индикатором (с номером i и массовой концентрацией $c_i^{k,j}$, $k \in \{w, o\}$; индекс w означает водорастворимый трассер (ВРТ), а индекс o – нефтерастворимый (НРТ)). Закачка с доставкой индикатора в пласт длится t^{mini} секунд и характеризуется дебитом $q_j^{mini} = V_j^{mini} / t^{mini}$ м³/с. Характерные параметры мини-ГРП таковы: $H_j^{mini} \equiv h_j^{mini} \approx 10$ м., $\delta_j^{mini} \approx 10^{-2}$ м; $V_j^{mini} \approx 10^3$ м, $t^{mini} \approx 10^5$ с, $q_j^{mini} \approx 10^{-4}$ м³/с, $c_i^{w,j} = 2$ кг/м³.

Второй этап состоит в создании рабочей трещины МГРП (основной ГРП) размером $[-h_j, h_j] \times [-H_j, H_j] \times [-\delta_j, \delta_j]$ из трещины мини-ГРП. Как правило, вертикальный размер $2H_j$ равен толщине пласта, трансверсальный размах трещины h_j достигает 100 м, а раскрытие $\delta_j \approx 10^{-2}$ м. Создание рабочей трещины МГРП сопровождается форсированной закачкой внедряемого агента и проппанта. В принципе, и на этом этапе возможна фильтрация флюида из трещины в основной коллектор и изменение там полей насыщенности и концентрации трассеров.

На третьем этапе индикаторных исследований гидроизоляция снимается, скважина переводится в режим отбора благодаря созданию депрессии. Начинается фильтрация двухфазного (вода, нефть) многокомпонентного (фазы, трассеры) флюида из коллектора в трещины МГРП и далее в скважину. Важно, что поля водо- и нефтенасыщенности коллектора, а также концентрации ВРТ и НРТ, сформировавшиеся на первых двух этапах трассерных исследований, служат начальными условиями для математической модели фильтрации в системе коллектор-трещины-скважина в режиме отбора флюида. Продукция ГС анализируется, определяются концентрации индикаторов и строятся т.н. кривые выхода трассеров, интерпретация которых должна ответить на вопрос о геометрических и фильтрационных свойствах каждой трещины гидроразрыва и оценить её относительный вклад в продукцию скважины.

Математическая модель, положенная в основу вычислений, описывает трехмерную двухфазную (нефть, вода) многокомпонентную (нефть, вода, ВРТ, НРТ) фильтрацию с учетом сорбционного взаимодействия индикаторов с породой пласта. При моделировании выделяются две задачи:

- *прямая задача* расчета давления, водонасыщенности и концентрации индикаторов при заданных режимных параметрах скважины и фильтрационных параметров трещин МГРП во время закачки индикатора и дальнейшей эксплуатации скважины;
- *обратная задача* подбора фильтрационных параметров трещин МГРП (геометрии и проницаемости) по замеренным кривым суммарного дебита, обводненности скважины и кривых выхода индикаторов после перевода скважины на отбор.

При математическом и численном моделировании трассерных исследований выделенные и описанные выше этапы процесса рассчитываются последовательно. Поскольку результативность технологии гидравлического разрыва пласта определяется реологическими свойствами жидкости гидроразрыва и режимом размещения в трещине проппанта, за которыми осуществляется тщательный контроль, то добавление в них инородных примесей в виде трассеров, как правило, не допускается. Поэтому наиболее распространенным вариантом закачки трассеров является добавление в магистраль раствора с трассером уже вслед за необходимым объемом жидкости ГРП и проппанта. Таким образом, раствор трассера поступает через скважину в трещину ГРП, а через нее в пласт, уже после того, как эта трещина сформирована и закреплена расклинивающим агентом, то есть ее геометрические и фильтрационные свойства уже сформированы. Поэтому процесс образования трещин в горной породе пласта не моделируется, описывается только нагнетание соответствующих объемов жидкости гидроразрыва в пласт при наличии уже раскрывшихся трещин.

Одним из наиболее общих подходов к решению задач в области нефтяного пласта, содержащего множество трещин, является метод discrete fracture network (DFN) [13,14]. Однако при таком подходе возникает ряд проблем. Во-первых, DFN требует значительных вычислительных ресурсов, так как рассматриваются задачи в исходной трехмерной постановке [15,16]. Во-вторых, возникает необходимость решения дополнительной задачи о сопряжении решений на расчетных сетках в пласте и в трещинах [17–21]. Столь затратные по машинному времени методы численного моделирования течения вблизи трещин оказываются, таким образом, малоприменимыми для решения обратных задач.

Запись определяющих уравнений в безразмерных переменных, выделение и оценка критериев подобия задачи позволяет, наряду с общей трехмерной постановкой, использовать упрощенные оперативные модели индикаторных исследований ГС с МГРП.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ТРЕЩИН МГРП

1.1. Основные уравнения двухфазной многокомпонентной фильтрации в пласте

Для описания двухфазной фильтрации воды и нефти в пласте используем классические уравнения переноса водонасыщенности и пьезопроводности. Задача содержит следующие масштабы: длина

l — области дренирования Ω ; p_Γ — давление на внешней границе Γ этой области; p^γ — давление в скважине. Кроме того известны характерные значения пористости m^0 , абсолютной проницаемости k^0 , вязкости $\mu^0 = \mu_w$, средней гидропроводности $\sigma^0 = k^0 / \mu^0 = k^0 / \mu_w$, по которым можно определить характерные значения скорости фильтрации и времени

$$u^0 = \frac{\sigma^0 \Delta p^0}{l}, \Delta p^0 = |p_\Gamma - p^\gamma|; t^0 = \frac{lm^0}{u^0}$$

Используя безразмерные переменные

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l}; \bar{t} = \frac{t}{t^0}; \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u^0}, \bar{m} = \frac{m}{m^0}; \bar{k} = \frac{k}{k^0}; \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma^0}, \sigma = \frac{k(\mathbf{x})}{\mu(s)} = \frac{k(\mathbf{x})}{\mu_w} \varphi(s),$$

$$\bar{p} = \frac{p - p_\Gamma}{\Delta p^0}; \bar{\beta} = \frac{\beta \Delta p^0}{m^0} \quad (1.1)$$

и пренебрегая капиллярными и гравитационными силами, а также сжимаемостью флюида, запишем модель суммарного потока

$$\bar{m} \frac{\partial s}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (f(s) \bar{\mathbf{u}}) = 0, \bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (1.2)$$

$$\bar{\beta} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (1.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = -\bar{\sigma}(\bar{\mathbf{x}}, s) \bar{\nabla} \bar{p}, \quad \bar{\sigma} = \bar{k}(\bar{\mathbf{x}}) \varphi(s) \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты точки, t — время; s — водонасыщенность; p — давление; m — пористость, β — упругоемкость, k — абсолютная проницаемость пласта; μ , φ — вязкость и подвижность двухфазной смеси; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_w + \mathbf{u}_o$ — скорость фильтрации двухфазного потока, $\mathbf{u}_w = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_o = (1 - f)\mathbf{u}$ — скорость фильтрации водной и нефтяной фазы соответственно; f — доля воды в суммарном потоке. Функции $\varphi(s)$, $f(s)$ выражаются через относительные фазовые проницаемости $k_w(s)$, $k_o(s)$, которые можно аппроксимировать степенными зависимостями

$$\varphi = k_w + K_\mu k_o, \quad K_\mu = \frac{\mu_w}{\mu_o}; f(s) = \frac{k_w(s)}{\varphi(s)}$$

$$k_w(s) = \tilde{s}^a, \quad k_o(s) = (1 - \tilde{s})^a, \quad \tilde{s} = (s - s_1) / (s_2 - s_1), \quad a = 1 \div 4 \quad (1.5)$$

Здесь μ_w и μ_o — динамическая вязкость воды и нефти; s_1 , s_2 — предельные значения водонасыщенности, определяемые остаточной насыщенностью воды и нефти:

$$s_1 \leq s \leq s_2, \quad 0 \leq \tilde{s} \leq 1 \quad (1.6)$$

Для описания распределения ВРТ в пласте будем использовать две функции массовой концентрации (кг/м³): $c_i^w(\mathbf{x}, t)$, $a_i^w(\mathbf{x}, t)$, $i = 1..N^w$. Первая из них — это концентрация в водной фазе порового пространства, а вторая — концентрация трассера, накопленного в скелете пористой среды, вычисляемая как отношение такой массы трассера к общему объему пористой среды.

Изменение концентрации каждого ВРТ $i = 1..N^w$ в пористом коллекторе описывается уравнениями переноса концентрации

$$\frac{\partial}{\partial t} (m s c_i^w + a_i^w) + \nabla \cdot (c_i^w \mathbf{u}_w) = 0 \quad (1.7)$$

Механизм сорбционного обмена индикатором между подвижной водной фазой и скелетом пласта описывается уравнением кинетики сорбции

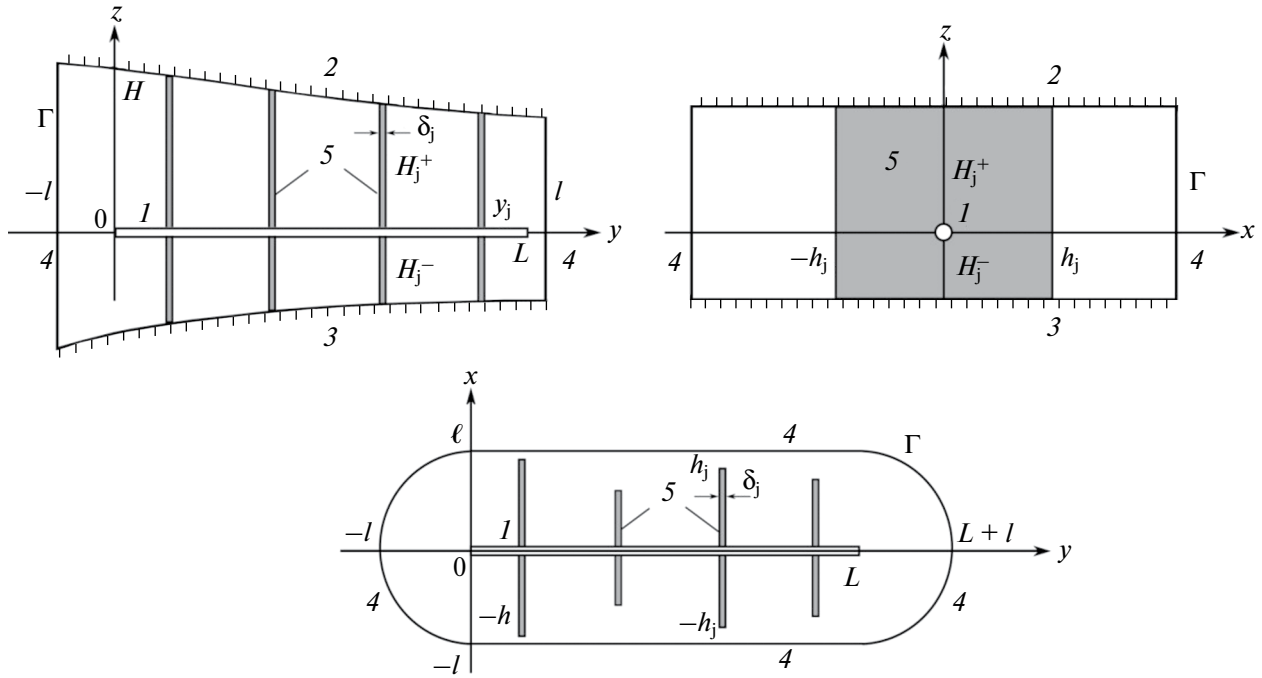


Рис. 1. Схема расчетной области Ω : вид сбоку, вид с торца, вид сверху.

$$\frac{\partial a_i^w}{\partial t} = \frac{a_i^{w,s}(c_i^w) - a_i^w}{\tau_i^w}, \quad a_i^{w,s} = \frac{A_i^w c_i^w}{B_i^w + c_i^w}, \quad (1.8)$$

в котором $\tau_i^w > 0$ – характерное время сорбции, а связь между равновесной концентрацией индикатора в твердой фазе $a_i^{w,s}$ и его концентрацией в водной фазе c_i^w задана изотермой Ленгмюра с константами A_i^w , $B_i^w > 0$.

Аналогично, для концентрации каждого НРТ имеем две функции массовой концентрации (кг/м³): $c_i^o(\mathbf{x}, t)$, $a_i^o(\mathbf{x}, t)$, $i = 1..N^o$ и два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (m(1-s)c_i^o + a_i^o) + \nabla \cdot (c_i^o \mathbf{u}_o) = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial a_i^o}{\partial t} = \frac{a_i^{o,s}(c_i^o) - a_i^o}{\tau_i^o}, \quad a_i^{o,s} = \frac{A_i^o c_i^o}{B_i^o + c_i^o} \quad (1.10)$$

Типичные значения параметров сорбции в моделях (1.8), (1.10) можно принять одинаковыми для всех индикаторов и равными $\tau_i^{w,o} = \tau^0 = 10^4$ с, $A_i^w = A_i^o = A^0 10$ кг/м³, $B_i^w = B_i^o = B^0 = 1$ кг/м³ [2–5].

Уравнения (1.2)–(1.10) определены в модельной области Ω дренирования ГС с МГРП, представленной параллелепипедом с закругленными краями 4, верхняя Z_T и нижняя Z_B грани которого проходят по кровле 2 и подошве 3 пласта (рис. 1). В области Ω имеется соответствующий скважине вырез 1 вдоль оси Oy в виде цилиндрической поверхности γ радиуса r_w длиной L . Каждая трещина МГРП интервала $j = 1..N$ ограничивается парой вертикальных поверхностей F_j^-, F_j^+ с нормальными в направлениях $n^\pm = \pm y$, расположенных на расстояниях $\pm \delta_j$ от плоскости $y = y_j$. Предполагается, что трещины рвут пласт по вертикали от подошвы Z_B до кровли Z_T , а в трансверсальном направлении их размер ограничен координатами $x = \pm h$.

Безразмерные функции концентраций и параметры сорбции введем, используя единые масштабы c^0 (например, c^0 – максимальная концентрация ВРТ при закачке) и $a^0 = m^0 c^0$:

$$\begin{aligned}\bar{c}_i^w, \bar{c}_k^o &= \frac{c_i^w, c_k^o}{c^0}; \quad \bar{a}_i^w, \bar{a}_k^o, \bar{a}_i^{w,s}, \bar{a}_k^{o,s} = \frac{a_i^w, a_k^o, a_i^{w,s}, a_k^{o,s}}{m^0 c^0} \\ \bar{A}_i^w, \bar{A}_k^o &= \frac{A_i^w, A_k^o}{m^0 c^0}; \quad \bar{B}_i^w, \bar{B}_k^o = \frac{B_i^w, B_k^o}{c^0} \\ \bar{\tau}_i^w, \bar{\tau}_k^o &= \frac{\tau_i^w, \tau_k^o}{t^0}; \quad i = 1..N^w, k = 1..N^o\end{aligned}\quad (1.11)$$

В результате замены (1.11) получим безразмерные уравнения для концентраций ВРТ и НРТ в том же виде, что и размерные (1.7)–(1.10).

1.2. Уравнения двухфазной многокомпонентной фильтрации в трещинах МГРП

Для описания фильтрационных течений в тонких трещинах ($\delta \ll L$) введем операцию осреднения произвольного параметра по раскрытию трещины j

$$\langle \cdot \rangle_j = \frac{1}{2\delta_j} \int_{y_j - \delta_j}^{y_j + \delta_j} (\cdot) dy \quad (1.12)$$

и определим средние давление, водонасыщенность и концентрацию трассеров ВРТ и НРТ, пометив их верхним индексом f (fracture)

$$p_j^f = \langle p \rangle_j, \quad s_j^f = \frac{\langle ms \rangle_j}{\langle m \rangle_j}, \quad c_{ij}^{w,f} = \frac{\langle m s c_i^w \rangle_j}{\langle ms \rangle_j}, \quad c_{ij}^{o,f} = \frac{\langle m(1-s)c_i^o \rangle_j}{\langle m(1-s) \rangle_j} \quad (1.13)$$

Пористость и абсолютную проницаемость каждой трещины j будем считать постоянными и равными m_j^f, k_j^f . Приближенные уравнения для функций (1.13) получим, применив операцию (1.12) к уравнениям (1.2)–(1.10), приняв при этом следующие приближения

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j^f &= -\langle \sigma^f \nabla_{xz} p \rangle_j \approx -\sigma_j^f \nabla_{xz} p_j^f, \quad \sigma_j^f = \phi(s_j^f) k_j^f / \mu_w \\ \langle f \mathbf{u} \rangle_j &\approx f(s_j^f) \mathbf{u}_j^f \\ \langle c_i^w \mathbf{u}_w \rangle_j &\approx c_{ij}^{w,f} f(s_j^f) \mathbf{u}_j^f, \quad \langle c_i^o \mathbf{u}_o \rangle_j \approx c_{ij}^{o,f} [1 - f(s_j^f)] \mathbf{u}_j^f\end{aligned}\quad (1.14)$$

Для приведения к безразмерному виду уравнений, описывающих осредненную по раскрытию гидродинамику трещин МГРП, будем использовать в основном те же масштабы, что и в модели основного коллектора – $l, t^0, m^0, k^0, \sigma^0, \Delta p^0$, однако масштаб $u_j^{f,0}$ скорости фильтрации в трещине j индивидуален, определяется её проницаемостью k_j^f и поэтому отличается от характерной скорости u^0 в коллекторе

$$\bar{\mathbf{u}}_j^f = \frac{\mathbf{u}_j^f}{u_{j,0}^{f,0}}, \quad u_{j,0}^{f,0} = \bar{k}_j^f u^0, \quad j = 1..N$$

Пренебрегая упругоемкостью и сорбцией в трещине, будем иметь

- уравнение для давления в трещине j

$$\bar{\nabla}_{xz} \cdot \left(\phi(s_j^f) \bar{\nabla}_{xz} \bar{p}_j^f \right) + \frac{1}{2M_j} \bar{u}_y \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0, \quad M_j = \bar{\delta}_j \bar{k}_j^f$$

$$\bar{p}|_{\gamma} = \pm 1, \quad \bar{x} = \pm \bar{h}_j, \quad \bar{z} = \pm \bar{H}_j : \quad \varphi_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} = 0 \quad (1.15)$$

- формулу для суммарной скорости фильтрации в трещине j

$$\bar{\mathbf{u}}_j^f = -\varphi_j^f \bar{\nabla}_{xz} \bar{p}_j^f \quad (1.16)$$

- уравнение для водонасыщенности в трещине j

$$\varepsilon_j \frac{\partial s_j^f}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_{xz} \cdot \left[f(s_j^f) \bar{\mathbf{u}}_j^f \right] + \frac{1}{2M_j} (f(s) \bar{u}_y) \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0, \quad \varepsilon_j = \frac{\bar{m}_j^f}{\bar{k}_j^f} \quad (1.17)$$

- уравнение для концентрации индикатора $i = 1..N^w$ ВРТ в трещине j

$$\varepsilon_j \frac{\partial (s_j^f \bar{c}_{ij}^{w,f})}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_{xz} \cdot \left[\bar{c}_{ij}^{w,f} f(s_j^f) \bar{\mathbf{u}}_j^f \right] + \frac{1}{2M_j} (\bar{c}_i^w f(s) \bar{u}_y) \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0 \quad (1.18)$$

- уравнение для концентрации индикатора $i = 1..N^o$ НРТ в трещине j

$$\begin{aligned} \varepsilon_j \frac{\partial \left[(1 - s_j^f) \bar{c}_{ij}^{o,f} \right]}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla}_{xz} \cdot \left[\bar{c}_{ij}^{o,f} (1 - f(s_j^f)) \bar{\mathbf{u}}_j^f \right] \\ + \frac{1}{2M_j} \left[\bar{c}_i^o (1 - f(s)) \bar{u}_y \right] \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} = 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Заметим, что в осредненных уравнениях (1.15), (1.17), (1.18), (1.19) последние члены (подстановки) описывают приток из коллектора в трещину соответственно двухфазного флюида, воды, ВРТ либо НРТ.

Задача (1.15) содержит один критерий подобия M_j , равный произведению малого параметра $\bar{\delta}_j$ на большое значение $\bar{k}_j^f$; реально M_j может изменяться в широких пределах.

Граничное условие в (1.15) на скважине $\bar{p}|_{\gamma} = +1$ задает режим нагнетания, а $\bar{p}|_{\gamma} = -1$ моделирует депрессию при добыче с постоянным давлением. Данное граничное условие легко обобщается на переменное во времени заданное давление на скважине: $\bar{p}|_{\gamma} = \bar{p}_{\gamma}(\bar{t})$.

Замечание. Плоская модель двухфазной многокомпонентной фильтрации в трещинах МГРП верно отражает баланс фильтрационных потоков, однако, чтобы не переоценить ее адекватность, следует отметить, что приближенные формулы (1.14) опираются на два грубых допущения. Во-первых, принято, что среднее от произведения функций равно произведению их средних. Во-вторых, полагается, что относительные фазовые проницаемости в трещинах те же, что и в коллекторе пласта, а различие в гидропроводности обеспечивается лишь разными значениями абсолютных проницаемостей k и k^f . Отметим, что в пористой среде трещин ГРП, образованной крупными зернами проппанта, функции фазовых проницаемостей могут приближаться к линейным функциям фазовой насыщенности, а неснижаемые насыщенности могут стремиться к нулю.

1.3. Уравнения движения двухфазной многокомпонентной жидкости по стволу ГС с притоком из МГРП в режиме отбора

Замеряемые значения концентраций всех индикаторов в продукции ГС (кривые выхода ВРТ и НРТ) формируются при движении двухфазного флюида с растворенными в нем трассерами в стволе скважины при отборе. Будем считать, что падение давления вдоль ГС пренебрежимо мало, и движение флюида в скважине и перенос компонент индикаторов можно рассчитать на основе упрощенных балансовых уравнений. Дебит Q горизонтальной скважины определяется суммой дебитов $q_j, j = 1..N$ всех трещин

МГРП. Обозначив через $u_{n,j}^f = -\sigma_j^f \partial p_j^f / \partial n$ среднюю скорость притока двухфазного флюида в скважину из трещины j , запишем выражения суммарного q_j и фазовых $q_j^{o,w}$ дебитов одной трещины:

$$\begin{aligned} y = y_j : q_j &= 2\delta_j 2\pi r_w u_{n,j}^f = -4\pi\delta_j r_w \sigma_j^f \frac{\partial p_j^f}{\partial n} \Big|_\gamma \\ q_j^w &= q_j f(s_j^f) \Big|_\gamma, \quad q_j^o = q_j - q_j^w, \quad m^3 / c, \quad j = 1..N \end{aligned} \quad (1.20)$$

Запишем балансовое уравнение для скорости U движения двухфазного флюида

$$\frac{\partial}{\partial y} (\pi r_w^2 U) = \sum_{j=1}^N \delta(y - y_j) q_j, \quad 0 \leq y < L; \quad U(L) = 0,$$

где r_w — радиус ГС; δ — дельта-функция Дирака. Интегрирование этого уравнения от y до L с учетом (1.20) и (1.1) дает уравнение для скорости течения в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{U}(\bar{y}, \bar{t}) &= -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{h}(\bar{y}_j - \bar{y}) \bar{M}_j \bar{u}_{n,j}^f, \quad 0 \leq \bar{y} < \bar{L}, \quad \mathbf{h}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases} \\ \bar{u}_{n,j}^f &= -\sigma_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \Big|_\gamma; \quad \bar{U}(\bar{L}, \bar{t}) = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$M^0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M_j, \quad \bar{M}_j = \frac{M_j}{M^0} \approx 1 \quad (1.22)$$

$$\bar{U} = \frac{U}{U^0}, \quad U^0 = N \frac{4M^0 u^0 l}{r_w}$$

где $\mathbf{h}$ — функция Хевисайда.

Балансовое уравнение для обводненности η в стволе скважины имеет вид

$$\begin{aligned} e \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U} \eta) &= -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\bar{y} - \bar{y}_j) \bar{M}_j \left(f(s_j^f) \sigma_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_\gamma \\ e &= \frac{\bar{r}_w}{4NM^0 m^0}, \quad \bar{t} > 0, \quad 0 \leq \bar{y} < \bar{L}; \quad \bar{t} = 0, \quad y = \bar{L} : \eta = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ввиду отличия вязкости и плотности водной и нефтяной фаз их скорости при совместном течении вдоль скважины могут отличаться вследствие формирования различных режимов течения — от полностью разделенных (стратифицированных) до полностью смешанных (дисперсных). Переход от стратифицированного режима течения к дисперсному определяется балансом турбулентной энергии сплошной фазы и свободной поверхностной энергии дисперсной фазы. Как показано в работе для характерных физико-химических свойств водной и нефтяной фаз, при достижении суммарной скорости течения в трубах диаметром около 0.1 м величин порядка 0.25–0.5 м/с скорости течения отдельных фаз становятся близки. Для протяженных горизонтальных скважин, простимулированных многозонным гидравлическим разрывом пласта, характерная величина дебита достигает нескольких сотен куб.м/сут. При внутреннем диаметре скважины 0.1 м прирост дебита на каждые 100 куб.м/сут соответствует увеличению средней по сечению ствола скважины скорости потока примерно на 0.15 м/с и повышению числа Рейнольдса примерно на 2500 единиц.

При близких к данным условиям параметрам исследуемой системы можно полагать, что обе фазы и все компоненты движутся в стволе ГС с одинаковой скоростью U . В противном случае можно оснастить модель дополнительной зависимостью между скоростью течения водной фазы, ее объемной долей

и расходом двухфазной смеси. Полагая скорости фаз одинаковыми, нетрудно составить уравнение для концентрации $\bar{C}_i^w$, $i = 1..N^w$ водорастворимого и нефтерастворимого трассеров в стволе ГС (размерность этой величины – кг индикатора в одном м³ скважинной жидкости). Используя, как и прежде, единый масштаб c^0 для нормировки концентраций ВРТ и НРТ ($\bar{C}_i^{w,o} = C_i^{w,o} / c^0$), получим уравнения переноса трассера в стволе ГС при $t > 0$, $0 \leq y < L$

$$e \frac{\partial \bar{C}_i^w}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U} \bar{C}_i^w) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\delta}(\bar{y} - \bar{y}_j) \bar{M}_j \left(f(s_j^f) \Phi_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \bar{c}_{ij}^{w,f} \right) \Big|_{\gamma}, \quad i = 1..N^w \quad (1.24)$$

$$e \frac{\partial \bar{C}_i^o}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{U} \bar{C}_i^o) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{\delta}(\bar{y} - \bar{y}_j) \bar{M}_j \left([1 - f(s_j^f)] \Phi_j^f \frac{\partial \bar{p}_j^f}{\partial \bar{n}} \bar{c}_{ij}^{o,f} \right) \Big|_{\gamma}, \quad i = 1..N^o \quad (1.25)$$

с начальными и граничными условиями

$$\bar{t} = 0 : \bar{C}_i^{w,o} = \bar{C}_{i,0}^{w,o}(\bar{y}); \quad \bar{y} = \bar{L} : \bar{C}_i^{w,o} = 0$$

Очевидно, концентрация индикатора в двухфазном флюиде связана с концентрацией трассера в водной и нефтяной фазе соотношениями

$$\bar{C}_i^w = \eta \bar{c}_i^w, \quad \bar{C}_i^o = (1 - \eta) \bar{c}_i^o \quad (1.26)$$

Решение задач (1.24), (1.25) и (1.26) определяет, в частности, расчетные кривые выхода индикаторов

$$\tilde{C}_i^w(\bar{t}) = \bar{C}_i^w(0, \bar{t}), \quad i = 1..N^w; \quad \tilde{C}_i^o(\bar{t}) = \bar{C}_i^o(0, \bar{t}), \quad i = 1..N^o$$

а также кривую обводненности продукции $\tilde{\eta}(\bar{t}) = \eta(0, \bar{t})$. Другими важными показателями продуктивности ГС с МГРП служат дебит по жидкости $\bar{Q}$, по воде $\bar{Q}_w$ и по нефти $\bar{Q}_o$, формулы для которых следуют из (1.21) и (1.23)

$$\bar{Q}(\bar{t}) = \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}^0} = \bar{U}(0, \bar{t}), \quad \bar{Q}^0 = \pi r_w^2 U^0$$

$$\bar{Q}_w(\bar{t}) = \tilde{\eta}(\bar{t}) \bar{Q}(\bar{t}), \quad \bar{Q}_o(\bar{t}) = (1 - \tilde{\eta}(\bar{t})) \bar{Q}(\bar{t})$$

Эту величину с помощью формулы (1), взятой при $\bar{y} = 0$, можно выразить через дебиты трещин МГРП

$$\bar{U}(0, \bar{t}) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j \bar{u}_{n,j}^f \quad (1.27)$$

1.4. Начальные и граничные условия. Постановка краевых задач

Перейдем к формулировке краевых (начальных и граничных) условий для выписанных уравнений (1.2)–(1.10) в пласте и (1.15)–(1.19) в трещине. Условия сопряжения на внутренних границах γ , $F_i^{\pm}$ системы скважина-трещины-коллектор выражают непрерывность давления и нормальных компонент скорости фильтрации.

Начальные условия на момент времени $\bar{t} = 0$ должны быть поставлены для нестационарных уравнений

- в пласте $\mathbf{x} \in D$

$$s = s_0(\bar{\mathbf{x}}); \quad \bar{p} = \bar{p}_0(\bar{\mathbf{x}}); \quad \bar{c}_i^w = \bar{c}_{i,0}^w(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^w; \quad \bar{c}_i^o = \bar{c}_{i,0}^o(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^o$$

- в трещинах МГРП $\mathbf{x} \in D_j^f, j = 1..N$

$$s_j^f = s_{j,0}^f(\bar{\mathbf{x}}); \quad \bar{c}_{ij}^{w,f} = \bar{c}_{ij,0}^{w,f}(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^w; \quad \bar{c}_{ij}^{o,f} = \bar{c}_{ij,0}^{o,f}(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1..N^o$$

- в скважине $0 < \bar{y} < \bar{L}$

$$\eta = \eta_0(\bar{y}); \bar{C}_i^w = \bar{C}_{i,0}^w(\bar{y}), i = 1..N^w; \bar{C}_i^o = \bar{C}_{i,0}^o(\bar{y}), i = 1..N^o$$

Специфика математического моделирования индикаторных исследований состоит в том, чтобы описать все этапы этого процесса (подготовка, мини-ГРП, закачка флюида с трассерами, выдержка, отбор жидкости). Каждый этап характеризуется определенной длительностью, и для каждого этапа относительный начальный момент $\bar{t} = 0$ имеет индивидуальное значение на шкале абсолютного времени. Формально указанные уравнения и начальные условия применимы к любому этапу, но вид функций (с нижним индексом 0) в этих условиях для каждого этапа свой.

Граничные условия зависят от режима работы ГС: закачка либо отбор жидкости из пласта. Математически это обусловлено тем, что почти все дифференциальные уравнения модели, за исключением уравнений для давления, имеют гиперболический тип.

Давление в коллекторе удовлетворяет параболическому уравнению (1.3), а в трещинах МГРП – уравнениям эллиптического типа (1.15), поэтому граничные условия для них должны быть поставлены на всех участках границы. На перфорированной поверхности ГС γ считаем заданным давление p^γ ; при этом условие сопряжения по давлению на поверхности γ можно рассматривать как граничные условия Дирихле для уравнений в основном коллекторе (1.3) и в трещинах МГРП (1.15)

$$\bar{x} \in \bar{\gamma} : \bar{p}, \bar{p}_j^f = \bar{p}^\gamma(\bar{t}), j = 1..N \quad (1.28)$$

Главные граничные условия задаются и на внешнем контуре Γ

$$\bar{x} \in \bar{\Gamma} : \bar{p} = 0$$

При этом давление p_Γ следует интерпретировать как зависящее от точки на контуре Γ .

Равенство давлений в пласте и в трещинах дает условия I-го рода для уравнения (1.3)

$$\bar{x} \in \bar{F}_j^\pm : \bar{p} = \bar{p}_j^f, j = 1..N$$

На остальных участках границы: кровле $\bar{z} = \bar{Z}_T$, подошве $\bar{z} = \bar{Z}_B$, неперфорированных участках ствола скважины γ , торцах трещин $\bar{x} = \pm \bar{h}_j$, $\bar{z} = \pm \bar{H}_j$, $j = 1..N$ (совокупность этих участков границы обозначим $\bar{\Sigma}$) – ставится условие гидроизоляции, или однородное условие Неймана для давления

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{n}} \right|_{\bar{\Sigma}} = 0$$

Вместо условия () может использоваться нелокальное условие Неймана

$$\int_{\gamma} u_n^f d\gamma = - \int_{\gamma} \sigma \frac{\partial p^f}{\partial n} d\gamma = q^\gamma(t); p^f = p^\gamma(t)$$

в котором $q^\gamma(t)$ – заданный расход двухфазного флюида, а p^γ – неизвестное заранее значение давления на скважине.

В настоящем исследовании мы ограничимся частным, но практически важным случаем, когда поверхность γ гидроизолирована вне областей контакта с трещинами, и в каждый интервал времени закачки открыта лишь одна трещина с номером j . Тогда весь объем агента закачивается именно в эту трещину, и соответствующие граничные условия для уравнений (1.17), (1.18), (1.19) имеют вид

$$\bar{x} \in \bar{\gamma}_j, \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0 : s_j^f = s_j^0; \bar{c}_{ij}^{w,f} = \bar{c}_{ij}^{w,0}, i = 1..N^w; \bar{c}_{ij}^{o,f} = \bar{c}_{ij}^{o,0}, i = 1..N^o$$

Условия сопряжения на плоскостях $F_j^\pm$ по насыщенности и концентрации зависят от направления скорости фильтрации. В случае притока флюида из пласта в трещины условия ставятся для гиперболических уравнений переноса в трещинах

$$\bar{\mathbf{x}} \in \bar{F}_j^\pm, \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0 : s_j^f = s; \bar{c}_{ij}^{w,f} = \bar{c}_i^w, i = 1..N^w; \bar{c}_{ij}^{o,f} = \bar{c}_i^o, i = 1..N^o$$

Если скважина нагнетает, то условия ставятся для уравнений переноса в пласте

$$\bar{\mathbf{x}} \in \bar{F}_j^\pm, \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0 : s = s_j^f; \bar{c}_i^w = \bar{c}_{ij}^{w,f}, i = 1..N^w; \bar{c}_i^o = \bar{c}_{ij}^{o,f}, i = 1..N^o$$

На внешней границе Γ области Ω (рис. 1), на ее участках Γ_{in} , где $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$, в каждый момент времени задается водонасыщенность и нулевая концентрация индикаторов:

$$\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Gamma}_{in} : s = s_\Gamma; \bar{c}_i^w = 0, i = 1..N^w; \bar{c}_i^o = 0, i = 1..N^o$$

На основе уравнений математической модели фильтрационных процессов в пласте, в трещинах МГРП и в стволе скважины с начальными и граничными условиями, можно сформулировать две принципиально разных задачи.

1. *Прямая задача* расчета полей давления, скоростей фаз, насыщенности и концентраций компонентов, если параметры трещин МГРП (размеры δ_j, h_j, H_j , пористость m_j^f и проницаемость k_j^f) и режим закачки индикаторов $p^i(t); c_{ij}^{w,0}(t), i = 1..N^w; c_{ij}^{o,0}(t), i = 1..N^o, j = 1..N$ заданы. Данная задача может моделировать как нагнетание на этапе доставки трассера в трещины ГРП, так и отбор жидкости для оценки продуктивности скважины и построения кривых выхода концентрации индикаторов.

2. *Обратная задача* подбора таких параметров трещин МГРП (размеров δ_j, h_j , пористости m_j^f и проницаемости $k_j^f, j = 1..N$), которые бы обеспечили наилучшее совпадение рассчитанных по математической модели показателей продуктивности ГС $Q(t), Q_w(t)$ и кривых выхода концентрации индикаторов $\tilde{C}_i^w(t), i = 1..N^w, \tilde{C}_i^o(t), i = 1..N^o$ с соответствующими функциями $Q^*(t), Q_w^*(t), C_i^{w,*}(t), C_i^{o,*}(t)$, построенными по результатам замеров. Понятно, что для рассматриваемой сложной нелинейной модели любой алгоритм подбора параметров трещин будет итерационным, и каждое приближение к решению обратной задачи предполагает решение прямой задачи.

2. КРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И УПРОЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Уравнения модели содержат, а ее решение определяется следующими безразмерными параметрами — основными критериями подобия (табл. 1):

- упругоемкость $\bar{\beta}$, или безразмерное время распространения волн давления;
- параметры сорбции $\bar{\tau}_i^k, \bar{a}_i^k, \bar{A}_i^k, \bar{B}_i^k, i = 1..N^k, k \in \{o, w\}$;
- параметры трещин $M_j, \bar{h}_j, \bar{H}_j, j = 1..N$;
- радиус и длина скважины $\bar{r}_w, \bar{L}$;
- время переноса в трещинах $\epsilon_j, j = 1..N$;
- время переноса в скважине e ;
- отношение вязкостей K_μ .

В зависимости от значений данных критериев подобия, в тех случаях, когда некоторые из них можно считать малыми, целесообразно строить асимптотические упрощенные модели исследуемого процесса.

Ниже мы рассмотрим одну из таких моделей, в которой $\epsilon_j \rightarrow 0, j = 1..N, e \rightarrow 0$. Физически эта асимптотика означает, что возмущения в трещине и скважине распространяются гораздо быстрее, чем в коллекторе нефтяного пласта. Поэтому поля давления, насыщенности и концентраций в трещине и скважине можно считать квазистационарными, т.е. изменяющимися во времени синхронно с изменениями граничных условий, либо источниковых членов в соответствующих уравнениях.

2.1. Упрощенная фильтрационная модель трещины

Положим в уравнении (1.17) $\epsilon_j = 0$ и для простоты опустим черту над безразмерными величинами. Получим стационарное уравнение для водонасыщенности в трещине

Таблица 1. Значения размерных исходных параметров и основных критериев подобия процесса

Характерные значения исходных параметров					
Параметр	Размерность	Значения	Параметр	Размерность	Значения
l	м	$(2..5)10^2$	β	Па^{-1}	10^{-9}
L	м	10^3	Δp^0	Па	$10^6..10^7$
H^0	м	$10^1..10^2$	τ_i^k	с	$10^3..10^5$
r_w	м	10^{-1}	A_i^k	$\text{кг} / \text{м}^3$	$1..10^2$
δ_j	м	$10^{-3}..10^{-2}$	B_i^k	$\text{кг} / \text{м}^3$	$10^{-1}..10$
h_j	м	10^2	c^0	$\text{кг} / \text{м}^3$	$1..10^2$
m^0	—	0.1	N	—	$2..10$
m_j^f	—	0.3	$\sigma^0 = k^0 / \mu^0$	$\text{м}^2 / \text{Па} \cdot \text{с}$	$10^{-12}..10^{-10}$
k^0	м^2	$10^{-15}..10^{-13}$	$u^0 = \sigma^0 \Delta p^0 / l$	м/с	$10^{-8}..10^{-5}$
k_j^f	м^2	10^{-10}	$t^0 = lm^0 / u^0$	с	$10^6..10^9$
$\mu^0 = \mu_w$	$\text{Па} \cdot \text{с}$	10^{-3}	μ_o	$\text{Па} \cdot \text{с}$	$10^{-3}..10^{-2}$
Основные критерии подобия					
Параметр	Формула	Значения	Параметр	Формула	Значения
$\bar{\beta}$	$\beta \Delta p^0 / m^0$	$10^{-2}..10^{-1}$	$\bar{h}_j$	h_j / l	$10^{-1}..1$
$\bar{\tau}_i^k$	τ_i^k / t^0	$10^{-6}..10^{-1}$	$\bar{H}_j$	H_j / l	$10^{-1}..1$
$\bar{A}_i^k$	$A_i^k / (m^0 c^0)$	$10^{-1}..10^3$	M_j	$\delta_j k_j^f / (lk^0)$	$10^2..10^5$
$\bar{B}_i^k$	B_i^k / c^0	$10^{-3}..10$	$\bar{A}$	$2LH^0 / l^2$	$1..10$
$\bar{r}_w$	r_w / l	10^{-3}	ε_j	$m_j^f k^0 / (m^0 k_j^f)$	$10^{-5}..10^{-3}$
$\bar{L}$	L / l	10	e	$r_w / (4lNM^0 m^0)$	$10^{-9}..10^{-6}$
K_μ	μ_w / μ_o	$10^{-1}..1$			

$$-\nabla_{xz} \cdot [f(s_j^f) \mathbf{u}_j^f] = \frac{1}{2M_j} (f(s) \bar{u}_y) \Big|_{F_j^-}^{F_j^+} \quad [2.1]$$

в правой части которого стоит скорость притока воды из коллектора к берегам трещины ГРП.

Равновесное распределение насыщенности $s^f(x, z)$ в трещине ГРП в каждый момент времени должно отыскиваться из решения двумерного дифференциального уравнения (2.1), которое с учетом (1.3) можно записать в следующей форме

$$\mathbf{u}^f \cdot \nabla \phi = -q\phi + q_w, \quad \phi(x, z) = f(s^f(x, z)) \quad [2.2]$$

$$q = q^+ + q^-, \quad q_w = q^+ f^+ + q^- f^-, \quad q^+ = -\frac{1}{2M} u_y \Big|_{F^+}, \quad q^- = \frac{1}{2M} u_y \Big|_{F^-}, \quad f^\pm = f(s) \Big|_{F^\pm}$$

Функции q, q_w являются известными функциями координат (x, z) после решения задач о распределении давления и внешнего переноса насыщенности в пласте.

Построение квазистационарных полей насыщенности (2.2) приближенно заменяет собой решение гиперболического уравнения переноса насыщенности (1.17).

Упрощение уравнений для концентраций ВРТ и НРТ проводится аналогично.

2.2. Упрощенная модель гидродинамики скважины

Средняя скорость движения флюида в стволе ГС определена равенствами (1.21)

$$U(y, t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N h(y_j - y) \bar{M}_j u_{n,j}^f, 0 \leq y < L; U(L, t) = 0 \quad [2.3]$$

Обводненность (1.23) и перенос ВРТ (1.24) и НРТ (1.25) вдоль ствола ГС при $e \ll 1$ описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, интегрирование которых от y до L дает

$$\eta(y, t) = \frac{U^w}{U} = -\frac{1}{UN} \sum_{j=1}^N h(y_j - y) \bar{M}_j u_{n,j}^{w,f} \Big|_y, \quad 0 \leq y < L \quad [2.4]$$

$$C_i^w(y, t) = -\frac{1}{UN} \sum_{j=1}^N h(y_j - y) \bar{M}_j \left(c_{ij}^{w,f} u_{n,j}^{w,f} \right) \Big|_y \quad [2.5]$$

$$C_i^o(y, t) = -\frac{1}{UN} \sum_{j=1}^N h(y_j - y) \bar{M}_j \left(c_{ij}^{o,f} u_{n,j}^{o,f} \right) \Big|_y \quad [2.6]$$

Параметрическая зависимость обводненности от времени в (2.4) обусловлена нестационарностью притока воды из трещин в скважину. Связь безразмерной концентрации ВРТ и НРТ в двухфазном флюиде с концентрацией трассера в нефтяной фазе определяется соотношениями (2.26).

Безразмерные скорости суммарного потока, воды и нефти из трещины j в скважину в точке примыкания $y = y_j$ равны

$$u_{n,j}^f = -\varphi_j^f \frac{\partial p_j^f}{\partial n} \Big|_y, \quad u_{n,j}^{f,w} = f(s_j^f) u_{n,j}^f, \quad u_{n,j}^{f,o} = [1 - f(s_j^f)] u_{n,j}^f$$

2.3. Упрощенные формулы для дебитов и кривых выноса трассеров

Все расчетные формулы получаются из решений для скважины (2.3)–(2.6), взятых при $y = 0$

- дебит ГС по жидкости определяется формулами (2.3), (1.27), (1.22):

$$\tilde{Q}(t) = U(0, t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j u_{n,j}^f, \quad \bar{M}^j = \frac{M^j}{M^0}, \quad M^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M^k$$

- обводненность продукции и дебит по воде ()

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(0, t) = \frac{Q^w(t)}{\tilde{Q}(t)}, \quad Q^w(t) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j u_{n,j}^{w,f} \Big|_y$$

- дебит по нефти

$$Q^o(t) = (1 - \tilde{\eta}(t)) \tilde{Q}(t) = \tilde{Q}(t) - Q^w(t)$$

- кривые выхода ВРТ (2.5)

$$\tilde{C}_i^w = C_i^w(0, t) = \frac{Q_i^{cw}}{\bar{Q}(t)}, Q_i^{cw} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j \left(c_{ij}^{w,f} u_{n,j}^{w,f} \right) \Big|_{\gamma}, i = 1..N^w$$

- кривые выхода НРТ (2.6)

$$\tilde{C}_i^o = C_i^o(0, t) = \frac{Q_i^{co}}{\bar{Q}(t)}, Q_i^{co} = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{M}_j \left(c_{ij}^{o,f} u_{n,j}^{o,f} \right) \Big|_{\gamma}, i = 1..N^o$$

2.4. Упрощенная модель фильтрации в коллекторе вблизи трещины МГРП

Объем флюида с растворенным трассером V настолько мал (порядка 10 м^3), что при закачке в трещину мини-ГРП площадью $A_{min} = 2|F_{min}| = 2H_{min}h_{min} \sim 200 \text{ м}^2$ глубина проникновения агента внутрь коллектора оценивается величиной $X = V/A_{min} < 1 \text{ м}$, а соответствующий безразмерный параметр $\bar{X} = X/l < 10^{-2}$ при $l \sim 0 \text{ м}$ является малым. При индикаторных исследованиях, в отличие от промышленной эксплуатации ГС с МГРП, определяющее время процесса X/u^0 ограничено закачкой или выработкой этого тонкого слоя в окрестности трещины и намного меньше характерного времени развития фильтрационных потоков t^0 , см. (1.1). Поэтому можно отметить две особенности этих краткосрочных процессов: 1) каждая трещина может рассматриваться независимо от остальных; 2) давление в тонком пограничном слое у берегов трещины определяется давлением в трещине, градиент давления в ортогональной плоскости трещины F направлении намного превосходит градиент давления вдоль трещины. Это позволяет принять локально-одномерную схему фильтрации вдоль трубок тока ℓ^+ , ℓ^- в коллекторе вблизи трещины. При этом вместо трехмерных уравнений (1.2), (1.3), (1.4), (1.7), (1.9) принимаем одномерные уравнения вдоль трубок тока ℓ^+ , ℓ^- , примыкающих в каждой точке (x, z) к берегам $F_j^\pm$ трещин. Для удобства дуговые координаты вдоль трубок тока обозначим символом ℓ и запишем постановку задач пониженной размерности

$$t > 0, 0 < \ell < \lambda \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \ell}(\omega u) = 0, u = -\sigma \frac{\partial p}{\partial \ell} \\ m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \ell}(\omega f u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(m s c_i^{w,o} + a_i^{w,o}) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \ell}(\omega c_i^{w,o} u) = 0 \end{cases}$$

где λ — длина трубки тока; ω — относительная ширина трубки тока.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$t = 0, 0 \leq \ell \leq \lambda : s = s_0(\ell), c_i^{w,o} = c_{i,0}^{w,o}(\ell)$$

$$t > 0, \ell = 0 : p = p^f(x, z, t); \ell = \lambda : p = 0$$

Условия на границах для насыщенности и концентраций трассеров в зависимости от режима закачки или отбора ставятся соответственно либо на берегах трещин ($\ell = 0$), либо на контуре питания ($\ell = \lambda$).

Интенсивность притока жидкости к трещинам МГРП из пласта выражается следующим образом

$$q^\pm(x, z) = \frac{k^r}{\mu} (p_0 - p^f(x, z)) \left(\int_0^{\lambda(x,z)} \frac{d\ell}{\omega^\pm(\ell; x, z)} \right)^{-1}, |z| < h, |x| < H$$

Для замыкания постановки задач в терминах трубок тока необходимо дополнительно определить функции их длины $\lambda(x, z)$ и относительной ширины $\omega(x, z)$, которые считаются стационарными. Данные

функции могут быть построены из решения вспомогательной задачи о распределении давления и построенному по нему полю скорости фильтрации, либо заданы в форме приближенных функций для типичных областей дренирования трещин МГРП.

3. АПРОБАЦИЯ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ

Принципиальное ускорение численного моделирования двухфазной многокомпонентной фильтрации вблизи трещин МГРП с помощью изложенного подхода достигается за счет двух упрощений: предположения о квазистационарном распределении переносимых компонент в трещинах МГРП и о возможности разложения задачи фильтрации в пласте на набор одномерных задач вдоль трубок тока. Уточнение отдельных параметров модели — функций фазовых проницаемостей в пласте и в трещинах, распределения долей водной и нефтяной фаз в стволе скважины в зависимости от свойств фаз и режимов течения и др. — не ограничивает общности изложенного подхода и может повысить надежность полученного решения, не приводя, однако, к дальнейшему существенному ускорению расчетов. Поэтому ниже приведена апробация двух основных упрощений модели, позволяющих использовать предложенный подход моделирования при решении обратных задач, требующих высокой производительности вычислений.

3.1. Достоверность упрощенной модели переноса в трещинах

Для наглядной оценки достоверности упрощенной модели переноса в трещинах рассмотрим решения исходной (1.17) и квазистационарной (2.2) задач о распределении насыщенности в двух одномерных постановках, приближающих случай прямолинейно-параллельного течения в трещинах большой протяженности ($h \gg H$) и случай плоско-радиального течения в трещинах малой протяженности ($h \approx H$). Для этого выполним сравнение мгновенных распределений насыщенности в трещине в некоторый момент времени t , построенных из решения задачи заводнения в полной трехмерной постановке (1.17), с равновесными профилями насыщенности в трещине, полученными в одномерном приближении задачи. При этом функции притоков q , q_w из (2.2) задаются из трехмерной задачи по мгновенному распределению притока к трещине в тот же момент времени t . Для протяженной трещины использовалось прямолинейно-параллельное приближение. Для трещины малой протяженности использовалось плоско-радиальное приближение.

Показано, что на фоне медленного изменения внешнего распределения насыщенности в пласте перераспределение насыщенности в трещине происходит практически мгновенно (рис. 2). Таким образом, квазистационарная модель позволяет избежать численного решения задачи переноса насыщенности в области трещины, характеризующейся высокими скоростями фильтрации, что принципиально упрощает и ускоряет построение численного решения задачи двухфазной фильтрации в области дренирования трещин, повышая его устойчивость.

3.2. Надежность и быстроедействие модели трубок тока в пласте

Для выяснения преимуществ понижения размерности задач переноса в пласте за счет перехода к модели трубок тока рассматривались тестовые примеры.

В первом примере сравнивалось численное решение задачи о двухфазной фильтрации в однородном пласте вблизи одиночной трещины бесконечной проницаемости, полученное в исходной пространственной постановке (верхний индекс e , exact) и по упрощенной схеме модели трубок тока. Сравнение выполнялось по затраченному на решение машинному времени и по величинам средних за период моделирования отклонений дебита скважины и обводненности:

$$e_Q^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (\tilde{Q} - \tilde{Q}^e)^2 dt, \quad e_F^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (\tilde{\eta} - \tilde{\eta}^e)^2 dt$$

На рис. 3 показана сходимость решения задачи в исходной постановке по числу N_{xy} элементов расчетной сетки с одновременным ростом длительности расчета T , равной затрачиваемому машинному времени, отнесенному к максимальной наблюдаемой величине. Там же приведены аналогичные результаты для упрощенной модели в зависимости от числа N_{ST} трубок тока на одном берегу половины трещины.

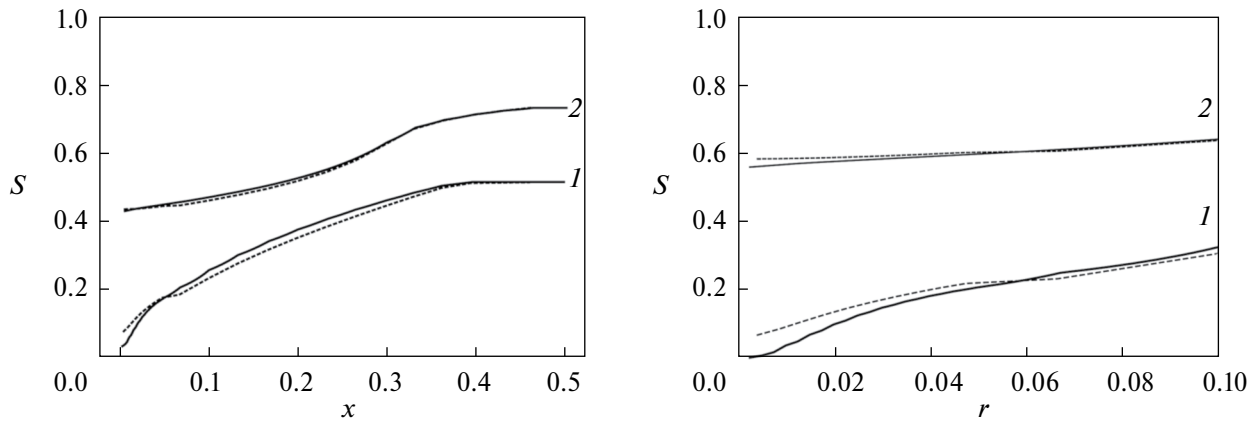


Рис. 2. Мгновенный профиль насыщенности в протяженной ($h = 10H$) (слева) и в малой ($h = H$) (справа) трещинах: сплошная линия – точное решение; пунктирная – равновесное решение в одномерном приближении; 1 – $M = 0,01$, 2 – $M = 10$.

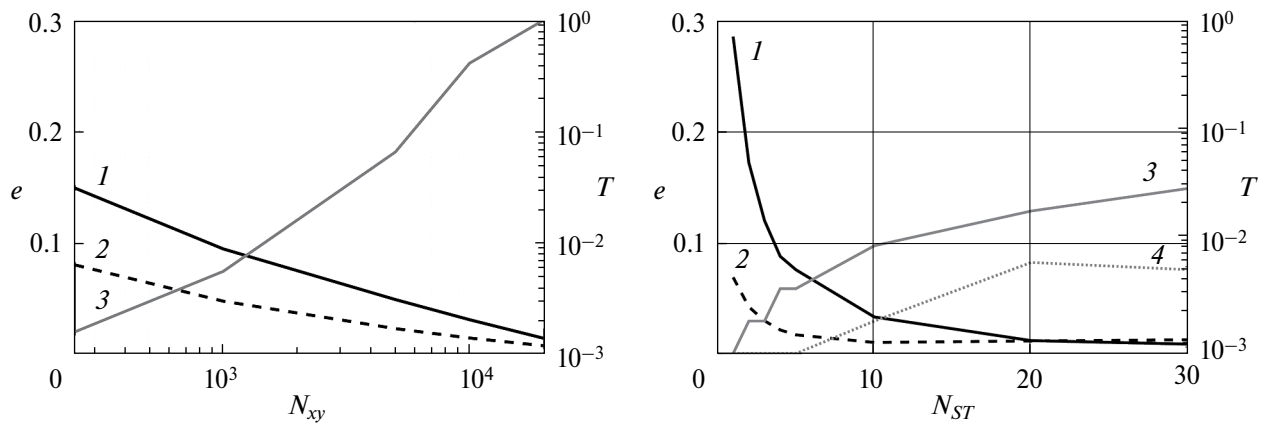


Рис. 3. Сходимость и быстродействие численного решения в исходной (слева) и упрощенной (справа) постановках: 1, 2 – погрешность расчета дебита и обводненности; 3, 4 – длительность моделирования без и с использованием параллельных вычислений.

Можно заключить, что изменчивость структуры линий тока, связанная с продвижением фронта насыщенности, незначительно влияет на погрешность упрощенной модели. При этом эффект изменения гидропроводности, приводящий к существенно нестационарному притоку, учитывается упрощенной моделью с достаточно высоким уровнем точности.

Разложение пространственной задачи на серию одномерных задач при допустимой погрешности моделирования около 1% позволяет сократить время численного решения почти на 2 порядка. Дополнительным преимуществом упрощенной модели является возможность независимого решения задач в отдельных трубках тока, за счет чего время численного моделирования может быть кардинально снижено с помощью аппарата параллельных вычислений.

Во втором примере моделировался аналогичный процесс в случае многостадийного ГРП с произвольной геометрией трещин. Вдоль каждой трещины строилась серия фиксированных трубок тока в количестве N_{ST} . С помощью упрощенной модели было получено вполне удовлетворительное воспроизведение динамики суммарного дебита и обводненности скважины (рис. 4). Ускорение счета по сравнению с исходной постановкой составило порядка 100 раз в последовательном режиме и порядка 1000 раз в режиме параллельных вычислений.

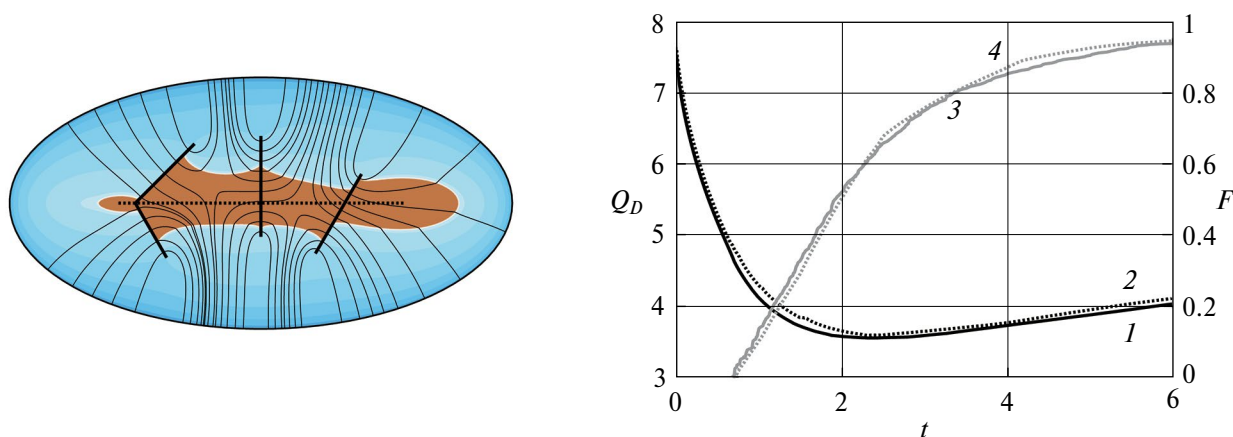


Рис. 4. Произвольная конфигурация трещин МГРП: (слева) – структура линий тока и распределение насыщенности; (справа) – приближенное (1, 3) и точное (2, 4) решение: дебит (1, 2), обводненность (3, 4)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена специальная математическая модель для воспроизведения многофазного многокомпонентного фильтрационного течения вблизи трещин многозонного гидравлического разрыва пласта вдоль горизонтальной скважины. Формулировка модели получена на основе теории подобия и анализа размерностей исходной трехмерной математической модели течения. С помощью оценки характерных величин критериев подобия задачи выполнено упрощение математической модели. Упрощена задача переноса смеси в скважине. Задачи переноса в трещинах гидроразрыва заменены на задачи о квазистационарных полях насыщенности и концентраций. В результате значительно повышена устойчивость решения по сравнению с сопряжением задач переноса в пласте и в трещинах, характеризующихся отличием скоростей течения на несколько порядков величин. С помощью модели трубок тока выполнена декомпозиция пространственной задачи о переносе фаз и компонент примеси в пласте на набор независимых одномерных задач. Такое понижение размерности решаемой задачи позволяет до двух порядков сократить необходимое для ее решения машинное время. При сохранении достаточной точности решения это обеспечивает возможность применения прямого численного моделирования фильтрационных течений с учетом их истинной пространственной структуры для решения обратной задачи интерпретации индикаторных исследований фильтрационно-емкостных параметров трещин. Выполненные оценки достоверности использованных допущений и упрощений демонстрируют применимость предложенной модели для вычисления основных гидродинамических параметров процесса.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН (Филиал ФГУ Научно-исследовательский институт системного анализа РАН) в рамках государственного задания (тема FNEF-2022-0014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gidley J.L., Holditch S.A., Nierode D.E., Veatch R.W.* Recent Advances in Hydraulic Fracturing. 318. Monograph, SPE, 1989.
2. *Ozkan E., Brown M., Raghavan R., Kazemi H.* Comparison of fractured horizontal-well performance in conventional and unconventional reservoirs. Paper presented at the SPE Western Regional Meeting, San Jose, California, March 2009: 345–360.
doi: <https://doi.org/10.2118/121290-MS>
3. *Wei Y., Economides M.J.* Transverse hydraulic fractures from a horizontal well // Proceedings. Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, October 2005 25–36.
doi: <https://doi.org/10.2118/94671-MS>

4. *Cipolla C.L., Warpinski N.R., Mayerhofer M.J., Lolon E.P., Vincent M.C.* The relationship between fracture complexity, reservoir properties, and fracture treatment design // SPE Prod & Oper. 2010. V. 25. P. 438–452.
doi: <https://doi.org/10.2118/115769-PA>
5. *Meyer B.R., Bazan L.W., Jacot R.H., Lattibeaudiere M.G.* Optimization of multiple transverse hydraulic fractures in horizontal wellbores. // SPE Unconventional Gas Conference, Pittsburgh, PA, United States, February. 2010.
doi: <https://doi.org/10.2118/131732-MS>
6. *Asadi M., Woodroof R.A., Dumas J.D.* Post-frac analysis based on flowback results using chemical frac-tracers // International Petroleum Technology Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, December 2008.
doi: <https://doi.org/10.2523/IPTC-11891-MS>
7. *Dang A.* Post-treatment horizontal hydraulic fracture modeling with integrated chemical tracer analysis, a case study // Technical Conference and Exhibition, Dubai, UAE, September 2016.
doi: <https://doi.org/10.2118/184498-STU>
8. *Gardien C.J., Pope G.A., Hi, A.D.* Hydraulic fracture diagnosis using chemical tracers. // Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, October 1996. P. 925–932.
doi: <https://doi.org/10.2118/36675-MS>
9. *Goswick R.A., Larue J.L.* Utilizing oil soluble tracers to understand stimulation efficiency along the lateral // Annual Technical Conference and Exhibition, Amsterdam, The Netherlands, October. 2014. P. 4608–4617.
doi: <https://doi.org/10.2118/170929-MS>
10. *King G.E., Leonard D.* Utilizing fluid and proppant tracer results to analyze multi-fractured well flow back in shales. // Hydraulic Fracturing Technology Conference, The Woodlands, Texas, USA, January .2011. P. 146–164.
doi: <https://doi.org/10.2118/140105-MS>
11. *Mazo A.B., Sattarov R.I., Khamidullin M.R., Potashev K.A., Trifonof T.V.* Interpretation of Indicator Studies of Multistage Fracturing // SPE Russian Petroleum Technology Conference, Moscow, October 2017.
doi: <https://doi.org/10.2118/187762-MS>
12. *Spencer J., Bucior D., Catlett R., Lolon E.* Evaluation of horizontal wells in the Eagle Ford using oil-based chemical tracer technology to optimize stimulation design. // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, The Woodlands, Texas, USA, February 2013.
doi: <https://doi.org/10.2118/163846-MS>
13. *Long J.C.S., Remer J.S., Wilson C.R., Witherspoon P.A.* Porous Media Equivalents for Networks of Discontinuous Fractures // Water Resources Research. 1982. V. 18. P. 645–658.
doi: <https://doi.org/10.1029/WR018i003p00645>
14. *Robinson P.C.* Connectivity, flow and transport in network models of fractured media // AERE Rep. TP1072, Theor. Phys. Div., Harwell, Oxfordshire, United Kingdom, 1984.
15. *Hyman J.D., Karra S., Makedonska N., Gabel C.W., Painter S.L., Viswanathan H.S.* A discrete Fracture network framework for modeling subsurface flow and transport // Computers & Geoscience, 2015. V. 84. P. 10–19.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2015.08.001>
16. *Xing F., Masson R., Lopez S.* Parallel vertex approximate gradient discretization of hybrid dimensional Darcy flow and transport in discrete fracture networks. Computer Geoscience. 2017. V. 21. P. 595–617.
doi: <https://doi.org/10.1007/s10596-016-9606-z>
17. *Frih N., Martin V., Roberts J.E., Saïda A.* Modeling fractures as interfaces with nonmatching grids// Computer Geosciences. 2012. V. 16. P. 1043–1060.
doi: <https://doi.org/10.1007/s10596-012-9302-6>
18. *Jiami J., Younis R.M.* Hybrid Coupled Discrete-Fracture/Matrix and Multicontinuum Models for Unconventional-Reservoir Simulation // SPE J.2016. V. 21. P. 1009–1027.
doi: <https://doi.org/10.2118/178430-PA>
19. *Maryška J., Severýn O., Vohralík M.* Numerical simulation of fracture flow with a mixed-hybrid FEM stochastic discrete fracture network model // Computer Geosciences. 2005. V. 8. P. 217–234.
doi: <https://doi.org/10.1007/s10596-005-0152-3>
20. *Xia Y., Jin Y., Chen M., Chen K.P.* An Enriched Approach for Modeling Multiscale Discrete-Fracture/Matrix Interaction for Unconventional-Reservoir Simulations // SPE J. 2019. V. 24. P. 349–374.
doi: <https://doi.org/10.2118/194012-PA>
21. *Tan X.-H., Jiang L., Li X.-P., Zhang B.-J., Li X.-C.* Flow model of a multi-stage hydraulic fractured horizontal well based on tree-shaped fractal fracture networks // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2018. V. 169: 494–503.
doi: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.06.008>

22. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
23. Мазо А.Б., Поташев К.А., Хамидуллин М.Р. Фильтрационная модель притока жидкости к горизонтальной скважине с многостадийным гидравлическим разрывом пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки. 2015. Т. 157. № 4. С. 133–148.
24. Atmaca S., Sarica C., Zhang H.-Q., Al-Sarkhi A.S. Characterization of Oil/Water Flows in Inclined Pipes// SPE Projects, Facilities & Construction. 2009. V. 4(02). P. 41–46.
doi: 10.2118/115485-pa
25. Mazo A.B., Khamidullin M.R., Potashev K.A., Modeling of the Two-Phase Flow Through the Hydraulic Fractures in an Oil Reservoir // Lobachevskii J Math. 2023. V. 44. P. 1700–1706.
26. Potashev K.A., Mazo A.B. Numerical modeling of local effects on the petroleum reservoir using fixed streamtubes for typical waterflooding schemes // Georesursy = Georesources. 2020. V. 22(4). P. 70–78.
doi: <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>
27. Поташев К.А., Мазо А.Б., Мухина М.В., Ураимов А.А., Маклаков Д.В., Хамидуллин М.Р. Моделирование притока пластового флюида к трещинам бесконечной проницаемости многозонного гидроразрыва пласта с помощью трубок тока // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. V. 164(1). P. 101–121.
doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.101-121

Mathematical Model of Water- and Oil-Soluble Tracers Transfer in Studying Multistage Hydraulic Fracturing

A. B. Mazo^{a,*}, M. R. Khamidullin^{b,**}, K. A. Potashev^{a,***}, and A. A. Uraimov^{b,****}

^a*Lobachevskii Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kazan, Russia*

^b*Scientific Research Center “Kurchatov Institute,” Moscow, Russia*

*e-mail: abmazo1956@mail.com

**e-mail: marseille.ksu@gmail.com

***e-mail: kpotashev@mail.ru

****e-mail: aaauraimov@gmail.com

A simplified mathematical model of two-phase multicomponent flow in the reservoir – multistage hydraulic fractures – horizontal well system is proposed. The formulation of transport problems in the well and in hydraulic fractures is simplified based on the dimensional analysis and similarity theory. The possibility of transition to a quasi-steady-state problem of distribution of the mixture components in high-permeability hydraulic fractures is shown. The dimension of the problem in reservoir is reduced by decomposing the problem into a set of problems in independent fixed stream tubes. For numerical solution of the problem, the resulting reduction in computer time reaches two orders of magnitude and can be further reduced by using parallel computing. Accelerating the solution of the direct problem is fundamentally necessary for the possibility of solving the inverse problem of identifying the porosity and permeability properties of fractures from the results of interpretation of tracer studies.

Keywords: petroleum reservoir, multistage hydraulic fracturing, horizontal well, multi-component flow through porous medium, high-performance computing, analytical solution, numerical simulation, stream tubes.

УДК 532.517.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РИХТМАЙЕРА–МЕШКОВА И ПЕРЕХОДА К РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2024 г. В. В. Змушко*, М. И. Полищук**, А. Н. Разин***, А. А. Синельникова****, А. Н. Щербakov*****

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ экспериментальной физики, Нижегородская обл., Саров, Россия

*e-mail: VVZmushko@vniief.ru

**e-mail: MIPolischuk@vniief.ru

***e-mail: ANRazin@vniief.ru

****e-mail: AnASinelnikova@vniief.ru

*****e-mail: ANScherbakov@vniief.ru

Поступила в редакцию 31.10.2023 г.

После доработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 25.12.2023 г.

Предложен критерий для оценки момента перехода от этапа развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова к развитой турбулентности на шероховатых контактных границах слоистых газовых систем. Выполнено моделирование ряда лабораторных экспериментов. В первой серии экспериментов неустойчивость Рихтмайера–Мешкова возникает на двух контактных границах тонкого газового слоя после прохождения ударной волны. В опытах тонкий слой (гофрированная газовая занавеска) формируется путем прокачки тяжелого газа (SF_6) через сопловой блок поперек ударной трубы, заполненной воздухом. Во второй серии опытов ударная волна проходит через возмущенную по синусоиде контактную границу двух разноплотных газов (слойки воздух– SF_6 и He– SF_6). В этой серии опытов торец трубы либо соединен с атмосферой, либо закрыт жесткой стенкой. Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и перехода к турбулентному перемешиванию выполнено с использованием неявного метода крупных вихрей (ILES) по методике МИМОЗА. Проведено сравнение с имеющейся экспериментальной информацией.

Ключевые слова: газовые слойки, контактные границы, ударные волны, неустойчивость, переход к развитой турбулентности, математическое моделирование.

DOI: 10.31857/S1024708424030068, EDN: PFUKLI

Численное моделирование турбулентного перемешивания (ТП), возникающего на шероховатых контактных границах (КГ) слоистых систем после прохождения ударных волн (УВ), представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Некоторые математические вопросы моделирования остаются до сих пор не решенными, что не позволяет с необходимой точностью рассчитывать течения, возникающие во многих задачах физики высоких концентраций энергии, в частности, в задачах по управляемому термоядерному синтезу и ряде других научно-технических задач [1–4].

Отсутствие универсальной численной стратегии, пригодной для описания всех или, по крайней мере, многих турбулентных течений, привело к разработке нескольких расчетных методологий. Широкое применение на практике нашла ILES (implicit large eddy simulation) методология [5]. К настоящему времени не сложилось строгого определения ILES-методологии. В работе будем придерживаться следующего определения ILES-методологии расчета задач: а) для интегрирования газодинамических уравнений используются методы повышенного порядка точности, б) обеспечивается монотонность численного решения, в) присутствуют алгоритмы для отслеживания движения КГ и учитывающие возможное перемешивание соприкасающихся веществ.

В последние годы ILES-методологии в РФЯЦ-ВНИИЭФ уделяется все большее внимание. Так в [6, 7] представлены результаты моделирования ТП, возникающего в трехслойной газовой системе в результате развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и Рихтмайера–Мешкова после прохождения УВ через контактные границы. В работах [8–10] изучалось влияние начальной шероховатости КГ и интенсивности

УВ на развитие неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. В [11] на примере расчета распада вихря Тейлора–Грина проведено численное исследование влияния диссипативных погрешностей методики на скорость изменения кинетической энергии. Тестовые задачи для расчета газодинамических течений с учетом ТП представлены в [12].

Одним из самых сложных вопросов моделирования турбулентных течений остается вопрос перехода от этапа развития неустойчивости к ТП. До настоящего времени этому вопросу не уделялось должного внимания. И связано это с отсутствием каких-либо достоверных теоретических моделей и информативных экспериментальных данных по данному вопросу, что не позволяет оценить точность моделирования момента перехода к ТП, возникающего на КГ слоев после прохождения УВ. В работах [13–15] приведена экспериментальная информация, которая является одной из немногих пригодных для тестирования численных моделей, претендующих на расчет развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и моделирование перехода к ТП. Ниже экспериментальная информация [13–15] используется при отработке технологии расчета развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием ILES стратегии моделирования, реализованной в методике МИМОЗА [16].

В работе представлены результаты моделирования двух серий опытов. В первой серии в ударной трубе, заполненной воздухом, поперек трубы с помощью решетки сопел создается “гофрированная занавеска” из тяжелого газа (трехслойная система). В первой задаче этой серии УВ формируется на одном торце трубы, взаимодействует с занавеской, вызывая развитие неустойчивости на двух шероховатых КГ, проходит трубу и выходит через другой торец трубы в открытое пространство. Во второй задаче УВ после взаимодействия с занавеской выходит на закрытый жесткой стенкой торец, отражается от него и возвращается на занавеску, ускоряя перемешивание на границах тонкого слоя.

Во второй серии опытов в ударной трубе формируется двухслойная система с возмущенной по синусоиде КГ. Она разделяет либо воздух и SF_6 , либо He и SF_6 . В опытах на линейной и нелинейной стадиях развития неустойчивости замерялась скорость роста амплитуды возмущений на КГ после прохождения УВ. Кроме того, для нескольких моментов времени (на линейной и слабо нелинейной стадиях) приводятся формы струй.

Расчеты всех задач выполнены в 2D-постановке по методике МИМОЗА путем интегрирования уравнений Эйлера (используется однофазное приближение) [17] и применения алгоритма отслеживания динамики КГ. Предполагается, что турбулентность не оказывает заметного влияния на характеристики основного течения. Удовлетворительное согласие полученных расчетных и экспериментальных данных подтверждает правильность сделанного предположения.

1. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Расчетная методика основана на лагранжево-эйлеровой стратегии и выделении веществ концентрациями. Такой подход является эффективным при моделировании задач механики сплошной среды с большими деформациями.

Расчет счетного шага состоит из двух этапов: на первом этапе выполняется интегрирование уравнений Эйлера, записанных в лагранжевых координатах, на втором этапе производится пересчет полученных сеточных значений на первоначальную разностную сетку с квадратными ячейками [18]. Для повышения точности вычислений используется реконструкция потоков на грани ячеек [18].

На лагранжевом этапе расчета границы ячеек сетки перемещаются со скоростью вещества, массы ячеек не изменяются. Интегрирование системы уравнений выполняется на разнесенной разностной сетке. Термодинамические параметры задачи относятся к центру счетной ячейки, координаты и компоненты скорости — к узлам. Используется полностью консервативная разностная схема «предиктор–корректор», аналогичная [19]. С целью предотвращения размытия КГ между веществами применяется алгоритм их выделения с помощью концентраций [18]. Для подавления паразитических осцилляций численного решения в окрестности больших градиентов газодинамических величин вводится искусственная вязкость, являющаяся суммой квадратичной [17] и линейной вязкостей. В смешанных ячейках (ячейках, содержащих несколько веществ) давление вычисляется покомпонентно с использованием уравнения состояния идеального газа, а затем усредняется с учетом объемных концентраций веществ.

Расчет многокомпонентной сплошной среды осуществляется посредством метода отслеживания КГ — VolumeofFluid (VoF) [18, 20].

Метод Volume-of-Fluid (VoF).

VoF-метод является одномерным алгоритмом отслеживания КГ. Многомерность достигается за счет принципа расщепления по координатным направлениям. Например, для задач с двумерной геометрией вычисление потоков объема на новую разностную сетку выполняется сначала вдоль строк, затем вдоль столбцов (применяется чередование порядка в процессе счета). Поток объема вещества в счетные ячейки новой разностной сетки вычисляется способом, основанным на анализе объемных концентраций ее прямых соседей (вдоль строки/столбца). Данный подход указывает на зависимость алгоритма метода VoF от объемных концентраций вещества в соседних счетных ячейках.

Другая особенность VoF-методов заключается в том, что при наличии в смешанной ячейке более двух компонентов, результат реконструкции КГ зависит от порядка обработки веществ в алгоритме. Неудачный порядок обработки веществ может приводить к преждевременному переносу компонента в соседние ячейки, формируя по сути искусственное (нефизичное) перемешивание веществ в расчете.

Вычисление числа Рейнольдса, масштабов турбулентности и определение критерия перехода к развитой турбулентности.

При вычислении масштабов длины неоднородностей, формирующихся в поле течения в расчетах, будем использовать число Рейнольдса $Re = u^* \cdot \delta / \nu_m$ (u^* – скорость, δ – длина, ν_m – кинематическая молекулярная вязкость жидкости), которое определяет отношение сил инерции к силам вязкости. В численных расчетах величина числа Рейнольдса существенным образом определяется выбором u^* , δ и зависит от класса рассматриваемых течений [21].

Анализ перехода к турбулентности в стационарных течениях рассматривался, в частности, в работе [21]. Детали перехода к турбулентному перемешиванию в нестационарных течениях приведены в работе [22]. Будем использовать значение числа Рейнольдса в качестве одного из условий при оценке масштабов вихревых образований (неоднородностей) с целью определения момента формирования развитой турбулентности.

В развитом турбулентном течении присутствуют все масштабы (линейные размеры) вихревых образований [22, 23]

$$\lambda_K < \lambda_v < \lambda < \lambda_L < \delta$$

Здесь $\lambda_K(t) = \delta \cdot Re^{-0.75}$ – колмогоровский масштаб (масштаб диссипации кинетической энергии), $\lambda_v(t) = c_v \lambda_K(t)$ – внутренний вязкий масштаб (нижняя граница инерционного интервала), $\lambda_L(t) = c_L \delta Re^{-0.5}$ – линейный масштаб Липмана–Тейлора (верхняя граница инерционного интервала), $\lambda_D(t) = c_d (\nu \cdot t)^{0.5}$ – ламинарный диффузионный масштаб (толщина пограничного слоя, предшествующего переходу к турбулентности), λ – линейный масштаб вихревых образований в инерционном интервале, c_v, c_L, c_d – параметры, которые определяются в экспериментах. В расчетах принято $c_v = 50$, $c_L = 5$, $c_d = 2.5$.

Из определения масштабов следует, что инерционный интервал начинает формироваться при числе Рейнольдса $Re \approx 10^4$ (при $Re = 10^4$ имеем $\lambda_L = \lambda_v$, т.е. верхняя и нижняя границы инерционного интервала совпадают) и его длина растет с увеличением числа Рейнольдса. Таким образом, развитая турбулентность наблюдается при числах Рейнольдса $Re \sim 10^4$ и выше, а в инерционном интервале для энергетического спектра выполняется закон пяти третей, впервые указанный Обуховым в 1941 г. В [22] на основании экспериментальной информации, численных и теоретических исследований для нестационарных течений принято, что переход к развитой турбулентности происходит в случае выполнения двух условий

$$Re > 10^4, \lambda_{\min} > \lambda_v$$

Здесь $\lambda_{\min} = \min(\lambda_D, \lambda_L)$. Эти условия используются ниже при оценке момента формирования развитой турбулентности в проведенных расчетах.

В данной работе при вычислении числа Рейнольдса масштаб длины определяется по выражению $\delta = a_s + a_b$ (a_s, a_b – амплитуды струй и пузырей), а в качестве скорости используется соотношение $u^* = \alpha U$, где U – скорость, которую приобретает контактная граница после прохождения УВ, параметр $\alpha = 0.1$ задает интенсивность пульсаций скорости на КГ [4].

При вычислении числа $Re = u^* \cdot \delta / \nu_m$ для кинематической молекулярной вязкости SF_6 , воздуха и He принято $\nu_m^{SF_6} = 2.54 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 \cdot \text{мс}^{-1}$, $\nu_m^{Air} = 15.4 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 \cdot \text{мс}^{-1}$, $\nu_m^{He} = 118.0 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 \cdot \text{мс}^{-1}$. Для вязкости смеси 50% Air + 50% SF_6 положим $\nu_m^{AS} = 4.65 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 \cdot \text{мс}^{-1}$, а среднюю вязкость смеси 50% He + 50% SF_6 определим согласно [24]: $\nu_m^{HS} = 5.83 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2 \cdot \text{мс}^{-1}$.

При вычислении термодинамических параметров в расчетах используется уравнение состояния идеального газа.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Трехслойная система (газовая занавеска)

На рис. 1 приведена схема постановки проведенных расчетов. В опытах газовая занавеска формируется путем прокачки газа со скоростью ~ 10 см/сек через сопловой блок поперек ударной трубы [25]. Центры сопел ($x = 0$) расположены на расстоянии 3.6 мм друг от друга, диаметр сопел 3.0 мм. В расчетах ширина области решения (направление y) выбрана равной 18 мм, чтобы поперек области расположить 5 струй с длиной волны $\lambda = 3.6$ мм (в эксперименте занавеска состояла из 21 струи). Параметры воздуха, окружающего занавеску: $\rho = 0.001 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ — плотность, $p = 0.8 \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{мс}^{-2}$ — давление, $\gamma = 1.4$ — показатель адиабаты. В опытах газовая занавеска содержит $\sim 45\%$ SF_6 , 43% Air и 12% паров ацетона. В расчетах смесь моделируется однородным газом с $\rho = 0.003 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, $\gamma = 1.263$, скорость газа в занавеске полагается нулевой, $p = 0.8 \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{мс}^{-2}$.

Ударная волна формируется на правой границе области (рис. 1), последовательно проходит КГ1, КГ2 и уходит налево. Для описания в расчетах начального состояния тонкого слоя (смеси SF_6 и Air) используется выражение [15], задающее профиль концентрации SF_6 в занавеске на начальный момент времени:

$$C_{SF_6} = \frac{c_1 [1 + c_2 \cos(ky)]}{1 + c_2} \exp \left[-\frac{x^2 \alpha^2}{(1 + \beta \cos(ky))^2} \right]$$

Здесь C_{SF_6} — объемная доля тяжелого газа (SF_6). В проведенных расчетах задаются параметры $c_1 = 0.42$ — максимум концентрации, $k = 17.44 \text{ см}^{-1}$ — волновое число возмущения, $c_2 = 0.2$, $\alpha = 7 \text{ см}^{-1}$, $\beta = -0.04$.

Выполнено два расчета с числом Маха $M = 1.2$. В первом расчете левая граница области решения соединяется с атмосферой (УВ к моменту окончания расчета не возвращается на занавеску). В расчете 2 левая граница (жесткая стенка) удалена от центра занавески на расстояние $L = 13.7 \text{ см}$. В этом расчете изучается влияние отраженной от левой границы УВ на переход к турбулентности.

Граничные условия: на боковых стенках расчетной области ставятся периодические условия, на правой границе задаются газодинамические параметры, соответствующие величинам за фронтом УВ.

Двухслойные системы

Выполнено 4 расчета со слойкой воздух — SF_6 и 2 расчета с He — SF_6 . При моделировании задач варьировались числа Маха падающей на КГ ударной волны, отношение плотностей на КГ, начальные шероховатости КГ.

Опыт Jacobs—Krivets [26]

Схема постановки расчета опыта приведена на рис. 2. Ударная волна с числом Маха $M = 1.3$ формируется на правой границе области и движется налево. После прохождения УВ через КГ на ней развивается неустойчивость Рихтмайера—Мешкова. В геометрии, соответствующей опыту, выполнено четыре расчета задачи. В первом расчете (расчет опыта Jacobs—Krivets) левый торец трубы соединен с атмосферой (УВ не возвращается на КГ). В опытах получены фотокадры развития струй на ряд моментов времени. На момент окончания опытов перехода к перемешиванию не наблюдается.

Другие три расчета проведены в дополнение к расчету опыта. Они направлены на изучение перехода к турбулентности в зависимости от числа Маха УВ. При наличии взаимодействия УВ, отраженной от

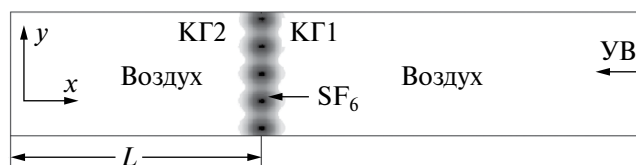


Рис. 1. Схема постановки расчетов с газовой занавеской: x, y – пространственные координаты, $УВ$ – ударная волна, $КГ1, КГ2$ – контактные границы, L – расстояние от центра занавески до левого торца трубы.

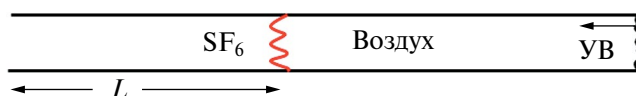


Рис. 2. Схема постановки расчетов с двухслойной системой.

торца, с возмущенной КГ по ним нет экспериментальных данных. Два расчета выполнены с открытым торцом при числах Маха ударной волны $M = 2$ и $M = 3$. В последнем расчете левый торец закрыт стенкой, $L = 61.5$ см. В расчете с жесткой стенкой отраженная от левого торца $УВ$ выходит на КГ, ускоряя переход к ТП.

Во всех расчетах развития неустойчивости в двухслойной системе начальное возмущение КГ задается соотношением:

$$x = x_0 + a_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right)$$

Здесь x_0 – начальное положение КГ (координата x направлена вдоль трубы, y – по сечению трубы). В расчетах длина волны начального синусоидального возмущения и амплитуда принимались равными $\lambda = 5.9$ см, $a_0 = 0.29$ см. Параметры SF_6 : $\rho = 0.00524$ г/см³, $\gamma = 1.095$, параметры воздуха: $\rho = 0.00129$ г/см³, $\gamma = 1.28$. В начальный момент система покоится при атмосферном давлении.

Граничные условия: периодические условия на стенках трубы, на входе в трубу задаются газодинамические величины, соответствующие значениям за фронтом $УВ$. Разностная сетка в расчетах составлена из квадратных ячеек с длиной стороны $h = 0.02$ см (линейный размер ячейки выбран по результатам предварительных расчетов на сходимость решения).

Две задачи Motl с соавторами [27]

Как и в опыте Jacobs, контактная граница двух газов возмущена по синусоиде путем покачивания вертикальной ударной трубы в горизонтальном направлении. В отличие от опыта Jacobs-Krivets воздух заменен на He, чтобы повысить перепад плотностей на КГ.

В первой задаче число Маха ударной волны $M = 1.13$. Параметры He: $\rho = 0.000167$ г/см³, $\gamma = 1.63$, параметры SF_6 : $\rho = 0.0065$ г/см³, $\gamma = 1.094$. Начальное давление в газах $p = 0.98$ г/(см²·мс²). Длина волны начального синусоидального возмущения и амплитуда принимались равными $\lambda = 16.94$ см, $a_0 = 1.5$ см (согласно эксперименту). Во второй задаче число Маха $M = 1.95$. Длина волны начального синусоидального возмущения и амплитуда принимались равными $\lambda = 16.7$ см, $a_0 = 1.36$ см (как в эксперименте). В обоих расчетах правый торец трубы соединен с атмосферой, контактная граница располагалась при $x = 0$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

Природа перехода к ТП при развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова не изучена. Не существует развитой теории описывающей все стадии эволюции неустойчивости и последующего перехода к перемешиванию. Визуальный анализ имеющейся экспериментальной информации указывает на три стадии в эволюции неустойчивости. На первой стадии образуются крупномасштабные

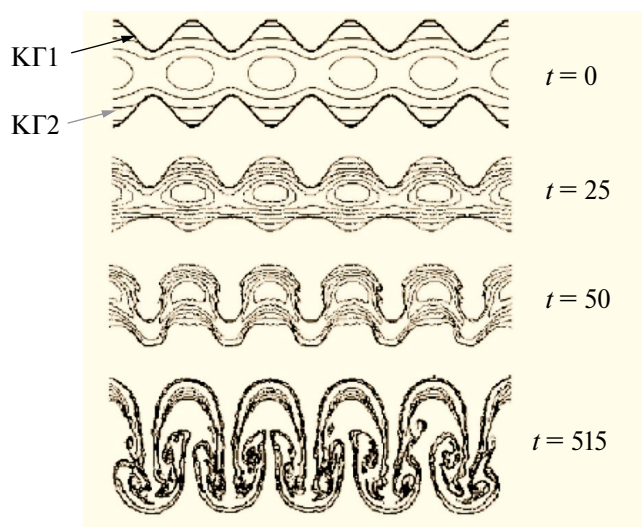


Рис. 3. Изолинии плотности, методика МИМОЗА, время в мкс.

образования — пузыри и струи. На этой стадии турбулентность отсутствует. На второй стадии у струй в результате обтекания носика легким веществом формируются грибоподобные шляпки. Края шляпки закручиваются, образуя разнонаправленные мелкомасштабные вихри вдоль ножки струи. Таким образом на второй стадии в поле течения существуют как крупные, так и мелкие масштабы. Этот отрезок времени будем считать первым (локальным) переходом к турбулентному перемешиванию. В процессе дальнейшего развития струй наступает третья стадия, на которой шляпки и ножки струй разрушаются вследствие взаимодействия вихревых образований различных размеров (в отсутствие подвода энергии происходит разрушение крупных вихревых образований). Будем называть эту стадию переходом к глобальному ТП.

Приведенные ниже результаты двух расчетов занавески получены на разностной сетке с квадратными ячейками со стороной $h = 0.0025$ см.

Расчет 1. Левая граница задачи — выход в атмосферу

На рис. 3 приведены изолинии плотности на 4 момента времени, полученные с использованием алгоритма VoF. В расчете УВ сначала проходит КГ1 затем КГ2.

Момент времени $t = 0$ соответствует времени прихода УВ на КГ1. При $t = 25$ мкс УВ прошла КГ2 и на ней начинается фазовая инверсия (сдвиг фазы на 180° под действием волны разрежения, движущейся от КГ2 к КГ1), которая заканчивается к моменту $t \approx 50$ мкс. Далее размер струй увеличивается, формируется грибоподобная шляпка и по краям шляпки возникают разнонаправленные вихревые образования. На приведенные моменты времени глобального перехода к ТП не наблюдается.

На рис. 4 на ряд моментов времени приведены изоповерхности плотности, которые демонстрируют картину развития неустойчивости (рост пузырей и струй) в опыте [13] и в расчете. Приведенные расчетные данные свидетельствуют, что вплоть до момента времени $t = 1115$ мкс в поле течения присутствуют крупномасштабные образования и разнонаправленные вихри по обеим сторонам ножки струи. Это указывает на отсутствие глобального перехода к ТП. Отмечаем удовлетворительное согласование результатов опытов и расчетов как по скорости роста пузырей, так и пройденному занавеской пути.

Расчет 2. Левая граница задачи — жесткая стенка, $L = 13.7$ см

В отличие от расчета 1 в данном расчете левая граница (торец трубы) — жесткая стенка. Такая постановка задачи позволяет проследить за воздействием отраженной от левой границы УВ на развитие неустойчивости. По результатам расчета установлено, что УВ отражается от торца в момент времени $t \approx 390$ мкс и возвращается на занавеску при $t \approx 665$ мкс.

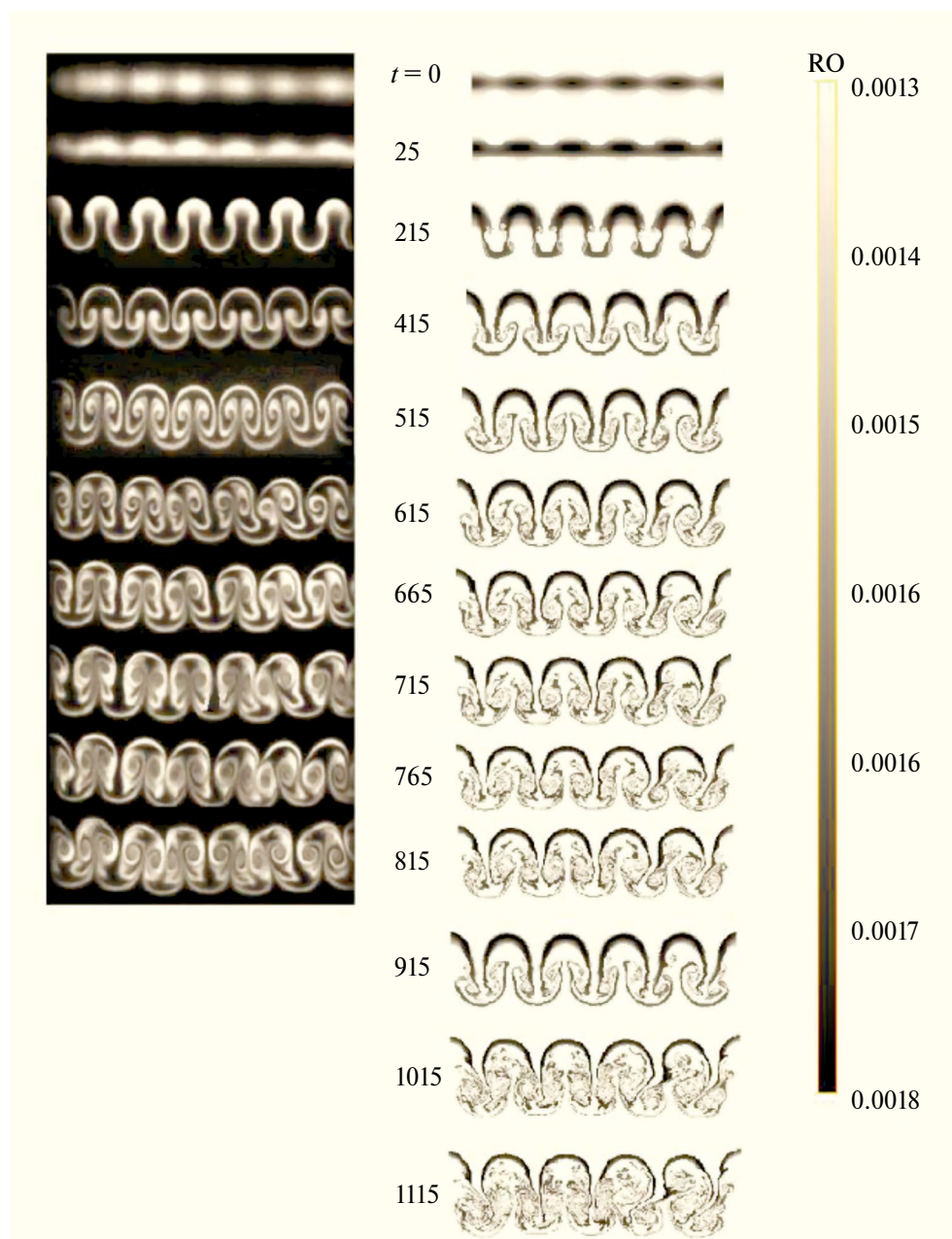


Рис. 4. Эволюция начального возмущения в опыте [13] (слева) и в расчете (справа), время в мкс: RO — плотность.

На рис. 5 как в опыте, так и в расчете при $t \approx 665$ мкс можно заметить начало глобального ТП практически сразу после прохождения через занавеску отраженной от торца трубы ударной волны. Если до прихода отраженной УВ на занавеску ($t < 665$ мкс) можно видеть крупномасштабные и мелкомасштабные (вдоль ножки струи) вихревые образования, то после прохождения УВ через занавеску крупные вихри разрушаются и наступает глобальное перемешивание.

На рис. 6 приведены поля концентраций (слева) и завихренности (справа) на моменты времени $t = 515$ мкс (верхний ряд) и $t = 665$ мкс (нижний ряд). Приведенная шкала завихренности показывает, что при $t = 665$ мкс (в момент перехода к ТП) интенсивность завихренности заметно выше, чем при $t = 515$ мкс, где отсутствует глобальное перемешивание газов.

Сопоставление зависимостей ширины занавески от времени в эксперименте и расчете выполнено на рис. 7. Представленные результаты свидетельствуют об удовлетворительном согласовании расчетных

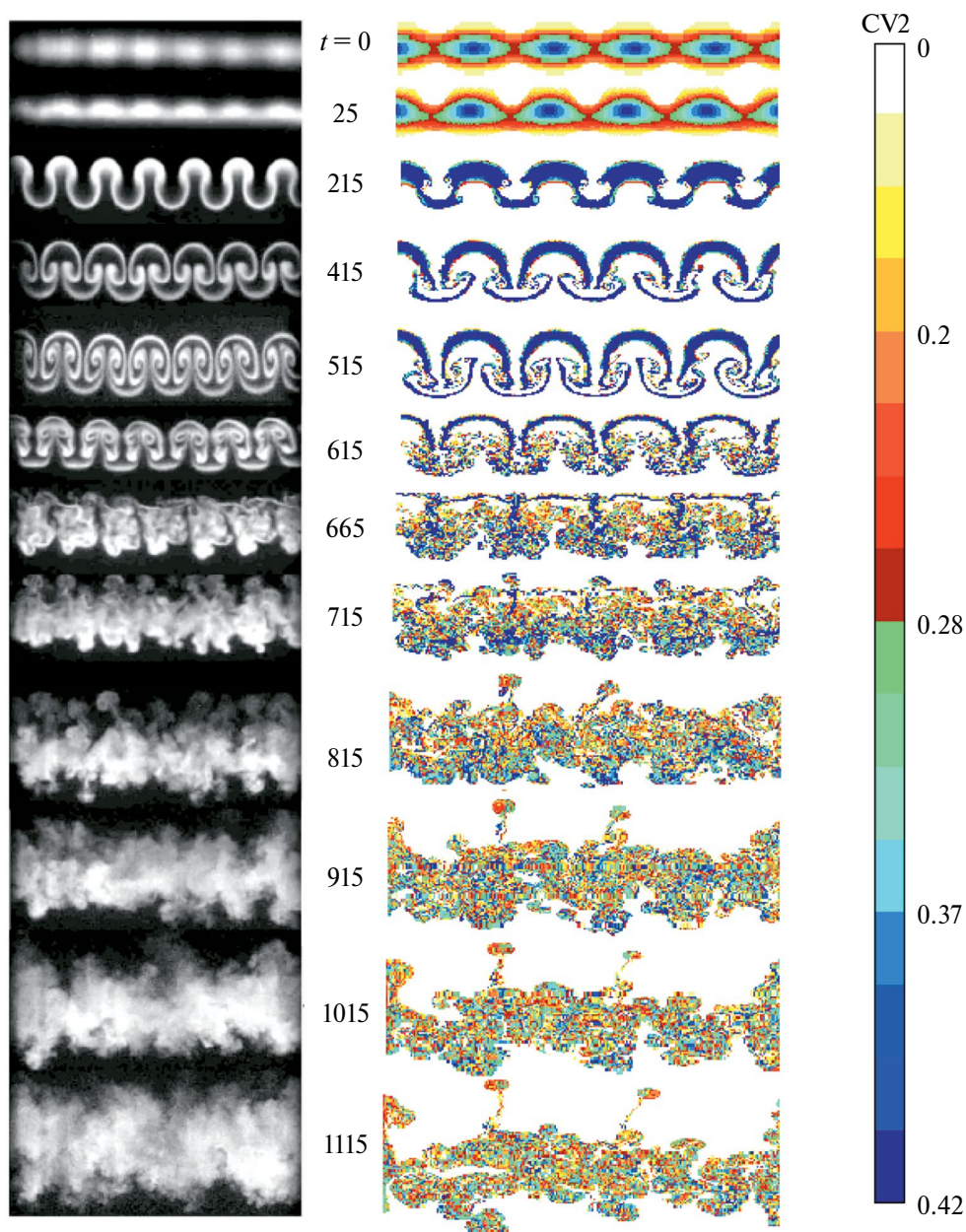


Рис. 5. Эволюция начального возмущения в опыте [13] (левый столбец), правый столбец — концентрации, полученные в расчете, время в мкс: CV2 — концентрация SF_6 .

данных с экспериментальными как по времени перехода к глобальному ТП, так и по ширине занавески на всем временном участке.

Выводы по результатам моделирования опыта с занавеской

В задаче с открытым торцом переход к глобальному ТП происходит в течение длительного времени (невозможно определить временную границу перехода). В задаче с закрытым торцом переход к глобальному ТП начинается сразу же после прохождения отраженной волны через занавеску. Используемая технология моделирования задач удовлетворительно описывает скорость роста пузырей, струй и момент перехода к турбулентности. Полученные данные позволяют предположить, что результаты моделирования следующих задач, для которых из-за малых времен наблюдения в опытах не достигнуто

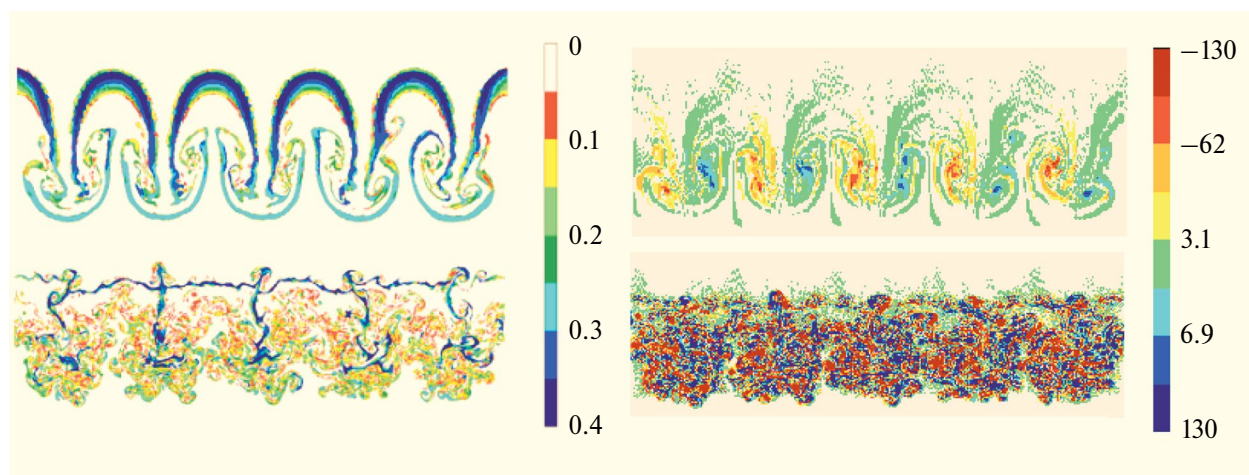


Рис. 6. Концентрации (слева) и z -компонента завихренности (справа) на моменты времени $t = 515$ мкс (верхний ряд), $t = 665$ мкс (нижний ряд)

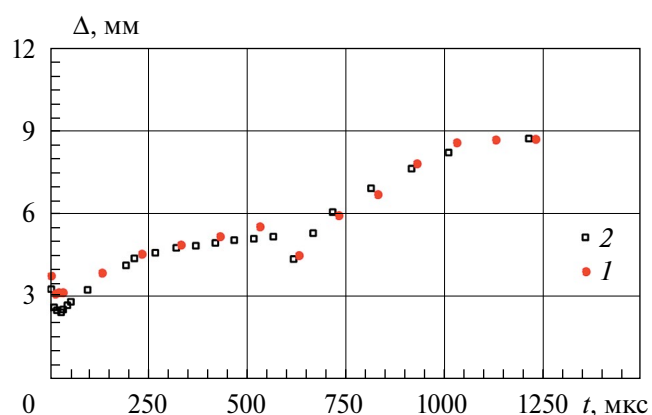


Рис. 7. Зависимость ширины занавески от времени в расчете —1 и эксперименте —2 (см. Fig. 10 в [13]).

глобальное перемешивание, будут также удовлетворительно описывать развитие неустойчивости и переход к ТП.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ СИСТЕМ

Особенность в постановке экспериментов состоит в том, что граница раздела между газами представляет собой тонкий диффузионный слой. При наличии диффузионного слоя по краям КГ скорость роста возмущений вычисляется по выражению [27]

$$V = \frac{da}{dt} = \frac{U A^+ k a^+}{\psi}$$

Здесь $U A^+ k a^+$ — линейная скорость роста амплитуды возмущений согласно модели Рихтмайера [28], U — скорость контактной границы после прохождения УВ, A^+ и a^+ — число Атвуда и амплитуда начального возмущения после прохождения УВ, k — волновое число начального возмущения, ψ — коэффициент, учитывающий уменьшение скорости роста возмущения из-за наличия диффузионного слоя. Значение ψ подбирается для лучшего согласования полученного численного решения с экспериментальной информацией.

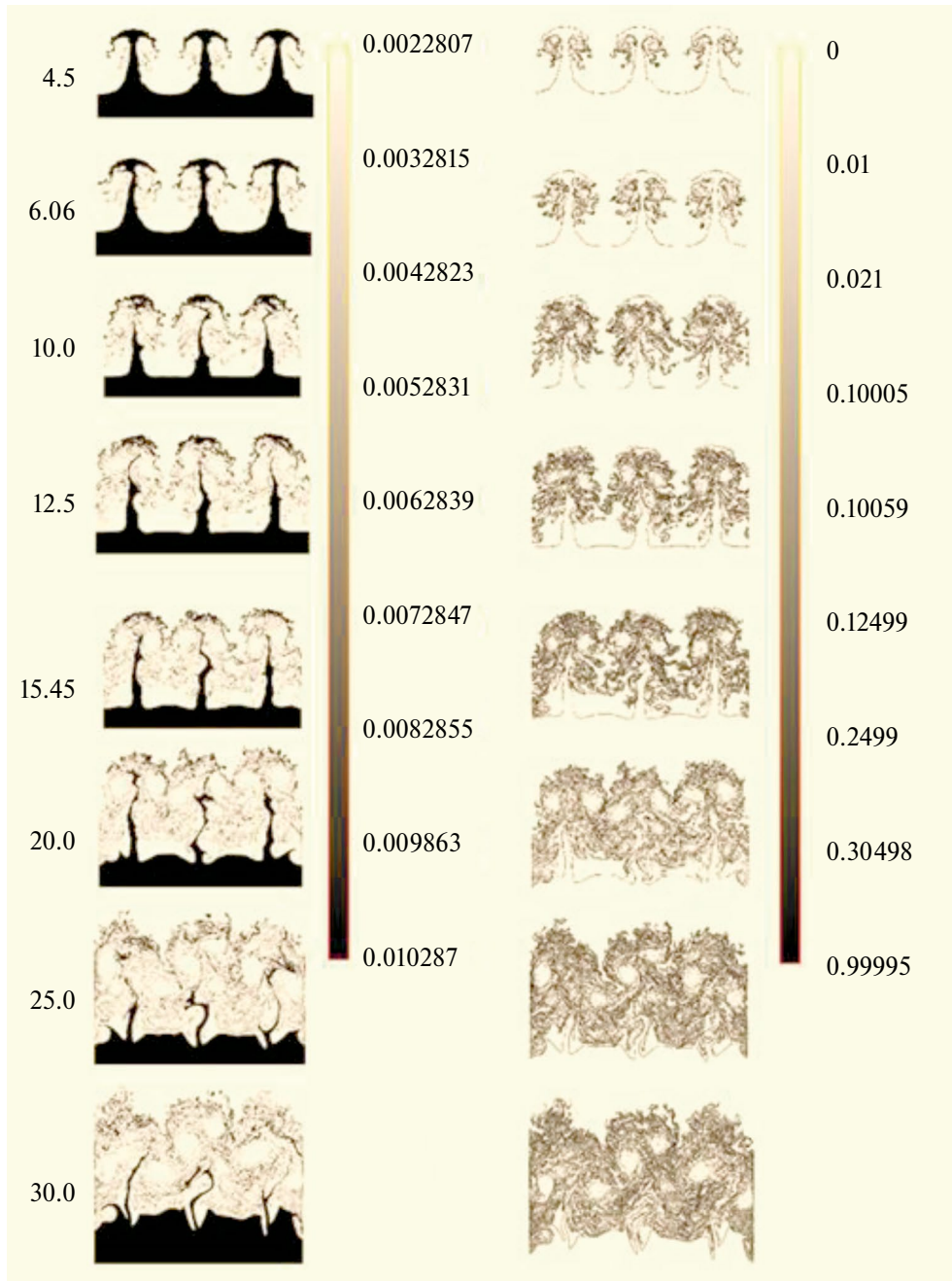


Рис. 8. Поле плотности (слева), справа — поле функции $F = \exp(|\nabla \rho|)$, расчет по методике МИМОЗА, время в мс.

В работе Jacobs [26] приведены данные по скорости роста струй и пузырей в интервале безразмерного времени $t_0 < t^* < 10$, где t_0 — время прихода УВ на КГ. Параметры такие:

$$t^* = C \cdot t, \quad C = k^2 a_0^+ A^+ U t$$

Здесь $k = 1.06 \text{ см}^{-1}$ — волновое число начального возмущения, $a_0^+ = 0.215 \text{ см}$ — амплитуда возмущения после прохождения через КГ ударной волны, $A^+ = 0.635$ — число Атвуда после прохождения через КГ ударной волны, $|U| = 9260 \text{ см/с}$ — скорость КГ, t — размерное время. Дополнительно к опытным данным в расчетах получена информация о характере развития неустойчивости на более поздний период времени, о переходе к ТП и воздействию отраженной от левого торца УВ на пузыри и струи, сформировавшиеся к этому времени.

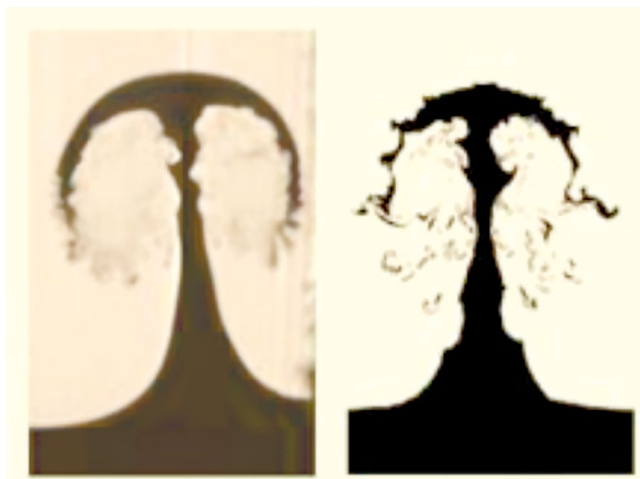


Рис. 9. Поле плотности (слева – эксперимент [26]), справа – расчет по методике МИМОЗА, $t = 6.06$ мс.

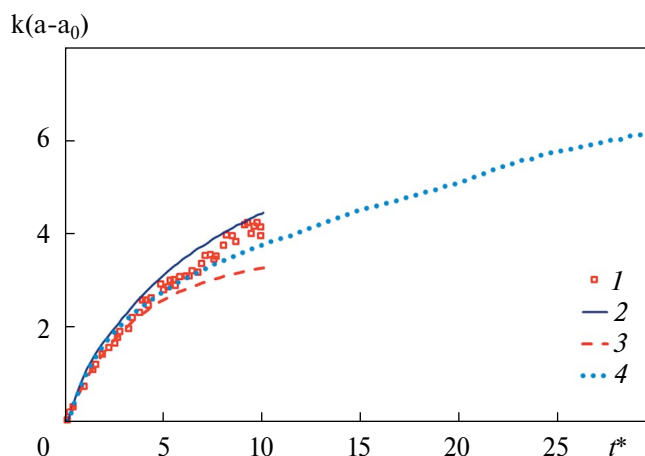


Рис. 10. Зависимость безразмерной амплитуды от безразмерного времени (данные экспериментов и теоретических моделей взяты из [26]): 1 – эксперимент, 2 – Sadot, 3 – Zhang&Sohn, 4 – МИМОЗА.

Расчет 3, опыт Jacobs, $M = 1.3$, левый торец трубы открыт

При взаимодействии УВ с КГ образуется две ударные волны, а между ними располагается контактный разрыв. Скорость контактного разрыва $U = -9.262$, скорости ударных волн, распространяющихся по воздуху и SF_6 соответственно, $D1 = 19.71$, $D2 = -18.89$, плотности слева $\rho = 0.01028$ и справа $\rho = 0.00229$ от контактного разрыва, давление $P = 1.748$. Размерности газодинамических величин: см, г, мс.

На рис. 8 на ряд моментов времени приведены формы струй.

Из представленных данных следует, что при $t = 4.5$ мс шляпка струи начинает разрушаться. По обеим сторонам ножки струи сформировались противоположно направленные локальные вихревые образования (локальные зоны перемешивания). Переход к глобальному перемешиванию на КГ происходит постепенно (нет явно выраженного момента времени), начиная с $t > 10.0$ мс.

На рис. 9 на момент времени $t = 6.06$ мс сопоставляются формы струй, полученные в эксперименте и расчете. Зависимости безразмерной амплитуды от безразмерного времени, полученные в экспериментах, численных расчетах и по двум теоретическим моделям, демонстрируются на рис. 10 ($a_0 = a_0^+$ – амплитуда возмущения после прохождения УВ через КГ). Отмечаем удовлетворительное согласие данных опытов и расчетов.

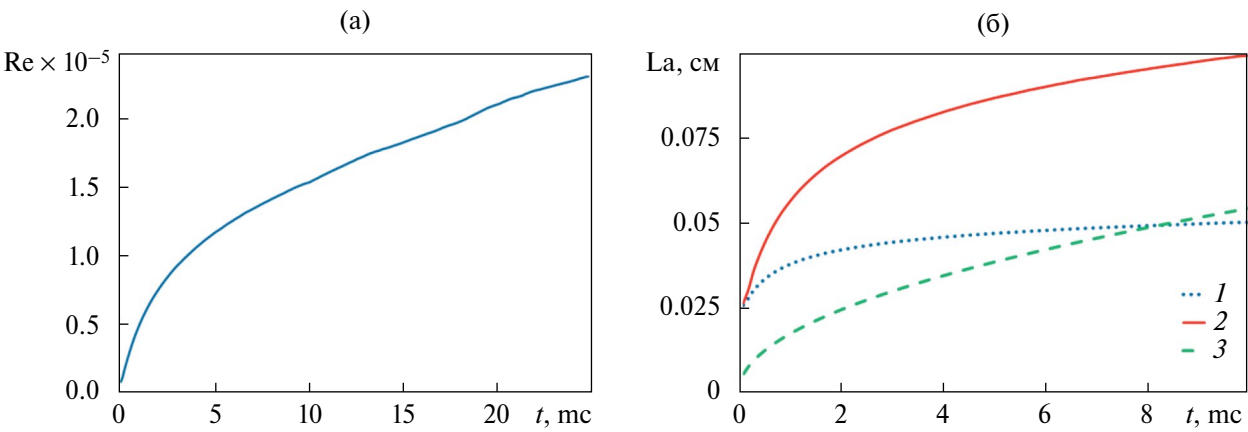


Рис. 11. Зависимость числа Рейнольдса (Re) и масштабов турбулентности (La) от времени: 1 – La_{nu} , 2 – La_L , 3 – $\min(La_L, La_D)$.

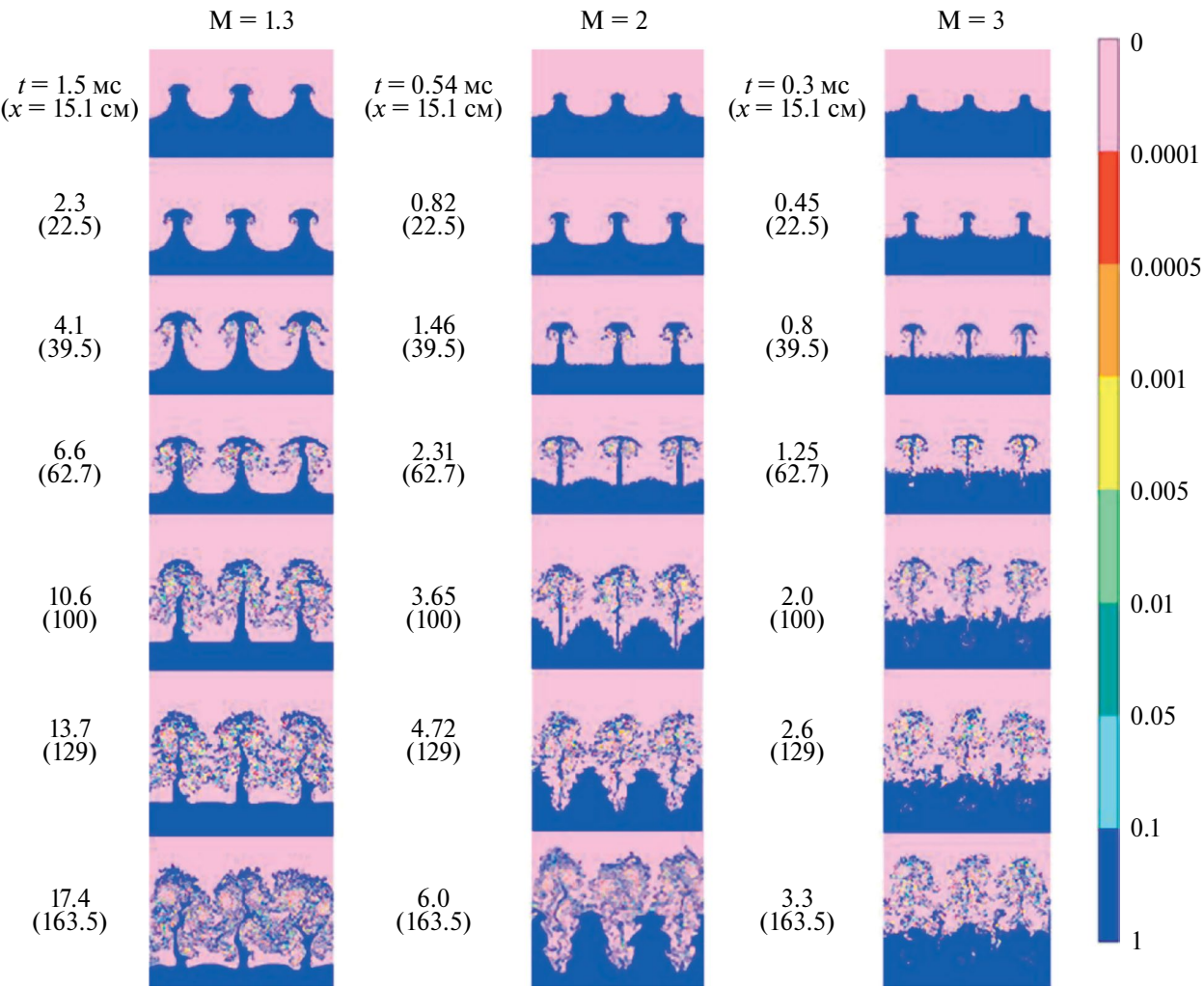


Рис. 12. Сравнение изоповерхностей концентраций при одинаковом пройденном контактной границей расстоянии. Слева $M = 1.3$, в центре $M = 2$, справа $M = 3$.

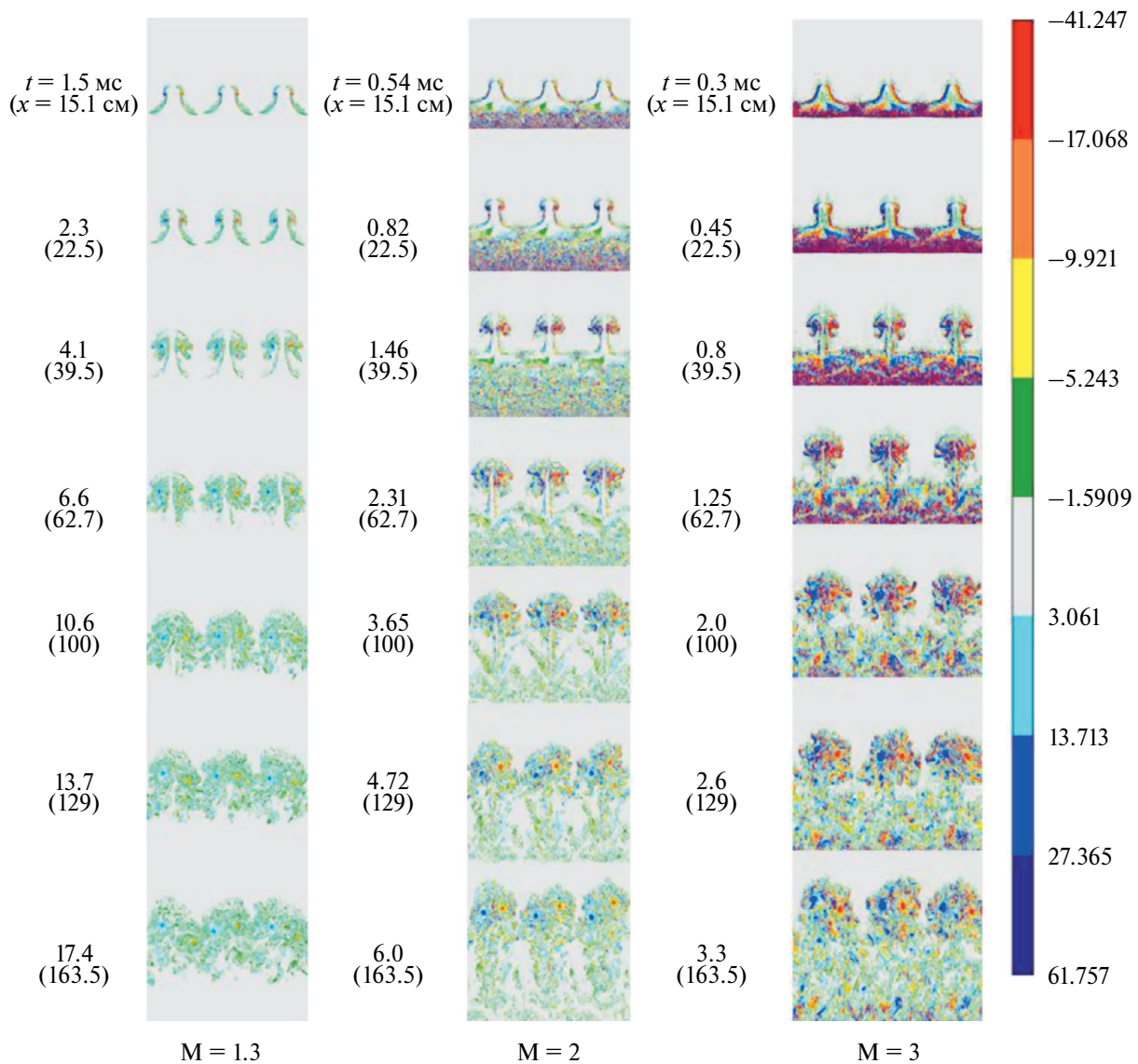


Рис. 13. Значения z-компоненты завихренности при различных интенсивностях ударной волны.

Проанализируем полученные результаты с точки зрения перехода к развитой турбулентности. Для этих целей определим масштабы турбулентности. На рисунках для масштабов λ_v , λ_L , λ_D используются обозначения La_{nu} , La_L , La_D соответственно.

На рис. 11 показаны зависимости числа Re и масштабов турбулентности от времени. Согласно данным рис. 11, число Рейнольдса достигает критического значения $Re = 10^4$ в расчете сразу же после прохождения УВ через КГ. Условие начала формирования инерционного интервала $\lambda_{min} = \lambda_v$ согласно рис. 11б выполняется при $t \approx 8.0$ мс, что близко к данным по началу глобального перемешивания (см. рис. 8).

Расчет 4, $M = 2$

Постановка задачи аналогична расчету 3, но увеличена интенсивность падающей на КГ ударной волны. При $M = 2$ взаимодействие УВ с КГ приводит к образованию двух УВ, между которыми предполагается контактный разрыв. Скорость контактного разрыва $U = -26.51$, скорости ударных волн в воздухе и SF_6 составляют $D1 = 4.328$ и $D2 = -33.03$ соответственно, плотности слева $\rho = 0.02656$

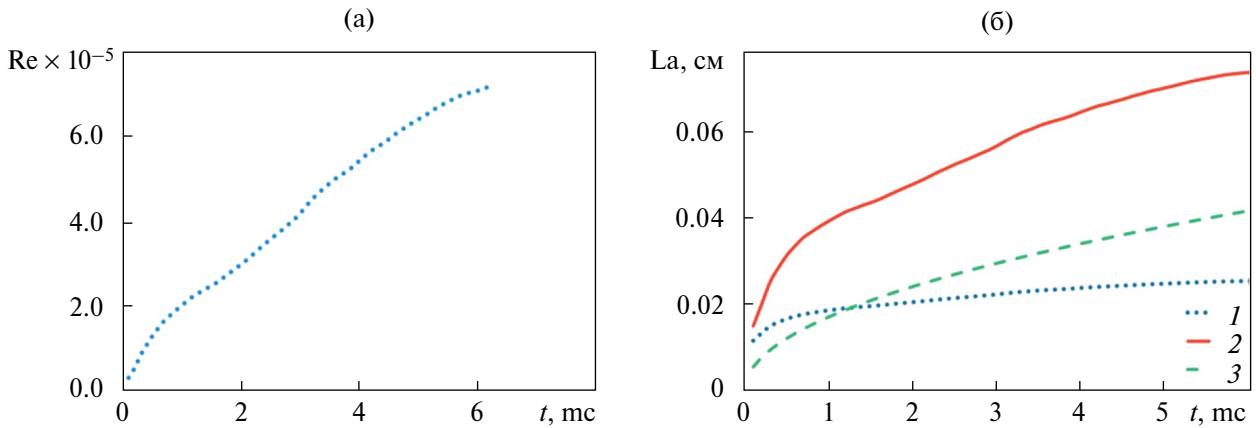


Рис. 14. Зависимость числа Рейнольдса (Re) и масштабов турбулентности (La) от времени, $M = 2$: 1 – La_{nu} , 2 – La_L , 3 – $\min(La_L, La_D)$.

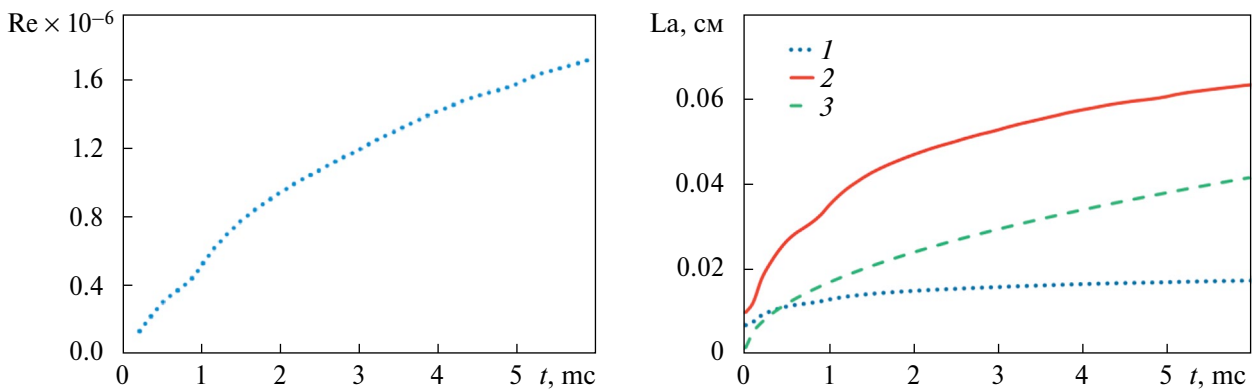


Рис. 15. Зависимость числа Рейнольдса (Re) и масштабов турбулентности (La) от времени, $M = 3$: 1 – La_{nu} , 2 – La_L , 3 – $\min(La_L, La_D)$.

и справа $\rho = 0.00515$ от контактного разрыва, давление $P = 5.42$. Размерности газодинамических величин: см, г, мс.

Расчет 5, $M = 3$

Постановка задачи аналогична расчету 4, но увеличена интенсивность падающей на КГ ударной волны. При взаимодействии УВ с КГ образуется две ударные волны, а между ними располагается контактный разрыв. Скорости контактного разрыва $U = -48.12$, ударных волн $D1 = -12.48$ и $D2 = -53.64$, распространяющихся по воздуху и SF_6 соответственно, плотности слева ($\rho = 0.05089$) и справа ($\rho = 0.008987$) от контактного разрыва. Размерности газодинамических величин: см, г, мс.

На рис. 12 и 13 сопоставляются формы струй, полученные в расчетах при трех интенсивностях ударных волн $M = 1.3$, $M = 2$, $M = 3$. Сравнение выполнено на времена, когда струями пройдены одинаковые расстояния

Как и предполагалось, развитие струй заметно зависит от интенсивности ударной волны. Это подтверждается и сравнением (рис. 13) величин z -компонент завихренности, полученных при различных интенсивностях ударных волн: модуль z -компоненты завихренности увеличивается с увеличением числа M . Отметим, что при пройденных занавеской больших расстояниях характер перемешивания заметно зависит от числа Маха падающей на КГ ударной волны.

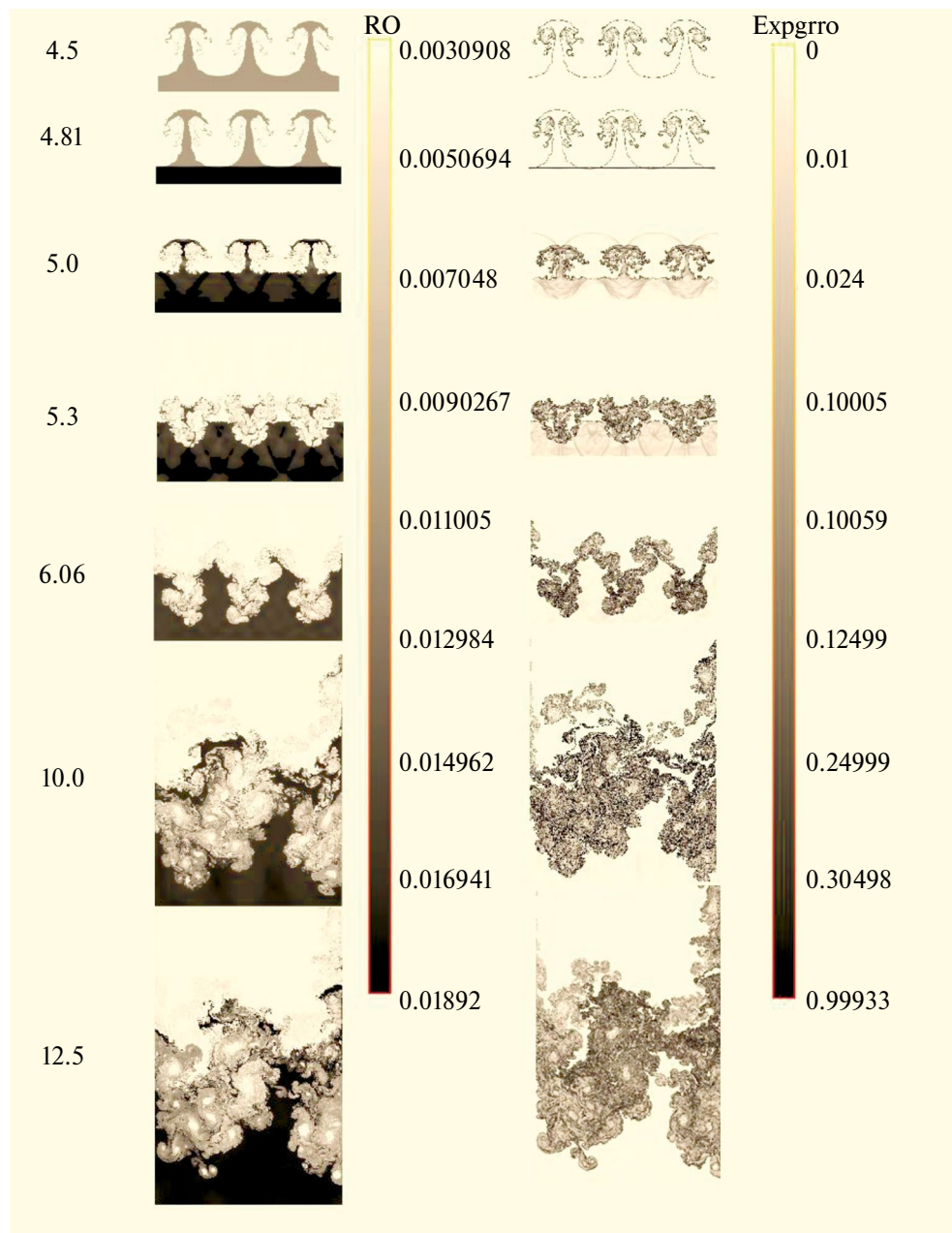


Рис. 16. Поле плотности (слева) и поле функции $F = \exp(|\nabla p|)$ (справа) на ряд моментов времени, расчет по методике МИМОЗА, время в мс.

На рис. 14 показаны зависимости числа Re и масштабов турбулентности от времени для $M = 2$. Согласно данным рис. 14, число Рейнольдса в расчете достигает критического значения $Re = 10^4$ сразу же после прохождения УВ через КГ. Условие начала формирования инерционного интервала $\lambda_{\min} = \lambda_v$ согласно рис. 14б выполняется при $t \approx 1.3$ мс, что заметно раньше времени начала глобального перемешивания (см. рис. 12 и 13).

На рис. 15 показаны зависимости числа Re и масштабов турбулентности от времени в расчете с $M = 3$.

По приведенным на рис. 15 данным число Рейнольдса достигает критического значения $Re = 10^4$ в расчете сразу же после прохождения УВ через КГ. Условие начала формирования инерционного интервала $\lambda_{\min} = \lambda_v$ согласно рис. 15б выполняется при $t \approx 0.4$ мс, что заметно раньше времени начала ($t > 2.0$ мс) глобального перемешивания (см. рис. 12 и 13).

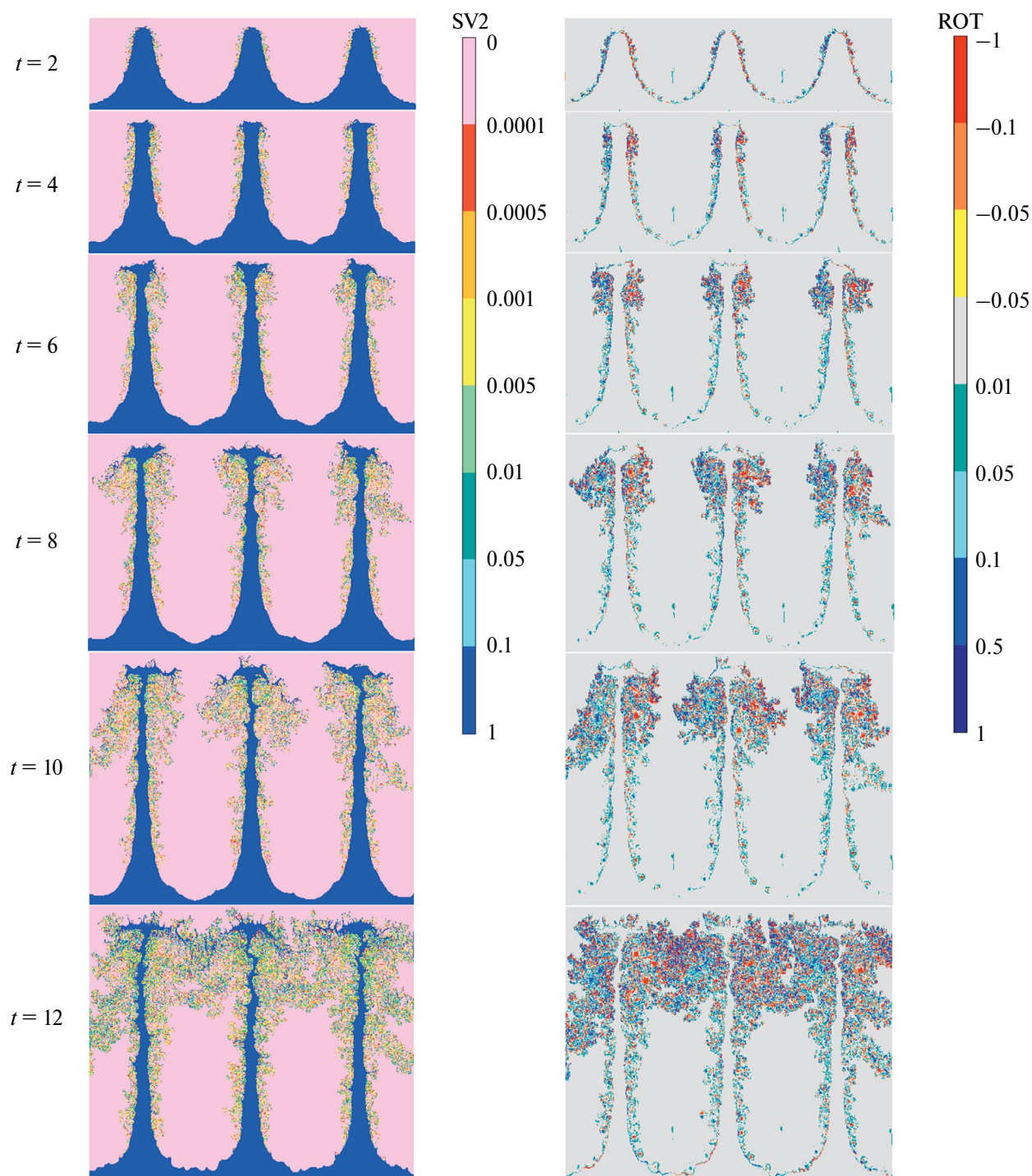


Рис. 17. $M = 1.13$, концентрации (слева) и z -компонента завихренности (справа), время в мс: ROT — z -компонента завихренности.

Выводы по результатам моделирования задач в постановке *Jacobs*. Используемый в расчетах вариант определения числа Рейнольдса при экспериментальном уточнении определяющих параметров может быть пригодным для оценки момента перехода к развитой турбулентности. Без экспериментальных данных невозможно совершенствовать предложенный алгоритм для определения момента перехода от этапа развития неустойчивости к развитой турбулентности.

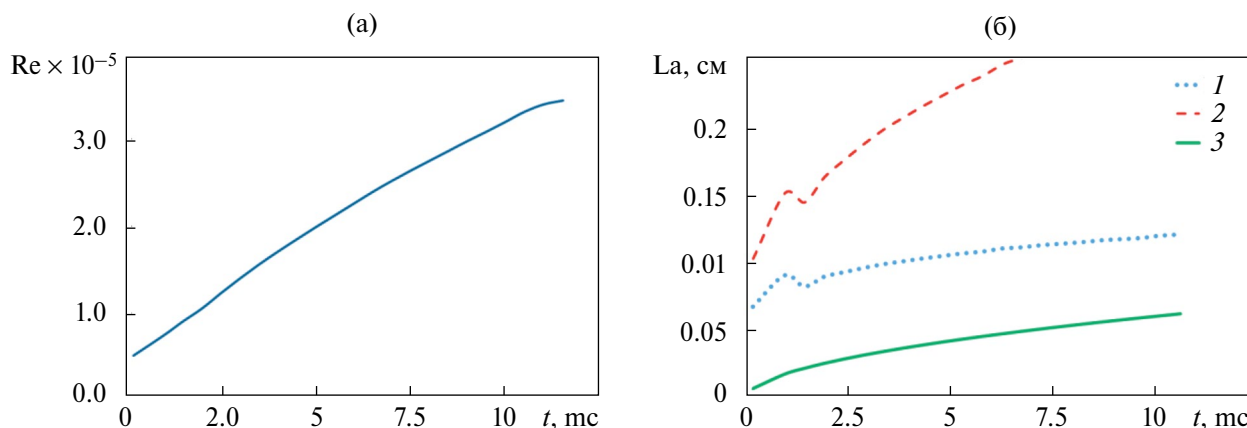


Рис. 18. Зависимость числа Рейнольдса (Re) и масштабов турбулентности (La) от времени: 1 – La_{nu} , 2 – La_L , 3 – $\min(La_L, La_D)$.

Расчет 6. Постановка задачи аналогична расчету 3, но левый торец трубы закрыт, $L = 61.5$ см

Цель расчета состоит в том, чтобы оценить влияние отраженной от левого торца трубы ударной волны на момент перехода к перемешиванию. На рис. 16 на ряд моментов времени приведены изоповерхности плотности в столбце слева, и изоповерхности функции $F = \exp(|\nabla \rho|)$ (правый столбец), полученные в расчете по алгоритму VoF.

Полученные при моделировании данные (рис. 16) свидетельствуют, что до взаимодействия УВ с КГ ($t < 4.81$ мс) на краях струй формируются вихревые образования (локальные вихревые образования). Отраженная от торца УВ возвращается на КГ при $t \approx 4.81$ мс. При $t \approx 5$ мс скачок взаимодействует с ножками струй, а в момент времени $t \approx 5.3$ мс шляпка и ножка струи разрушаются, происходит обращение фазы (на месте струй образуются пузыри, на месте пузырей – струи). Таким образом, прохождение отраженной от торца трубы УВ через КГ приводит к мгновенному образованию зоны глобального перемешивания.

Расчет 7. Первая задача Motl et al

УВ движется из легкого газа в тяжелый (из He в SF_6). Число Маха УВ $M = 1.13$. При взаимодействии УВ с КГ образуется две ударные волны, а между ними располагается контактный разрыв. Скорость контактного разрыва $U = -5.827$, скорости ударных волн, распространяющихся по гелию и SF_6 , $D1 = 93.8$ и $D2 = -16.24$ соответственно, плотности слева и справа от контактного разрыва $\rho = 0.01013$ и $\rho = 0.000225$. Размерности газодинамических величин: см, г, мс.

Форма струй, полученная в расчетах на ряд моментов времени, показана на рис. 17. Приведенные данные свидетельствуют, что при $t = 2$ мс шляпка струи не сформирована, но с острия струи срываются отдельные (малые) фрагменты тяжелого и легкого газов. На момент времени $t = 4$ мс острие струи деформируется встречным потоком, начинает формироваться шляпка струи. Вдоль ножки струи увеличивается интенсивность перемешивания, струя вытягивается и на момент времени $t = 12$ мс наблюдается смыкание струй, что подтверждается и структурой z -компоненты завихренности потока (рис. 17). До момента окончания расчета ножка и шляпка струи не разрушены (отсутствует глобальное перемешивание).

На рис. 18 показаны зависимости числа Re и масштабов турбулентности от времени. Как можно видеть, число Рейнольдса достигает значения $Re = 10^4$ в расчете сразу же после прохождения УВ через КГ. Условие начала формирования инерционного интервала $\lambda_{\min} = \lambda_v$ согласно рис. 18б не выполняется вплоть до момента окончания расчета $t \approx 12$ мс, т.е. отсутствует переход к глобальному перемешиванию, что согласуется и с картиной течения, приведенной на рис. 17.

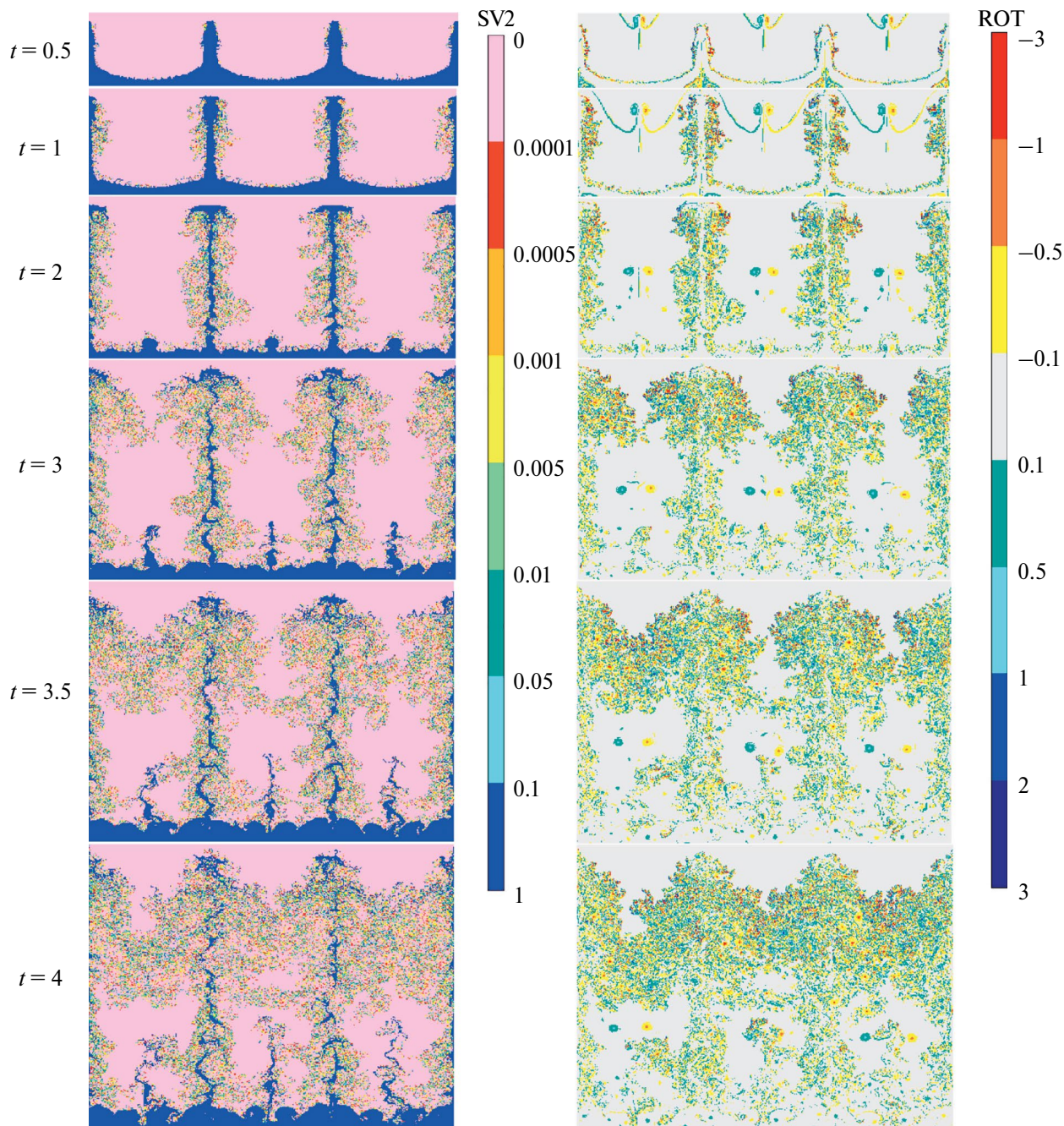


Рис. 19. $M = 1.95$, концентрации (слева) и z – компонента завихренности (справа), время в мс, ROT – z -компонента завихренности.

Расчет 8. Вторая задача Motl с соавторами

УВ движется из легкого газа в тяжелый (из He в SF_6). В отличие от расчета 7 число Маха УВ увеличено до $M = 1.95$. При взаимодействии УВ с КГ образуется две ударные волны (одна движется по He, вторая – по SF_6) а между ними располагается контактный разрыв. Газодинамические параметры после распада разрыва: скорость контактного разрыва $U = -33.28$, скорости ударных волн, распространяющихся по He и SF_6 , $D1 = 86.3$ и $D2 = -39.7$ соответственно, плотности слева и справа от контактного разрыва $\rho = 0.0448$ и $\rho = 0.0006$, давление $P = 9.74$. Размерности газодинамических величин: см, г, мс.

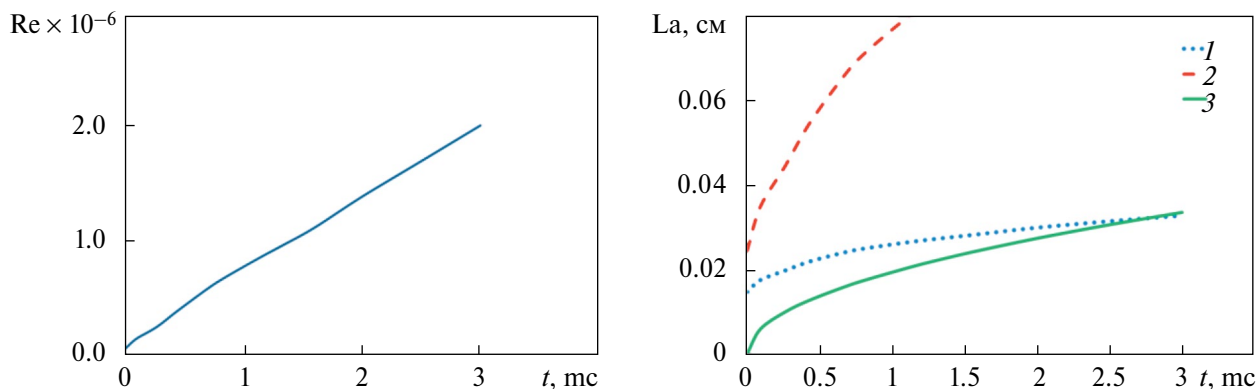


Рис. 20. Зависимость числа Рейнольдса (Re) и масштабов турбулентности (La) от времени: 1 – La_{nu} , 2 – La_L , 3 – $\min(La_L, La_D)$.

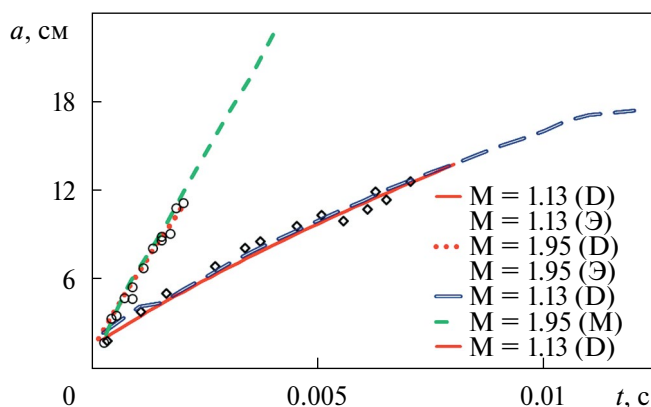


Рис. 21. Эволюция ширины зоны, определенная в опытах (Э), рассчитанная по модели Димонте [4] (D) и смоделированная по методике МИМОЗА (M).

Развитие струй во времени демонстрируется на рис. 19, где приведены изоповерхности концентраций и z – компоненты завихренности потока. Приведенные данные демонстрируют, что при $t = 1$ мс с острия струи срываются отдельные (небольшие) фрагменты тяжелого и легкого газов. При $t > 3$ мс струи начинают вытягиваться и разрушаться, наблюдается начало глобального перемешивания (происходит разрушение ножки струи), что подтверждается и структурой z -компоненты завихренности потока.

На рис. 20 показаны зависимости числа Re и масштабов турбулентности от времени. Согласно данным рис. 20, число Рейнольдса достигает значения $Re = 10^4$ сразу же после прохождения УВ через КГ. Условие начала формирования инерционного интервала $\lambda_{\min} = \lambda_v$ согласно рис. 20б выполняется при $t \approx 2.7$ мс, что несколько раньше, чем происходит переход к глобальному перемешиванию (по данным рис. 19 $t \approx 3.5$ мс).

Эволюция ширины зоны, определенная в опытах, рассчитанная по модели Димонте [4] и смоделированная по методике МИМОЗА при числах Маха ударной волны $M = 1.13$ и $M = 1.95$ показана на рис. 21. Наблюдается удовлетворительное согласие представленных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены детальные (разные интенсивности ударных волн, числа Атвуда, шероховатости контактных границ) численные исследования развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и перехода к развитой турбулентности на контактных границах газовых слоев. Предложен метод для оценки момента перехода от этапа развития неустойчивости к развитой турбулентности. Проведено моделирование двух

серий опытов: опыты с тонким слоем тяжелого газа (есть экспериментальная информация по переходу к турбулентному перемешиванию) и с возмущенной по синусоиде контактной границы двух разноплотных газов (имеются экспериментальные данные по скорости роста струй). Расчеты выполнены по методике МИМОЗА с использованием ILES стратегии моделирования с привлечением VoF-метода отслеживания движения контактных границ.

В результате анализа полученной информации установлено:

1) скорость роста амплитуды начальных возмущений, измеренная в опытах Balakumar с соавторами (трехслойная газовая система), Jacobs с соавторами и Motl с соавторами (двухслойные газовые системы), удовлетворительно описывается в расчетах по методике МИМОЗА. Методика МИМОЗА удовлетворительно описала и момент перехода к турбулентному перемешиванию в опытах с трехслойной газовой системой;

2) использованное при моделировании определение числа Рейнольдса превышает критическое значение $Re_k \approx 10^4$ (используемое в ряде работ для оценки момента перехода к турбулентности) сразу же после взаимодействия ударной волны с контактной границей, хотя наблюдаемая в расчетах структура пузырей и струй не указывает на наличие развитой турбулентности;

3) после прохождения через границу соприкасающихся веществ первой ударной волны (в отсутствии других ударных волн) переход к перемешиванию происходит не мгновенно, а в течении конечного интервала времени (невозможно установить момент начала перехода);

4) при взаимодействии отраженной от торца трубы ударной волны с пузырями и струями, сформировавшимися на шероховатой контактной границе после прохождения первой ударной волны, происходит быстрый переход (мгновенный) к перемешиванию контактирующих газов;

5) время перехода к перемешиванию сокращается при увеличении числа Маха падающей на контактную границу ударной волны;

6) возможность применения рассмотренного в работе критерия определения времени перехода к развитой турбулентности по моменту начала формирования инерционного интервала в энергетическом спектре требует дальнейших исследований с привлечением новой экспериментальной информации.

Работа выполнена в рамках научной программы Национального центра физики и математики (НЦФМ) по Государственному контракту № Н.4ц.241.4Д.23.1085.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза методами математического моделирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 304 с.
2. Янилкин Ю.В., Стаценко В.П., Козлов В.И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах. Саров: Изд-во ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2009. 507 с.
3. Невмержицкий Н.В. Гидродинамические неустойчивости и турбулентное перемешивание веществ. Лабораторное моделирование. Саров: Изд-во ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2018. 246 с.
4. Разин А.Н. Моделирование турбулентного перемешивания в газовых слоях. Саров: Изд-во ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2020. 290 с.
5. Grinstein F.F., Margolin L.G., Rider W.J. (editor) Implicit large eddy simulation: computing turbulent fluid dynamics, Cambridge university press. 2007.
6. Бодров Е.В., Змушко В.В., Невмержицкий Н.В., Разин А.Н., Сеньковский Е.Д., Сотсков Е.А. Расчетно-экспериментальное исследование развития турбулентного перемешивания в газовой слоеке при прохождении ударной волны // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 3. С. 54–62.
<https://doi.org/10.7668/S0568528118030052>
7. Янилкин Ю.В. Двумерное численное моделирование опыта по перемешиванию в трехслойной газовой системе с условием прилипания на стенках ударной трубы // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2022. Вып. 2. С. 17–26.
8. Большакова А.Э., Змушко В.В., Невмержицкий Н.В., Разин А.Н., Сеньковский Е.Д., Сотсков Е.А. Численное моделирование развития неустойчивости на контактных границах трехслойной газовой системы. Сравнение с экспериментальными данными // ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 43–54.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20210105>

9. Змушко В.В., Разин А.Н., Синельникова А.А. Влияние начальной шероховатости контактных границ на развитие неустойчивости после прохождения ударной волны // ПМТФ. 2022. Т. 63. № 3. С. 34–42. <https://doi.org/10.15372/PMTF20220304>
10. Змушко В.В., Разин А.Н., Синельникова А.А., Шербаков А.Н. Влияние интенсивности ударной волны на развитие неустойчивости на шероховатых контактных границах трехслойной газовой системы // ЖВММФ. 2023. Т. 63. № 3. С. 89–101. <https://doi.org/10.31857/S0044466923030134>, EDN: DZYLAC
11. Разин А.Н., Змушко В.В., Синельникова А.А. Влияние диссипативных погрешностей методики МИМОЗА на скорость изменения кинетической энергии при распаде вихря Тейлора-Грина // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2023. Вып. 1. С. 29–41.
12. Янилкин Ю.В., Бондаренко Ю.А., Гончаров Е.А., Гужова А.Р., Колобянин В.Ю., Софронов В.Н., Стаценко В.П. Тесты для гидрокодов, моделирующих ударноволновые течения в многокомпонентных средах. Саров: Изд-во ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2018.
13. Balakumar B.J., Orlicz G.C., Tomkins C.D., Prestridge K.P. Simultaneous particle-image velocimetry-planar laser-induced fluorescence measurements of Richtmyer-Meshkov instability growth in a gas curtain with and without reshock // Physics of Fluids. 2008. V.20. 124103.
14. Orlicz G.C., Balakumar B.J., Tomkins C.D., Prestridge K.P. A Mach number study of the Richtmyer-Meshkov instability in a varicose, heavy-gas curtain // Physics of Fluids. 2009. V. 21(6). 064102.
15. Orlicz G.C., Balasubramanian S., Prestridge K.P. Incident shock Mach number effects on Richtmyer-Meshkov mixing in a heavy gas layer // Physics of Fluids. 2013. V. 25. № 11. 114101.
16. Змушко В.В., Плетенёв Ф.А., Сараев В.А., Софронов И.Д. Методика решения трехмерных уравнений газовой динамики в смешанных лагранжево-эйлеровых координатах // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып.1. С. 22–27.
17. Софронов И.Д., Афанасьева Е.А., Винокуров О.А., Воропинов А.И., Змушко В.В., Плетенев Ф.А., Рыбаченко П.В., Сараев В.А., Соколова Н.В., Шамраев Б.Н. Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ “Эльбрус-2” // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып.2. С. 3–9.
18. Zmushko V.V. Computation of convective flows and their realization in MIMOZA code // International Workshop “New Models of Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media” / Oxford / September 15–19. 1997.
19. Ладагин В.К., Пастушенко А.М. Об одной схеме расчета газодинамических течений // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8. № 2. С. 66–72.
20. Youngs D.L. Time dependent multi-material flow with large distortion / Numerical methods for fluid dynam. Ed by K.W. Morton and J.H. Baines eds.. Academic press, 1982.
21. Dimotakis P.E. The mixing transition in turbulent flows // J. Fluid Mech. 2000. V.409. P. 69–98
22. Zhou Ye, Remington B.A., Robey H.F., Cook A.W., Glendinning S.G., Dimits A., Buckingham A.C., Zimmerman G.B., Burke E.W., Peyser T.A., Cabot W., Eliason D. Progress in understanding turbulent mixing induced by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities // Physics of Plasmas. 2003. 10(5). P. 1883–1896.
23. Монин А.Е., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М: Наука, 1967.
24. Tanaka Y., Nakajima M., Kubota H., Makita T. Viscosity of SF₆+N₂ and SF₆+He gaseous mixtures // J. Chemical Engineering of Japan. 1980. V.13. № 2.
25. Gowardhan A.A., Grinstein F. Numerical simulation of Richtmyer-Meshkov instabilities in shocked gas curtains // J. of Turbulence. 2011. 12(43). P. 1–24.
26. Jacobs J.W., Krivets V.V. Experiments on the late-time development of single-mode Richtmyer-Meshkov instability // Physics of Fluids. 17. 034105. 2005.
27. Moil B., Oakley J., Ranjan D., Weber C., Anderson M., Bonazza R. Experimental validation of a Richtmyer-Meshkov scaling law over large density ratio and shock strength ranges // Physics of Fluids. 21. 126102. 2009.
28. Richtmyer R.D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun. Pure Appl. Math. 13. 297. 1960.

Simulation of the Development of Richtmyer-Meshkov Instability and Transition to Developed Turbulence

V. V. Zmushko*, M. I. Polishchuk**, A. N. Razin***,
A. A. Sinel'nikova****, and A. N. Shcherbakov*****

*Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Experimental Physics (RFNC–VNIIEF),
Sarov, Russia*

**e-mail: VVZmushko@vniief.ru*

***e-mail: MIPolischuk@vniief.ru*

****e-mail: ANRazin@vniief.ru*

*****e-mail: AnASinelnikova@vniief.ru*

******e-mail: ANScherbakov@vniief.ru*

A criterion for estimating the instant of transition from the stage of development of the Richtmyer–Meshkov instability to developed turbulence on rough contact interfaces of layered gas systems is proposed. A number of laboratory experiments are simulated. In the first series of experiments, the Richtmyer–Meshkov instability arises on two contact interfaces of a thin gas layer after passage of a shock wave. In the experiments, a thin layer (corrugated gas curtain) is formed by pumping a heavy gas (SF_6) through a nozzle block across an air-filled shock tube. In the second series of experiments, the shock wave passes across the contact interface of two gases of different densities (air- SF_6 and He- SF_6 layerings) perturbed along a sinusoid. In this series of experiments, the end face of the tube is either connected to the atmosphere or closed by a rigid wall. Development of the Richtmyer–Meshkov instability and transition to turbulent mixing are simulated using the implicit large eddy (ILES) method by means of the MIMOZA technique. A comparison with the available experimental information is made.

Keywords: gas layers, contact interfaces, shock waves, instability, transition to developed turbulence, mathematical modeling

УДК 532.517.4

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИЗИСА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ СФЕРЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩЕГО ПОДХОДА

© 2024 г. А. С. Стабников^{а, *}, А. В. Гарбарук^а, М. Х. Стрелец^а

^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ), Санкт Петербург, Россия

*e-mail: an.stabnikov@gmail.com

Поступила в редакцию 31.10.2023 г.

После доработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 25.12.2023 г.

Представлены результаты моделирования кризиса сопротивления при обтекании сферы в рамках недавно предложенного вихреразрешающего гибридного RANS–LES-подхода, который включает полуэмпирическую модель ламинарно-турбулентного перехода. Расчеты, выполненные в широком диапазоне изменения числа Рейнольдса, свидетельствуют о том, что используемая комплексная модель качественно правильно описывает все аспекты кризиса сопротивления, в том числе, такие тонкие эффекты как рост амплитуды колебаний боковой силы при значениях числа Рейнольдса близких к критическому. Вместе с тем, полученные результаты показывают, что для достижения точного количественного предсказания критического числа Рейнольдса и деталей процессов ламинарно-турбулентного перехода и отрыва потока при режимах обтекания сферы близких к критическому необходимо использование очень мелких вычислительных сеток.

Ключевые слова: Кризис сопротивления, обтекание сферы, ламинарно-турбулентный переход, критическое число Рейнольдса, гибридный RANS–LES-подход, полуэмпирическая модель ламинарно-турбулентного перехода.

DOI: 10.31857/S1024708424030078, **EDN:** PFRDFK

Кризис сопротивления плохообтекаемых тел, состоящий в резком снижении коэффициента их сопротивления в некотором узком диапазоне изменения числа Рейнольдса, является одним из наиболее интересных явлений в механике жидкости, изучению которого посвящено огромное число экспериментальных и расчетных исследований. Причина возникновения кризиса сопротивления хорошо известна и детально описана в литературе (см., например, экспериментальные [1–7] и расчетные [8, 9] работы, посвященные обтеканию сферы). Она состоит в следующем. При относительно низких (докритических) числах Рейнольдса под воздействием неблагоприятного градиента давления от обтекаемой поверхности отрывается формирующийся на ней ламинарный пограничный слой. Однако с ростом числа Рейнольдса вверх по потоку от линии отрыва происходит ламинарно-турбулентный переход (ЛТП). В результате профиль скорости в пограничном слое становится более заполненным, положение отрыва смещается вниз по потоку, размер отрывной зоны уменьшается, а давление в ней повышается, что и влечет за собой резкое падение силы сопротивления при достижении некоторого значения числа Рейнольдса, называемого критическим. При обтекании гладкой сферы, в зависимости от степени турбулентности набегающего потока, критическое значение числа Рейнольдса, построенного по ее диаметру D и скорости набегающего потока U_0 , лежит в диапазоне от $1.5 \cdot 10^5$ до $4.0 \cdot 10^5$ [3].

Несмотря на геометрическую простоту, обтекание сферы характеризуется рядом сложных физических эффектов, что делает его расчет в широком (включающем околоскритические значения) диапазоне изменения числа Рейнольдса исключительно трудной задачей. К этим эффектам относятся, в частности, наличие сильного знакопеременного продольного градиента давления, упомянутый выше ЛТП, играющий ключевую роль в кризисе сопротивления, и формирование за сферой отрывной зоны, динамика, размеры, форма и вихревая структура которой кардинально зависят от режима обтекания. В частности, при докритических числах Рейнольдса в следе за сферой формируется периодическая система вихрей, имеющих подковообразную форму и ориентированных в случайном направлении относительно направления набегающего потока. Частота схода этих вихрей слабо зависит от числа Рейнольдса и соответствует

числу Струхала $St = f \cdot D / U_0 \approx 0.2$. При закритических режимах ($Re > 4.0 \cdot 10^5$) размер отрывной зоны уменьшается, а в следе за ней формируется нестационарная вихревая пара, ориентация которой относительно направления набегающего потока прецессирует с характерной частотой, соответствующей числу Струхала $St \approx 10^{-2}$ [4]. В обоих случаях асимметрия и нестационарность обтекания сферы приводят к возникновению нестационарной “боковой” силы. Наконец, при околокритических числах Рейнольдса тип отрыва пограничного слоя от поверхности сферы (ламинарный или турбулентный) зависит от азимутального угла и изменяется во времени, что приводит к усилению асимметрии отрывной зоны и, как следствие, к увеличению боковой силы и интенсивности колебаний ее величины и направления [5]. При полете сферических тел это проявляется в их заметном и труднопредсказуемом отклонении от ожидаемой траектории. Данный эффект наблюдается, например, при движении футбольных и бейсбольных мячей (так называемый эффект “knuckleball” – см., например, [10]).

Для численного моделирования всех кратко описанных выше физических явлений необходим подход, который одновременно обеспечивает приемлемую точность расчета положения ЛТП при наличии продольного градиента давления и характеристик турбулентных течений с обширным отрывом. Известно, что полуэмпирические подходы, основанные на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes – RANS), этим требованиям не удовлетворяют, поскольку они не обеспечивают приемлемой точности расчета отрывных течений. В связи с этим единственный возможный путь решения рассматриваемой задачи состоит в применении современных вихререшающих подходов к описанию турбулентности. В частности, результаты работы [9], в которой численно исследовался так называемый обратный эффект Магнуса на вращающейся сфере при близком к критическому значению числа Рейнольдса, свидетельствуют о том, что предсказание кризиса сопротивления в принципе возможно с помощью метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES). Однако, как показано в этой работе, для получения с его помощью удовлетворительного согласия результатов расчета с экспериментом требуются чрезвычайно мелкие сетки, для использования которых доступные авторам вычислительные ресурсы были недостаточны.

В этой связи для решения рассматриваемой задачи более перспективным представляется применение гибридных RANS-LES-подходов. Более или менее успешные попытки их использования в сочетании с моделями ЛТП уже предпринимались для описания кризиса сопротивления при обтекании кругового цилиндра (см., например, [11–15]), а в работе [8] показано, что при задании экспериментальных положений ЛТП, соответствующих различным числам Рейнольдса, гибридные подходы позволяют описать явление кризиса сопротивления и при обтекании сферы.

Наибольшее распространение среди подходов этого типа получил метод отсоединенных вихрей (Detached-Eddy Simulation – DES) [16], в рамках которого в присоединенной части пограничного слоя используется та или иная модель RANS, а LES автоматически активируется только в области отрыва, что позволяет радикально сократить необходимые для решения задачи вычислительные ресурсы по сравнению с LES расчетом всего течения. В настоящее время наиболее продвинутой версией метода DES является Delayed DES (DDES) [17], в котором решена характерная для оригинальной версии DES проблема переключения гибридной модели в LES-моду внутри присоединенного пограничного слоя при измельчении вычислительной сетки. Кроме того, сравнительно недавно было предложено дополнительное усовершенствование метода DDES, достигаемое путем использования специального (“адаптированного к слоям смешения”) линейного подсеточного масштаба Δ_{SLA} [18], что позволяет значительно ускорить переход к развитой трехмерной турбулентности на начальных участках оторвавшихся сдвиговых слоев и за счет этого существенно повысить точность расчета отрывных течений без дополнительного измельчения расчетной сетки. Наконец, еще одним важным в контексте настоящей работы достоинством DDES является то, что он сравнительно легко сочетается с моделями ЛТП, базирующимися на уравнениях Рейнольдса (см. например, [11, 12, 19, 20]). Это связано с тем, что при закритическом обтекании сферы ЛТП происходит в присоединенном пограничном слое, который в рамках DDES полностью описывается с помощью RANS.

Базируясь на высказанных выше соображениях, в настоящей работе для решения рассматриваемой задачи, то есть для моделирования кризиса сопротивления при обтекании сферы, был применен недавно предложенный метод SST KD DDES [21], в котором в качестве базовой модели RANS используется экономичная алгебраическая модель ЛТП в сочетании с k - ω Shear Stress Transport (SST) [22] моделью турбулентности для RANS, а подсеточный масштаб в методе DDES адаптирован к слоям смешения.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 приведена формулировка модели SST KD DDES. Раздел 2 посвящен описанию численного метода решения определяющих уравнений, в разд. 3

описаны постановка задачи и используемые расчетные сетки, а в разд. 4 представлены полученные результаты.

1. МОДЕЛЬ SST KD DDES

Данная модель включает два уравнения переноса относительно величин кинетической энергии турбулентности k и ее удельной диссипации ω

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k k)}{\partial x_k} = \gamma P_k + (1 - \gamma) P_{\text{sep}} - \frac{\beta^* \rho \omega k^{3/2}}{l_{\text{DDES}}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\rho u_k \omega)}{\partial x_k} = \rho \frac{\alpha}{\mu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \end{cases} \quad (1.1)$$

Уравнение переноса ω в (1.1) совпадает с соответствующим уравнением модели SST DDES [23], а в уравнение переноса k внесены два изменения по сравнению с этой моделью, предназначенные для описания ЛТП. В частности, в качестве множителя перед генерационным членом P_k введен коэффициент перемежаемости γ и добавлено новое слагаемое $(1 - \gamma) P_{\text{sep}}$.

Гибридный линейный масштаб l_{DDES} в уравнении переноса k определяется соотношением $l_{\text{DDES}} = l_{\text{RANS}} - f_d \cdot \max\{0, (l_{\text{RANS}} - C_{\text{DES}} l_{\text{LES}})\}$, где $l_{\text{RANS}} = k^{1/2} / \beta^* \omega$ – линейный масштаб турбулентности RANS-модели SST, l_{LES} – подсеточный линейный масштаб, а “весовая” функция f_d , управляющая переходом от RANS к LES-модели, рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} f_d &= 1 - \tanh \left[(C_{d1} r_d)^{C_{d2}} \right] \\ r_d &= \frac{(v_t + v)}{\kappa^2 d_w^2 \sqrt{0.5 \cdot (S^2 + \Omega^2)}} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь d_w – расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей стенки, v и v_t – величины молекулярной и турбулентной вязкости, соответственно, а $S = \sqrt{2 \dot{S}_{ij} \dot{S}_{ij}}$ и $\Omega = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}$ – инварианты тензоров скоростей деформации $\dot{S}_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i) / 2$ и завихренности $\Omega_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j - \partial U_j / \partial x_i) / 2$.

Как уже отмечалось, в качестве подсеточного линейного масштаба l_{LES} используется адаптированный к слоям смешения масштаб Δ_{SLA} , определяемый соотношениями [18]

$$\Delta_{\text{SLA}} = \tilde{\Delta}_\omega F_{\text{KH}}^{\text{DDES}} (\text{VTM}) \quad (1.3)$$

Здесь $\tilde{\Delta}_\omega = \max_{n,m=1,8} |(\mathbf{l}_n - \mathbf{l}_m)| / \sqrt{3}$, а величина VTM определяется соотношением

$$\text{VTM} = \left\langle \frac{\sqrt{6} |(\dot{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \boldsymbol{\Omega}|}{\Omega^2 \sqrt{3 \text{tr}(\dot{\mathbf{S}}^2) - [\text{tr}(\dot{\mathbf{S}})]^2}} \right\rangle \times \max \left\{ 1, \frac{0.2v}{\max \{ (v_t - v_{t,\infty}), 10^{-6} v_{t,\infty} \}} \right\}$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор завихренности, $\text{tr}(\cdot)$ – след тензора, $\mathbf{l}_n = \mathbf{n}_\omega \times \mathbf{r}_n$, $\mathbf{n}_\omega$ – орт вектора завихренности, $\mathbf{r}_n$ – радиус-вектор вершин рассматриваемой ячейки сетки, а угловые скобки означают осреднение по центрам этой и ближайших к ней ячеек.

Наконец, безразмерная функция $F_{\text{KH}}^{\text{DDES}} (\text{VTM})$ имеет вид

$$F_{\text{KH}}^{\text{DDES}} (\text{VTM}) = F_{\text{KH}}^{\text{DDES}} = \begin{cases} 1.0, & f_d < (1 - \epsilon) \\ \max \left\{ F_{\text{KH}}^{\min}, \left[F_{\text{KH}}^{\max}, F_{\text{KH}}^{\min} + \frac{F_{\text{KH}}^{\max} - F_{\text{KH}}^{\min}}{a_{\text{KH}2} - a_{\text{KH}1}} (\text{VTM} - a_{\text{KH}1}) \right] \right\}, & f_d \geq (1 - \epsilon) \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь эмпирические константы равны: $F_{KH}^{\min} = 0.1$, $F_{KH}^{\max} = 1.0$, $a_{KH1} = 0.075$, $a_{KH2} = 0.15$, $\varepsilon = 0.01$.

Коэффициент перемежаемости γ в (1.1) вычисляется по формуле $\gamma = \min\{\max[(Re_\Omega/A_\gamma - 1), 0], 1\}$, в которой $Re_\Omega = k/(v\Omega)$, а A_γ – эмпирическая константа. В результате, согласно используемой модели, ЛТП начинается при превышении величиной γ нуля, то есть при выполнении условия $Re_\Omega > A_\gamma$.

Для того, чтобы исключить влияние модели ЛТП на течение вне пограничного слоя, величина γ в этой области полагается равной 1.0. При этом детектором пограничного слоя служит функция F_1 из RANS-модели SST, которая близка к нулю в его внутренней части и к 1.0 во внешней

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d_w}, \frac{500v}{\omega d_w^2} \right), \frac{2k\omega}{d_w^2 (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)} \right] \quad (1.5)$$

Таким образом, $\gamma = 1.0$ при $F_1 > 0.9$.

Дополнительный член P_{sep} в уравнении (1.1), предназначенный для описания так называемого пузырькового типа ЛТП, рассчитывается по формуле $P_{sep} = C_{sep} F_{sep} S^2$, где $F_{sep} = \min\{\max[R_V/(2.2A_V) - 1, 0], 1\}$, а $R_V = d_w^2 S/v$.

В рамках модели ЛТП производится разделение кинетической энергии турбулентности на мелко-масштабную и крупномасштабную составляющие $k_s = f_{SS} \cdot k$ и $k_1 = k - k_s$ и вводятся соответствующие им “мелкомасштабная” и “крупномасштабная” вязкости $\mu_s = a_1 \rho k_s / \max(a_1 \omega, S \cdot F_2)$ и $\mu_1 = a_2 \rho k_1 / \max(a_2 \omega, S \cdot F_2)$, где эмпирическая функция F_2 из RANS модели SST рассчитывается по формуле

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2) \quad (1.6)$$

Аргумент в (1.6) определяется соотношением $\arg_2 = \max[2\sqrt{k} / (\beta^* \omega d_w), 500v / (d_w^2 \omega)]$.

Функция f_{SS} , входящая в формулу для мелкомасштабной составляющей кинетической энергии k_s , имеет следующий вид:

$$f_{SS} = \exp[-(Re_\Omega/C_{SS})^{-4}] \quad (1.7)$$

Здесь $C_{SS} = C_S(1 + C_A f_W \Psi)$, $\Psi = \tanh(-\Omega(S - \Omega)/[C_\Psi(\beta^* \omega)^2])$, $f_W = 1 - \tanh(k/C_W v \omega)$.

Расчет генерационного члена P_k в уравнениях переноса (1.1) производится так же, как и в оригинальной RANS-модели SST, т.е., по формуле $P_k = \min(-\rho u'_i u'_j \partial U_i / \partial x_j, 10 \cdot \rho \beta^* k \omega)$, однако, в выражении для входящих в нее турбулентных напряжений используются только “мелкомасштабная” турбулентная вязкость μ_s и соответствующая ей кинетическая энергия k_s

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \rho k_s \delta_{ij} - 2\mu_s \left(\dot{S}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.8)$$

При этом турбулентная вязкость μ_t , используемая в уравнениях Рейнольдса и в уравнениях переноса k и ω , определяется как сумма “мелкомасштабной” и “крупномасштабной” вязкостей ($\mu_t = \mu_s + \mu_1$).

Эмпирические константы модели выражаются через соответствующие константы k - ε (нижний индекс “1”) и k - ω (индекс “2”) ветвей с использованием весовой функции F_1 (1.5)

$$\begin{aligned} \sigma_k &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, \quad \sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega2}, \quad \beta = F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2 \\ C_{DES} &= F_1 C_{DES1} + (1 - F_1) C_{DES2}, \quad \sigma_d = 2(1 - F_1) \sigma_{\omega2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Эмпирические константы k - ε и k - ω -моделей, входящие в (1.9), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.85, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad C_{DES1} = 0.78 \\ \sigma_{k2} &= 1.0, \quad \sigma_{\omega2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad C_{DES2} = 0.61 \end{aligned}$$

Остальные константы модели равны

$$\beta^* = 0.09, a_1 = 0.31, \alpha = \beta/\beta^* - \sigma_\omega \kappa^2 / \sqrt{\beta^*}, \kappa = 0.41, C_{sep} = 2.0, A_V = 550.0, a_1 = 0.31, a_2 = 0.45 \\ A_\gamma = 1.3, C_S = 2.0, C_A = 1.0, C_\psi = 10.0, C_W = 5.0, C_{d1} = 20.0, C_{d2} = 3.0$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Расчеты проводились с использованием собственного конечно-объемного CFD-кода NTS [24], использующего многоблочные структурированные перекрывающиеся сетки (технология Chimera), что позволяет применять схемы повышенного порядка аппроксимации. Для расчета несжимаемых течений, к которым относится рассматриваемая задача, в NTS коде используется метод расщепления разностей векторов потоков Роджерса–Квака [25], основанный на комбинации схемы расщепления разностей векторов газодинамических потоков и метода введения искусственной сжимаемости Яненко–Чорина [26].

При проведении расчетов в рамках гибридных RANS-LES-подходов важную роль играет способ аппроксимации невязки составляющих векторов потоков в уравнениях движения, определяющий диссипативные свойства схемы, требования к которым в областях потока где гибридная модель функционирует в режимах RANS и LES различны. В частности, в области RANS-схема должна обеспечивать устойчивость решения на относительно грубых анизотропных сетках, что достигается с помощью противопоточных схем, обладающих достаточно высокой численной диссипацией. В противоположность этому, в LES-области необходимо использовать низко-диссипативные симметричные аппроксимации, обеспечивающие разрешение мелкомасштабной турбулентности. При применении глобальных гибридных подходов, к которым относится используемый в данной работе метод SST KD DDES, граница между RANS- и LES-подобластями определяется автоматически в процессе решения, что, вообще говоря, не позволяет априори предписать использование той или иной схемы в определенных частях расчетной области. В связи с этим в рамках глобальных гибридных подходов предпочтительно использование взвешиваемых высоко- и низко-диссипативных аппроксимаций невязки потоков с переменным по пространству весом, который зависит от решения. В частности, в настоящей работе этот вес определялся с помощью методики [27]. При этом противопоточная схема имела третий порядок точности, а симметричная – четвертый.

Для аппроксимации невязки составляющих векторов потоков в уравнениях переноса k и ω использовалась противопоточная схема второго порядка точности, а вязкие составляющие векторов потоков во всех уравнениях переноса аппроксимировались с использованием центрально-разностной схемы второго порядка.

Для аппроксимации временных производных применялась неявная трехслойная схема Эйлера второго порядка точности [28] с итерациями по псевдо-времени. При этом на каждом шаге по физическому времени проводилось 20 таких итераций.

Для решения системы дискретных аналогов исходных газодинамических уравнений на каждой итерации использовалась релаксация Гаусса–Зейделя по плоскостям, а решение уравнений переноса турбулентных характеристик производилось при помощи модифицированного (с диагональным преобладанием) метода приближенной факторизации по пространственным направлениям.

Расчеты выполнялись с использованием параллелизации вычислений на основе гибридной MPI/Open-MP концепции, что позволило обеспечить эффективную работу программы на многопроцессорном кластере “Торнадо” Суперкомпьютерного центра СПбПУ.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ

Рассматривается обтекание сферы несжимаемой жидкостью при числах Рейнольдса в диапазоне от $1.0 \cdot 10^5$ до $6.0 \cdot 10^5$, охватывающем докритические, критические и закритические режимы течения.

Расчетная область представляет собой сферу с радиусом $20D$, центр которой совпадает с центром обтекаемой сферы и началом системы координат $\{x, y, z\} = \{0, 0, 0\}$ (см. рис.1).

На поверхности сферы все компоненты скорости, градиент давления по нормали к стенке и кинетическая энергия турбулентности k задавались равными нулю, а ее удельная скорость диссипации ω вычислялась по формуле [29]

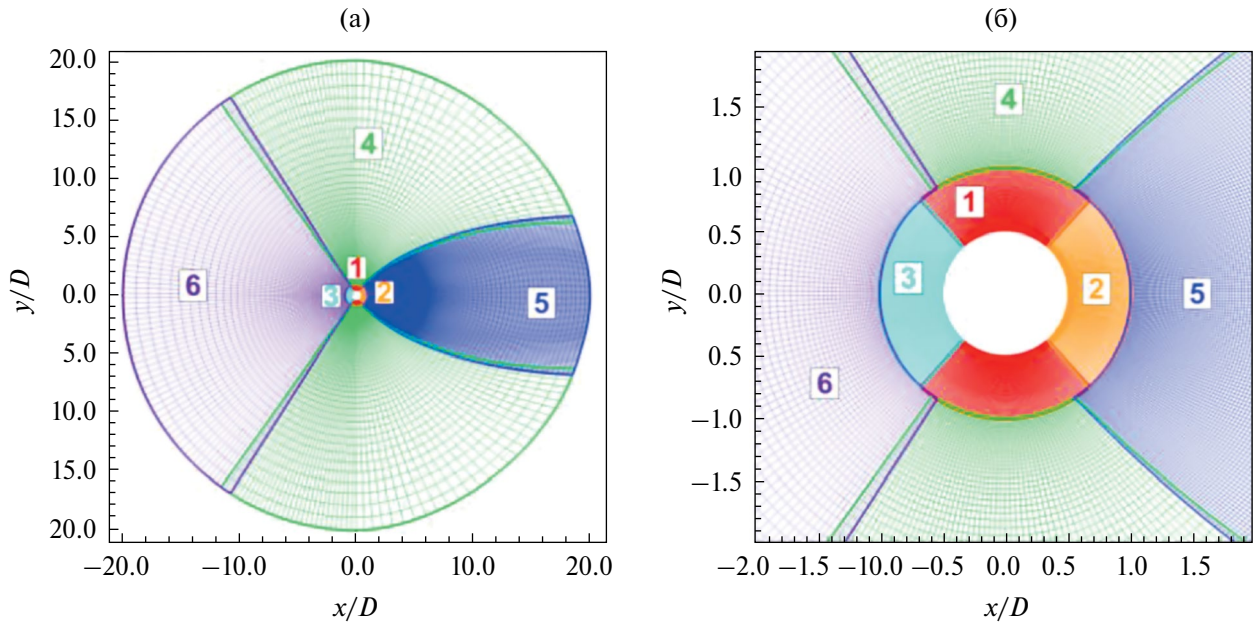


Рис. 1. Конфигурация расчетной области и многоблочная расчетная сетка Grid1 в плоскости $z = 0$: (а) — полная область, (б) — фрагмент в окрестности сферы; 1–6 — номера блоков сетки.

$$\omega_w = \frac{60v}{\beta_1 (\Delta d_1)^2}, \quad (3.1)$$

где Δd_1 — размер первого пристеночного шага по направлению нормали к поверхности сферы.

На входной части внешней границы расчетной области ($x \leq 0$) задавались постоянные значения компонент скорости равные соответствующим значениям в набегающем потоке, а давление определялось путем линейной экстраполяции его значений из внутренних точек расчетной области. Кинетическая энергия турбулентности k и ее удельная диссипация ω также считались постоянными, а их величины (см. табл. 1) подбирались таким образом, чтобы обеспечить интенсивность турбулентности 0.45% в сечении $x = 0$, что соответствует значению в измерительной секции аэродинамической трубы, в которой проводились измерения в эксперименте [30]. Для того, чтобы добиться этого, в соответствии с рекомендациями [31], величины k и ω “замораживались” в области $x/D \leq -2.0$. На выходной части внешней границы ($x > 0$) задавалось постоянное давление, а значения всех остальных переменных определялись путем линейной экстраполяции.

Поскольку расчеты методом DDES, построенным на основе RANS-моделей перехода, еще не стали рутинной практикой, надежные рекомендации по построению сеток для таких расчетов пока отсутствуют. Очевидно лишь, что эти сетки должны, как минимум, удовлетворять известным требованиям, предъявляемым как к сеткам для RANS-моделей ЛТП, так и для метода DDES.

Так, для описания ЛТП в пограничном слое в рамках RANS величина первого пристеночного шага по нормали к стенке в переменных закона стенки Δy_1^+ не должна превышать 1.0, отношение соседних шагов должно быть не больше 1.2 [32], а в направлении потока на область ЛТП должно приходиться не менее 10 ячеек.

Что касается расчетной сетки в области отрыва, где DDES функционирует в LES моде, то согласно [33] форма ячеек в этой области должна быть близка к кубической, а их размер не должен превышать 3% от характерного размера обтекаемого тела (в данном случае диаметра сферы D).

Исходя из этих требований, была построена первая расчетная сетка Grid1, состоящая из 6 блоков с общим числом узлов около 17 миллионов (см. рис. 1). Блоки 1 и 4 этой сетки являются блоками О-типа, а остальные блоки — блоками Н-типа, что позволяет избежать сингулярности в окрестности линии $y = z = 0$. Шаги сетки во внутренних блоках 1, 2 и 3, прилегающих к поверхности сферы, измельчены во всех трех направлениях, а максимальный шаг сетки в этих блоках вдоль поверхности сферы не

Таблица 1. Характеристики турбулентности, задаваемые на входной границе.

$Re \times 10^{-5}$	$(k/U_0^2) \times 10^4$	$\omega D/U_0$
1.0	2.16	30.9
1.4	1.65	22.1
2.0	2.94	42.0
2.8	3.38	47.3
4.0	3.84	54.9
6.0	4.34	61.9

Таблица 2. Размер использовавшихся сеток и шаги по времени.

Сетка	Размер, млн узлов	Шаг по времени, $\Delta t \times U_0/D \times 10^3$
Grid1	17	5
Grid2	47	2.5
Grid3	147	1.25

превышает $6 \cdot 10^{-3}D$. Форма границы между внешними блоками 4 и 5 подобрана таким образом, чтобы след за сферой целиком попадал в блок 5.

Для исследования влияния сетки на полученные результаты, наряду с расчетами на сетке Grid1, были выполнены расчеты еще на двух сетках Grid2 и Grid3, последовательно измельченных в 1.5 раза во всех трех направлениях.

Интегрирование по времени проводилось с шагом, обеспечивающим выполнение условия $CFL < 1$ (CFL — число Куранта) и падение невязок в процессе итераций по псевдо-времени на каждом шаге по времени не менее, чем на 2 порядка.

Размеры использовавшихся сеток и соответствующих им шагов по времени приведены в табл. 2 (результаты расчетов нескольких режимов течения, выполненных с шагами по времени, уменьшенными в 2 раза, не отличались от результатов основной серии расчетов).

Расчеты на сетках Grid1 и Grid2 проводились в течение временного интервала равного 150 конвективным временам D/U_0 . При этом переходный период, необходимый для достижения статистически установившегося решения, составлял $50D/U_0$, а основной период, на котором проводилось осреднение нестационарного решения и анализ его нестационарных характеристик (аэродинамических сил, действующих на сферу, и среднеквадратичных значений их колебаний), был равен $100D/U_0$ (это составляет приблизительно 20 периодов схода вихрей при докритических и близких к критическим режимам, соответствующих числу Струхала $St \sim 0.2$). К сожалению, доступные вычислительные ресурсы не позволили провести столь же продолжительный расчет на сетке Grid3 (интервал времени, используемый для расчета осредненных параметров на этой сетке, был равен примерно $35D/U_0$). Этого времени недостаточно для надежного анализа колебаний боковой силы, в связи с чем он проводился на основе результатов расчётов на сетке Grid2.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

4.1. Осредненные характеристики потока

На рис. 2 представлены расчетные зависимости осредненных по времени и азимутальному углу ϕ поверхностных коэффициентов давления $C_p = (P - P_0)/(0.5\rho U_0^2)$ и трения $C_f = \tau_w/(0.5\rho U_0^2)$ от полярного угла θ , отсчитываемого от точки торможения потока, полученные на трех описанных выше сетках при числах Рейнольдса $Re = 10^5$, $2 \cdot 10^5$, $2.8 \cdot 10^5$, $4 \cdot 10^5$ и $6 \cdot 10^5$. Там же для сравнения символами показаны соответствующие экспериментальные данные из работы [30], полученные при наиболее близких к расчетным значениях числа Рейнольдса. Как видно из этих рисунков, чувствительность результатов расчетов к используемой сетке сильно зависит от рассматриваемого числа Рейнольдса.

Так, для докритического режима течения ($Re = 10^5$) зависимости $C_p(\theta)$ и $C_f(\theta)$ из расчетов, выполненных на сетках Grid2 и Grid 3, близки между собой, что позволяет рассматривать решение, полученное на сетке Grid2, как практически сеточно-независимое.

При значении $Re = 2 \cdot 10^5$, которое как будет показано ниже соответствует начальному этапу кризиса сопротивления, решения на сетках Grid1 и Grid2 остаются близкими, и при отсутствии решения на самой мелкой сетке Grid3 это могло бы создать ложное впечатление о том, что они также являются сеточно-независимыми. Однако, решение на сетке Grid3 сильно отличается от этих двух решений, а дальнейшее измельчение сетки требует недоступных вычислительных ресурсов, что не позволяет обоснованно утверждать, что эта сетка обеспечивает сошедшееся по сетке решение для этого числа Рейнольдса.

При числах Рейнольдса $Re = 2.8 \cdot 10^5$ и $4.0 \cdot 10^5$ (около- и слегка закритический режимы течения) распределения $C_p(\theta)$ и $C_f(\theta)$, полученные на сетках Grid2 и Grid3, близки между собой (существенное различие между ними наблюдается только для θ в диапазоне от 100° до 130°), что позволяет считать результаты, полученные на сетке Grid3, практически сошедшимися по сетке.

Наконец, при закритическом значении числа Рейнольдса $6.0 \cdot 10^5$ в зоне отрыва наблюдается значительное различие результатов расчета на всех трех сетках, то есть сеточная сходимость в этом случае не достигается. Это свидетельствует о необходимости использования для расчета закритических режимов существенно более мелких сеток.

Что касается согласования результатов расчета с экспериментом, то с учетом исключительной сложности рассматриваемого течения и некоторого различия расчетных и экспериментальных чисел Рейнольдса, в целом, его можно признать удовлетворительным. Как и следовало ожидать, наиболее сильные различия расчетных и экспериментальных распределений $C_p(\theta)$ и $C_f(\theta)$ наблюдаются в отрывной области течения при около- и закритических числах Рейнольдса $Re > 2 \cdot 10^5$ и связаны с различием сценариев ЛТП, реализующихся в расчете и в эксперименте. Так, экспериментальные распределения $C_f(\theta)$ для этих режимов (см. рис. 2) свидетельствуют о том, что в опытах ЛТП происходит в присоединенном ламинарном пограничном слое, в то время как расчеты предсказывают так называемый “пузырьковый” сценарий ЛТП, то есть отрыв ламинарного пограничного слоя, сопровождающийся быстрым переходом к турбулентности в оторвавшемся слое смещения и его присоединением к обтекаемой поверхности с последующим отрывом, характеризующимся резким локальным минимумом отрицательного трения. Следует отметить, однако, что именно такой (пузырьковый) сценарий перехода при около- и закритических режимах обтекания сферы наблюдался и в ряде экспериментов (см., например, работы [34, 35] и визуализацию течения из [34] на рис. 3).

Наконец, на рис. 4 представлено сравнение с экспериментальными данными из работ [5, 30, 35, 36] расчетной зависимости интегрального коэффициента сопротивления сферы $C_D = F_x / (0.5 \rho U_0^2 \pi D^2 / 4)$ (F_x — проекция вектора силы $\mathbf{F}$, действующей на сферу, на направление набегающего потока) от числа Рейнольдса, полученной на сетке Grid3.

Как видно из данного рисунка, экспериментальные данные имеют большой разброс, что косвенно свидетельствует о возможных различиях в условиях проведения экспериментов, например, разной степени турбулентности в набегающем на сферу потоке и/или шероховатости поверхности сферы. Значительные различия наблюдаются как в величинах критического числа Рейнольдса (согласно [1] оно определяется как значение, при котором $C_D = 0.3$), так и в значениях C_D при заведомо до- и закритических режимах течения, что не позволяет сделать однозначный вывод о степени согласования расчета с экспериментом. Тем не менее, можно констатировать, что модель SST KD DDES качественно верно описывает явление кризиса сопротивления (резкое падение C_D в относительно узком диапазоне изменения числа Рейнольдса) и общий характер изменения C_D с ростом числа Рейнольдса. Отметим также, что расчетное значение C_D при докритическом режиме течения и значение критического числа Рейнольдса оказываются близкими к соответствующим экспериментальным значениям, [35], а расчетная величина C_D при закритических режимах, хорошо согласуется с данными [5, 30].

4.2. Нестационарные характеристики

Как отмечалось во Введении и в конце раздела 3, обтекание сферы при околокритических и закритических режимах течения характеризуется протеканием сложных относительно низкочастотных нестационарных процессов и существенной асимметрией. Для расчетного анализа этих процессов на сетке Grid3 требуются чрезмерно большие вычислительные ресурсы. Поэтому анализ этих характеристик

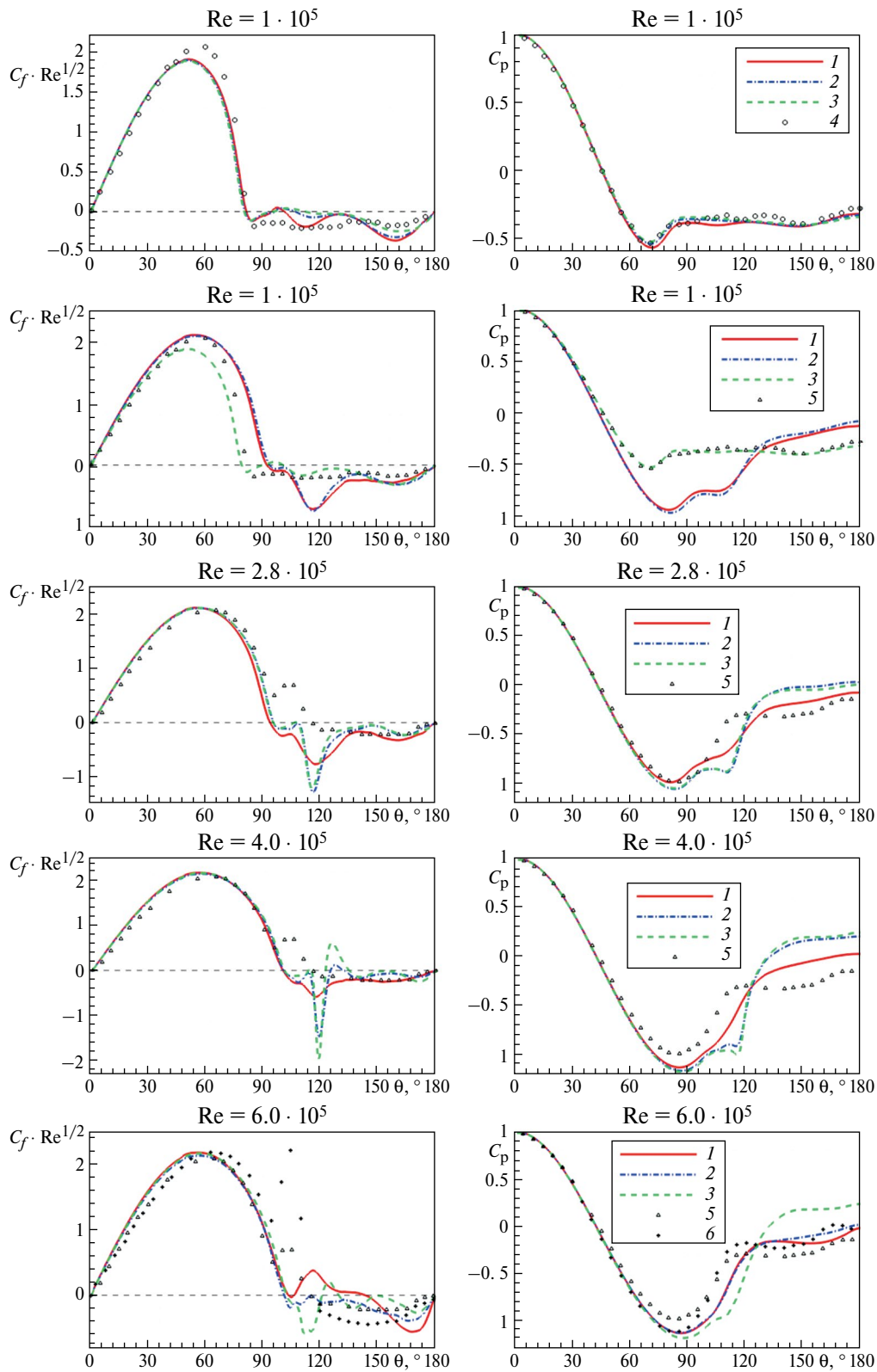


Рис. 2. Сравнение осредненных по времени и азимутальному углу расчетных распределений коэффициентов трения и давления на поверхности сферы, полученных при различных числах Рейнольдса, с экспериментальными данными [30]: 1–3 – результаты расчетов на сетках Grid1 – Grid3, 4–6 – результаты экспериментальных исследований при $Re = 1.62 \cdot 10^5$, $3.18 \cdot 10^5$ и $1.14 \cdot 10^6$ соответственно.

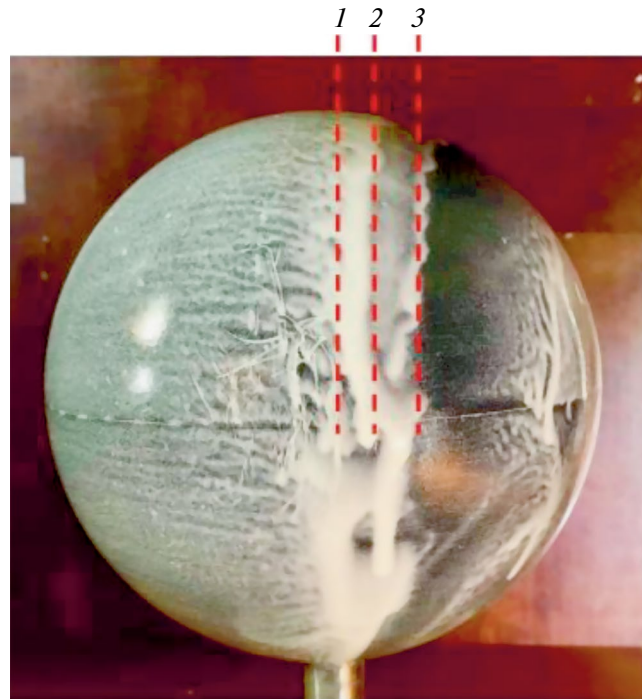


Рис. 3. Экспериментальная визуализация обтекания сферы при $Re=3.2 \cdot 10^5$ с помощью масляной пленки из работы [34]: 1 – ламинарный отрыв, 2 – присоединение турбулентного слоя смешения, 3 – турбулентный отрыв.

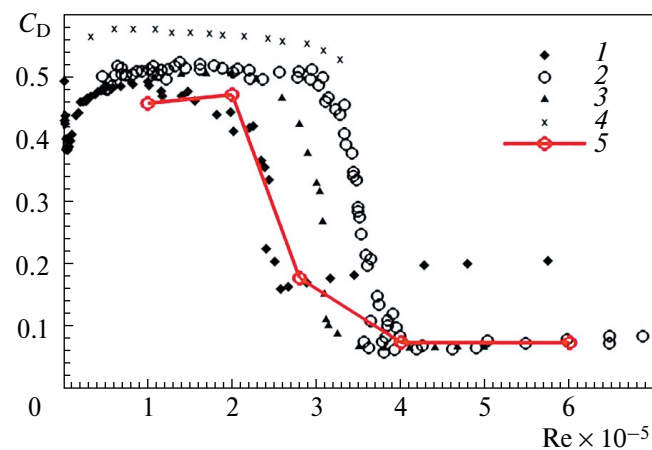


Рис. 4. Сравнение расчетной зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса, полученной на сетке Grid3 (5), с экспериментальными данными [35] (1), [30] (2), [5] (3) и [36] (4).

выполнен на сетке Grid2, и к его результатам, представленным на рис. 5–7, следует относиться с определенной осторожностью, поскольку, как показано в предыдущем разделе, она не всегда обеспечивает достаточно надежное пространственное разрешение.

Рисунок 5 иллюстрирует сложную нестационарную картину обтекания сферы с помощью “карты” мгновенных полей коэффициента поверхностного трения в координатах $\theta - \varphi$.

При докритическом числе Рейнольдса (рис. 5а) от поверхности сферы отрывается ламинарный пограничный слой (угол отрыва θ в этом случае относительно слабо зависит от азимутального угла φ), а затем в оторвавшемся слое смешения происходит турбулизация потока. При близком к критическому числу

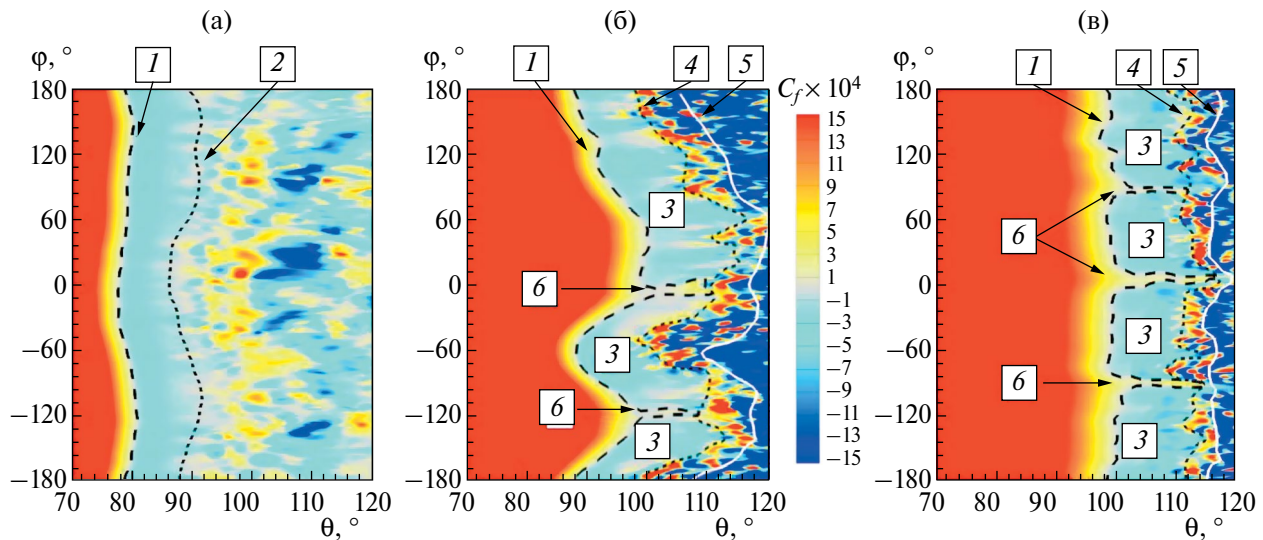


Рис. 5. Карта мгновенных полей коэффициента поверхностного трения при $Re = 1.4 \cdot 10^5$ (а), $Re = 2.0 \cdot 10^5$ (б) и $Re = 4.0 \cdot 10^5$ (в): 1 – ламинарный отрыв, 2 – возникновение турбулентных вихрей в слое смешения, 3 – переходный пузырь, 4 – присоединение отрывного турбулентного пузыря, 5 – турбулентный отрыв, 6 – “языки” ЛТП в присоединенном пограничном слое.

Рейнольдса (рис. 5б) сценарий ЛТП и положение отрыва зависят от азимутального угла. При некоторых углах (для рассматриваемого момента времени при φ в окрестности 0° и -120°) имеет место ЛТП в присоединенном ламинарном пограничном слое и турбулентный отрыв при θ около 120° , а при остальных углах – пузырьковый переход и турбулентный отрыв, положение которого сильно зависит от азимутального угла φ . Наконец, при дальнейшем росте числа Рейнольдса (рис. 5в) число “языков” с переходом в присоединенном пограничном слое увеличивается, а области с пузырьковым переходом соответственно сужаются, общая картина течения опять становится более однородной по φ .

Из анализа визуализации эволюции во времени мгновенной изоповерхности величины закрутки (второго собственного числа тензора градиента скорости λ_2) для околокритического режима можно сделать вывод о том, что в некоторые моменты времени в ближнем следе сферы формируется асимметричная крупномасштабная турбулентная структура, представляющая собой вихревую пару. Один из “кадров” этой анимации, соответствующий моменту времени возникновения этой вихревой структуры представлен на Рис. 14а. В другие моменты времени эта структура может быть ориентирована в другом направлении или вообще отсутствовать (см. Рис. 14б).

Изменение структуры течения в ближнем следе приводит к существенному нарушению осевой симметрии распределения давления на поверхности сферы при $x > 0$ (см. рис. 6в) и, как следствие, к появлению нестационарной “боковой” силы (проекции вектора полной силы $\mathbf{F}$ на плоскость YZ). Зависимости коэффициента этой силы C_{side} и силы сопротивления C_D от времени, представленные на рис. 7а, свидетельствуют о том, что максимальные значения C_{side} вполне сопоставимы с величиной C_D . Следует отметить, что вихревая пара, представленная на рис. 6а, наблюдается в те моменты времени, когда боковая сила максимальна. На рис. 7б показан энергетический спектр пульсаций C_{side} , который имеет максимум при числе Струхала около 0.2, что согласуется с результатами экспериментальных измерений при до- и околокритических режимах течения [3].

Красными штриховыми линиями на левом рисунке показаны моменты времени, соответствующие визуализациям на рис. 6.

Наконец, на рис. 8 сравнивается расчетная зависимость среднеквадратичного отклонения коэффициента боковой силы $gms(C_{side})$ от числа Рейнольдса с аналогичной экспериментальной зависимостью из [5]. Видно, что расчет хорошо описывает форму экспериментальной кривой и обеспечивает достаточно точное предсказание максимального значения $gms(C_{side})$. Однако положение расчетного пика gms , который достигается при критическом числе Рейнольдса, несколько сдвинуто влево от положения

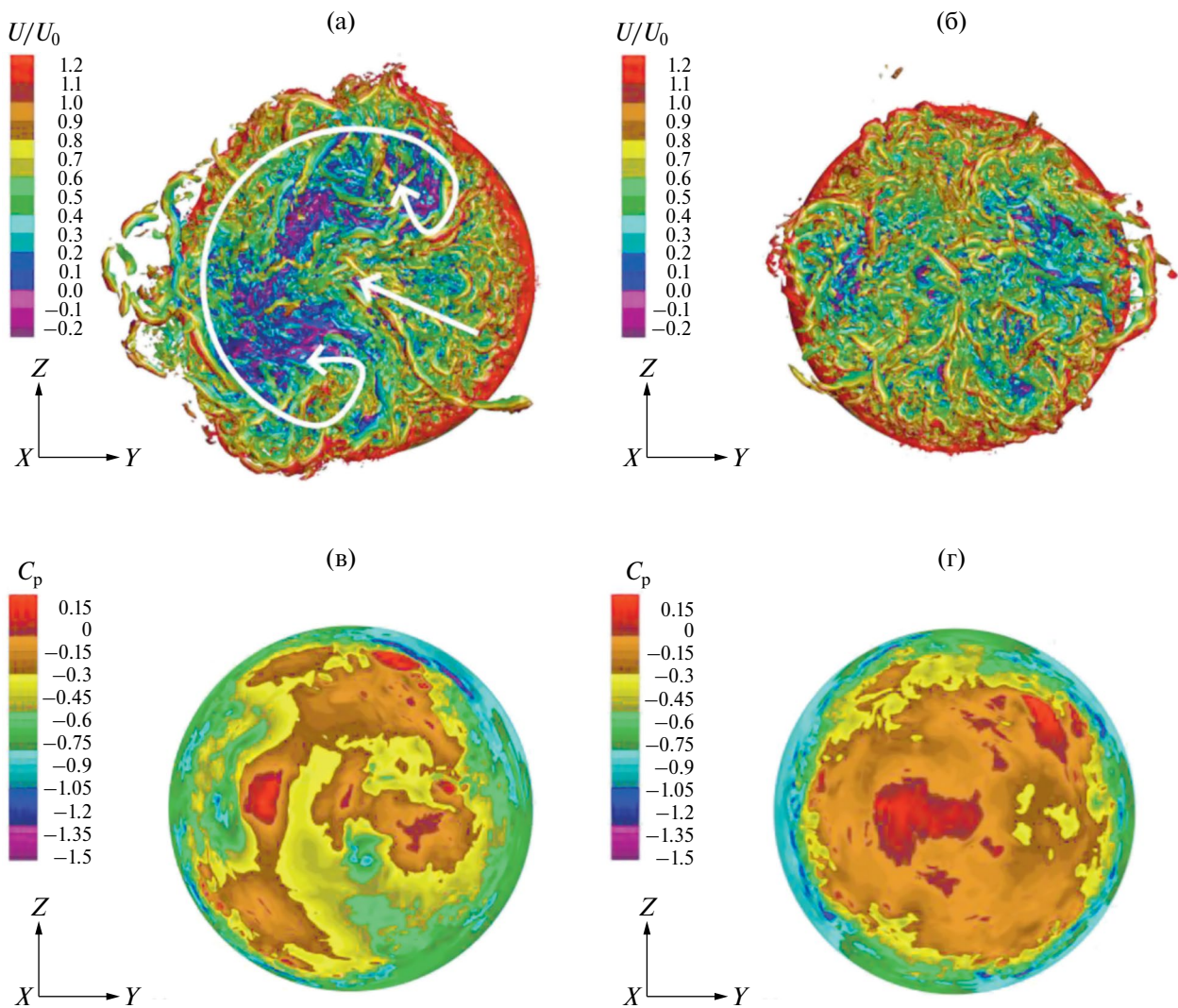


Рис. 6. Визуализация структуры течения в ближнем следе за сферой при $Re = 2.0 \cdot 10^5$ с помощью мгновенной изо-поверхности величины закрутки $\lambda_2 = 15$, раскрашенной продольной составляющей скорости (а, б) и мгновенные поля давления на задней полусфере (в, г) в моменты времени $tU_0/D = 33.5$ (а, в) и 9.0 (б, г).

экспериментального пика, что соответствует отмечавшемуся выше различию критических чисел Рейнольдса в расчете и эксперименте [5] (см.рис.4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые выполнено численное моделирование кризиса сопротивления при обтекании сферы в рамках гибридной RANS–LES-модели DDES в сочетании с алгебраической RANS-моделью ламинарно-турбулентного перехода. Основные результаты проведенных исследований состоят в следующем.

Показано, что используемая комплексная модель (модель SST KD DDES [21]) качественно правильно описывает кризис сопротивления при обтекании сферы и сопровождающие его сложные процессы, в том числе, нестационарный характер и сильную асимметрию ближнего следа сферы при околокритических числах Рейнольдса. Модель также обеспечивает приемлемое количественное согласование с экспериментом по таким параметрам как коэффициент сопротивления, число Струхала колебаний боковой силы, и максимум ее среднеквадратичных значений при околокритических режимах течения. Вместе с тем, отмечается различие расчета с экспериментом по положению и типу ламинарно-турбулентного перехода при $Re >$

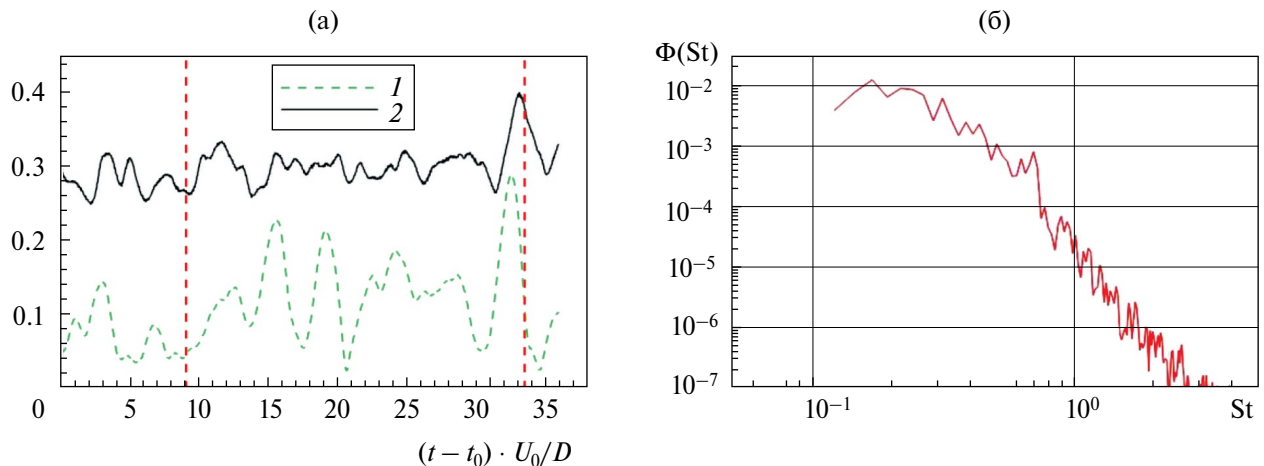


Рис. 7. Расчетные зависимости от времени коэффициентов боковой силы C_{side} (кривая 1) и силы сопротивления C_D (кривая 2) (а) и энергетический спектр C_{side} (б) при $Re = 2.0 \cdot 10^5$.

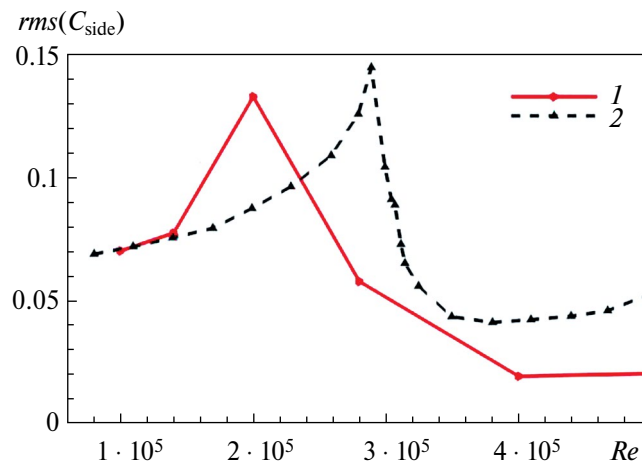


Рис. 8. Сравнение расчетной зависимостей среднеквадратичного отклонения боковой силы $rms(C_{side})$ от числа Рейнольдса, полученной в настоящей работе 1 с экспериментальными данными [5] 2.

$2 \cdot 10^5$ и по значению критического числа Рейнольдса. Однако оценивая это различие следует иметь в виду большой разброс экспериментальных данных. Кроме того, результаты расчетов на серии последовательно измельчающихся сеток свидетельствуют о том, что, по крайней мере, частично эти различия связаны с недостаточным пространственным разрешением (при около- и закритических значениях числа Рейнольдса добиться сеточной сходимости решений не удалось) и с недостаточно длинными временными выборками, используемыми для статистической обработки результатов расчетов, из-за ограниченности доступных вычислительных ресурсов. Наконец, нельзя исключить возможность неточности описания процессов ламинарно-турбулентного перехода с помощью KD-модели в существенно нестационарных пограничных слоях. Для проверки этого предположения планируется проведение исследования аналогичного исследования, выполненному в настоящей работе, с использованием какой-либо альтернативной модели ЛТП.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа проведена при поддержке РФФ (грант № 23-21-00031). Все расчеты выполнены на высокопроизводительном кластере “Торнадо” Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (<http://www.spbstu.ru>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. -Л.: Гостехиздат, 1950. 676 с.
2. Шлихтинг Г. Теория Пограничного Слоя. 5-е изд. М.: Наука, 1974. 712 с.
3. Tiwari S.S., Pal E., Bale S., Minocha N., Patwardhan A.W., Nandakumar K., Joshi J.B. Flow past a single stationary sphere, 2. Regime mapping and effect of external disturbances // Powder Technol. 2020. V. 365. P. 215–243.
4. Taneda S. Visual observations of the flow past a sphere at Reynolds numbers between 10^4 and 10^6 // J. Fluid Mech. 1978. V. 85, № 1. P. 187–192.
5. Norman A.K., McKeon B.J. Unsteady force measurements in sphere flow from subcritical to supercritical Reynolds numbers // Exp. Fluids. 2011. T. 51. № 5. C. 1439–1453.
6. Deshpande R., Desai A., Kanti V., Mittal S. Experimental investigation of boundary layer transition in flow past a bluff body // J. Phys. Conf. Ser. 2017. V. 822. C. 012003.
7. Sakamoto H., Haniu H. A Study on Vortex Shedding From Spheres in a Uniform Flow // J. Fluids Eng. 1990. V. 112, № 4. P. 386–392.
8. Constantinescu G., Squires K. Numerical investigations of flow over a sphere in the subcritical and supercritical regimes // Phys. Fluids. 2004. V. 16, № 5. P. 1449–1466.
9. Muto M., Tsubokura M., Oshima N. Negative Magnus lift on a rotating sphere at around the critical Reynolds number // Phys. Fluids. 2012. V. 24, № 1. P. 014102.
10. Texier B.D., Cohen C., Quéré D., Clanet C. Physics of knuckleballs // New J. Phys. 2016. V. 18, № 7. P. 073027.
11. Suzen Y., LeBeau R. Cylinder Flow Simulation Using Combined Hybrid Turbulence and Transition Models // 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Seattle, Washington: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
12. Sørensen N.N., Bechmann A., Zahle F. 3D CFD computations of transitional flows using DES and a correlation based transition model // Wind Energy. 2011. V. 14, № 1. P. 77–90.
13. You J.Y., Kwon O.J. A Blended Model for Simulating Massive Flow Separation and Laminar-Turbulence Transition // 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. New Orleans, Louisiana: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
14. Hodara J., Smith M.J. Improved Turbulence and Transition Closures for Separated Flows // Proceedings of 41st European Rotorcraft Forum (ERF2015-113). Munich, Germany, 2015. P. 18.
15. Kim H.J., Kwon O.J. Numerical Simulation of Transitional Flows Using a Blended IDDES and Correlation-Based Transition Model // Comput. Fluids. 2021. 104916.
16. Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M., Allmaras S.R. Comments on the feasibility of LES for winds, and on a hybrid RANS/LES approach. 1997.
17. Spalart P. R., Deck S., Shur M.L., Squires K.D., Strelets M. Kh., Travin A. A New Version of Detached-eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2006. V. 20, № 3. P. 181–195.
18. Probst A., Schwaborn D., Garbaruk A., Guseva E., Shur M., Strelets M., Travin A. Evaluation of grey area mitigation tools within zonal and non-zonal RANS-LES approaches in flows with pressure induced separation // Int. J. Heat Fluid Flow. 2017. V. 68. P. 237–247.
19. Qiao L., Bai J., Hua J., Wang C. Combination of DES and DDES with a Correlation Based Transition Model // Appl. Mech. Mater. 2013. V. 444–445. P. 374–379.
20. Coder J.G., Ortiz-Melendez H.D. Transitional Delayed Detached-Eddy Simulation of Multielement High-Lift Airfoils // J. Aircr. 2019. V. 56, № 4. P. 1303–1312.
21. Стабников А. С., Гарбарук А.В. Алгебраическая модель ламинарно-турбулентного перехода для расчета турбулентных течений на основе метода моделирования отсоединенных вихрей // НТВ СПбГПУ. Физ.-мат. науки, 2022, т. 15, № 1, с. 16–29.
22. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Heat Mass Transf. 2003. V. 4.
23. Gritskevich M. S., Garbaruk A.V., Schütze J., Menter F.R. Development of DDES and IDDES Formulations for the $k-\omega$ Shear Stress Transport Model // Flow Turbul. Combust. 2012. V. 88, № 3. P. 431–449.
24. Shur M., Strelets M., Travin A. High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows // Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology. Huntington Beach, USA. 2004.

25. *Rogers S., Kwak D.* An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations // 6th Applied Aerodynamics Conference. Williamsburg, VA, U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988.
26. *Chorin A.J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. 1967. V. 2, № 1. P. 12–26.
27. *Travin A., Shur M., Strelets M., Spalart P.R.* Physical and Numerical Upgrades in the Detached-Eddy Simulation of Complex Turbulent Flows // Advances in LES of Complex Flows / под ред. Friedrich R., Rodi W. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. V. 65. P. 239–254.
28. *Kim S.-E., Makarov B.* An Implicit Fractional-Step Method for Efficient Transient Simulation of Incompressible Flows // 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Toronto, Ontario, Canada: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005.
29. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32, № 8. P. 1598–1605.
30. *Achenbach E.* Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 1972. V. 54, № 3. P. 565–575.
31. *Zore K., Matyushenko A., Shah S., Aliaga C., Stokes J., Menter F.* Laminar–Turbulent Transition Prediction on Industrial Computational Fluid Dynamics Applications // J. Aircr. 2023. V. 60, № 1. P. 1–20.
32. *Matyushenko A.A., Stabnikov A.S., Garbaruk A.V.* Criteria of computational grid generation for turbulence models taking into account laminar-turbulent transition // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1400. 077047.
33. *Spalart P.R.* Young–Person’s Guide to Detached-Eddy Simulation Grids: Contractor Report NASA/CR-2001–211032. 2001. P. 23.
34. *Nakhostin S.M., Giljarhus K.E.T.* Investigation of transitional turbulence models for CFD simulation of the drag crisis for flow over a sphere // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2019. V. 700. P. 012007.
35. *Prandtl L.* Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Verlag R. Oldenbourg: 1923.
36. *Bakić V.* Experimental investigation of turbulent flows around a sphere. 2003. P. 86.

Numerical Modeling of the Drag Crisis in Flow past a Sphere Using a Vortex-Resolving Approach

A. S. Stabnikov^{a,*}, A. V. Garbaruk^a, and M. Kh. Strelets^a

^a *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251 Russia*

^{*}*e-mail: an.stabnikov@gmail.com*

The drag crisis in flow past a sphere is modeled within the framework of the recently formulated vortex-resolving hybrid RANS–LES approach, which includes a semi-empirical model of laminar-turbulent transition. The calculations performed in a wide Reynolds number range show that the complex model used yields a qualitatively adequate description of all aspects of the drag crisis including such fine effects, as the growth of the side force oscillation amplitude at near-critical Reynolds numbers. At the same time, the results obtained indicate that it is very fine computation grids that should be used for obtaining qualitatively accurate predictions of the critical Reynolds number and the details of laminar-turbulent transition in near-critical flow regimes.

Keywords: drag crisis, flow past a sphere, laminar-turbulent transition, critical Reynolds number, hybrid RANS-LES approach, semi-empirical model of laminar-turbulent transition.

УДК 532.522

ПРИСТЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ЗАКРУЧЕННЫЕ СТРУИ

© 2024 г. А. М. Гайфуллин*, А. С. Щеглов**

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, Жуковский, Россия

** e-mail: gaifullin@tsagi.ru*

*** e-mail: shcheglov@phystech.edu*

Поступила в редакцию 03.03.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

С помощью численного моделирования исследуется задача об истечении турбулентной трехмерной пристенной закрученной струи несжимаемой жидкости. Целью исследования является определение структуры течения в струе, сравнение характеристик закрученной и незакрученной пристенных струй. Численное решение уравнений движения получено с помощью метода крупных вихрей с пристенным разрешением (WRLES). Результаты моделирования сравниваются с данными единственной опубликованной работы, посвященной экспериментальному исследованию закрученных пристенных струй.

Ключевые слова: пристенная струя, закрученная струя, автомодельность, метод крупных вихрей.

DOI: 10.31857/S1024708424030086, **EDN:** PFKSXY

При больших числах Рейнольдса течение жидкости или газа переходит из ламинарной формы в турбулентную. Для струй такой переход происходит при сравнительно небольших числах Рейнольдса. Поэтому почти все экспериментальные исследования пристенных струй — струй, бьющих из сопла параллельно бесконечной твердой плоскости, связаны с определением характеристик турбулентных струй [1–13]. Эти экспериментальные работы посвящены плоским (вытекающим из узкой щели) струям [1–4], трехмерным (вытекающим из концентрированного источника) незакрученным струям [5–12], и лишь в одной работе [13] определяются характеристики турбулентной пристенной закрученной струи. К основным результатам публикации [13] следует отнести определение характеристик незакрученной струи и закрученной струи при двух параметра закрутки, что позволило определить тенденцию изменения величин в зависимости от закрутки, а также экспериментальное доказательство того, что вдали от источника осредненные характеристики струи выходят на автомодельный режим.

Публикаций по расчету трехмерных пристенных турбулентных и ламинарных струй также немного [17–19], и все они, кроме последней, посвящены незакрученным струям. В недавней работе [19] были определены характеристики ламинарной трехмерной пристенной закрученной струи несжимаемой жидкости. В этой работе показано, что при небольших значениях закрутки пристенная струя в дальней области довольно быстро теряет свою закрутку, ее распространение происходит под некоторым углом к первоначальному направлению выдува, характеристики выходят на автомодельный режим. Начиная с некоторого значения закрутки, течение в струе становится нестационарным, периодическим, у выходного отверстия трубы вблизи оси струи появляются рециркуляционные области. Что касается публикаций других исследователей по расчетам характеристик турбулентных пристенных закрученных струй, то авторам они не известны.

Структуры течений несжимаемой жидкости в пристенной незакрученной струе для ламинарного и турбулентного случаев качественно различны. В ламинарном случае имеются две области течения: в первой (внутренней) из-за уменьшения продольной скорости в струе вертикальная компонента вектора скорости направлена от твердой плоскости, а во-второй (внешней) из-за подсасывающего действия струи вертикальная компонента направлена к плоскости. Две эти области разделены близкой к полукруглости предельной линией тока [18]. В турбулентном же случае торможение струи приводит к тому, что она растекается параллельно плоскости, и практически всюду вертикальная компонента скорости направлена к плоскости.

При выборе метода моделирования турбулентного течения в пристенной струе авторы ориентировались на известные результаты расчетов трехмерных пристенных незакрученных струй: методы RANS [14, 15] давали не очень близкие к экспериментально наблюдаемым результаты, чего нельзя сказать о методах WRLES с подсеточной моделью Смогоринского [16] или с моделью WALE [17]. В данной статье моделирование течения в турбулентной пристенной закрученной струе проводится с помощью метода WRLES с подсеточной моделью WALE, которая, в отличие от модели Смогоринского, не требует применения демпфирующего множителя в пристенной части течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим струю несжимаемой жидкости, вытекающую из круглого отверстия диаметра d в вертикальной стене, примыкающего вплотную к горизонтальной твердой плоскости. Выдув струи производится в неподвижное пространство, затопленное той же жидкостью. Система координат, основные обозначения, которые будут объяснены ниже, и профили скорости в горизонтальной и вертикальной плоскостях приведены на рис. 1.

Уравнения LES получаются с помощью пространственной фильтрации уравнений Навье–Стокса с функцией фильтра $G(\mathbf{x}, \Delta)$ [20]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – вектор декартовых координат, t – время, u_i – компоненты вектора скорости, $\rho = \text{const}$ – плотность, p – давление, $\nu = \text{const}$ – кинематический коэффициент молекулярной вязкости, $\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \iiint f(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \Delta) d\mathbf{x}'$, $\tau_{i,j} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$.

Система (1.1) решается численно методом конечного объема. Роль фильтрации в данной работе выполняет интегрирование по ячейке. При таком подходе $G(\mathbf{x}, \Delta) = 1/V$ внутри ячейки и 0 вне ячейки, где V – объем ячейки.

Тензор $\tau_{i,j}$ представим в виде

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{3} \delta_{i,j} \tau_{k,k} + \left(\tau_{i,j} - \frac{1}{3} \delta_{i,j} \tau_{k,k} \right) = \frac{2}{3} \delta_{i,j} k_{sgs} + (dev \tau)_{i,j},$$

где $k_{sgs} = \tau_{kk}/2$, $(dev \tau)_{i,j} = \tau_{i,j} - \delta_{i,j} \tau_{k,k}/3$ – девиаторная часть тензора подсеточных напряжений, для моделирования которой используется гипотеза Буссинеска

$$dev \tau = 2\nu_\tau dev \bar{S},$$

$\bar{S}$ – тензор скоростей деформации с элементами $\bar{S}_{i,j} = (\bar{g}_{i,j} + \bar{g}_{j,i})/2$, $\bar{g}_{i,j} = \partial \bar{u}_i / \partial x_j$, ν_τ – кинематический коэффициент подсеточной турбулентной вязкости.

После подстановки приведенных выше выражений в систему (1.1) она принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{2}{3} k_{sgs} \right) + (\nu + \nu_\tau) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для замыкания подсеточной модели турбулентности необходимо определить k_{sgs} и ν_τ . Проведенный в некоторых работах анализ показывает, что от члена k_{sgs} решение зависит слабо [21], поэтому в данной работе пренебрежем этим слагаемым. Для ν_τ будем использовать модель WALE [22]

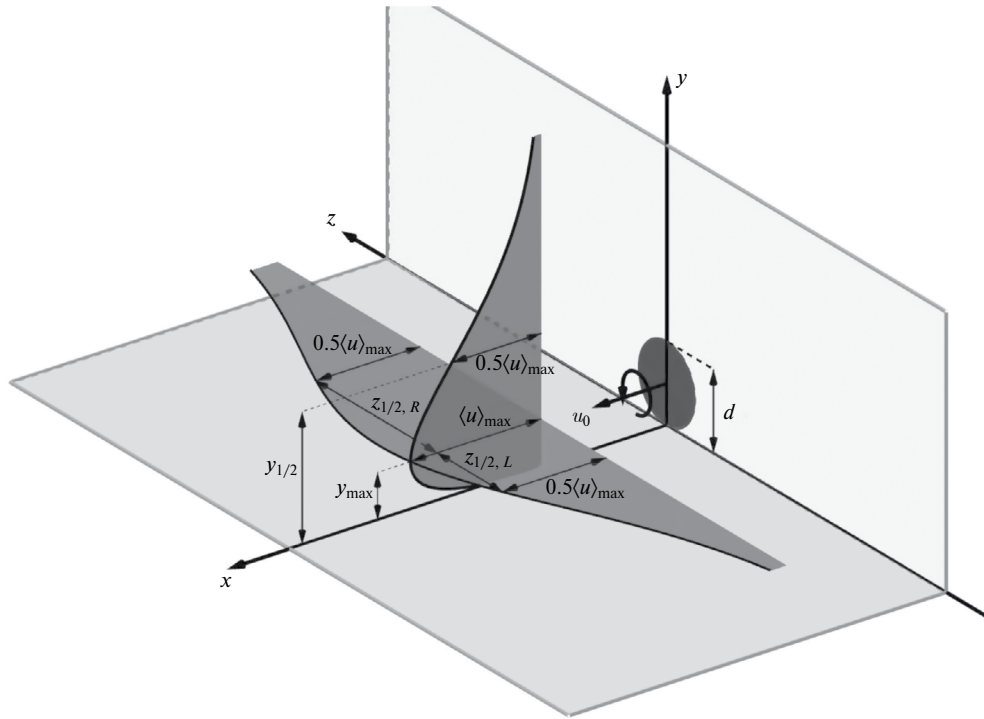


Рис. 1. Схема задачи, система координат и основные обозначения.

$$v_\tau = (C_w \Delta)^2 \frac{(\bar{S}_{i,j}^d \bar{S}_{i,j}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{i,j} \bar{S}_{i,j})^{5/2} + (\bar{S}_{i,j}^d \bar{S}_{i,j}^d)^{5/4}}, \quad (1.3)$$

где $\bar{S}_{i,j}^d = (\bar{g}_{i,j}^* + \bar{g}_{j,i}^*) / 2 - \delta_{i,j} \bar{g}_{k,k}^* / 3$, $\bar{g}_{i,j}^* = \bar{g}_{i,k} \bar{g}_{k,j}$, $C_w = 0.325$, $\Delta = \sqrt[3]{V}$. Отметим, что выражение (1.3), в отличие от модели Смагоринского, не требует дополнительных демпфирующих функций, явно зависящих от расстояния до твердой поверхности. Оно обеспечивает необходимое асимптотическое поведение, при котором коэффициент турбулентной вязкости пропорционален кубу расстояния от стенки.

Произведем переопределение так, чтобы оно соответствовало обозначениям на рис. 1: $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $u = \bar{u}_1$, $v = \bar{u}_2$, $w = \bar{u}_3$.

Систему уравнений (1.2) дополним граничными условиями: на твердых поверхностях ставится условие прилипания ($u = v = w = 0$), на большом удалении от источника струи выполняется условие затухания возмущений ($u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$, $w \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$), в начальном сечении струи (в круге радиуса d) задан однородный профиль продольной компоненты скорости в суперпозиции с твердотельным вращением ($u = u_0$, $v = -\Omega z$, $w = \Omega(y - d/2)$).

Численное интегрирование системы уравнений (1.2) с указанными выше граничными условиями осуществлялось с помощью метода конечного объема. Использовался алгоритм SIMPLEC [23], в котором уравнения импульса решаются относительно компонент вектора скорости, а уравнение неразрывности преобразуется к уравнению Пуассона для коррекции давления. Интерполяция конвективных слагаемых на грань ячейки проводилась с помощью схемы центральных разностей. Градиенты вычислялись с помощью схемы второго порядка точности, основанной на теореме Гаусса. Для интегрирования по времени использовалась неявная схема второго порядка точности. Расчеты проводились в расширяющейся с ростом x расчетной области, позволяя сосредоточить большую часть ячеек в высоконапорной области струи.

Так как расчетная область ограничена, то вместо использования граничных условий затухания на бесконечности использовался другой подход. К границе расчетной области была пристроена

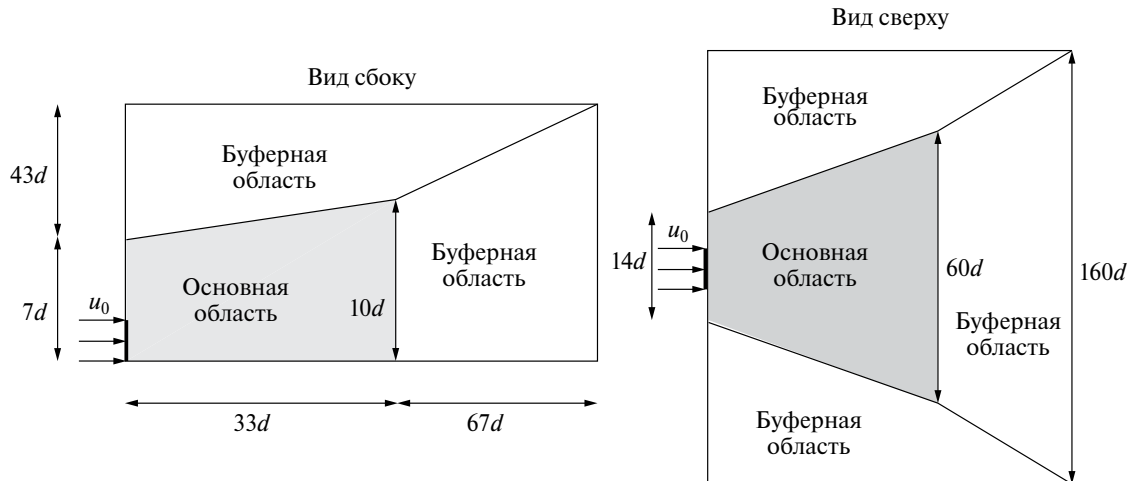


Рис. 2. Расчетная область.

вспомогательная буферная область (рис. 2), размеры ячеек в которой увеличивались по направлению к внешней границе. Укрупнение ячеек приводит к диссипации турбулентных вихрей до достижения ими выходной границы. При этом буферная область носит вспомогательный характер — смысл имеет только решение в основной области. На границах буферной области были поставлены «мягкие» условия: равенство нулю нормальной производной вектора скорости

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

При расчете характеристик трехмерных турбулентных закрученных струй в качестве основной использовалась структурированная многоблочная гексагональная расчётная сетка с общим количеством 15 миллионов ячеек, из которых на основную область приходится примерно 12 миллионов. Проводились также исследования для случая турбулентной трехмерной незакрученной струи на расчетной сетке с вдвое меньшим количеством ячеек. Сравнение этих двух расчетов показало приемлемую точность полученных результатов. Помимо пространственной дискретизации необходимо обеспечить и достаточно малую дискретизацию по времени. Шаг интегрирования по времени $\Delta t = 0.1d/u_0$ был выбран таким образом, чтобы удовлетворять условию $u\Delta t/\Delta x < 1$ во всей области течения, где u и Δx скорость течения в рассматриваемой ячейке расчетной области и продольный размер этой ячейки. Продольный размер основной части расчетной области $L = 33d$ выбирался на основе данных [13] и должен быть достаточным для выхода в автомодельную область течения.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУИ

Кроме величин, полученных с помощью пространственной фильтрации, введем понятие осредненных по времени величин

$$\langle f(x, y, z) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{f}(x, y, z, t) dt,$$

где T — длительность интервала осреднения. В данной работе значение T составило $100L/u_0$, а $t_0 = 23L/u_0$.

Для описания эволюции незакрученной струи обычно используют изменение по координате x некоторых ее характеристик: максимума продольной скорости $\langle u \rangle_{\max}$, толщины струи в вертикальном $y_{1/2}$ и горизонтальном $z_{1/2}$ направлениях и некоторые другие. Из-за взаимодействия закрученной струи с подстилающей поверхностью у струи появляется боковой импульс, который приводит к несимметрии

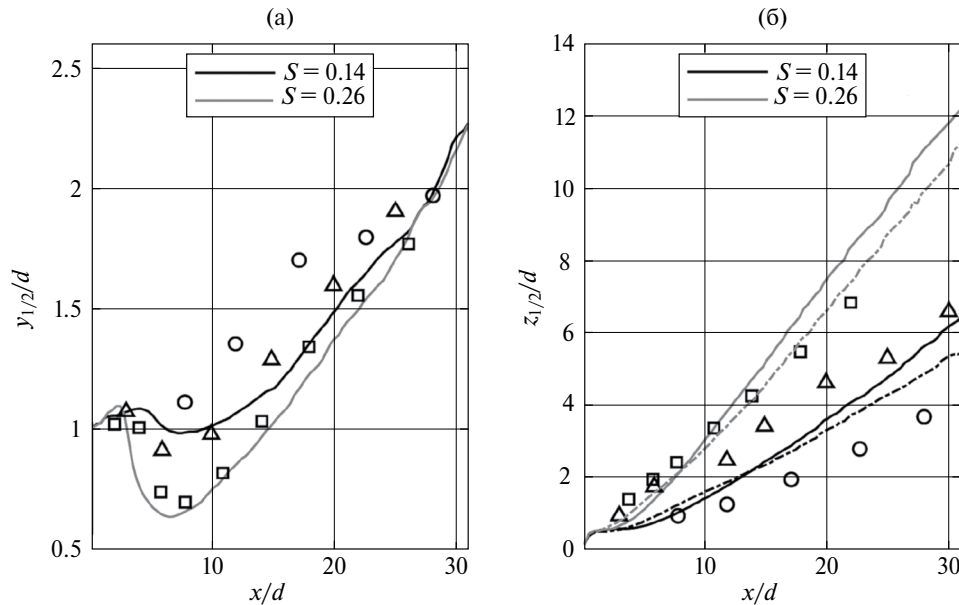


Рис. 3. Вертикальные (а) и поперечные (б) толщины струй; сплошные линии на графике справа соответствуют $z_{1/2,R}$, пунктирные — $z_{1/2,L}$, $\circ$, $\triangle$, $\square$ — результаты экспериментального исследования [13] при $S = 0$, $S = 0.141$ и $S = 0.265$.

осредненного течения относительно плоскости $z = 0$, поэтому определение вышеприведенных характеристик становится неоднозначным. Вместе с тем, эти понятия уже были введены в работе [13] при экспериментальном исследовании характеристик пристенной закрученной струи. Определим величины так же, как это сделано в [13]. Рассмотрим профиль осредненной скорости $\langle u(x, y, 0) \rangle$, построенный в плоскости $z = 0$, а его максимум обозначим через $\langle u \rangle_{\max} = \langle u(x, y_{\max}, 0) \rangle$. В качестве вертикальной толщины примем значение $y_{1/2}$ при котором $\langle u(x, y_{1/2}, 0) \rangle = 0.5 \langle u \rangle_{\max}$. Рассмотрим также профиль $\langle u(x, y_{\max}, z) \rangle$, построенный в плоскости $y = y_{\max}$. Правую и левую поперечные толщины струи определим по правилу $\langle u(x, y_{\max}, z_{1/2,R}) \rangle = \langle u(x, y_{\max}, z_{1/2,L}) \rangle = 0.5 \langle u \rangle_{\max}$.

Закрутку струи в различных научных публикациях определяют по-разному, и, опять же, так как результаты расчетов будут сравниваться с экспериментальными данными, определим эту величину так, как это сделано в работе [13]

$$S = \frac{2L}{Jd},$$

где $L = 2\pi r \int_0^{d/2} uv_{\varphi} r^2 dr$, $J = 2\pi \int_0^{d/2} (p - p_{\infty} + \rho u^2) r dr$ — потоки момента количества движения и полного импульса, рассчитанные в начальном сечении струи.

Еще одной характеристикой струи является число Рейнольдса

$$Re = \frac{u_0 d}{\nu}.$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты характеристик турбулентных трехмерных пристенных струй проведены при $Re = 7500$ и двух значениях параметра закрутки $S = 0.14$ и $S = 0.26$.

На рис. 3 показано сравнение численных и экспериментальных данных для вертикальной и горизонтальной толщин струи. Интересно отметить, что при $x > 20d$ вертикальная толщина струи слабо зависит от закрутки, в то время как различия в горизонтальной толщине с ростом x только увеличиваются. Возможно,

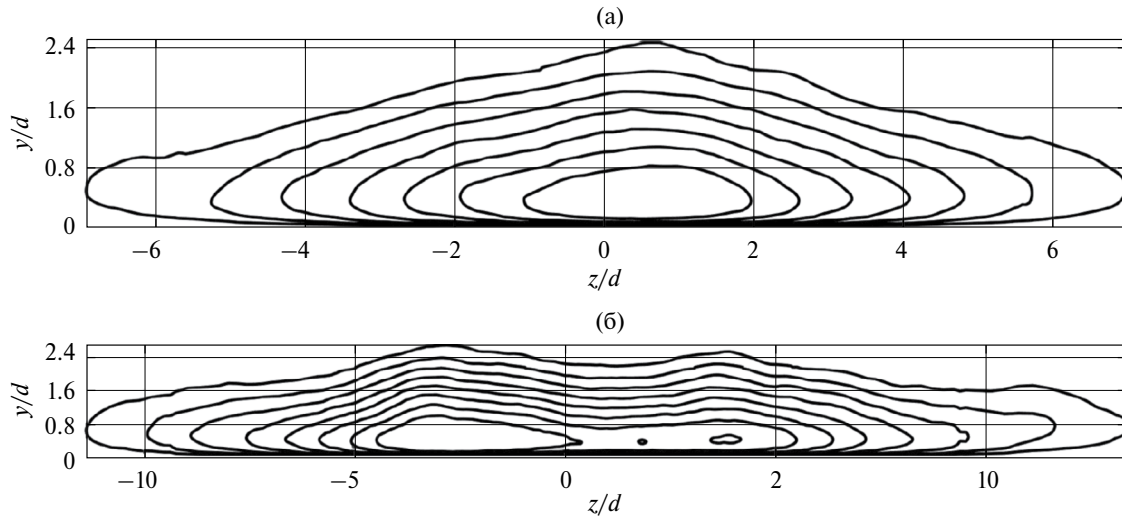


Рис. 4. Изолинии $\langle u \rangle / \langle u \rangle_{\max} = \text{const}$ с шагом 0.1 в плоскости $x = 25d$: (а) – от 0.3 до 0.9 для $S = 0.14$, (б) – от 0.3 до 1.0 для $S = 0.26$.

с этим связано и то, что при $S = 0.14$ струя имеет единственный локальный максимум продольной скорости, тогда как при $S = 0.26$ возникает струя с несколькими локальными максимумами (рис. 4а, 4б).

По мере продвижения вдоль оси x профиль скорости достаточно быстро выходит на автомодельный режим. Уже при $x = 15d$ вертикальные профили продольной скорости $\langle u(y) \rangle \equiv \langle u(x, y, 0) \rangle$ в сечении $z = 0$, а также горизонтальные профили продольной скорости $\langle u(z) \rangle \equiv \langle u(x, y_{\max}, z) \rangle$ в сечении $y = y_{\max}$ можно считать автомодельными (рис. 5, 6). Автомодельность такова, что максимум продольной скорости затухает как $x^{-1.08}$.

На рис. 7а–7в представлены линии тока осредненного поперечного течения, соответствующие случаю $S = 0.14$. Возникший в начальном сечении струи разрыв скорости дает начало двум мощным вихрям по краям струи. Эти вихри растаскивают струю в горизонтальном направлении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые проведено численное моделирование турбулентной трехмерной пристенной закрученной струи. Для этого был применен метод крупных вихрей с пристенным разрешением WRLES. Модель для подсеточной вязкости, которая применялась в данной работе, позволяет проводить расчеты без введения демпфирующих около твердой поверхности множителей, явно зависящих от расстояния до твердой поверхности. Такая модель обеспечивает необходимое асимптотическое поведение, при котором коэффициент турбулентной вязкости пропорционален кубу расстояния от стенки.

Расчетные исследования подтвердили основные результаты единственной публикации, посвященной экспериментальному исследованию рассматриваемого типа струй: закрученная пристенная, как и незакрученная, из-за подтормаживающего действия силы трения о поверхность в основном расплывается по поверхности, причем, чем больше закрутка, тем шире струя; характеристики течения достаточно быстро (на расстоянии 15 калибров) выходят на автомодельный режим, при этом продольная скорость затухает как $x^{-1.08}$.

Анализ структуры течения показал, что так же, как и в случае трехмерной пристенной незакрученной струи, на границе закрученной струи возникают два мощных вихря, которые и растаскивают струю в горизонтальном направлении.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Научное исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00210, <https://rscf.ru/project/23-11-00210/>.

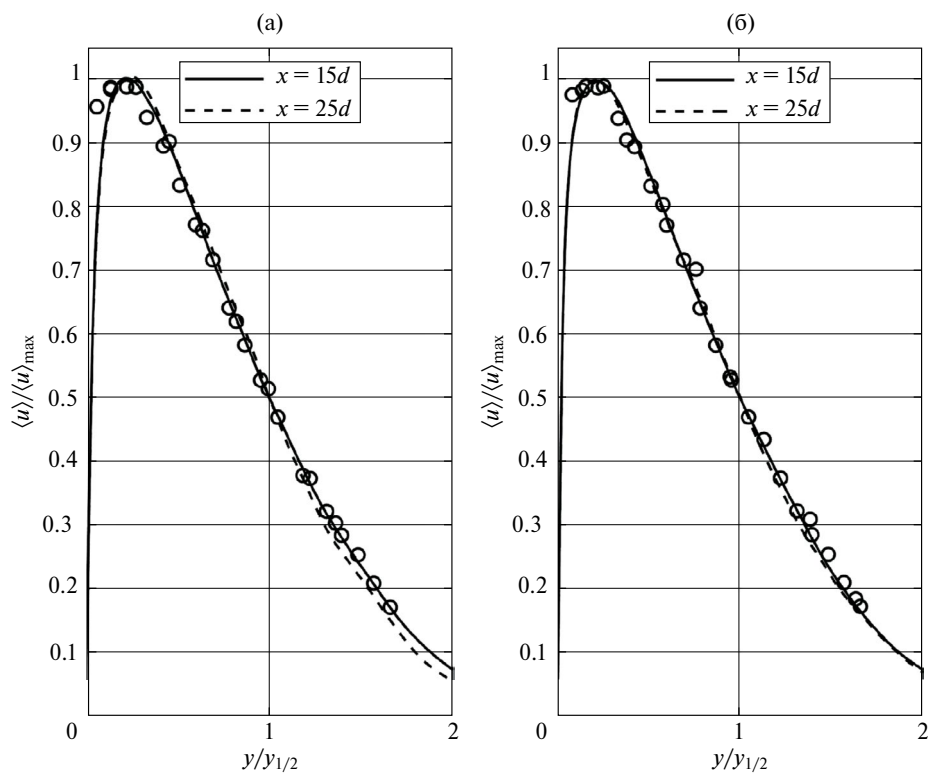


Рис. 5. Профили $\langle u(y) \rangle / \langle u \rangle_{\max}$ в сечениях $x = \text{const}$: (а) — для $S = 0.14$, (б) — для $S = 0.26$.

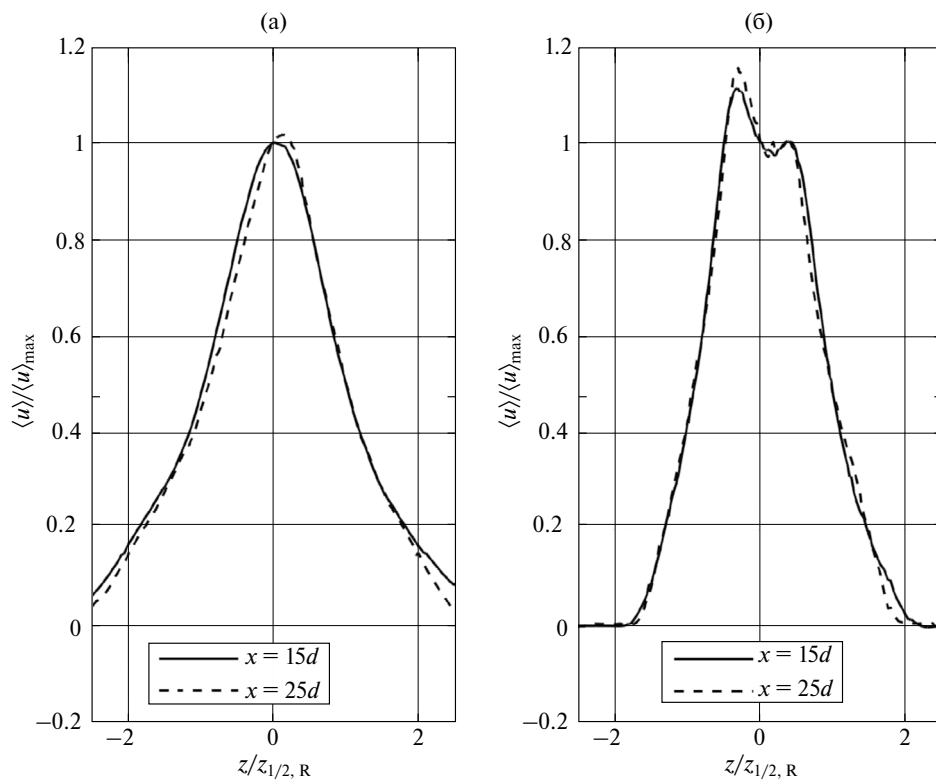


Рис. 6. Расчетные профили $\langle u(z) \rangle / \langle u \rangle_{\max}$ в сечениях $x = \text{const}$: (а) — для $S = 0.14$, (б) — для $S = 0.26$.

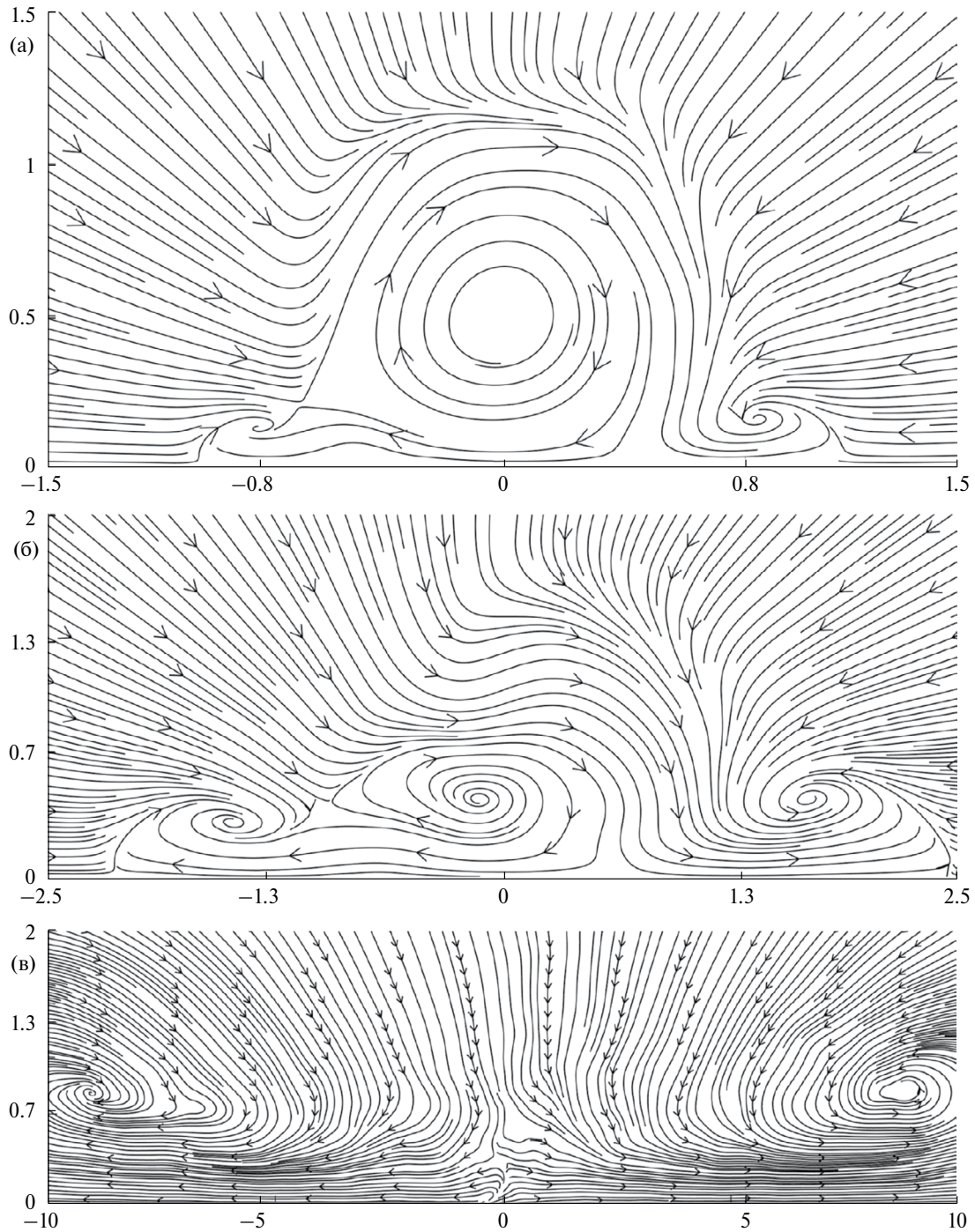


Рис. 7. Линии тока осредненного поперечного течения для $S = 0.14$, горизонтальная ось — z/d , вертикальная — y/d : (а) — в плоскости $x = 2d$, (б) — в плоскости $x = 5d$, (в) — в плоскости $x = 25d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wygnanski I., Katz Y., Horev E.* On the applicability of various scaling laws to the turbulent wall jet // J. Fluid Mech. 1992. V. 234. P. 669–690.
2. *Schneider M.E., Goldstein R.J.* Laser Doppler measurement of turbulence parameters in a two-dimensional plane wall jet // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 3116–3129.

3. *Eriksson J., Karlsson R., Persson J.* An experimental study of a two-dimensional plane turbulent wall jet // *Exp. Fluids*. 1998. V. 25. P. 50–60.
4. *Eriksson J.* Experimental studies of the plane turbulent wall jet: PhD thesis / Eriksson J. — Stockholm, Sweden: Royal Institute of Technology. Department of Mechanics. 2003. 42 P.
5. *Sun H., Ewing D.* Effect of initial and boundary conditions on development of three-dimensional wall jets // 40th AIAA ASME. 2002. P. 733.
6. *Agelin-Chaab M., Tachie M.F.* Characteristics of turbulent three-dimensional wall jets // *ASME. J. Fluids Eng.* 2011. V. 133. № 2.
7. *Namgyal L., Hall, J.* Reynolds stress distribution and turbulence generated secondary flow in the turbulent three-dimensional wall jet // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 800. P. 613–644.
8. *Inoue Y., Yano H., Yamashita S.* Experimental study on a three-dimensional wall jet // *JFST*. 2007. V. 2. № 3. P. 655–664.
9. *Hall J.W., Ewing D.* Three-dimensional turbulent wall jets issuing from moderate-aspect-ratio rectangular channels // *AIAA J.* 2007. V. 45. P. 1177–1186.
10. *Newman B., Patel R., Savage S., Tjio H.* three-dimensional wall jet originating from a circular orifice // *AEQ*. 1972. V. 23. № 3. P. 188–200.
11. *Matsuda H., Iida S., Hayakawa M.* Coherent structures in a three-dimensional wall jet // *ASME. J. Fluids Eng.* 1990. V. 112. № 4. P. 462–467.
12. *Padmanabham G., Lakshmana Gowda B.H.* Mean and turbulence characteristics of a class of three-dimensional wall jets – Part 1: Mean flow characteristics // *ASME. J. Fluids Eng.* 1991. V. 113. № 4. P. 620–628.
13. *Pani B.S., Rajaratnam N.* Swirling Circular Turbulent Wall Jets // *JHR*. 1976. V. 14. № 2. P. 145–154.
14. *Craft T., Launder B.* On the spreading mechanism of the three-dimensional turbulent wall jet // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 435. P. 305–326.
15. *Khosronejad A., Rennie C.D.* Three-dimensional numerical modeling of unconfined and confined wall-jet flow with two different turbulence models // *Can. J. Civ. Eng.* 2010. V. 37. № 4. P. 576–587.
16. *Kakka P., Anupindi K.* Flow and thermal characteristics of three-dimensional turbulent wall jet // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33. № 2.
17. *Гайфуллин А.М., Щеглов А.С.* Структура течения в трехмерной пристенной турбулентной струе // *ПММ*. 2023. № 2. С. 226–239.
18. *Бут И.И., Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Дальнее поле трехмерной пристенной ламинарной струи // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. № 6. С. 51–61.
19. *Гайфуллин А.М., Щеглов А.С.* Пристенные ламинарные закрученные струи // *Известия РАН. МЖГ*. 2023. № 6. С. 67–74.
20. *Sagaut P.* Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction. — Springer, 2006.
21. Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows / G. Erlebacher [et al.] // *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. V. 238. P. 155–185.
22. *Nicoud F., Ducros F.* Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor // *Flow, Turbulence and Combustion*. 1999. V. 62. P. 183–200.
23. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows // *Numerical Heat Transfer*. 1984. V. 7. N. 2. P. 147–163.
- 24.

Turbulent Swirled Wall Jets

A. M. Gaifullin* and A. S. Shcheglov**

Zhukovski Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovski, Moscow Region, 140180 Russia

**e-mail: gaifullin@tsagi.ru*

***e-mail: shcheglov@phystech.edu*

Numerical simulation is applied to investigate the outflow of an incompressible three-dimensional turbulent swirled wall jet. The purpose of the study is to determine the jet flow structure and to compare the characteristics of swirled and nonswirled jets. The numerical solution of the equations of motion is obtained using large eddy simulation with wall resolution (WRLES). The results of the modeling are compared with the data of a unique published study devoted to experimental investigation of swirled wall jets.

Keywords: wall jets, swirled jets, self-similarity, large eddy simulation.

УДК: 532.525

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ТОЛЛМИНА–ШЛИХТИНГА ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ ПОТОКА

© 2024 г. М. В. Устинов^{a, b}

^aЦентральный эрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского (ЦАГИ), Жуковский, Россия

^bМосковский физико-технический институт (МФТИ), Долгопрудный, Россия

e-mail: utax1961@gmail.com

Поступила в редакцию 23.10.2023 г.

После доработки 08.01.2024 г.

Принята к публикации 15.01.2024 г.

Найдены возмущения, порождаемые внешней турбулентностью в сдвиговом слое на плоской пластине, внезапно приведенной в движение. В качестве начальных условий использовалось турбулентное течение, найденное методом прямого численного моделирования развития изотропной однородной турбулентности. Полученное решение моделирует ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на плоской пластине при относительно малой турбулентности набегающего потока, когда он вызван волнами Толлмина–Шлихтинга. Оно позволяет описать процесс генерации различных возмущений – низкочастотных полосчатых структур и волн неустойчивости и их развитие на начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода. На основе обработки полученных результатов предложена простая модель, связывающая спектры волн неустойчивости в пограничном слое и турбулентных пульсаций в набегающем потоке. Также получены зависимости начальной амплитуды волн неустойчивости и их критических коэффициентов усиления (N-факторов) от степени турбулентности потока.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, турбулентность, ламинарно-турбулентный переход, восприимчивость, пограничный слой.

DOI: 10.31857/S1024708424030094, **EDN:** PFHBNH

В настоящее время активно развиваются амплитудные методы предсказания ламинарно-турбулентного перехода, позволяющие вычислить характеристики возмущений пограничного слоя при различном уровне и природе внешних воздействий. Для перехода на стреловидном крыле инициированного шероховатостью поверхности такой подход реализован в [1], аналогичный метод разработан для перехода в сверхзвуковом пограничном слое вызванного взвешенными в атмосфере микрочастицами в [2]. Однако для наиболее практически важного сценария ламинарно-турбулентного перехода, индуцированного волнами Толлмина–Шлихтинга порождаемыми турбулентностью потока амплитудный метод до сих пор не создан. Причиной этого является отсутствие общепринятой модели, описывающей генерацию волн неустойчивости внешней турбулентностью. В большинстве теоретических исследований, посвященных данной проблеме, турбулентность заменяют периодическими вихревыми возмущениями или вихревыми модами, движущимися со скоростью потока. Вследствие малой амплитуды турбулентных пульсаций их взаимодействие с пограничным слоем описывается линеаризованными уравнениями Навье–Стокса. Продольный период вихревых возмущений во внешнем потоке существенно превышает длину волны Толлмина–Шлихтинга той же частоты, и для ее порождения требуется их взаимодействие со неоднородностью пограничного слоя. Наиболее эффективно волны Толлмина–Шлихтинга генерируются вблизи передней кромки, где толщина пограничного слоя растет быстрее всего. Согласно асимптотической теории [3], коэффициент восприимчивости к вихревым модам, определяемый как отношение амплитуды порождаемой волны неустойчивости вблизи передней кромки к амплитуде пульсаций скорости в набегающем потоке, порядка единицы. Этот вывод подтверждает эксперимент по изучению взаимодействия волн завихренности генерируемых вибрирующей лентой с пограничным слоем на пластине [4,5]: волны Толлмина–Шлихтинга возникают только при попадании приходящих из потока возмущений непосредственно на переднюю кромку. С другой стороны, волны неустойчивости, появившиеся вблизи нее, сильно затухают, прежде чем достигнут нейтральной точки, где начинается их рост. По этой причине

большей конечной амплитуды могут достигнуть волны Толлмина–Шлихтинга порожденные на слабой неоднородности пограничного слоя в окрестности нейтральной точки. Такой механизм восприимчивости подробно исследован методом многих масштабов в [5,6]. Для пограничного слоя на плоской пластине эти два механизма обеспечивают близкие коэффициенты восприимчивости ($r_n \sim 10^{-4}$), вычисленные по амплитуде волны неустойчивости в нейтральной точке.

Малый коэффициент восприимчивости к вихревым волнам, полученный в рамках линейной модели, стал поводом к поиску альтернативных сценариев порождения волн Толлмина–Шлихтинга, основанных на нелинейном взаимодействии возмущений турбулентного потока между собой [7]. Косвенным аргументом в пользу нелинейной зависимости начальной амплитуды волн неустойчивости от степени турбулентности потока Tu служит корреляция Мэка [8] для N -фактора перехода. Из нее следует, что амплитуда наиболее усиливающийся волны неустойчивости в нейтральной точке пропорциональна $Tu^{2.4}$. Таким образом имеются как минимум три альтернативных модели описывающих генерацию волн Толлмина–Шлихтинга турбулентностью потока. Какая из них описывает реальный эксперимент до сих пор неясно. С целью ответа на этот вопрос в данной работе выполнено численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода вызванного турбулентностью потока. При этом использована упрощенная модель, описывающая развитие периодических в направлениях параллельных поверхности возмущений по времени. В отличие от выполненного ранее моделирования генерации волн неустойчивости вихревыми модами [9,10] такой подход позволяет учесть влияние на ламинарно-турбулентный переход реального спектра турбулентных пульсаций и оценить роль нелинейных эффектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим однородное и изотропное турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости с нулевой средней скоростью во всем пространстве. В начальный момент времени $t=0$ в нем появляются две параллельные пластины, расположенные на расстоянии $2D'$ и движущиеся в своей плоскости со скоростью u_∞ . Будем исследовать движение жидкости в образовавшемся плоском канале. Стенки канала увлекают за собой жидкость в слоях, толщина которых увеличивается со временем. До тех пор, пока толщина слоев мала, по сравнению с полувысотой канала D' , течение в них можно рассматривать в качестве модели пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой турбулентным потоком. При этом время играет роль продольной координаты, в направлении которой нарастает пограничный слой. Декартову систему координат x, y, z , движущуюся с каналом, зададим так, чтобы xOy совпадала с его центральной плоскостью, а ось x была направлена против движения. В качестве масштабов для координат, скорости времени примем вязкую длину $l = \nu/u_\infty$, скорость движения стенок u_∞ и время прохождения ими вязкой длины $\tau = \nu / u_\infty^2$. При таком выборе единиц измерения безразмерные координаты равны числам Рейнольдса, вычисленным по ним, а безразмерное время по порядку величины соответствует числу Рейнольдса по продольной координате при развитии пограничного слоя по пространству. Продольную, поперечную и вертикальную (нормальную к стенкам канала) составляющие скорости обозначим u, v, w , а давление – p .

Течение как до, так и после появления канала описывается уравнениями Навье–Стокса. При $t>0$ их решение должно удовлетворять условию прилипания на стенках. Исходное поле скоростей турбулентного течения в момент появления канала, которое обозначим $V_- (x, y, z)$, им не удовлетворяет, поэтому не может служить начальными условиями для решения после его появления. Чтобы сформулировать корректные начальные условия предположим, что завихренность остается неизменной при появлении канала, а скорости меняются так, чтобы обеспечить условие непротекания на стенках. Такое начальное поле скоростей V_+ получается добавлением к исходному потенциальному течению с противоположной вертикальной скоростью на стенках канала

$$V_+ = \mathbf{i} + V_- + \nabla \varphi \quad (1.1)$$

$$\Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, \pm D) = -w_- (x, y, \pm D)$$

Здесь $\mathbf{i}$ – единичный вектор в направлении оси абсцисс, w_- – вертикальная скорость в исходном турбулентном течении, D – безразмерная полувысота канала. Заметим, что при таком задании граничных

условий тангенциальная составляющая скорости на стенках канала отлична от нуля. Однако тангенциальные разрывы скорости обычны для начальных условий задач о течении вязкой жидкости и не вызывают трудностей при их численном решении. Аналогичный способ задания начальных условий применялся в [11–13] для изучения взаимодействия вихревых мод с пограничным слоем плоской пластины.

Исходная турбулентность и течение после появления канала находились с помощью численного решения уравнений Навье–Стокса. Составляющие скорости и давление считались периодическими в направлениях параллельных стенкам канала и искались в виде

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ p \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} U_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^M \begin{Bmatrix} u_{mn} \\ w_{mn} \\ p_{mn} \end{Bmatrix} (z, t) e^{i\alpha_m(x-ct)} + (c.c) \right] \cos \beta_n y \\ v &= \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=1}^M \left(v_{mn} e^{i\alpha_m(x-ct)} + (c.c) \right) \right] \sin \beta_n y \\ \alpha &= \pi/L_x; \beta = \pi/L_y; \alpha_m = m\alpha; \beta_n = n\beta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $(c.c)$ означает выражение, комплексно сопряженное первому слагаемому, $U_0(z, t)$ — скорость основного течения, равная нулю до появления канала и соответствующая желаемому профилю скорости при ламинарном течении в канале после его появления, $2L_x$ и $2L_y$ — продольный и поперечный периоды течения. Параметр c , имеет смысл скорости движения системы отсчета, в которой рассматривается развитие возмущений. Чтобы обеспечить наименее быстрое изменение решения он выбирался равным характерной скорости распространения возмущений. При моделировании исходного турбулентного течения она равна нулю и расчет проводился для $c=0$. В пограничном слое скорость возмущений варьируется от 0.3 для волн Толлмина–Шлихтинга до 0.9 для переднего фронта полосчатых структур. Поэтому расчет развития возмущений после появления канала выполнялся для некоторой средней скорости движения системы отсчета $c=0.7$. Для уменьшения объема вычислений u, v, p считались четными, а v — нечетной функцией y . Такое упрощенное представление возмущений часто используется при численном моделировании турбулентных течений и не приводит к заметным ошибкам [14].

При расчете течения до и после появления канала использовались различные способы дискретизации по вертикальной координате. При моделировании исходной турбулентности течение считалось периодическим по z с периодом L_z и амплитуды составляющих скорости и давления в (1.2) искались в виде

$$\begin{Bmatrix} u_{mn} \\ v_{mn} \\ p_{mn} \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^J \begin{Bmatrix} u_{mnj} \\ v_{mnj} \\ p_{mnj} \end{Bmatrix} \cos \delta_j z; \quad w_{mn} = \sum_{j=0}^J w_{mnj} \sin \delta_j z; \quad \delta = \pi/L_z; \quad \delta_j = j\delta$$

Чтобы обеспечить возможность изучать влияние скорости нарастания толщины пограничного слоя и инкрементов нарастания волн неустойчивости на процесс их генерации форма профиля скорости $U_0(z, t)$ могла быть задана произвольной. Для этого в уравнение продольного импульса добавлялась объемная сила F_x обеспечивающая выбранную форму профиля осредненной скорости при ламинарном режиме течения

$$F_x(z, t) = \frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

Представленные далее результаты получены для профиля скорости, соответствующему автомодельному решению Фолкнера–Скэн

$$U_0 = f'(\eta); \quad \eta = \frac{D \pm z}{\sqrt{\delta t}}$$

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1}(1-f'^2) = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad f'\left(\frac{D}{2\sqrt{\delta l}}\right) = 1$$

Здесь знаки “+” и “-” в выражении для η соответствуют нижней и верхней половине канала, а граничное условие при $h \rightarrow \infty$ для уравнения Фолкнера–Скэн перенесено на его плоскость симметрии. Параметр δ , определяющий скорость нарастания толщины пограничного слоя выбирался равным 1 или 3. Показатель степени $m = -0.05$, определяющий форму профиля скорости, соответствовал пограничному слою со слабым положительным градиентом давления. Это позволило увеличить скорость роста волн неустойчивости в несколько раз, по сравнению с профилем скорости в слое Стокса, и существенно уменьшило время расчета.

Турбулентность потока порождает в пограничном слое два вида возмущений: вытянутые в направлении потока полосчатые структуры, имеющие длину порядка ста его толщин и волны Толлмина–Шлихтинга с заметно меньшим продольным периодом. Кроме этих масштабов, корректное описание нелинейных процессов требует разрешать, как минимум вторую гармонику волн неустойчивости с продольным периодом в несколько толщин пограничного слоя. Поперечный период нарастающих волн неустойчивости составляет десятки его толщин, а у полосчатых структур он в два-три раза меньше. Учитывая характерную толщину пограничного слоя на стенках канала в конце расчетов $\sim 0.1 \div 0.2D$ и оценки масштабов разных возмущений были выбраны следующие размеры расчетной области: длина $2L_x = 100D$, ширина и высота $2L_y = 2L_z = 10D$. Количества гармоник в продольном и поперечных направлениях подбирались так, чтобы максимальные волновые числа $\alpha_m, \beta_m, \delta_j$, определяющие минимальный размер разрешаемых пульсаций скорости примерно совпадали. Из этих соображений были выбраны на порядок отличающиеся количества гармоник $J=N=17$ и $M=170$ при аппроксимации решения по поперечным и продольной координатам.

Начальные условия при моделировании исходного турбулентного течения соответствовали одномерному спектру пульсаций продольной составляющей скорости $E_1(k)$, заданному эмпирической формулой из [15]

$$E_1(k) = \frac{1}{\pi} \frac{Tu^2}{1 + b(kL)^{5/3}} e^{-5.6kL/R_t^{5/3}}; \quad b = \frac{1.35}{1 + 35R_t^{-5/3}}; \quad R_t = TuL \quad (1.3)$$

Здесь Tu и L – степень и масштаб турбулентности. Для обеспечения изотропности турбулентности амплитуды составляющих скорости отдельных гармоник были одинаковыми, а их фазы выбирались случайными. Более подробно способ задания начальных условий для расчета эволюции однородной изотропной турбулентности описан в [16].

За исходное поле скоростей в момент появления канала V – примем решение задачи об эволюции однородной изотропной турбулентности в некоторый момент времени t , сдвинутое по оси z на расстояние d . Начальное поле скоростей для расчета течения в канале после его появления находилось из (1.1). Уравнение Лапласа для ϕ решалось аналитически. Способ нахождения начального поля скоростей для расчета течения в канале подробно см. в [16].

При расчете течения в канале для аппроксимации решения по z использовался метод коллокаций. В качестве узлов коллокации z_l использовались нули полинома Якоби $P_Q^{(1,1)}(z)$. Количество узлов Q выбиралось равным 61. Для аппроксимации решения по времени применялась схема Кранка–Николсона. Нелинейные члены находились с помощью быстрого преобразования Фурье. Метод расчета течения в канале аналогичен описанному в [17,18] и отличен от него фиксированными фазовой скоростью возмущений $c=0.7$ и шагом по времени $\tau=0.01$.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В качестве начальных условий использовались три состояния турбулентного течения с разной интенсивностью пульсаций продольной компоненты скорости $Tu = 0.1, 0.2, 0.5\%$ и близкими масштабами

Таблица 1. Характеристики исходных турбулентных течений

Tu	ϵ_u	ϵ_v	ϵ_w	L	λ	$R\lambda$
0.1%	1.00×10^{-3}	1.06×10^{-3}	1.02×10^{-3}	24900	14100	14.1
0.2%	2.00×10^{-3}	2.08×10^{-3}	1.99×10^{-3}	20000	10500	21.0
0.5%	5.00×10^{-3}	5.09×10^{-3}	4.95×10^{-3}	24500	5030	25.6

турбулентности $L \sim 20000$. Они были получены в результате расчета однородной изотропной турбулентности с начальными условиями (1.3), соответствующими $Tu=1.5\%$ и разными интегральными масштабами. Каждый из расчетов заканчивался при достижении амплитудой пульсаций продольной компоненты скорости заданного значения $\epsilon_u = 0.001, 0.002, 0.005$ соответственно. Основные характеристики турбулентности – среднеквадратичные амплитуды пульсаций компонент скорости $\epsilon_u, \epsilon_v, \epsilon_w$, интегральный L и диссипативный λ масштабы и турбулентное число Рейнольдса R_λ для этих состояний приведены в таблице. Эти характеристики определялись следующим образом:

$$\{\epsilon_u^2, \epsilon_v^2, \epsilon_w^2\} = \frac{1}{8L_x L_y L_z} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} \{u^2, v^2, w^2\} dx dy dz$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{8L_x L_y L_z} \int_{-L_x}^{L_x} \int_{-L_y}^{L_y} \int_{-L_z}^{L_z} \frac{1}{2} |\omega^2| dx dy dz; \quad E = \frac{1}{2} [\epsilon_u^2 + \epsilon_v^2 + \epsilon_w^2]$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{10}{3} \frac{E}{\Omega^2}}; \quad L = \frac{2\pi}{E} F_\alpha[u^2](0); \quad R = \lambda \sqrt{2E}$$

где E и Ω – энергия и энстрофия, ω – завихренность, $F_\alpha[u^2]$ – спектральная плотность квадрата продольной компоненты скорости по продольному волновому числу. Из таблицы видно, что рассматриваемые течения при существенно разном уровне турбулентности имеют примерно одинаковый ее интегральный масштаб. Все эти турбулентные течения достаточно изотропны по критерию равенства амплитуды всех компонент пульсаций скорости.

Спектры пульсаций скорости в исходных турбулентных течениях показаны на рис. 1. Из-за малого турбулентного числа Рейнольдса $R\lambda$ у них отсутствует линейный участок $S \sim k^{-5/3}$, соответствующий инерционному интервалу. Затухание спектров при увеличении волнового числа заметно усиливается с уменьшением степени турбулентности. Это приводит к тому, что амплитуда пульсаций скорости в интервале длин волн характерных для волн ТоллминаШлихтинга снижается при уменьшении уровня турбулентности значительно быстрее, чем их интегральная амплитуда. Продольные спектры и по продольному волновому числу α и по поперечному волновому числу β во всех трех течениях практически совпадают для малых и средних масштабов. В крупных масштабах имеется анизотропность, проявляющаяся в том, что спектры пульсаций поперечной скорости лежат несколько выше, чем продольной. Заметим, что в анизотропность турбулентности в набегающем потоке примерно такого же или даже большего уровня наблюдалась и в экспериментах [19,20]. Она есть следствие выделенного направления потока и влияния стенок рабочей части трубы.

Для каждого режима (комбинации степени турбулентности Tu и скорости нарастания пограничного слоя, задаваемой параметром δ) были выполнены четыре расчета развития возмущений в канале отличающиеся сдвигом его оси $d = (1.25, 2.5, 3.75, 5)D$ относительно исходного турбулентного течения. Если считать, что сдвиговые слои на верхней и нижней стенках канала развиваются независимо, то в результате для каждого режима было получено восемь различных решений задачи о развитии возмущений в пограничном слое. Их анализ показал, что все характеристики порождаемой турбулентностью возмущений сильно зависят от сдвига оси канала d . Это объясняется неоднородностью мгновенного поля турбулентных пульсаций по вертикальной координате, которая приводит к разной начальной амплитуде порождаемых в пограничных слоях возмущений. Сильная зависимость решения от места расположения

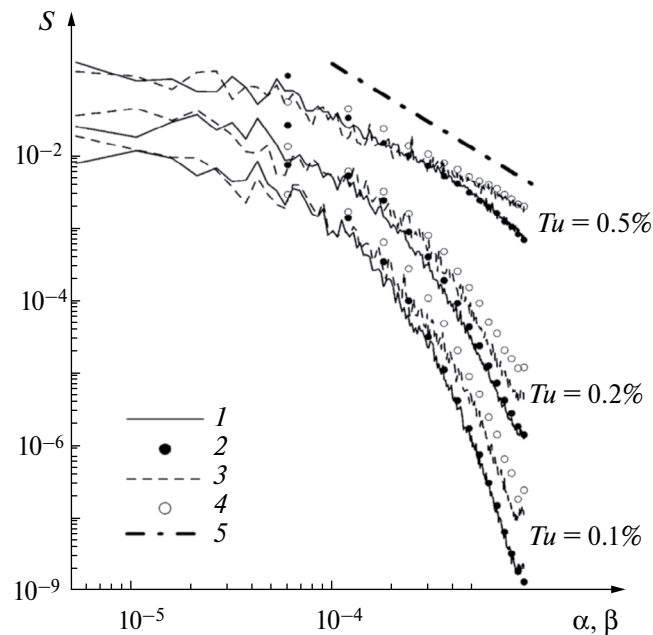


Рис. 1. Спектры пульсаций скорости в исходных турбулентных течениях: 1 – $S_\alpha[u^2]$, 2 – $S_\beta[v^2]$, 3 – $S_\alpha[v^2]$, 4 – $S_\beta[u^2]$, 5 – закон Колмогорова-Обухова, $S \sim k^{-5/3}$.

стенки объясняется малыми поперечными размерами (периодами) расчетной области, которые сравнимы с интегральным масштабом турбулентности. В реальном пограничном слое на пластине, помещенной в турбулентный поток, области с разной интенсивностью пульсаций чередуются по пространству и времени и в эксперименте наблюдается некая осредненная картина развития возмущений. При численном моделировании аналогичный результат может быть получен за счет осреднения решений, соответствующих разным d . Приведенные ниже результаты, если это не оговорено специально, получены с помощью такого осреднения по восьми расчетам пограничного слоя на двух стенках при четырех вышеуказанных смещениях оси канала.

Общий характер развития возмущений в пограничном слое показывают их спектры, приведенные на рис. 2. Эти и последующие данные получены для расстояния от стенки, соответствующего значению автомодельной переменной; $\eta = (D \pm z) / \sqrt{\delta t} = 1.4$. На этой высоте близки к максимуму как полосчатые структуры, так и волны Толлмина–Шлихтинга, развивающиеся в пограничном слое при воздействии внешней турбулентности. Результаты, показанные на остальных рисунках этой статьи (кроме рис. 5), также соответствуют этому расстоянию от стенки. Спектры по продольному волновому числу показывают, что в начале доминируют длинноволновые полосчатые структуры, характерные для перехода при повышенной степени турбулентности потока. На рис. 2б видно, что их спектр по поперечному волновому числу достаточно широкий, что, вероятно, связано со слабой избирательностью механизма алгебраического роста. В дальнейшем в спектрах по продольному волновому числу появляется максимум в диапазоне $\alpha \delta_{\text{пс}} = 0.2 \div 0.4$, где $\delta_{\text{пс}} = 2\sqrt{\delta t}$ – характерная толщина пограничного слоя в момент времени t . Такие волновые числа характерны для волн Толлмина–Шлихтинга в окрестности верхней ветви нейтральной кривой. Эти возмущения быстро нарастают до амплитуды сравнимой с полосчатыми структурами. В конце расчета происходит разрушение ламинарного режима течения вследствие нелинейных процессов, которые начинаются с появлением в спектре по α второй гармоники. В двумерном спектре по продольному и поперечному волновым числам в момент времени $t = 8 \times 10^5$, перед началом нелинейной стадии перехода, ясно виден максимум при $\alpha \sim 4 \times 10^{-4}$, $\beta \sim 1 \times 10^{-4}$ соответствующий почти прямым волнам Толлмина–Шлихтинга. Этот максимум довольно широкий вследствие достаточно широкого диапазона, в котором усиливаются эти возмущения в пограничном слое с неблагоприятным градиентом давления, выбранном в качестве основного течения. В целом картина развития возмущений качественно соответствует результатам термоанемометрических измерений при “естественном” ламинарно-турбулентном переходе в пограничном слое на пластине [21].

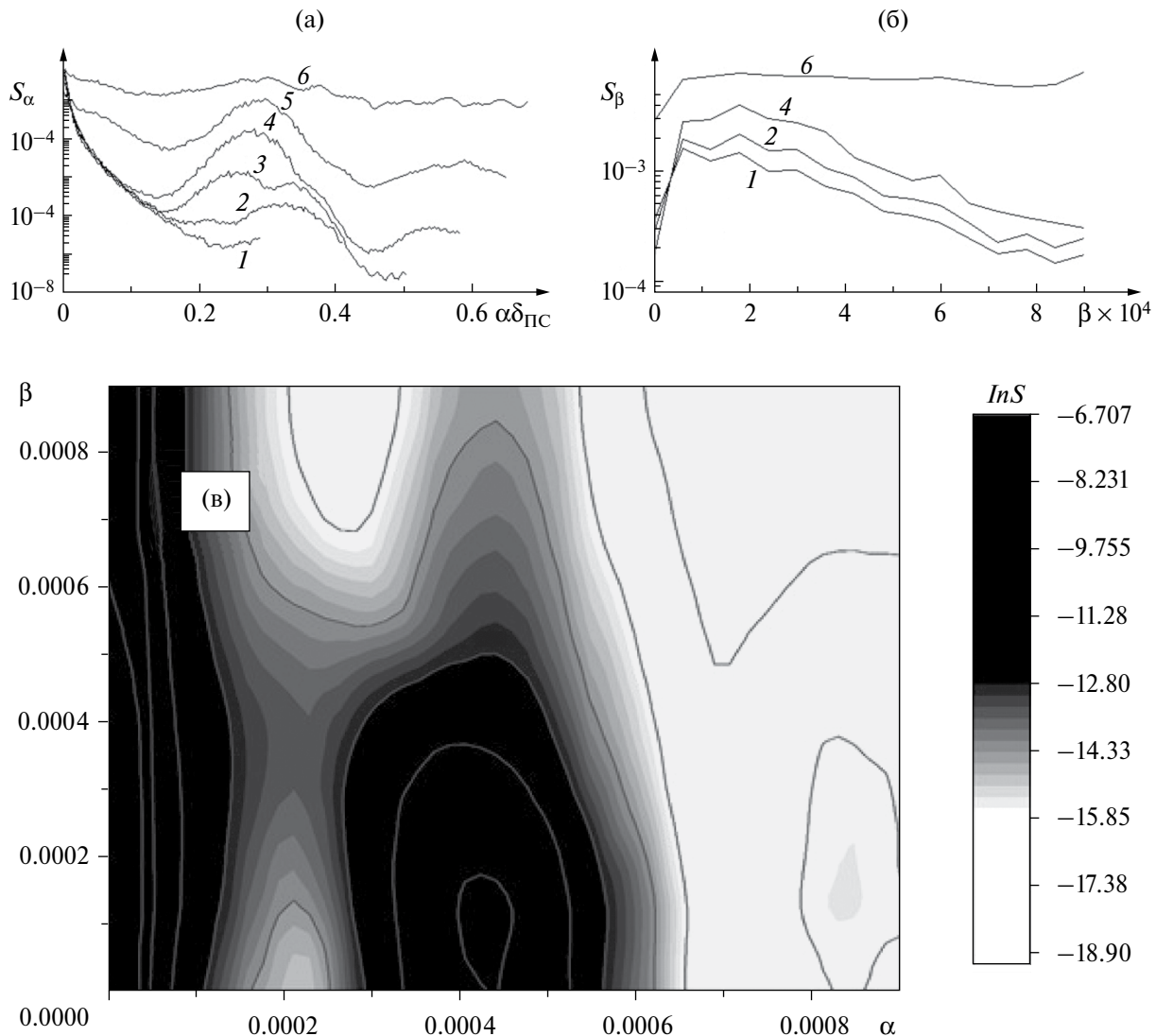


Рис. 2 Спектры пульсаций продольной составляющей скорости в сдвиговом слое по продольному (а), поперечному (б) и двумерный спектр при $t=8.4 \times 10^5$ (в). Цифры (1–6) соответствуют $t=(2,4,6,8, 10) \times 10^5$.

Рост амплитуды основных видов возмущений волн Толлмина–Шлихтинга и полосчатых структур показывает рис. 3. На ней для режимов с $\delta = 1$ и различной степенью начальной турбулентности построены зависимости от времени среднеквадратичной амплитуды суммарных возмущений продольной компоненты скорости в пограничном слое а также их короткопериодической и длиннопериодической части. Длиннопериодическими условно считались возмущения с $\alpha < 2.1 \times 10^{-5}$ заведомо меньшем нижней границы усиления волн Толлмина–Шлихтинга. Короткопериодические возмущения соответствовали диапазону $\alpha > 1.5 \times 10^{-4}$ заведомо включающему неустойчивые моды. Из рис. 3 видно, что рост длиннопериодических возмущений начинается почти сразу после появления канала, однако он происходит достаточно медленно и описывается степенной зависимостью $a \sim t^n$. Это иллюстрируют зависимости от времени амплитуды таких возмущений построенные на рис. 3б в двойном логарифмическом масштабе. Они хорошо аппроксимируются прямыми практически на протяжении всей линейной стадии перехода.

Амплитуда короткопериодических возмущений меняется по более сложному закону. Вначале она затухает, а потом начинает расти, причем как затухание, так и рост происходят по близкому к экспоненциальному закону. Затухание соответствует эффекту вытеснения высокочастотных пульсаций из

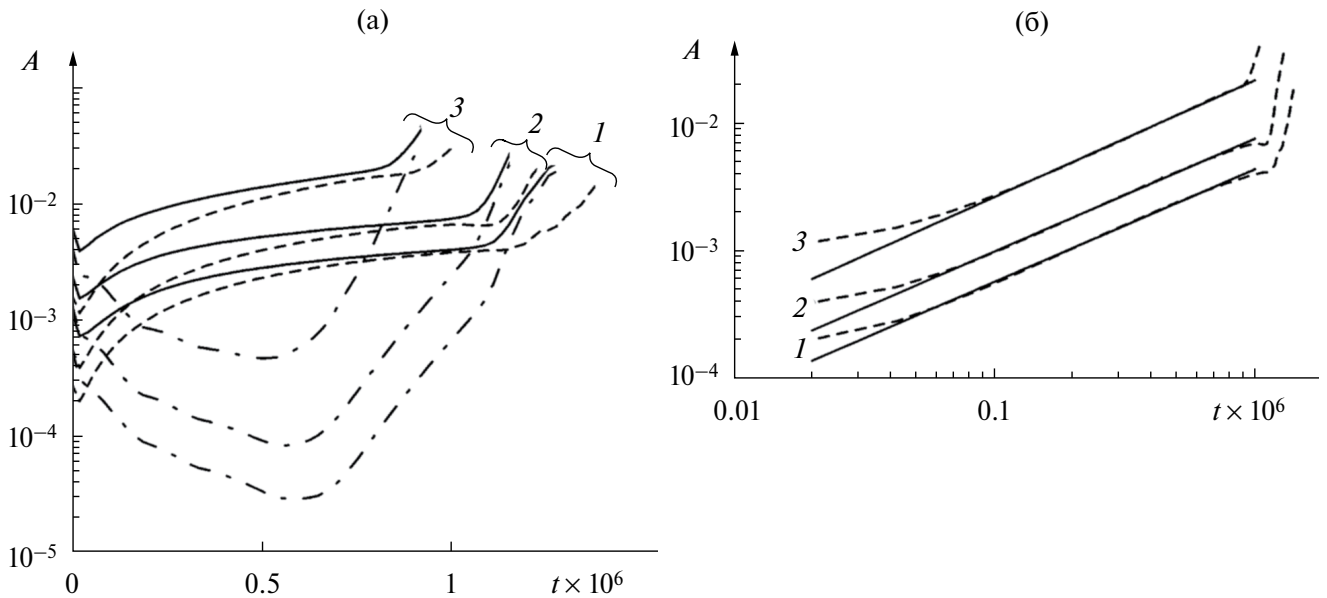


Рис. 3. Зависимости среднеквадратичных амплитуд суммарных (линии сплошные), длиннопериодических (штриховые) и короткопериодических (штрихпунктирные) возмущений в сдвиговом слое от времени (а). Аналогичные зависимости для длиннопериодических возмущений в двойном логарифмическом масштабе (б). (1–3) соответствуют $Tu = 0.1, 0.2$ и 0.5% .

пограничного слоя, которое наблюдается при переходе, вызванном повышенной степенью турбулентности потока, отмеченному, например в эксперименте [15]. В это время, как будет показано далее, среди короткопериодических возмущений доминируют волны с фазовой скоростью равной скорости потока и соответствующие модам непрерывного спектра. На участке роста основной вклад в амплитуду короткопериодических пульсаций вносят волны Толлмина–Шлихтинга, что и объясняет закон их роста. В начале процесса ламинарно-турбулентного перехода основной вклад в суммарную амплитуду пульсаций вносят длиннопериодические, а в конце – короткопериодические возмущения.

Зависимость амплитуды разных видов возмущений в пограничном слое от интенсивности начальной турбулентности показывает рис. 4. На части “а” этой рисунки построены кривые нарастания нормированных на Tu длиннопериодических, короткопериодических и суммарных возмущений для всех режимов при $\delta = 1$. Из них видно, что на линейной стадии перехода нормированные амплитуды длиннопериодических возмущений не зависят от Tu . Это означает их линейную зависимость от степени турбулентности потока. Тот же вывод справедлив и для суммарной амплитуды возмущений на начальном участке их развития. Однако кривые нарастания нормированных короткопериодических возмущений не только не совпадают, но даже не параллельны. Это означает, что начальная амплитуда волн Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое нелинейно зависит от интенсивности исходной турбулентности. Кроме того, от нее, хотя и в меньшей мере, зависит и скорость роста этих возмущений. Последняя зависимость слаба для малых Tu , однако становится заметной при увеличении степени турбулентности от 0.2 до 0.5% . Это, по-видимому, связано с нелинейным взаимодействием волн Толлмина–Шлихтинга с полосчатыми структурами, имеющими амплитуду превышающую 1% скорости потока.

Более точно оценить роль нелинейных эффектов на разных стадиях перехода позволяет сравнение результатов расчетов развития возмущений для $Tu = 0.2\%$ и $\delta = 1$, выполненных на основе решения полных и линеаризованных уравнений Навье–Стокса. Его результаты, показанные на рис. 4б наглядно демонстрируют, что нелинейность проявляется только на заключительной стадии перехода при $t > 10^6$ когда суммарная амплитуда возмущений превышает 1% . Процесс же генерации исходных длиннопериодических и короткопериодических возмущений является линейным с высокой степенью точности. Нелинейная зависимость начальной амплитуды короткопериодических возмущений от степени турбулентности потока, следующая из рис. 4а, по всей видимости, объясняется нелинейной зависимостью амплитуды турбулентных пульсаций в соответствующем диапазоне волновых чисел от этого параметра.

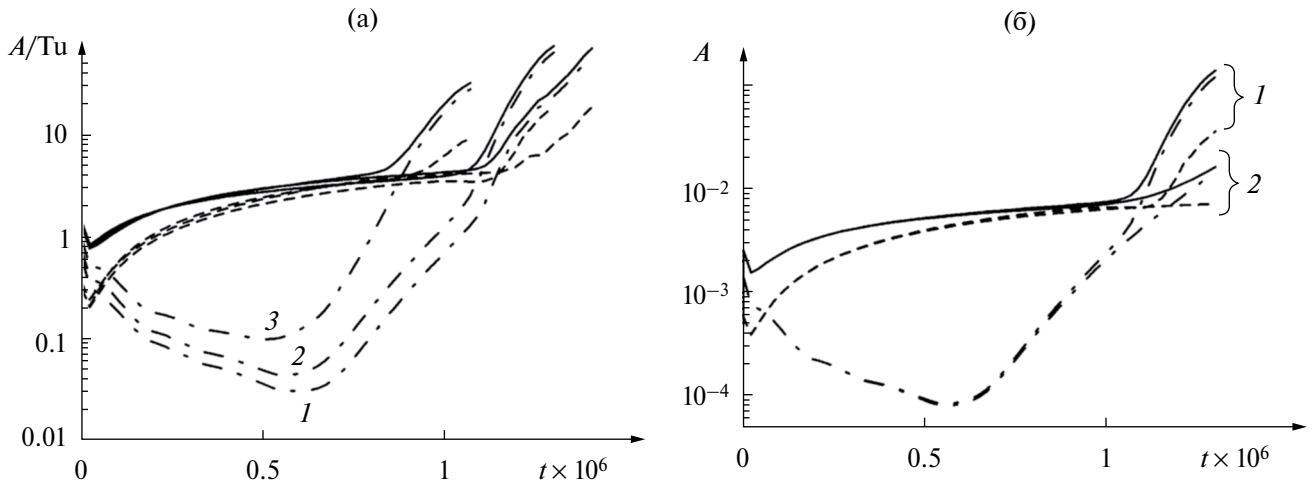


Рис. 4. Зависимости нормированных на Tu амплитуд длиннопериодических, короткопериодических и суммарных возмущений скорости в сдвиговом слое от времени (а). Обозначения аналогичны рис. 3. Сравнение амплитуд этих видов возмущений, полученных при решении полных (1) и линеаризованных (2) уравнений Навье–Стокса для режима $\delta=1$, $Tu=0.2\%$ (б).

Это, по сути дела, связано с ускорением затухания спектра турбулентности при высоких волновых числах при уменьшении турбулентного числа Рейнольдса.

Основная цель работы — нахождение начальной амплитуды волн Толлмина–Шлихтинга порождаемых турбулентностью потока. Однако задача выделения из набора пульсаций скорости в пограничном слое волны неустойчивости оказалась не простой. Это демонстрирует профиль пульсаций скорости для гармоники с $m=55$, $n=4$ ($\alpha = 5,8 \times 10^{-4}$, $\beta = 1.8 \times 10^{-4}$) соответствующей максимуму спектра пульсаций скорости для режима с $\delta = 3$, $Tu = 0.2\%$ в момент времени $t=4 \times 10^5$ в конце линейной стадии перехода, построенный на рис. 5. Несмотря на осреднение по ансамблю реализаций с разными положениями оси канала и осреднению по набору гармоник в диапазоне $m=50 \div 60$ и $n = 3 \div 5$ полученный профиль пульсаций лишь качественно соответствует собственной функции для волны Толлмина–Шлихтинга. Расхождение, вероятно, вызвано заметным вкладом шума, связанного с некоррелированными с волной неустойчивости вынужденными возмущениями, порождаемыми распространяющимися по центру канала турбулентными вихрями. Вследствие этого, оценка амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга по профилю пульсаций отдельных гармоник скорости дает большую погрешность. Более точный результат можно получить с помощью проецирования амплитуды гармоники вертикальной скорости w_{mn} , найденной из численного моделирования, на собственную функцию оператора Орра–Зоммерфельда

$$a_{||}(t) = \frac{\Psi_{mn}^+ w_{mn}(t)}{\Psi_{mn}^+, \Psi_{mn}} \quad (2.1)$$

Здесь Ψ_{mn} и Ψ_{mn}^+ собственные функции обычного и сопряженного операторов Орра–Зоммерфельда для волновых чисел α_m , β_n , а угловые скобки означают скалярное произведение определяемое следующим образом:

$$\phi, \Psi = \sum_{l=1}^Q \Phi^*(z_l) \Psi(z_l) \quad (2.2)$$

Здесь “*” обозначает комплексное сопряжение.

Найденные таким способом зависимости амплитуд проекций возмущений скорости на собственные функции наиболее усиливающихся волн Толлмина–Шлихтинга от времени для всех расчетных случаев построены на рис. 6. Из них видно, что процедура проецирования возмущений на собственную функцию с последующим осреднением по сдвигам оси канала d позволяет избавиться от посторонних

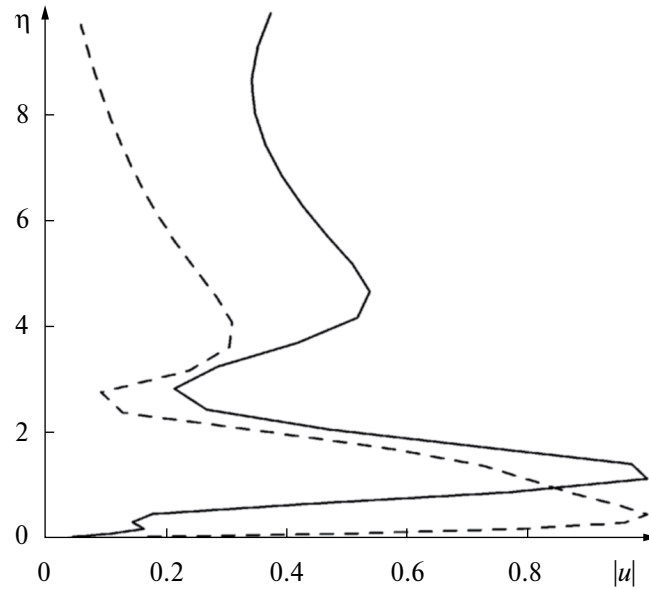


Рис. 5. Сравнение профиля возмущений скорости для гармоники с $m=55$, $n=4$ при $t=6.3 \times 10^5$ (линии сплошные), с собственной функцией уравнения Орра–Зоммерфельда (штриховые).

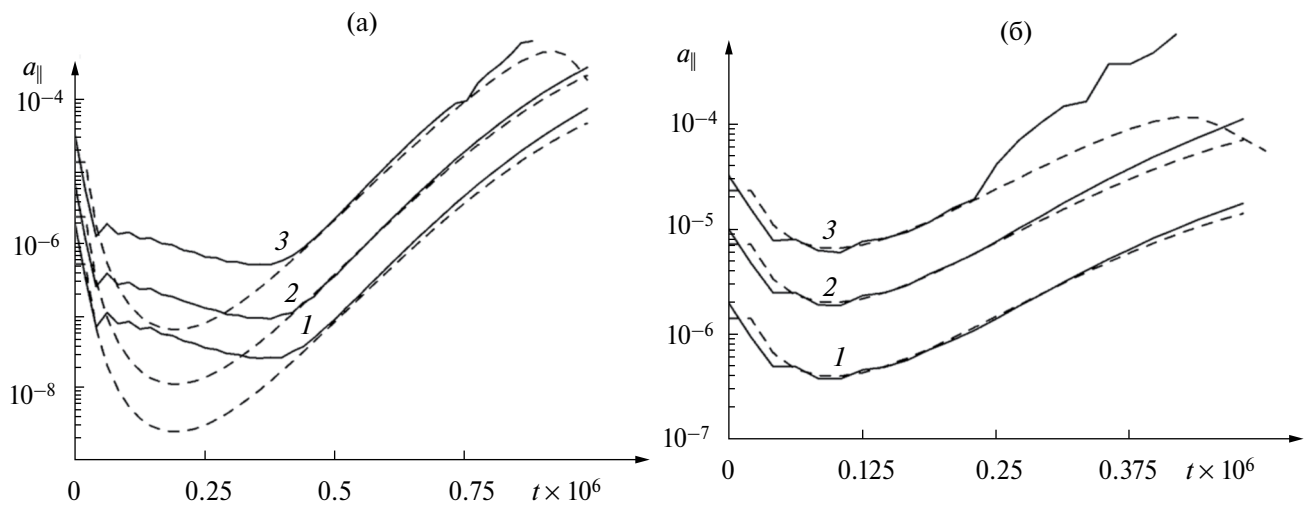


Рис. 6. Зависимости среднеквадратичной амплитуды проекции гармоники возмущений скорости на собственную функцию уравнения О–З для режимов с $\delta=1$ (а) и $\delta=3$ (б) (линии сплошные). Кривые нарастания волн Т–Ш (штриховые). (1–3) соответствуют $Tu=0.1, 0.2$ и 0.5% .

возмущений и дает гладкие зависимости амплитуд проекций от времени на линейной стадии перехода, где возмущения не сильно влияют на профиль скорости в пограничном слое. Для случая $\delta=3$ на этом участке зависимости $a_{||}(t)$ с хорошей точностью совпадают с кривыми нарастания волн Толлмина–Шлихтинга. При $\delta=1$, когда пограничный слой нарастает медленнее, проекция амплитуд пульсаций в окрестности нейтральной точки волны неустойчивости заметно превышает кривую, нарастания с которой она хорошо совпадает как при больших, так и при меньших значениях t . Это объясняется тем, что при взаимодействии вихревых мод турбулентного потока с пограничным слоем появляются два типа возмущений, имеющих одинаковый вертикальный профиль пульсаций: волны Толлмина–Шлихтинга с фазовой скоростью $c \approx 0.3 \div 0.4$ и промежуточная волна, распространяющаяся со скоростью внешних возмущений $c=1$. Появления этих видов возмущений в рамках метода многих масштабов

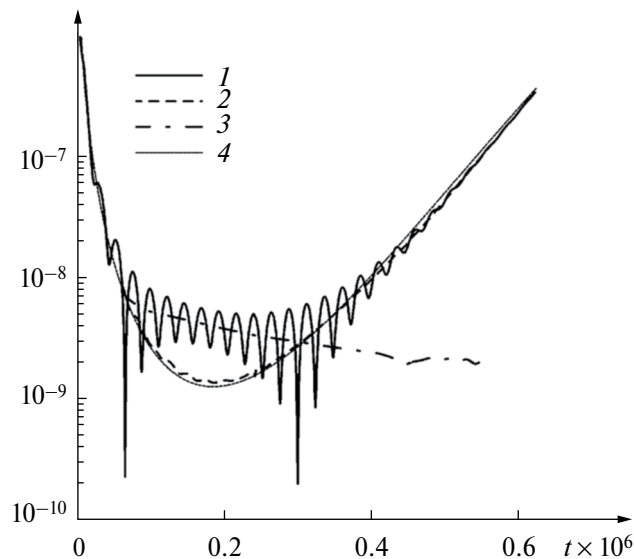


Рис. 7. Зависимости среднеквадратичной амплитуды проекции гармоники возмущений скорости на собственную функцию уравнения О–З (1), волны Т–Ш (2) и промежуточной волны (3) от времени для решения при $\delta=1$, $Tu=0.2\%$, $d=0.375D$. (4) – теоретическая кривая нарастания волны Т–Ш.

обосновано в [5]. Осреднение по ансамблю реализаций, результаты которого приведены на рис. 6, приводит к потере информации о фазе амплитуды $a_{\parallel}(t)$. По этой причине разделение проекции пульсаций скорости на волну неустойчивости и промежуточную волну может быть выполнено только для одной из реализаций задачи о взаимодействии турбулентности с сдвиговым слоем на стенке канала. Результаты такой операции в виде зависимостей амплитуд проекции $a_{\parallel}(t)$, волны Толлмина–Шлихтинга и промежуточной волны от времени показаны на рис. 7 для случая сдвигового слоя на нижней стенке при $d=3.75D$. В полном соответствии с выводами теории [5, 6], основанной на методе многих масштабов, в зависимости суммарной амплитуды проекции от времени наблюдаются биения возникающие при суперпозиции волны Толлмина–Шлихтинга и промежуточной волны с разными периодами по времени. Эти биения наиболее сильно проявляются в два момента времени до и после критической точки, где обе составляющие возмущений имеют близкие амплитуды и уменьшаются, когда одна из них явно доминирует.

Зависимость амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга, выделенной из проекции на собственную функцию, с хорошей точностью совпадает с теоретической кривой ее нарастания. Это свидетельствует о том, что генерация волны неустойчивости исходной турбулентностью происходит, главным образом, на сильной неоднородности пограничного в самом начале его эволюции (примерно до $t \sim 4 \times 10^4$). В этот интервал времени соответствующая волне неустойчивости мода появляется из непрерывного спектра, описывающего взаимодействие вихревых возмущений с пограничным слоем. Распределенная генерация на неоднородности пограничного слоя в более поздние моменты времени относительно слаба и изменяет результирующую амплитуду волны Толлмина–Шлихтинга не больше чем на 50%. Аналогичный вывод может быть сделан и из осредненных по ансамблю реализаций данных, показанных на рис. 6.

Зависимости амплитуды наиболее усиливающейся волны неустойчивости в нейтральной точке от степени турбулентности потока, найденные на основе аппроксимации зависимостей $a_{\parallel}(t)$ теоретическими кривыми нарастания для двух видов основного течения с $\delta=1$ и 3, построены на рис. 8а. Аналогичные результаты для N-факторов, определенным по критерию достижения суммарной амплитудой возмущений уровня 5%, показаны на рис. 8 б. Эти результаты хорошо аппроксимируются степенными зависимостями амплитуды волны Толлмина–Шлихтинга в нейтральной точке A_{TS0} от степени турбулентности

$$A_{TS0} \sim Tu^{1.86}; \delta=1 \quad (2.3)$$

$$A_{TS0} \sim Tu^{1.51}; \delta=3$$

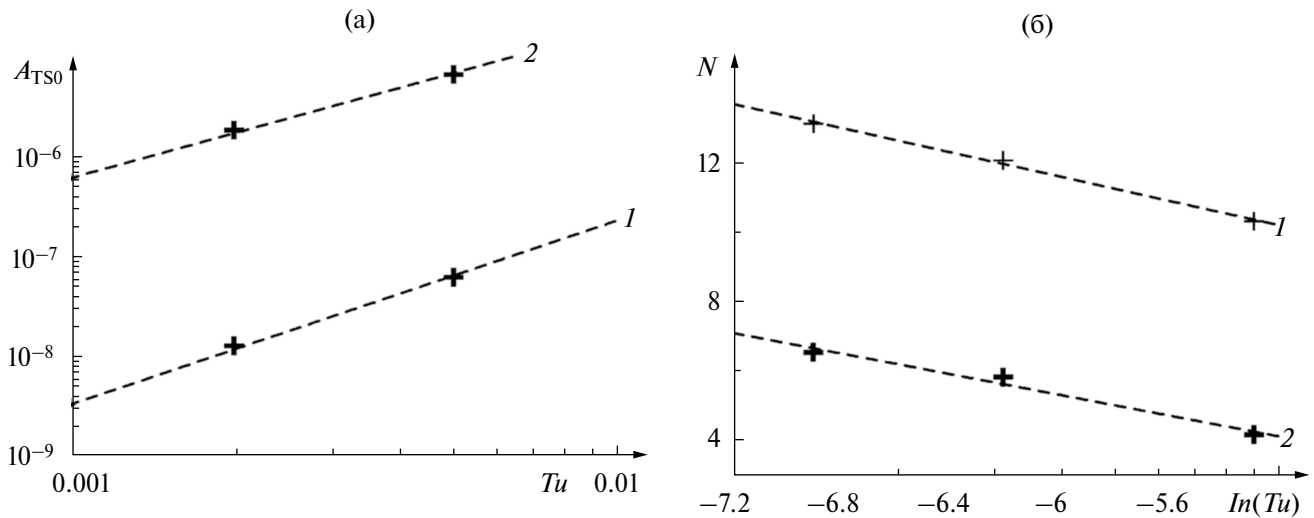


Рис. 8. Зависимости амплитуды волны Т–Ш в нейтральной точке (а) и N-фактора перехода (б) от степени исходной турбулентности. (1, 2) соответствуют $\delta=1$ и 3.

и линейными зависимостями от $\ln(Tu)$ для N-факторов, аналогичными корреляции Мэка

$$N = -1.75\ln(Tu) + 1.08; \quad \delta = 1$$

$$N = -1.49\ln(Tu) - 3.65; \quad \delta = 3$$

Эти корреляции показывают, что амплитуда волн неустойчивости действительно нелинейно зависит от степени турбулентности потока. Однако показатель степени в этой зависимости существенно меньше значения 2.4, следующего из корреляции Мэка и не постоянен, а зависит от скорости нарастания пограничного слоя. Нелинейная зависимость A_{TS0} от Tu связана не с нелинейностью процесса генерации волн неустойчивости турбулентностью потока, а вызвана изменением спектра турбулентности в диапазоне волновых чисел характерных для вызывающих ламинарно-турбулентный переход возмущений. При уменьшении характерной толщины пограничного слоя в точке перехода, определяемой параметром δ , эти волновые числа увеличиваются и спектр турбулентности для них более сильно затухает с уменьшением Tu . Это объясняет увеличение показателя степени в (2.3) при уменьшении δ .

Рисунок 8 также показывает, что при одинаковой степени турбулентности, амплитуды волн неустойчивости в нейтральной точке и соответствующие им N-факторы не универсальны, а сильно зависят от скорости нарастания пограничного слоя. Более универсальной величиной является амплитуда волны неустойчивости в точке появления соответствующей моды из непрерывного спектра. Однако даже эта начальная амплитуда также сильно и нелинейно зависит от степени, и, вероятно, масштаба турбулентности из-за изменения ее спектра в диапазоне волновых чисел, ответственных за переход. Наиболее консервативной величиной, учитывающей этот фактор, должен быть коэффициент восприимчивости $r_b(\alpha, \beta)$, определяемый как отношение амплитуд спектров пульсаций продольной составляющей скорости в исходном турбулентном течении и волн Толлмина–Шлихтинга при достаточно малом времени t_b с момента появления канала

$$r_b = \left[\frac{S_{\alpha\beta}(A_{Ts}^2)(t_b)}{S_{\alpha\beta}(u_{Tu}^2)} \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

Распределения этого коэффициента восприимчивости в плоскости α, β для режимов с наибольшей и наименьшей степенью турбулентности и двух параметров δ показаны на рис. 9. Вместо амплитуд волн Толлмина–Шлихтинга при их вычислении использовались практически равные им проекции

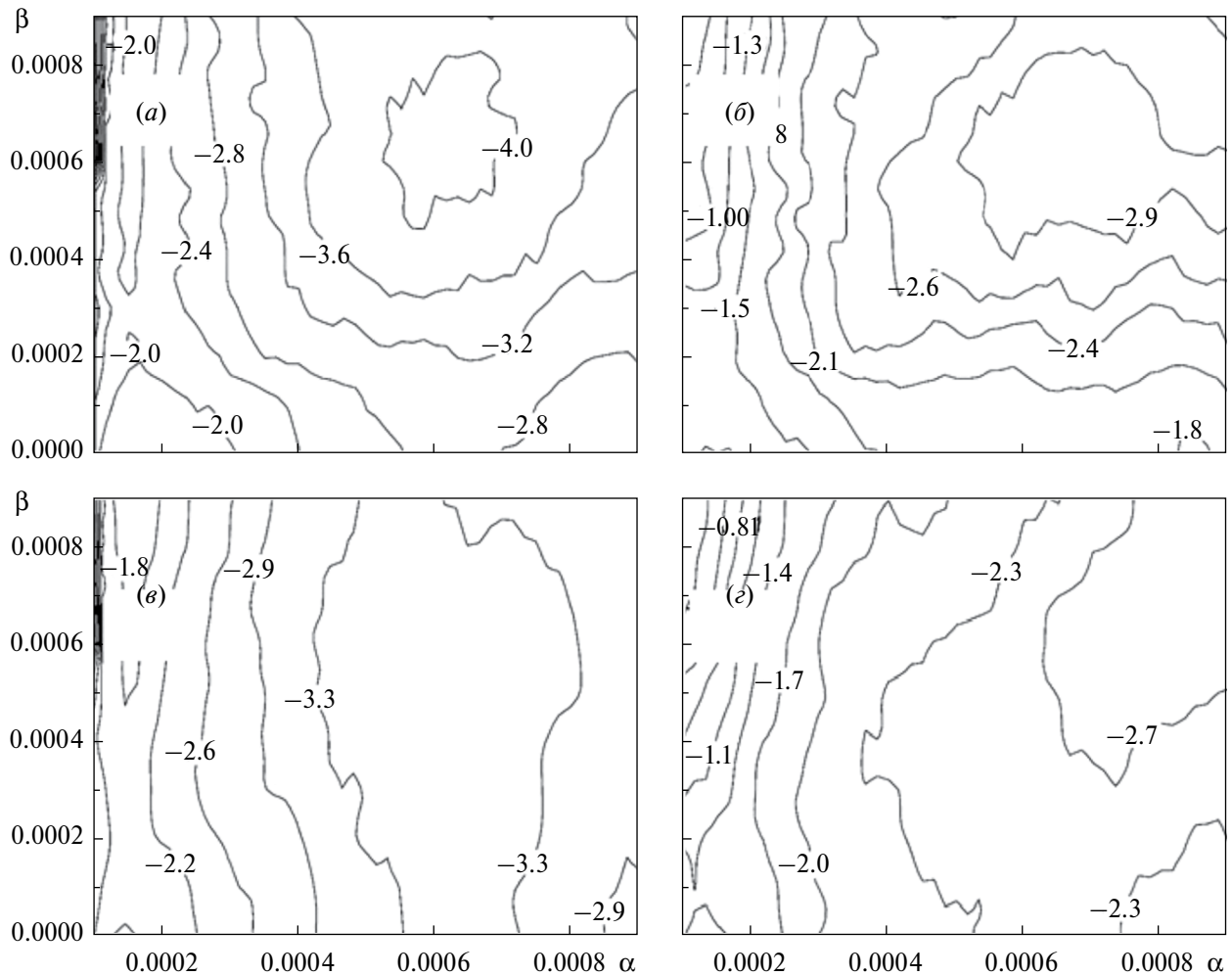


Рис. 9. Изолинии $\ln(r_b)$ в плоскости (α, β) , рассчитанные по (2.4) для режимов $\delta=1$, $Tu=0.1\%$ (а), $\delta=1$, $Tu=0.5\%$ (б), $\delta=3$, $Tu=0.1\%$ (в), $\delta=3$, $Tu=0.5\%$ (г).

пульсаций скорости на собственные функции $a_{||}(t)$, квадраты модулей которых усреднялись по реализациям. Данные, приведенные на рис. 9, свидетельствуют о том, что определенные по (2.4) коэффициенты восприимчивости достаточно слабо зависят от Tu и δ . В области волновых чисел, ответственных за ламинарно-турбулентный переход, их величина примерно постоянна и близка к 0.1. Это значение коэффициента восприимчивости в начальной точке можно, в качестве первого приближения, использовать в амплитудном методе предсказания перехода и при развитии пограничного слоя и возмущений по пространству.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью численного моделирования развития возмущений, созданных исходным турбулентным течением в пограничном слое, нарастающем по времени, получены следующие результаты.

- Ламинарно-турбулентный переход вызван усилением волн Толлмина–Шлихтинга.
- Начальная амплитуда этих волн нелинейно зависит от степени турбулентности исходного течения. Однако процесс генерации и последующего развития возмущений в пограничном слое описывается линейными уравнениями вплоть до достижения ими амплитуды порядка 1%. Нелинейная зависимость амплитуды волн неустойчивости от Tu обусловлена зависимостью формы спектра турбулентности от турбулентного числа Рейнольдса.

– Зависимость N-фактора перехода от степени исходной турбулентности описывается эмпирической формулой аналогичной корреляции Мэка, но с другим меньшим коэффициентом при $\ln(Tu)$.

– Генерация волн неустойчивости происходит на сильной неоднородности пограничного слоя в интервале времени, включающем момент появления соответствующей моды из непрерывного спектра. Вклад механизма ее распределенной генерации на слабой неоднородности в окрестности нейтральной точки в конечную амплитуду волны неустойчивости относительно мал.

– Универсальной величиной, описывающей генерацию волн неустойчивости турбулентностью, является отношение амплитуд спектров волн Толлмина–Шлихтинга в начальной точке и турбулентных пульсаций.

Данные выводы получены для развития пограничного слоя и волн неустойчивости по времени. Их справедливость для случая пространственной эволюции течения требуют дополнительных исследований.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-09-00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ustinov M.V., Kachanov Y.S.* Comparison of amplitude method of roughness-induced swept-wing transition prediction with experiment // *Physics of Fluids*. 2021. V. 33 (9). 094105.
2. *Чухахов П.В., Федоров А.В.* Статистическая модель начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода, вызванного атмосферными микрочастицами // Тез.докл. 13 Всероссийский съезд по проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г.
3. *Goldstein M.E.* The evolution of Tollmien–Schlichting waves near the leading edge // *J. Fluid Mech.* 1983. V.127. P. 59–81.
4. *Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я.* Возникновение волны Толлмина–Шлихтинга в пограничном слое при воздействии внешних возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. С. 85–94.
5. *Жигулев В.Н., Федоров А.В.* Исследование возбуждения волн Толлмина–Шлихтинга. Препринт СО АН СССР, 1982. С 27–33.
6. *Жигулев В.Н., Тумин А.М.* Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 280 с.
7. *Устинов М.В.* Генерация волн Толлмина–Шлихтинга турбулентностью потока // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 58–72
8. *Mack L.M.* Transition prediction and linear stability theory // AGARD Conf. proc. CP-224. 1977. P. 1/1–22.
9. *Parekh D.E., Pulin P., Wlezin R.W.* Boundary layer receptivity to convected gusts and sound // *Boundary Layer Stability and Transition to Turbulence FED-114/* Ed. C.L. Reda et al. N.Y.: ASME, 1991. P. 69–76.
10. *Buter T.A., Reed H.L.* Numerical investigations of receptivity to freestream vorticity // *AIAA Paper*. 1993. № 93–0073.
11. *Leib S.J., Wundrow D.W., Goldstein M.E.* Effects of free-stream turbulence and other vortical disturbances on a laminar boundary layer // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 380. P. 169–203.
12. *Устинов М.В.* Восприимчивость пограничного слоя на плоской пластине к турбулентности набегающего потока // Изв. РАН МЖГ. 2003. № 3. С. 56–68
13. *Устинов М.В.* Численное моделирование развития полосчатой структуры в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока // Изв. РАН МЖГ. 2004. № 2. С. 103–119
14. *Rozhdestvensky B.L., Simakin I.N.* Secondary flows in a plane channel: their relationship and comparison with turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 1987. P. 261–289.
15. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Кузнецов В.Р.* Проникновение трехмерных низкочастотных пульсаций скорости внешнего потока в ламинарный пограничный слой на плоской пластине // Труды ЦИАМ. 1991. № 1287. С. 197–236.
16. *Устинов М.В.* Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока // Изв. РАН МЖГ. 2006. № 6. С. 77–93
17. *Рождественский Б.Л., Стойнов М.И.* Алгоритмы интегрирования уравнений Навье–Стокса, имеющие аналоги законам сохранения массы, импульса и энергии. Препринт № 119 ИПМ им. М.В. Келдыша. 1987. 28 с.

18. Устинов М.В. Исследование субгармонического перехода в плоском канале методом прямого численного моделирования// Изв. АН СССР МЖГ. 1993. № 3. С. 46–53
19. Westin K.J.A., Boiko A.V., Klingmann B.G., Kozlov V.V., Alfredsson P.H. Experiments in a boundary layer subjected to freestream turbulence. Pt I: Boundary layer structure and receptivity// J. Fluid Mech. 1994. V. 281. P. 193–218.
20. Matsubara M., Alfredsson P.H. Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence// J. Fluid Mech. 2001. V. 430. P. 149–168.
21. Филиппов В.М. Экспериментальное исследование влияния градиента давления на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный// Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 6. С. 114–118.

Numerical Simulation of Tollmien-Schlichting Wave Generation by Flow Turbulence

M. V. Ustinov^{a, b}

^a*Zhukovskii Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (MPhTI), Dolgoprudny, Moscow oblast, Russia*

e-mail: umax1961@gmail.com

The disturbances generated by external turbulence in the shear layer on a flat plate suddenly set in motion are found. As the initial conditions, turbulent flow found using direct numerical simulation of the development of isotropic homogeneous turbulence is used. The solution obtained models laminar-turbulent transition in the boundary layer on a flat plate under relatively low free-stream turbulence when the transition is caused by Tollmien-Schlichting waves. The solution makes it possible to describe the process of generating various disturbances, namely, low-frequency streaky structures and instability waves and also their development in the initial stage of laminar-turbulent transition. Based on the processing of the obtained results, a simple model is proposed that relates the spectra of instability waves in the boundary layer and turbulent pulsations in free-stream flow. The dependences of the initial amplitude of instability waves and their critical amplification factors (*N*-factors) on the degree of flow turbulence are also obtained.

Keywords: hydrodynamic instability, turbulence, laminar-turbulent transition, receptivity, boundary layer.

РЕЖИМЫ ВЫТЕСНЕНИЯ ИЗ АНИЗОТРОПНОГО ПЛАСТА ПРИ ЗАКАЧКЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНУЮ СКВАЖИНУ

© 2024 г. А. И. Андреева*, А. А. Афанасьев**

МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва Россия

*e-mail: waandreeva@gmail.com

**e-mail: afanasyev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 13.12.2023 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

В рамках профильной задачи фильтрации исследуются режимы вытеснения жидкости из пласта, вскрытого системой вертикальных скважин. Рассматривается случай анизотропного пласта, в котором существенен эффект плавучести вытесняющей жидкости. Показано, что в случае общего положения процесс вытеснения характеризуется пятью критериями подобия, один из которых определяет параметры потока жидкости из скважины в пласт. Описаны асимптотические режимы вытеснения, в которых число определяющих параметров подобия снижается. Исследовано влияние этих параметров на коэффициенты извлечения пластовой жидкости и охвата пласта вытеснением. Построена диаграмма режимов вытеснения, в которой ограничены области влияния критериев подобия и обнаружены асимптотические случаи. Результаты настоящего исследования могут быть полезны в нефтегазовой отрасли при оценке эффективности различных методов разработки месторождений.

Ключевые слова: фильтрация, анизотропный пласт, гравитационное расслоение, скважина, коэффициент охвата, повышение нефтеотдачи.

DOI: 10.31857/S1024708424030107, **EDN:** PFEHRR

Многофазные течения, связанные с вытеснением жидкости из пористой среды, создаются во многих геотехнологических процессах, в частности при разработке месторождений нефти и газа [1]. Для вытеснения нефти в геологический пласт закачивают воду или газ. При этом течение от нагнетательных к добывающим скважинам сопровождается эффектами, которые не могут быть описаны простыми линейными моделями [2]. Например, фильтрация сопровождается гравитационным расслоением вытесняющей и вытесняемой жидкостей, капиллярной пропиткой пористой среды и сложным процессом массообмена между пластом и скважинами. Кроме того, такое течение происходит в неоднородном пласте, часто характеризующимся анизотропной проницаемостью [3, 4]. Описанные процессы могут приводить к неравномерному охвату пласта вытеснением, эффективность которого трудно спрогнозировать.

В связи с востребованностью решения отмеченной проблемы в нефтегазовой отрасли процесс вытеснения рассматривался ранее многими авторами (например, [5–9]). Однако в большинстве таких исследований применяются инженерные подходы в рамках исследования конкретного пласта. В настоящей работе предлагается более системный подход к исследованию вытеснения с помощью определения безразмерных критериев подобия, характеризующих влияние тех или иных факторов. Подобный подход применялся ранее в работе [10], где, однако, скважины заменялись точечными источниками и стоками. Такая замена является сильным упрощением реальной скважины. В данной работе это ограничение снимается в рамках исследования разработки пласта рядной системой скважин. Выделяется новый критерий подобия, характеризующий массообмен между скважинами и пластом.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечно протяженный горизонтальный пласт мощностью H , который вскрыт системой нагнетательных и добывающих скважин α_l и α_p (рис. 1). Скважины образуют два бесконечных линейных ряда, расположенных вдоль оси Oy и чередующихся в направлении оси Ox . Расстояние

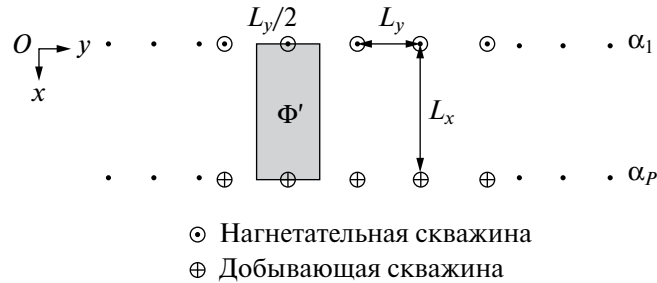


Рис. 1. Схема задачи в плоскости Oxy (вид сверху). Два бесконечных ряда скважин α_I и α_P расположены на расстоянии L_x . Расстояние между скважинами в одном ряду — L_y .

между скважинами в каждом ряду равно L_y , а расстояние между рядами скважин — L_x . Все границы предполагаются непроницаемыми. Пласт характеризуется однородным распределением пористости ϕ и однородным, но анизотропным распределением проницаемости k . Причем главные направления тензора проницаемости совпадают с направлениями осей x , y и z . В начальный момент времени $t = 0$ пласт насыщен несжимаемой жидкостью d с плотностью ρ_d и находится в условиях гидростатического равновесия. Следовательно, давление p_d линейно зависит от глубины z :

$$p_d = p_0 + \rho_d g z, \quad s_d = 1 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (1.1)$$

где p_0 — давление при $z = 0$, s_d — насыщенность жидкости d , а g — ускорение свободного падения. Ось z сонаправлена с вектором действия силы тяжести.

Скважины предполагаются совершенными, то есть перфорированными по всей толщине пласта. Через нагнетательные скважины закачивается вытесняющая несжимаемая жидкость плотности ρ_i . Закачка начинается в момент времени $t = 0$ и происходит с постоянным объемным расходом Q . Нагнетательные и добывающие скважины включаются одновременно. Причем суммарный темп отбора обеих жидкостей через каждую добывающую скважину тоже равен Q .

В силу симметрии расстановки скважин ограничимся рассмотрением области Φ' , имеющей в плоскости Oxy размеры $L_x \times L_y$, такой, что расстояние между скважинами и границами $y = \text{const}$ составляет $L_y/2$. Таким образом, область Φ' задается координатами $(x, y, z) \in [0, L_x] \times [-L_y/2, L_y/2] \times [0, H]$.

Далее предполагается, что $k_y = k_x$ и $L_y \ll L_x$, т.е. размах области поперек основного направления течения от α_I к α_P мал. В этом случае естественно ожидать, что параметры течения на некотором удалении от α_I и α_P зависят только от координат x и z и слабо зависят от y . Для исследования такого течения рассмотрим профильную постановку задачи фильтрации в плоскости Oxz , соответствующей разрезу пласта $y = 0$ (рис. 2). Причем в явном виде зависимость параметров течения от y учитываться не будет. Радиальный вид течения вблизи скважин α_I ($x = 0$) и α_P ($x = L_x$) будет учитываться неявно с помощью формул Дюпюи и Писмана [11, 12]. Далее разрез $y = 0$ области Φ' обозначается символом Φ .

Плотность закачиваемой жидкости ρ_i может быть как больше, так и меньше плотности вытесняемой жидкости ρ_d . В зависимости от значений ρ_i и ρ_d могут реализовываться различные режимы течения. При $\rho_i < \rho_d$ закачиваемая жидкость под действием силы Архимеда стремится подняться к кровле пласта. Обратно, тяжелая вытесняющая жидкость i стремится под действием силы тяжести опуститься к границе $z = H$. В данной работе для определенности положим, что $\rho_i < \rho_d$, хотя это предположение несущественно.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что жидкости i и d являются несжимаемыми, несмешивающимися и характеризующимися постоянными вязкостями $\mu_j, j = i, d$. В таких предположениях двухфазная фильтрация вытесняющей и вытесняемой жидкостей описывается следующей системой уравнений [13, 14]

$$\phi \partial_t (s_j) + \nabla \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad j = d, i \quad (2.1)$$

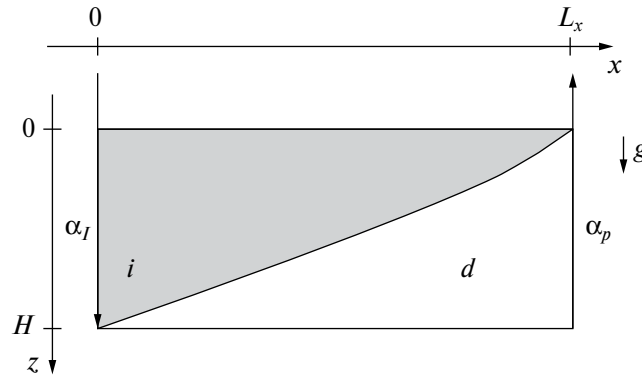


Рис. 2. Схема течения в профильной постановке задачи. Нагнетательная скважина α_I расположена при $x = 0$, а добывающая α_p при $x = L_x$.

$$\mathbf{u}_j = -\mathbf{k} \frac{k_{rj}(s_j)}{\mu_j} (\nabla p_j - \rho_j \mathbf{g}) \quad (2.2)$$

$$s_d + s_i = 1, \quad p_i - p_d = p_c(s_i) \quad (2.3)$$

где $\partial_t = \partial / \partial t$, ϕ — пористость, ρ — плотность, s — насыщенность, $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации, $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_x, k_z\}$ — тензор абсолютной проницаемости, k_{rj} — относительная проницаемость j -ой фазы, p — давление, p_c — капиллярное давление, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, а индексы i и d обозначают параметры закачиваемой и вытесняемой жидкостей, соответственно. Предполагается, что обе жидкости и матрица пористой среды — несжимаемые среды, т.е. $\rho, \phi, \mathbf{k} = \text{const}$. Уравнения (2.1) — законы сохранения массы каждой из жидкостей, уравнение (2.2) — закон Дарси, а уравнения (2.3) — замыкающие соотношения для насыщенностей фаз и их давлений.

Функции насыщенности, т.е. относительные фазовые проницаемости $k_{ri}(s_i)$ и $k_{rd}(s_i)$ и капиллярное давление $p_c(s_i)$, задаются в виде [15]

$$k_{ri}(s_i) = k_{ri,\max} s_i^2, \quad k_{rd}(s_i) = (1 - s_i)^2, \quad p_c(s_i) = p_{c,\max} s_i \quad (2.4)$$

где $k_{ri,\max}$ — максимальное значение относительной фазовой проницаемости, а $p_{c,\max}$ — максимальное капиллярное давление. Значения этих констант могут изменяться в широком диапазоне в зависимости от межмолекулярного взаимодействия между скелетом пористой среды и жидкостями. Типовые значения этих параметров: $k_{ri,\max} < 1$, а $p_{c,\max} \in [0; 100]$ бар.

Начальные условия для системы (2.1)–(2.3), соответствующие гидростатическому равновесию, приводятся в уравнении (1.1). Отметим, что значение опорного давления p_0 несущественно для течения несжимаемых жидкостей, поэтому далее для упрощения изложения положим, что $p_0 = 0$. Верхняя и нижняя границы области Φ , соответствующие кровле и подошве пласта — непроницаемые. Это означает, что всюду на этих границах нормальная компонента скорости равна нулю, т.е.

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \text{ и } H \quad (2.5)$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный к границе области Φ вектор.

На границах $x = 0$ и $x = L_x$, соответствующих скважинам α_I и α_p , задаются нормальные компоненты потоков жидкостей $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}$. В формулах для этих потоков в неявном виде учитывается распределение давления в скважинах и радиальное направление фильтрации в их малой окрестности. Предполагается, что гидравлическими потерями в скважине можно пренебречь, а давления в α_I и α_p имеют гидростатическое распределение, соответствующее средней плотности двухфазной среды в скважине

$$p_w(z) = p_{bh} + \bar{\rho} g z \quad (2.6)$$

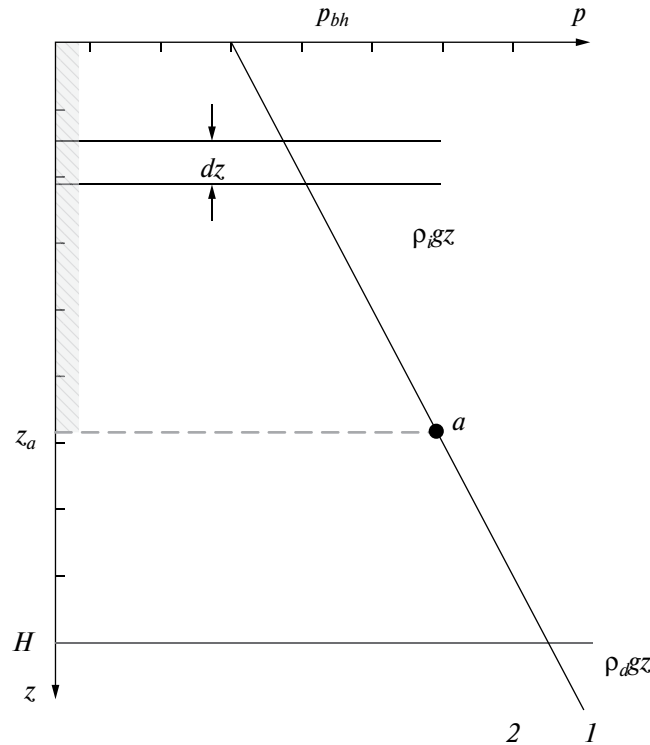


Рис. 3. Схема распределений давления в пласте 1 и стволе 2 скважины α_j . При $z \geq z_a$ давление в стволе скважины меньше давления в пласте. Серая область соответствует интервалу нагнетания жидкости i .

где p_{bh} — забойное давление, то есть давление в скважине при $z = 0$. Рассмотрим массообмен между скважиной и пластом через малый интервал скважины dz (рис. 3). Объемный расход жидкости $j = i, d$ из скважины α_j (или в скважину α_p) через dz задается формулой

$$dq_j = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} dz \quad \text{при } x = 0 \text{ и } L_x \quad (2.7)$$

где $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}$ — горизонтальная компонента скорости фильтрации. В профильной постановке задачи она вычисляется по формуле Дюпюи [11], которая для нагнетательной скважины имеет вид:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = \pi k_x \frac{k_{ri}}{\mu_i} \frac{\max(p_w - p_i, 0)}{\ln(r_e / r_w)} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (2.8)$$

где r_w — эффективный радиус скважины, r_e — радиус контура питания, а p_j и p_w — давления в пласте и скважине на глубине рассматриваемого интервала. Для добывающей скважины имеем следующее граничное условие:

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = \pi k_x \frac{k_{rj}}{\mu_j} \frac{\min(p_w - p_j, 0)}{\ln(r_e / r_w)} \quad \text{при } x = L_x \quad (2.9)$$

В уравнениях (2.8) и (2.9) стоит коэффициент π , а не 2π как в классической формуле Дюпюи, так как скважины α_j и α_p расположены на границах рассматриваемой области пласта Φ , и, следовательно, для массообмена с пластом используется только половина площади поверхности скважины. Согласно (2.8), поток из нагнетательной скважины в пласт возможен, только если давление в скважине p_w больше пластового давления на глубине рассматриваемого интервала dz . Если $p_w < p_j$, то $dq_i = 0$. Такая зависимость потока от перепада давления может соответствовать обратным клапанам, установленным в перфорационных отверстиях. Согласно, поток из пласта в добывающую скважину возможен, только если давление в скважине p_w меньше пластового давления на глубине интервала dz . Интегрируя (2.8) и (2.9) вдоль

скважины, т.е. в интервале $z \in [0, H]$, получим полные расходы жидкостей, которые далее обозначаются символами Q_j

$$Q_j = \int_0^H \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} \quad \text{при } x = 0 \text{ и } L_x \quad (2.10)$$

Радиус контура питания r_e в уравнениях (2.8) и (2.9) вычисляется по формуле Писмана [12], которая в предположении изотропной проницаемости в плоскости Oxy имеет вид

$$r_e = 0.14 L_y \quad (2.11)$$

Средняя плотность в скважине $\bar{\rho}$ определяется в рамках следующих допущений. Предполагается, что нагнетательная скважина α_i наполнена только жидкостью i , а $\bar{\rho} = \rho_i$. В случае скважины α_p величина $\bar{\rho}$ равна осредненной по объемным потокам фаз плотности среды

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_i Q_i + \rho_d Q_d}{Q_i + Q_d} \quad \text{для скважины } \alpha_p \quad (2.12)$$

Учитывая малый объем скважины по сравнению с поровым объемом пласта, объемы жидкостей в скважине приблизительно равны соответствующим Q_j . Это предположение используется в (2.12).

По постановке задачи для скважины α_i задан расход $Q = Q_i = \text{const}$. Так как жидкости несжимаемые, то суммарный поток обеих жидкостей через добывающую скважину равен той же заданной величине Q .

Эффективность вытеснения можно оценить с помощью коэффициента охвата (E) и коэффициента извлечения жидкости d (R). Коэффициент E — отношение объема пласта, охваченного вытеснением, к объему области Φ . Коэффициент R характеризует долю извлеченной жидкости d по отношению к ее объему в пласте при $t = 0$. Формулы для расчета E и R взяты из [10].

3. ХАРАКТЕРНЫЕ МАСШТАБЫ И КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

3.1. Масштабы длины

В качестве масштабов длины используем размеры области Φ в направлениях осей x и z — L_x и H . Тогда безразмерные координаты можно представить в следующем виде:

$$x^* = x / L_x, \quad z^* = z / H \quad (3.1)$$

Символом звездочка отмечены безразмерные величины. Таким образом, в координатах (3.1) область Φ имеет вид $(x^*, z^*) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

3.2. Масштабы давления

Сформулированная задача характеризуется четырьмя масштабами давления:

$$p_Q = \frac{\mu_d L_x Q}{k_x H L_y}, \quad p_{well} = \frac{\mu_d Q \ln(r_e / r_w)}{\pi k_x H}, \quad p_{grav} = \Delta \rho g H, \quad p_{cap} = p_{c, \max} \quad (3.2)$$

где $\Delta \rho = \rho_d - \rho_i$. Масштаб p_Q характеризует перепад давления между границами $x = 0$ и $x = L_x$, вызванный течением жидкости d с полным расходом Q . Предполагая одномерное и однофазное течение в направлении оси x , имеем линейное распределение p_d от x с полным перепадом p_Q (штриховая прямая линия на рис. 4). В малой окрестности скважин реализуется осесимметричное течение, а давление имеет логарифмическое распределение от расстояния до скважины. Вблизи α_i давление возрастает, а вблизи α_p — снижается по сравнению с отмеченным линейным распределением (сплошная линия на рис. 4). В окрестности α_p формируется “воронка” давления величиной p_{well} . Масштаб p_{grav} есть разность давлений столбов жидкостей i и d высоты H . Эта величина характеризует влияние силы Архимеда на процесс фильтрации. Масштаб p_{cap} — характерное значение капиллярного давления.

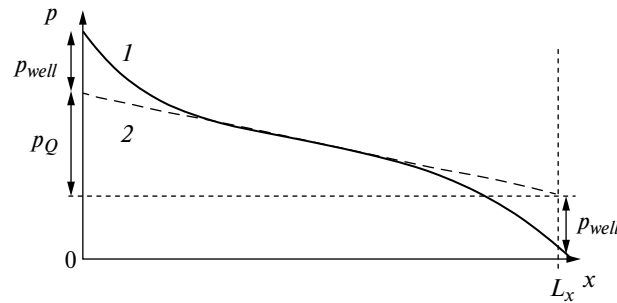


Рис. 4. Схема распределения давления в 3D постановке задачи при $z = \text{const}$, $y = 0$ (1) и 2D профильной постановке задачи (2).

Рассматривая отношения масштабов в (3.2), введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} Gr = \frac{p_Q}{p_{grav}} &= \frac{\mu_d L_x Q}{\Delta \rho g k_x H^2 L_y}, & Ca = \frac{p_Q}{p_{cap}} &= \frac{\mu_d L_x Q}{p_{c,\max} k_x H L_y}, \\ \Pi = \frac{p_{cap}}{p_{grav}} &= \frac{p_{c,\max}}{\Delta \rho g H}, & \Lambda = \frac{p_{well}}{p_Q} &= \frac{L_y}{\pi L_x} \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где r_e выражается из (2.11).

Физический смысл критериев подобия Gr , Π и Ca описан в работе [10]. Подробно опишем влияние Λ на исследуемый процесс фильтрации. Для оценки влияния Λ рассмотрим начальный этап закачки жидкости i , когда пористая среда в окрестности α_j еще насыщена жидкостью d . Причем будем предполагать, что пластовое давление слабо отклоняется от начального гидростатического распределения (1.1). Таким образом, пластовое давление при $x = 0$ дается сплошной линией 1 (рис. 3), а давления в скважине – штриховой линией 2. Пусть a – точка пересечения этих прямых линий, расположенная на глубине z_a . Согласно (3.3) и рис. 3, z_a монотонно возрастает при увеличении Λ . Действительно, при $\Lambda \ll 1$ забойное давление p_{bh} приблизительно равно пластовому давлению на глубине $z = 0$, а интервал $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} > 0$ при $x = 0$ стянут к кровле пласта. При увеличении Λ штриховая линия 2 на рис. 3 смещается вправо, а точка a – вниз. Следовательно, интервал $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} > 0$ увеличивается. Таким образом, большие значения Λ соответствуют большим интервалам скважины α_j , используемым для закачки жидкости i .

3.3. Масштабы скорости и времени

Введем эффективную скорость фильтрации жидкости в направлении оси x , которая определяется как отношение расхода к площади поперечного сечения области Φ'

$$u_Q = \frac{Q}{H L_y} \quad (3.4)$$

а также характерную скорость в направлении оси z :

$$u_{grav} = \frac{k_z}{\mu_d} \Delta \rho g \quad (3.5)$$

Скорость u_{grav} описывает перемещение частицы жидкости d в вертикальном направлении под действием силы Архимеда. Тогда, используя закон Дарси (2.2), получим, что скорость фильтрации пропорциональна отношению k_z/μ_d и градиенту давления p_{grav}/H .

Истинная скорость жидкости v равна отношению скорости фильтрации u к пористости ϕ . Тогда характерные времена перемещения жидкости между противоположными границами области Φ можно оценить как:

$$t_Q = \frac{L_x}{u_Q / \phi} = \frac{\phi L_x L_y H}{Q}, \quad t_{grav} = \frac{H}{u_{grav} / \phi} = \frac{\phi H \mu_d}{k_z \Delta \rho g} \quad (3.6)$$

Параметр t_Q — характеризует время, за которое частица жидкости переместится от границы $x = 0$ до $x = L_x$ под действием перепада давления p_Q . Параметр t_{grav} — характерное время, за которое частица жидкости переместится между $z = 0$ и $z = H$ под действием силы Архимеда.

Сравнивая масштабы времени (3.6), введем безразмерное число

$$\Gamma = \frac{t_{grav}}{t_Q} = \frac{Q \mu_d}{k_z \Delta \rho g L_x L_y}$$

Малые значения $\Gamma \ll 1$ соответствуют режиму вытеснения, в котором при прочих равных условиях преобладает вертикальное направление течения. При этом происходит быстрое гравитационное расслоение жидкостей. Таким образом, при $\Delta \rho > 0$, течение жидкости i направлено от нагнетательной скважины к кровле пласта вдоль границы $x = 0$. При достижении границы $z = 0$ направление течения i резко изменяется и далее происходит вдоль $z = 0$ [10]. При $\Gamma \gg 1$ этим эффектом плавучести можно пренебречь.

3.4. Критерии подобия A и M

Определим критерий подобия, характеризующий анизотропное распределение проницаемости, в виде:

$$A = \sqrt{\frac{Gr}{\Gamma}} = \frac{L_x}{H} \sqrt{\frac{k_z}{k_x}} \quad (3.7)$$

Случай $A \gg 1$ соответствует пласту с высокой проницаемостью в вертикальном направлении, т.е. случаю больших k_z . При $A \ll 1$ пласт характеризуется высокой проницаемостью в горизонтальном направлении, т.е. большим k_x .

Также введем критерий подобия

$$M = k_{ri, \max} \mu_d / \mu_i$$

характеризующий отношение подвижностей фаз. Случай $M > 1$, соответствует более подвижной (т.е. менее вязкой) жидкости i по сравнению с d . При $M < 1$, наоборот, вытесняющая жидкость имеет меньшую подвижность $k_{ri, \max} / \mu_i < 1 / \mu_d$. Всюду далее полагается, что $M = 5$. Такими значениями характеризуется, например, нагнетание углекислого газа в месторождения легкой нефти.

4. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

Введем относительные фазовые давления $\tilde{p}_j$, равные разности p_j и начального гидростатического распределения в (1.1) и заменим в (2.1)–(2.3) p_j на $\tilde{p}_j$. Запишем основные уравнения в масштабах времени, скорости и давления t_Q , u_Q и p_Q , соответственно:

$$t = t_Q t^*, \quad u = u_Q u^*, \quad p = p_Q p^*, \quad p_c = p_{cap} p_c^*, \quad k_{ri} = k_{ri, \max} k_{ri}^* \quad (4.1)$$

Здесь индекс звездочка обозначает безразмерные величины. Согласно (3.6) и учитывая, что $Q = \text{const}$, безразмерное время t^* равно количеству закачанных поровых объемов $\phi L_x L_y H$.

Подставляя (2.2), (3.1) и (4.1) в уравнения (2.1) и (2.3), получим следующую систему уравнений, в которой для краткости опустим знак звезды у безразмерных переменных:

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{rd} \frac{\partial p_d}{\partial x} \right) + A^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{rd} \frac{\partial p_d}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial s_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{ri} \frac{\partial p_i}{\partial x} \right) - A^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{ri} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{Gr} \right) \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$p_i - p_d = \text{Ca}^{-1} p_c(s_i) \quad (4.4)$$

Уравнения (4.2)–(4.4) образуют замкнутую систему трех уравнений относительно неизвестных s_i , p_i и p_d , причем p_i и p_d связаны конечным соотношением (4.4). Начальные условия (1.1) для системы уравнений (4.2)–(4.4) запишутся в виде

$$s_i = 0, \quad p_d = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (4.5)$$

Граничные условия в безразмерном виде имеют вид

$$\frac{\partial p_d}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{1}{\text{Gr}} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \text{ и } 1 \quad (4.6)$$

Подставляя (2.7) и (2.9) в уравнение (2.10) и переходя к безразмерным переменным, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} &= Mk_{ri} \max(p_w - p_i, 0), \quad \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} &= Mk_{ri} \min(p_w - p_i, 0), \quad \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = k_{rd} \min(p_w - p_i, 0) \quad \text{при} \quad x = 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

причем условия заданного расхода Q для скважин запишется в виде

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int_0^1 \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} dz \quad \text{при} \quad x = 0 \\ \Lambda &= \int_0^1 (\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{n} dz \quad \text{при} \quad x = 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Таким образом, безразмерная постановка задачи в уравнениях (4.2)–(4.8) содержит только пять критериев подобия M , A , Λ , Gr и Ca . Кроме этих параметров течение также характеризуется кривыми относительной фазовой проницаемости и капиллярного давления (2.4). Согласно (3.3) и (3.7), безразмерные числа связаны соотношениями

$$\text{Gr} = \Gamma A^2 = \text{ПСа} \quad (4.9)$$

Далее, учитывая (4.9), вместо Gr в качестве одного из независимых критериев подобия используется Γ , т.е. в качестве основных величин, характеризующих режим вытеснения, выбираются M , A , Γ , Ca и Λ .

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

5.1. Диаграмма режимов вытеснения

В настоящей работе рассматривается только случай малого влияния капиллярного давления на режимы вытеснения жидкости d , т.е. $\text{Ca} \gg 1$ и $\text{П} \ll 1$. В данном разделе также предположим, что $\Lambda \ll 1$. Тогда режим фильтрации определяется только двумя критериями подобия, в качестве которых выберем A и Γ , а карту режимов вытеснения удобно строить в плоскости $\{A, \Gamma\}$. При построении этой диаграммы использовались численные решения задачи (4.2)–(4.8) с помощью пакета программ MUFITS [16, 17].

Согласно [10], можно выделить четыре асимптотических случая, соответствующих большому или малому A и Γ . В [10] рассматривалась более простая постановка задачи, в которой закачка жидкости i происходила через точечный источник, а не через скважину. Проведенные при различных A и Γ расчеты показали, что качественно такие же режимы реализуются и в рассматриваемой постановке задачи со скважинами. Однако на плоскости $\{A, \Gamma\}$ границы областей, соответствующих этим режимам, отличаются от [10]. При $A \gg 1$ и $\Gamma \gg 1$ реализуется режим 1D (one dimension) одномерного течения от α_I к α_P , в котором параметры течения слабо зависят от координаты z (рис. 5). При $A \gg 1$ и $\Gamma \ll 1$ реализуется режим PF (plume formation), связанный с образованием плюма (шлейфа) жидкости i . При $\Lambda \ll 1$ и $\Gamma \gg 1$ реализуется режим AR (anisotropic reservoir), связанный с фильтрацией в анизотропном пласте при $k_x \gg k_z$. Ниже показано, что распределение s_i в режиме AR отличается от полученных в [10], так как для закачки используется скважина, а не точечный источник. При $A \ll 1$ и $\Gamma \ll 1$ реализуется

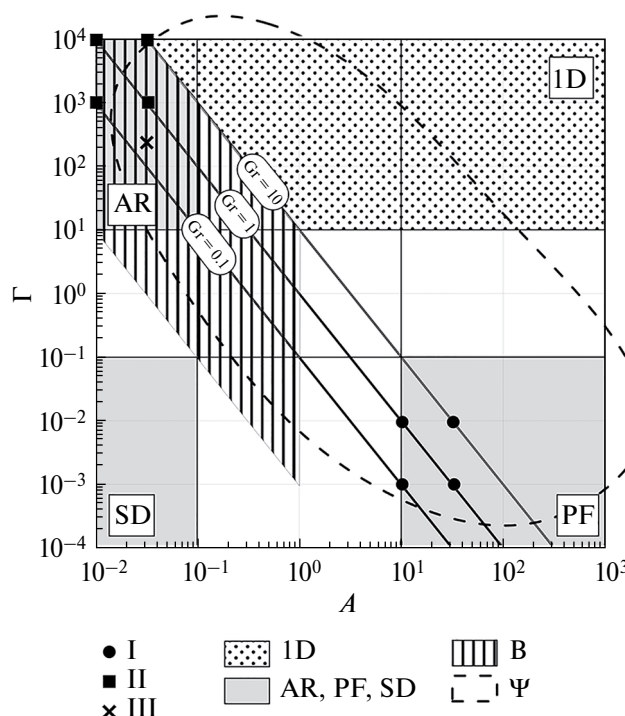


Рис. 5. Диаграмма режимов вытеснения. Области, закрашенные серым цветом, соответствуют режимам AR, PF и SD. Область, соответствующая режиму вытеснения 1D, показана черными точками.

режим SD (stratified displacement), связанный с преобладанием эффекта стратификации жидкостей и образованием однородного горизонтального слоя более легкой жидкости i над слоем более тяжелой жидкости d .

Согласно (4.9), на фазовой плоскости $\{A, \Gamma\}$, если A и Γ отложены в логарифмических осях (рис. 5), линии $Gr = \text{const}$ являются прямыми линиями, имеющими отрицательный наклон. Проведено исследование характерных значений A и Γ для реальных геологических пластов. Это исследование основано на выборе типичных диапазонов значений $L_x, L_y, H, \mu_j, \rho_j, Q, k_x, k_z$ и расчете для них A и Γ . Таким образом получена область значений A и Γ , представляющих интерес для геофизических приложений. Эта область Ψ ограничена на плоскости $\{A, \Gamma\}$ штриховой линией. Область Ψ вытянута вдоль линий $Gr = \text{const}$, простираясь между областями AR и PF. Она совсем не охватывает зону режима SD при $A < 0.1$ и $\Gamma < 0.1$ и только частично покрывает область 1D при $A > 10$ и $\Gamma > 10$. Таким образом, наибольший интерес представляет исследование режимов AR, PF и 1D и переходных режимов между ними при $0.01 \leq Gr \leq 100$. Исследование режима SD не имеет практического значения.

5.2. Режим вытеснения при $A \gg 1$ и $\Gamma \ll 1$

Рассмотрим параметры течения в серии расчетов I при больших A и малых Γ , т.е. в случае режима PF. На фазовой плоскости четыре точки, соответствующие проведенным расчетам при $A = 10$ или $10^{3/2}$ и $\Gamma = 10^{-3}$ или 10^{-2} , обозначены символом I (рис. 5).

Рассчитанные распределения насыщенности и скоростей фильтрации жидкостей в моменты времени $t = 0.25$ и 0.75 приводятся на рис. 6 и 7, соответственно. Здесь показаны изолинии насыщенности $s_i > 0.05m$, где $m = 0, \dots, 20$. Черные и серые стрелки показывают направление течения жидкостей i и d . Причем размер стрелок уменьшается со скоростью фильтрации, обращаясь в ноль при $u = 0$. Таким образом, области без стрелок на рис. 6 и 7 соответствуют застойным зонам, где жидкости не двигаются.

В режиме PF формируется плюм жидкости i , распространяющийся от α_l к α_p . Причем, насыщенность s_i в зоне плюма стремится к 1 ($s_i > 0.95$), так как все рассчитанные линии уровня $s_i = \text{const}$ группируются

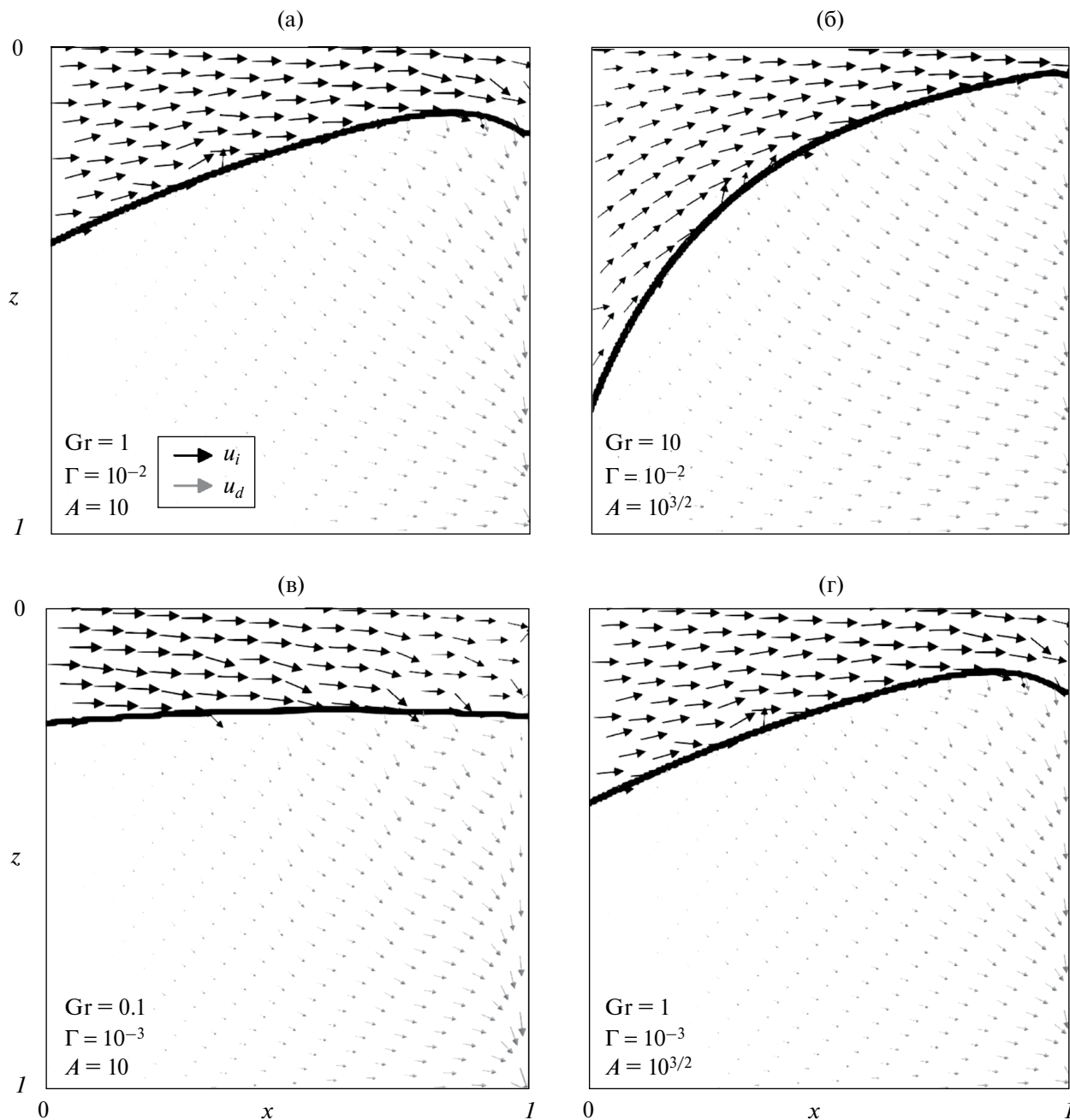


Рис. 6. Линии уровня $s_i > 0.05m$, $m = 0, \dots, 20$ и скорости фильтрации u_j в режиме вытеснения PF при $t = 0.25$.

на границе зоны плюма, ограничивая ее снизу. Фактически на границе плюма насыщенность скачком увеличивается от 0 до 1. Во всех случаях закачка i происходит только через верхний интервал скважины α_I , простирающийся от кровли пласта $z = 0$ до некоторой безразмерной глубины $z_a < 1$. Далее в пласте сила Архимеда действует на жидкость i , выталкивая ее к кровле пласта. В результате вблизи α_I толщина плюма уменьшается с x . Вблизи границы $x = 1$ толщина плюма увеличивается, так как α_P является линейным стоком. Несомненно на фильтрацию также влияет анизотропное распределение проницаемости. Это проявляется в том, что при фиксированном Γ , т.е. фиксированной плавучести жидкости i , и увеличении A , т.е. при увеличении проницаемости k_z , жидкость i быстрее всплывает к $z = 0$, а толщина плюма быстрее убывает с x (рис. 6 панели а, б и в, г).

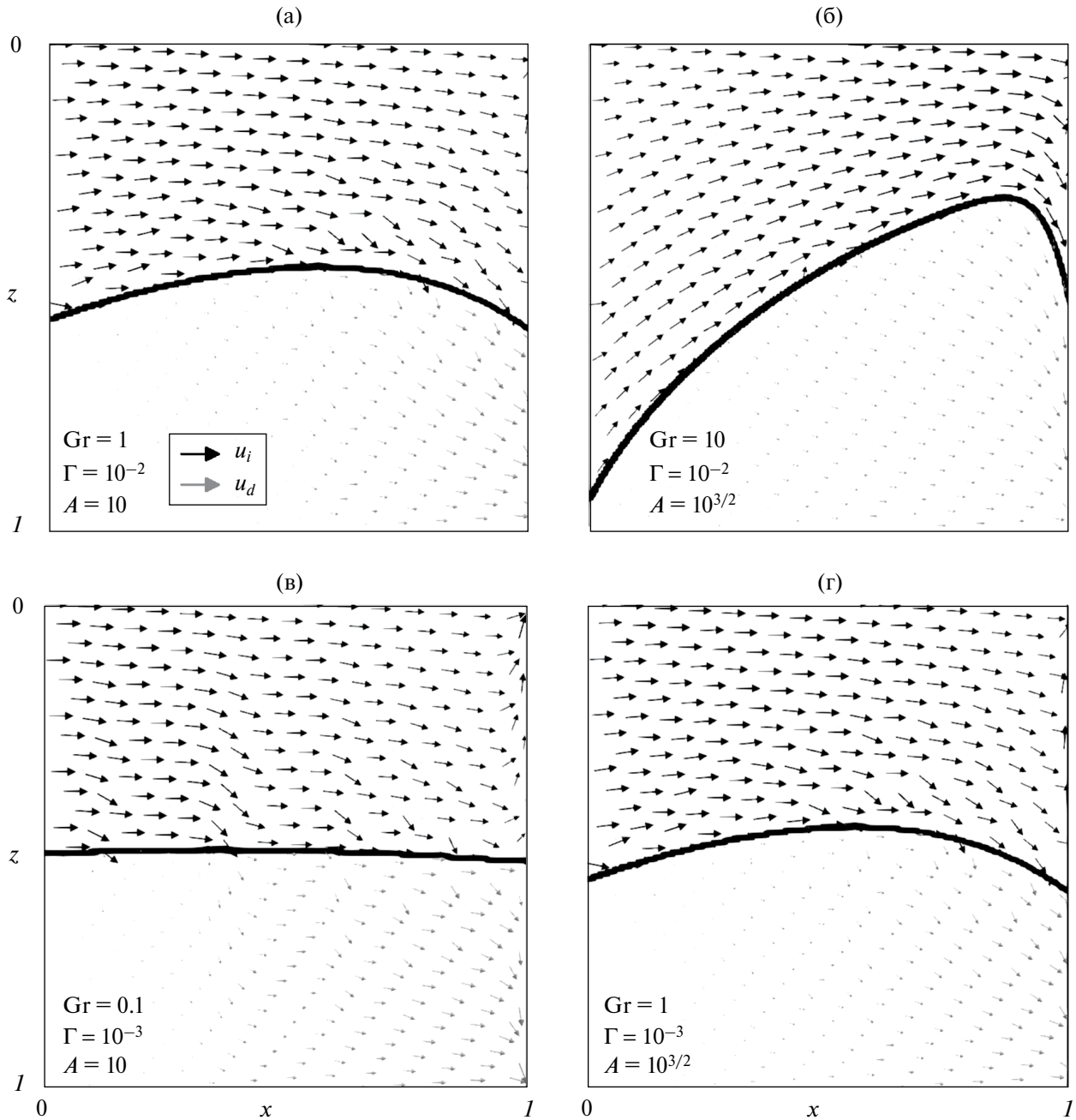


Рис. 7. Параметры течения в режиме PF при $t = 0.75$.

Заметим, что распределение параметров течения при $A = 10$, $\Gamma = 10^{-2}$ и $A = 10^{3/2}$, $\Gamma = 10^{-3}$ слабо отличаются друг от друга (панели а и г на рис. 6 и 7). Эти случаи соответствуют одинаковому значению $Gr = 1$. Таким образом, можно ожидать, что в режиме PF параметры течения характеризуются только одним критерием подобия $Gr = \Gamma A^2$, а не двумя критериями A и Γ . Проведенные расчеты в области PF при $A \geq 10$ и $\Gamma \leq 0.1$ подтвердили это предположение. Во всем отмеченном диапазоне Γ и A форма плюма определяется только параметром Gr .

На рис. 8а приводятся рассчитанные значения коэффициентов E и R от t при различных Gr . Так как в зоне плюма $s_i \approx 1$, то объем вытесненной жидкости d приблизительно равен объему порового пространства, в которое попала жидкость i . Следовательно, по определению E и R в режиме PF выполняется

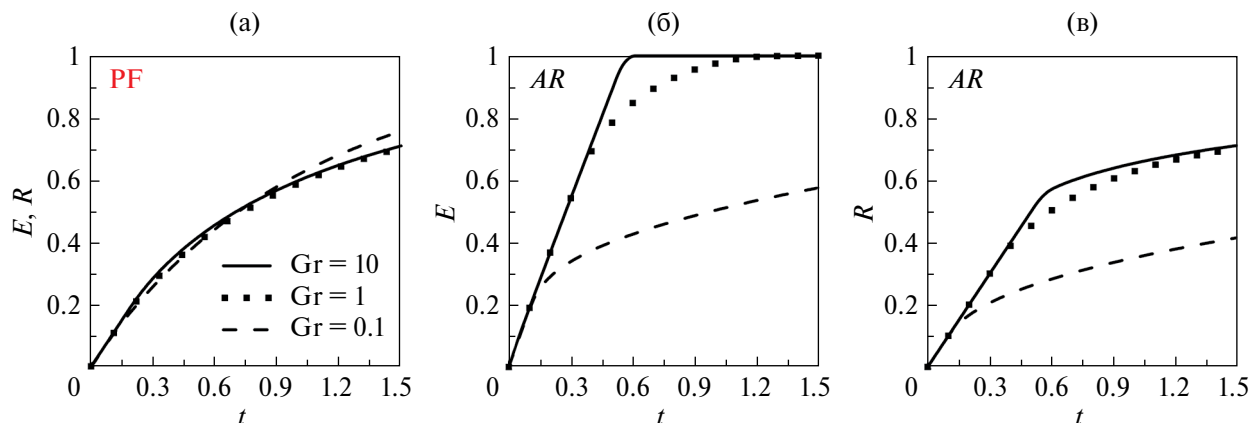


Рис. 8. Коэффициенты охвата R и извлечения пластовой жидкости E от t при различных критериях подобия Gr .

условие $E \approx R$. Эти параметры возрастают со временем t , причем при $t \ll 1$ когда i еще не достигла α_p выполняется равенство $E = R = t$. Когда i достигает α_p отмеченное равенство нарушается — $E = R < t$ — так как скорость роста E и R с t уменьшается. Это связано с тем, что при таких i объем добытой жидкости d уже меньше объема закачанной жидкости i .

Результаты расчетов показали, что E и R слабо зависят от критерия подобия Gr при $10^{-2} \leq Gr \leq 10^2$ (рис. 8а). По-видимому, этот результат связан с выбранными значениями критериев подобия M , Ca и Pe . Оценка влияния M , Ca и Pe на E и R в режиме PF является предметом будущих исследований, которые не затрагиваются в настоящей работе.

5.3. Режим вытеснения при $A \ll 1$ и $\Gamma \gg 1$

Рассмотрим параметры течения в серии расчетов II при больших Γ и малых A , т.е. в случае режима AR. На фазовой плоскости четыре точки, соответствующие проведенным расчетам при $A = 0.01$ или $10^{-3/2}$ и $\Gamma = 10^3$ или 10^4 обозначены символом II (рис. 5). Рассчитанные параметры течения в моменты времени $t = 0.25$ и 0.75 приводятся на рис. 9 и 10, соответственно.

Режим фильтрации AR соответствует вытеснению из существенно анизотропного пласта, характеризующегося большим k_x и малым k_z . Такое распределение проницаемости приводит к доминированию горизонтального направлению течения. Приблизительно режим AR можно рассматривать как плоскопараллельное течение от α_l к α_p в серии горизонтальных, не связанных друг с другом слоев. Следовательно, распределение насыщенности в пласте во многом определяется только распределением потока i из α_l в пласт. Согласно рис. 3, наибольшая интенсивность потока i достигается у кровли пласта при $z = 0$. В результате жидкость проникает гораздо дальше в пласт, двигаясь по слоям вдоль границы $z = 0$. При увеличении z разность давлений в стволе α_l и пласте снижается (рис. 3), а, следовательно, снижается и интенсивность потока i из скважины (рис. 3). В результате протяженность зоны двухфазного течения вдоль оси Ox уменьшается при увеличении z . Результаты расчетов показывают, что скорость потока из скважины приблизительно уменьшается как линейная функция от z . Это выражается в линейной зависимости координаты x переднего фронта вытеснения от z (рис. 9). Причем, при увеличении критерия подобия Gr скорость убывания потока с z уменьшается, а использующийся для закачки интервал $z \leq z_a$ увеличивается. Если $z_a < 1$ (рис. 9в и 10в), то при $z > z_a$ образуется застойная зона, в которой жидкость d фактически не движется. Эта жидкость не может быть вытеснена при таком режиме фильтрации.

Заметим, что распределения параметров течения при $A = 10^{-2}$, $\Gamma = 10^4$ и $A = 10^{-3/2}$, $\Gamma = 10^3$ слабо отличаются друг от друга (панели а и г на рис. 9 и 10). Эти случаи соответствуют одинаковому значению $Gr=1$. Таким образом, можно ожидать, что в режиме AR, также как и в PF, параметры течения характеризуются только одним критерием подобия $Gr = \Gamma A^2$, а не двумя параметрами A и Γ . Проведенные расчеты в области AR при $A < 0.1$ и $\Gamma > 10$ подтвердили это предположение. Во всем отмеченном диапазоне A и Γ форма зоны двухфазного течения определяется только параметром Gr .

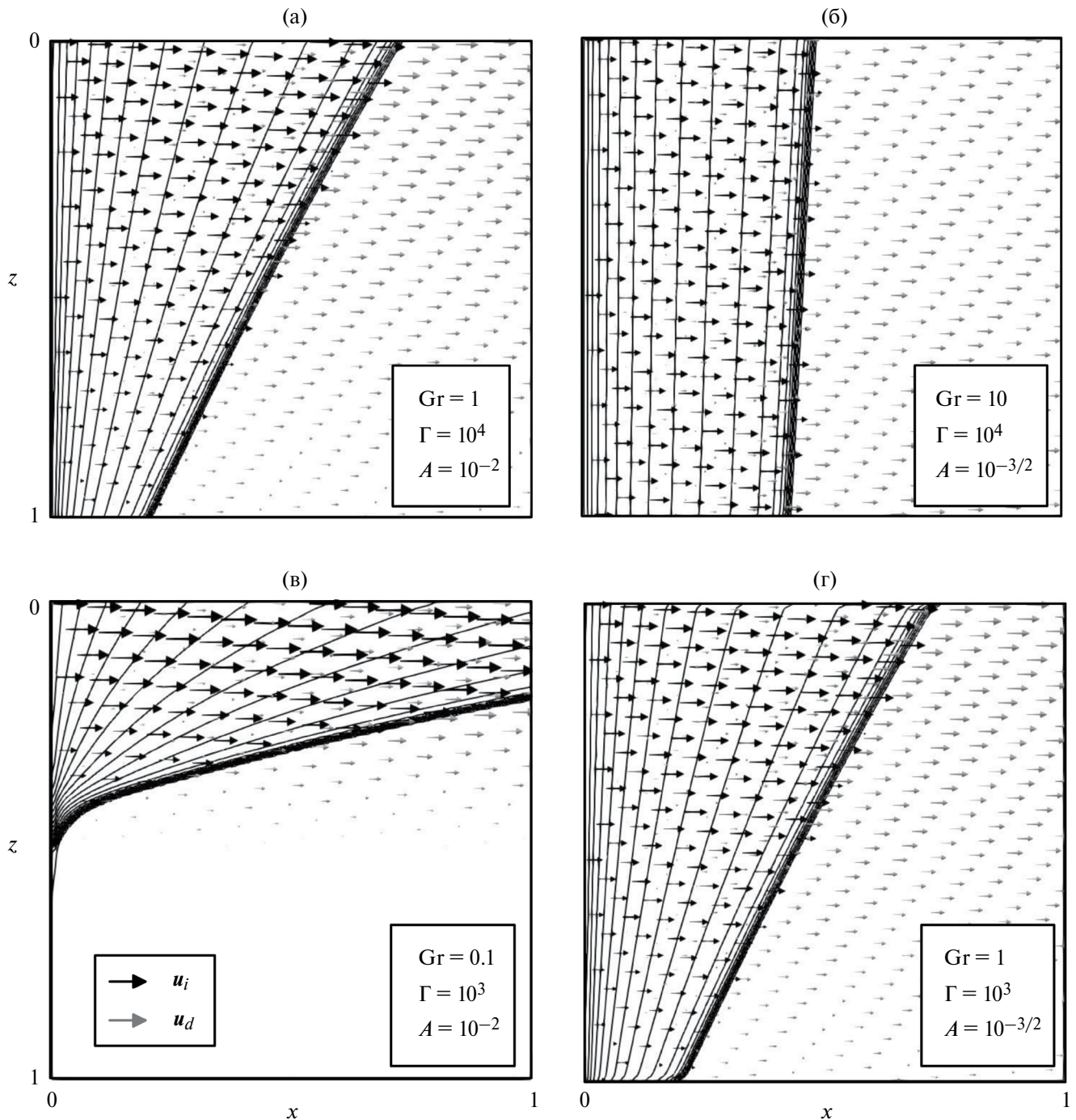


Рис. 9. Линии уровня $s_i > 0.05m$, $m = 0, \dots, 20$ и скорости фильтрации u_j в режиме вытеснения AR при $t = 0.25$.

Как отмечено выше, при увеличении Gr интервал α_j , использующийся для закачки жидкости i , увеличивается, а поток жидкости i из скважины равномернее распределяется вдоль α_j . При больших Gr этот поток слабо зависит от z . Таким образом, при увеличении Gr режим AR непрерывно переходит в режим 1D. Результаты расчетов показывают, что при $A < 1$ и $Gr > 10$ и при $A \geq 1$ и $\Gamma > 10$ течение можно считать одномерным, зависящим только от координаты x (рис. 5). Таким образом, на фазовой плоскости зона AR граничит с зоной 1D. Такое поведение течения существенно отличается от случая, когда вместо скважин используются точечные источники [10].

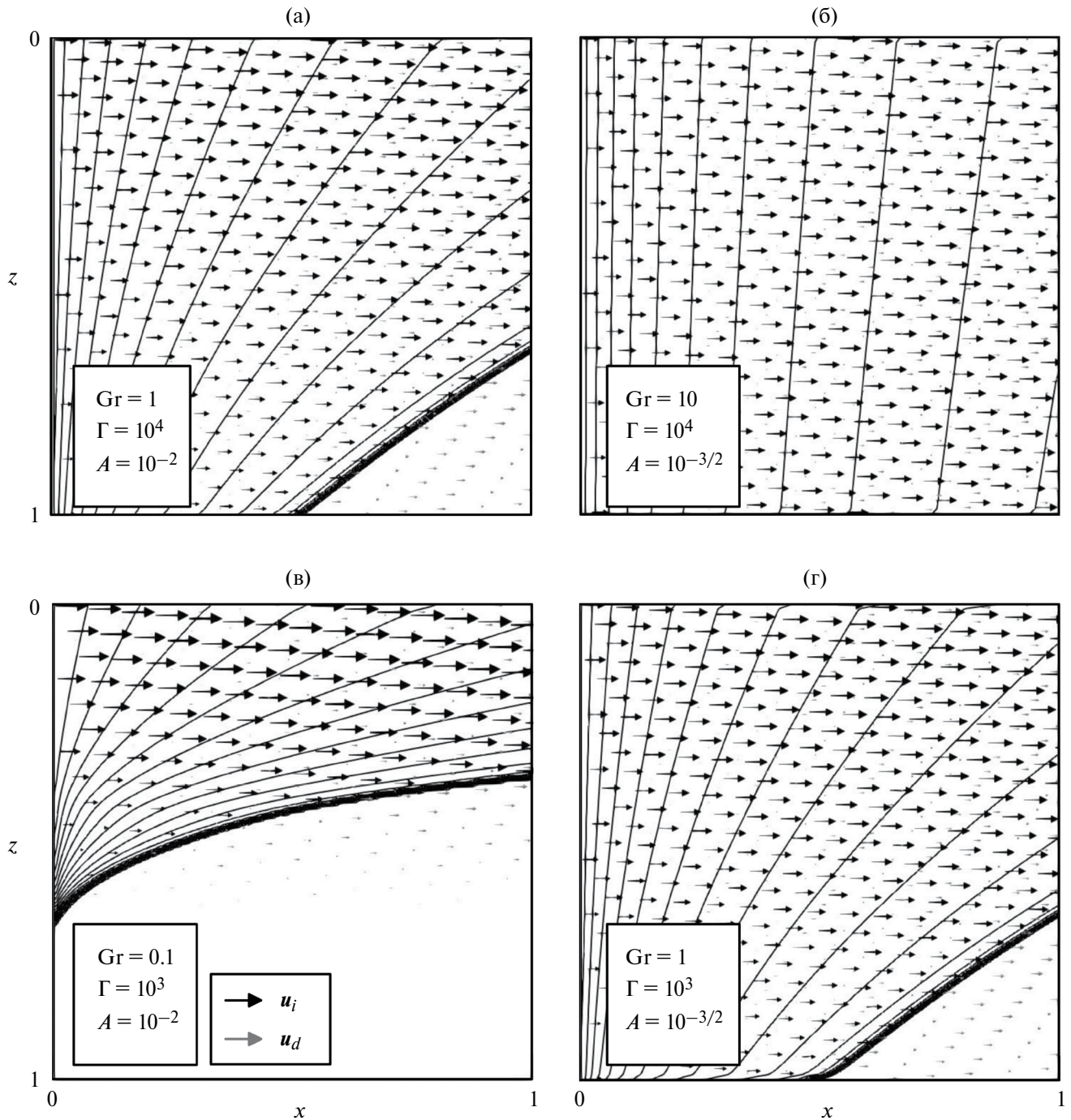


Рис. 10. Параметры течения в режиме AR при $t = 0.75$.

Для рассмотренных случаев коэффициенты E и R от t показаны на рис. 8б и в. Оба показателя эффективности E и R монотонно возрастают с t . Причем при малых t , когда жидкость i еще не прорвалась к α_p , они растут линейно. Коэффициент E растет как ct , где $c > 1$, так как в зоне двухфазного течения s_i значительно меньше единицы. Коэффициент R растет как t , так как объем добытой жидкости d равен объему закачанной жидкости i . Когда i прорывается к α_p рост показателей эффективности замедляется. Причем при фиксированном t коэффициенты E и R возрастают с критерием подобия Gr . Действительно, при больших Gr можно полнее охватить пласт вытеснением с помощью одномерного течения. В том числе можно вытеснить жидкость d у подошвы пласта при $z = 1$. Таким образом, в режиме AR можно

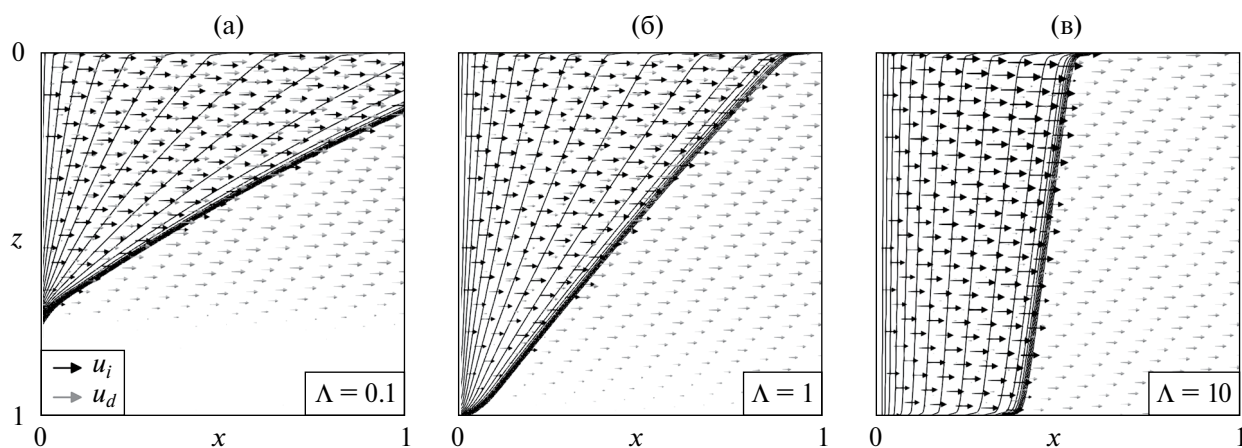


Рис. 11. Параметры течения при $t = 0.25$, $A = 10^{-3/2}$, $\Gamma = 250$, $Gr = 0.25$ и $\Lambda = 0.1$, 1 и 10, а–в соответственно.

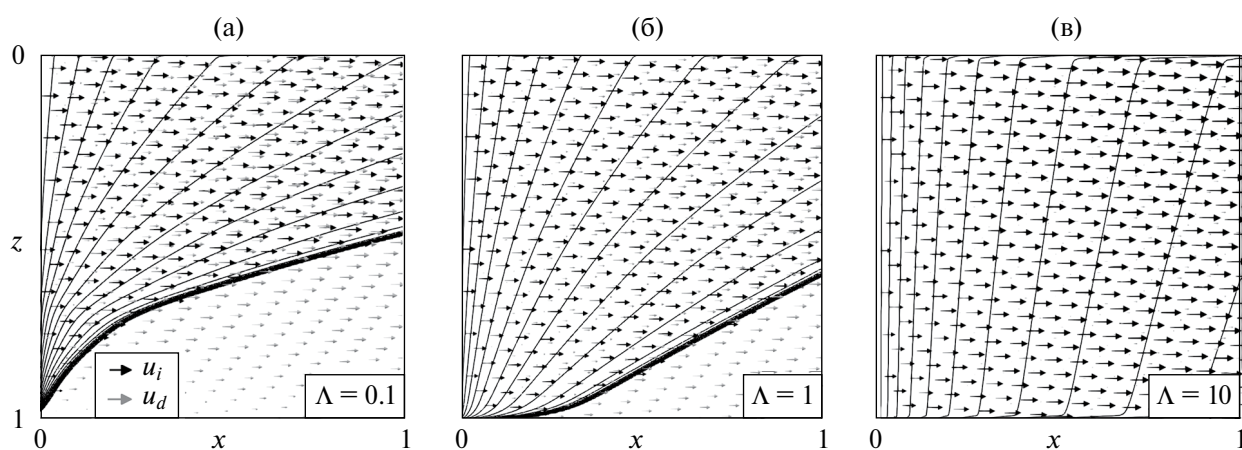


Рис. 12. Параметры течения при $t = 0.75$, $A = 10^{-3/2}$, $\Gamma = 250$, $Gr = 0.25$ и $\Lambda = 0.1$, 1 и 10.

повысить эффективность вытеснения, создав течение с большим Gr . Согласно (3.3), при фиксированных параметрах пласта, повышение Gr достигается с помощью увеличения темпа нагнетания Q .

5.4. Влияние параметра Λ

Результаты расчетов в широком диапазоне A и Γ показывают, что критерий подобия Λ влияет на параметры течения только в заштрихованной области В на рис. 5. Эта область охватывает зону режимов AR и простирается в зону переходных от AR к PF режимов при $A < 1$. Причем наиболее сильное влияние Λ наблюдается в зоне AR при $0.1 < Gr < 1$ и $A < 0.1$. При удалении от этой зоны в область одномерного течения (при увеличении Gr) или в область SD (при уменьшении Gr), или в область переходных режимов (при увеличении A) влияние Λ на параметры течения непрерывно уменьшается.

Параметры фильтрации в режиме PF не зависят от Λ , так как в PF реализуется гравитационный поток жидкости i под кровлей пласта. В этом потоке распределение насыщенности при фиксированном x определяется капиллярно-гравитационным равновесием жидкостей. Следовательно, длина интервала $z < z_a$, характеризующаяся критерием Λ , слабо влияет на распределение насыщенности, которое быстро приходит в состояние равновесия. Таким образом, течение PF слабо зависит от Λ .

На рис. 11 и 12 показаны рассчитанные параметры течения в режиме AR при $Gr=0.25$, различных Λ и $t = 0.25$ и $t = 0.75$, соответственно (серия расчетов III на рис. 5). Результаты расчетов показывают, что

интервал $z < z_a$ увеличивается с Λ . При $t = 0.25$ и $\Lambda = 0.1$ для закачки жидкости i используются только верхние $2/3$ скважины, а при $\Lambda \geq 1$ вся скважина целиком. Это отражается и в распределении насыщенности жидкости i , которая при $\Lambda \geq 1$ быстрее проникает в область $z \approx 1$ у подошвы пласта, вытесняя оттуда жидкость d . Причем параметры течения незначительно изменяются при варьировании Λ в диапазоне $\Lambda < 0.1$, а при увеличении Λ до ≈ 10 и более течение становится одномерным. Таким образом, вытеснение при больших $\Lambda \geq 1$ способствует увеличению коэффициентов E и R , т.е. при фиксированном G_r эффективность вытеснения увеличивается с Λ .

Отмеченное влияние Λ означает, что при $Q/L_y = \text{const}$ более редкая расстановка α_I и α_P в соответствующих рядах, т.е. при больших L_y , эффективнее для вытеснения жидкости d (рис. 1). Условие $Q/L_y = \text{const}$ означает, что средняя интенсивность фильтрации от α_I к α_P сохраняется в рассматриваемых расстановках при различных L_y . То есть, чем реже стоят скважины, тем выше темп нагнетания Q через каждую скважину, а значит выше и забойное давление p_{bh} на α_I . Высокие p_{bh} способствуют повышению z_a , а значит и коэффициентов E и R .

Если же $Q = \text{const}$, то более эффективной является плотная расстановка скважин при малых L_y . В этом случае доминирующее влияние оказывает критерий подобия G_r , который растет при уменьшении L_y . Следовательно, в случае плотной расстановки течение от α_I к α_P становится более одномерным, а значит и более эффективным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках профильной двумерной задачи фильтрации исследована эффективность линейной разработки однородного анизотропного пласта. Показано, что режим вытеснения пластовой жидкости определяется пятью критериями подобия, один из которых — Λ — характеризует продуктивные интервалы скважин. Выделены асимптотические режимы вытеснения AR и PF, имеющие наибольшее практическое значение для геотехнологических приложений. Режим AR соответствует вытеснению из анизотропного пласта, характеризующегося высокой проницаемостью в горизонтальном направлении. Режим PF соответствует случаю пласта с высокой гидродинамической проводимостью в вертикальном направлении, в котором существенен эффект плавучести закачиваемой жидкости. Показано, что при фиксированном Λ и малом влиянии капиллярного давления параметры фильтрации в этих режимах зависят только от критерия подобия G_r . Причем, в режиме AR эффективность вытеснения увеличивается с ростом G_r . Показано, что критерий подобия Λ не влияет на фильтрацию в режиме PF, а в режиме AR эффективность вытеснения увеличивается с Λ . Таким образом, улучшения показателей эффективности можно достичь с помощью повышения значений критериев подобия G_r и Λ . Построена карта режимов вытеснения, в которой ограничены области различных режимов вытеснения и область влияния Λ . Показано, что при увеличении G_r режим AR непрерывно переходит в режим одномерной фильтрации от нагнетательной к добывающей скважине.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-10051, <https://rscf.ru/project/19-71-10051/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений. М.: Недра, 1986. 332 с.
2. Afanasyev A., Andreeva A., Chernova A. Influence of oil field production life on optimal CO₂ flooding strategies: Insight from the microscopic displacement efficiency // Netherlands: Elsevier BV. JPSE. V.205. 108803.
3. Dake L.P. Fundamentals of Reservoir Engineering. ELSEVIER SCIENCE B.V. 1978. 498 p.
4. Гиматудинов Ш.К., Ширковский А.И. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра, 1982. 312 с.
5. Семигласов Д.Ю. Эффекты анизотропии при двухфазной фильтрации в сложно построенных коллекторах // Георесурсы, геоэнергетика, геополитика. 2012. № 1 (5). 18 с.
6. Fan Z., Cheng L., Yang D., Li X. Optimization of Well Pattern Parameters for Waterflooding in an Anisotropic Formation // Mathematical Geosciences. 2018. V.50. P. 977. 10.1007/s11004-018-9745-y.

7. Слабнов В.Д., Султанов Р.А. Численное моделирование вытеснения высоковязкой нефти водой при нелинейном законе фильтрации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. № 2. С. 276.
8. Rodriguez A.X., Aristizábal J., Cabrales S., Gómez J. M., Medaglia A.L. Optimal waterflooding management using an embedded predictive analytical model // Journal of Petroleum Science and Engineering, 2022. V. 208, Part B. 109419.
<https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109419>
9. Андреева А.И., Афанасьев А.А. Метод оптимальной расстановки скважин при разработке нефтяного месторождения // Вестник Московского университета. Сер.: Математика. Механика. 2021. № 2. С. 52–56.
10. Чернова А.А., Афанасьев А.А. Режимы вытеснения жидкости из анизотропного пласта в поле силы тяжести // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 6. С. 95–109.
11. Мищенко И.Т. Скважинная добыча нефти. М: Нефть и газ, 2003. 816 с.
12. Peaceman D.W. Interpretation of Well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability, SPE, Exxon Production Research Co., 1983. P. 10–12
13. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. // М.: Недра, 1984. 211 с.
14. Ермилов О.М., Ремизов В.В., Ширковский Л.И., Чугунов Л.С. Физика пласта, добыча и подземное хранение газа. М.: Наука, 1996. 541 с.
15. Brooks R., Corey A. Hydraulic properties of porous media // Hydrology Papers, Colorado State University, 1964. 27p.
16. Afanasyev A. Hydrodynamic modelling of petroleum reservoirs using simulator MUFITS // Energy Procedia. 2015. V. 76. P. 427–435.
17. MUFITS. Reservoir Simulation Software. [Электронный ресурс]. 2013–2023. URL: <http://www.mufits.org/> (дата обращения: 12.12.2023)

Regimes of Displacement from an Anisotropic Formation during Injection of Fluid through a Vertical Well

A. I. Andreeva^{a, *} and A. A. Afanasyev^{a, **}

^a Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, Russia

*e-mail: waandreeva@gmail.com

**e-mail: afanasyev@imec.msu.ru

The regimes of fluid displacement from a formation developed by a system of vertical wells are studied within the framework of the cross-sectional problem of flow through a porous medium. The case of an anisotropic formation in which the effect of buoyancy of the displacing fluid is significant is considered. It is shown that in the generic case the displacement process is characterized by five similarity criteria, one of them determines the intervals of fluid flow from the well to the formation. The limiting cases of the displacement regimes in which the number of constitutive similarity parameters can be reduced are described. The influence of these parameters on the recovery factor and the sweep efficiency is studied. A diagram of displacement regimes that constrains the areas of influence of the similarity criteria and the revealed limiting cases is constructed. The results of the present study may be useful in the oil and gas industry in estimating the efficiency of various field development methods.

Keywords: flow through a porous medium, anisotropic formation, gravity override, well, sweep efficiency, enhanced oil recovery.

УДК 533.9

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕЖЗВЕЗДНОЙ ПЫЛИ В ГЕЛИОСФЕРЕ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

© 2024 г. Е. А. Годенко^{a, b, c*} В. В. Измоленов^{a, b, c}

^aИнститут космических исследований РАН, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А. Ю. Ишлинского, Москва, Россия

^cМосковский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

e-mail: godenko.egor@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.03.2024г.

После доработки 29.03.2024

Принята к публикации 29.03.2024

Межзвездная пыль проникает в гелиосферу из-за относительного движения Солнца и Локального межзвездного облака, внутри которого Солнце находится. Основное влияние на динамику пылинок оказывает электромагнитная сила со стороны гелиосферного магнитного поля. Направление действия этой силы зависит от полярности магнитного поля. Полярность же является функцией положения и времени и зависит от ориентации оси солнечного магнитного диполя относительно оси вращения Солнца. Ранее было показано, что для случая, когда ось магнитного диполя совпадает с осью вращения Солнца, возникает ситуация, когда действующая на пылевые частицы электромагнитная сила направлена к плоскости солнечного экватора как в северном, так и южном солнечном полушарии. В результате под действием такой электромагнитной силы распределение межзвездной пыли становится сильно неоднородным и, в частности, образуются тонкие области повышенной концентрации (каустики). Целью настоящей работы является исследование поведения каустик для более реалистичной нестационарной модели, в которой предполагается, что ось магнитного диполя вращается относительно оси вращения Солнца с периодом 22 года, что соответствует 22-летнему циклу солнечной активности. Помимо этого, учитывается вращение оси магнитного диполя в соответствии с вращением Солнца с периодом 25 дней. Для вычисления концентрации пыли применяется лагранжев метод Осипцова. Исследуется форма и эволюция образующихся каустик и обсуждаются физические механизмы, которые их порождают. Показано, что учет нестационарных эффектов приводит к тому, что каустики появляются лишь в определенные фазы солнечного цикла, а потом исчезают.

Ключевые слова: межзвездная пыль, гелиосфера, лагранжевы переменные.

DOI: 10.31857/S1024708424030112, EDN: PFDJEI

Солнечный ветер, истекающий из солнечной короны и достигающий сверхзвуковой скорости на нескольких солнечных радиусах, взаимодействует со сверхзвуковым потоком плазмы локальной межзвездной среды. В результате образуется структура из двух ударных волн и тангенциального разрыва между ними [1]. На рис. 1 представлена качественная картина взаимодействия солнечного ветра с локальной межзвездной средой. Область распространения солнечного ветра, ограниченная тангенциальным разрывом (гелиопаузой), называется гелиосферой.

Межзвездная среда, помимо плазменной компоненты, содержит также и пылевую компоненту. При этом пылевые частицы могут проникать внутрь гелиосферы достаточно близко к Солнцу. В 1993 году по измерениям космического аппарата (КА) Улисс [2], было впервые зарегистрировано существование межзвездных пылевых частиц в гелиосфере. Размеры межзвездных пылинок находятся в достаточно широком диапазоне от нескольких нанометров до нескольких микрометров [см., например, 3]. Из результатов астрономических наблюдений известно, что в межзвездной среде преобладают кремниевые и углеродные пылевые частицы, однако измерения КА Кассини [4] показали наличие только кремниевых частиц с содержанием магния, железа и кальция. Пылевые частицы в гелиосфере под действием фотоионизации солнечными фотонами и вторичной электронной эмиссии приобретают положительный

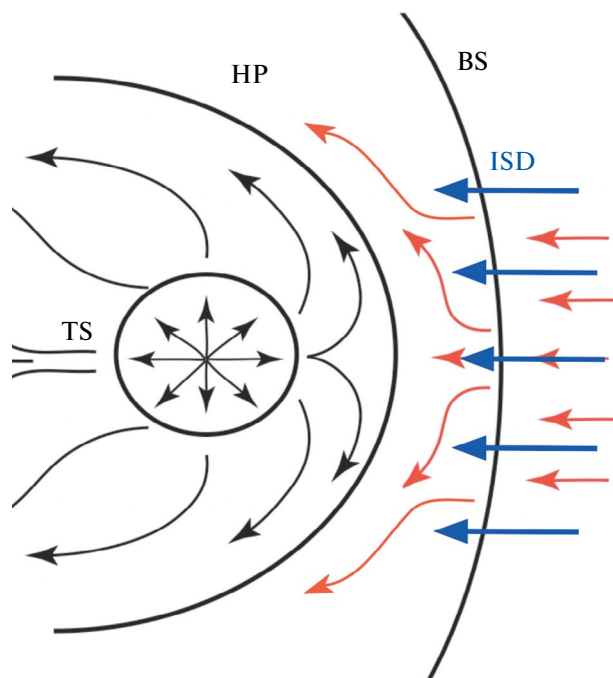


Рис. 1: Схематичное изображение взаимодействия солнечного ветра с локальной межзвездной средой. Черные стрелки соответствуют линиям тока плазмы солнечного ветра, красные стрелки — линиям тока плазмы локальной межзвездной среды. Синими стрелками показано направление движения пылевых частиц в невозмущенной межзвездной среде. *TS* — гелиосферная ударная волна, *HP* — гелиопауза, *BS* — головная ударная волна.

электрический заряд [см., например, 5]. Основное влияние на динамику пылинок в гелиосфере оказывает электромагнитная сила, поскольку силы гравитации и радиационного давления частично или полностью взаимно компенсируют друг друга.

Направление действия электромагнитной силы в данной точке зависит от положения точки относительно гелиосферного токового слоя. Гелиосферный токовый слой — поверхность, при пересечении которой меняет знак полярность гелиосферного магнитного поля [см., например, 6]. Из-за вмороженности линий магнитного поля в линии плазмы солнечного ветра и вращения Солнца вокруг своей оси эта поверхность приобретает волнообразную форму, которую в литературе часто называют “юбка балерины” [7]. Кроме того, результаты наблюдений показывают, что форма этой поверхности (в частности, максимальная широта, на которую она распространяется) существенно меняется в течение 22-летнего цикла солнечной активности [8]. В результате электромагнитная сила, действующая на заряженные частицы пыли, становится существенно нестационарной, поскольку характерное время движения пылинок в гелиосфере (20–30 лет) сравнимо по величине с характерным временем изменения формы токового слоя.

В данной работе исследуется влияние нестационарности гелиосферного токового слоя на траектории и распределение пылинок внутри гелиосферы. В предыдущих работах [9–11] были использованы достаточно сильные упрощающие предположения о том, что токовый слой является плоским, стационарным и находится в плоскости солнечного экватора, что в реальности соответствует лишь коротким промежуткам времени в течение солнечного цикла (периодам солнечных минимумов длительностью 1–2 года).

Для моделирования используется лагранжев подход, основанный на методе Осипцова [12], который показал свою эффективность для различных задач [13]. В разд. 1 описан лагранжев метод Осипцова применительно к данной задаче. В разд. 2 отмечены наиболее важные аспекты динамики пылинок в гелиосфере. В разд. 3 представлены результаты моделирования.

1. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Прежде всего, опишем систему координат, которая используется в данной работе. Пусть в начале координат O находится Солнце, ось Oz направлена вдоль оси вращения Солнца, ось Oy — противоположно

вектору скорости пылинок в невозмущенной межзвездной среде. В реальности угол между вектором скорости пыли в невозмущенной межзвездной среде и осью вращения Солнца составляет $\sim 95^\circ$, однако в данной работе для наглядности предполагается, что они взаимно перпендикулярны. Ось Ox дополняет трехгранник $Oxyz$ до правильного. Помимо этого, в данной работе также используется сферическая система координат, в которой расстояние r отсчитывается от Солнца O , полярный угол ϑ — от оси Oz , а азимутальный угол φ — от оси Ox к оси Oy в плоскости Oxy .

В данной работе предполагается, что гелиосфера ограничена плоскостью $y = 100$ а.е., а при $y > 100$ а.е. пылинки движутся с постоянной скоростью $v_{LISM} = 26.4$ км/с, $\mathbf{v}_{LISM} = -v_{LISM} \mathbf{e}_y$.

Для моделирования распределения пыли, как правило, применяется метод Монте-Карло [см., например, 10, 14–18], но для изучения особенностей этот метод неэффективен с вычислительной точки зрения [11], поэтому в данной работе используется лагранжев метод Осипцова [12, 13]. Лагранжев метод основан на решении уравнения неразрывности, записанного в лагранжевых координатах:

$$n_d(t, \mathbf{r}_0) \left| \det(J_{ij}(t, \mathbf{r}_0)) \right| = n_d(0, \mathbf{r}_0), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ — лагранжевы координаты рассматриваемой частицы, $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j,0}}$ компоненты матрицы перехода от лагранжевых координат к эйлеровым (матрицы Якоби). Данное уравнение справедливо вдоль траектории лагранжевой частицы (пылинки). Соответственно, для того чтобы вычислить концентрацию пыли в произвольной точке вдоль траектории, нужно определить компоненты матрицы Якоби в этой точке.

Для вычисления компонент матрицы Якоби нужно ввести матрицу $\Omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_{j,0}}$ и сформулировать дополнительные дифференциальные уравнения для компонент этой матрицы [12]. В результате для каждой фиксированной частицы можно получить задачу Коши [см., например, 11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = F_i \\ \frac{dJ_{ij}}{dt} = \Omega_{ij} \\ \frac{d\Omega_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_k} J_{kj} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}|_{t=0} = -v_{LISM} \mathbf{e}_y \\ J_{ij}|_{t=0} = \delta_{ij} \\ \Omega_{ij}|_{t=0} = 0 \end{array} \right., \quad (1.2)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера

Решая задачу Коши (1.2), можно вычислить якобиан в любой точке вдоль траектории рассматриваемой частицы и из уравнения (1.1) получить значение концентрации пыли в данной точке. Однако для этого, прежде всего, необходимо задать поле сил, действующих на пылинку.

2. ДИНАМИКА ПЫЛИНОК В ГЕЛИОСФЕРЕ

На пылинки в гелиосфере действуют три основные силы: сила гравитационного притяжения к Солнцу, сила радиационного давления со стороны солнечных фотонов и электромагнитная сила [см., например, 11]. Поскольку предполагается, что гелиосферное магнитное поле вмерзено в плазму солнечного ветра, выражение для результирующей силы будет следующим:

$$\mathbf{F} = (\beta - 1) \frac{GM_S}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{q}{c_0 m} [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p) \times \mathbf{B}],$$

где β — отношение величины силы радиационного давления к силе гравитации, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ — гравитационная постоянная, $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ — масса Солнца, $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света в вакууме,

m — масса пылинки, q — заряд пылинки, $\mathbf{v}$ — скорость пылинки, $\mathbf{v}_p$ — скорость плазмы солнечного ветра, $\mathbf{B}$ — вектор индукции гелиосферного магнитного поля.

Для сферических частиц будут справедливы следующие выражения для заряда и массы пылинки (в Гауссовых единицах)

$$q = Ua, \quad m = \frac{4}{3} \pi \rho a^3,$$

где a — радиус пылинки, U — поверхностный потенциал, ρ — массовая плотность. Внутри гелиосферы пылинки приобретают положительный заряд под действием фотоэмиссии и вторичной электронной эмиссии, который остается приблизительно постоянным на протяжении всего времени движения [5]. В данной работе используется значение поверхностного потенциала $U = +5$ В, которое было получено из измерений пыли на КА Кассини [19]. Значение плотности $\rho = 3500$ кг/м³ взято из [20].

Предполагается, что солнечный ветер является сферически-симметричным [21], поэтому его скорость:

$$\mathbf{v} = v_{sw} \mathbf{e}_r$$

где $v_{sw} = 450$ км/с. При использовании условия вмерзновенности силовых линий гелиосферного магнитного поля в солнечный ветер, можно получить выражения для компонент вектора индукции магнитного поля [21]

$$\mathbf{B} = p(t, \mathbf{r}) (B_r \mathbf{e}_r + B_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi), \quad \left\{ \begin{array}{l} B_r = B_E \left(\frac{r_E}{r} \right)^2, \\ B_\vartheta = 0, \\ B_\varphi = -B_E \frac{\Omega_S r_E}{v_{sw}} \left(\frac{r_E}{r} \right) \sin \vartheta, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где $p(t, \mathbf{r})$ полярность гелиосферного магнитного поля, $B_E = 30$ мкГ — индукция магнитного поля на орбите Земли, $r_E = 1$ а.е. = $150 \cdot 10^9$ км — среднее расстояние от Солнца до Земли, $\Omega_S = \frac{2\pi}{25 \cdot 86400} = 2.9 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹ — угловая скорость вращения Солнца вокруг своей оси.

Из выражения (2.1) видно, что направление электромагнитной силы зависит от полярности $p(t, \mathbf{r})$. Полярность $p(t, \mathbf{r})$ принимает значения $+1$ и -1 и, соответственно, меняется при пересечении особой поверхности — гелиосферного токового слоя. В наших предыдущих работах [см., например, 9] предполагалось, что эта поверхность представляет собой стационарную плоскость, лежащую в плоскости солнечного экватора, и определение положительной и отрицательной полярностей относительно этой плоскости соответствует фазе фокусировки положительно заряженных частиц: при $z > 0$ полярность предполагалась отрицательной, а при $z < 0$ — положительной. Однако в реальности токовый слой не является стационарным и плоским во всей гелиосфере.

В данной работе предполагается, что гелиосферный токовый слой является плоским только достаточно близко к Солнцу, а именно на сфере радиуса $r = R_* = 3R_S \approx 0.014$ а.е. [6], где R_S — радиус Солнца. Далее из-за того, что силовые линии магнитного поля вмерзены в солнечный ветер, а поверхность, из которой они выходят (солнечная корона), вращается вместе с Солнцем с периодом $T_S = 2\pi/\Omega_S \approx 25$ дней, токовый слой начинает искривляться и принимать волнообразную форму, похожую на “юбку балерины” [7]. Результаты наблюдений также показывают [8], что гелиосферный токовый слой не только искривляется из-за вращения Солнца, но и существенно зависит от фазы 22-летнего цикла солнечной активности. Угол наклона плоского токового слоя (в окрестности сферы радиуса $r = R_*$) к плоскости солнечного экватора меняется с приблизительно постоянной скоростью, так что эта поверхность делает полный оборот за 22 года. Так, например, в периоды солнечных минимумов токовый слой остается приблизительно плоским во всей гелиосфере и находится в окрестности плоскости солнечного экватора, а во время солнечных максимумов, напротив, эта поверхность становится существенно волнообразной и распространяется до максимальных гелиоширот.

Попробуем формализовать определение значения функции полярности $p(t, \mathbf{r})$ для заданной точки $\mathbf{r}$ в заданный момент времени t . Пусть $\tilde{t}$ и $\tilde{\mathbf{r}}$ — момент времени и точка на сфере радиуса $r = R_*$, такие что если рассмотреть бесконечно малый объем сплошной среды вокруг точки $\tilde{\mathbf{r}}$ в момент времени $\tilde{t}$, то в момент времени t этот объем будет находиться вокруг точки $\mathbf{r}$. В силу вмороженности линий магнитного поля в плазму солнечного ветра, значения полярностей в соответствующих точках и моментах времени будут одинаковыми, т.е. $p(t, \mathbf{r}) = p(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}})$. Напомним, что в рамках сделанных предположений солнечный ветер является сферически-симметричным, поэтому t и $\tilde{t}$, а также $\mathbf{r}$ и $\tilde{\mathbf{r}}$, связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{x} = R_* \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \tilde{y} = R_* \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \tilde{z} = R_* \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\tilde{t} = t \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R_*}{v_{sw}}$$

На сфере радиуса $r = R_*$ предполагается, что токовый слой является плоским. Пусть $\lambda = \lambda(\tilde{t})$ — угол наклона этой плоскости к плоскости солнечного экватора, $\mu = \mu(\tilde{t})$ — угол поворота в плоскости солнечного экватора. Тогда компоненты нормали к этой плоскости:

$$n_x = \sin \lambda \sin \mu, \quad n_y = -\sin \lambda \cos \mu, \quad n_z = \cos \lambda,$$

и по знаку проекции вектора $\tilde{\mathbf{r}}$ на эту нормаль можно определить значение полярности:

$$p(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}) = \begin{cases} -1, & h > 0, \\ 1, & h \leq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\tilde{h} = n_x \tilde{x} + n_y \tilde{y} + n_z \tilde{z}$. В частности, когда токовый слой на сфере радиуса $r = R_*$ проходит через положение $\lambda = 0$, $\mu = 0$, возникают условия для фокусировки положительно заряженных частиц.

Таким образом, задавая конкретные выражения для функций $\lambda = \lambda(\tilde{t})$ и $\mu = \mu(\tilde{t})$, можно определить форму токового слоя во всей гелиосфере в любой момент времени. В разделе 3 перед представлением результатов моделирования выписан конкретный вид этих функций для рассматриваемых случаев.

Упрощенное выражение для электромагнитной силы

С учетом представленных выражений и предположений результирующая сила, действующая на пылинку, в данной задаче будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{F} = (\beta - 1) \frac{GM_S}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{3UB_E r_E^2 p}{4\pi \rho a^2 c_0 r^2} \left[(\mathbf{v} - v_{sw} \mathbf{e}_r) \times \left(\mathbf{e}_r - \frac{\Omega_S r \sin \vartheta}{v_{sw}} \mathbf{e}_\varphi \right) \right].$$

Приведем полученное выражение для силы к безразмерному виду. В качестве обезразмеривающих параметров выберем характерную скорость v_{LISM} и характерное расстояние $L_* = \frac{GM_S}{v_{LISM}^2}$. Если введем безразмерные параметры:

$$\varepsilon = \frac{3UB_E r_E^2 \Omega_S}{4\pi c_0 \rho a^2 v_{LISM}^2}, \quad \kappa = \frac{v_{LISM}}{v_{sw}}, \quad v = \frac{v_{sw}}{\Omega_S L_*},$$

то можно получить следующее выражение для силы в безразмерном виде:

$$\hat{\mathbf{F}} = (\beta - 1) \frac{\mathbf{e}_r}{\hat{r}^2} + p \varepsilon \left[(\kappa \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{e}_r) \times \left(v \frac{\mathbf{e}_r}{\hat{r}^2} - \frac{\sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi}{\hat{r}} \right) \right].$$

где $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} / (v_{LISM}^2 / L_*)$, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} / v_{LISM}$, $\hat{r} = r / L_*$.

Далее будем считать, что $\beta = 1$ для того чтобы продемонстрировать эффекты, связанные именно с электромагнитной силой. В реальности для кремниевых пылинок в гелиосфере значения параметра β находятся в диапазоне от 0.5 до 1.5 [см., например, 22]. Безразмерные параметры κ и ν не зависят от типа частиц, поэтому являются постоянными в рамках нашей задачи. Их значения:

$$\kappa = v_{LISM}/v_{sw} = 26.4/450.0 \approx 0.06 \ll 1, \quad \nu = \frac{v_{sw}}{\Omega_S L_*} \approx 0.81 \sim 1. \text{ Таким образом, поскольку } \kappa \ll 1, \text{ а } \nu \sim 1,$$

для простоты исключим член с κ из рассмотрения и получим упрощенное выражение для результирующей силы в безразмерном виде:

$$\hat{\mathbf{F}} = -p\epsilon \frac{\sin \vartheta}{r} \mathbf{e}_\vartheta \quad (2.3)$$

При заданных значениях размерных величин выпишем формулу зависимости величины параметра ϵ от радиуса частицы (все величины надо перевести в Гауссову систему):

$$\epsilon(a) \approx \left(\frac{0.1}{a} \right)^2,$$

где радиус a задан в мкм.

Далее опустим “шапки” у безразмерных переменных для простоты записи. Рассмотрим покомпонентно компоненты данной силы:

$$F_x = -p\epsilon \frac{xz}{r^3}, \quad F_y = -p\epsilon \frac{yz}{r^3}, \quad F_z = p\epsilon \frac{x^2 + y^2}{r^3}, \quad (2.4)$$

и заметим, что пылинки, которые начинают свое движение из плоскости $x = 0$ с нулевой компонентой скорости по этому направлению ($v_x = 0$), не выйдут за пределы этой плоскости под действием такой силы. Используя это замечательное свойство, для наглядности будем рассматривать траектории только внутри плоскости $x = 0$. Отметим, что аналогичное рассуждение с компонентой F_y не работает, поскольку соответствующая компонента начальной скорости $v_y = -1$ (в безразмерном виде) не равна 0.

Для того чтобы использовать метод Осипцова, необходимо вычислить частные производные от компонент силы (2.4) по координатам x , y и z . Однако чтобы это сделать, нужно чтобы функция $p = p(t, \mathbf{r})$ обладала достаточной степенью гладкости, а на данный момент она не просто не гладкая, но даже не непрерывная, поскольку терпит разрыв при пересечении гелиосферного токового слоя (см. уравнение 2.2). Поэтому заменим разрывную функцию (2.2) на непрерывно-дифференцируемую функцию:

$$p(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}) = p(\tilde{h}) = \begin{cases} -1, & \tilde{h} > \delta, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{h}}{\delta} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\tilde{h}}{\delta} \right)^3, & \delta \geq \tilde{h} \geq -\delta, \\ 1, & \tilde{h} < -\delta, \end{cases}$$

Отметим, что значение параметра δ должно быть достаточно мало, чтобы вид траекторий пылинок не отличался от случая, когда функция полярности является разрывной. В данной работе для всех вычислений мы использовали значение $\delta = 10^{-5}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Стационарный фокусирующий токовый слой

В предыдущих работах [9–11] моделирование распределения пыли проводилось в рамках упрощенной постановки, где предполагалось, что токовый слой является плоским, стационарным и находится в фазе фокусировки положительно заряженных частиц пыли. Этот случай можно описать в рамках более общей постановки, представленной в данной работе, если задать положение токового слоя на сфере радиуса $r = R_*$ с помощью следующих тривиальных функций:

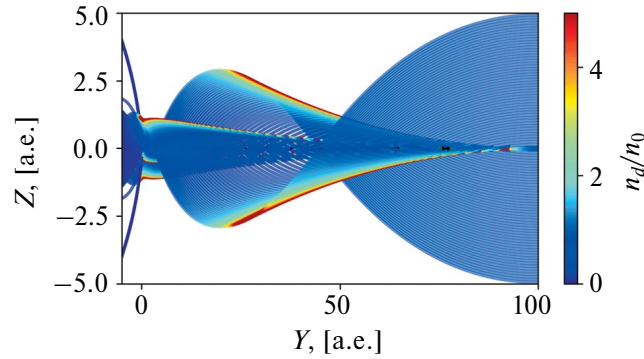


Рис. 2. Траектории частиц пыли для стационарного фокусирующего токового слоя. Координаты пылинок на плоскости $y_0 = 100$ а.е. заданы равномерно из промежутка $z_0 \in [-5 \text{ а.е.}, 5 \text{ а.е.}]$. Здесь и далее для наглядности рассматриваются траектории в плоскости $x = 0$. Цветом показана концентрация пыли, вычисленная с помощью лагранжева метода Осипцова. Размер частиц $a = 200$ нм.

$$\lambda(\tilde{t}) = 0, \quad \mu(\tilde{t}) = 0$$

На рис. 2 представлены траектории частиц радиуса $a = 200$ нм в рамках описанной постановки со стационарным фокусирующим токовым слоем и значение концентрации вдоль траекторий. Электромагнитная сила, действующая на частицы, притягивает их к плоскости $z = 0$ во всей области, и пылинки начинают осциллировать вокруг этой плоскости. В результате формируются каустики – огибающие траекторий пылевых частиц, которые каждым своим конечным сегментом касаются бесконечного числа траекторий. Концентрация на этих огибающих существенно возрастает (в пределе до бесконечности), поскольку якобиан $|\det(J_{ij})|$ стремится к нулю. Попробуем понять, изменение каких компонент матрицы Якоби J_{ij} приводит к такому поведению якобиана.

В данном случае, когда рассматриваются траектории в плоскости $x = 0$, легко понять, что $J_{xy} = 0$ и $J_{xz} = 0$, поэтому выражение для якобиана приобретает упрощенный вид:

$$|\det(J_{ij})| = |J_{xx}(J_{yy}J_{zz} - J_{yz}J_{zy})|$$

Результаты расчетов показывают, что компоненты J_{xx} и J_{yy} вдоль траектории практически не меняются (в области $y > 0$) и сохраняют свои изначальные значения, равные 1, а компоненты J_{yz} и J_{zy} , которые изначально были равны 0, приобретают лишь относительно небольшие значения (до ~ 0.3 по величине). Самые существенные изменения претерпевает компонента J_{zz} . В начальный момент времени ее значение было равно 1, однако после первого прохождения через токовый слой компонента J_{zz} начинает уменьшаться. Почему это происходит? Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим дифференциальные уравнения, соответствующие этой компоненте:

$$\frac{dJ_{zz}}{dt} = \Omega_{zz}, \quad \frac{d\Omega_{zz}}{dt} = \frac{\partial F_z}{\partial x} J_{xz} + \frac{\partial F_z}{\partial y} J_{yz} + \frac{\partial F_z}{\partial z} J_{zz}$$

До и во время первого прохождения через токовый слой компоненты матрицы Якоби практически не меняются, поэтому $J_{yz} \approx 0$, $J_{zz} \approx 1$. В результате уравнение для компоненты Ω_{zz} в этой области можно заменить на упрощенное:

$$\frac{d\Omega_{zz}}{dt} = \frac{\partial F_z}{\partial z} J_{zz}$$

Ведущий член в выражении для $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ есть $\frac{\epsilon(x^2 + y^2)}{r^3} \frac{\partial p}{\partial z}$, который внутри токового слоя из-за градиента производной от полярности становится отрицательным. Это приводит к тому, что компонента Ω_{zz}

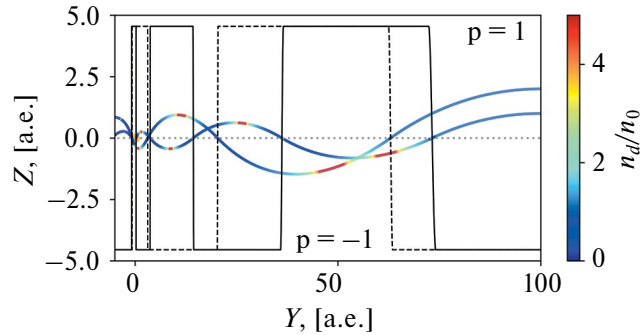


Рис. 3. Траектории двух частиц с начальными координатами $z_0 = 1$ а.е. и $z_0 = 2$ а.е. для стационарного фокусирующего токового слоя. Линии черного цвета соответствует значению полярности вдоль траектории (сплошная линия для частицы с $z_0 = 1$ а.е., пунктирная линия для частицы с $z_0 = 2$ а.е.). Размер частиц $a = 200$ нм.

после первого прохождения через токовый слой становится отрицательной, а значит, компонента J_{zz} начинает уменьшаться. В результате разность $J_{yy}J_{zz} - J_{yz}J_{zy}$ и, соответственно, якобиан $|\det(J_{ij})|$ стремятся к нулю, что приводит к появлению особенностей.

Для того, чтобы выяснить физические причины формирования особенностей, обратимся к рис. 3, где изображены две траектории, отстоящие друг от друга на расстоянии 1 а.е. ($z_0 = 1$ а.е. и $z_0 = 2$ а.е.) на плоскости $y_0 = 100$ а.е., а также значения полярности гелиосферного магнитного поля вдоль этих траекторий. До первого пересечения токового слоя расстояние между этими пылинками примерно постоянное. Далее пылинки пересекают токовый слой, причем частица с $z_0 = 1$ а.е. делает это существенно ближе ($\sim$ на 10 а.е.) к плоскости $y_0 = 100$ а.е., с которой начинается движение пылинок в гелиосфере, поэтому она раньше меняет направление движения вдоль оси z . В результате после прохождения второй частицы через токовый слой происходит пересечение траекторий между собой из-за того, что первая частица уже успела затормозиться вдоль оси z , а вторая частица только начала это делать, что и приводит к образованию каустики.

Существенным для представленного поведения траекторий и образования каустик является то, что 1) гелиосферный токовый слой покоится и все время находится в фазе фокусировки положительно заряженных частиц, 2) полярность магнитного поля вдоль траектории является постоянной в достаточно протяженной области, т.е. количество пересечений пылинкой токового слоя достаточно мало. Покажем, как описанная в разделе 2 нестационарность гелиосферного токового слоя влияет на траектории и распределение пылинок.

Нестационарный токовый слой

В случае, когда учитывается нестационарность токового слоя, вызванная 22-летним циклом солнечной активности и вращением Солнца вокруг своей оси, положение токового слоя на сфере радиуса $r = R_*$ задается следующими функциями для углов наклона и поворота:

$$\lambda(\tilde{t}) = \frac{2\pi L_* \tilde{t}}{T_{sc} v_{LISM}}, \quad \mu(\tilde{t}) = \frac{2\pi L_* \tilde{t}}{T_S v_{LISM}},$$

где $T_{sc} = 22$ года, $T_S = 25$ дней (константы L_* и v_{LISM} нужны для соблюдения размерности при использовании безразмерной величины $\tilde{t}$).

На рис. 4 показана полученная форма гелиосферного токового слоя в плоскости, где движутся пылинки ($x = 0$), для четырех моментов времени, которые представляют переход от фазы фокусировки ($t = 1$ год) к фазе дефокусировки ($t = 12$ лет) положительно заряженных частиц. Фаза дефокусировки соответствует случаю, когда токовый слой находится в окрестности плоскости $z = 0$, и при $z > 0$ полярность магнитного поля положительная, а при $z < 0$ — отрицательная (наоборот, по сравнению с фазой фокусировки). Для всех моментов времени видна характерная волнообразная, или зубчатая, структура гелиосферного токового слоя, которая возникает из-за вращения Солнца вокруг своей оси. Высота этих “зубцов” зависит от

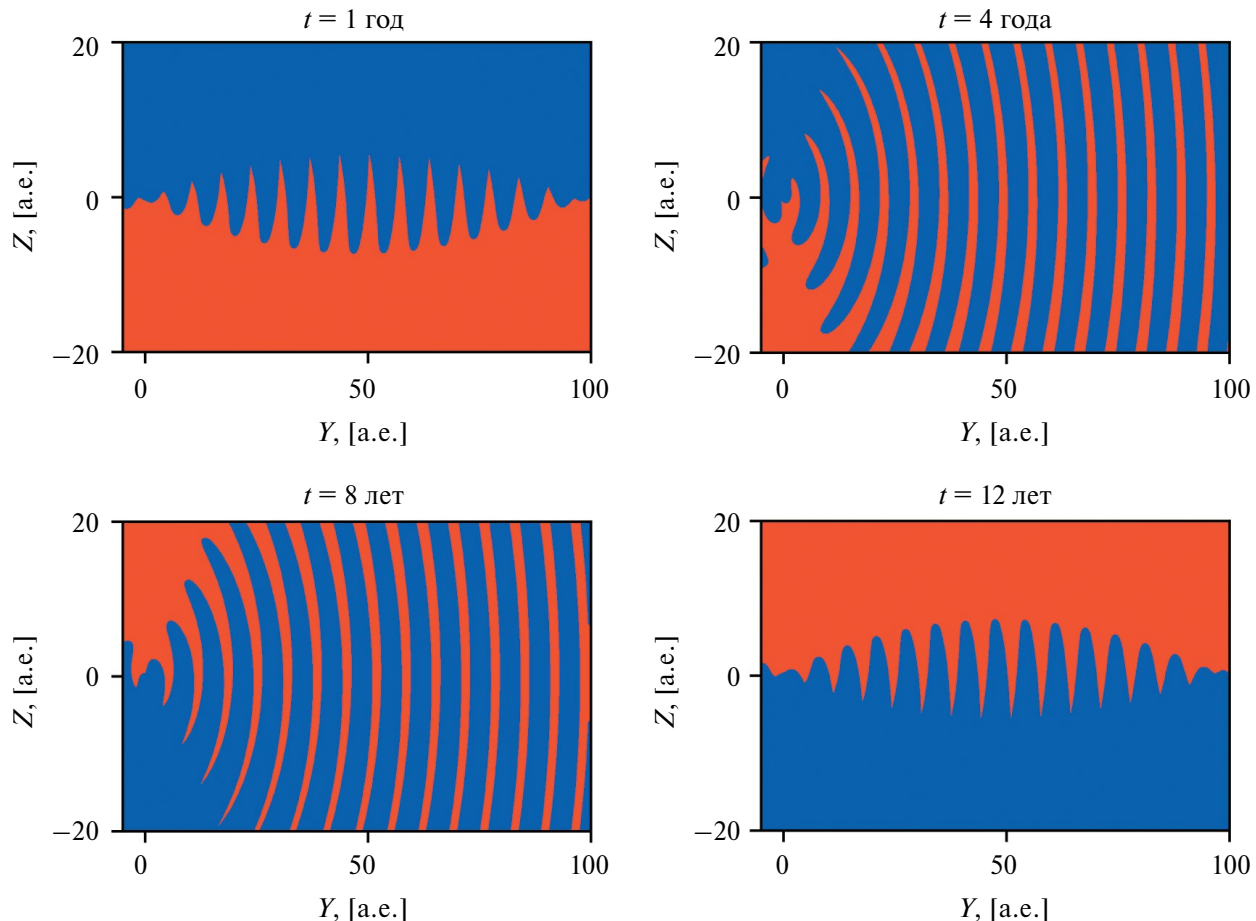


Рис. 4. Форма нестационарного токового слоя в гелиосфере для четырех моментов времени: $t=1$ лет, 4 лет, 8 лет, 12 лет. Токовому слою соответствует линия пересечения областей красного и синего цвета. Точки красного цвета соответствуют положительной полярности, точки синего цвета – отрицательной полярности.

соответствующего угла наклона плоского токового слоя на сфере радиуса $r = R_*$. Так, во время фокусировки и дефокусировки токовый слой во всей гелиосфере находится в окрестности плоскости солнечного экватора, в то время как в переходных фазах токовый слой распространяется достаточно далеко вдоль оси z .

Перед представлением результатов моделирования в этом разделе отметим, что в случае нестационарного токового слоя вид траекторий будет, очевидно, зависеть от того, в какой момент времени t_0 пылинки пересекают плоскость $y = 100$ а.е. Таким образом, t_0 можно рассматривать как одну из лагранжевых координат частицы, однако ясно, что ее можно заменить на координату y_0 с помощью выражения $y_0 = 100$ а.е. + $v_{LSM} t_0$ (с соблюдением размерностей) в силу прямолинейности траекторий при $y > 100$ а.е. В стационарном случае, очевидно, вид траекторий и распределение пыли от t_0 не зависят.

На рис. 5 представлены траектории и концентрация пылевых частиц для различных значений параметра t_0 . Полученные траектории и концентрация вдоль них существенно отличаются от тех, что представлены на рис. 2. Прежде всего, отметим, что на достаточно больших расстояниях от Солнца ($y > 50$ а.е.) во всех случаях траектории практически прямолинейны. Причина заключается в том, что на больших расстояниях от Солнца частицы пыли проходят через области с часто меняющейся полярностью из-за “быстрого” вращения токового слоя в плоскости солнечного экватора. В результате быстро чередующиеся участки с положительной и отрицательной полярностью взаимно компенсируют друг друга. Кроме того, электромагнитная сила (2.3) обратно пропорциональна расстоянию до Солнца, поэтому ее величина на больших гелиоцентрических расстояниях достаточно мала. Все это приводит к тому, что влияние электромагнитной силы в этой области практически пропадает.

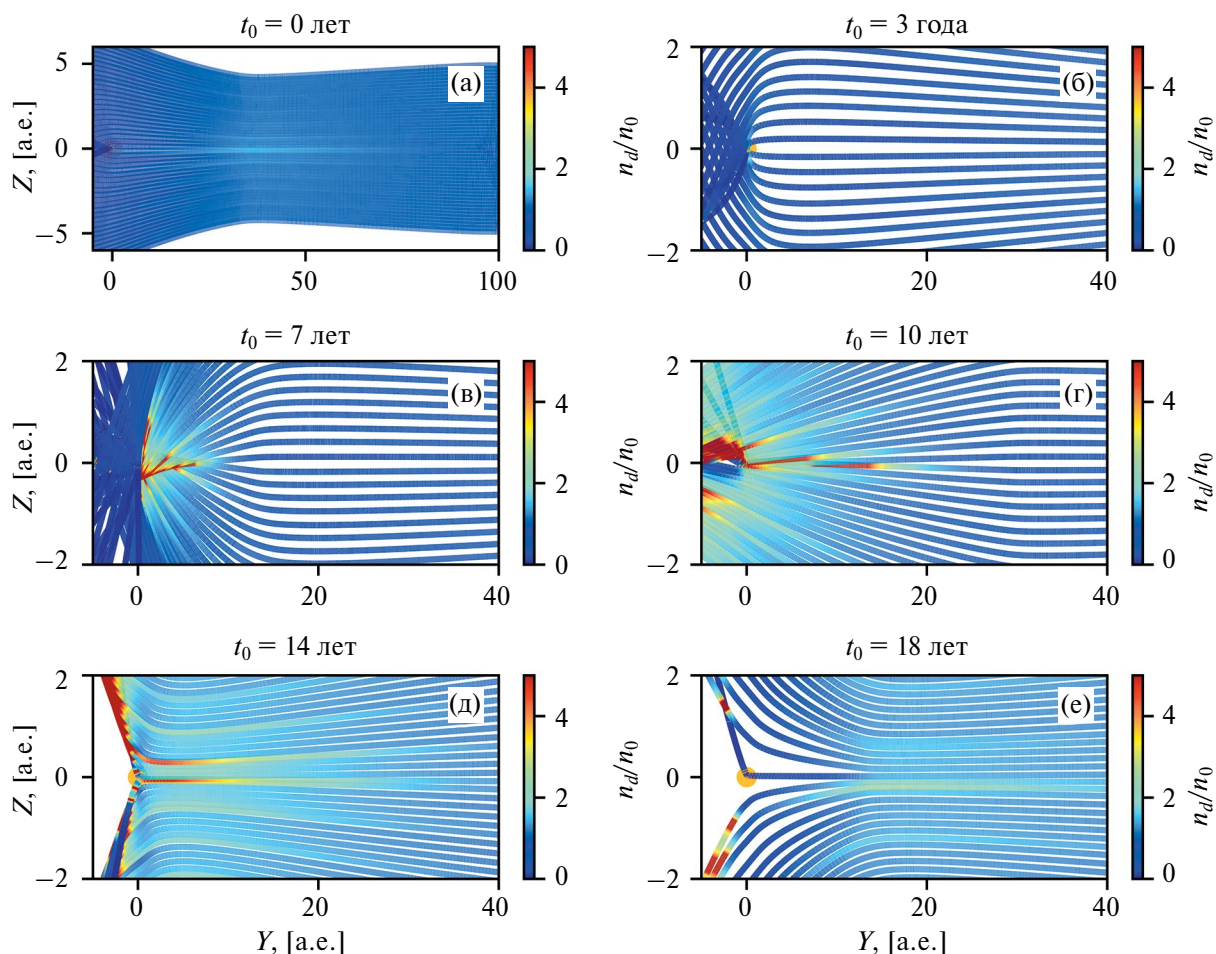


Рис. 5. Траектории частиц пыли в случае нестационарного токового слоя для различных значений параметра $t_0 = \{0, 3, 7, 10, 14, 18\}$ лет. Координаты пылинок на плоскости $y_0 = y_0(t_0)$ заданы равномерно из промежутка $z_0 \in [-5 \text{ а.е.}, 5 \text{ а.е.}]$. Размер частиц $a = 200 \text{ нм}$.

Влияние электромагнитной силы в данном случае проявляется лишь на участках, где полярность сохраняется в достаточно протяженной области, что, очевидно, происходит в периоды, когда токовый слой находится в окрестности плоскости солнечного экватора. Так, на рис. 5а приблизительно в момент времени $t = 1$ год (на $90\text{--}95$ а.е. по оси y) пылинки проходят через фазу фокусировки, поэтому их траектории отклоняются от первоначального направления и испытывают небольшое притяжение к плоскости $z = 0$. Далее они движутся прямолинейно, но уже с отклоненным вектором скорости, и из-за сужения потока формируют область слабого повышения концентрации (примерно на 10%). Затем пылинки приблизительно при $t = 12$ лет проходят уже через участок дефокусировки положительно заряженных частиц, в результате чего траектории пылинок отклоняются от плоскости $z = 0$. Для остальных случаев, представленных на рис. 5, ситуация аналогичная, однако моменты наступления периодов фокусировки и дефокусировки смещаются из-за разного наклона токового слоя к плоскости солнечного экватора в момент пересечения пылинками плоскости $y = 100$ а.е. Так, на рис. 5б траектории на начальном этапе не испытывают фокусировку, поскольку токовый слой уже прошел соответствующую фазу к моменту начала движения этих пылинок в гелиосфере. В результате они испытывают лишь дефокусировку приблизительно на $y \approx 50$ а.е., а дальше двигаются по прямым линиям в сторону от плоскости $z = 0$. На рис. 5в, г частицы почти в самом начале своего движения в гелиосфере проходят через фазу дефокусировки, а затем при приближении к Солнцу фокусируются и образуют области повышенной концентрации в окрестности Солнца. Случай $t_0 = 7$ лет, представленный на рис. 5в, будет рассмотрен далее более подробно. На рис. 5д, е частицы пропускают уже дефокусировку в начале движения, но далее испытывают фокусировку,

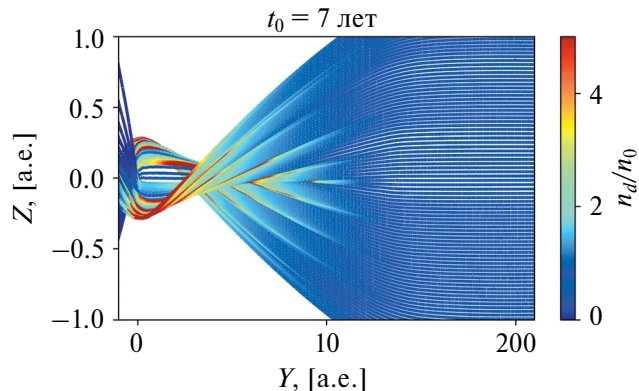


Рис. 6. Траектории частиц пыли в увеличенном масштабе для случая $t_0 = 7$ лет, как на рис. 5в.

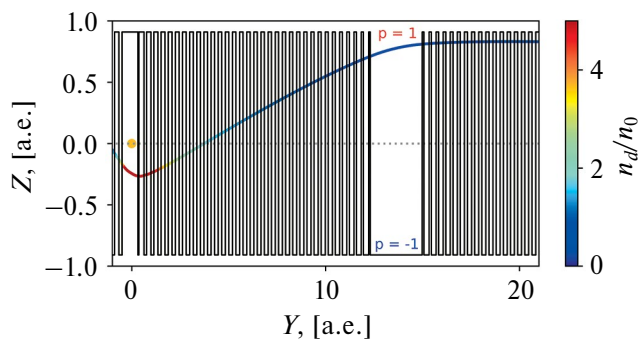


Рис. 7. Траектория частицы пыли с лагранжевыми координатами $z_0 = 0.6$ а.е., $t_0 = 7$ лет в случае нестационарного токового слоя. Линия черного цвета соответствует полярности магнитного поля вдоль этой траектории. Размер частицы $a = 200$ нм.

из-за чего поток сужается и концентрация немного подрастает, как на рис. 5а. Однако в малой окрестности Солнца они также успевают пройти через фазу дефокусировки до пересечения с плоскостью $y = 0$, и в результате происходит сильное отклонение потока в области $y < 0$ с образованием дополнительных областей повышенной концентрации.

Рассмотрим более подробно область повышенной концентрации, возникающую в случае $t_0 = 7$ лет. На рис. 6 представлены в увеличенном масштабе в малой окрестности Солнца траектории пылинок для случая $t_0 = 7$ лет. Результаты моделирования показывают, что область повышенной концентрации состоит из множества каустик. Форма получившейся области повышенной концентрации похожа на ту, которая была представлена на рис. 2, однако ее размеры намного меньше. Связано это с тем, что фокусирующая конфигурация магнитного поля в данном случае существенна лишь на достаточно коротком промежутке времени по сравнению со стационарным случаем, когда предполагалось, что фаза фокусировки справедлива во всей области. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим, как меняется полярность магнитного поля вдоль траектории. На рис. 7 представлена траектория с лагранжевыми координатами $z_0 = 0.6$ а.е. и $t_0 = 7$ лет и значение полярности гелиосферного магнитного поля вдоль этой траектории. На расстоянии приблизительно в 15 а.е. от Солнца пылинка проходит через область постоянной отрицательной полярности. При этом момент времени, когда она находится в этой области составляет приблизительно $t \approx 22$ года, что соответствует случаю, когда токовый слой совершил один полный оборот вокруг плоскости солнечного экватора и вернулся в изначальную фокусирующую конфигурацию. В связи с этим траектория пылинки отклоняется от прямолинейной, и она начинает двигаться к плоскости солнечного экватора. В малой окрестности Солнца пылинка вновь входит в протяженную область постоянной полярности, так как вблизи Солнца токовый слой находится в окрестности плоскости солнечного экватора

во все моменты времени. Более того, расположение полярностей относительно токового слоя все еще соответствует фазе фокусировки, поэтому пылинки вновь начинают двигаться к плоскости солнечного экватора, что и приводит к формированию каустики, аналогично тому, как это было в стационарном случае, представленном на рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено моделирование распределения межзвездной пыли в гелиосфере с помощью лагранжева метода Осипцова. Прежде всего, в рамках упрощенной стационарной постановки было показано, что в окрестности плоскости солнечного экватора формируются особенности распределения концентрации пыли из-за пересечения траекторий между собой. Было показано, что якобиан матрицы перехода от лагранжевых координат к эйлеровым стремится к нулю при приближении к каустике, поэтому концентрация на каустике существенно возрастает (в пределе до бесконечности). Детальное исследование эволюции компонент матрицы Якоби вдоль траекторий показало, что после первого прохождения через токовый слой компонента J_{zz} = начинает уменьшаться из-за градиента функции полярности внутри токового слоя, и в результате при приближении к каустике значение якобиана становится равным нулю. Механизм образования вторичных каустик в стационарном случае аналогичен.

В случае, когда учитывается нестационарность токового слоя, было показано, что каустики формируются лишь в некоторые моменты времени. Это происходит для тех частиц, которые проходят через фазу фокусировки на расстоянии приблизительно 15–30 а.е. от Солнца, т.е. так, чтобы они успели дойти до окрестности Солнца до наступления следующей фазы дефокусировки. Возникающие особенности распределения концентрации появляются за счет осцилляций частиц вокруг плоскости солнечного экватора и, соответственно, похожи на особенности, которые были характерны для случая стационарного фокусирующего токового слоя. Однако размеры областей, содержащих особенности, меньше, поскольку в случае нестационарного токового слоя частицы проходят через фазу фокусировки достаточно быстро. Дополнительные области повышенной концентрации в окрестности Солнца образуются для тех частиц, которые прямо перед Солнцем прошли через фазу дефокусировки, и, соответственно, сильно отклонились вдоль оси, перпендикулярной плоскости солнечного экватора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baranov V.B., Izmodenov V.V. // Fluid Dynamics. 2006. V. 41. P. 689.
2. Griin E., Zook H.A., Baguhl M., Balogh A., Bame S.J., Fechtig H., Forsyth R., Hanner M.S., Horanyi M., Kissel J., Lindblad B.-A., Linkert D., Linkert G., Mann I., McDonnell J. A. M., Morfill G.E., Phillips J.L., Polanskey C., Schwehm G., Siddique N., Staubach P., Svestka J., Taylor A. // Nature. 1993. V. 362. P. 428.
3. Wang S., Li A., Jiang B.W. // The Astrophysical Journal. 2015. V. 811. P. 38.
4. Altobelli N., Postberg F., Fiege K., Tieloff M., Kimura H., Sterken V.J., Hsu H.W., Hillier J., Khawaja N., Moragas-Klostermeyer G., Blum J., Burton M., Srama R., Kempf S., Grün E. // Science. 2016. V. 352. P. 312.
5. Godenko E.A., Izmodenov V.V. // Advances in Space Research. 2023. V. 72. P. 5142.
6. Smith E.J. // Journal of Geophysical Research. 2001. V. 106. P. 15819.
7. Jokipii J.R., Thomas B. // The Astrophysical Journal. 1981. V. 243. P. 1115.
8. Hoeksema J.T. // Space Science Reviews. 1995. V. 72. P. 137.
9. Mishchenko A.V., Godenko E.A., Izmodenov V.V. // MNRAS. 2020. V. 491. P. 2808.
10. Godenko E.A., Izmodenov V.V. // Astronomy Letters. 2021. V. 47. P. 50.
11. Godenko E.A., Izmodenov V.V. // Fluid Dynamics. 2023. V. 58. P. 274.
12. Osipov A.N. // Astrophysics and Space Science. 2000. V. 274. P. 377.
13. Osipov A.N. // Fluid Dynamics. 2024. V. 59. P. 1.
14. Landgraf M. // Journal of Geophysical Research. 2000. V. 105. P. 10303.
15. Sterken V.J., Altobelli N., Kempf S., Schwehm G., Srama R., Grün E. // Astronomy and Astrophysics. 2012. V. 538. P. A102.
16. Slavin J.D., Frisch P.C., Muller H.-R., Heerikhuisen J., Pogorelov N.V., Reach W.T., Zank G. // The Astrophysical Journal. 2012. V. 760. P. 46.
17. Alexashov D.B., Katushkina O.A., Izmodenov V.V., Akaev P.S. // MNRAS. 2016. V. 458. P. 2553.

18. *Strub P., Sterken V.J., Soja R., Krüger H., Grün E., Srama R.* // *Astronomy and Astrophysics*. 2019. V. 621. P. A54.
19. *Kempf S., Srama R., Altobelli N., Auer S., Tschernjawski V., Bradley J., Burton M.E., Helfert S., Johnson T.V., Krüger H., Moragas-Klostermeyer G., Grün E.* // *Icarus*. 2004. V. 171. P. 317.
20. *Weingartner J.C., Draine B.T.* // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2001. V. 134. P. 263.
21. *Parker E.N.* // *The Astrophysical Journal*. 1958. V. 128. P. 664.
22. *Kimura H., Mann I.* // *Meteoroids 1998* edited by Baggaley W.J. and Porubcan V. 1999. P. 283.

Peculiarities of the Interstellar Dust Distribution in the Heliosphere Induced by the Time-Dependent Magnetic Field

E. A. Godenko^{a, b, c, *} V. V. Izmodenov^{a, b, c}

^a*Space Research Institute of RAS, Moscow, 117485 Russia*

^b*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, 119526 Russia*

^c*Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

Interstellar dust enters the heliosphere due to the relative motion of the Sun and the Local Interstellar Cloud, which contains the Sun. The dynamics of interstellar dust particles is governed mainly by the electromagnetic force. The direction of this force depends on the polarity of the heliospheric magnetic field. In turn, polarity is a function of position and time and depends on the orientation of the solar magnetic dipole axis relative to the solar rotation axis. Previously it was shown that for the case when the magnetic dipole axis coincides with the solar rotation axis, the electromagnetic force acting on dust particles is directed towards the solar equatorial plane in both the northern and southern solar hemispheres. As a result, under the influence of such a force, the distribution of interstellar dust becomes highly inhomogeneous and, in particular, thin regions of increased number density (caustics) are formed. The goal of this work is to study the nature of caustics for a more realistic time-dependent model, when it is assumed that the magnetic dipole axis rotates relative to the solar rotation axis with a period of 22 years in accordance with the 22-year solar cycle. In addition, the magnetic dipole axis rotates due to the rotation of the Sun with a period of 25 days. To calculate the dust number density, the Lagrangian Osiptsov method is used. The shape and evolution of the resulting caustics are examined and the physical mechanisms of their origin are discussed. It is shown that, when taking into account time-dependent effects, caustics appear only in certain phases of the 22-year solar cycle, and then disappear.

Keywords: interstellar dust, heliosphere, lagrangian approach.

УДК 532.546:004.942:622.276.2

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИТОКА К ТРЕЩИНЕ В НЕФТЕГАЗОВОЙ ЗАЛЕЖИ С ПОДОШВЕННОЙ ВОДОЙ

© 2024 г. Р. Д. Каневская*, П. В. Кузнецов**, Л. Л. Рыжова***

Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, Москва, Россия

**e-mail: pmkm@gubkin.ru*

***e-mail: ya.kuznetsov-pv@yandex.ru*

****e-mail: leilanyryzh@gmail.com*

Поступила в редакцию 01.02.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Представлена модель притока нефти к скважине в трещиноватом пласте с обширной газовой шапкой и толщей подстилающей воды в условиях гравитационной сегрегации флюидов. При помощи асимптотического анализа уравнений удалось упростить описание процесса фильтрации до и после прорыва воды и газа в скважину, а также на удалении от нее, оценить возможность безводной, безгазовой добычи, или добычи в условиях стабилизации доли фаз в общем дебите. Показано, что в крупномасштабном приближении, на удалении от скважин, может быть использована модель гидростатического равновесия. Отмечено, что в большинстве практических случаев в крупномасштабном приближении влияние конечной проводимости трещины несущественно, и может использоваться модель бесконечно проводящей трещины. В масштабе течения вблизи стока были получены соотношения для определения долей воды и газа в добываемой продукции после прорыва конусов воды и газа. Наконец, сопряжение представленных моделей позволяет полноценно описать приток в скважину до и после прорыва конусов воды и газа. Достоверность предложенных моделей подтверждается результатами сопоставления расчетов с реальными данными.

Ключевые слова: трещиноватые пласты, математическое моделирование, многофазная фильтрация, конусообразование, многомасштабное моделирование, асимптотический анализ.

DOI: 10.31857/S1024708424030122, EDN: PEWJEG

ВВЕДЕНИЕ

Трещиноватые резервуары углеводородов характеризуются многомасштабной структурой пустотного пространства, что требует специальных подходов к их изучению и моделированию [1, 2]. Такие пласты, как правило, представлены низкопроницаемой матрицей, содержащей флюиды, и высокопроницаемыми трещинами незначительного объема, по которым происходит фильтрация. Помимо магистральных трещин имеются оперяющие трещины и микротрещины, характерные размеры которых существенно различаются. В некоторых случаях емкость матрицы также очень мала, но в пласте присутствуют каверны – вторичные пустоты, вмещающие флюиды.

Математическое моделирование подобных объектов требует специальных подходов. В первых работах рассматривалась периодическая структура сети трещин с введением специальной трещинной проницаемости, а закон течения в них задавался при помощи аналитических зависимостей [3, 4]. В [5] приводятся результаты детального моделирования взаимодействия отдельного низко-проницаемого блока и окружающих трещин с использованием измельчения расчетной сетки и явным учетом в модели геометрии блоков и трещин. Полноценное моделирование с учетом пустот разного масштаба и особенностей течения в них может быть реализовано, например, на основе модели Дарси–Бринкмана [6, 7], но при решении практических задач для реальных пластов трудно применимо. Формально наиболее простой метод учета трещиноватости связан с использованием моделей эффективной среды [8, 9]. В этом случае в результате осреднения матрица и трещины сводятся к единой анизотропной системе, характеризующейся суммарной пористостью и эффективным тензором проницаемости, компоненты которого,

соответствующие основному направлению распространения трещин, существенно выше, чем остальные [2, 10–12]. В случае многофазной фильтрации аналогично вводятся эффективные тензоры фазовых проницаемостей [13–15]. Другой широко распространенный подход основан на концепции двойной среды [16], согласно которой матрица и трещины представляются в виде вложенных континуумов, характеризующихся своей проницаемостью и пористостью. Интенсивность массообмена между средами определяется с использованием дополнительных гипотез или результатов лабораторного либо вычислительного эксперимента [1, 5]. Часто предполагается, что интенсивность перетока пропорциональна разности давлений в матрице и трещине, а коэффициент пропорциональности зависит от геометрии блоков и трещин, их абсолютных и относительных проницаемостей, капиллярных давлений, разности плотностей фаз и т.д. [17–19]. Особенности постановки краевых задач фильтрации однородной слабосжимаемой жидкости в трещиновато-пористых средах рассмотрены в [17], там же рассматриваются некоторые задачи двухфазной фильтрации несжимаемых жидкостей. Если пустотное пространство среды представлено элементами более, чем двух масштабов (например, поры, каверны, трещины), то модель [16] может быть обобщена путем введения большего количества вложенных сред и заданием соответствующих условий массообмена. В последнее время все большее внимание уделяется идеям, основанным на фрактальном описании сети трещин [20] с учетом или без учета концепции двойной среды при различных моделях течения на фрактале и массообмена с матрицей, например [21, 22]. Модель вложенных сред подразумевает связность сети трещин, поэтому ее применение не оправдано при описании протяженных непересекающихся между собой трещин [23].

В последние десятилетия активно развивается подход, связанный с прямым заданием сети трещин в виде плоских полигонов. Этот прием используется для слабопроницаемых коллекторов, в случае несвязанной сети редких естественных трещин и при моделировании гидроразрыва пласта. Дискретная модель системы трещин обычно должна быть согласована с конечно-элементной сеткой, на которой рассчитывается фильтрация в пласте, что приводит к значительному увеличению вычислительной трудоемкости [24–26].

Особенно сложную задачу представляет собой описание притока к скважинам в трещиноватом нефтенасыщенном пласте с газовой шапкой и подстилающей водой. В этом случае наличие вертикальных трещин приводит к преждевременным прорывам газа и воды и существенно затрудняет процесс добычи. Проблема образования и прорыва конусов воды и газа в однородных поровых коллекторах изучена достаточно подробно [27]. При небольших градиентах давления и относительно высокой проницаемости пласта по вертикали для массивных залежей применима модель гравитационного равновесия [28]. Именно она используется практически во всех работах, посвященных конусообразованию, начиная с первых систематических исследований этой проблемы [27, 29, 30]. В этих и последующих работах предполагается, что жидкости несжимаемы, давление на удалении от скважины распределено по гидростатике, вытеснение нефти принимается поршневым. Форма границы раздела жидкостей неизвестна и отыскивается в ходе решения задачи [30]. Наибольший интерес представляет определение условий устойчивости этой границы, т.е. неподвижности конуса, и максимально возможного безводного и безгазового дебита. Классическая задача рассматривается в двумерной постановке для вертикальной либо протяженной горизонтальной скважины. Аналитические решения получены для двух жидкостей (обычно вода и нефть) в стационарном [30, 31] и нестационарном случаях [32, 33], их сопоставление с результатами численного моделирования выполнено в [33, 34].

В данной работе для описания продвижения и прорыва воды и газа в нефтяные скважины в массивной залежи, осложненной вертикальными трещинами, рассматривается модель фильтрации в условиях гравитационного разделения флюидов. Предполагается, что флюиды в основном содержатся в проницаемой матрице, представляющей собой интервалы ограниченного объема, связанные между собой водоносной зоной и газовой шапкой через систему высоко проводящих трещин. Поэтому поверхности водонефтяного и газонефтяного контактов приняты едиными, капиллярные силы не учитываются. Считается, что жидкость поступает в скважины из трещин, а в них из матрицы. В качестве базовой рассмотрена модель притока к протяженной вертикальной трещине, пересекающей горизонтальную или вертикальную скважину в нефтенасыщенном пласте с газовой шапкой и подстилающей водой. Предполагается, что скважина изначально вскрывает нефтяную часть. Асимптотический анализ представленных уравнений позволил получить упрощенное описание рассматриваемого процесса как до, так и после прорыва воды и газа в скважину, а также на удалении от нее, оценить возможность безводной и безгазовой добычи или в условиях стабилизации доли фаз в общем дебите. Аналогично могут быть рассмотрены задачи притока

к горизонтальной или вертикальной скважине в однородном пласте. Продемонстрирована возможность использования представленных моделей для реальных объектов, приводятся соответствующие примеры.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений фильтрации нефти, газа и воды в условиях гравитационного разделения при наличии подпора газа газовой шапки и подошвенной воды вдоль поверхностей $z = 0$ и $z = H$ соответственно имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[\frac{k_o}{\mu_o} \int_{z_{og}}^{z_{ow}} \rho_o \nabla P_o dz \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{z_{og}}^{z_{ow}} \rho_o m dz \right] \\ \operatorname{div} \left[\frac{k_g}{\mu_g} \int_0^{z_{og}} \rho_g \nabla P_g dz \right] + u_g &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{z_{og}} \rho_g m dz \right] \\ \operatorname{div} \left[\frac{k_w}{\mu_w} \int_{z_{ow}}^H \rho_w \nabla P_w dz \right] + u_w &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{z_{ow}}^H \rho_w m dz \right] \\ P_l &= p - \gamma_l z, \quad \gamma_l = \rho_l g, \quad l = o, w, g \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p — давление; g — ускорение силы тяжести; m — пористость, ρ_l — плотность, μ_l — вязкость, k_l — эффективная проницаемость фазы l , индексы o, w, g относятся к нефти, воде и газу соответственно; $z_{ow}(x, y, t)$ и $z_{og}(x, y, t)$ — положение контактов вода–нефть и газ–нефть; u_w , u_g — вертикальные составляющие массовых скоростей притока подошвенной воды и газа газовой шапки в область фильтрации, H — начальная толщина нефтенасыщенной части пласта. Предполагается, что вертикальная ось z направлена вниз. Проницаемости фаз для простоты могут быть приняты одинаковыми; вязкости предполагаются постоянными.

Плотности нефти, воды, газа и пористость приняты линейно зависящими от давления

$$\begin{aligned} \rho_l &= \rho_{l,i} (1 + c_l (p - p_i)) \\ m &= m_i (1 + c_r (p - p_i)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и далее индекс i указывает на начальные условия и значения переменных при этих условиях, $c_o, c_w, c_g = \frac{1}{p_i}$, c_r — сжимаемости фаз и пустотного пространства, p_i — начальное давление, близкое к давлению насыщения. Такое приближение допустимо, так как даже для газа при $p_i \approx 20$ МПа и $|p - p_i| \leq 2$ МПа, отклонение линейной зависимости от уравнения состояния идеального газа не превышает 1%.

Введем безразмерные переменные и обозначения, отметив звездочкой размерные величины там, где их нужно отличать от соответствующих безразмерных

$$\begin{aligned} x^* &= xL, \quad y^* = yL, \quad z^* = zH, \quad t^* = tT, \quad P^* = P\Delta P, \quad T = \frac{m_i L^2 \mu_o}{k_o \Delta P}, \\ u_g^* &= u_g \rho_{g,i} \frac{k_g \Delta P}{\mu_g H}, \quad u_w^* = u_w \rho_{w,i} \frac{k_w \Delta P}{\mu_w H}, \quad u_{fg}^* = u_{fg} \rho_{g,i} \frac{k_{fg} \Delta P}{\mu_g H}, \quad u_{fw}^* = u_{fw} \rho_{w,i} \frac{k_{fw} \Delta P}{\mu_w H} \\ q_o^* &= q_o \rho_{o,i} \frac{k_o H \Delta P}{\mu_o} = q_o \rho_{o,i} \frac{m_i L^2 H}{T} \\ c_l^* &= c_l / \Delta P, \quad \gamma_l^* = \gamma_l \Delta P / H, \quad l = o, w, g, r \end{aligned}$$

$$\varepsilon = H^2 / L^2$$

Здесь H — характерный масштаб по вертикали, соответствующий начальной нефтенасыщенной толщине пласта, L — характерный масштаб по латерали, сопоставимый с расстоянием между скважинами, ΔP — характерный перепад давления, T — характерное время, q_o — дебит нефти. Параметр ε является малым, для реальных объектов $\varepsilon \sim 10^{-2+4}$. В безразмерных переменных система уравнений (1.1) с учетом (1.2) примет вид

$$\operatorname{div} \left[\int_{z_{og}}^{z_{ow}} \frac{\rho_o}{\rho_{o,i}} \nabla P_o dz \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{z_{og}}^{z_{ow}} \frac{\rho_o}{\rho_{o,i}} \frac{m}{m_i} dz \right] \quad (1.3)$$

$$\varepsilon \cdot \operatorname{div} \left[\int_0^{z_{og}} \frac{\rho_g}{\rho_{g,i}} \nabla P_g dz \right] + u_g = \varepsilon \cdot \frac{k_o \mu_g}{k_g \mu_o} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{z_{og}} \frac{\rho_g}{\rho_{g,i}} \frac{m}{m_i} dz \right] \quad (1.4)$$

$$\varepsilon \cdot \operatorname{div} \left[\int_{z_{ow}}^1 \frac{\rho_w}{\rho_{w,i}} \nabla P_w dz \right] + u_w = \varepsilon \cdot \frac{k_o \mu_w}{k_w \mu_o} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{z_{ow}}^1 \frac{\rho_w}{\rho_{w,i}} \frac{m}{m_i} dz \right] \quad (1.5)$$

Таким образом, в крупномасштабном приближении при $\varepsilon \ll 1$ при отсутствии значительных изменений давления и формы контактов имеем $u_w = 0$, $u_g = 0$, т.е. основная толща воды и газа может считаться неподвижной, что позволяет рассматривать течение в условиях гидростатического равновесия, полагая, что изменения давления уравновешиваются изменением положения контактов.

Пусть p_w — давление нефти на фиксированной глубине z_w , соответствующей расположению горизонтальной скважины или нижней перфорации вертикальной скважины, $P = p_w - \gamma_o z_w$. Тогда, пренебрегая сжимаемостью фаз ($c_l \ll 1$) в распределении давления по вертикали, имеем

$$P_o = P, \quad P_w = P + \gamma_{ow} z_{ow}, \quad P_g = P + \gamma_{og} z_{og}, \quad \gamma_{og} = \gamma_o - \gamma_g, \quad \gamma_{ow} = \gamma_o - \gamma_w$$

$$z_{ow} - 1 = \frac{1}{\gamma_{ow}} (P_i - P), \quad z_{og} = \frac{1}{\gamma_{og}} (P_i - P) \quad (1.6)$$

Здесь и далее используется условие, что $z_{ow,i} = 1$ и $z_{og,i} = 0$.

Подстановка соотношений (1.6) в (1.3) дает уравнение для расчета давления P в крупномасштабном приближении

$$\operatorname{div} \left[(1 + \varkappa_1 (P - P_i)) \nabla P \right] = \varkappa \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\varkappa = c_o + c_r + \frac{1}{\gamma_{og}} - \frac{1}{\gamma_{ow}}, \quad \varkappa_1 = c_o + \frac{1}{\gamma_{og}} - \frac{1}{\gamma_{ow}}$$

Затем решение этого уравнения может быть использовано для определения формы контактов из (1.6). Заметим, что уравнение (1.7) сводится к уравнению Буссинеска, описывающему безнапорную фильтрацию.

Вблизи скважины можно ввести локальную систему координат, перейдя к мелкомасштабному описанию процесса, и определить для переменных x и y масштабный множитель $\sqrt{\varepsilon}$, а для t — множитель ε , что соответствует описанию течения в области, размеры которой сопоставимы с толщиной пласта. В этом случае в уравнениях (1.3)–(1.5) можно пренебречь сжимаемостью жидкостей и пустотного пространства

$$\operatorname{div} \left[\int_{z_{og}}^{z_{ow}} \nabla P_o dz \right] = \frac{\partial}{\partial t} [z_{ow} - z_{og}] \quad (1.8)$$

$$\operatorname{div} \left[\int_0^{z_{og}} \nabla P_g dz \right] + u_g = \frac{k_o \mu_g}{k_g \mu_o} \frac{\partial}{\partial t} z_{og} \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \left[\int_{z_{ow}}^1 \nabla P_w dz \right] + u_w = \frac{k_o \mu_w}{k_w \mu_o} \frac{\partial}{\partial t} [1 - z_{ow}] \quad (1.10)$$

Уравнения (1.8)–(1.10) могут использоваться для расчета многофазного притока после прорыва конусов.

2. ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Представленная математическая модель позволяет исследовать приток к скважине, расположенной как в ограниченном, так и в неограниченном пласте.

Для простоты рассматривается прямоугольная область течения с размерами $2X \times 2Y$, $|x| \leq X$, $|y| \leq Y$. Предполагается, что пласт осложнен вертикальной трещиной или трещиноватой зоной ширины $2w \ll Y$ и проницаемости по нефти k_{fo} , проходящей вдоль оси $y = 0$ через всю область. Течение в трещине принимается плоскопараллельным, изменение давления в поперечном сечении не учитывается, объемом трещины пренебрегается. Боковые границы рассматриваемой области фильтрации $|x| = X$ предполагаются непроницаемыми: $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$, где n – нормаль к границе. Условия на границе пласта и трещины для уравнений (1.3)–(1.5) имеют вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{z_{og}}^{z_{ow}} \frac{\rho_o}{\rho_{o,i}} \frac{\partial P_o}{\partial x} dz \right] + \alpha_o \int_{z_{og}}^{z_{ow}} \frac{\rho_o}{\rho_{o,i}} \frac{\partial P_o}{\partial y} dz \right]_{y=0} = 0, \quad \alpha_o = \frac{k_o L}{k_{fo} w} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{z_{og}} \frac{\rho_g}{\rho_{g,i}} \frac{\partial P_g}{\partial x} dz \right] + \alpha_g \int_0^{z_{og}} \frac{\rho_g}{\rho_{g,i}} \frac{\partial P_g}{\partial y} dz \right]_{y=0} + u_{fg} = 0, \quad \alpha_g = \frac{k_g L}{k_{fg} w} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{z_{ow}}^1 \frac{\rho_w}{\rho_{w,i}} \frac{\partial P_w}{\partial x} dz \right] + \alpha_w \int_{z_{ow}}^1 \frac{\rho_w}{\rho_{w,i}} \frac{\partial P_w}{\partial y} dz \right]_{y=0} + u_{fw} = 0, \quad \alpha_w = \frac{k_w L}{k_{fw} w} \quad (2.3)$$

Здесь k_{fg} , k_{fw} – проницаемости трещиноватой зоны, u_{fg} , u_{fw} – вертикальные составляющие скоростей притока по трещине через первоначальные границы контактов для газа и воды соответственно.

Аналогично для уравнения (1.7) получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \varepsilon_1 (P - P_i)) \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \alpha_o (1 + \varepsilon_1 (P - P_i)) \frac{\partial P}{\partial y} \right]_{y=0} = 0, \quad \alpha_o = \frac{k_o L}{k_{fo} w} \quad (2.4)$$

При мелкомасштабном описании (1.8)–(1.10) в граничных условиях (2.1)–(2.3) отсутствует множитель ε , коэффициенты α_l заменяются на $\alpha_l = \alpha_l \sqrt{\varepsilon}$, $l = o, w, g$, плотности фаз принимаются постоянными.

Рассматриваются как вертикальные, так и горизонтальные скважины. Местоположение вертикальной скважины, которая сообщается с пластом через трещину и имитируется линейным стоком, определяется координатами $x = 0$, $y = 0$. Принимается, что вертикальная скважина направлена вдоль оси z ; вскрытый интервал $[z_w - b, z_w]$ целиком находится внутри толщи, первоначально насыщенной нефтью $z_w > b > 0$. Горизонтальная скважина радиуса r_w сообщается с пластом через вертикальную трещину или трещиноватую зону ширины $2w$ и проницаемости по нефти k_{fo} . Предполагается, что трещина проходит вдоль оси x , а скважина пересекает ее в начале координат. В этом случае фактически работающим интервалом горизонтального ствола является ширина трещиноватой зоны. Задается постоянный дебит q_o или забойное давление P_* на глубине z_w и расстоянии r_w от стока.

Модель может использоваться также для описания притока к вертикальной либо длинной горизонтальной скважине в неограниченном однородном нефтяном пласте с газовой шапкой и подстилающей водой при заданном дебите или удельном дебите (на единицу длины) соответственно. Первому случаю соответствует $\alpha_l \rightarrow \infty$ или $k_{fl} \rightarrow 0$, случаю горизонтальной скважины, направленной вдоль оси x – модель бесконечно проводящей трещины $k_{fl} \rightarrow \infty$ или $\alpha_l \rightarrow 0$.

Предполагается, что задано начальное давление $P(x, y, 0) = P_i$, начальные поверхности контактов горизонтальные $z_{ow}(x, y, 0) = 1$ и $z_{og}(x, y, 0) = 0$.

Особенности задания скоростей притока подошвенной воды и газа газовой шапки в нефтенасыщенную часть u_w и u_g существенно влияют на вид решения. Можно рассмотреть следующие варианты:

1) Если объемы газовой шапки и водоносной области неограниченны или очень велики, то на поверхностях $z_{ow}(x, y, 0) = 1$ и $z_{og}(x, y, 0) = 0$ задаются постоянные давления, соответствующие начальному состоянию пласта.

2) Если эти границы или части границ непроницаемы, то соответствующие скорости притока равны нулю.

Возможно сочетание вариантов 1 и 2, а именно в трещиноватой зоне вдоль границы задано постоянное давление, а в основной области течения u_w и u_g равны нулю.

Если имеется начальный слой подошвенной воды толщины h_w и/или газовая шапка высоты h_g (H_w и H_g — соответствующие размерные значения), то система уравнений (1.3)–(1.5) замыкается следующим образом:

$$\varepsilon \cdot \operatorname{div} \left[\int_{-h_g}^0 \frac{\rho_g}{\rho_{g,i}} \nabla P_g dz \right] - u_g = \varepsilon \cdot \frac{k_o \mu_g}{k_g \mu_o} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h_g}^0 \frac{\rho_g}{\rho_{g,i}} \frac{m}{m_i} dz \right], \quad h_g = H_g / H \quad (1.4')$$

$$\varepsilon \cdot \operatorname{div} \left[\int_1^{h_w} \frac{\rho_w}{\rho_{w,i}} \nabla P_w dz \right] - u_w = \varepsilon \cdot \frac{k_o \mu_w}{k_w \mu_o} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_1^{h_w} \frac{\rho_w}{\rho_{w,i}} \frac{m}{m_i} dz \right], \quad h_w = H_w / H \quad (1.5')$$

Аналогично модифицируются граничные условия (2.2), (2.3).

Если заданы начальные толщины слоя подошвенной воды h_w и газовой шапки h_g , и приток соответствующих фаз извне невозможен, то изменение формы контакта определяется только сжимаемостью

$$1 - z_{ow} = (c_w + c_r) h_w (P_i - P), \quad z_{og} = (c_g + c_r) h_g (P_i - P) \quad (1.6')$$

Эти соотношения используются при выводе уравнения (1.7) вместо (1.6), тогда

$$\varkappa = c_o + c_r + (c_g + c_r) h_g + (c_w + c_r) h_w, \quad \varkappa_1 = c_o + (c_g + c_r) h_g + (c_w + c_r) h_w$$

Если газовой шапки нет или h_g мало, то $\varkappa_1 (P - P_i) \ll 1$ и уравнение (1.7) сводится к линейному уравнению пьезопроводности.

3. ПРИТОК НЕФТИ И КОНУСООБРАЗОВАНИЕ ДО ПРОРЫВА ВОДЫ И ГАЗА В СКВАЖИНУ

Рассматривается приток нефти к точечному стоку на плоскости, находящемуся в центре прямоугольной области фильтрации, вдоль оси которой проходит трещиноватая зона. Пересекающие ее границы области непроницаемые, на двух других границах ставится либо условие непротекания, либо закон изменения давления. Отыскивается решение уравнений (1.6), (1.7). На границе пласта и трещины задается условие (2.4), на скважине — дебит нефти либо забойное давление на глубине z_w . Условия гидростатического равновесия, при выполнении которых возможен приток чистой нефти, определяются соотношениями (1.6). В случае горизонтальной скважины соответствующие критические давления достигаются при $z_{ow} = z_w$ или $z_{og} = z_w$; приток чистой нефти имеет место при $P \geq P_i - \gamma_{ow}(z_w - 1)$ и $P \geq P_i - \gamma_{og} z_w$ одновременно, поэтому наибольшее снижение давления и, соответственно, максимальная безводная и безгазовая добыча нефти, возможны при $z_w = \gamma_{ow}(\gamma_{ow} - \gamma_{og})^{-1}$. Аналогичные условия для вертикальной скважины имеют вид $P \geq P_i - \gamma_{ow}(z_w - 1)$ и $P \geq P_i - \gamma_{og}(z_w - b)$.

Точное решение нелинейного уравнения (1.7) может быть получено только для некоторых специальных случаев начальных и граничных условий, причем в одномерной постановке. Такие задачи рассматривались, например, в теории безнапорных течений [17, 35], а также при описании высокотемпературных тепловых волн [36]. Линеаризация этого уравнения осуществляется путем перехода к новой переменной

$$\operatorname{div}[\nabla \tilde{P}] = \varkappa \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}, \quad \tilde{P} = 0.5(P - P_i + \varkappa_1^{-1})^2 \quad (3.1)$$

Аналогично, и граничное условие (2.4) после замены (3.1) принимает вид:

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} + \alpha_o \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right]_{y=0} = 0 \quad (3.2)$$

Сравнение решений задачи о притоке в случаях нелинейной системы (1.7), (2.4) и линеаризованной (3.1), (3.2) показало, что при линеаризации значимые различия в распределении давления могут иметь место в ограниченной области вблизи стока (скважины), причем, очевидно, что если отклонение P от начального значения P_i невелико, в частности, если давление выше критического, эти отличия крайне малы. Аналогичные результаты для одномерных задач в однородном пласте продемонстрированы в [17, 35, 37].

В соответствии с граничными условиями (2.4), (3.2) задача может быть существенно упрощена для двух предельных случаев: при $\alpha_o \rightarrow 0$, что соответствует бесконечно проводящей трещине, с учетом условий на границах области имеем $\left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \right]_{y=0} = 0$, и течение – плоскопараллельное; при $\alpha_o \rightarrow \infty$ трещина отсутствует и $\left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$, течение вблизи стока – радиальное.

Расчеты показали, что для задачи (1.7), (2.4) наибольшие различия полей давления для случая бесконечно проводящей трещины и при $\alpha_o \sim 10^{-1} \div 10^0$ имеют место вблизи стока в направлении, ортогональном трещине, причем размеры этой области малы и сопоставимы с толщиной пласта $Y\sqrt{\epsilon}$. Причем, при $\alpha_o \sim 10^{-1}$ и меньше, даже к моменту прорыва воды и/или газа на расстоянии $Y\sqrt{\epsilon}$ от стока относительное отклонение не превышает 3%, при $\alpha_o \sim 1$ оно составляет всего 10%, а на расстоянии $2Y\sqrt{\epsilon}$ – уже 5%. Для горизонтальной скважины в трещинно-поровом коллекторе при наличии выраженного направления трещиноватости и в предположении, что приток к скважине происходит только по трещинам, под шириной трещиноватой зоны следует понимать интегральную характеристику, определяемую не только раскрытостью трещин, но и их густотой вдоль ствола скважины, а также его длиной. В этом случае рассматриваемая область фильтрации имитирует дренируемую скважиной часть пласта. Анализ реальных данных по одному из месторождений с трещиноватым карбонатным коллектором показал, что в такой постановке параметр $\alpha_o < 10^{-1}$. При проведении гидроразрыва в низко проницаемом терригенном коллекторе создаются протяженные трещины, для которых обеспечивается безразмерная проводимость, соответствующая $\alpha_o < 1$ [38]. Это позволяет применять оценки, выполненные для предельной схемы $\alpha_o = 0$ в крупномасштабном приближении при рассмотрении конусообразования в указанных случаях. Не учитываемые в ней эффекты, связанные с дополнительным снижением давления вблизи скважины из-за неполноты вскрытия пласта по вертикали, проявляются только в окрестности, размер r_c которой не превышает толщину пласта [27], что также не ограничивает возможности использования предельной схемы вне этой области.

4. ТЕЧЕНИЕ ВБЛИЗИ СКВАЖИНЫ. СОВМЕСТНЫЙ ПРИТОК НЕФТИ, ВОДЫ И/ИЛИ ГАЗА ПОСЛЕ ПРОРЫВА КОНУСОВ В СКВАЖИНУ

Уравнение крупномасштабного приближения (1.7) с условиями равновесия (1.6) или (1.6') описывает течение на достаточном удалении от скважины даже после прорыва воды или газа. Совместное течение реализуется вблизи скважины и, как было показано, в локальной системе координат с масштабированием переменных x и y на $\sqrt{\epsilon}$, а t на ϵ в условиях сегрегации описывается уравнениями (1.8)–(1.10). Рассмотрение течения в ограниченной области при активном продвижении воды и газа позволяет не учитывать сжимаемость жидкостей. При мелкомасштабном описании процесс принимается квазиустановившимся. Каждому из флюидов соответствует своя область между поверхностями контактов и внешними границами. Поверхности контактов, являющиеся поверхностями тока, могут отклоняться от равновесного положения (1.6) или (1.6'). Граничные условия для этой задачи определяются в результате сопряжения с решением для крупномасштабного описания в условиях равновесия, что позволяет задавать как размеры области x_c , y_c , так и давление P_c и местоположение контактов z_{owc} и z_{ogc} на ее границах.

После прорыва конусов воды или газа в скважину депрессия $P_c - P_*$, как правило, значительно превышает гравитационную составляющую $|\gamma_{ow}(z_{owc} - z_w)| \leq |\gamma_{ow}|$ для воды и $|\gamma_{og}(z_{ogc} - z_w)| \leq |\gamma_{og}|$ для газа

соответственно. Обычно характерные величины различаются на один-два порядка. Поэтому можно принять, что вдоль произвольной линии тока на поверхности раздела воды и нефти $\frac{dP_o}{ds} \approx \frac{dP_w}{ds}$, на границе между газом и нефтью $\frac{dP_o}{ds} \approx \frac{dP_g}{ds}$, где ds — элемент линии тока, а отношение скоростей фаз определяется соответствующим отношением подвижностей $\frac{k_o \mu_w}{k_w \mu_o}$ и $\frac{k_o \mu_g}{k_g \mu_o}$. Отсюда следует, что при фиксированной депрессии $P_c - P_*$ распределение эквипотенциалей и линий тока для системы, содержащей нефть, воду и газ, будет практически таким же, как и в случае однородной жидкости [27]. Это допущение позволяет получить аналитические решения ряда задач, описывающих совместный приток нефти, воды и газа к интервалу горизонтального ствола или несовершенной вертикальной скважине в условиях сегрегации при различных условиях на кровле и подошве пласта — непроницаемость, постоянное давление, определяемое подпиткой обширной газовой шапки и/или водоносной области по всей площади околоскважинной зоны либо только через трещину. Поверхности тока, на которых лежат линии тока, соединяющие точки границы z_{owc} и z_{ogc} со скважиной, разделяют зоны, занятые отдельными фазами. Их форма позволяет рассчитать долю воды и газа в продукции скважины.

В локальной системе координат в условиях на границе с трещиной (2.1)–(2.3) параметры α_l заменяются на $\alpha_l = \alpha_l \sqrt{\varepsilon}$ и, поскольку для многих практически важных случаев $\alpha_l < 1$, соответствующими слагаемыми можно пренебречь

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{z_{og}}^{z_{ow}} \frac{\partial P_o}{\partial x} dz \right] \right]_{y=0} = 0, \quad (4.1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{z_{og}} \frac{\partial P_g}{\partial x} dz \right] \right]_{y=0} + u_{fg} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{z_{ow}}^1 \frac{\partial P_w}{\partial x} dz \right] \right]_{y=0} + u_{fw} = 0 \quad (4.2)$$

Как было показано, при крупномасштабном описании подпитка водой u_w, u_{fw} и газом u_g, u_{fg} через нижнюю и верхнюю границы соответственно не учитывается, однако в модели околоскважинной зоны (1.8)–(1.10), (4.1), (4.2) ее необходимо рассматривать. Для этого, если приток обусловлен наличием водоносной или газоносной области неограниченного или очень большого размера, на верхней и нижней границах моделируемой зоны задается постоянное давление, причем его значение определяется начальным равновесным состоянием. Если толщины воды и газа заданы, то рассматриваемая область течения расширяется в соответствии с (1.4'), (1.5'), и ее границы принимаются непроницаемыми.

В случаях, если приток воды и/или газа определяется постоянным давлением, заданным по всей поверхности либо только по трещине или граница полностью непроницаемая, а в крупномасштабном приближении принята предельная схема $\alpha_o = 0$, определяющая плоскопараллельное течение, то граничные условия на внешних границах внутренней области совместно с (4.1), (4.2) дают $\frac{\partial P_o(x, 0, z)}{\partial x} = 0$. Таким образом,

в случае $\alpha_l < 1$ и $\varepsilon \ll 1$ можно пренебречь изменением давления P_o вдоль трещины и для внутренней задачи также рассматривать плоскопараллельное течение в прямоугольной области плоскости uz , полагая при этом, что в точке $(0, z_w)$ находится точечный сток, характеризующийся давлением P_* на расстоянии r_w от него. Аналогичная схема описывает подтягивание воды и газа к длинной горизонтальной скважине.

Пусть вначале на внешних границах прямоугольника задано постоянное давление P_c , что соответствует притоку нефти и подпитке водой и газом по всей площади поверхности околоскважинной зоны. Размеры области $h \times 2l$, в данном случае $h = 1, l = y_c$. Пусть $\xi = y + i(z - z_w)$ — комплексная переменная, $F(\xi) = P + i\Psi$ — комплексный потенциал. Взаимное расположение линий тока, в том числе и определяющих границы раздела фаз, позволяет определять доли воды и свободного газа в суммарном дебите скважины через углы между ними в окрестности стока. С использованием методов отражения и суперпозиции источников и стоков, расположенных симметрично относительно границ рассматриваемой области, получим

$$F(\xi) = \frac{q}{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^k \ln \frac{\xi - \xi_{kj}}{\xi - \bar{\xi}_{kj} - 2z_w} \right] + C, \quad \xi_{kj} = 2lk + 2ijh \quad (4.3)$$

Здесь q – дебит однородной жидкости, определяемый как сумма дебитов фаз, приведенных к подвижности нефти. Аналогично можно рассчитать потенциал в случае, когда приток газа и воды в околоскважинную зону осуществляется через боковую поверхность из внешней области за счет смещения контактов, а также по трещине сверху и снизу, что имитируется дополнительными источниками на непроницаемых кровле и подошве рассматриваемой области q_{fg} и q_{fw} , поддерживающими на расстояниях r_{fg} и r_{fw} соответственно постоянное давление P_c , совпадающее с давлением на боковых границах области

$$F(\xi) = C + \frac{q}{2\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^k \ln[(\xi - \xi_{kj})(\xi - \xi_{kj} - 2z_w)] + g \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^k \ln(\xi - \xi_{kj} + z_w) + w \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^k \ln(\xi - \xi_{kj} - h + z_w) \right\}, \quad g = q_{fg} / q \leq 0, \quad w = q_{fw} / q \leq 0 \quad (4.4)$$

Если в рассматриваемую область приток жидкостей происходит только через боковые стороны и дополнительная подпитка водой и газом вблизи стока отсутствует, в выражении (4.4) принимается, что $q_{fg} = q_{fw} = 0$.

С учетом граничных условий из (4.3) имеем

$$P_c - P_* = \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{2(h - z_w)}{r_w} + \ln \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(1 - \cos 2\alpha \pi \cosh^{-1} 4k\beta \pi)(1 - \cosh^{-1} 2(2k - 1)\beta \pi)}{(1 - \cos 2\alpha \pi \cosh^{-1} 2(2k - 1)\beta \pi)(1 - \cosh^{-1} 4k\beta \pi)} \right] \quad (4.5)$$

$$\alpha = \frac{h - z_w}{h}, \quad \beta = \frac{l}{h}$$

Аналогичное соотношение для распределения (4.4) имеет вид

$$P_c - P_* = \frac{q}{2\pi} \left[\ln \frac{2(h - z_w)}{r_w} + SS1 - SS3(\alpha, \beta) - w SS3\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right) - g SS3\left(\frac{1 - \alpha}{2}, \beta\right) \right] \quad (4.6)$$

Здесь

$$S1(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{\sinh(2k - 1)\beta \pi \sinh(2k + 1)\beta \pi}{\sinh^2 2k\beta \pi}, \quad SS1 = S1(\beta) + \ln \frac{\sinh \beta \pi}{\beta \pi}$$

$$S2(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{\cosh(2k - 1)\beta \pi \cosh(2k + 1)\beta \pi}{\cosh^2 2k\beta \pi}, \quad SS2 = S2(\beta) + \ln \cosh \beta \pi$$

$$S3(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(1 - \cos 2\alpha \pi \cosh^{-1} 4k\beta \pi)^2}{(1 - \cos 2\alpha \pi \cosh^{-1} 2(2k - 1)\beta \pi)(1 - \cos 2\alpha \pi \cosh^{-1} 2(2k + 1)\beta \pi)} - S2(2\beta)$$

$$SS3(\alpha, \beta) = S3(\alpha, \beta) - \ln \frac{\cosh 2\beta \pi - \cos 2\alpha \pi}{1 - \cos 2\alpha \pi}$$

$$w = \left[SS3\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right) \left(\ln \frac{2l}{r_{fg}} + SS1 \right) - SS3\left(\frac{1 - \alpha}{2}, \beta\right) SS2 \right] \left[\left(\ln \frac{2l}{r_{fw}} + SS1 \right) \left(\ln \frac{2l}{r_{fg}} + SS1 \right) - SS2^2 \right]^{-1}$$

$$g = \left[SS3\left(\frac{1 - \alpha}{2}, \beta\right) \left(\ln \frac{2l}{r_{fw}} + SS1 \right) - SS3\left(\frac{\alpha}{2}, \beta\right) SS2 \right] \left[\left(\ln \frac{2l}{r_{fw}} + SS1 \right) \left(\ln \frac{2l}{r_{fg}} + SS1 \right) - SS2^2 \right]^{-1}$$

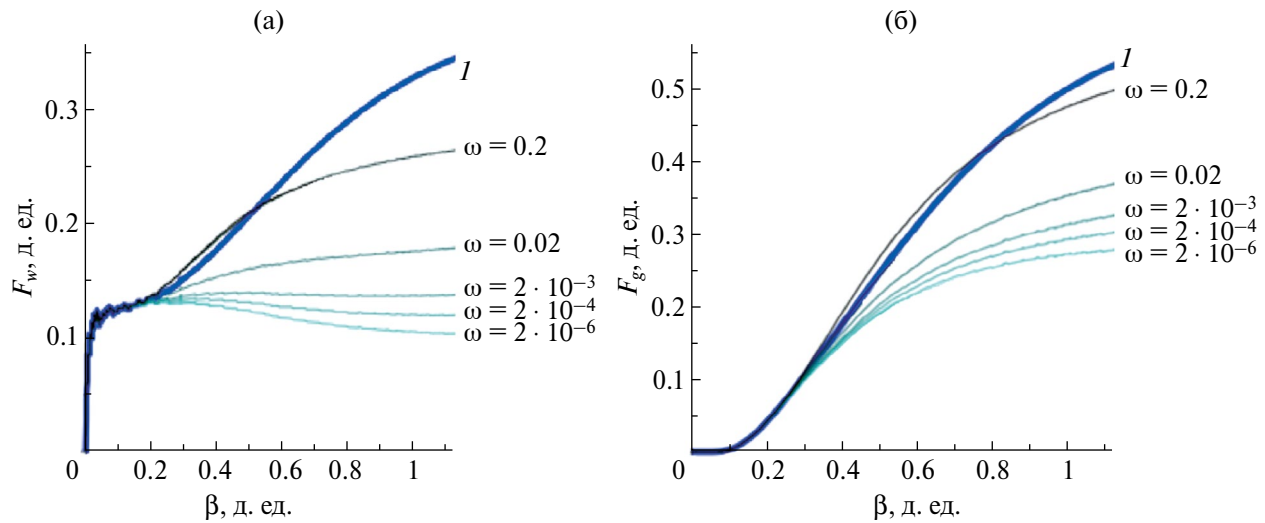


Рис. 1. Зависимости долей воды F_w (а) и газа F_g (б) от β для модели (4.3) при разных значениях ω и модели (4.4).

Отсюда можно выразить доли дебита q , соответствующие линиям тока каждой из фаз. Для нефти, воды и газа имеем

$$\begin{aligned} do &= \frac{z_{owc} - z_{ogc}}{h} \left(1 + \frac{w}{2} + \frac{g}{2} \right) \\ dw &= \frac{h - z_{owc}}{h} \left(1 + \frac{w}{2} + \frac{g}{2} \right) - \frac{w}{2} \\ dg &= \frac{z_{ogc}}{h} \left(1 + \frac{w}{2} + \frac{g}{2} \right) - \frac{g}{2} \end{aligned}$$

Исходя из этих соотношений, объемные доли воды F_w и свободного газа F_g в продукции скважины в пластовых условиях определяются выражениями

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{k_w \mu_o}{k_o \mu_w} dw \left[\frac{k_w \mu_o}{k_o \mu_w} dw + do + \frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g} dg \right]^{-1} \\ F_g &= \frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g} dg \left[\frac{k_w \mu_o}{k_o \mu_w} dw + do + \frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g} dg \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Выражения (4.5)–(4.7) применимы для длинной горизонтальной скважины в однородном пласте или пересекающей трещину бесконечной проводимости, через которую осуществляется приток. Заметим, что, если на оси z на расстоянии $z_w - b$ от верхней границы находится линейный сток длины b , имитирующий несовершенную вертикальную скважину, пересекаемую трещиной бесконечной проводимости, решение также может быть построено с использованием метода суперпозиции аналогично [27, 29], при этом результирующие соотношения будут существенно более сложными.

С практической точки зрения интересно сопоставить доли воды F_w и газа F_g в продукции скважины, соответствующие притоку этих фаз только через трещину и по всей поверхности контакта, то есть рассчитанные с использованием распределений (4.3) и (4.4). На рис. 1 показаны значения долей воды F_w и газа F_g для различных r_{fg} и r_{fw} в зависимости от β при $\alpha = 0.5$, $\frac{k_w \mu_o}{k_o \mu_w} \approx 0.8$, $\frac{k_g \mu_o}{k_o \mu_g} \approx 13.5$.

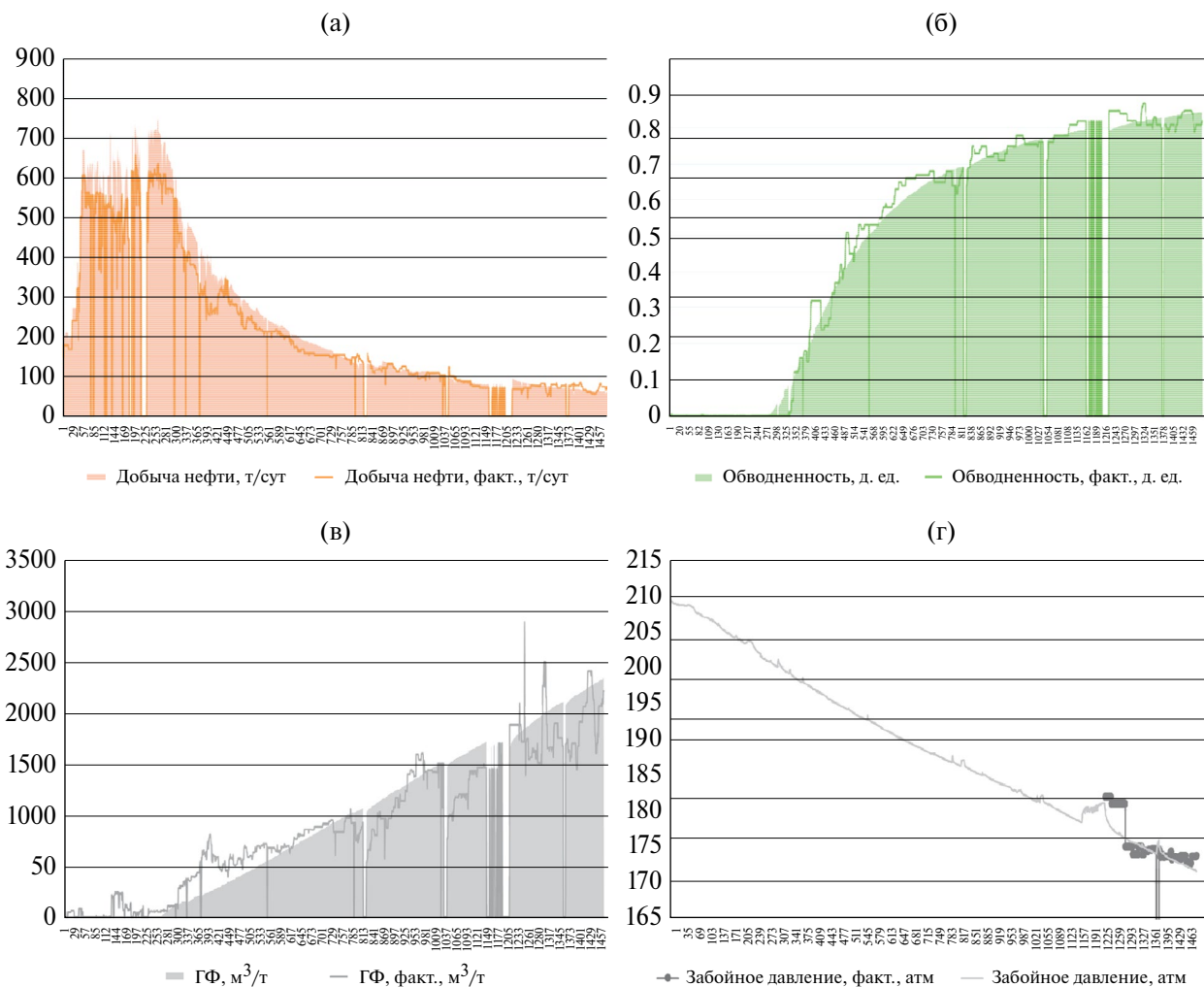


Рис. 2. Сопоставление расчетных и фактических показателей работы скважины: дебит нефти (а), обводненность (б), газовый фактор (в), забойное давление (г).

В представленных расчетах принято, что $r_{fg} = r_{fw}$. Зависимости, полученные на основе соотношений (4.3), помечены соответствующим значением $\omega = r_{fw}/h$. Кривые I рассчитаны с использованием (4.4) для случая притока газа и воды по всей поверхности контактов. В представленных расчетах увеличение β вдоль каждой кривой определяется расширением области конусообразования, также учитывается смещение контактов z_{owc} и z_{ogc} на границе околоскважинной зоны в ходе добычи. Сравнение результатов показывает, при низких значениях ω отмечается стабилизация зависимостей F_w и F_g от β , что соответствует слабой активности газовой шапки и подошвенной воды. При увеличении ω происходит более быстрый рост долей воды и газа в продукции скважины, и расчетные кривые оказываются ближе к зависимости 1, соответствующей наиболее активной подпитке околоскважинной зоны подошвенной водой и газом газовой шапки. Таким образом, варьируя параметры модели, можно легко воспроизвести фактическое поведение показателей работы скважин.

Сопряжение решения задачи в крупномасштабном приближении на удалении от скважины и соотношений (4.6), (4.7) дает возможность оценить изменение доли отдельных фаз в дебите скважины. Для примера рассматриваются показатели работы реальной скважины одной из карбонатных нефтяных залежей с газовой шапкой и подошвенной водой. На рис. 2 показаны результаты сопоставления расчетных и фактических значений дебитов отдельных фаз и забойного давления при меняющемся суммарном дебите флюидов. Обводненность характеризуется отношением объемного дебита воды к суммарному дебиту нефти и воды, газовый фактор — отношением объемного дебита газа к дебиту нефти. В качестве

исходных данных для проведения расчетов были взяты ежесуточные фактические показатели добычи и фильтрационно-емкостные свойства рассматриваемой залежи. Значения ряда управляющих параметров (например, величин r_{fg} и r_{fw}) были определены в ходе решения обратной задачи. Из рисунка видно, что на первом этапе работы скважины прорывы воды и газа практически отсутствуют. Затем обводненность и газовый фактор значительно увеличиваются, дебит нефти снижается. Близкие значения расчетных и фактических показателей иллюстрируют адекватность принятой модели и позволяют использовать ее для прогнозирования работы скважин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена модель притока нефти к трещине в пласте с обширной газовой шапкой и подстилающей водой в условиях гравитационной сегрегации флюидов. Показано, что в крупномасштабном приближении, когда нефтенасыщенная толщина много меньше характерного размера по латерали, справедлива модель гидростатического равновесия, в соответствии с которой изменения давления уравниваются изменением положения водонефтяного и газонефтяного контактов. Она применима на удалении от скважин. Показано, что для многих практически важных случаев в крупномасштабном приближении может использоваться модель бесконечно проводящей трещины, так как учет конечной проводимости несущественно влияет на результаты расчетов. Локальное рассмотрение течения вблизи стока позволило получить соотношения для долей воды и газа в добываемой продукции после прорыва конусов как при наличии подпитки водой или газом вблизи скважины, так и без нее. Использование их совместно с моделью крупномасштабного приближения позволяет описать приток как до, так и после прорыва конусов воды и газа. Результаты сопоставления расчетов с реальными данными подтверждают достоверность представленных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голф-Рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов. М.: Недра, 1986. 608 с.
2. Райсс Л. Основы разработки трещиноватых коллекторов. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2012 г. 118 с.
3. Смехов Е.М. Трещиноватые породы и их коллекторские свойства//Труды ВНИИГРИ. Вып. 121. Л.: Гостоптехиздат, 1958. 243 с.
4. Ромм Е.С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М.: Недра, 1966. 283 с.
5. Aziz K. Notes for petroleum reservoir simulation. Stanford University, Stanford, California. 1994. 471p.
6. Neale G., Nader W. Practical significance of brinkmans extension of darcys law – coupled parallel flows within a channel and a bounding porous-medium// Canadian Journal of Chemical Engineering, 1974. V. 52. P. 475–478.
7. Popov P., Efendiev Y., Qin G. Multiscale modelling and simulations of flows in naturally fractured karst reservoirs, Communications in computational physics, 2009. 22 pp.
8. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
9. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
10. Oda M. Permeability tensor for discontinuous rock masses // Geotechnique. 1985. V. 35(4). P. 483–495.
11. Заславский М.Ю. Об алгоритме осреднения для решения эллиптических задач с разрывными коэффициентами // ДАН. 2007. Т. 419. № 2. С. 197–200.
12. Заславский М.Ю., Томин П.Ю. О моделировании процессов многофазной фильтрации в трещиноватых средах в применении к задачам адаптации модели месторождения. Препринт № 45 М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. 20 с.
13. Durlofsky L.J. Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation, International Forum on Reservoir Simulation Iles Borromees, Stresa, Italy, 2005. 59 pp.
14. Пергамент А.Х., Томин П.Ю. Об исследовании функций относительных фазовых проницаемостей для анизотропных сред // Математическое моделирование. Т. 23. № 5. С. 3–15. 2011.
15. Томин П.Ю. Применение многомасштабных алгоритмов для решения задач многофазной фильтрации в анизотропных средах // Препринт ИПМ им. Келдыша. № 14. М., 2011.

16. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. // Прикл. матем. и мех. 1960. Т. 24. № 5. С. 852–864.
17. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации нефти и газа. — М.: Недра, 1972. 288 с.
18. Kazemi H., Merrill L.S. Jr., Porterfield K.L., Zeman P.R. Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // Soc. Pet. Eng. J. 1976. V. 16. № 6. P. 317–326.
doi: 10.2118/5719-PA
19. Arbogast T., Douglas J.Jr., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
doi: 10.1137/0521046
20. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
21. Черных В.А. Физические основы неклассической теории фильтрации нефти и газа: Учебное пособие СПб.: Санкт-Петербургский государственный горный институт, 2005. 57 с.
22. Динариев О.Ю. Кривая восстановления давления для фрактальной трещиноватой среды // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. С. 76–80.
23. Van Lingen P., Daniel J.-M., Cosentino L., Sengul M. Single Medium Simulation of Reservoirs with Conductive Faults and Fractures // paper SPE68165, 2001.
24. Karami-Fard M., Durlofsky L.J., Aziz K. An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators // Soc. Pet. Eng. J. 2004. V. 9. № 02. P. 227–236.
doi: 10.2118/88812-PA
25. Monteagudo J.E.P., Firoozabadi A. Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two- and three-dimensional discrete-fractured media // Water Resour. Res. 2004. V 40. P. W07405.
doi:10.1029/2003WR002996.
26. Блонский А.В., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Моделирование течений в дискретной системе трещин: физико-математическая модель. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 65. 28 с.
27. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. — М.: Гостоптехиздат, 1963. 346 с.
28. Каневская Р.Д. Асимптотический анализ влияния капиллярных и гравитационных сил на двумерный фильтрационный перенос двухфазных систем. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 4. С. 88–95.
29. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Москва-Ижевск: Изд-во Института компьютерных исследований, 2004. 640 с.
30. Эфрос Д.А. Исследования фильтрации неоднородных систем. Л.: Гостоптехиздат, 1963. 352 с.
31. Pietraru V. Méthode analytique généralisée pour le calcul du coning // Revue de l'IFP. 1996. V. 51. № 4. 527–558 pp.
32. Pietraru V., Cosentino L. A new analytical approach to water and gas coning for vertical and horizontal wells // Revue de l'IFP. 1993. V. 48. № 5. 501–513 pp.
33. Giger F.M. Analytic Two-Dimensional Models of Water Cresting Before Breakthrough for Horizontal Wells // SPE Reservoir Engineering. 1989. № 11. 409–416 pp.
34. Baginskaya O., Baishev E., Ershov T., Kanevskaya R., Kundin V. Multipay Field Development Using Horizontal Wells. // Proceedings. 12th European Symposium on Improved Oil Recovery — Kazan, Russia, 8–10 September 2003. IOR-1441.
35. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
36. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
37. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Институт компьютерных исследований, 2006. 488 с.
38. Economides M.J., Nolte K.G. Reservoir Stimulation. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632. 1989. 430 pp.

Asymptotic Analysis of the Inflow to a Fracture in an Oil-Gas Pool in Bottom Water

R. D. Kanevskaya*, P. V. Kuznetsov**, and L. L. Ryzhova***

Gubkin National University of Oil and Gas, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: pmkm@gubkin.ru*

***e-mail: ya.kuznetsov-pv@yandex.ru*

****e-mail: leilanyryzh@gmail.com*

A model of oil inflow to a bore in a fractured bed with a vast gas cap and an underlying water layer is presented in the conditions of gravity-induced segregation of fluids. Using an asymptotic analysis of the equations it was possible to simplify the description of the seepage process before and after the water and gas breakthrough into the bore and at a distance from it, as well as to estimate the possibility of waterless and gasless extraction in the conditions of the stabilization of phase fractions in the total yield. It is shown that the hydrostatic equilibrium model can be used in the large-scale approximation fairly far from the bore. It is noted that in most practical cases the finite-conductance effect of a fracture is negligible in the large-scale approximation, so that the model of an infinitely permeable fracture can be applied. The equations for determining gas and water fractions in the production after the breakthrough of the water and gas cones in the vicinity of the sink were derived on the flow scale. Finally, the coupling of the models presented makes it possible to describe adequately the inflow to the bore before and after the breakthrough of the water and gas cones. The plausibility of the models presented is confirmed by the comparison of the calculated results with the actual data.

Keywords: fractured beds, mathematical modeling, multiphase filtration, cone formation, multiscale modeling, asymptotic analysis.

УДК 532.59:539.3

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЛЕДЯНОМ ПОКРОВЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

© 2024 г. Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.01.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Исследуется дифракция плоских поверхностных и изгибно-гравитационных волн на кромке плавающей упругой полубесконечной пластины при нормальном набегающем течении в жидкости конечной глубины при наличии течения со сдвигом скорости. Построено явное аналитическое решение этой задачи методом Винера–Хопфа. Получены простые точные формулы для коэффициентов отражения и прохождения, энергетические соотношения. Приведены результаты численных расчетов по полученным формулам.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, поверхностные волны, изгибно-гравитационные волны, дифракция, сдвиговой поток.

DOI: 10.31857/S1024708424030139, **EDN:** PEVMAI

Задача о поведении на волнах плавающей упругой пластины, моделирующей ледяной покров, привлекает интерес исследователей в связи с освоением арктических районов с целью добычи полезных ископаемых, а также в связи с проектированием искусственных островов и плавающих платформ различного назначения. Задача гидроупругости плавающих упругих пластин является связанной: уравнения упругости и движения жидкости должны решаться одновременно. Для решения таких задач разработаны аналитические, полуаналитические, численные и экспериментальные методы исследований. В настоящее время существует множество работ по этой теме (обзоры [1–6]). Одно из направлений исследований по взаимодействию волн с ледяным покровом — задача дифракции волн на кромке ледяного покрова и линейных неоднородностях ледяного покрова: трещинах, торосах, полыньях и т.д. [7–43].

Из аналитических методов наиболее часто используется метод Винера–Хопфа (например, [7–19]). Ледяной покров обычно моделируется тонкой пластиной Кирхгофа–Лява, а в работах [12, 17] использовалась более сложная модель Миндлина–Тимошенко. Особенностью задачи является высокий порядок производной — пятый в краевом условии для уравнения Лапласа. Это приводит к тому, что решение зависит от констант, которые необходимо определить из условий в кромке. Коэффициенты системы имеют сложный вид, поэтому расчеты по полученным формулам проведены только в более поздних работах [12–19]. В [13, 14], отбросив малый член, характеризующий инерцию пластины, которая мала по сравнению с инерцией жидкости, для случаев нормального и косоного набегающего течения эту систему удалось точно обратить и получить решение в явном виде. Получены простые формулы для коэффициентов отражения и прохождения. В [15, 17] метод Винера–Хопфа применен к решению задачи о дифракции волн на упругой пластине конечной ширины — полуполосе. Получение решения сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В [20, 21] использован аналитический метод вычетов (residues calculus), также позволяющий получить решение в явном виде. В [22] рассмотрен случай бесконечной глубины жидкости. Краевая задача сведена к сингулярному уравнению типа Карлемана, затем к задаче Римана–Гильберта. Исследования в [18, 19] обобщают все предыдущие работы. В [18] двумя методами: Винера–Хопфа и вычетов решена задача о дифракции волн на пластине, состоящей из трех частей с различными характеристиками, в частности может быть свободная поверхность. В [19] в аналогичной постановке получены два связанных интегральных уравнения. Одно из них типа Винера–Хопфа решается аналитически, а второе численно. В [23] в случае более простой постановки, когда однородная пластина разделена трещиной,

путем разделения задачи на симметричную и антисимметричную части также получено решение в явном виде.

В работах [24–30] используется разложение потенциала скорости течения жидкости по собственным функциям с неизвестными коэффициентами в отдельных областях и склейка их различными способами, в основном интегральная склейка. В результате получается бесконечная система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов. В [30] введено неортогональное произведение собственных функций, с помощью которого построено решение. В [31, 32] для случая пластины конечной длины прогиб ее раскладывается по полной системе ортогональных функций, для каждой из которых решается гидродинамическая задача. Решение также сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [33] сформулировано вариационное уравнение, которое решалось методом Рэлея–Ритца. Использовался также метод сведения краевой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с помощью функции Грина [34] или к интегрально-дифференциальному уравнению [35, 36]. Методы граничных и конечных элементов применялись в работах [37–40]. Экспериментальные результаты и сравнение с теоретическими расчетами приведены в [41–43]. Существует также большое число исследований по усложнению моделей: нескольких пластин, переменной толщины, составных пластин с различными условиями закрепления, с учетом неровного дна, нескольких линейных неоднородностей, влияния сжатия и пористой структуры и т.д.

В большинстве этих работ жидкость в невозмущенном состоянии находится в покое или имеется течение с постоянной скоростью. Однако в действительности в морях и океанах наблюдаются течения, где скорость жидкости меняется с глубиной как по величине, так и по направлению. Поэтому необходимы исследования с учетом таких факторов. Только в одной из работ [10] рассматривалась дифракция волн на полубесконечном ледяном покрове при наличии течения с линейным сдвигом скорости. Решение строилось методом Винера–Хопфа, но оно не закончено, не было проведено расчетов. В настоящей работе эта задача решена также методом Винера–Хопфа, но другим способом. Решение получено в явном виде. Для коэффициентов отражения и прохождения получены простые точные формулы и энергетические соотношения, проведены расчеты.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается полубесконечный ледяной покров, плывущий на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H с линейным сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной постоянной толщины. Плоская волна малой амплитуды набегает под прямым углом к пластине, причем длина волны значительно больше толщины пластины. Схема течения изображена на рис. 1а. Осадкой пластины в воду будем пренебрегать, граничные условия сносятся на невозмущенную поверхность воды. Предполагается, что колебания малы, не происходит отрыва пластины от жидкости. Задача решается в линейной постановке.

Введем декартову систему координат Oxy , связанную с пластиной, с центром O в кромке пластины и осью y , направленной вертикально вверх (рис. 1б). Вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, t) = (U(y) + u, v), \quad U(y) = \gamma y$$

где γ – константа. Основное течение жидкости $U(y)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность, u, v – возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением.

Рассмотрим движение жидкости. Вектор скорости течения жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P / \rho - g\mathbf{i}_y, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad P = -\rho g y + p$$

Здесь d/dt – полная производная по времени, P – гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, $\mathbf{i}_y$ – единичный орт оси Oy . В работе [10] показано, что в плоском случае возмущенное течение жидкости на основном течении с линейным сдвигом скорости является потенциальным

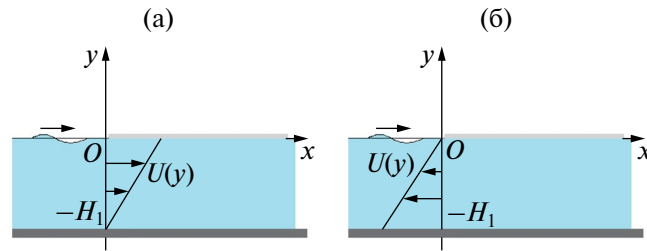


Рис. 1. Схема течения: (а) в неподвижной системе координат, (б) в системе координат, связанной с пластиной.

$$u = \partial\phi / \partial x, \quad v = \partial\phi / \partial y, \quad \Delta\phi = 0 \quad (1.1)$$

Уравнения движения жидкости имеют интеграл [10]

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] - \gamma\psi + \frac{p}{\rho} + gy = f(t) \quad (1.2)$$

где ψ – функция тока.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, -H, t) = 0 \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости кинематическое условие

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x, 0, t) = \frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (1.4)$$

где η – вертикальное смещение верхней границы жидкости.

На свободной поверхности жидкости полагаем $P = 0$, $f(t) = 0$, $U(0) = 0$. Из (1.2) в линейном приближении получаем уравнение

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \gamma\psi + g\eta = 0, \quad (-\infty < x < 0, y = 0) \quad (1.5)$$

Прогиб ледяного покрова $\eta(x, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа-Лява

$$D\partial^4\eta / \partial x^4 + \rho_0 h d^2\eta / dt^2 = -\rho g\eta + p(x, 0, t), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.6)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, E – модуль Юнга, ρ_0 , h – плотность и толщина льда, ν – коэффициент Пуассона. Из уравнений (1.2), (1.6) получаем динамическое условие на верхней границе жидкости под пластиной

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \gamma\psi + g\eta + \frac{D}{\rho} \frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} + \frac{\rho_0 h}{\rho} \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0, \quad (0 < x < \infty, y = 0) \quad (1.7)$$

В кромке пластины ставятся условия свободного края

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} = 0, \quad (x = 0, y = 0) \quad (1.8)$$

В задаче дифракции периодических волн все функции зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$. Кроме того, должны выполняться условия излучения при $|x| \rightarrow \infty$ и условие регулярности решения вблизи кромки (локальная ограниченность энергии).

2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', H') = (x, y, H) / L, \quad t' = t \sqrt{g / L}, \quad L = \left(\frac{D}{\rho g} \right)^{1/4}$$

$$S = \gamma \sqrt{L / g}, \quad \delta = \frac{\rho_0 h}{\rho L}, \quad \lambda = \omega \sqrt{L / g}$$

$$U' = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \quad (u', v') = \frac{(u, v)}{A \sqrt{g / L}}, \quad (\phi', \psi') = \frac{(\phi, \psi)}{A \sqrt{gL}}, \quad \eta' = \frac{\eta}{A}, \quad p' = \frac{p}{\rho g A}$$

где A — характерная амплитуда волн. Штрихи далее опускаем. Среди всех безразмерных параметров задачи параметр δ , который характеризует инерцию пластины, является малым и несущественным, инерция пластины мала по сравнению с инерцией жидкости. Для упрощения выражений можно положить его равным нулю, $\delta = 0$. Основными параметрами в этой задаче являются безразмерные частота λ и глубина жидкости H , параметр сдвига S .

Граничные условия на верхней границе жидкости после дифференцирования (1.5), (1.7) по времени принимают вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (-\infty < x < 0, y = 0). \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (0 < x < \infty, y = 0) \quad (2.2)$$

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим решения уравнения Лапласа в виде периодических плоских волн

$$\phi = C e^{i(\alpha x - \lambda t)} \frac{\text{ch} \alpha(y + H)}{\text{ch} \alpha H}, \quad \psi = i C e^{i(\alpha x - \lambda t)} \frac{\text{sh} \alpha(y + H)}{\text{ch} \alpha H}$$

Тогда из уравнений (2.1), (2.2) получаем дисперсионные соотношения для волн на свободной поверхности жидкости и под пластиной в виде

$$K_1(\alpha) = \alpha \text{th} \alpha H - \lambda S \text{th} \alpha H - \lambda^2 = 0 \quad (3.1)$$

$$K_2(\alpha) = (\alpha^4 + 1) \alpha \text{th} \alpha H - \lambda S \text{th} \alpha H - \lambda^2 = 0 \quad (3.2)$$

Графики зависимости безразмерной частоты λ от волнового числа α приведены на рис. 2 для поверхностных волн (а) и для изгибно-гравитационных волн (б) при различных значениях параметра сдвига S для пластины толщиной $h = 1$ м, остальные значения входных параметров приведены в разделе 7. Видно, что с увеличением параметра S симметрия нарушается все сильнее. Поскольку уравнения (3.1) и (3.2) являются квадратными относительно λ , то существуют два решения, отличающиеся знаком. Верхние ветви соответствуют знаку плюс перед корнем в решении квадратного уравнения, а нижние — знаку минус.

Уравнение (3.1) имеет два действительных корня: $k_0^- < 0$, $k_0^+ > 0$ и счетное множество комплексных корней k_j^+ , $j = 1, 2, \dots$ в верхней полуплоскости. Сопряженные значения $k_j^- = \bar{k}_j$, $j = 1, 2, \dots$ являются

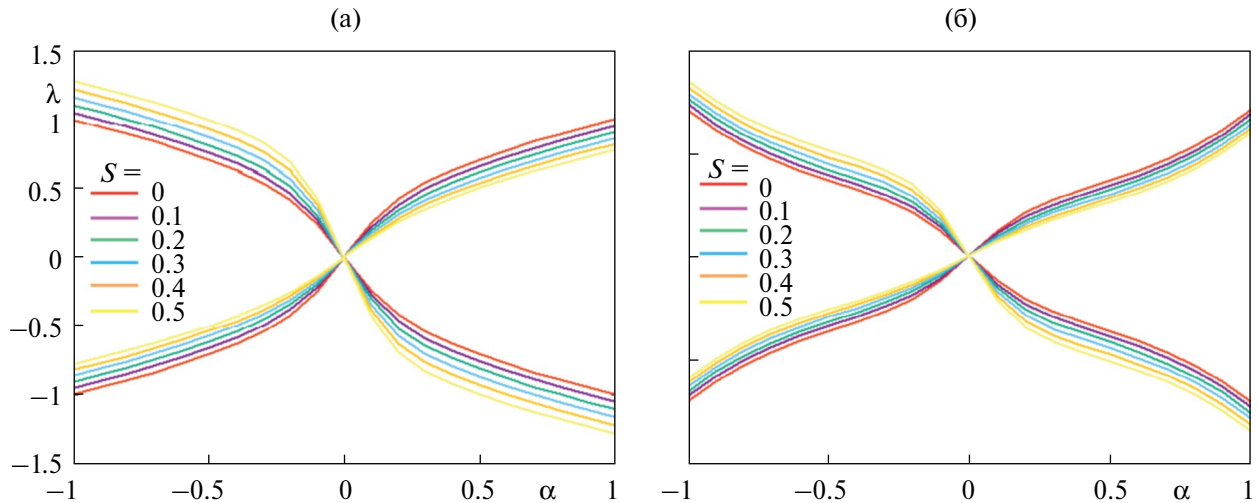


Рис. 2. Зависимости безразмерной частоты λ от волнового числа α при различных параметрах сдвига S (а) для поверхностных волн, (б) для изгибно-гравитационных волн.

корнями в нижней полуплоскости. Аналогично уравнение (3.2) имеет два действительных корня: $\alpha_0^- < 0$, $\alpha_0^+ > 0$ и счетное множество комплексных корней α_j^+ , $j = 1, 2, \dots$ в верхней полуплоскости, сопряженные значения $\alpha_j^- = \bar{\alpha}_j$, $j = 1, 2, \dots$ являются корнями в нижней полуплоскости. Действительные корни дисперсионных соотношений определяют распространяющиеся волны, остальные корни определяют краевые волны, экспоненциально затухающие вдали от кромки пластины.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Представим потенциал ϕ в виде

$$\phi(x, y, t) = (\phi_0(x, y) + \phi_1(x, y))e^{-i\lambda t}, \quad \phi_0(x, y) = e^{ikx} \operatorname{ch} k(y + H) / \operatorname{ch} kH, \quad k = k_0^+$$

где ϕ_0 — потенциал падающей волны, ϕ_1 — дифрагированный потенциал. Функция $\phi_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и следующим граничным условиям, полученным из уравнений (1.3)–(2.2):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, -H, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S \psi_1 - \lambda^2 \phi_1 = 0, \quad (-\infty < x < 0, y = 0) \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S \psi_1 - \lambda^2 \phi_1 = B e^{ikx}, \quad (0 < x < \infty, y = 0), \quad B = -k^5 \operatorname{th} kH \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (x = 0, y = 0) \quad (4.4)$$

Решение задачи будем строить методом Винера–Хопфа аналогично тому, как изложено в [13], но с некоторыми изменениями. Введем в рассмотрение функции комплексной переменной α

$$\Phi_-(\alpha, y) = \int_0^\infty e^{-i\alpha x} \phi_1(x, y) dx, \quad \Phi_+(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 e^{-i\alpha x} \phi_1(x, y) dx \quad (4.5)$$

$$\Phi(\alpha, y) = \Phi_-(\alpha, y) + \Phi_+(\alpha, y)$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ определена в верхней полуплоскости $\text{Im}\alpha > 0$, а функция $\Phi_-(\alpha, y)$ – в нижней полуплоскости $\text{Im}\alpha < 0$ [44]. С помощью аналитического продолжения эти функции можно определить во всей комплексной плоскости. Функция $\Phi(\alpha, y)$ представляет собой образ Фурье для функции $\phi_1(x, y)$ и удовлетворяет уравнению

$$\partial^2 \Phi / \partial y^2 - \alpha^2 \Phi = 0$$

Общее решение этого уравнения с условием (4.1) на дне имеет вид

$$\Phi(\alpha, y) = C(\alpha)Y(\alpha, y), \quad Y(\alpha, y) = \text{ch}\alpha(y + H) / \text{ch}\alpha H \quad (4.6)$$

Исследуем поведение функций $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. При $x \rightarrow -\infty$ дифрагированный потенциал представляет собой отраженную волну вида $Re^{ik_0^- x} Y(k_0^-, y)$ и множество экспоненциально затухающих волн. Наименее затухающая волна соответствует корню k_1^+ с наименьшей мнимой частью. Поэтому $\Phi_+(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im}\alpha > -\text{Im}k_1^+$, за исключением полюса при $\alpha = k_0^-$. При $x \rightarrow \infty$ потенциал ϕ_1 представляет собой проходящую волну с волновым числом α_0^+ , волну с волновым числом k , компенсирующую ϕ_0 , и множество экспоненциально затухающих мод. Поэтому функция $\Phi_-(\alpha, y)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im}\alpha < \text{Im}\alpha_1^+$, за исключением полюсов в точках $\alpha = \alpha_0^+$ и $\alpha = k$.

Обозначим через $D_{\pm}(\alpha)$ интегралы типа (4.5), где функция ϕ_1 под интегралом заменяется левой частью краевого условия (4.2), а через $F_{\pm}(\alpha)$ – аналогичные выражения, в которых в качестве подынтегральной функции берется левая часть выражения (4.3). Эти интегралы представляют собой преобразование Фурье обобщенных функций [45]. Для них выполняются соотношения

$$D_-(\alpha) + D_+(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F_-(\alpha) + F_+(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha) \quad (4.7)$$

Из краевых условий (4.2), (4.3) имеем

$$D_+(\alpha) = 0, \quad F_-(\alpha) = \frac{B}{i(\alpha - k)}$$

Тогда

$$D_-(\alpha) = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)} = C(\alpha)K_2(\alpha)$$

Исключая функцию $C(\alpha)$, получаем уравнение

$$D_-(\alpha) = K(\alpha)(F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)}), \quad K(\alpha) = \frac{K_1(\alpha)}{K_2(\alpha)} \quad (4.8)$$

Факторизуем функцию $K(\alpha)$

$$K(\alpha) = K_-(\alpha)K_+(\alpha) \quad (4.9)$$

где функции $K_{\pm}(\alpha)$ регулярны в тех же областях, что и функции $\Phi_{\pm}(\alpha, y)$. Функция $K(\alpha)$ имеет соответственно нули и полюса на действительной оси в точках $k = k_0^+$, k_0^- , α_0^- и α_0^+ . Поэтому будем рассматривать области аналитичности Π_+ и Π_- , Π_+ – полуплоскость $\text{Im}\alpha > -c$ с разрезами, исключающими точки α_0^- и k_0^- , Π_- – полуплоскость $\text{Im}\alpha < c$ с разрезами, исключающими точки k_0^+ и α_0^+ (рис. 3), $c = \min\{\text{Im}k_1^+, \text{Im}\alpha_1^+\}$.

Введем функцию

$$g(\alpha) = \frac{K(\alpha)(\alpha - \alpha_0^+)(\alpha - \alpha_0^-)(\alpha^4 + 1)}{(\alpha - k_0^+)(\alpha - k_0^-)}$$

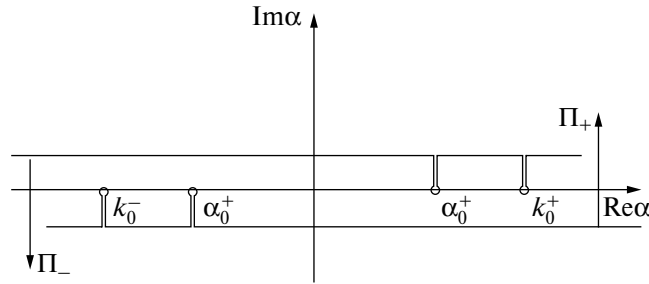


Рис. 3. Области $\Pi_{\pm}$ аналитичности функций $\Phi_{\pm}$.

Функция $g(\alpha)$ не имеет нулей на действительной оси, ограничена и стремится на бесконечности к единице. Факторизуем $g(\alpha)$ следующим образом [44]

$$g(\alpha) = g_-(\alpha)g_+(\alpha), \quad g_{\pm}(\alpha) = \exp\left[\pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty \mp id}^{\infty \mp id} \frac{\ln g(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta\right], \quad d < c \quad (4.10)$$

Функции $K_{\pm}(\alpha)$ определяются выражениями

$$K_+(\alpha) = \frac{g_+(\alpha)(\alpha - k_0^-)}{(\alpha - \alpha_0^-)(\alpha - e^{i5\pi/4})(\alpha - e^{i7\pi/4})} \quad (4.11)$$

$$K_-(\alpha) = \frac{g_-(\alpha)(\alpha - k_0^+)}{(\alpha - \alpha_0^+)(\alpha - e^{i\pi/4})(\alpha - e^{i3\pi/4})}$$

Уравнение (4.8) запишем в виде

$$K_+(\alpha)(F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)}) = \frac{D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}$$

Преобразуем его следующим образом

$$K_+(\alpha)F_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - k)}(K_+(\alpha) - K_+(k)) = \frac{D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{BK_+(k)}{i(\alpha - k)}$$

В левой части этого равенства имеем функцию, аналитическую в области Π_+ , а в правой – функцию, аналитическую в Π_- . Их аналитическим продолжением можно определить функцию, аналитическую во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувилля эта функция является полиномом. Степень полинома определяется поведением функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Из условия локальной ограниченности энергии следует, что вблизи кромки пластины скорости имеют особенность не выше $O(r^{-\epsilon})$ ($\epsilon < 1$, r – расстояние до кромки пластины). Тогда функция $F_+(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ имеет порядок не выше $O(|\alpha|^{\epsilon+3})$, а $D_-(\alpha)$ – не выше $O(|\alpha|^{\epsilon-1})$ [45]. Функции $K_{\pm}(\alpha)$ имеют на бесконечности порядок $O(|\alpha|^{-2})$, так как $g_{\pm}(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Следовательно, степень полинома равна единице и

$$\frac{D_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{BK_+(k)}{i(\alpha - k)} = \frac{BK_+(k)}{i}(a + b\alpha)$$

где a и b – неизвестные константы, которые будем определять из условий (4.4).

Выражая из последнего уравнения $D_-(\alpha)$, с учетом (4.6)–(4.8) находим

$$\phi_1(x, y) = \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{K_-(\alpha) \operatorname{ch} \alpha(y + H)}{K_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha H} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - k}\right) d\alpha \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = e^{ikx} k \operatorname{th} k H + \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{K_-(\alpha) \alpha \operatorname{th} \alpha H}{K_1(\alpha)} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - k}\right) d\alpha \quad (4.13)$$

Контур интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы он полностью лежал в пересечении областей Π_+ и Π_- . Можно выбрать контур интегрирования на действительной оси, обходя точки α_0^+ и k_0^+ снизу, а точки α_0^- и k_0^- сверху.

Рассмотрим случай $x > 0$. Используя (4.9), выражение (4.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = e^{ikx} k \operatorname{th} k H + \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{\alpha \operatorname{th} \alpha H}{K_+(\alpha) K_2(\alpha)} \left(a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - k}\right) d\alpha$$

Интеграл вычисляем методом вычетов. Замыкаем контур интегрирования в верхней полуплоскости и получаем полюса в точках k , α_0^+ , α_j^+ , $j = 1, 2, \dots$. Вычет в точке k компенсируется набегающей волной.

Получаем выражение

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = BK_+(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_j^+ x} \alpha_j^+ \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)} \left(a + b\alpha_j^+ + \frac{1}{\alpha_j^+ - k}\right)$$

Подставляя данное выражение в краевые условия (4.4), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Коэффициенты матрицы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^3 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)}, \quad A_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^4 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)} \\ A_{21} &= A_{12}, \quad A_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^5 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+)} \\ C_1 &= - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^3 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)}, \quad C_2 = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^4 \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)} \end{aligned}$$

Систему (4.14) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} -kG_3 + G_4 & -kG_4 + G_5 \\ -kG_4 + G_5 & -kG_5 + G_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_3 \\ -G_4 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$G_m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^m \operatorname{th} \alpha_j^+ H}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)}$$

Покажем, что суммы G_5 и G_6 равны нулю. Тогда полученную систему можно точно обратить. Используя подстановку $(\alpha_j^+)^5 \operatorname{th} \alpha_j^+ H = -K_1(\alpha_j^+)$ и заменяя ряд интегралом, получаем при $m \geq 5$

$$G_m = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha_j^+)^{m-5} K_1(\alpha_j^+)}{K_+(\alpha_j^+) K_2'(\alpha_j^+) (\alpha_j^+ - k)} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{m-5} K_1(\alpha) d\alpha}{K_+(\alpha) K_2(\alpha) (\alpha - k)} +$$

$$+ k^{m-5} K_-(k) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{m-5} K_-(\alpha) d\alpha}{\alpha - k} + k^{m-5} K_-(k) = 0$$

т.к. $K_-(k) = 0$. Из второго уравнения системы (4.15) находим $a = 1/k$, а из первого уравнения определяем $b = 1/k^2$.

Подставляя значения коэффициентов a и b в (4.12), получим

$$\phi_1(x, y) = \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{\alpha^2 K_-(\alpha) \operatorname{ch}\alpha(y+H)}{k^2(\alpha-k) K_1(\alpha) \operatorname{ch}\alpha H} d\alpha =$$

$$= \frac{BK_+(k)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{\alpha^2 \operatorname{ch}\alpha(y+H) d\alpha}{k^2(\alpha-k) K_+(\alpha) K_2(\alpha) \operatorname{ch}\alpha H}$$

Теперь можно найти отраженную волну и прошедшую. При $|x| \rightarrow \infty$ потенциал имеет вид $\phi_1(x, 0) = \operatorname{Re} e^{ik_0 x}$, $x \rightarrow -\infty$, $\phi(x, 0) = \operatorname{Te} e^{i\alpha_0^+ x}$, $x \rightarrow \infty$. Для R и T получим следующие выражения:

$$R = (k_0^-)^2 k^3 \operatorname{th} k H \frac{K_+(k) K_-(k_0^-)}{(k_0^- - k) K_1'(k_0^-)}, \quad T = \frac{(\alpha_0^+)^2 k^3 \operatorname{th} k H K_+(k)}{(k - \alpha_0^+) K_+(\alpha_0^+) K_2'(\alpha_0^+)}$$

Найдем амплитуды потенциала скорости отраженных и проходящих волн $|R|$ и $|T|$. Интеграл в формуле (4.10) можно снести на действительную ось [44]. В результате получим

$$|g_+(k)| = \sqrt{g(k)} = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - \alpha_0^+)(k - \alpha_0^-)(k^4 + 1)}{K_2(k)(k - k_0^-)}}$$

$$|g_+(k_0^-)| = \sqrt{g(k_0^-)} = \sqrt{\frac{K_1'(k_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-)(k_0^- - \alpha_0^-)((k_0^-)^4 + 1)}{K_2(k_0^-)(k - k_0^-)}}$$

Подставляем эти выражения в формулы (4.11) и находим

$$|K_+(k)| = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - k_0^-)(k - \alpha_0^+)}{(k - \alpha_0^-) K_2(k)}}, \quad |K_-(k_0^-)| = \sqrt{\frac{K_1'(k_0^-)(k - k_0^-)(k_0^- - \alpha_0^-)}{(\alpha_0^+ - k_0^-) K_2(k_0^-)}}$$

$$|R| = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - \alpha_0^+)(k_0^- - \alpha_0^-) k \operatorname{th} k H}{K_1'(k_0^-)(k - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-) k_0^- \operatorname{th} k_0^- H}}$$

$$|K_+(\alpha_0^+)| = \sqrt{\frac{K_1(\alpha_0^+)(\alpha_0^+ - k_0^-)}{K_2'(\alpha_0^+)(\alpha_0^+ - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k)}}$$

$$|T| = \sqrt{\frac{K_1'(k)(k - k_0^-)(\alpha_0^+ - \alpha_0^-) k \operatorname{th} k H}{K_2'(\alpha_0^+)(k - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-) \alpha_0^+ \operatorname{th} \alpha_0^+ H}}$$

При $S = 0$ формулы для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн совпадают с теми формулами, которые получены ранее [8, 12, 13] в отсутствие течения ($k_0^- = -k$, $\alpha_0^- = -\alpha_0^+$).

Коэффициенты отражения R^* и прохождения T^* определяются как отношения амплитуд возвышения верхней границы жидкости к соответствующей амплитуде в набегающей волне

$$R^* = \frac{|R| k_0^- \operatorname{th} k_0^- H}{k_0^+ \operatorname{th} k_0^+ H}, \quad T^* = \frac{|T| \alpha_0^+ \operatorname{th} \alpha_0^+ H}{k_0^+ \operatorname{th} k_0^+ H}$$

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ СООТНОШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В [8] получено точное энергетическое соотношение между амплитудами $|R|$ и $|T|$ в отсутствие течения. Аналогичным образом можно получить энергетическое соотношение при наличии течения с линейным сдвигом. Используем формулу Грина для аналитических функций

$$\int_{-H-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} (\phi \Delta \bar{\phi} - \bar{\phi} \Delta \phi) dx dy = \int_C \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds = 0$$

где n – внешняя нормаль, контур C ограничивает объем жидкости. Из последнего соотношения следует,

$$\operatorname{Im} \int_C \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} ds = 0 \quad (5.1)$$

поскольку вычитаются комплексно-сопряженные величины. Интеграл по дну обращается в нуль, поэтому (5.1) можно записать в виде

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx + \operatorname{Im} \int_{-H}^0 \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) \Big|_{x \rightarrow \infty} dy - \operatorname{Im} \int_{-H}^0 \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) \Big|_{x \rightarrow -\infty} dy = 0 \quad (5.2)$$

Первый интеграл в (5.2) перепишем следующим образом

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = \frac{1}{\lambda^2} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx + \operatorname{Im} \frac{iS}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx \quad (5.3)$$

поскольку

$$\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = 0$$

Применяем интегрирование по частям к первому интегралу в правой части (5.3)

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{\infty} - \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{\infty}$$

Остальные члены обращаются в нуль из-за граничного условия на кромке или являются действительными.

При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\phi \rightarrow T e^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{ch} \alpha_0^+ (y+H)}{\operatorname{ch} \alpha_0^+ H}, \quad \psi \rightarrow iT e^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{sh} \alpha_0^+ (y+H)}{\operatorname{ch} \alpha_0^+ H}$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi \rightarrow I e^{ik_0^+ x} \frac{\operatorname{ch} k_0^+ (y+H)}{\operatorname{ch} k_0^+ H} + R e^{ik_0^- x} \frac{\operatorname{ch} k_0^- (y+H)}{\operatorname{ch} k_0^- H}$$

$$\psi \rightarrow iI e^{ik_0^+ x} \frac{\text{sh} k_0^+ (y+H)}{\text{ch} k_0^+ H} + iR e^{ik_0^- x} \frac{\text{sh} k_0^- (y+H)}{\text{ch} k_0^- H}$$

Поэтому

$$\text{Im} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dx = -2 \text{Im} i \frac{|T|^2}{\lambda^2} (\alpha_0^+)^5 \text{th}^2 \alpha_0^+ H$$

Второй интеграл в (5.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \text{Im} \frac{iS}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty \psi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} dy &= \text{Im} \frac{iS}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty \psi \left(-\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right) dx = -\text{Im} \frac{iS}{2\lambda} |\psi|^2|_{-\infty}^\infty = \frac{S}{2\lambda} [-|T|^2 \text{th}^2 \alpha_0^+ H + \\ &+ |I|^2 \text{th}^2 k_0^+ H + |R|^2 \text{th}^2 k_0^- H + (R\bar{I} e^{i(k_0^- - k_0^+)x} + \bar{R}I e^{i(k_0^+ - k_0^-)x}) \text{th} k_0^+ H \text{th} k_0^- H] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Далее вычисляем интеграл по y при $x \rightarrow \infty$

$$\text{Im} \int_{-H}^0 \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) \Big|_{x \rightarrow \infty} dy = -\text{Im} \frac{i|T|^2}{2} \left(\text{th} \alpha_0^+ H + \frac{\alpha_0^+ H}{\text{ch}^2 \alpha_0^+ H} \right)$$

Интеграл по y при $x \rightarrow -\infty$ принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Im} \int_{-H}^0 \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) \Big|_{x \rightarrow -\infty} dy &= \text{Im} \frac{i|I|^2}{2} \left(\text{th} k_0^+ H + \frac{k_0^+ H}{\text{ch}^2 k_0^+ H} \right) + \text{Im} \frac{i|R|^2}{2} \left(\text{th} k_0^- H + \frac{k_0^- H}{\text{ch}^2 k_0^- H} \right) + \\ &+ \text{Im} i \frac{\bar{R}\bar{k}_0^- e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}Rk_0^+ e^{i(k_0^- - k_0^+)x}}{2\text{ch} k_0^- H \text{ch} k_0^+ H} \left[\frac{\text{sh}(k_0^- + k_0^+)H}{k_0^- + k_0^+} + \frac{\text{sh}(k_0^+ - k_0^-)H}{k_0^+ - k_0^-} \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Выпишем все члены при $x \rightarrow \infty$

$$-\frac{|T|^2}{2} \left(\frac{4(\alpha_0^+)^5 \text{th} \alpha_0^+ H + \lambda S \text{th} \alpha_0^+ H}{((\alpha_0^+)^4 + 1)\alpha_0^+ - \lambda S} + \text{th} \alpha_0^+ H + \frac{\alpha_0^+ H}{\text{ch}^2 \alpha_0^+ H} \right) = -\frac{|T|^2}{2\lambda^2} K_2'(\alpha_0^+) \alpha_0^+ \text{th} \alpha_0^+ H$$

Преобразуем третий член в (5.5). Обозначим $k_0^* = (k_0^- + k_0^+) / 2$, $\Delta_k = (k_0^+ - k_0^-) / 2$. Тогда $k_0^- = k_0^* - \Delta_k$, $k_0^+ = k_0^* + \Delta_k$,

$$\begin{aligned} &\text{Im} i (\bar{I}\bar{R}(k_0^* - \Delta_k) e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}R(k_0^* + \Delta_k) e^{i(k_0^- - k_0^+)x}) = \\ &= \text{Im} i k_0^* (\bar{I}\bar{R} e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}R e^{i(k_0^- - k_0^+)x}) + \text{Im} i \Delta_k (\bar{I}\bar{R} e^{i(k_0^- - k_0^+)x} - \bar{I}R e^{i(k_0^+ - k_0^-)x}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Второй член в правой части (5.6) обращается в нуль, поскольку это вещественное выражение. Сложим перекрестные члены в выражениях (5.4), (5.5) с учетом (5.6). Используя подстановки

$$k_0^+ - \lambda S = \lambda^2 \text{cth} k_0^+ H, \quad k_0^- - \lambda S = \lambda^2 \text{cth} k_0^- H, \quad k_0^+ - k_0^- = \lambda^2 (\text{cth} k_0^+ H - \text{cth} k_0^- H)$$

можно показать, что перекрестные члены обращаются в нуль

$$(k_0^+ + k_0^-) \frac{\bar{I}\bar{R} e^{i(k_0^+ - k_0^-)x} + \bar{I}R e^{i(k_0^- - k_0^+)x}}{4\text{ch} k_0^- H \text{ch} k_0^+ H} \left(\frac{\text{sh}(k_0^+ + k_0^-)H}{k_0^+ + k_0^-} + \frac{\text{sh}(k_0^+ - k_0^-)H}{k_0^+ - k_0^-} \right) +$$

$$+\frac{S}{2\lambda}(R\bar{I}e^{i(k_0^- - k_0^+)x} + \bar{R}Ie^{i(k_0^+ - k_0^-)x})\text{th}k_0^+H\text{th}k_0^-H = 0$$

Сложим все члены при $x \rightarrow -\infty$. Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{|I|^2}{2}(\text{th}k_0^+H + \frac{k_0^+H}{\text{ch}^2k_0^+H}) + \frac{|R|^2}{2}(\text{th}k_0^-H + \frac{k_0^-H}{\text{ch}^2k_0^-H}) + \\ & + \frac{S}{2\lambda}(|I|^2\text{th}^2k_0^+H + |R|^2\text{th}^2k_0^-H) = \frac{|I|^2K_1'(k_0^+)k_0^+\text{th}k_0^+H}{2\lambda^2} + \frac{|R|^2K_1'(k_0^-)k_0^-\text{th}k_0^-H}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

Окончательно находим энергетическое соотношение между амплитудами потенциала ϕ на бесконечности

$$|I|^2K_1'(k_0^+)k_0^+\text{th}k_0^+H + |R|^2K_1'(k_0^-)k_0^-\text{th}k_0^-H - |T|^2K_2'(\alpha_0^+)\alpha_0^+\text{th}\alpha_0^+H = 0$$

Легко убедиться, что полученные выражения для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн точно удовлетворяют этому соотношению.

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Аналогичным образом, как в разделах 4, 5, можно получить решение задачи о дифракции изгибно-гравитационных волн. Представим потенциал ϕ в виде

$$\phi(x, y, t) = (\phi_0(x, y) + \phi_1(x, y))e^{-i\lambda t}, \quad \phi_0(x, y) = e^{i\alpha_0^-x} \text{ch}\alpha_0^-(y + H) / \text{ch}\alpha_0^-H$$

где ϕ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа и краевым условиям:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S\psi_1 - \lambda^2\phi_1 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \phi_0}{\partial y}, \quad (-\infty < x < 0, y = 0). \quad (6.1)$$

$$(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 1)\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + i\lambda S\psi_1 - \lambda^2\phi_1 = 0, \quad (0 < x < \infty, y = 0) \quad (6.2)$$

а также (4.1), (4.4).

Из краевых условий (6.1), (6.2) для функций $D_{\pm}$, $F_{\pm}$ получаем соотношения

$$F_-(\alpha) = 0, \quad F_+(\alpha) = C(\alpha)K_2(\alpha), \quad D_+(\alpha) = -\frac{(\alpha_0^-)^5\text{th}\alpha_0^-H}{i(\alpha - \alpha_0^-)}$$

$$D_-(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - \alpha_0^-)} = C(\alpha)K_1(\alpha), \quad B = -(\alpha_0^-)^5\text{th}\alpha_0^-H$$

Исключая $C(\alpha)$, выписываем уравнение

$$K(\alpha)(D_-(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha - \alpha_0^-)}) = F_+(\alpha), \quad K(\alpha) = \frac{K_2(\alpha)}{K_1(\alpha)} = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$$

Преобразуем это уравнение после факторизации функции $K(\alpha)$

$$K_-(\alpha)D_-(\alpha) + \frac{B[K_-(\alpha) - K_-(\alpha_0^-)]}{i(\alpha - \alpha_0^-)} = \frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{i(\alpha - \alpha_0^-)} \quad (6.3)$$

Левая часть уравнения (6.3) аналитична в нижней полуплоскости, а правая часть — в верхней полуплоскости. Следовательно

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{i(\alpha - \alpha_0^-)} = \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{i}(a + b\alpha)$$

$$\phi_1(x, y) = \frac{BK_-(\alpha_0^-)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{K_+(\alpha) \operatorname{ch}\alpha(y+H)}{K_2(\alpha) \operatorname{ch}\alpha H} (a + b\alpha + \frac{1}{\alpha - \alpha_0^-}) d\alpha \quad (6.4)$$

Подставляем выражение для потенциала ϕ в граничные условия (4.4) и находим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a и b . Решаем систему аналогично тому, как в разделе 4, и получаем

$$a = 1 / \alpha_0^-, \quad b = 1 / (\alpha_0^-)^2$$

На бесконечности потенциал скорости возмущенного течения жидкости имеет вид: при $x \rightarrow \infty$

$$\phi \rightarrow I e^{i\alpha_0^- x} \frac{\operatorname{ch}\alpha_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^- H} + R e^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{ch}\alpha_0^+(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^+ H}$$

$$\psi \rightarrow i(I e^{i\alpha_0^- x} \frac{\operatorname{sh}\alpha_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^- H} + R e^{i\alpha_0^+ x} \frac{\operatorname{sh}\alpha_0^+(y+H)}{\operatorname{ch}\alpha_0^+ H})$$

при $x \rightarrow -\infty$

$$\phi \rightarrow T e^{ik_0^- x} \frac{\operatorname{ch}k_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}k_0^- H}, \quad \psi \rightarrow iT e^{ik_0^- x} \frac{\operatorname{sh}k_0^-(y+H)}{\operatorname{ch}k_0^- H}$$

Для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн находим выражения

$$|R| = \sqrt{\frac{K_2'(\alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^+)(\alpha_0^- - k_0^-)\alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}{K_2'(\alpha_0^+)(\alpha_0^+ - k_0^-)(k_0^+ - \alpha_0^-)\alpha_0^+ \operatorname{th}\alpha_0^+ H}}$$

$$|T| = \sqrt{\frac{K_2'(\alpha_0^-)(\alpha_0^+ - \alpha_0^-)(k_0^+ - k_0^-)\alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}{K_1'(k_0^-)(k_0^+ - \alpha_0^-)(\alpha_0^+ - k_0^-)k_0^- \operatorname{th}k_0^- H}}$$

Энергетическое соотношение для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн получается в виде

$$|I|^2 K_2'(\alpha_0^-)\alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H + |R|^2 K_2'(\alpha_0^+)\alpha_0^+ \operatorname{th}\alpha_0^+ H - |T|^2 K_1'(k_0^-)k_0^- \operatorname{th}k_0^- H = 0$$

Легко убедиться, что полученные выражения для амплитуд потенциала отраженных и проходящих волн точно удовлетворяют этому соотношению. Коэффициенты отражения R^* и прохождения T^* определяются в этом случае формулами

$$R^* = \frac{|R| \alpha_0^+ \operatorname{th}\alpha_0^+ H}{|I| \alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}, \quad T^* = \frac{|T| k_0^- \operatorname{th}k_0^- H}{|I| \alpha_0^- \operatorname{th}\alpha_0^- H}$$

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводились для морского льда при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $v = 0.3$, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 100$ м.

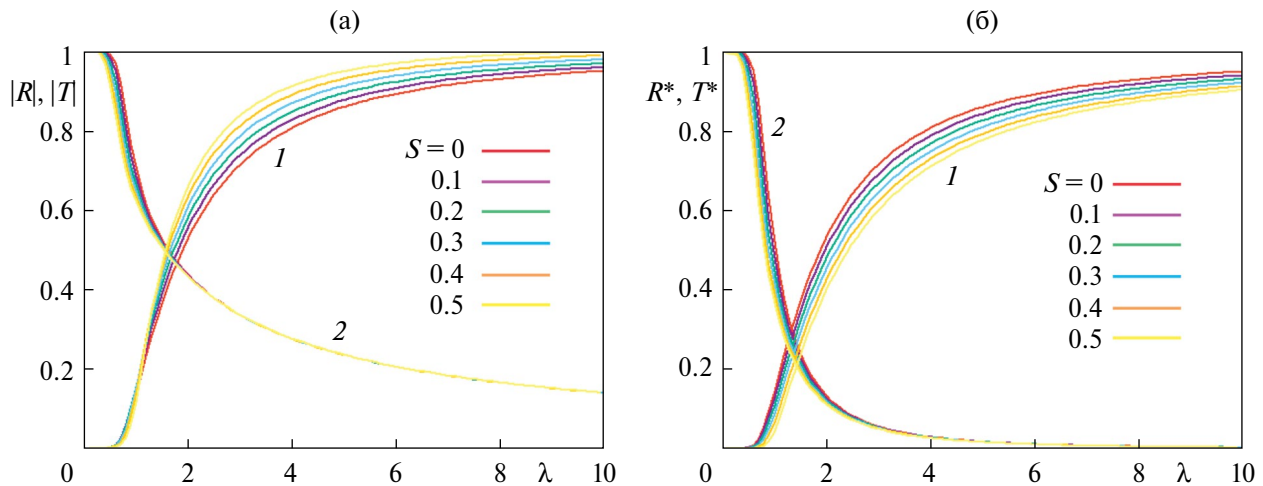


Рис. 4. Амплитуды потенциала скорости на бесконечности $|R|$ и $|T|$ (а, кривые 1, 2) и коэффициенты отражения и прохождения (б, кривые 1, 2) в случае набегающих поверхностных волн для различных значений параметра сдвига S .

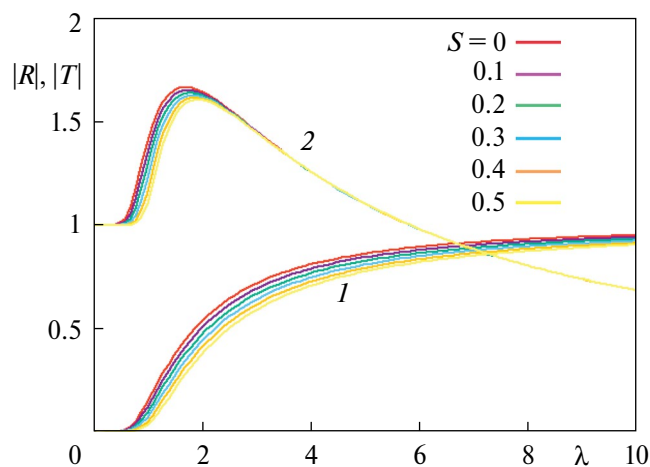


Рис. 5. Амплитуды потенциала скорости на бесконечности $|R|$ и $|T|$ (кривые 1, 2) в случае набегающих изгибно-гравитационных волн для различных значений параметра сдвига S .

На рис. 4 изображены зависимости от безразмерной частоты λ амплитуд потенциала скорости на бесконечности $|R|$, $|T|$ (кривые 1 и 2), а также коэффициентов отражения и прохождения R^* , T^* (кривые 1 и 2) в случае набегающих поверхностных волн с моря для различных значений параметра сдвига S . Интересно, что при $S = 0$ амплитуда потенциала $|R|$ является наименьшей, а коэффициент отражения наибольший. С увеличением параметра S амплитуда потенциала отраженных волн $|R|$ растет, а амплитуда возвышения жидкости на бесконечности уменьшается, т.к. $|k_0^-| < |k_0^+|$ и отношение $|k_0^-| / |k_0^+|$ уменьшается с увеличением параметра S . Для проходящих волн амплитуда потенциала и амплитуда прогиба пластины на бесконечности максимальны при $S = 0$ и уменьшаются с увеличением параметра S .

На рис. 5 представлены зависимости от безразмерной частоты λ амплитуд потенциала скорости на бесконечности $|R|$ и $|T|$ (кривые 1 и 2) в случае набегающих изгибно-гравитационных волн. График коэффициента отражения в этом случае ведет себя аналогично графику для амплитуды потенциала, а коэффициент прохождения резко возрастает с увеличением частоты, т.к. при больших частотах амплитуды возвышения жидкости во много раз больше амплитуд колебаний пластины. Из рисунка видно, что

амплитуды потенциала на бесконечности $|R|$ и $|T|$ максимальны при $S = 0$ и уменьшаются с увеличением параметра S .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено аналитическое решение задачи дифракции поверхностных и изгибно-гравитационных волн на кромке полубесконечного ледяного покрова при наличии течения с линейным сдвигом скорости по глубине. Получены точные простые формулы для коэффициентов отражения и прохождения. Очень длинные волны проходят в другую среду, почти не отражаясь. С уменьшением длины волн коэффициент отражения увеличивается. С увеличением градиента сдвига коэффициенты отражения и прохождения уменьшаются. Полученное точное решение применимо для тестирования численных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Squire V.A., Dugan J.P., Wadhams P., Rottier P.J., Liu A.K.* Of ocean waves and sea ice // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1995. V. 27. P. 115–168.
2. *Марченко А.В.* Изгибно-гравитационные волны // *Тр. Ин-та общ. физики РАН.* 1999. Т. 56: Динамика волн на поверхности жидкости. С. 65–111
3. *Kashiwagi M.* Research on hydroelastic responsees of VLFS: rercent progress and future work // *Intern. J. Offshore and Polar Engineering.* 2000. V. 10. № 2. P. 81–90.
4. *Watanabe E., Utsunomia T., Wang C.M.* Hydroelastic analysis of ponton-type VLFS: a literature survey // *Engineering Structures.* 2004. V. 26. № 2. P. 245–256.
5. *Squire V.A.* Of ocean waves and sea-ice revisited // *Cold Regions Science and Technology.* 2007. V. 49. № 2. P. 110–133.
6. *Ni B.Y., Han D.F., Di S.C., Xue Y.Z.* On the development of ice-water-structure interaction // *J. Hydrodynamics.* 2020. V. 32. № 4. P. 629–652.
doi.org/10.1007/s42241-020-0047-8
7. *Коузов Д.П.* Дифракция плоской гидроакустической волны но трещине в упругой пластине // *ПММ.* 1963. Т. 27. В. 6. С. 1037–1043.
8. *Evans D.V., Davies T.V.* Wave-ice interaction: Report / Davidson lab.; Stevens Inst. of Technol. № 1313. New Jersey, 1968.
9. *Гольдштейн Р.В., Марченко А.В.* Дифракция плоских гравитационных волн на кромке ледяного покрова // *ПММ.* 1989. Т. 53. № 6. С. 924–930.
10. *Марченко А.В., Прохоров И.В.* О линейных волнах в потоке жидкости с постоянной завихренностью, находящейся под ледяным покровом // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 242–249.
11. *Марченко А.В.* Дифракция изгибно-гравитационных волн на линейных неоднородностях в ледяном покрове // *Изв. РАН. МЖГ.* 1997. № 4. С. 97–112.
12. *Balmforth N.J., Craster R.V.* Ocean waves and ice sheets // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 395. P. 89–124.
13. *Ткачева Л.А.* Рассеяние поверхностных волн краем плавающей упругой пластины // *ПМТФ.* 2001. Т. 42. № 4. С. 88–97.
14. *Ткачева Л.А.* Дифракция поверхностных волн на плавающей упругой пластине при косом набегании // *ПММ.* 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 475–487.
15. *Ткачева Л.А.* Плоская задача о дифракции поверхностных волн на упругой плавающей пластине // *Изв. РАН. МЖГ.* 2003. № 3. С. 131–149.
16. *Chung H., Fox C.* Calculation of wave-ice interaction using the Wiener – Hopf technique // *NZ J. Math.* 2002. V. 31. P. 1–18.
17. *Zhao C., Hu C., Wei Y., Zhang J., Huang W.* Diffraction of surface waves by floating elastic plates // *J. Fluids Struct.* 2008. V. 24. P. 231–249.
18. *Williams T., Squire V.A.* Scattering of flexural–gravity waves at the boundaries between three floating sheets with applications // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 569. P. 113–140.
DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006002552>
19. *Williams T., Squire V.A.* Wave scattering at the sea-ice/ice-shelf transition with other applications // *SIAM J. Appl. Math.* 2007. V. 67. № 4. P. 938–959.

20. *Linton C.M., Chung H.* Reflection and transmission at the ocean/sea-ice boundary // *Wave Motion*. 2003. V. 38. P. 43–52.
21. *Chung H., Linton C.M.* Reflection and transmission of waves across a gap between two semi-infinite plates on water // *Q.J. Mech. Appl. Math.* 2005. V. 58. № 1. P. 1–15.
22. *Chakrabarti A.* On the Solution of the Problem of Scattering of Surface-Water Waves by the Edge of an Ice Cover // *Proc. Roy. Soc. London. A*. 2000. V. 456. № 1997. P. 1087–1099.
23. *Evans D.V., Porter R.* Wave scattering by narrow cracks in ice sheets floating on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 484. P. 143–165.
24. *Fox C., Squire V.A.* Reflection and transmission characteristics at the edge of short fast sea ice // *J. Geophys. Res.* 1990. V. 95. № C7. P. 11.629–11.639.
25. *Fox C., Squire V.A.* On the oblique reflection and transmission of ocean waves at short fast sea ice // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1994. V. 347. № 1682. P. 185–218.
26. *Букатов А.Е., Завьялов Д.Д.* Набегание поверхностных волн на кромку сжатого льда // *Изв. РАН. МЖГ*. 1995. № 3. С. 121–126.
27. *Wu C., Watanabe E., Utsunomia T.* An eigenfunction expansion-matching method for analyzing wave-induced responses of an elastic floating plate // *Appl. Ocean Res.* 1995. V. 17. № 5. P. 301–310.
28. *Barrett M., Squire V.A.* Ice-coupled wave propagation across an abrupt change in ice rigidity, density or thickness // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101. P. 20825–20832.
29. *Стурова И.В.* Косое набегание поверхностных волн на упругую полосу // *ПМТФ*. 1999. Т. 40. № 4. С. 62–68.
30. *Sahoo T., Yip T.L., Chwang A.T.* Scattering of surface waves by a semi-infinite floating elastic plate // *Phys. Fluids*. 2001. V. 13. № 11. P. 3215–3222.
doi: 10.1063/1.1408294
31. *Коробкин А.А.* Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидроупругом поведении плавающей пластины на волнах // *ПМТФ*. 2000. Т. 41. № 2. С. 90–96.
32. *Хабахнашева Т.И.* Плоская задача об упругой плавающей пластине // *Динамика сплошной среды*. 2000. Вып. 116. С. 166–169.
33. *Meylan M.H.* A variational equation for the wave forcing of floating thin plates // *Appl. Ocean Res.* 2001. V. 23. № 4. P. 195–206.
34. *Meylan M., Squire V.A.* The response of ice floes to ocean waves // *J. Geophys. Res. Atmospheres*. 1994. V. 99. № C1. P. 891–900.
DOI:10.1029/93JC02695
35. *Andrianov A.I., Hermans A.J.* The influence of water depth on the hydroelastic response of a very large floating platform // *Marine Structures*. 2003. V. 16. № 5. P. 355–371.
36. *Mohapatra S.C., Ghoshal R., Sahoo T.* Effect of compression on wave diffraction by a floating elastic plate // *J. Fluids Struct.* 2013. V. 36. P. 124–135.
37. *Hermans A.J.* A boundary element method for the interaction of free surface waves with a very large floating flexible platform // *J. Fluids Struct.* 2000. V. 14. № 7. P. 943–956.
38. *Лавренов И.В., Новаков А.В.* Численное моделирование взаимодействия гравитационных волн с упругими льдинами // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 3. С. 123–131.
39. *Wang C.D., Meylan M.H.* A higher-order-coupled boundary element and finite element method for the wave forcing of a floating elastic plate // *J. Fluids Struct.* 2004. V. 19. № 4. P. 557–572.
40. *Wang C.D., Meylan M.H.* The linear wave response of a floating thin plate on water of variable depth // *Appl. Ocean Res.* 2002. V. 24. P. 163–174.
41. *Kagemoto H., Masataka F., Motohiko M.* Theoretical and experimental predictions of the hydroelastic response of a very large floating structure in waves // *Appl. Ocean Res.* 1998. V. 20. № 3. P. 135–144.
42. *Meylan M.H., Bennetts L.G., Cavaliere C., Alberello A., Toffoli A.* Experimental and theoretical models of wave-induced flexure of a sea ice floe // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. P. 041704.
43. *Nelli F., Bennetts L.G., Skene D.M., Monty J.P., Lee J.F., Meylan M.H., Toffoli A.* Reflection and transmission of regular water waves by a thin, floating plate // *Wave Motion*. 2017. V. 70. P. 209–221.
doi: 10.1016/j.wavemoti.2016.09.003
44. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
45. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.

Wave Diffraction on an Ice Sheet in the Presence of Shear Current

L. A. Tkacheva*

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

**e-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru*

The diffraction of plane surface and flexural-gravity waves during their normal incidence at the edge of a floating elastic semi-infinite plate in fluid of finite depth in the presence of a current with velocity shear is studied. The explicit analytical solution to this problem is constructed using the Wiener–Hopf technique. Simple exact formulas for the reflection and transmission coefficients and the energy relations are obtained. The results of numerical calculations using the obtained formulas are presented.

Keywords: thin elastic floating plate, surface waves, flexural-gravity waves, diffraction, shear current.

УДК 532.59:539.3

ВЛИЯНИЕ СНЕЖНОГО ПОКРОВА НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ТОНКОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

© 2024 г. В. Л. Земляк^{a, *}, В. М. Козин^{b, **}, А. В. Погорелова^{a, ***}

^aПриамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, Биробиджан, Россия

^bИнститут машиноведения и металлургии ХФИЦ ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Россия

*e-mail: vellkom@list.ru

**e-mail: kozinvictor@rambler.ru

***e-mail: milova@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.01.2024 г.

После доработки 12.02.2024 г.

Принята к публикации 24.03.2024 г.

Рассматривается движение тонкого тела в жидкости под ледяным покровом, покрытым влажным снегом. Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая, движение жидкости потенциальное. Ледяной покров моделируется вязкоупругой плавающей пластиной, снежный покров моделируется вязким слоем. Аналитически получены формулы расчета волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента, действующих на тонкое тело, нестационарно и прямолинейно движущееся в жидкости под ледяным и снежным покровами. Численный анализ результатов показывает, что снежный покров уменьшает абсолютные значения экстремумов гидродинамических нагрузок. Анализируется совместное влияние увеличения толщины снежного покрова, уменьшения глубины погружения тела, увеличения толщины ледяного покрова, уменьшения глубины водоема на величину гидродинамических нагрузок.

Ключевые слова: ледяной покров, снежный покров, погруженное тонкое тело, гидродинамические нагрузки.

DOI: 10.31857/S1024708424030141, **EDN:** PESYUF

Известно, что при движении твердого тела в жидкости вблизи ледяного покрова в системе лед-вода возникают изгибно-гравитационные волны [1, 2]. Ранние экспериментальные работы [3, 4] показали, что эти волны при определенных условиях способны разрушить плавающий ледяной покров.

Заснеженность ледяного покрова может внести коррективы в характер прогибов ледяного покрова. Механические свойства снежного покрова исследованы давно. Существует много работ, посвященных этой теме [5–7]. Известно [8, 9], что толщина снега на льду в Арктических регионах варьируется от 0.1 до 0.7 м при средней толщине примерно 0.3–0.5 м. Функциональные зависимости модуля упругости сухого снега и его коэффициента Пуассона от пористости и плотности приведены в работе [10]. В [11] представлены результаты акустических измерений механических свойств снежного покрова на острове Шпицберген.

В [12] исследовались зависимости модуля Юнга и коэффициента вязкости снега от его плотности. Получено, что модуль Юнга и коэффициент вязкости уменьшаются с уменьшением плотности снега.

В [13] исследовались вязко-упругие деформации снега. Коэффициенты вязко-упругости и коэффициент Пуассона были вычислены из кривых ползучести и зависимостей деформации от времени, их соответствующие корреляции были обсуждены теоретически.

Известно, что механические свойства затопленного снега отличаются от свойств сухого снега [5, 14]. В [7] показано, что при увеличении влажности снежного покрова до 10% его жесткость уменьшается в 3 раза, а при увеличении влажности до 20% — в 3–7 раз. При дальнейшем увеличении влажности снега снежный покров переходит в пластическое состояние, при котором понятие «жесткости» снега теряет всякий смысл. Исходя из этих соображений, в [1] предложено затопленный снег на поверхности ледяного покрова моделировать как слой вязкой жидкости с коэффициентом внутреннего трения η_s .

В работе [15] анализировалось влияние снежного покрова на прогибы льда при движении тонкого погруженного тела в жидкости. При этом теоретически рассматривались две модели снежного покрова — сухой и затопленный снег. Для сухого снега система лед—снег моделировалась двухслойной пластиной Кирхгофа—Лява. Первый слой пластины (нижний) однородный и упругий, он соответствовал ледяному покрову. Второй слой (верхний), соответствующий снежному покрову, являлся однородным и вязкоупругим по модели Кельвина—Фойгта. Для случая затопленного снега на ледяном покрове снежный покров моделировался вязким слоем с заданным коэффициентом вязкости. Для обеих моделей снежного покрова было получено качественное согласование результатов, а именно, наличие снежного покрова приводит к уменьшению максимальной высоты ИГВ и к уменьшению нормальных напряжений в ледяном покрове.

В работе [16] в условиях опытового ледового бассейна были экспериментально апробированы теоретические результаты [15] для затопленного снега. Получено, что наличие затопленного снега на поверхности ледяного покрова приводит к уменьшению высоты ИГВ при движении погруженного тела в жидкости вблизи поверхности. Как следствие, уменьшается разрушительная способность ИГВ, возникающих при движении тела в жидкости вблизи ледяного покрова. Влияние затопленного снега на прогиб ледяного покрова наиболее сильно сказывается в области критических скоростей движения погруженного тела.

Представляет интерес анализ влияния снежного покрова на гидродинамические нагрузки, действующие на тонкое тело при его движении в жидкости под ледяным покровом. Ранее данные нагрузки исследовались теоретически и экспериментально достаточно полно в работах [17–30] для движения тел под свободной поверхностью жидкости. Влиянию плавающего ледяного покрова на волновое сопротивление, подъемную силу и крутящий момент тонкого тела, движущегося в жидкости, посвящены исследования [31–34].

Целью настоящей работы является теоретический анализ совместного влияния ледяного и снежного покровов на гидродинамические нагрузки погруженного тонкого тела при его движении в жидкости.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Рассматривается нестационарное движение тонкого тела в воде под ледяным покровом, покрытым влажным снегом. Предполагается, что вода является идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_2 и движение жидкости является потенциальным. Ледяной покров моделируется вязкоупругой, изначально ненапряженной, однородной, изотропной пластиной толщиной h с плотностью ρ_1 . Предполагается, что период волновых процессов в ледяном покрове значительно меньше, чем время релаксации льда. Поэтому, аналогично [1], для льда используется закон деформации линейной запаздывающей упругой среды Кельвина—Фойгта [35]. Влажный снежный покров, согласно работам [1, 15, 16], моделируется вязким слоем толщиной h_s с плотностью ρ_s и коэффициентом вязкости η_s .

Главный вектор и момент сил, действующих на погруженное тело, вычисляются по формулам [36]

$$\mathbf{F} = \rho_2 \iint_S \frac{d\Phi'}{dt} \mathbf{n} dS, \quad (1.1)$$

$$\vec{L} = \rho_2 \iint_S \frac{d\Phi'}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS, \quad (1.2)$$

где S — поверхность подводного тела, Φ' — потенциал скоростей движения жидкости, $\mathbf{r}$ радиус-вектор точки поверхности S относительно начала координат, $\mathbf{n}$ — внешний единичный вектор нормали к поверхности S .

Предположим, что тонкое тело движется в жидкости на глубине погружения d . Длина тела равна $2L$, радиус миделя— R , $L/R \geq 4$. В момент времени $t' = 0$ тело из состояния покоя начинает движение прямолинейно под плавающей вязкоупругой пластиной со скоростью, изменяющейся по зависимости:

$$u'(t') = U \tanh(\mu' t'), \quad (1.3)$$

где μ' — это коэффициент, отвечающий за начальное ускорение тела. В соответствии с зависимостью (1.3) тело после старта движется ускоренно с начальным ускорением $\mu' U$, затем с течением времени t' значение скорости $u'(t')$ стремится к U .

Будем считать, что тело неподвижно и на него набегают поток жидкости со скоростью $-u'(t')$ на бесконечности. Совмещенная с телом декартова систем координат располагается следующим образом: плоскость xOy совпадает с невозмущенной поверхностью раздела лед-вода, направление x совпадает с направлением движения тонкого тела (или противоположно набегающему потоку), и ось z направлена вертикально вверх.

Рассмотрим тонкое тело, которое имеет три секции: носовую оконечность, цилиндрическую вставку радиуса R и кормовую оконечность. Геометрия носа представляет собой половину сфероида с полуосями $n_f R$, R , R , здесь $n_f R$ — длина носовой части тела. Корма имеет осесимметричный параболический профиль, описываемый уравнением [37]

$$\rho = R - \frac{(x + 2L - n_a R)^2}{n_a^2 R},$$

где ρ — расстояние от осевой линии кормы до точки поверхности, $n_a R$ — длина кормовой части тела.

Согласно методу источников и стоков [36] заменим обтекаемое тело системой m источников и m стоков, расположенных на осевой линии тела. Подберем абсциссы источников ξ_k и стоков ζ_k , $k = \overline{1, m}$, и их мощности $q_k'(t')$ и $-q_k'(t')$, соответственно, таким образом, чтобы поверхность тела служила одной из поверхностей тока:

$$q_k'(t') = u'(t')q_0'\delta_k, \quad q_0' = \pi R^2, \quad \zeta_k = -2L + \frac{m-k}{m}n_a R, \quad (1.4)$$

$$\xi_k = -\frac{k}{m}n_f R, \quad \delta_k = \frac{3(k - k^2 + m^2) - 1}{2m^3}.$$

На рис. 1 представлен пример обтекания безграничным потоком жидкости системы источников и стоков с использованием формул (1.4) для $m=10$. Здесь основные параметры тела имеют следующие значения: $L = 50$ м, $R = 6,25$ м, $n_a = 4$, $n_f = 2$. Заметим, что согласно [38], оптимальное значение удлинения тела L/R для тела каплевидной формы равно 6–7, а для тела с серединной цилиндрической вставкой равно 7–10. В нашем случае $L/R = 8$.

Для описания движения тонкого тела в жидкости со свободной поверхностью (с учетом глубины погружения d) и конечной глубиной водоема H мы используем, аналогично работам [31–34], следующую формулу для корректировки мощности источников (стоков):

$$q_0' \approx \pi R^2 \left(1 + \frac{r^2}{2}(1 + C) + \dots \right), \quad \text{для } (r < 1), \quad (1.5)$$

$$C = -\frac{1}{(4\chi^2 + 1)^{3/2}} - \frac{1}{(4\gamma^2 + 1)^{3/2}} + \frac{1}{(4(\gamma - \chi)^2 + 1)^{3/2}}, \quad r = R/L, \quad \chi = d/L, \quad \gamma = H/L.$$

Таким образом, обтекание тела заданной формы моделируется обтеканием m источников и m стоков, расположенных в точках с абсциссами (1.4) и имеющих мощность (1.5). Поэтому потенциал скоростей движения жидкости при обтекании тонкого тела можно искать как суперпозицию потенциалов вышеупомянутых источников и стоков:

$$\Phi = \sum_{k=1}^m \left(\Phi_0'(x - \xi_k; y; z; t) \delta_k - \Phi_0'(x - \zeta_k; y; z; t) \delta_k \right), \quad (1.6)$$

где $\Phi_0'(x'; y'; z'; t')$ — потенциал движения жидкости при обтекании единичного источника. Для нахождения потенциала Φ_0' рассмотрим обтекание источника мощностью q_0' нестационарным прямолинейным потоком жидкости, ограниченным дном водоема и вязкоупругой пластиной, покрытой вязким слоем (затопленным снегом). Начало координат совместим с проекцией источника на плоскость раздела

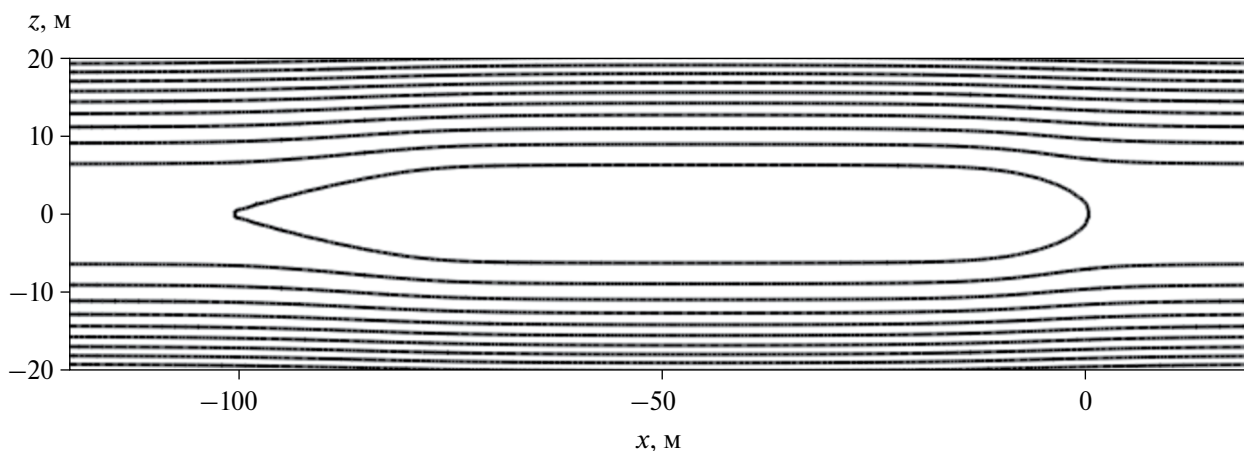


Рис. 1. Обтекание системы источников – стоков (1.4) безграничным потоком жидкости.

жидкость–пластина. Потенциал скоростей движения жидкости $\Phi_0'(x', y', z', t')$ представляет собой сумму потенциалов скоростей источника $Q_1(0, 0, -d)$, мнимого стока $Q_2(0, 0, d)$, мнимого источника $Q_3(0, 0, -2H+d)$, мнимого стока $Q_4(0, 0, -2H-d)$, и потенциала скоростей волновых движений жидкости $\varphi_0'(x, y, z, t)$. В безразмерном виде это запишется следующим образом:

$$\Phi_0 = \frac{uq_0}{4\pi} \left(-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) + \frac{\varphi_0}{4\pi}, \quad (1.7)$$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \chi)^2}, \quad R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \chi)^2},$$

$$R_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2\gamma - \chi)^2}, \quad R_4 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2\gamma + \chi)^2},$$

$$(x, y, z) = \frac{(x', y', z')}{L}; \quad (\Phi_0, \varphi_0) = \frac{(\Phi_0', \varphi_0')}{L\sqrt{gL}}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{gL}}; \quad q_0 = q_0' / L^2.$$

В (1.7) и далее все переменные, параметры и функции обезразмерены. Мнимые источники и стоки вводятся в (1.7), аналогично [39], для упрощения выполнения граничных условий на дне водоема и на поверхности раздела лед–вода.

Уравнение Лапласа, граничные и начальные условия для нахождения функции Φ_0 имеют вид:

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \kappa \left(1 + \tau_k \left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \nabla^4 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \\ & + (\varepsilon + \varepsilon_s) \left(\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial t^2 \partial z} - \dot{u} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} - 2u \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial t \partial x \partial z} + u^2 \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x^2 \partial z} \right) = \\ & = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} - \dot{u} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - 2u \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} \right), \quad (z = 0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0, (z = -\gamma), \quad (1.10)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right|_{z=0, t=0} = 0, \quad (1.11)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + (\varepsilon + \varepsilon_s) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z \partial t} \right) \Big|_{z=0, t=0} = 0, \quad (1.12)$$

$$t = t' \sqrt{\frac{g}{L}}; \quad \tau_k = \tau_k' \sqrt{\frac{g}{L}}; \quad \eta = \frac{\eta_s h_s}{\rho_2 L^2 \sqrt{gL}}; \quad \mu = \mu' \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1 h}{\rho_2 L}, \quad \varepsilon_s = \frac{\rho_s h_s}{\rho_2 L}; \quad \kappa = \frac{Gh^3}{3\rho_2 g L^4},$$

здесь G — это модуль упругости льда при сдвиге, $G = 0.5E/(1+\nu)$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, τ_k' — время релаксации льда или «время запаздывания» [1, 35]. Уравнение (1.9) представляет собой объединение динамического и кинематического граничных условий на поверхности раздела лед–вода. В нем первое слагаемое в левой части отвечает за вязкоупругие силы ледяной пластины, второе слагаемое — за силы вязкости слоя влажного снега, третье слагаемое — за силы инерции пластины и снега. Уравнение (1.10) — условие непротекания на дне водоема. Соотношения (1.11) и (1.12) — это начальные условия для функции потенциала Φ_0 на границе раздела лед–вода, физический смысл которых состоит в равенстве нулю прогиба ледяной пластины и его скорости при $t = 0$.

Функция потенциала скоростей Φ_0 определяется из системы (1.8)–(1.12) аналогично работам [31–34], а именно, аналитически с использованием интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Выражение для вычисления $\frac{d\Phi_0}{dt}$ при нестационарном движении единичного источника под вязкоупругой ледяной пластиной покрытой вязким слоем снега имеет вид

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = \frac{q_0}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-k\chi} \int_0^t f(\tau) K d\tau \exp(ik((x+s)\cos\theta + y\sin\theta)) k dk, \quad (1.13)$$

$$K = e^{-n(t-\tau)/2} \begin{cases} -\frac{n \sin(\sqrt{\beta}(t-\tau))}{(2\sqrt{\beta})} + \cos(\sqrt{\beta}(t-\tau)), & \beta > 0, \\ -\frac{n \sinh(\sqrt{-\beta}(t-\tau))}{(2\sqrt{-\beta})} + \cosh(\sqrt{-\beta}(t-\tau)), & \beta < 0, \\ -\frac{n}{2}(t-\tau) + 1, & \beta = 0; \end{cases}$$

$$f(\tau) = e^{-\sigma s(\tau)} \left[\left(u(\tau)k(1 + \kappa k^4) + (\kappa k^4 \tau_K + \eta k^2) (\dot{u}(\tau) - \sigma(u(\tau))^2) \right) \gamma_1 + \right. \\ \left. + \left(\ddot{u}(\tau) - 3\sigma u(\tau) \dot{u}(\tau) + \sigma^2 (u(\tau))^3 \right) (\varepsilon + \varepsilon_s) \gamma_2 \right],$$

$$\beta = p - n^2 / 4; \quad p = (1 + \kappa k^4) k \tanh(k\gamma) / (1 + (\varepsilon + \varepsilon_s) k \tanh(k\gamma)),$$

$$n = (\kappa k^5 \tau_k + \eta k^3) \tanh(k\gamma) / (1 + (\varepsilon + \varepsilon_s) k \tanh(k\gamma)), \quad \sigma = ik \cos \theta,$$

$$\gamma_1 = 1 + e^{k(\chi-2\gamma)} \sinh(k\chi), \quad \gamma_2 = 1 + e^{k(\chi-2\gamma)} \sinh(k\chi) \left(1 - \frac{1}{k(\varepsilon + \varepsilon_s)} \right),$$

здесь $s = s' / L$, $s' = s'(t')$ — расстояние, пройденное источником с момента времени $t' = 0$.

Для вычисления волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента (1.1)–(1.2) разобьем, аналогично [31], поверхность интегрирования S на две равные части $y' = Y(x', z')$ и $y' = -Y(x', z')$, где $Y(x', z')$ имеет вид:

$$Y(x', z') = \begin{cases} R \sqrt{\left(1 - \frac{(x' + 2L - n_a R)^2}{(n_a R)^2}\right)^2 - \frac{(z' + d)^2}{R^2}}, & -2L \leq x' < -2L + n_a R \\ \sqrt{R^2 - (z' + d)^2}, & -2L + n_a R \leq x' < -n_f R \\ \sqrt{R^2 - \frac{(x' + n_f R)^2}{n_f^2} - (z' + d)^2}, & -n_f R \leq x' \leq 0 \end{cases}, \quad (1.14)$$

Подстановка (1.6) в уравнения (1.1)–(1.2) с использованием зависимостей (1.13), (1.14), (1.4) и (1.5) дает, аналогично [31–34], выражения для вычисления основных гидродинамических нагрузок, действующих на тонкое тело при его нестационарном движении под вязкоупругой пластиной, покрытой вязким слоем

$$\begin{aligned} F_1 &= 2\rho_2 \int_D \frac{d\Phi'}{dt'} \Big|_{y'=Y(x', z')} (-\partial Y / \partial x') dx' dz', \\ F_3 &= 2\rho_2 \int_D \frac{d\Phi'}{dt'} \Big|_{y'=Y(x', z')} (-\partial Y / \partial z') dx' dz', \\ M &= 2\rho_2 \int_D \frac{d\Phi'}{dt'} \Big|_{y'=Y(x', z')} \left(\frac{\partial Y}{\partial z'} (x' - x_c) - \frac{\partial Y}{\partial x'} (z' + d) \right) dx' dz', \end{aligned}$$

здесь D – область, являющаяся проекцией поверхности $y' = Y(x', z')$ на плоскость $y' = 0$, x_c – абсцисса центра масс тонкого тела.

Аналогично [28] будем вычислять и анализировать безразмерные коэффициенты волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента

$$C_w = -\frac{F_1}{0.5\rho_2 U^2 S_a}, \quad (1.15)$$

$$C_z = \frac{F_3}{0.5\rho_2 U^2 S_a}, \quad (1.16)$$

$$C_m = \frac{M}{\rho_2 U^2 S_a L}, \quad (1.17)$$

где S_a – площадь смоченной поверхности тонкого тела.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численные расчеты по формулам (1.15)–(1.17) были проведены по методу Гаусса с использованием квадратур в 40 точках для следующих параметров ледяной пластины, тонкого тела и жидкости (если это не оговорено отдельно):

$$E = 5.9 \cdot 10^9 \text{ Па}, \rho_1 = 900 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3; h = 1\text{--}2 \text{ м}, \nu = 0.3, t' = 100 \text{ с}; \mu' = 1\text{с}^{-1},$$

$$\tau_k = 0.69 \text{ с}; L = 50 \text{ м}, R = 6.25 \text{ м}, m = 10, n_a = 4, n_f = 2, d = 16\text{--}24 \text{ м}, H = 50\text{--}100 \text{ м}.$$

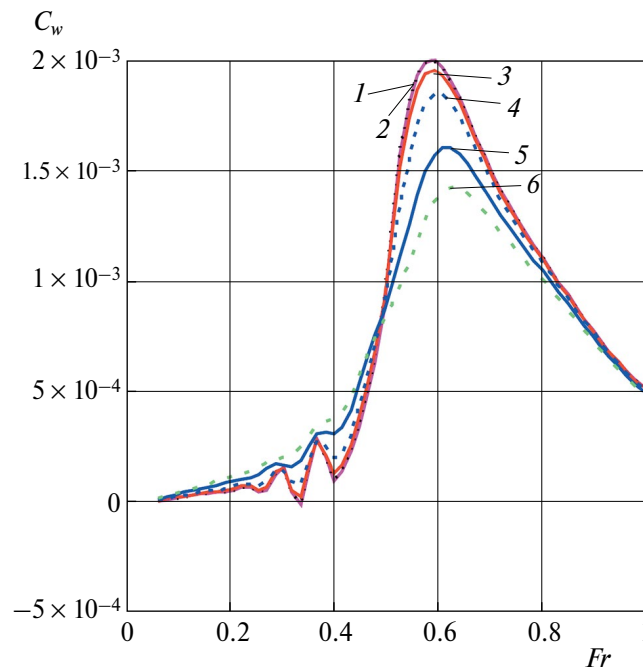


Рис. 2. Коэффициент волнового сопротивления C_w в зависимости от числа Фруда Fr : 1 – $h_s = 0$ м; 2 – $h_s = 0.3$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^4$ Па·с; 3 – $h_s = 0.3$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^5$ Па·с; 4 – $h_s = 0.1$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с; 5 – $h_s = 0.3$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с; 6 – $h_s = 0.5$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с.

Время релаксации льда τ_k выбрано в соответствии с результатами работ [40–41]. Ранее в работе [31] было показано, что для тела, скорость которого изменяется по закону (1.3), при $t \rightarrow \infty$, гидродинамические нагрузки (за исключением области критических скоростей) стремятся к некоторым постоянным значениям, зависящим от скорости равномерного движения U . Поэтому будем анализировать величины (1.14) – (1.16) для значения времени $t' = 100$ с, для которого можно приближенно считать, что тело движется равномерно с постоянной скоростью U .

Для мокрого снега примем следующие значения основных параметров $\rho_s = 390$ кг/м³, $\eta_s = 5 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^6$ Па·с, $h_s = 0.1 - 0.5$ м. Отметим, что для задания значений вязкости и плотности мокрого снега предполагалось, что мокрый снег – это смесь снега и воды. Величина ρ_s – это плотность смеси «снег–вода». Аналогично [1, 16] принимается предположение, что снег – это жидкость с очень большой вязкостью. Вязкость мокрого снега η_s в уравнениях находится по формуле Аррениуса как вязкость смеси, первая составляющая часть которой есть снег, а вторая – вода:

$$\lg(\eta_s) = m_1 \lg(\eta_1) + m_2 \lg(\eta_2),$$

где m_1 и m_2 – массовые доли компонентов в смеси; $\eta_1 = 10^8 - 10^{10}$ Па·с – сдвиговая вязкость снега; $\eta_2 = 1.7 \cdot 10^{-3}$ Па·с – вязкость воды. С увеличением массовой доли воды вязкость смеси «снег–вода» уменьшается.

На рис. 2–4 представлены кривые коэффициентов волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента тонкого тела для $d = 24$ м, $H = 100$ м, $h = 1$ м, в зависимости от числа Фруда $Fr = U / \sqrt{2gL}$ для разных параметров снежного покрова. Видно, что снег толщиной $h_s = 0.3$ м и вязкостью $\eta_s = 5 \cdot 10^4$ Па·с совсем не оказывает влияния на гидродинамические нагрузки движущегося в воде тела при толщине льда $h = 1$ м. Рост вязкости снежного покрова (при постоянной его толщине $h_s = 0.3$ м) вплоть до значения $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с приводит к существенному увеличению его влияния на гидродинамические нагрузки. Увеличение толщины снега (при постоянной вязкости $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с) приводит к уменьшению абсолютных значений экстремумов волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента. Очевидно, что снежный покров оказывает наибольшее влияние на гидродинамические нагрузки при движении подводного тела с околоскритическими скоростями, т.е. со скоростями,

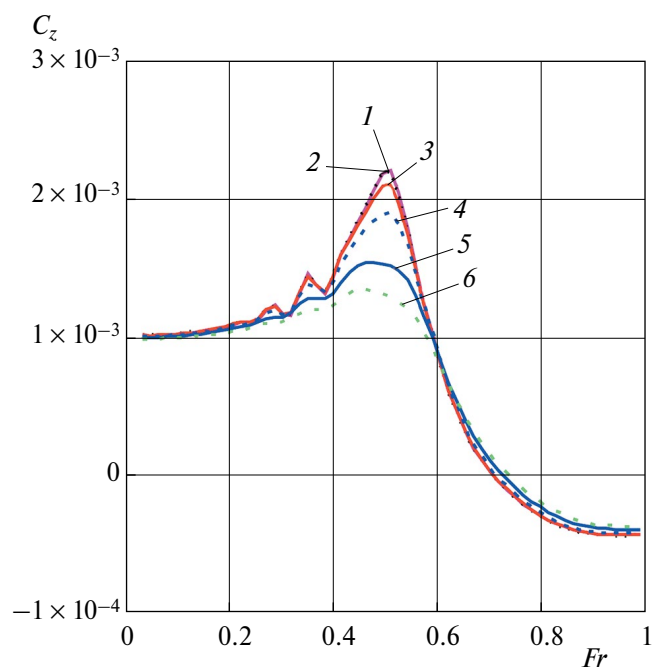


Рис. 3. Коэффициент подъемной силы C_z в зависимости от числа Фруда Fr , обозначения как на рис. 2.

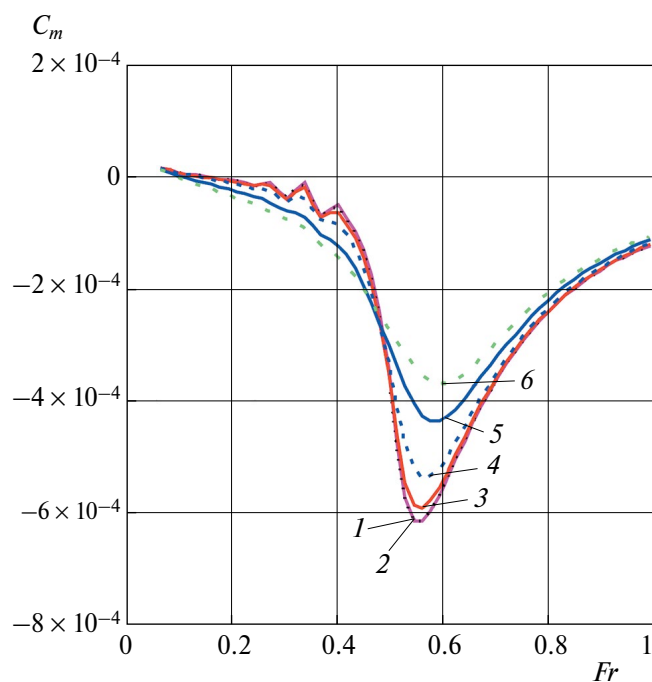


Рис. 4. Коэффициент крутящего момента C_m в зависимости от числа Фруда Fr , обозначения как на рис. 2.

соответствующими областям экстремальных значений волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента. При этом вне области экстремальных значений волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента влияние снега на гидродинамические нагрузки незначительно. Увеличение вязкости снежного покрова и его толщины немного сдвигает экстремальные значения волнового

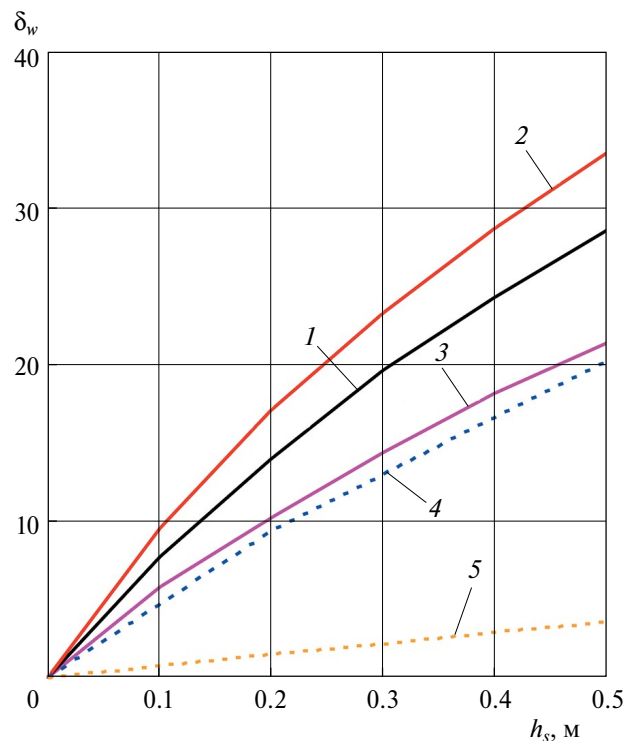


Рис. 5. Относительное изменение экстремального значения коэффициента волнового сопротивления d_w в зависимости от толщины снежного покрова h_s : 1 — $d = 24$ м, $H = 100$ м, $h = 1$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с; 2 — $d = 16$ м, $H = 100$ м, $h = 1$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с; 3 — $d = 24$ м, $H = 100$ м, $h = 2$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с; 4 — $d = 24$ м, $H = 50$ м, $h = 1$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па·с; 5 — $d = 24$ м, $H = 100$ м, $h = 1$ м, $\eta_s = 5 \cdot 10^5$ Па·с.

сопротивления и крутящего момента, а также точку смены знака (с положительной на отрицательную) подъемной силы в область больших скоростей.

Рассмотрим экстремальные значения гидродинамических коэффициентов как функции от толщины снежного покрова $C_{w, \max}(h_s)$, $C_{z, \max}(h_s)$, $C_{m, \min}(h_s)$. Проанализируем влияние различных факторов (глубины водоема, глубины погружения тела, толщины ледяного покрова, вязкости снежного покрова) на относительное изменение этих экстремальных значений

$$\delta_w = \frac{|C_{w, \max}(0) - C_{w, \max}(h_s)|}{C_{w, \max}(0)} \cdot 100\%, \quad (2.1)$$

$$\delta_z = \frac{|C_{z, \max}(0) - C_{z, \max}(h_s)|}{C_{z, \max}(0)} \cdot 100\%,$$

$$\delta_m = \frac{|C_{m, \min}(0) - C_{m, \min}(h_s)|}{|C_{m, \min}(0)|} \cdot 100\%.$$

На рис. 5–7 представлены относительные изменения экстремальных значений гидродинамических коэффициентов d_w , d_z , d_m (2.1) в зависимости от толщины снежного покрова. Анализ рис. 5–7 позволяет сделать вывод, что увеличению толщины снежного покрова до 0.5 м оказывает наибольшее влияние (до 43%) на экстремальные значения крутящего момента при малой глубине погружения ($d = 16$ м) движущегося тела. При этом экстремумы волнового сопротивления и подъемной силы в аналогичных условиях уменьшаются, соответственно, на 33 и 41%. Таким образом, уменьшение глубины погружения тела d усиливает влияние снежного покрова на гидродинамические нагрузки тела.

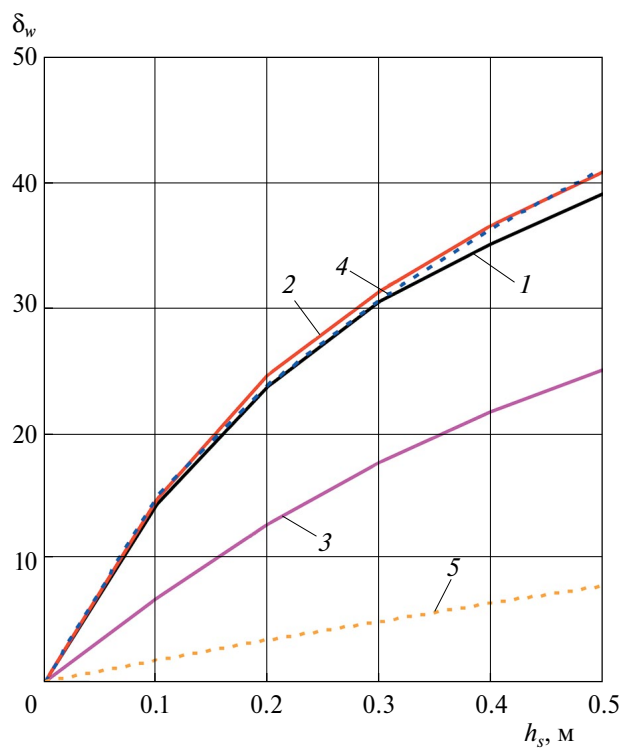


Рис. 6. Относительное изменение экстремального значения коэффициента подъемной силы d_z в зависимости от толщины снежного покрова h_s ; обозначения как на рис. 5.

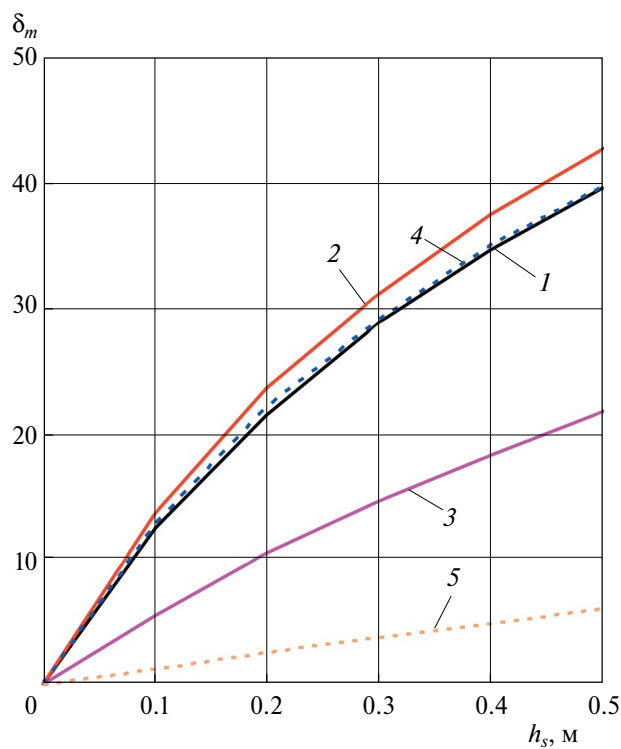


Рис. 7. Относительное изменение экстремального значения коэффициента крутящего момента d_m в зависимости от толщины снежного покрова h_s ; обозначения как на рис. 5.

Анализ кривых 4 на рис. 5–7 показывает, что уменьшение глубины водоема H до 50 м приводит к уменьшению влияния снега на волновое сопротивление. Однако, влияние снежного покрова на подъемную силу и крутящий момент не изменяется при уменьшении глубины водоема H от 100 м до 50 м.

Увеличение толщины ледяного покрова от $h = 1$ м до $h = 2$ м (кривые 3 на рис. 5–7) ослабляет влияние снежного покрова на гидродинамические нагрузки тонкого тела.

Уменьшение вязкости снежного покрова от $\eta_s = 5 \cdot 10^6$ Па · с до $\eta_s = 5 \cdot 10^5$ Па · с (кривые 5 на рис. 5–7) ослабляет влияние снежного покрова на гидродинамические нагрузки тела, движущегося в жидкости.

Таким образом, снежный покров приводит к уменьшению абсолютных значений экстремумов гидродинамических нагрузок, что существенно упрощает движение тонкого тела в жидкости под ледяным покровом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное теоретическое исследование влияния влажного снежного покрова на гидродинамические нагрузки тонкого тела, движущегося в жидкости под ледяным покровом, позволяет сделать следующие выводы.

Наличие снежного покрова приводит к уменьшению абсолютных значений экстремумов волнового сопротивления, подъемной силы и крутящего момента тонкого тела, движущегося в жидкости под ледяным покровом.

Увеличение толщины снежного покрова приводит к росту его влияния на экстремальные значения гидродинамических нагрузок

Увеличение вязкости влажного снежного покрова приводит к увеличению его влияния на гидродинамические нагрузки; при этом рост вязкости снежного покрова немного сдвигает экстремальные значения гидродинамических нагрузок в область больших скоростей.

Увеличение толщины ледяного покрова приводит к уменьшению влияния снежного покрова на гидродинамические нагрузки тонкого тела

Уменьшение глубины погружения тела приводит к увеличению влияния снежного покрова на гидродинамические нагрузки тонкого тела

Уменьшение глубины водоема приводит к уменьшению влияния снежного покрова на волновое сопротивление тонкого тела; при этом влияние снежного покрова на подъемную силу и крутящий момент не изменяется.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет Программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» Соглашение № 075-15-2024-287 от 06.02.2024 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. Букатов А.Е., Жарков В.В. Влияние плавающей упругой пластины на поверхностные проявления внутренних волн при движении источника в неоднородной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 118–125.
3. Козин В.М., Онищук А.В. Модельные исследования волнообразования в сплошном ледяном покрове от движения подводного судна // ПМТФ. 1994. № 2. С. 78–81.
4. Kozin V.M., Zemlyak V.L. Study on Wave Resistance of a Submarine Moving Under an Ice Sheet// Proc. 22nd Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Rhodes, ISOPE. 2012. V. 1. P. 1312–1314.
5. Gray D.M., Male D.H. Handbook of Snow: Principles, Processes, Management and Use. Toronto: Pergamon Press, 1981.
6. Mellor M. Engineering properties of snow// J. Glaciol. 1977. V. 81. № 19. P. 15–66.
7. Войтковский К.Ф. Механические свойства снега. М.: Наука, 1977.

8. *Prinsenberg S.J., Peterson I.K., Holladay J.S., Lalumiere L.* Snow and Ice Thickness Properties of Lake Melville, a Canadian Fjord Located along the Labrador Coast // Proc. 21st Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Maui, ISOPE. 2011. P. 935–941.
9. *Радионов В.Ф., Александров Е.И., Брызгин Н.Н., Дементьев А.А.* Изменения температуры, осадков и снежного покрова в районах Арктических морей за 1981–2010 гг. // Лед и снег. 2013. Т. 53. № 1. С. 61–68.
10. *Golubev V.N., Frolov A.D.* Modelling the change in structure and Mechanical properties in dry-snow densification to ice // Ann. Glaciol. 1998. V. 26. P. 45–50.
11. *Епифанов В.П.* Применение акустических методов в исследовании снежного покрова // Криосфера Земли. 2014. Т. 18. № 3. С. 101–113.
12. *Nakaya U.* Visco-elastic properties of snow and ice in Greenland Ice Cap // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Jpn. Ser. II. 1958. V. 5. № 3. P. 119–164.
13. *Shinojima K.* Study on the Visco-Elastic Deformation of Deposited Snow // Phys. Snow Ice. 1967. V. 1. № 2. P. 875–907.
14. *Kojima S., Nakamura K., Naoki K., Enomoto H.* Temperature Properties of Snow on Sea Ice with Water Infiltration // Proc. 19th Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Osaka, ISOPE. 2009. V. 1. P. 558–563.
15. *Pogorelova A.V., Kozin V.M., Zemlyak V.L.* The Effect of Snow on Ice Plate Deflections Generated by Moving Body under an Ice Plate // Proc. 27th Int. Offshore and Polar Eng. Conf., San-Francisco, ISOPE. 2017. V.1. P. 1311–1318.
16. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Body motion in liquid under ice plate with snow cover // Appl. Ocean Res. 2019. V. 84. P. 32–37.
<https://doi.org/10.1016/j.apor.2018.12.014>
17. *Havelock T.H.* Some Cases of Wave Motion Due to a Submerged Obstacle // Proc. R. Soc. Lond. 1917. V. 93. P. 520–532.
18. *Havelock T.H.* The wave resistance of a spheroid // Proc. R. Soc. Lond. 1931. V. 131. P. 275–285.
19. *Havelock T.H.* The Wave Resistance of an Ellipsoid // Proc. R. Soc. Lond. 1931. V. 132. P. 480–486.
20. *Kinoshita M., Inui T.* Wave making resistance of a submerged spheroid, ellipsoid and a ship in a shallow water // J. Zosen Kiokai. 1953. V. 75. P. 119–135
21. *Wigley W.C.S.* Water Forces on Submerged Bodies in Motion // Trans. Inst. Nav. Archit. 1953. V. 95. P. 268–279.
22. *Farell C.* On the Wave Resistance of a Submerged Spheroid // J. Ship Res. 1973. V. 17. № 1. P. 1–11.
23. *Doctors L., Beck R.* Convergence Properties of the Neumann-Kelvin Problem for a Submerged Body // J. Ship Res. 1987. V. 31. № 4. P. 227–234.
24. *Weinblum G., Amsberg H., Bock W.* Tests on Wave Resistance of Immersed Bodies of Revolution. Washington D.C.: The David W. Taylor Model Basin. 1950.
25. *Gertler M.* Resistance Experiments on a Systematic Series of Streamlined Bodies of Revolution – For Application to the Design of High-Speed Submarines. Washington D.C.: Navy Department: The David W. Taylor Model Basin. 1950.
26. *Farell C., Güven O.* On the Experimental Determination of the Resistance Components of a Submerged Spheroid // J. Ship Res. 1973. V. 17. P. 72–79.
27. *Griffin M.J.* Numerical Prediction of the Maneuvring Characteristics of Submarines Operating Near the Free Surface. PhD in Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology. 2002.
28. *Dawson E.* An investigation into the effects of submergence depth, speed and hull length-to-diameter ratio on the near-surface operation of conventional submarines. PhD thesis, University of Tasmania, Hobart, Australia. 2014.
29. *Gourlay T.P., Dawson E.A.* Havelock-source panel method for near-surface submarines // J. Marine Sci. Appl. 2015. V. 15. № 3. P. 215–224.
<https://doi.org/10.1007/s11804-015-1319-5>
30. *Crook T.P.* An Initial Assessment of Free Surface Effects on Submerged Bodies, MSc Mechanical Engineering, Naval Postgraduate College. USA. 1994.
31. *Pogorelova A.V., Kozin V.M., Zemlyak V.L.* Hydrodynamic forces on slender body advancing in water with ice cover // Proc. 30th Int. Ocean Pol Eng. Conf., Shanghai, China, ISOPE. 2020. V. 1. P. 707–714.
32. *Pogorelova A.V., Kozin V.M., Zemlyak V.L.* The Effect of an Ice Cover on the Trimming Moment of Submarines // IJOPE. 2022. V. 32. № 4. P. 440–447.
<https://doi.org/10.17736/ijope.2022.jc872>

33. *Pogorelova A.V., Zemlyak V.L., Kozin V.M.* Effect of the viscoelasticity of an ice cover on wave resistance and lift force experienced by Joubert submarine // *Acta Mech.* 2023. V. 234. P. 2399–2411.
<https://doi.org/10.1007/s00707-023-03500-x>
34. *Zemlyak V.L., Pogorelova A.V., Kozin V.M.* Motion of a submerged body in a near-surface water environment // *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.* 2022. V. 14. Article 100433.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2021.100433>.
35. *Freudenthal A.M., Geiringer H.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. Berlin: Springer-Verlag, 1962.
36. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Поже Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Физматлит, 1963. 583 с.
37. *Moonesun M., Korol Y.M.* Naval submarine body form design and hydrodynamics. Beau Bassin: LAMBERT Academic Publishing, 2017. 312 p.
38. *Mackay M.* The Standard Submarine Model: A Survey of Static Hydrodynamic Experiments and Semiempirical Predictions. DRDC TR2003–079. Defence R&D Canada – Atlantic, 2003. 98 p.
39. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
40. *Squire V.A., Hosking R.J., Kerr A.D., Langhorne P.J.* Moving Loads on Ice Plates. Kluwer Acad., Dordrecht. 1996.
41. *Takizawa T.* Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load // *Cold Regions Sci. Technol.* 1985. V. 11. P. 171–180.

Influence of a Snow Cover on Hydrodynamic Loads of a Slender Body Moving in Fluid beneath an Ice Cover

V. L. Zemlyak^{a, *}, V. M. Kozin^{b, **}, and A. V. Pogorelova^{a, ***}

^a*Sholem Aleichem Priamursky State University, Birobidzhan, Russia,*

^b*Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy, the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, Komsomol'sk-na-Amure, Russia*

^{*}*e-mail: vellkom@list.ru*

^{**}*e-mail: kozinvictor@rambler.ru*

^{***}*e-mail: milova@yandex.ru*

The motion of a slender body in fluid beneath an ice cover coated with wet snow is considered. It is assumed that the fluid is ideal and incompressible, and the fluid flow is potential. The ice cover is modeled by a viscoelastic floating plate, the snow cover is modeled by a viscous layer. Formulas for calculating the wave resistance, the lift force, and the trimming moment exerted on a slender body which moves unsteadily and rectilinearly in fluid beneath the ice and snow covers are analytically obtained. A numerical analysis of the results shows that the snow cover reduces the absolute values of the extrema of hydrodynamic loads. The combined influence of increase in the snow-cover thickness, decrease in the depth of body's submergence, increase in the ice-cover thickness, and decrease in the depth of water basin on the magnitude of hydrodynamic loads is analyzed.

Keywords: ice cover, snow cover, submerged slender body, hydrodynamic loads.

УДК 533.6.011

ДИНАМИКА ИОННЫХ И ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ В РАЗРЯДНОЙ КАМЕРЕ ПЕННИНГА

© 2024 г. С. Т. Суржиков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Двухжидкостная и двухтемпературная диффузионно-дрейфовая модель газоразрядной плазмы использована для численного исследования структуры разряда Пеннинга в цилиндрической разрядной камере при давлении молекулярного водорода 1 мТорр, напряжении между электродами 500–1000 В и индукции осевого магнитного поля 0.001–0.2 Тл. В расчетах получены два режима существования разряда Пеннинга, которые качественно отличаются по электродинамической структуре потоков заряженных частиц газоразрядной плазмы, а также переходные режимы и режимы погасания в слабом и сильном магнитном поле. Найдены условия, при которых в приосевых областях возникает осцилляционное движение электронных и ионных потоков. Показано, что результаты численного моделирования с использованием диффузионно-дрейфовой модели позволяют получить непротиворечивые данные в сравнении с экспериментом, при этом дают возможность получить представление о формировании структуры потоков частиц электроразрядной плазмы, что позволяет объяснить наблюдаемые экспериментальные данные.

Ключевые слова: разряд Пеннинга, двухтемпературная двухжидкостная диффузионно-дрейфовая модель, динамика потоков ионов и электронов в электроразрядной камере, осцилляции газоразрядной плазмы.

DOI: 10.31857/S1024708424030151, **EDN:** PERMNY

ВВЕДЕНИЕ

Разряд Пеннинга, открытый около 100 лет назад [1–3], нашел широкое применение в практике прикладных электрофизических исследований в различных электронных устройствах (магнитно-разрядные манометры, магнетронные напылительные системы, ионные насосы, источники калиброванного светового излучения и др. [4, 5]), в создании направленных пучков ионов [6–8]. Продолжаются фундаментальные физические исследования разрядов Пеннинга [8–14]. Благодаря своим уникальным свойствам разряд Пеннинга привлекает внимание специалистов по фундаментальной магнитной газовой динамике, физике плазмы и астрофизике [15–17].

Типичная конфигурация разрядной камеры Пеннинга с характерными размерами ~ 1 см показана на рис. 1. Она состоит из цилиндрического анода радиусом R_A и высотой $H_A = X_{A2} - X_{A1}$. В одной из двух катодных секций радиусами R_C и R_{AC} вблизи оси симметрии имеется отверстие радиусом R_m , через которое из камеры выходит поток заряженных ионов. Катодная секция с отверстием называется антиткатодом, а центральное отверстие – мениском. Упрощенная схема внешней электрической цепи включает источник питания ε и омическое сопротивление R_0 .

Обычно газоразрядная секция помещается внутри вакуумной камеры с типичным давлением $p \sim 1$ мТорр. Электродвижущая сила источника питания (э.д.с.) имеет порядок $\varepsilon \sim 1$ кВ, а омическое сопротивление $R_0 \sim 1$ –100 кОм. Здесь приводятся некоторые характерные параметры, которые могут заметно отличаться в зависимости от назначения и способа использования разрядной камеры.

Принципиальным элементом разряда Пеннинга является осевое магнитное поле с индукцией $B_x \sim 0.01$ –0.1 Тл. Именно указанное магнитное поле во многом обеспечивает условия горения разряда, поскольку в его отсутствии электроразрядная плазма с указанными параметрами не может существовать в режиме само поддержания.

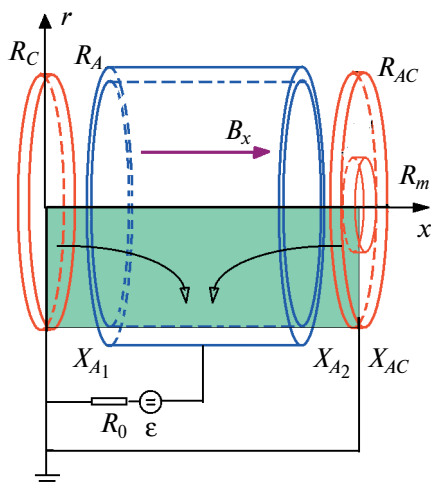


Рис. 1. Расчетная схема разряда Пеннинга.

Поясним принцип работы камеры Пеннинга, используя схему, показанную на рис. 1. Электрическое напряжение, подаваемое на анодную секцию, создает внутри камеры электрическое поле, которое при инициирующем создании затравочной плазмы, ускоряет электроны от катодных секций к аноду (см. две стрелки на рис. 1). Ионы движутся ускоряясь к катодным секциям и, достигая их — «выбивают» с поверхности электроны, поступающие в область газоразрядного промежутка. Механизм рождения электронов при достижении ускоренных ионов поверхности катода является весьма сложным и называется вторичной ион-электронной эмиссией. В соответствии с современными представлениями главной составной частью этого механизма является туннельный эффект полевого взаимодействия электронов материала катода с налетающими на катод ионами. Поступившие в область разряда электроны ускоряясь в электрическом поле устремляются к аноду.

Если бы не было осевого магнитного поля, то при столь низких давлениях газа в камере, как $p \sim 1$ мТорр, вероятность ионизирующих столкновений электронов с нейтральными частицами была бы очень низкой, и родившиеся у поверхности катода электроны быстро достигли бы анода не создавая на своем пути новые электрон-ионные пары. Отсутствие рождения новых пар заряженных частиц неизбежно приведет к погасанию первично созданной разрядной плазмы.

Однако, как уже отмечалось, в разрядной камере Пеннинга создается осевое магнитное поле. Поэтому, электроны, движущиеся по направлению к аноду, на самом деле попадают в скрещенное электрическое и магнитное поле. В результате этого, как хорошо известно из теории физики плазмы [15] и магнитогидродинамики [16,17], возникает азимутальное движение электронов и ионов, которое, при определенном стечении обстоятельств, приводит к объемной ионизации газа, заполняющего камеру.

Для справки приведем оценки типичных концентраций нейтральных и заряженных частиц в камере Пеннинга при $p=1$ мТорр и температуре $T=293$ К: $n_n = 3.2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $n_e \sim n_i \approx 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Из сказанного становится ясным, что значительная часть усилий в экспериментальной и теоретической физике разряда Пеннинга были направлены на поиск таких условий, при которых газоразрядная плазма стабильно горит и обеспечивает необходимые параметры для целевого использования. При этом, было обнаружено, что в зависимости от типа газа, в котором зажигается разряд, его давления, параметров внешней электрической цепи, абсолютной величины и конфигурации внешнего магнитного поля, а также в зависимости от геометрических параметров разрядных камер, существуют сильно различающиеся режимы его существования, вплоть до различия формы плазменных конфигураций в камере [5, 18].

Оставляя в стороне серию проблемных задач экспериментальной физики разряда Пеннинга, часть из которых достаточно подробно изложена в работах [5, 11–14, 18], в данной работе уделим внимание расчетно-теоретическим моделям.

В настоящее время нашли наибольшее развитие методы компьютерного моделирования, основанные на так называемых PIC-моделях (Particles in Cells) [19–21] и диффузионно-дрейфовых моделях [22, 23].

Поскольку данная работа посвящена применению диффузионно-дрейфовой модели к расчету параметров Пеннинговского разряда, отметим некоторые работы, предшествующие данному исследованию.

В работах [24, 25] численно изучалась структура разряда Пеннинга в молекулярном водороде при относительно высоких давлениях, $p=0.5\text{--}5$ Торр. Рассчитана его пространственная структура в зависимости от размеров анода, э.д.с. в диапазоне $\varepsilon=100\text{--}200$ В и индукции осевого магнитного поля в диапазоне $B_x=0.1\text{--}0.6$ Тл. Получены азимутальные скорости усредненного вращения электронов $V_{e,\varphi}\sim 10^7$ см/с и ионов $V_{i,\varphi}\sim 10^5$ см/с. Показано, что в разрядном промежутке возможно существования как минимум двух областей разнонаправленного движения ионов и электронов.

Численно исследованы закономерности в распределениях осевых скоростей ионов и электронов при уменьшении давления, увеличении э.д.с. и индукции магнитного поля. Показано, что наибольшие скорости осевого движения электронов и ионов, соответственно $V_{e,x}\sim 10^9$ см/с и $V_{i,x}\sim 3.0\times 10^7$ см/с, достигаются при наименьших из исследованных давлений, $p=0.5$ Торр. При фиксированном давлении $p=1$ Торр ускорение движения заряженных частиц достигается при увеличении э.д.с. Рост индукции магнитного поля замедляет скорость усредненного аксиального движения электронов и ионов.

В работе [23] диффузионно-дрейфовая двухжидкостная двухтемпературная модель газоразрядной плазмы использована для описания электродинамической структуры пеннинговского разряда в молекулярном водороде при давлении порядка 1 мТорр. Посредством численного моделирования изучено влияние на структуру разряда геометрических параметров разрядной камеры, вариации э.д.с. источника питания внешней электрической цепи, а также индукции осевого магнитного поля.

Показана определяющая роль потока высокоэнергетичных электронов, формируемых при азимутальном движении плазменных потоков вокруг оси симметрии разрядной камеры, на ионизацию нейтрального газа. Обнаружены режимы квазимонотонного и осцилляторного усредненного движения потоков заряженных частиц в приосевых областях.

Расчеты работы [23] основаны на использовании модифицированной диффузионно-дрейфовой модели, предложенной в работе [26]. Суть модификации диффузионно-дрейфовой модели состояла в ведении нелинейной зависимости подвижностей заряженных частиц от напряженности электрического поля. Указанная нелинейная зависимость получается при учете особенностей подвижностей заряженных частиц при высоких приведенных полях. Использование модифицированной диффузионно-дрейфовой модели позволило получить данные о пространственной структуре пеннинговского разряда в камере при давлении $p=0.0012$ Торр $\varepsilon=2500$ В, $R_0=3000$ кОм и коэффициенте вторичной электронной эмиссии $\gamma=0.3$.

В данной работе, также, как и в [23, 26] используется модифицированная диффузионно-дрейфовая модель. Главной задачей является изучение структуры потоков ионов и электронов при изменении э.д.с. источника питания и величины индукции осевого магнитного поля с целью нахождения условий погасания разряда Пеннинга и режимов, при которых в приосевых областях начинают протекать процессы, которые можно ассоциировать с плазменной турбулентностью, хотя, по всей видимости, наблюдаемые регулярные вихревые структуры все же нельзя отнести классической гидродинамической турбулентности.

Геометрические параметры фиксированы. Везде в расчетах давление в разрядной камере $p=1$ мТорр, коэффициент вторичной электронной эмиссии $\gamma=0.1$, диапазон изменения э.д.с. 500–1000 В и индукции магнитного поля 0.001–0.2 Тл.

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДИФфуЗИОННО-ДРЕЙФОВОЙ МОДЕЛИ РАЗРЯДА ПЕННИНГА

В основе уравнений диффузионно-дрейфовой модели газоразрядной плазмы лежит процедура получения системы уравнений движения многожидкостной и многотемпературной частично ионизованной смеси газов во внешних электрическом и магнитном полях. Подробное изложение указанной процедуры можно найти в хорошо известных монографиях [15, 27, 28]. Применительно к тлеющим разрядам в магнитном поле уравнения получены в [22, 29].

Модифицированная диффузионно-дрейфовая модель формулируется на основе уравнений неразрывности для концентраций электронов n_e и положительных ионов n_i , а так же для потенциала энергетического поля φ , который определяет вектор напряженности электрического поля

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma_e) = \alpha(E)|\Gamma_e| - \beta n_i n_e, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\Gamma_i) = \alpha(E)|\Gamma_e| - \beta n_i n_e, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = 4\pi e(n_e - n_i), \quad (1.3)$$

где: $\Gamma_e = -D_e \operatorname{grad} n_e - n_e \mu_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B})$, $\Gamma_i = -D_i \operatorname{grad} n_i + n_i \mu_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B})$; Γ_e, Γ_i – плотности потоков электронов и положительных ионов, которые позволяют найти вектор плотности тока $\mathbf{j} = e(\Gamma_i - \Gamma_e)$; $\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_i$ – векторы усредненных скоростей электронов и ионов; $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ – напряженность электрического поля; $E = |\mathbf{E}|$; $\mathbf{B}$ – вектор индукции внешнего магнитного поля; $\alpha(E)$ и β – коэффициенты ионизации и рекомбинации; n_e, n_i – объемная концентрация электронов и ионов; μ_e, μ_i – подвижности электронов и ионов; D_e, D_i – коэффициенты диффузии электронов и ионов; e – заряд электрона.

При учете осевого магнитного поля с индукцией B_x плотности потоков электронов и ионов в диффузионно-дрейфовой модели в покомпонентной записи приобретают вид:

$$\Gamma_{e,x} = -D_e \frac{\partial n_e}{\partial x} - \mu_e n_e E_x = V_{e,x} n_e, \quad \Gamma_{e,r} = -\frac{D_e}{1+b_e^2} \frac{\partial n_e}{\partial r} - \frac{\mu_e}{1+b_e^2} n_e E_r = V_{e,r} n_e, \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{e,\varphi} = -b_e \Gamma_{e,r}, \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{i,x} = -D_i \frac{\partial n_i}{\partial x} + \mu_i n_i E_x = V_{i,x} n_i, \quad \Gamma_{i,r} = -\frac{D_i}{1+b_i^2} \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{\mu_i}{1+b_i^2} n_i E_r = V_{i,r} n_i, \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{i,\varphi} = -b_i \Gamma_{i,r}, \quad (1.7)$$

$$|\Gamma_e| = \sqrt{\Gamma_{e,x}^2 + \Gamma_{e,r}^2 + \Gamma_{e,\varphi}^2}. \quad (1.8)$$

Здесь $V_{e,x}, V_{i,x}, V_{e,r}, V_{i,r}$ – усредненные скорости электронов и ионов в осевом и радиальном направлении.

Принципиально важно, что в присутствии магнитного поля кроме осевой и радиальной компонент плотностей потоков электронов и ионов ($\Gamma_{e,x}, \Gamma_{e,r}, \Gamma_{i,x}, \Gamma_{i,r}$) появляются соответствующие азимутальные составляющие потоков ($\Gamma_{e,\varphi}, \Gamma_{i,\varphi}$). Ниже будет показано, что именно благодаря этим потокам в разряде формируются условия объемной ионизации.

Здесь введены параметры Холла b_e и b_i

$$b_e = \mu_e B_x = \frac{\omega_e}{v_{en}}, \quad b_i = \mu_i B_x = \frac{\omega_i}{v_{in}}, \quad (1.9)$$

связывающие подвижности электронов и ионов с величиной индукции магнитного поля и с частотами столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами газа, заполняющего разрядную камеру, v_{en} и v_{in} соответственно. Здесь коэффициенты $\omega_e = eB_x/m_e$ и $\omega_i = eB_x/m_i$ являются ларморовскими частотами вращения электронов и ионов в магнитном поле. Использование введенных характеристик элементарных процессов газоразрядной плазмы позволяет определить качественную картину элементарных плазменных процессов.

Граничные условия для интегрирования системы уравнений (1.1)–(1.3) формулируются в следующем виде:

$$x = 0, \quad r \in [0, R_C]: \quad \frac{\partial n_i}{\partial y} = 0, \quad \Gamma_e = \gamma \Gamma_i, \quad \varphi = 0,$$

$$\begin{aligned}
x = H: r \in [R_m, R_{AC}]: \frac{\partial n_i}{\partial y} = 0, \Gamma_e = \gamma \Gamma_i, \varphi = 0, \\
x = H: r < R_m: \frac{\partial n_i}{\partial y} = \frac{\partial n_e}{\partial y} = 0, \varphi = 0, \\
r = 0, \frac{\partial n_e}{\partial x} = \frac{\partial n_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\
r = R_A, x < X_{A_1}: \frac{\partial n_e}{\partial r} = \frac{\partial n_i}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \\
r = R_A, X_{A_1} < x < X_{A_2}: \frac{\partial n_e}{\partial x} = 0, n_i = 0, \varphi = V_{dr}, \\
r = R_A, x > X_{A_2}: \frac{\partial n_e}{\partial r} = \frac{\partial n_i}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где: γ – коэффициент вторичной ион-электронной эмиссии, который определяет число электронов, «выбиваемых» ионами при их попадании на катод; V_{dr} – падение напряжения на электродах (уравнение (1.19) для определения этой величины определено ниже).

В качестве начального условия задается квазинейтральное сферическое облако заряженных частиц с концентрацией $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$ в центре разрядной камеры.

Подробный анализ способа задания замыкающих электрофизических коэффициентов и функций выполнен в работе [23]. Здесь приведем их без дополнительных комментариев.

Подвижности ионов и электронов рассчитываются по соотношениям, в которых учтены два механизма столкновительного взаимодействия заряженных и нейтральных частиц

$$\mu_{i,eff} = \min \left\{ \frac{\mu_i p}{p}, \frac{1.09 \cdot 10^5}{\sqrt{P_{[Topp]} E_{[B/cm]}}} \right\}, \mu_{e,eff} = \min \left\{ \frac{\mu_e p}{p}, \frac{2.4 \cdot 10^6}{\sqrt{P_{[Topp]} E_{[B/cm]}}} \right\} \tag{1.11}$$

поэтому скорости дрейфа $V_{d,i}, V_{d,e}$ и коэффициенты диффузии D_i, D_e выражаются по формулам

$$V_{d,i} = \mu_{i,eff} E, D_{i,eff} = \mu_{i,eff} T_i \text{ и } V_{d,e} = \mu_{e,eff} E, D_{e,eff} = \mu_{e,eff} T_e. \tag{1.12}$$

Заметим, что при использовании модифицированной модели подвижностей электронов при переходе от слабых к сильным полям для электронов при $B=0.1$ Тл параметр Холла оценивается величиной $b_e \sim 10$.

Коэффициенты ионизации в относительно малых и предельно больших (для данного типа разряда) приведенных полях имеют вид

$$\alpha_e = P_{[Topp]} A_{[1/cm \cdot Topp]} \exp \left[-\frac{B_{[B/(cm \cdot Topp)]}}{E_{[B/cm]/P_{[Topp]}}} \right] \tag{1.13}$$

$$\alpha_e = N_n \sigma_i = N_n 4\pi a_0^2 \left(\frac{I_H}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\varepsilon - I}{I} = N_n 3.52 \cdot 10^{-16} \left(\frac{I_H}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\varepsilon - I}{I}, \tag{1.14}$$

В расчет был также включен вклад ионов в ионизацию нейтрального газа: $\alpha_i = 3.52 \times 10^{-16} N_n$. В качестве граничного значения в расчетах по (1.12) и (1.14) выбрана величина приведенного поля $E_{[B/cm]/P_{[Topp]}} = 1000 \text{ В/(см} \cdot \text{Торр)}$. Энергии электронов и ионов оценивается по соотношениям

$$\tilde{\varepsilon}_{e,(x,r,\varphi)} = 2.84 \times 10^{-16} V_{e,(x,r,\varphi)}^2 + T_{e,eV}, \text{ эВ}$$

Таблица 1. Исходные данные расчетов и интегральные параметры разряда Пеннинга

ε , В	B_x , Тл	V_{dr} , В	I , мА
500	0.0025		
500	0.005	499	0.088
500	0.01	499	0.307
500	0.1	495	1.390
500	0.2		
750	0.001		
750	0.005	749	0.13
750	0.01	748	0.49
750	0.05	744	2.00
750	0.1	741	2.89
750	0.15		
1000	0.001		
1000	0.005	999	0.17
1000	0.01	997	0.71
1000	0.05	994	1.94
1000	0.10	981	5.14
1000	0.15	991	2.96
1000	0.20		

$$\tilde{\varepsilon}_{H_2^+, (x,r,\varphi)} = 1.04 \times 10^{-12} V_{H_2^+, (x,r,\varphi)}^2 + T_{H_2^+, \text{eV}}, \text{ эВ}$$

где: $T_{e,\text{eV}}$ — энергия теплового движения электронов, в эВ.

Теперь, учитывая соотношения для слабых и сильных приведенных полей плотности потоков электронов в продольном магнитном поле приобретают следующий вид:

$$\Gamma_{e,x} = -D_{e,\text{eff}} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \mu_{e,\text{eff}} n_e E_x, \quad \Gamma_{e,r} = -\frac{D_{e,\text{eff}}}{1 + b_{e,\text{eff}}^2} \frac{\partial n_e}{\partial r} - \frac{\mu_{e,\text{eff}}}{1 + b_{e,\text{eff}}^2} n_e E_r, \quad (1.15)$$

$$\Gamma_{e,\varphi} = -b_{e,\text{eff}} \Gamma_{e,r}, \quad b_{e,\text{eff}} = \mu_{e,\text{eff}} B_x. \quad (1.16)$$

Аналогично для ионов:

$$\Gamma_{i,x} = -D_{i,\text{eff}} \frac{\partial n_i}{\partial x} + \mu_{i,\text{eff}} n_i E_x, \quad \Gamma_{i,r} = -\frac{D_{i,\text{eff}}}{1 + b_{i,\text{eff}}^2} \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{\mu_{i,\text{eff}}}{1 + b_{i,\text{eff}}^2} n_i E_r, \quad (1.17)$$

$$\Gamma_{i,\varphi} = -b_{i,\text{eff}} \Gamma_{i,r}, \quad b_{i,\text{eff}} = \frac{\mu_{i,\text{eff}} B_x}{c}. \quad (1.18)$$

Уравнения решаются совместно с уравнением внешней электрической цепи, которое для постоянного тока имеет вид

$$\varepsilon = V_{dr} + IR_0, \quad (1.19)$$

где V_{dr} — падение напряжения на электродах; I — полный ток через разрядный промежуток; ε — э.д.с. источника питания; R_0 — сопротивление внешней цепи. Подробности используемой численной модели и реализующей ее алгоритмов приведены в работах [22, 29].

Подводя итог формулировке уравнений модифицированной диффузионно-дрейфовой модели разряда Пеннинга обратим внимание на самосогласованный характер распределения концентраций заряженных

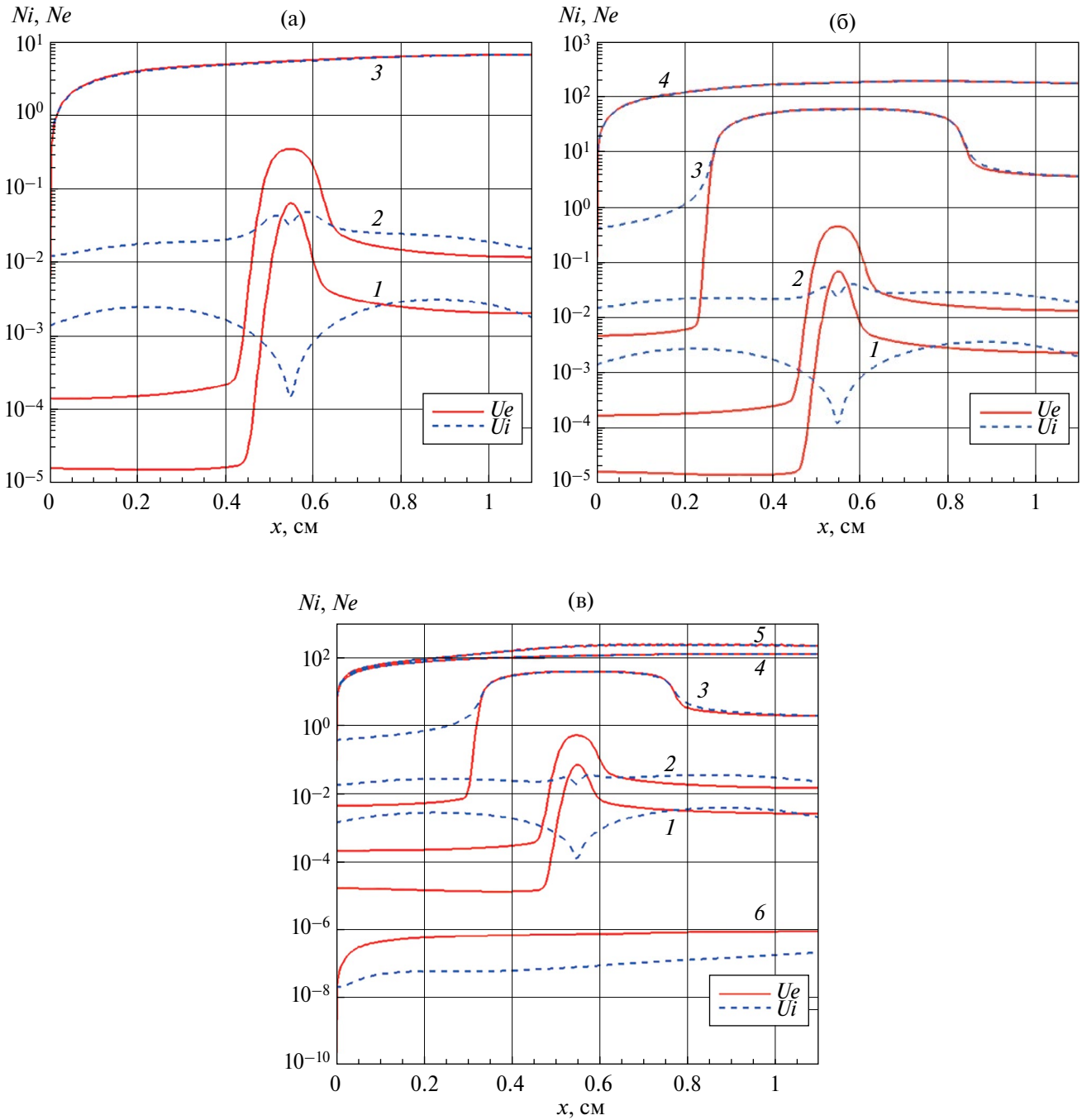


Рис. 2. Распределение концентраций ионов ($N_i = n_i/n_0$, пунктир) и электронов ($N_e = n_e/n_0$) вдоль оси симметрии; (а) $\varepsilon=500$ В, $B_x=0.005$ Тл (кривая 1), $B_x=0.01$ Тл (2), $B_x=0.1$ Тл (3); (б) $\varepsilon=750$ В, $B_x=0.005$ Тл (1), $B_x=0.01$ Тл (2), $B_x=0.05$ Тл (3), $B_x=0.1$ Тл (4); (в) $\varepsilon=1000$ В, $B_x=0.005$ Тл (1), $B_x=0.01$ Тл (2), $B_x=0.05$ Тл (3), $B_x=0.1$ Тл (4), $B_x=0.15$ Тл (5), $B_x=0.2$ Тл (6).

частиц и электрического поля в электроразрядном промежутке. Изменение концентраций электронов и ионов в каждом элементарном объеме расчетной области задается уравнениями неразрывности (1.1) и (1.2).

Плотности потоков заряженных частиц определяются диффузионными процессами в узких приосевых областях (левые части соотношений (1.4) и (1.6)) и процессами дрейфа заряженных частиц

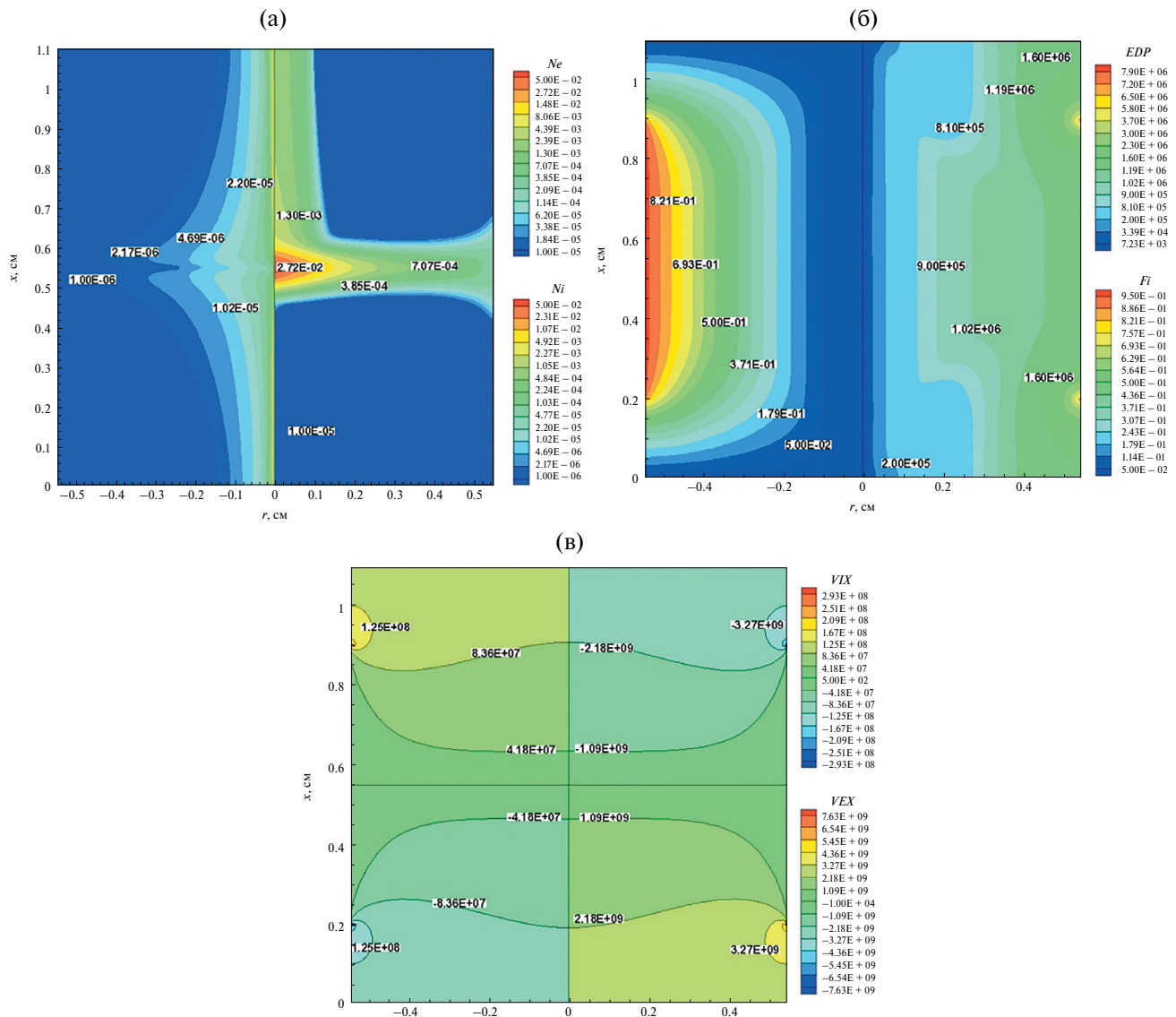


Рис. 3. Поля электродинамических функций при $\epsilon=500$ В, $B_x=0.005$ Тл; (а) концентрации ионов ($N_i = n_i/n_0$, слева) и электронов ($N_e = n_e/n_0$, справа); (б) электрический потенциал ($Fi=\phi/\epsilon$, слева) и приведенное поле ($EDP=E/p$ В/ (см·Торр), справа); (в) осевые скорости ионов ($VIX = V_{i,x}$ см/с, слева) и электронов ($VEX = V_{e,x}$ см/с, справа).

в ускоряющем их электрическом поле (правые части соотношений (1.4) и (1.6)). В азимутальном направлении частицы движутся в результате взаимодействия их радиального движения с осевым магнитным полем (соотношения (1.5) и (1.7)). Модуль полного потока электронов (1.8) определяет интенсивность ионизационных процессов, хотя часть ион-электронных пар рекомбинируют (правые части уравнений (1.1) и (1.2), пропорциональные коэффициенту рекомбинации β). Скорость дрейфовых и ионизационных процессов в модифицированной диффузионно-дрейфовой моделях определяются соотношениями (1.11)–(1.18).

Электроны, достигая анода, формируют полный ток I , рассчитываемый как интеграл по поверхности анода от плотности тока. Учет уравнения для внешней электрической цепи (1.19) позволяет определить падение напряжения на электродах V_{dr} , входящее в граничное условие (1.10). Указанное падение напряжения совместно с уравнением Пуассона (1.3), в правой части которого находится суммарная плотность зарядов, позволяет получить конфигурацию электрического поля, которое, в свою очередь, и определяет процессы переноса заряженных частиц в газоразрядной плазме.

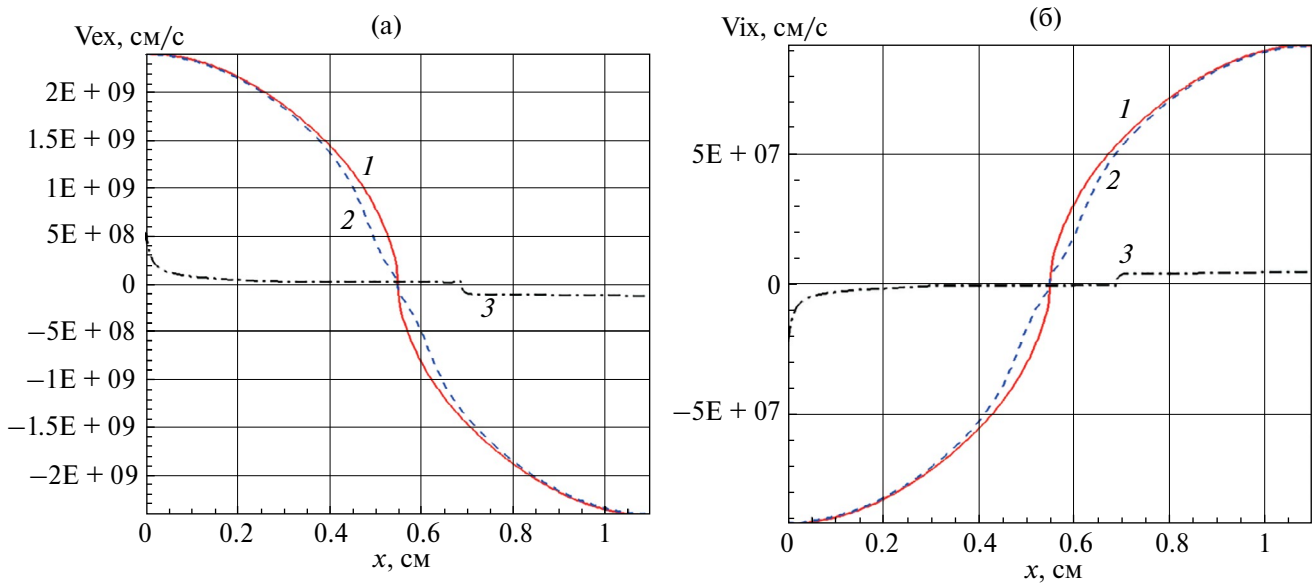


Рис. 4. Осевая скорость электронов (а) и ионов (б) при $\epsilon=500$ В, $B_x=0.005$ Тл (1), $B_x=0.01$ Тл (2) и $B_x=0.1$ Тл (3).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование проводилось при следующих исходных данных: $R_C = R_{AC} = 0.55$ см, $X_C = 0$, $X_{AC} = 1.1$ см, $X_{A1} = 0.2$ см, $X_{A2} = 0.9$ см, давление молекулярного водорода $p = 1$ мТорр, $R_0 = 12$ кОм, $\gamma = 0.1$. Электродвижущая сила источника питания варьировалась в пределах $\epsilon = 500\text{--}1000$ В. Индукция магнитного поля изменялась при заданных значениях э.д.с в пределах $B_x \in [B_{x,\min}, B_{x,\max}]$, обеспечивающих существование разряда Пеннинга, которые находились в процессе расчетов.

При заданных исходных данных устойчивые конфигурации газоразрядной плазмы получались при $0.001 \leq B_x \leq 0.2$ Тл, указанными для каждого значения э.д.с. в табл. 1. Оказалось, что в пределах областей существования разряда Пеннинга по параметру B_x можно обнаружить различные режимы горения разряда, в том числе с образованием плазменных осцилляций в приосевых областях. Для поиска таких областей проводилось несколько пробных расчетов в диапазоне $B_x \in [B_{x,\min}, B_{x,\max}]$.

Прежде, чем анализировать плазмодинамические характеристики разряда в разных условиях существования, рассмотрим такие интегральные характеристики, как полный анодный ток I и падение потенциала между электродами V_{dr} , приведенные в табл. 1. Отсутствие значений I и V_{dr} в этой таблице означает, что разряд погас. Закономерности, следующие из табл. 1 состоят в том, что при всех значениях э.д.с. полный ток через разряд возрастает с увеличением магнитной индукции до определенной величины B_x , а затем достаточно быстро падает. Немонотонное поведение анодного тока с увеличением индукции магнитного поля удалось проследить при $\epsilon = 1000$ В. До момента погасания разряда при $B_x = 0.2$ Тл полный ток падает при $B_x = 0.15$ Тл по сравнению с током при $B_x = 0.1$ Тл, что свидетельствует о подавлении ионизации в разряде в диапазоне $0.1 \leq B_x \leq 0.15$ Тл.

Подавление скорости ионизации в диффузионно-дрейфовой модели можно объяснить обратной пропорциональностью скорости ионизации $\alpha(E)|\Gamma_e|$ в уравнениях (1.1) и (1.2). Учитывая, что параметр Холла для электронов при $B_x = 0.1$ Тл равен примерно 10 [23], получаем, что при этой индукции магнитного поля скорость ионизации падает на порядок (см. соотношения для плотности потока электронов (1.4)). Увеличение анодного тока при росте э.д.с. источника питания при прочих равных условиях связано с увеличением энергии электронов при растущей напряженности электрического поля. Из табл. 1 следует, что при $B_x = 0.01$ Тл анодный ток возрастает от $I = 0.307$ мА до $I = 0.71$ мА при увеличении э.д.с. от 500 В до 1000 В, а при $B_x = 0.1$ Тл анодный ток возрастает от $I = 1.39$ мА до $I = 5.14$ мА. Отметим также незначительное снижение падения напряжения на электродах при увеличении B_x .

В целом следует отметить, что результаты численного моделирования с использованием диффузионно-дрейфовой модели не противоречат наблюдаемым экспериментальным данным [11–14].

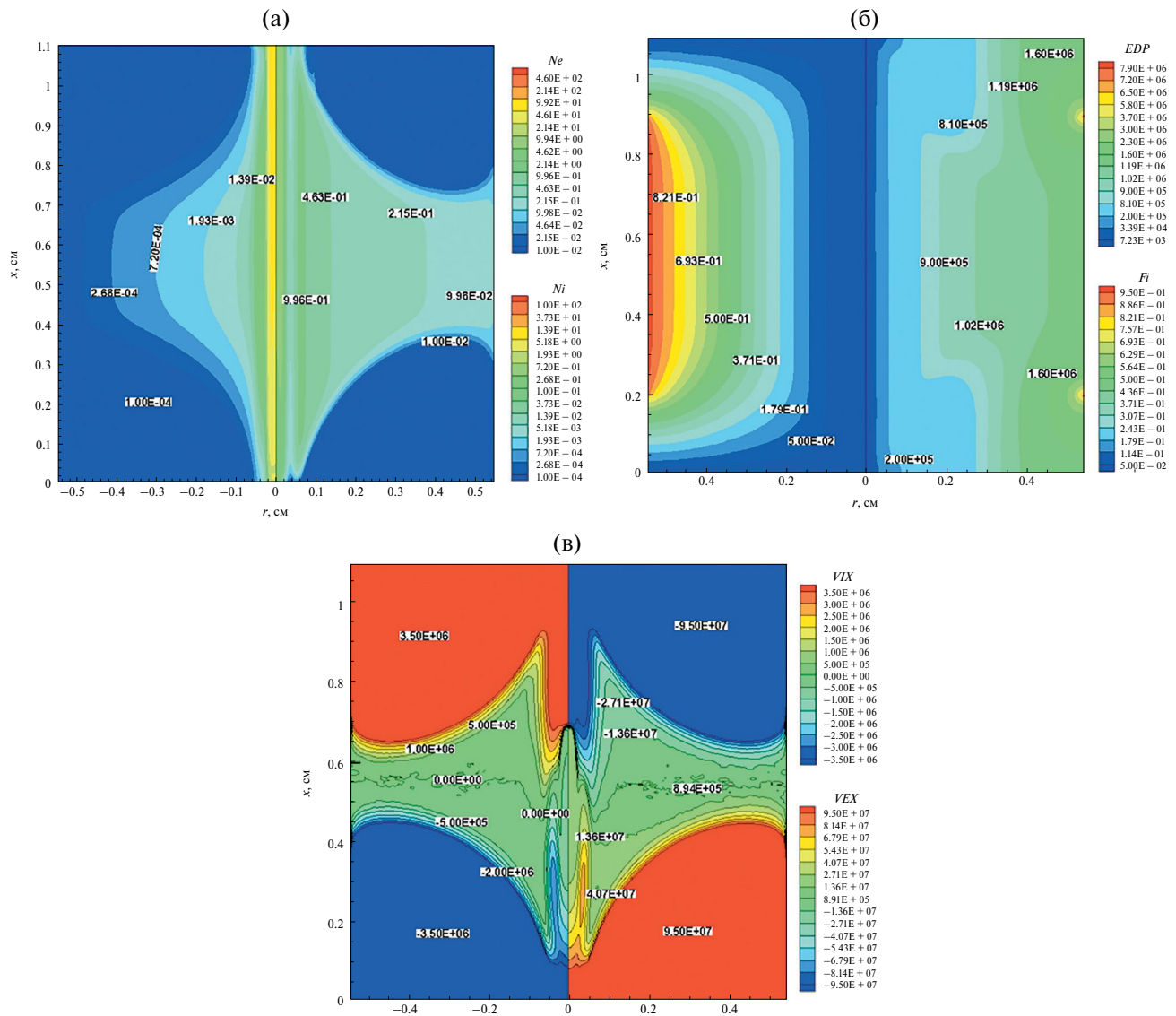


Рис. 5. Поля электродинамических функций при $\epsilon=500$ В, $B_x=0.15$ Тл; (а) концентрации ионов ($N_i = n_i/n_0$, слева) и электронов ($N_e = n_e/n_0$, справа); (б) электрический потенциал ($Fi = \phi/\epsilon$, слева) и приведенное поле ($EDP = E/p$ В/ (см·Торр), справа); (в) осевые скорости ионов ($VIX = V_{ix}$ см/с, слева) и электронов ($VEX = V_{ex}$ см/с, справа).

На рис. 2 показаны распределения концентраций электронов и ионов вдоль оси симметрии разряда Пеннинга при $\epsilon=500$ В (рис. 2а), $\epsilon=750$ В (рис. 2б) и $\epsilon=1000$ В (рис. 2в). На каждом из этих рисунков приведены распределения концентраций заряженных частиц при разной индукции магнитного поля. При $\epsilon=500$ В увеличение индукции магнитного поля в диапазоне $B_x=0.005\text{--}0.1$ Тл приводит к росту концентраций электронов и ионов примерно на два порядка. При $B_x=0.005$ Тл и $B_x=0.01$ Тл максимум концентраций электронов приходится на центральную приосевую часть разрядной камеры. Аналогичные распределения концентраций видны и для других значений э.д.с. (рис. 2б и 2в). На указанных осевых распределениях отметим характерные свойства классических тлеющих разрядов: вблизи катода концентрация электронов ниже примерно на порядок концентрации ионов. Здесь, в соответствии с граничными условиями (1.10) рождение электронов обусловлено эффектом вторичной ион-электронной эмиссии с эффективностью $\gamma=0.1$, а условия для столкновительной ионизации электронов с нейтральными частицами неблагоприятные.

Представленные осевые распределения концентраций электронов и ионов демонстрируют важный факт качественного изменения в структуре разряда при увеличении индукции магнитного поля. При

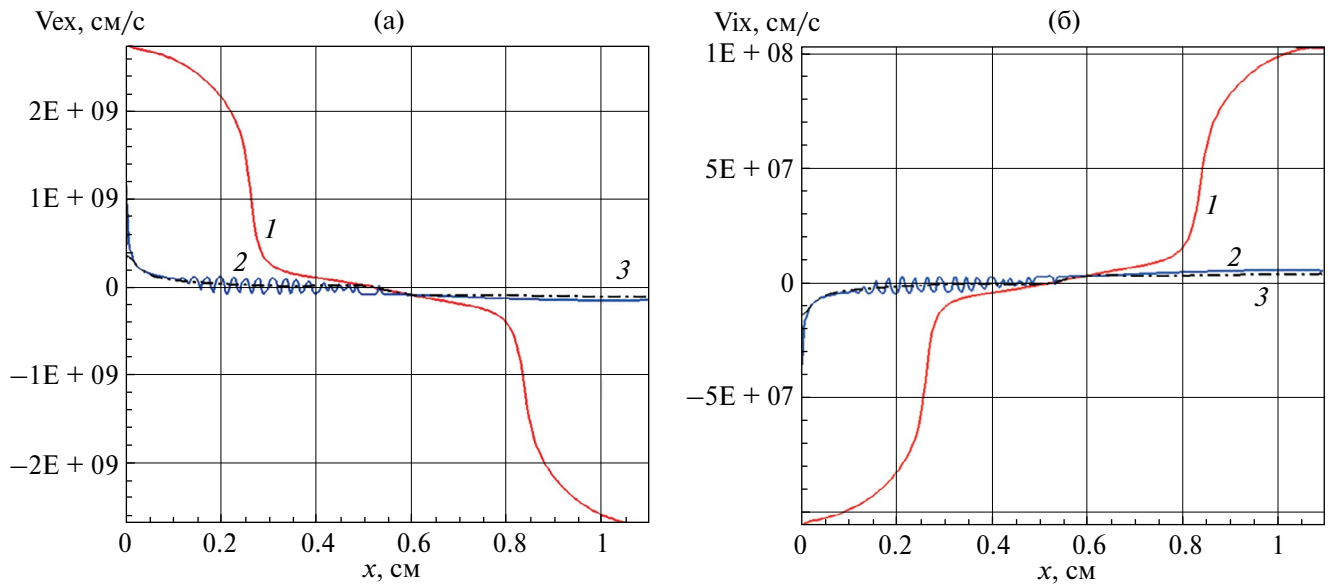


Рис. 6. Осевая скорость электронов (а) и ионов (б) при $\epsilon=750$ В, $B_x=0.001$ Тл (1), $B_x=0.005$ Тл (2) и $B_x=0.1$ Тл (3).

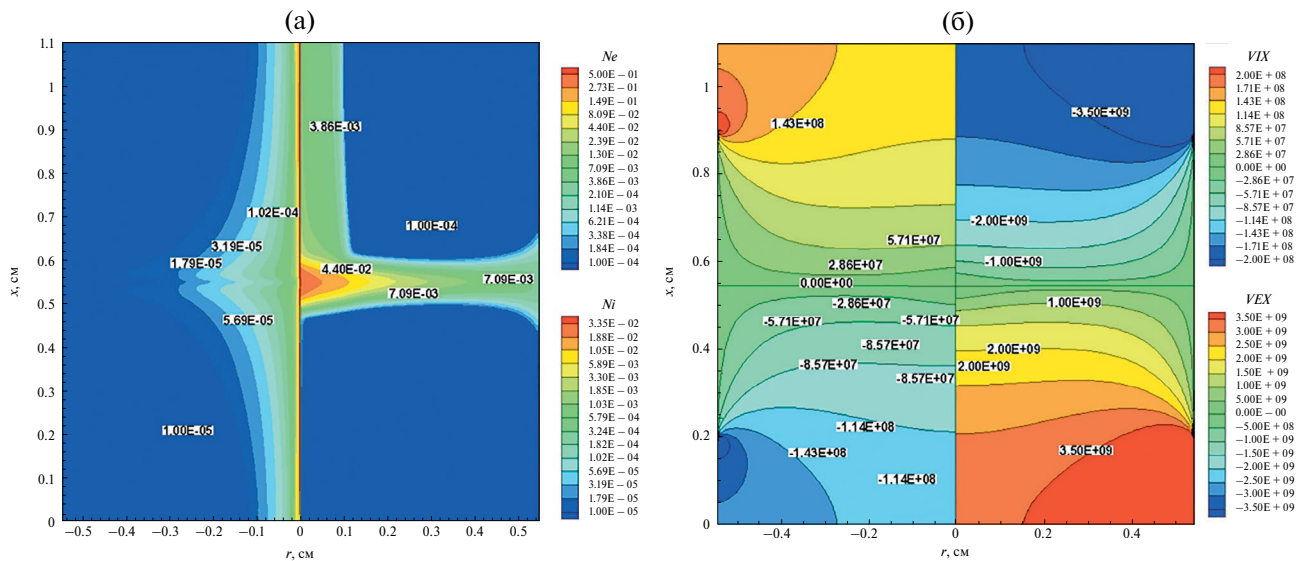


Рис. 7. Поля электродинамических функций при $\epsilon=1000$ В, $B_x=0.01$ Тл; (а) концентрации ионов ($N_i = n_i/n_0$, слева) и электронов ($N_e = n_e/n_0$, справа); (б) осевые скорости ионов ($V_{ix} = V_{i,x}$ см/с, слева) и электронов ($V_{ex} = V_{e,x}$ см/с, справа).

относительно малой величине $B_x \sim 0.005-0.05$ Тл газоразрядная плазма локализована в приосевых областях в центре камеры, а при больших величинах B_x распределение концентраций вдоль оси x становится достаточно однородным.

Поля электронных и ионных концентраций для расчетного случая $B_x=0.01$ Тл, $\epsilon=500$ В показаны на рис. 3а. Для этого же расчетного случая на рис. 3б показаны электрический потенциал и приведенное поле E/p , на рис. 3в – осевые скорости электронов и ионов. Обратим внимание на исключительно высокие скорости заряженных частиц в центральной области практически по всему радиусу разрядной камеры и крайне неоднородное распределение концентраций заряженных частиц в камере.

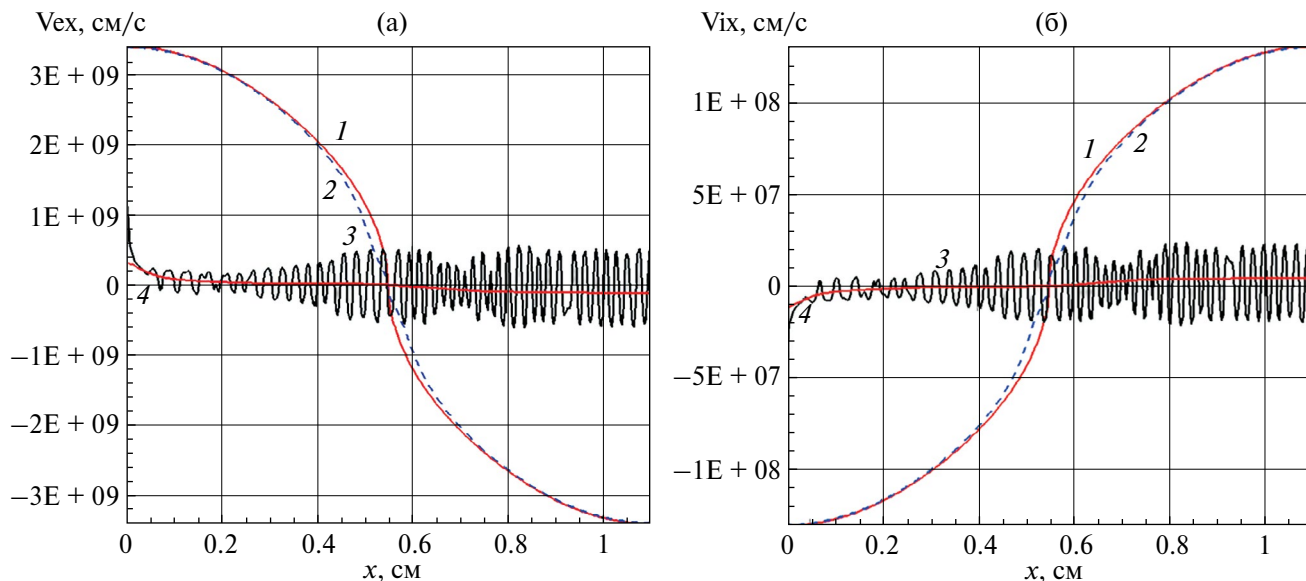


Рис. 8. Осевая скорость электронов (а) и ионов (б) при $\epsilon=1000$ В, $B_x=0.005$ Тл (1), $B_x=0.01$ Тл (2) и $B_x=0.1$ Тл (3).

На рис. 4 показаны распределения скоростей вдоль оси симметрии. Ионы, рожденные в основном в приосевых областях разряда (рис. 3а) ускоряются к катоду и антикатуду до скоростей порядка 10^8 см/с. Электроны, как уже отмечалось, ускоряются от катода и антикатода к центру камеры.

На рис. 4 осевые распределения скоростей электронов и ионов оказываются близкими при $B_x=0.005$ Тл и $B_x=0.01$ Тл. Однако, при увеличении B_x на порядок, в структуре разряда происходят качественные изменения. Осевые скорости ионов и электронов падают примерно на порядок (цифры 3 на рис. 4а, б). Значительно изменяется конфигурация полей скоростей и концентраций во всей области. Распределение этих функций показано на рис. 5. При более однородном распределении потенциала и напряженности электрического поля (рис. 5б) значительная часть камеры заполнена ионизованным газом (рис. 5а), а распределения скоростей ионов и электронов становится несимметричным вдоль оси симметрии в центре камеры (рис. 5в).

Если воспользоваться классификацией режимов горения разряда Пеннинга, обсуждаемой в [5, 18], то два рассмотренных расчетных случая можно отнести к режимам слабого и сильного магнитного поля.

При увеличении э.д.с. источника питания до $\epsilon=750$ В получены осевые распределения скоростей ионов и электронов (рис. 6а, б), которые отличаются от распределений при $\epsilon=500$ В более быстрым падением осевых скоростей от катода и антикатода к центру разрядной камеры (сравните рис. 6 и рис. 4).

При $B_x=0.005$ Тл и $\epsilon=750$ В в приосевой области разряда наблюдаются осцилляции скоростей заряженных частиц. Заметим, что при дальнейшем увеличении индукции магнитного поля до $B_x=0.1$ Тл указанные осцилляции исчезают (кривые 3 на рис. 6).

Еще в большей степени указанные закономерности проявляются при дальнейшем увеличении э.д.с. до $\epsilon=1000$ В. На рис. 7а показаны поля концентраций ионов и электронов при $\epsilon=1000$ В и $B_x=0.01$ Тл, для которых на рис. 2в даны соответствующие осевые распределения, отвечающие режиму слабого магнитного поля (кривая 1 – $B_x=0.005$ Тл, кривая 2 – $B_x=0.05$ Тл) и режиму сильного магнитного поля (кривые 4 и 5 соответственно для $B_x=0.1$ и 0.15 Тл). При $B_x=0.2$ Тл разряд погасает (кривая 6 – $B_x=0.2$ Тл). Конфигурация газоразрядной плазмы на рис. 7 отвечает режиму слабого магнитного поля. Видно, что распределение концентраций заряженных частиц вдоль оси симметрии разряда (кривая 2 на рис. 2в) подобно распределениям концентраций для режима слабого магнитного поля при других ϵ (рис. 2а, б). Значительно более монотонно распределены осевые скорости заряженных частиц (рис. 7б).

В распределениях осевых скоростей ионов и электронов (при $B_x=0.005$ Тл и 0.01 Тл) нет каких-либо особенностей (кривая 2 на рис. 8а, б). На этих же рисунках кривыми 4 показаны распределения скоростей на некоторой промежуточной фазе погасания разряда Пеннинга.

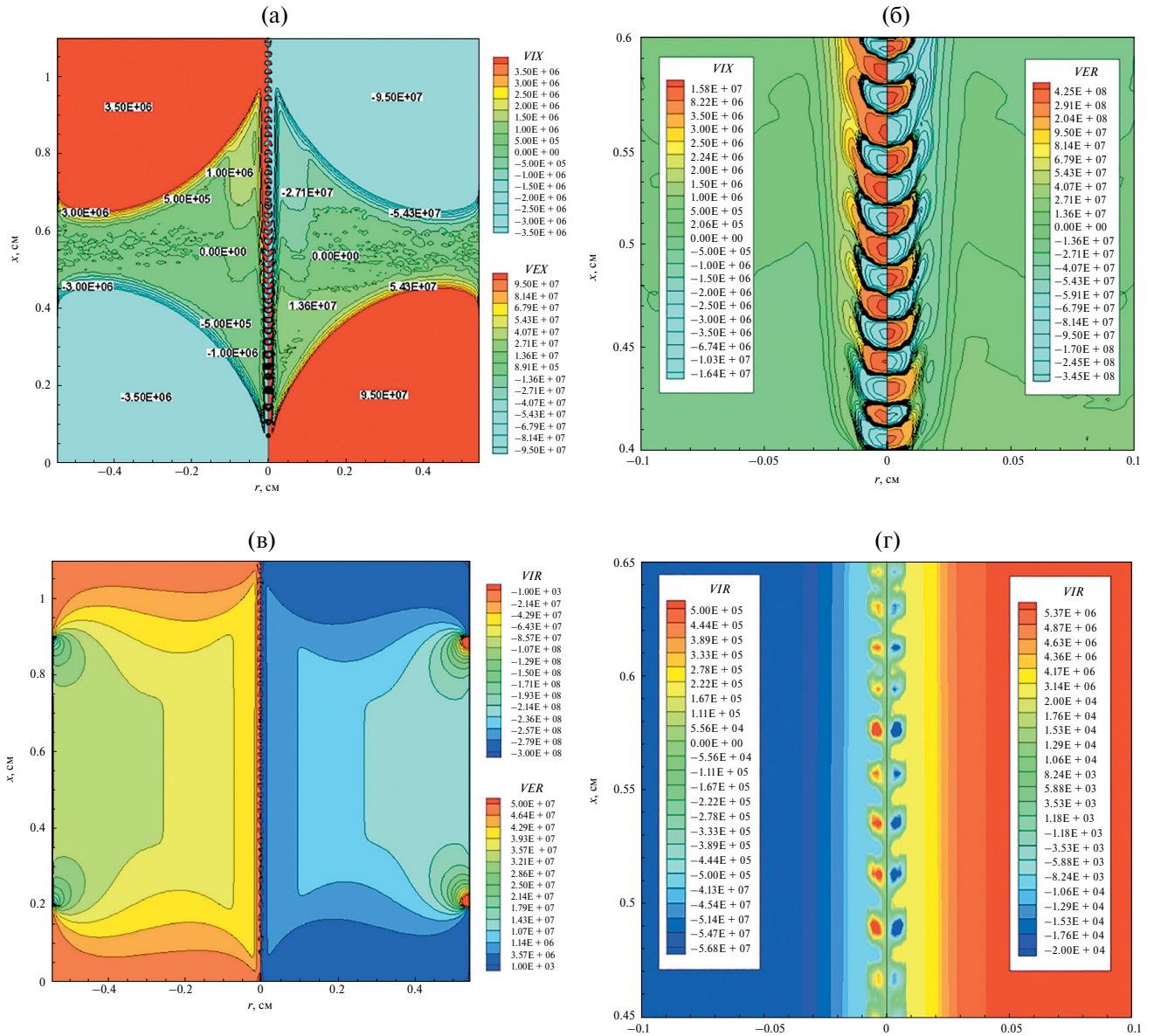


Рис. 9. Поля дрейфовых скоростей заряженных частиц при $\epsilon=1000$ В, $B_x=0.1$ Тл; (а, б) Осевые скорости ионов ($VIX = V_{ix}$ см/с, слева) и электронов ($VEX = V_{ex}$ см/с, справа); (в, г) радиальные скорости ионов ($VIR = V_{i,r}$ см/с, слева) и электронов ($VER = V_{e,r}$ см/с, справа).

Особый интерес представляет режим сильного магнитного поля. На рис. 8 кривыми 3 показаны распределения осевых скоростей ионов и электронов при $B_x=0.1$ Тл. В этом случае наблюдаются весьма сильные осцилляции скоростей, которые являются проявлением возникновения регулярной вихревой структуры в потоках заряженных частиц. Рассмотрим этот режим подробнее.

Во-первых, из анализа нестационарной картины течения становится ясным, что осцилляции продольных скоростей на рис. 8 перемещаются в осевом направлении. На рис. 9а, б показано поле продольных скоростей, а на рис. 9в, г показаны аналогичные поля для радиальной компоненты скоростей, что также подтверждает вихревую структуру движения. Обратим внимание на то, что на рис. 9б и 9г поля скоростей показаны в увеличенном масштабе.

Распределения концентраций (рис. 10а) и приведенного поля с электрическим потенциалом (рис. 10б) является типичным для режима сильного поля (сравните с рис. 5 при $\epsilon=500$ В).

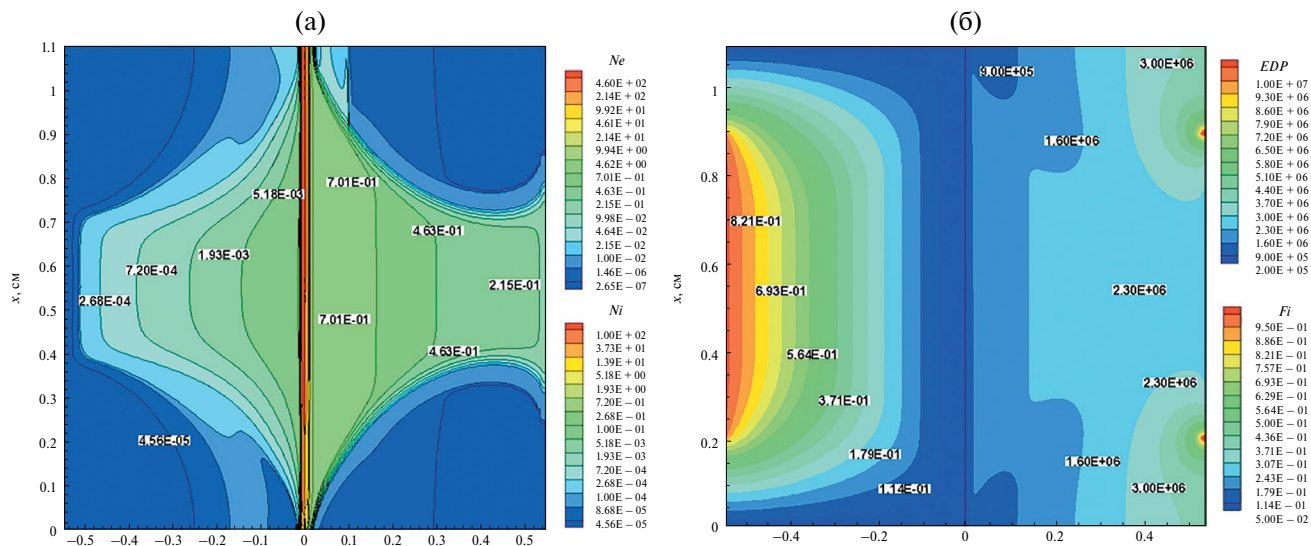


Рис. 10. Поля электродинамических функций при $\epsilon=1000$ В, $B_x=0.1$ Тл; (а) концентрации ионов ($N_i = n_i/n_0$, слева) и электронов ($N_e = n_e/n_0$, справа); (б) электрический потенциал ($F_i = \phi/\epsilon$, слева) и приведенное поле ($EDP = E/p$ В/(см·Торр), справа).

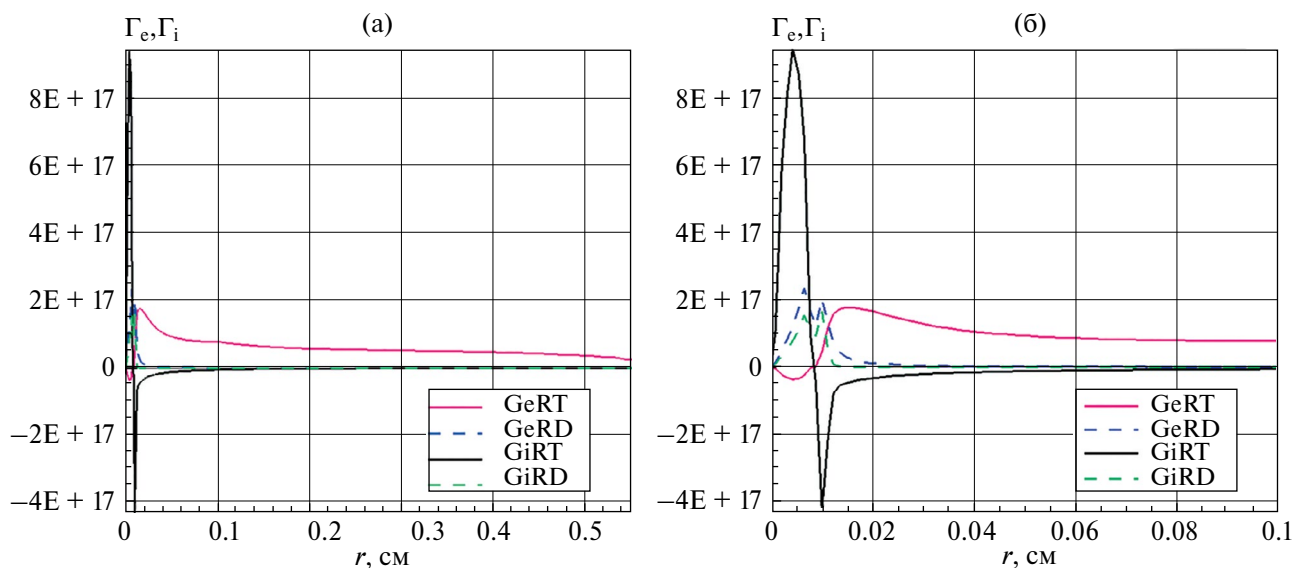


Рис. 11. Радиальные распределения в сечении разрядной камеры $x=0.55$ см дрейфовых (GeRT, GiRT) и диффузионных (GeRD, GiRD) потоков ионов и электронов при $\epsilon=1000$ В, $B_x=0.1$ Тл. На рис. 11б показаны распределения вблизи оси симметрии.

Отметим еще одну важную особенность. Кривая 3 на рис. 8 отвечает моменту времени, когда осевая скорость ионов на выходе из мениска отрицательна. То есть в этот момент времени ионы не вылетают из области мениска. Численная анимация изучаемого процесса показывает периодические изменения знака скорости ионов на выходе из камеры. Значит в данном случае будет наблюдаться осциллирующий поток ионов из разрядной камеры.

Несмотря на осцилляционное движение заряженных частиц вблизи оси симметрии, в основной части разряда превалирует устойчивая конфигурация радиального потока электронов к аноду (рис. 11).

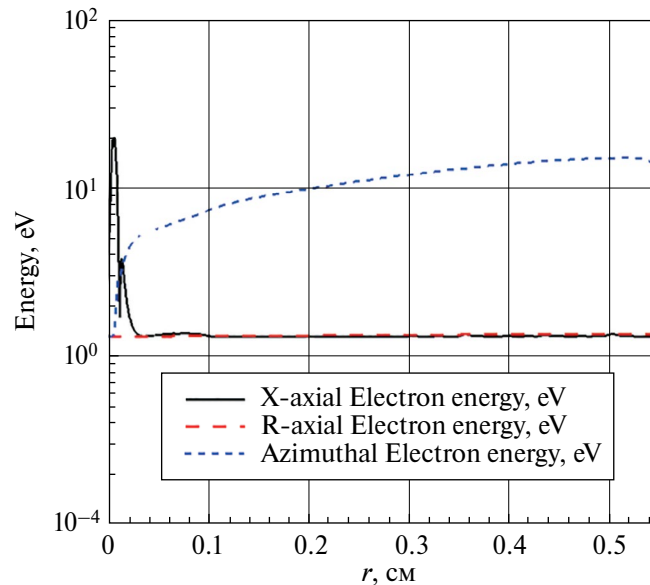


Рис. 12. Распределение по радиусу разрядной камеры в сечении $x=0.55$ см энергии осевых, радиальных и азимутальных потоков электронов при $\epsilon=1000$ В, $B_x=0.1$ Тл.

Поэтому азимутальный поток электронов, энергия которого показана на рис. 12, является главным фактором само поддержания разряда.

Возвращаясь к анализу осцилляций вблизи оси симметрии, отметим, что здесь периодически меняется направление радиальных дрейфовых потоков электронов и ионов, равно как и диффузионных потоков, которые могут превалировать в узких областях (рис. 11б).

На рис. 13 показаны распределения энергии осевых потоков электронов и ионов, а также приведенного поля для трех значений индукции магнитного поля $B_x = 0.01, 0.1$ и 0.15 Тл при одной и той же э.д.с. $\epsilon=1000$ В. Наибольшее значение энергии достигается в режиме слабого магнитного поля.

В режиме сильного магнитного поля (рис. 13б) в области приосевой плазменной неустойчивости течения наблюдается пульсации электрического поля и энергии частиц. На рис. 13в показаны осцилляции поля и энергии частиц для режима, когда величина индукции магнитного поля становится настолько большой, что разряд Пеннинга находится на грани своего существования.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием модифицированной диффузионно-дрейфовой модели выполнено систематическое численное исследование двумерной электродинамической структуры разряда Пеннинга в цилиндрической разрядной камере с характерным размером 1 см при давлении молекулярного водорода 1 мТорр. Напряжение между электродами изменялось в диапазоне 500–1000 В, а индукция осевого магнитного поля в диапазоне 0.001–0.2 Тл.

В расчетах получены несколько режимов существования разряда Пеннинга: режимы слабого и сильного магнитного поля, а также переходные режимы и режимы погасания в слабом и сильном магнитном поле.

Найдены условия существования разряда Пеннинга, при которых в приосевых областях возникает осцилляционное движение электронных и ионных потоков, которое можно ассоциировать с плазменной турбулентностью. Однако, в отличие от классической гидродинамической турбулентности, указанные осцилляции являются более упорядоченными, поэтому, по всей видимости, этот процесс более правильно характеризовать как область осцилляции параметров газоразрядной плазмы.

Показано, что результаты численного моделирования с использованием диффузионно-дрейфовой модели позволяют получить непротиворечивые данные в сравнении с экспериментом, при этом дают

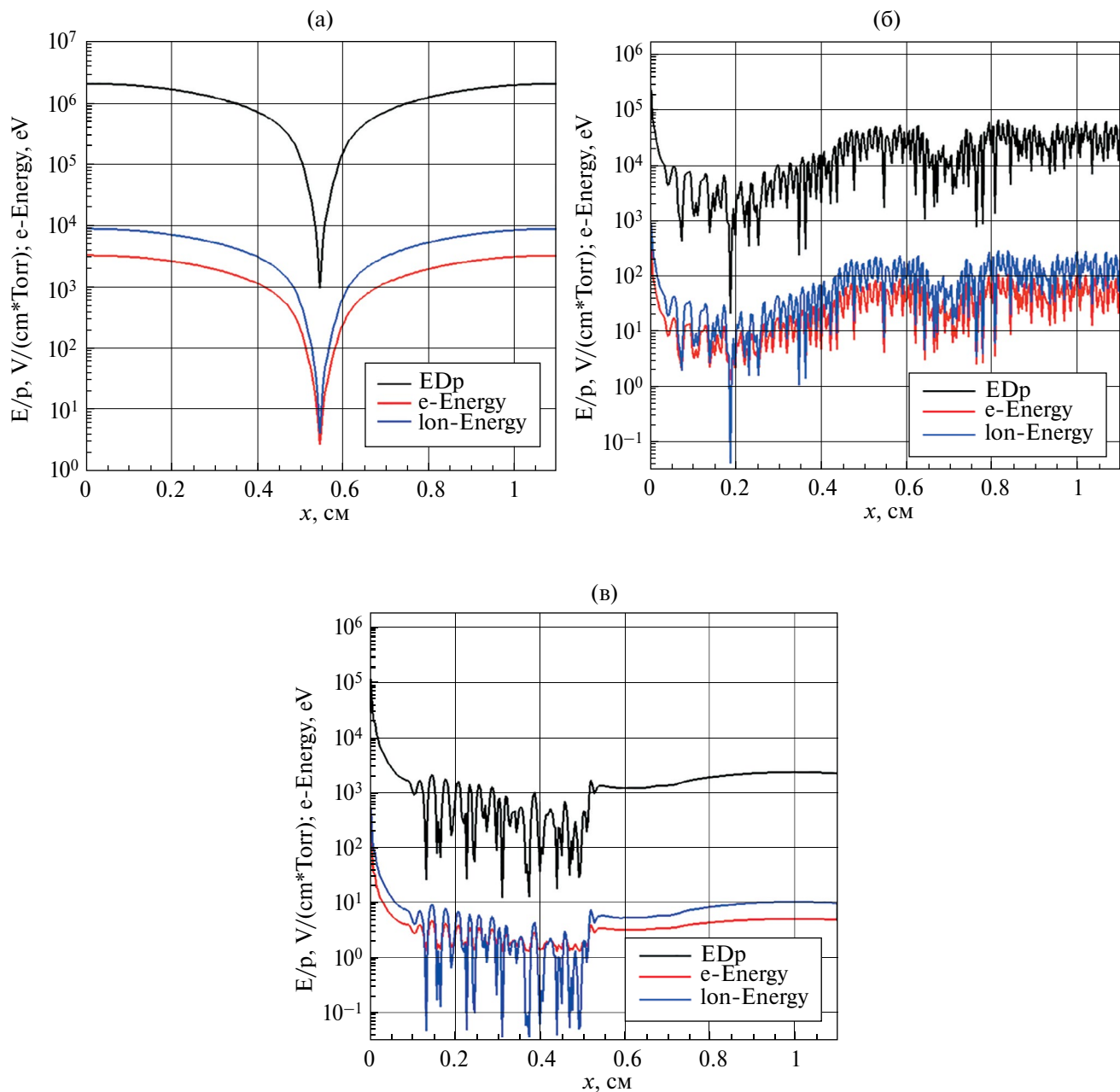


Рис. 13. Осевые распределения приведенного поля ($EDp = E/p$), энергии электронов (e-Energy) и ионов (Ion-Energy) при $\epsilon = 1000$ В; (а) $B_x = 0.01$ Тл, (б) $B_x = 0.1$ Тл, (в) $B_x = 0.15$ Тл.

возможность получить представление о формировании структуры потоков частиц электроразрядной плазмы, которые позволяют объяснить наблюдаемые экспериментальные данные.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена в рамках гранта РФФ № 22-11-00062.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор гарантирует отсутствие конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Penning F.M. The Glow Discharge at Low Pressure Between Coaxial Cylinders in an Axial Magnetic Field// Physica III. 1936. № 9. P. 873–894.
2. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971. 543 с.
3. Hirsch E.N. On the Mechanizm of The Penning Discharge // Brit. J. Appl. Phys. 1964. V. 15. P. 1535–1544.
4. Мамедов Н.В. Физические основы генерации ионных пучков в плазменных источниках нейтронных трубок: Уч. пособ. М.: Буки Веди, 2021. 388 с.
5. Мамедов Н.В., Масленников С.П., Солодовников А.А., Юрков Д.И. Влияние магнитного поля на характеристики импульсного пеннинговского ионного источника// Физика плазмы. 2020. Т. 46. № 2. стр. 172–185.
6. Габович М.Д. Физика и техника плазменных источников ионов. М.: Атомиздат. 1972. 304 с.
7. Веников Н.И. Источники ионов для ускорителей. Препринт ИАЭ-3217. 1979. 54с.
8. Loebl H.W. Plasma-based ion beam sources// Plasma Phys. Control. Fusion. 2005. V. 47. B565–B576
9. Габович М.Д., Плешивец Н.В., Семашко Н.Н. Пучки ионов и атомов для управляемого термоядерного синтеза и технологических целей. М.: Энергоатомиздат. 1986. 249 с.
10. Rovey J.L. Design parameter investigation of a cold-cathode Penning ion source for general laboratory applications// Plasma Sources Sci. Technol. 2008. 17. 035009. 7 pp.
11. Коротаев Ю.В., Мешков И.Н., Поляков В.Н., Смирнов А.В., Сыресин Е.М., Лей Р., Транквиль Ж. Разряд Пеннинга в электронно-оптических приборах с магнитным сопровождением // Журнал технической физики. 1997. Вып. 11. С. 124–126.
12. Рачков Р.С., Масленников С.П., Юрков Д.И. Исследование амплитудно-временных характеристик разряда Пеннинга в миниатюрных ионных источниках // Атомная энергия. 2019. Т. 127. Вып. 1. С. 39–43.
13. Мамедов Н.В., Щитов Н.Н., Колодко Д.В., Сорокин И.А., Синельников Д.Н. Разрядные характеристики плазменного источника Пеннинга // ЖТФ. 2018. № 8. С. 1164–1171.
14. Мамедов Н.В., Щитов Н.Н., Каньшин И.А. Исследование зависимостей эксплуатационных характеристик источника ионов Пеннинга от его геометрических параметров // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16(4).
<http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-4/articles/590/>
15. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит. 2006. 576 с.
16. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 235 с.
17. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
18. Мамедов Н.В., Масленников С.П., Пресняков Ю.К., Солодовников А.А., Юрков Д.И. Моды разряда пеннинговского ионного источника при импульсном и стационарном режиме питания // ЖТФ. 2019. Т. 89. Вып.9. С. 1367–1374.
19. Dikalyuk A.S. Development of Particle-in-Cell Solver for Numerical Simulation of Penning Discharge. // AIAA 2017–0842. 2017. p. 22
20. Rokhmanenkov A.S., Kuratov S.E. Numerical Simulation of Penning Gas Discharge in 2D/3D//J. Phys.: Conf. Ser. 1250. 2019. 012036
21. Tyushev M., Papahn Zadeh M., Sharma V., Sengupta M., Raitses Y., Boeuf J.-P., Smolyakov A. Azimuthal structures and turbulent transport in Penning discharge // arXiv preprint arXiv:2210.16887. 2022.
22. Surzhikov S.T. Theoretical and Computational Physics of Gas Discharge Phenomena. Series: Texts and Monographs in Theoretical Physics. de Gruyter: Berlin. 2020. 537 p.
23. Surzhikov S.T. Diffusion-Drift Modeling of the Electrodynamic Structure of the Penning Discharge in Molecular Hydrogen// Fluid Dynamics. 2023. V. 50. № 8. 21 p.
24. Суржигов С.Т. Двухмерная структура разряда Пеннинга в цилиндрической камере с осевым магнитным полем при давлении порядка 1 Торр // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. Вып. 3. С. 64–71.
25. Суржигов С.Т. Двумерная модель разряда Пеннинга в цилиндрической камере с осевым магнитным полем//Журнал технической физики. 2017. Т. 87. Вып. 8. С. 1165–1176.
26. Суржигов С.Т., Куратов С.Е. Модифицированная диффузионно-дрейфовая модель разряда Пеннинга// Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т. 15. Вып. 6.
<http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-6/articles/257/>

27. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 1984. 392 с.
28. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука. 1977.
29. Surzhikov S.T., Shang J.S. Two-component plasma model for two-dimensional glow discharge in magnetic field// Journal of Computational Physics. 2004. 199. P. 437–464.

Dynamics of Ion and Electron Flows in the Penning Discharge Chamber

© 2024 S. T. Surzhikov^a, *

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*e-mail: surg@ipmnet.ru

The two-fluid and two-temperature diffusion-drift model of gas-discharge plasma is used to study numerically the structure of the Penning discharge in a cylindrical discharge chamber at the molecular hydrogen pressure of 1 mTorr, the voltage between the electrodes of 500–1000 V, and the axial magnetic field induction of 0.001–0.2 T. Two regimes of existence of the Penning discharge are obtained in the calculations. These regimes differ qualitatively in the electrodynamic structure of the charged-particle flows of gas-discharge plasma, as well as there exist transient and extinction regimes in the weak and strong magnetic fields. The conditions under which the oscillatory motion of electron and ion flows develops in the paraxial regions are found. It is shown that the results of numerical simulation with the use of the diffusion-drift model make it possible to obtain consistent data in comparison with experiment, and at the same time to get an insight about the formation of the structure of flows of electric-discharge plasma particles. This makes it possible to explain the observed experimental data.

Keywords: Penning discharge, two-temperature two-fluid diffusion-drift model, dynamics of ion and electron flows in an electric discharge chamber, gas-discharge plasma oscillations.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-82144 от 20 ноября 2021 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзором)

Подписано к печати	г.	Формат $60 \times 88^{1/8}$	Усл. печ. л. 18.33	Уч.-изд. л. 18.75
Тираж	экз.	Зак.	Цена свободная	

Учредители: Российская академия наук, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Издатель: Российская академия наук, 119991 Москва, Ленинский просп., 14
Исполнитель по контракту № 4У-ЕП-039-24 ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1
Отпечатано в ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

Журналы РАН, выходящие в свет на русском языке

Автоматика и телемеханика
 Агрохимия
 Азия и Африка сегодня
 Акустический журнал
 Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы
 Астрономический журнал
 Биологические мембраны
 Биология внутренних вод
 Биология моря
 Биоорганическая химия
 Биофизика
 Биохимия
 Ботанический журнал
 Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук
 Вестник древней истории
 Вестник Российской академии наук
 Вестник российской сельскохозяйственной науки
 Водные ресурсы
 Вопросы истории естествознания и техники
 Вопросы ихтиологии
 Вопросы языкознания
 Вулканология и сейсмология
 Высокомолекулярные соединения. Серия А
 Высокомолекулярные соединения. Серия Б
 Высокомолекулярные соединения. Серия С
 Генетика
 Геология рудных месторождений
 Геомагнетизм и аэрономия
 Геоморфология и палеогеография
 Геотектоника
 Геохимия
 Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология
 Государство и право
 Дефектоскопия
 Дифференциальные уравнения
 Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления
 Доклады Российской академии наук. Науки о жизни
 Доклады Российской академии наук. Науки о Земле
 Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки
 Доклады Российской академии наук. Химия, науки о материалах
 Журнал аналитической химии
 Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова
 Журнал вычислительной математики и математической физики
 Журнал неорганической химии
 Журнал общей биологии
 Журнал общей химии
 Журнал органической химии
 Журнал прикладной химии
 Журнал физической химии
 Журнал эволюционной биохимии и физиологии
 Журнал экспериментальной и теоретической физики
 Записки Российского минералогического общества
 Зоологический журнал
 Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа
 Известия Российской академии наук. Механика твердого тела
 Известия Российской академии наук. Серия биологическая
 Известия Российской академии наук. Серия географическая
 Известия Российской академии наук. Серия литературы и языка
 Известия Российской академии наук. Серия физическая
 Известия Российской академии наук. Теория и системы управления
 Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана
 Известия Российской академии наук. Энергетика
 Известия Русского географического общества
 Исследование Земли из Космоса
 Кинетика и катализ
 Коллоидный журнал
 Координационная химия
 Космические исследования
 Кристаллография
 Латинская Америка
 Лёд и Снег
 Лесоведение
 Литология и полезные ископаемые
 Мембраны и мембранные технологии
 Металлы
 Микология и фитопатология
 Микробиология
 Микроэлектроника
 Молекулярная биология
 Нейрохимия
 Неорганические материалы
 Нефтехимия
 Новая и новейшая история
 Общественные науки и современность
 Общество и экономика
 Океанология
 Онтогенез
 Палеонтологический журнал
 Паразитология
 Петрология
 Письма в Астрономический журнал
 Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики
 Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования
 Почвоведение
 Приборы и техника эксперимента
 Прикладная биохимия и микробиология
 Прикладная математика и механика
 Проблемы Дальнего Востока
 Проблемы машиностроения и надежности машин
 Проблемы передачи информации
 Программирование
 Психологический журнал
 Радиационная биология. Радиоэкология
 Радиотехника и электроника
 Радиохимия
 Расплавы
 Растительные ресурсы
 Российская археология
 Российская история
 Российская сельскохозяйственная наука
 Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова
 Русская литература
 Русская речь
 Сенсорные системы
 Славяноведение
 Современная Европа
 Социологические исследования
 Стратиграфия. Геологическая корреляция
 США & Канада: экономика, политика, культура
 Теоретические основы химической технологии
 Теплофизика высоких температур
 Успехи современной биологии
 Успехи физиологических наук
 Физика Земли
 Физика и химия стекла
 Физика металлов и металловедение
 Физика плазмы
 Физикохимия поверхности и защита материалов
 Физиология растений
 Физиология человека
 Химическая физика
 Химия высоких энергий
 Химия твердого топлива
 Цитология
 Человек
 Экология
 Экономика и математические методы
 Электрохимия
 Энтомологическое обозрение
 Этнографическое обозрение
 Ядерная физика