

Номер 4

ISSN 1024-7084

Июль–Август 2024

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА



НАУКА
— 1727 —

Известия Российской академии наук

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Июль—Август № 4 2024

*Выходит 6 раз в год
Основан в январе 1966 г.*

ISSN: 1024-7084

*Журнал издается под руководством
Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН*

Главный редактор С.Т. Суржиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.В. Аксенов, В.Б. Баранов, А.М. Гайфуллин, А.Н. Голубятников,
В.В. Измоденов, С.А. Исаев, В.П. Карликов, А.Н. Крайко,
А.Г. Куликовский, В.А. Левин, Н.В. Никитин,
А.Н. Осипцов (заместитель главного редактора),
В.В. Пухначев, Е.М. Смирнов, С.А. Таковицкий, Г.Г. Цыпкин

Зав. редакцией Т.А. Каллаур

*Адрес редакции: 119526, Москва,
проспект Вернадского, 101, корп. 1, тел. 8-495-434-22-21
e-mail: mzg@ipmnet.ru; http: //mzg.ipmnet.ru*

Москва
ФГБУ «Издательство «Наука»

© Российская академия наук, 2024

© Редакция журнала «Механика жидкости
и газа» (составитель), 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 4, 2024

Абсолютная и глобальная неустойчивость плоских затопленных струй <i>В. В. Веденеев, Л. Р. Гареев, Ю. С. Зайко, Н. М. Экстер</i>	3
Самоиндуцированное смещение и вращение тающего ледяного диска на поверхности неподвижной воды <i>А. В. Кистович, Т. О. Чаплина</i>	18
Взаимосвязь локального ускорения ламинарного потока в канале с аномальной интенсификацией теплообмена в двухрядных наклонных канавках <i>С. А. Исаев, О. О. Мильман, Н. И. Михеев, Д. В. Никущенко, Н. С. Душин, А. А. Ключ, Е. А. Осюк</i>	29
Особенности распространения газокапельного турбулентного импульсного вихревого облака <i>М. А. Пахомов, В. И. Терехов</i>	55
Конвективные течения коллоидной суспензии в ячейке Хеле-Шоу под действием вертикальных вибраций <i>И. Н. Черепанов, Б. Л. Смородин</i>	69
Двухслойная равновесная модель течения смешивающейся неоднородной жидкости <i>В. Ю. Ляпидевский</i>	79
Развитие стационарных возмущений в пространственно развивающейся струе <i>Д. А. Ашуров, Н. В. Никитин</i>	94
Бифуркация и устойчивость фронтов фазовых переходов в геотермальных резервуарах <i>Цыпкин Г. Г.</i>	103
Экспериментально-теоретическое исследование влияния растворенного поверхностно-активного вещества на динамику всплытия газового пузырька <i>Е. И. Борзенко, А. С. Усанина, Г. Р. Шрагер</i>	112
Круглые всплески вязкой жидкости <i>А. В. Базилевский, А. Н. Рожков</i>	128
О моделировании процесса объемной аннигиляции в собственном гравитационном поле <i>А. Н. Голубятников, С. А. Захаров</i>	142
Акустический резонанс в кольцевой полости с осевым транзитным потоком <i>Е. В. Колесник, Д. К. Зайцев, Е. М. Смирнов, Е. И. Шмелев, М. Г. Маслов, А. В. Будников</i>	150
Расчетный анализ летных данных по конвективному нагреву марсианского спускаемого аппарата в рамках модели совершенного газа <i>С. Т. Суржиков</i>	163

СОДЕРЖАНИЕ

Номер 4, 2024

Absolute and Global Instability of Plane Submerged Jets <i>V. V. Vedeneev, L. R. Gareev, Ju. S. Zayko, N. M. Exter</i>	3
Self-Induced Displacement and Rotation of a Melting Ice Disk on the Still Water Surface <i>A. V. Kistovich, T. O. Chaplina</i>	18
Interrelation between the Local Acceleration of Laminar Flow in a Channel and the Anomalous Heat Transfer Enhancement in Inclined Two-Row Grooves <i>S. A. Isaev, O. O. Mil'man, N. I. Mikheev, D. V. Nikushchenko, N. S. Dushin, A. A. Klyus, E. A. Osiyuk</i>	29
Distinctive Features of Propagation of a Turbulent Pulsed Gas-Droplet Eddy Cloud <i>M. A. Pakhomov, V. P. Terekhov</i>	55
Convective Flows of a Colloidal Suspension in a Hele-Shaw Cell under Vertical Vibrations <i>I. N. Cherepanov, B. L. Smorodin</i>	69
Two-Layer Equilibrium Model of Miscible Inhomogeneous Fluid Flow <i>V. Yu. Liapidevskii</i>	79
Development of Stationary Disturbances in a Spatially Developing Jet <i>D. A. Ashurov, N. V. Nikitin</i>	94
Bifurcations and Stability of Phase Transition Fronts in Geothermal Reservoirs <i>G. G. Tsyarkin</i>	103
Experimental and Theoretical Investigation of the Effect of Dissolved Surfactant on the Dynamics of Gas Bubble Floating-up <i>E. I. Borzenko, A. S. Usanin, G. R. Shrager</i>	112
Round Splashes of a Viscous Liquid <i>A. V. Bazilevskii, A. N. Rozhkov</i>	128
Modelling of the Process of Volume Annihilation in the Gravitational Self-Field <i>A. N. Glubyatnikov, S. A. Zakharov</i>	142
Acoustic Resonance in an Annular Cavity with Axial Transit Flow <i>E. V. Kolesnik, D. K. Zaitsev, E. M. Smirnov, E. I. Shmelev, M. G. Maslova, A. V. Budnikov</i>	150
Computational Analysis of Flight Data on Convective Heating of the Martian Descent Vehicle within the Framework of the Perfect Gas Model <i>S. T. Surzhikov</i>	163

УДК 532.5

АБСОЛЮТНАЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ

© 2024 г. В. В. Веденеев*, Л. Р. Гареев**, Ю. С. Зайко***, Н. М. Экстер****

МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*e-mail: vasily@vedeneev.ru

**e-mail: gareev@imec.msu.ru

***e-mail: zayko@imec.msu.ru

****e-mail: exter@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 05.04.2024 г.

После доработки 10.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается семейство профилей скорости затопленной струи, которые являются в плоскопараллельном приближении абсолютно неустойчивыми. Профили задаются двумя параметрами, первый из которых отвечает за положение единственной точки перегиба на профиле, второй — за толщину сдвигового слоя. Реализован алгоритм определения длины участка локальной абсолютной неустойчивости струи с заданным входным профилем скорости — то есть расстояния, на котором абсолютная неустойчивость сменяется конвективной. Получена зависимость этой длины от параметров, задающих входной профиль. Аналитически получена связь между характеристиками локальной абсолютной неустойчивости, рассчитанной в плоскопараллельном приближении, и глобальной неустойчивостью струи, эволюционирующей в пространстве. Продемонстрирован входной профиль скорости, соответствующий достаточно большой длине зоны локальной абсолютной неустойчивости, при котором имеет место глобальная неустойчивость пространственно развивающейся струи. Таким образом, показана возможность глобальной неустойчивости плоских затопленных струй, имеющих специальные распределения скорости.

Ключевые слова: струйное течение, линейная теория устойчивости, абсолютная неустойчивость, глобальная неустойчивость.

DOI: 10.31857/S1024708424040016, **EDN:** OYTFCO

Затопленной называется струя, вытекающая в среду с тем же агрегатным состоянием, что и сама струя. Подобные струи часто встречаются в науке и технике, а потеря ими устойчивости и переход к турбулентности существенно влияют на такие явления как горение, перемешивание, химические реакции. Устойчивость струйных течений может зависеть от различных факторов, например, от скорости потока, плотности, вязкости, температуры струи и окружающей жидкости и др. При определённых специфических условиях струйные течения могут быть ламинарными на больших расстояниях вниз по потоку [1–4] в то время как при обычных условиях они теряют устойчивость и становятся турбулентными на расстоянии в 1–2 ширины/диаметра выходного сечения. Управление затопленными струями и предсказание потери ими устойчивости представляют интерес в контексте фундаментальных и прикладных задач.

Неустойчивость плоскопараллельного потока жидкости бывает двух видов: конвективная и абсолютная. В случае конвективной неустойчивости малые возмущения со временем сносятся, нарастают вниз по потоку и, достигая определенного уровня, приводят к переходу к турбулентности. При этом достижение значительной амплитуды возмущений и переход к турбулентности нередко происходят по течению от места возникновения нарастающего возмущения. Как следствие, такое течение может иметь ламинарный участок большой длины [5]. Примерами конвективно неустойчивых течений могут служить плоскопараллельное течение Пуазейля [6, 7], и пограничный слой Блазиуса [6, 8]. В случае абсолютной неустойчивости возмущение нарастает неограниченно со временем в той точке пространства (течения), где оно возникло.

Ранее абсолютная неустойчивость струй с классическими профилями скорости и плотностью, не отличающейся от плотности окружающей среды, наблюдалась лишь при наличии противотечения на

границе [9]. Однако, для струй со сложными “неклассическими” профилями было обнаружено, что абсолютная неустойчивость без наличия противотечения возможна как для круглых [10], так и для плоских [11] струй.

Благодаря пространственной эволюции невозмущённого течения становится возможным существование глобальных собственных мод — то есть гармонических по времени возмущений, локализованных в пространстве (что невозможно в плоскопараллельных течениях). Более строго, под собственными модами будем понимать возмущения, удовлетворяющие нулевым условиям во входном сечении струи и при бесконечном удалении от неё во всех направлениях, и зависящие от времени как $e^{-i\omega t}$. Если какая-либо собственная мода является растущей во времени, то область её локализации представляет собой зону генерации самовозбуждающихся колебаний. Существование растущих собственных мод будем называть глобальной неустойчивостью [12, 13], где термин “глобальный” подчёркивает нелокальный (неплоскопараллельный) анализ устойчивости. Интерес к созданию глобально неустойчивых течений связан с тем, что области самовозбуждения колебаний при их нелинейном развитии могут привести к возникновению регулярных вторичных течений или хаотических турбулентных течений, что может использоваться при создании различных устройств и технологий для интенсификации перемешивания.

Хорошо известно [12, 13], что в эволюционирующих течениях с наличием двух пространственных волн (то есть описываемых дисперсионным уравнением второго порядка по волновому числу) для существования растущей глобальной собственной моды необходимо наличие зоны локальной абсолютной неустойчивости. Глобальной неустойчивостью течения, которая вызвана локальной абсолютной неустойчивостью, объясняется целый ряд явлений: возникновение дорожки Кармана в следе за цилиндром [14, 15], колебания и разрушение горячих струй [16], колебания следа за крыловыми профилями [17], распад на капли струй жидкости [18, 19] осесимметричные движения неньютоновской жидкости в неоднородных эластичных трубках [20].

Однако это условие не достаточно: чтобы возникли растущие глобальные колебания, зона локальной абсолютной неустойчивости в общем случае должна быть достаточно протяжённой, а инкремент роста достаточно большим. В противном случае окружающая зона конвективной неустойчивости “перевесит” абсолютную неустойчивость: возникающие в зоне абсолютной неустойчивости возмущения будут частично покидать её и уноситься вниз по потоку, что будет препятствовать росту таких возмущений в зоне зарождения. В результате все глобальные собственные моды будут затухающими, то есть в течении будут отсутствовать зоны порождения самовозбуждающихся колебаний, а вносимые растущие возмущения будут сноситься вниз по потоку.

В настоящей работе определяется длина участка локальной абсолютной неустойчивости плоской затопленной струи. В разд. 1 приводится математическая постановка задачи и даётся краткое описание алгоритма определения длины участка локальной абсолютной неустойчивости. Раздел 2 посвящён детальному описанию алгоритма. В разд. 3 описываются результаты расчётов для рассматриваемого семейства профилей скорости. В разд. 4 определяются характеристики зоны локальной абсолютной неустойчивости, приводящие к глобальной неустойчивости пространственно эволюционирующей струи; приведён пример параметров, при которых можно ожидать глобальную неустойчивость.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ставится задача разработки алгоритма определения длин участков локальной абсолютной неустойчивости плоских однонаправленных струй, задаваемых начальными профилями скорости, введёнными в [11] и определяемыми двумя параметрами ξ , ζ . Параметр ξ отвечает за положение точки перегиба на профиле скорости, параметр ζ определяет ширину сдвигового слоя струи (рис. 1). Ось x лежит в плоскости течения и направлена вниз по потоку, ось y перпендикулярна ей и лежит в плоскости течения.

Сначала численно моделируется установившееся течение и рассчитывается эволюция вниз по потоку начального профиля скорости струи, задаваемого парой параметров ξ , ζ . Затем на различных удалениях от начала струи проводится анализ типа неустойчивости профилей скорости путём поиска седловых точек на комплексной плоскости волнового числа ($\text{Re } \alpha$, $\text{Im } \alpha$). Таким образом ищется длина участка локальной абсолютной неустойчивости конкретной струи, определяемой параметрами начального профиля скорости ξ , ζ . Термин “локальная” используется в том смысле, что анализ характера неустойчивости проводится в плоскопараллельном приближении без учета изменения профиля скорости вдоль координаты x .

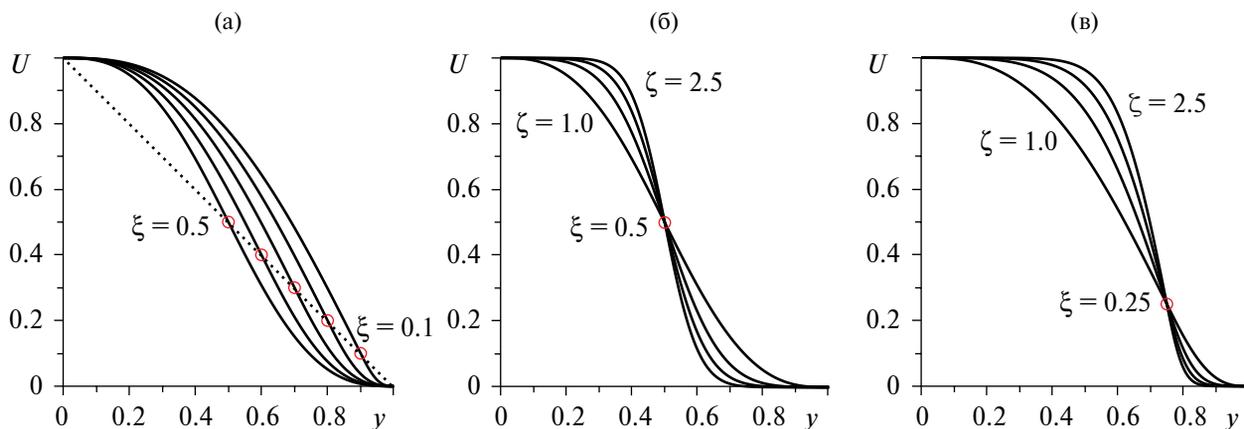


Рис. 1. Профили скорости, задаваемые парой параметров ξ, ζ : $\xi \leq 0.5, \zeta = 1$ (а), $\xi = 0.5, \zeta \geq 1$ (б), $\xi = 0.25, \zeta \geq 1$ (в). Красный круг обозначает точку перегиба.

Исследование и результаты излагаются в безразмерном виде, в качестве линейных масштабов скорости и длины берутся соответственно максимальная скорость U_{\max} и половина ширины струи $h/2$. По этим параметрам в том числе вычисляется число Рейнольдса течения $R = 9000$. Такое значение R выбрано исходя из проведенных экспериментов на установке, создающей ламинарную плоскую струю воздуха толщиной $h = 0.1$ м с максимальной скоростью на оси струи $U_{\max} = 2.78$ м/с. По результатам текущей теоретической работы на данной установке планируется проведение экспериментов по созданию глобально неустойчивого течения.

Неустойчивость изучается в невязком приближении, так как проводится анализ струй при числе Рейнольдса, которое можно считать достаточно большим по следующей причине. В [11] проведён плоскопараллельный анализ неустойчивости с учётом вязкости и найдены критические числа Рейнольдса, разделяющие зоны конвективной и абсолютной неустойчивости, результаты теоретического анализа подтверждены прямым численным моделированием. Характерные критические R имеют порядок 1000, то есть на порядок ниже рассматриваемого в настоящей работе, что обосновывает использование невязкой теории устойчивости.

Таким образом, алгоритм состоит из следующих этапов:

- 1) параметризация начального профиля скорости: выбор пары параметров ξ, ζ ;
- 2) ламинарный стационарный расчёт струи с заданным начальным профилем скорости;
- 3) обработка результатов численного расчёта: снятие профилей скорости на различных удалениях вниз по потоку;
- 4) анализ типа неустойчивости (конвективная/абсолютная) этих профилей скорости;
- 5) определение расстояния, на котором абсолютная неустойчивость сменяется конвективной.

Далее следует подробное описание каждого этапа.

2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ УЧАСТКА ЛОКАЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Семейство исследуемых профилей скорости

Задание начального профиля параметрами ξ, ζ проводилось с помощью сплайнов пятой степени, в соответствии с тем, как это делалось в [11]. Сначала рассмотрим случай $\zeta = 1$:

$$\tilde{U}_s(y) = \begin{cases} f(y), & 0 \leq y \leq y_0; & f(y) = a_5 y^5 + a_4 y^4 + a_3 y^3 + 1, \\ g(y), & y_0 \leq y \leq 1, & g(y) = b_5 (y-1)^5 + b_4 (y-1)^4 + b_3 (y-1)^3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Исследуемый профиль имеет одну точку перегиба в заданной точке $y = y_0 = 1 - \xi$. Полиномы данного вида удовлетворяют граничным условиям:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad g(1) = g'(1) = g''(1) = 0.$$

Для определения коэффициентов полиномов задаются условия гладкости в точке склейки полиномов:

$$f(y_0) = g(y_0), \quad f'(y_0) = g'(y_0), \quad f''(y_0) = g''(y_0),$$

также имеются три условия в точке перегиба:

$$f(y_0) = \xi, \quad f'(y_0) = -2, \quad f''(y_0) = 0.$$

Таким образом, ξ является управляющим параметром точки перегиба профиля скорости: она находится в точке $y_0 = 1 - \xi$, а скорость в точке перегиба $U(y_0) = \xi$. Полученные графики показаны на рис. 1а.

Действие второго параметра ζ при $\zeta > 1$ заключается в увеличении градиента скорости в точке перегиба за счет уменьшения толщины сдвигового слоя струи, как показано на рис. 1б. Оно происходит за счет преобразования координаты y . Определим сплайн-функцию пятой степени $\tilde{y}(y)$ на $0 \leq y \leq 1$:

$$\tilde{y}(y) = \begin{cases} \phi(y), & 0 \leq y < y_0; \\ \psi(y), & y_0 < y \leq 1, \end{cases}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}(y_0) = y_0, \quad \tilde{y}(1) = 1;$$

$$\tilde{y}'(0) = v, \quad \tilde{y}'(y_0) = \zeta, \quad \tilde{y}'(1) = v;$$

$$\tilde{y}''(0) = 0, \quad \tilde{y}''(y_0) = 0, \quad \tilde{y}''(1) = 0;$$

где y_0 – точка перегиба профиля скорости, $\zeta \geq 1$ – управляющий параметр, и $v = 1 / \zeta^2$. После преобразования координат профиль скорости имеет вид

$$U(y) = U_s(\tilde{y}(y)),$$

где U_s – исходный сплайн-определённый профиль скорости.

Результирующий профиль контролируется обоими параметрами: ξ задаёт расположение точки перегиба, и $\zeta \geq 1$ определяет толщину слоя сдвига (рис. 1в).

2.2. Расчёты установившегося течения

Проводится ламинарный стационарный расчёт в CFD комплексе с заданным начальным профилем скорости. Система уравнений Навье–Стокса решается методом контрольных объёмов, реализованным в решателе Ansys CFX. Расчётная область показана на рис. 2. Рассматривается симметричная половина струи и области окружающего пространства, так как решается задача о плоском течении однонаправленной струи. В качестве граничного условия на входе (пунктирная линия на рис. 2) задаётся профиль продольной скорости – распределение скорости вдоль координаты y . На выходе задаётся атмосферное давление, на верхней и левой границах расчётной области – свободный вход/выход: нулевой нормальный градиент направления скорости и атмосферное давление, на нижней границе – условие симметрии. Длина расчётной области составляет 25, высота – 10.

Для моделирования плоского течения рассматривалась трёхмерная модель с одним слоем элементов в поперечном направлении и постановкой условий симметрии на боковых поверхностях. Использовались гексаэдральные элементы, общее количество которых составило 272130 (470×579 элементов вдоль осей x и y), в пределах основного струйного течения сетка сгущалась – в нем находилось 188000



Рис. 2. Расчётная область для симметричной половины плоской однонаправленной затопленной струи.

(470×400) элементов. Вычисления проводились по пространственной схеме первого порядка с разностями против потока методом установления до снижения уровня максимальной по всем элементам безразмерной невязки до 10^{-6} . Для всех описываемых ниже расчётов достигнута сходимость по сетке и размеру расчётной области.

2.3. *Обработка результатов CFD-расчёта. Анализ типа неустойчивости профилей скорости в струе на различных расстояниях от её начала*

После завершения CFD-расчёта снимаются профили продольной скорости $U(y)$ на различных расстояниях от начала струи вниз по потоку с шагом $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 0.2$. Здесь $i = 0, \dots, N$, где N – номер первого профиля скорости, тип неустойчивости которого окажется конвективным. Для каждого профиля скорости проводится анализ линейной неустойчивости в невязком приближении. Используется плоско-параллельный подход, когда $u_x = U(y)$, $u_y = u_z = 0$. На невозмущённое движение накладываются возмущения в виде бегущих волн

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_x(y) \\ U'_y(y) \\ U'_z(y) \end{pmatrix} e^{i(\alpha x - \omega t)}. \tag{2.2}$$

Система уравнений Навье–Стокса линеаризуется около невозмущённого состояния с учётом того, что число Рейнольдса рассматриваемого течения велико: рассматривается предел $R \rightarrow \infty$. Таким образом получится уравнение Рэлея для компоненты возмущений $U'_y = \psi(y)$:

$$(U(y) - c) \left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} - \alpha^2 \psi \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \psi = 0. \tag{2.3}$$

Здесь $c = \omega/\alpha$ – фазовая скорость, ω – частота, α – волновое число. Для симметричного профиля скорости величины $\psi(y)$ всегда представляют собой чётные и нечётные функции y . Граничные условия имеют следующий вид:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ для нечетной собственной функции,} \tag{2.4}$$

$$\psi = 0 \text{ при } y = 0 \text{ для четной собственной функции,} \tag{2.5}$$

$$\frac{d\psi}{dy} + \alpha \psi = 0 \text{ при } y = \delta. \tag{2.6}$$

Поясним вывод условия (2.6). Предполагается, что вне струи среда неподвижна: $U(y) = 0$ при $y \geq \delta$. Общее решение уравнения Рэлея, которое в этой области представляет собой дифференциальное уравнение

второго порядка с постоянными коэффициентами, имеет вид $\psi = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}$ ($C_1, C_2 = \text{const}$, $\alpha \geq 0$), при этом, так как при $y \rightarrow \infty$ возмущения затухают, $C_1 = 0$. Для склейки возмущения во внешнем течении с возмущением в струе при $y = \delta$ необходимо, чтобы $d\psi / dy|_{y=\delta} = -\alpha\psi$.

Уравнение (2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.6) представляет собой задачу на собственные значения $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$ при заданной частоте $\omega \in \mathbb{R}$ (то есть ищутся такие α , при которых задача имеет ненулевое решение). Для каждого зафиксированного α интегрирование (2.3) от 0 до δ проводится методом Рунге–Кутты с начальными условиями (2.4) и $\psi(0) = 1$, или (2.5) и $d\psi/dy(0) = 1$. Затем вычисляется выражение

$$\Psi(\alpha) = \frac{d\psi}{dy}(\delta) + \alpha\psi(\delta),$$

и методом секущих ищется нуль функции

$$\Psi(\alpha) = 0.$$

В расчётах принято $\delta = 1.2$, так как для всех рассматриваемых ниже профилей скорости с высокой точностью $U(y) \approx 0$ при $y > \delta$.

Отметим, что в случае нейтральных возмущений ($\text{Im } \alpha = 0$) уравнение Рэлея имеет сингулярность, лежащую на пути интегрирования вдоль оси y . Однако эта сингулярность исчезает в случае растущих возмущений. Поэтому результаты для нейтральных возмущений, приводимые ниже, получены как предел растущих возмущений при скорости роста, стремящейся к нулю, т.е. при $\text{Im } \alpha \rightarrow -0$. Данного ограничения можно было бы избежать при выборе пути интегрирования в комплексной плоскости y , обходящем сингулярность, как это сделано в [21], однако такой подход в настоящем исследовании не применялся, поскольку характер неустойчивости определяется седловой точкой, лежащей в области $\text{Im } \alpha < 0$, где данная проблема отсутствует.

В общем случае решение задачи с начальными данными о распространении локализованного возмущения содержит в себе компоненты и дискретного, и непрерывного спектра [22]. В рассматриваемой здесь задаче существует единственная растущая мода $\omega(\alpha)$ из дискретного спектра, поведение которой определяет асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение возмущения $w(x, y, t)$ (здесь w – любая из компонент возмущения скорости), поэтому оно записывается в виде интеграла Фурье

$$w(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, y) e^{i(\alpha x - \omega(\alpha)t)} d\alpha. \quad (2.7)$$

Тип неустойчивости, т.е. стремление $w(x, y, t)$ к 0 или к ∞ при $t \rightarrow \infty$, определяется методом перевала [22] и сводится к анализу поведения линий уровня $\text{Im } \alpha = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$. Для рассматриваемого семейства профилей на этой плоскости имеется седловая точка (α_s, ω_s) , через которую однозначно проводится контур интегрирования для интеграла Фурье (2.7) [10]. Отметим, что при $\text{Re } \alpha \rightarrow \pm\infty$ путь интегрирования совпадает с прямой $\text{Im } \alpha = 0$, причём $\text{Im } \omega(\alpha) < 0$. В этом случае асимптотика интеграла Фурье определяется величиной $\text{Im } \omega_s = \text{Im } \omega(\alpha_s)$ в седловой точке α_s на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ и, согласно методу перевала, имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) \sim e^{i\theta} f(\alpha_s, y) \sqrt{\frac{2\pi}{|\omega''(\alpha_s)|}} \frac{e^{i(\alpha_s x - \omega_s t)}}{\sqrt{t}}, \quad (2.8)$$

где $\theta \in \mathbb{R}$. В случае абсолютной неустойчивости в седловой точке $\text{Im } \omega_s > 0$, в случае конвективной неустойчивости $\text{Im } \omega_s < 0$.

В качестве примера для струи с начальным профилем скорости, определяемым параметрами $\xi = 0.25$, $\zeta = 2$, на рис. 3а приведены профили скорости на расстояниях $x = 1, 2, 4, 6.6$. Построенные линии уровня $\text{Im } \omega = 0$ для $x = 1, 2, 4$ на рис. 3б соответствуют случаю абсолютной неустойчивости. Путь интегрирования и направления увеличения и уменьшения $\text{Im } \omega$ в окрестности седловой точки для этих случаев показаны на рис. 4а: величина $\text{Im } \omega$ в седловой точке положительна. В случае же конвективной неустойчивости ($x = 6.6$, сплошные кривые на рис. 3б) одна из линий уровня $\text{Im } \omega = 0$ непрерывно соединяет два нейтральных возмущения, и направления роста и уменьшения $\text{Im } \omega$ в окрестности седловой точки

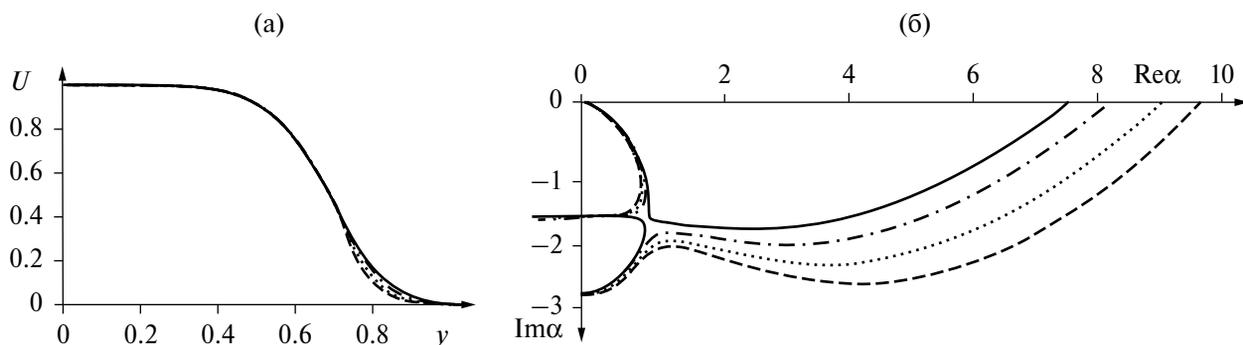


Рис. 3. Профили скорости (а) и соответствующие им линии уровня $\text{Im } \alpha = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ для струи с параметрами $\xi = 0.25, \zeta = 2$ (б). Штриховыми кривыми обозначены профили скорости и линии уровня для $x = 1$, пунктирными для $x = 2$, штрих-пунктирными для $x = 4$, сплошными для $x = 6.6$.

таковы, что значение $\text{Im } \omega$ в седловой точке оказывается отрицательным (рис. 4б). Аналогичным образом, путём анализа расположения линий уровня $\text{Im } \omega = 0$ на комплексной плоскости волнового числа, определяется тип неустойчивости для каждого рассматриваемого профиля каждой из рассчитанных струй. Автоматизированный анализ выполнялся следующим образом.

1. Решается вышеописанная задача на собственные значения $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$ для вещественных частот $\omega \in (0; \omega_{\text{нейтр.}}]$. Расчеты начинаются с $\omega = \omega_{\text{нейтр.}}$ с последующим уменьшением ω . Получается правая (рис. 3б) линия уровня $\text{Im } \omega = 0$ в виде двумерного массива значений $\text{Re } \alpha, \text{Im } \alpha$.

2. Левая часть этой линии уровня (после прохода окрестности седловой точки при уменьшении ω) определяет характер неустойчивости. Из массива $\text{Im } \alpha$ вычисляется массив разностей $\text{Im } \alpha_{i+1} - \text{Im } \alpha_i$. По преобладанию в нём отрицательных или положительных чисел делается вывод, вниз или вверх уходит линия уровня после прохода окрестности седловой точки. В первом случае неустойчивость абсолютная (рис. 4а), во втором – конвективная (рис. 4б).

3. Пункты 1–2 выполняются для срезов профилей скорости, начальный вид которых определяется парой (ξ, ζ) , с шагом $\Delta x = 0.2$ до тех пор, пока характер неустойчивости не сменится с абсолютного на конвективный. Таким образом, для каждой пары (ξ, ζ) вычисляется координата вниз по потоку $x = L$, определяющая длину участка локальной абсолютной неустойчивости.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЛОКАЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРУЙ

С помощью разработанного алгоритма был проведён анализ 600 профилей скорости струй, задаваемых различными парами (ξ, ζ) . Параметр ξ менялся в диапазоне $[0.025; 0.5]$ с шагом 0.025, параметр ζ – в диапазоне $[1.05; 2.5]$ с шагом 0.05. Результаты расчёта длины L участка локальной абсолютной неустойчивости приведены на рис. 5. Тёмно-синий цвет в заливке обозначает отсутствие участка локальной абсолютной неустойчивости, жёлтый цвет – область на плоскости ξ, ζ с наибольшей из полученных длиной. Для наиболее протяжённого участка $L \approx 7.6$.

В работе [11] для диапазона параметров $\xi \in [0.34, 0.5], \zeta \in [1, 2.4]$ (без учёта эволюции профиля струи вниз по потоку) найдена граница абсолютной и конвективной неустойчивости – кривая, выше которой профили скорости абсолютно неустойчивы, ниже – неустойчивы конвективно. Эта кривая показана белой штриховой линией на рис. 5. Видно, что на заливке, полученной в настоящей работе, в области, ниже штриховой линии отсутствуют участки локальной абсолютной неустойчивости струй. Таким образом, этот результат находится в согласии с данными [11].

4. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ, ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ВНИЗ ПО ПОТОКУ

Выше проводился локальный анализ неустойчивости струйного течения, который не учитывает пространственное “размытие” профиля скорости. Далее с учетом такого “размытия” проводится исследование глобальной неустойчивости рассматриваемого течения на основе построения и анализа модельного

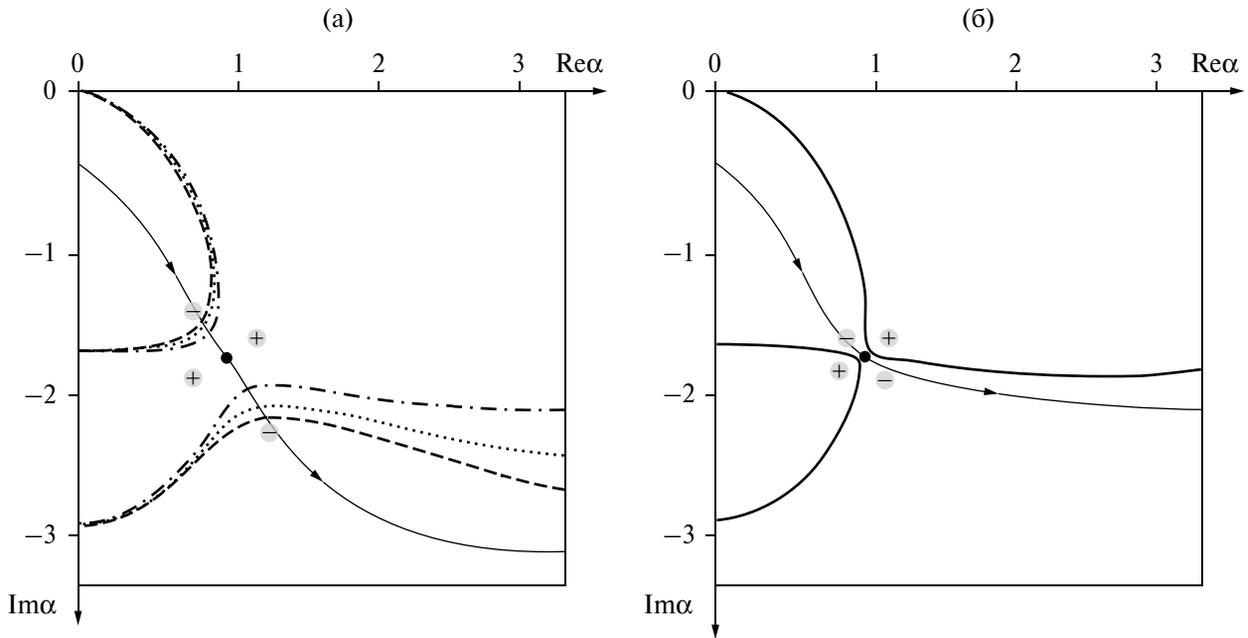


Рис. 4. Линии уровня $\text{Im } \omega = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ для случаев абсолютной (а) и конвективной (б) неустойчивости для профилей скорости струи на различных расстояниях от начала. Чёрная точка обозначает седловую точку. Знаками “±” в серых кругах показаны направления уменьшения и увеличения $\text{Im } \omega$ в окрестности седловой точки. Тонкая линия со стрелками показывает путь интегрирования. Тип кривых соответствует рис. 3.

уравнения, которое отражает основные свойства исходного течения. А именно, глобальная собственная мода возникает как следствие локальной абсолютной неустойчивости [12, 13], а та, в свою очередь, объясняется слиянием двух волновых чисел $\alpha(\omega)$ в седловой точке, причём одно из них соответствует волне, движущейся вверх, другое – вниз по потоку [22] (направление волны определяется по знаку $\text{Im } \alpha$ при устремлении $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$). Тогда естественно предположить, что эти две волны определяют наличие глобальной неустойчивости. Рассмотрим дисперсионное уравнение с коэффициентами, зависящими от x , воспроизводящее при “заморозке” его коэффициентов на разных расстояниях вниз по потоку окрестность седловой точки функции $\omega(\alpha)$, которая определяет характер неустойчивости струи. По этому дисперсионному уравнению можно восстановить соответствующее ему дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. На основе точного решения этого уравнения ниже получен критерий, связывающий частоту глобальной собственной моды с характеристиками локальной абсолютной неустойчивости.

4.1. Модельное уравнение, описывающее локальную абсолютную неустойчивость

Следуя работе [23], рассмотрим линеаризованное уравнение Гинзбурга–Ландау для некоторой неизвестной функции $A(x, t)$ (например, она может быть одной из компонент возмущения скорости), описывающее две пространственные волны, и следовательно, имеющее второй порядок по x :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_0(x) \frac{\partial A}{\partial x} = \varkappa(x) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \mu(x)A, \tag{4.1}$$

где u_0, \varkappa, μ – в общем случае комплекснозначные и зависящие от x функции. Для выбора этих функций такими, чтобы они воспроизводили поведение пространственных волн в окрестности седловой точки струи, сначала изучим локальные свойства модельного уравнения.

Для этого заморозим коэффициенты уравнения и рассмотрим решения в виде бегущих волн $A(x, t) = e^{i(\alpha x - \omega t)}$. Подстановка в (4.1) приводит к локальному дисперсионному уравнению

$$-i\omega + iu_0\alpha = -\varkappa\alpha^2 + \mu.$$

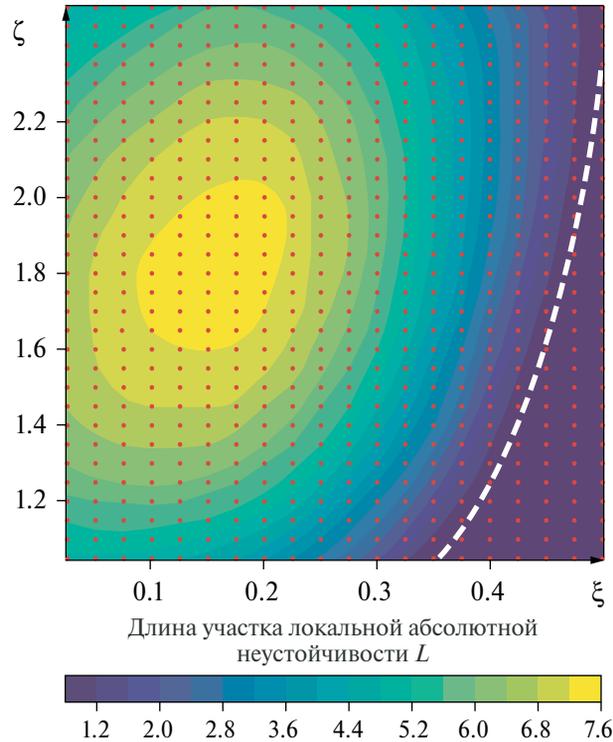


Рис. 5. Зависимость длины участка локальной абсолютной неустойчивости от параметров ξ, ζ . Красными точками обозначены рассмотренные профили скорости.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$(\alpha - \alpha_s)^2 = \lambda(\omega - \omega_s) \Rightarrow \alpha_{1,2} = \alpha_s \pm \sqrt{\lambda(\omega - \omega_s)}, \tag{4.2}$$

где

$$\alpha_s = -\frac{i u_0}{2\kappa}, \quad \omega_s = -i \frac{u_0^2}{4\kappa} + i\mu, \quad \lambda = \frac{i}{\kappa}. \tag{4.3}$$

Очевидно, что частота $\omega = \omega_s$ есть точка ветвления комплексной функции $\alpha(\omega)$, то есть в ней происходит слияние двух пространственных волн, соответствующих двум волновым числам $\alpha(\omega)$. Эта точка является седловой точкой обратной функции $\omega(\alpha)$, которая по определению ищется как решение уравнения $d\omega/d\alpha = 0$ [24]. Параметры α_s и ω_s определяют положение точки взаимодействия, а параметром $\lambda = (\alpha - \alpha_s)^2 / (\omega - \omega_s)$ определяется поворот ($\text{Arg}\lambda$) и масштабирование ($|\lambda|$) окрестности седловой точки.

Для “эмуляции” седловой точки, полученной из решения задачи устойчивости струи, выберем параметры уравнения (4.2) $\alpha_s, \omega_s, \lambda$ так, чтобы воспроизводилась картина, наблюдаемая в струе. Решая систему (4.3), находим:

$$\kappa = \frac{i}{\lambda}, \quad u_0 = -2 \frac{\alpha_s}{\lambda}, \quad \mu = -i\omega_s + \frac{u_0^2}{4\kappa} = -i\omega_s - i \frac{\alpha_s^2}{\lambda}.$$

Как показывают расчёты эволюции струи (см. разд. 4.3), при размытии профиля скорости положение седловой точки α_s , как и расположение ветвей в этой плоскости (определяемое параметром λ), меняются слабо. Также близкой к константе остаётся частота $\text{Re } \omega_s$. Однако, инкремент абсолютной неустойчивости падает с удалением от входного сечения струи, причём его уменьшение происходит близко к линейному закону при увеличении расстояния от начального сечения струи: $\text{Im } \omega_s(x) \approx a - bx, b > 0$. Учитывая всё вышеперечисленное, получаем, что

$$\varkappa \approx \text{const}, \quad u_0 \approx \text{const}, \quad \mu(x) \approx \mu_0 - \mu_1 x, \quad (4.4)$$

где

$$\mu_1 = b = -\frac{d\text{Im}\omega_s(x)}{dx} \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Таким образом, модельное уравнение, описывающее эволюцию локальных свойств, близкую к эволюции свойств струи, имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_0 \frac{\partial A}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (\mu_0 - \mu_1 x)A. \quad (4.6)$$

4.2. Собственные моды модельного уравнения

Рассмотрим собственные моды полученного уравнения (4.6), то есть решения, зависящие гармонически от времени и удовлетворяющие нулевым граничным условиям в начальном сечении струи и при удалении от него вниз по потоку:

$$A(x, t) = e^{-i\omega t} B(x), \quad B(0) = 0, \quad B(+\infty) = 0.$$

Получаем задачу на собственные значения для уравнения

$$\varkappa \frac{d^2 B(x)}{dx^2} - u_0 \frac{dB(x)}{dx} + (\mu_0 - \mu_1 x + i\omega)B(x) = 0.$$

Полученное уравнение простыми преобразования приводится к уравнению Эйри. А именно, сделаем замену $B(x) = e^{i\alpha_s x} C(x)$, где $\alpha_s = -iu_0 / (2\varkappa)$, и замену переменной x на новую переменную z :

$$x = \left(\frac{\varkappa}{\mu_1}\right)^{1/3} z + x_0, \quad x_0 = \frac{\mu_0 - \frac{u_0^2}{4\varkappa} + i\omega}{\mu_1}. \quad (4.7)$$

Получим уравнение Эйри

$$\frac{\partial^2 C(z)}{\partial z^2} - zC(z) = 0$$

с граничными условиями

$$C(z) = 0 \text{ при } z = -\frac{x_0}{(\varkappa / \mu_1)^{1/3}} \text{ и } z \rightarrow +\infty.$$

Ограничимся случаем

$$-\pi / 3 < \text{Arg}(\varkappa / \mu_1)^{1/3} < \pi / 3, \quad (4.8)$$

тогда стремление функции к нулю вдоль вещественной оси x эквивалентно (в силу свойств уравнения Эйри) такому стремлению вдоль вещественной оси z .

Решение уравнения Эйри, удовлетворяющее второму граничному условию – условию затухания вниз по потоку, – функция Эйри $C(z) = Ai(z)$. Удовлетворяя первому граничному условию – условию отсутствия возмущения в начальном сечении, – получаем

$$-\frac{x_0}{(\varkappa / \mu_1)^{1/3}} = \zeta_n \Rightarrow x_0 = -\zeta_n \left(\frac{\varkappa}{\mu_1}\right)^{1/3},$$

где ζ_n – нули функции Эйри (вещественные отрицательные числа). Отсюда с использованием (4.7) получаем спектр глобальных собственных частот ω^g

$$\omega_n^g = i \left(\mu_0 - \frac{u_0^2}{4\mathcal{Z}} \right) + i \zeta_n \mu_1^{2/3} \mathcal{Z}^{1/3} = \omega_s(0) + i \zeta_n \mu_1^{2/3} \mathcal{Z}^{1/3}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Таким образом, условие роста n -й глобальной собственной моды $\text{Im } \omega_n^g > 0$ эквивалентно условию

$$\text{Im} \omega_s(0) > |\zeta_n| \mu_1^{2/3} \text{Re} \mathcal{Z}^{1/3}, \quad (4.10)$$

т.е. инкремент локальной абсолютной неустойчивости начального профиля скорости должен превышать значение правой части полученного неравенства, которая, в свою очередь, зависит от μ_1 – скорости уменьшения этого инкремента вниз по потоку. Данное условие связывает локальные свойства абсолютной неустойчивости и глобальную неустойчивость эволюционирующего вниз по потоку течения. Поскольку наименьший по модулю ноль функции Эйри $\zeta_1 \approx -2.338$, то условие глобальной неустойчивости можно переписать в виде

$$\text{Im} \omega_s(0) > |\zeta_1| \mu_1^{2/3} \text{Re} \mathcal{Z}^{1/3}. \quad (4.11)$$

Глобальные собственные моды модельного уравнения имеют вид

$$A_n(x, t) = e^{i\omega_n^g t} e^{i\alpha_s x} \text{Ai} \left(\left(\frac{\mu_1}{\mathcal{Z}} \right)^{1/3} \left(x + \zeta_n \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mu_1} \right)^{1/3} \right) \right) \quad (4.12)$$

Рассмотрим пространственное распределение собственной моды, являющееся произведением двух функций пространственной координаты. Очевидно, что первый множитель $e^{i\alpha_s x}$ описывает пространственные колебания с волновым числом локальной седловой точки α_s , которые соответствуют асимптотике локализованного возмущения в плоскопараллельном приближении. Другими словами, эти колебания соответствуют локальной абсолютной неустойчивости течения. Второй множитель $\text{Ai} \left(\left(\frac{\mu_1}{\mathcal{Z}} \right)^{1/3} \left(x + \zeta_n \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mu_1} \right)^{1/3} \right) \right)$ описывает огибающую, обеспечивающую выполнение условий затухания при $x = 0$ и $x \rightarrow +\infty$, причём характерная длина волны огибающей связана с параметром μ_1 , характеризующим скорость уменьшения инкремента абсолютной неустойчивости (4.5). Чем медленнее происходит пространственная эволюция невозмущённого течения, тем меньше μ_1 , то есть тем меньше отличие глобальной собственной частоты от частоты абсолютной неустойчивости в начальном сечении струи $\omega_s(0)$, и тем более растянутой в пространстве становится собственная функция. Таким образом, полученное решение (4.12) описывает моды, возникающие из локальной абсолютной неустойчивости, имеющей место на конечном пространственном интервале.

4.3. Пример глобально неустойчивой струи

Выше в разд. 3 проведены расчёты эволюции плоских затопленных струй. Покажем, что характеристики абсолютной неустойчивости могут быть достаточны для возникновения глобальной неустойчивости эволюционирующей струи. Далее для анализа выбран начальный профиль скорости с параметрами $\xi = 0.1$, $\zeta = 1.6$. Его эволюция вниз по потоку, а также положение точки перегиба на профиле показано на рис. 6. Можно отметить, что увеличение скорости в точке перегиба на начальных этапах развития струи происходит очень быстро, что вызвано большой кривизной профиля на краю струи, но замедляется ниже по потоку по мере “расплывания” профиля и уменьшения его кривизны.

На рис. 7 показаны отображения линий $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega_s(x)$ в комплексную плоскость α при нескольких выбранных профилях скорости, соответствующих нескольким координатам x развивающейся струи. Как видно, положение седловой точки слабо зависит от x : относительное изменение $\text{Re } \alpha_s$ составляет 2%, относительное изменение $\text{Im } \alpha_s$ и $\text{Re } \omega_s$ – 10%. Ориентация подходящих к ней ветвей $\alpha(\omega)$, определяемая $\text{Arg} \lambda$, меняется более существенно, однако $\text{Arg} \lambda$ связан с величиной θ в (2.8) и не определяет асимптотику локализованных возмущений в плоскопараллельном случае. Величина $|\lambda|$, определяющая асимптотику

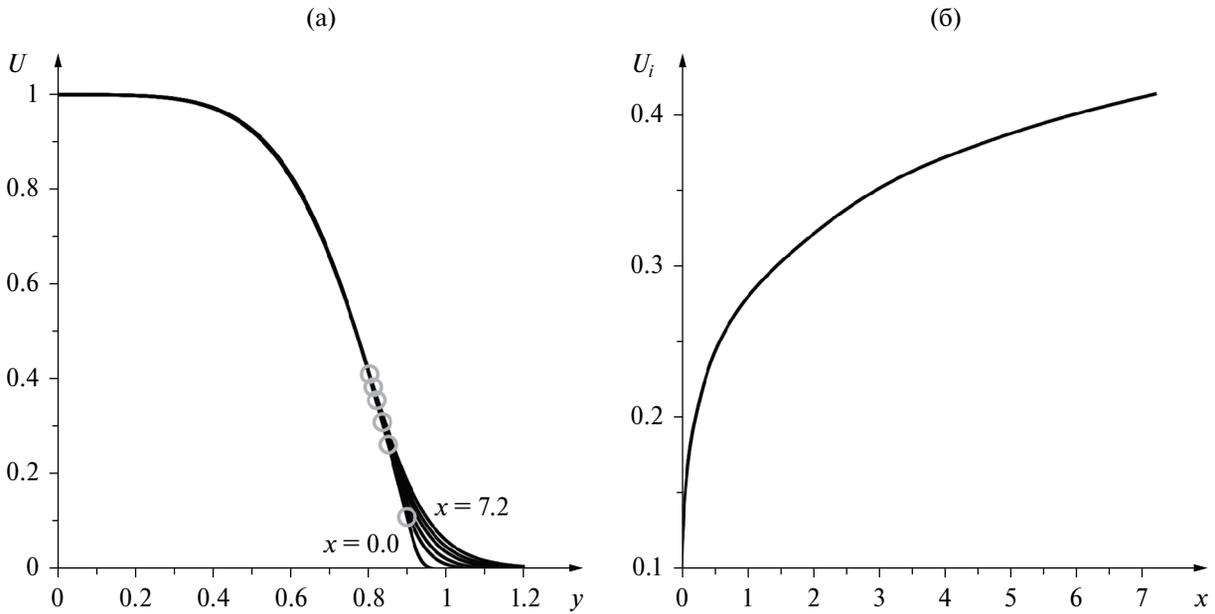


Рис. 6. Профили скорости при $x = 0.0, 0.8, 1.8, 3.4, 5.0, 7.2$ при начальном профиле, соответствующем $\xi = 0.1, \zeta = 1.6$, кружками показано положение точки перегиба (а). Значения скорости в точке перегиба профиля в зависимости от продольной координаты x (б).

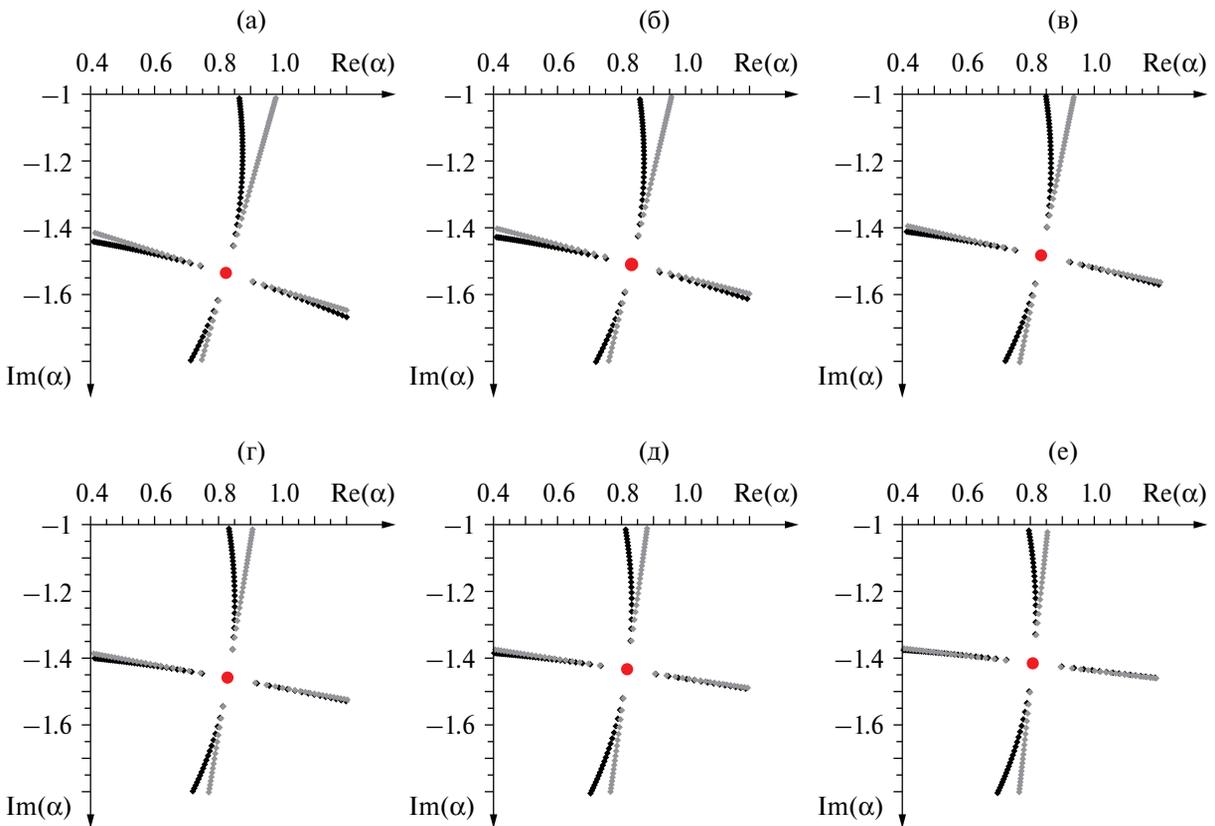


Рис. 7. Отображение линии $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega_s$ в плоскость α для профиля струи, соответствующего расстоянию $x = 0$ (а), 0.8 (б), 1.8 (в), 3.4 (г), 5.0 (д), 7.2 (е) от начального сечения. Чёрным цветом показан расчёт на основе уравнения Рэлея, серым – приближение с параметрами табл. 1, кружком показана седловая точка $\alpha = \alpha_s$.

Таблица 1. Параметры седловой точки при различных удалениях от входа

x	α_s	ω_s	λ
0.0	$0.820 - 1.535i$	$0.927 + 0.050i$	$2.993 - 1.932i$
0.8	$0.827 - 1.503i$	$0.911 + 0.041i$	$3.212 - 1.693i$
1.8	$0.827 - 1.479i$	$0.897 + 0.032i$	$3.343 - 1.488i$
3.4	$0.824 - 1.450i$	$0.879 + 0.021i$	$3.452 - 1.237i$
5.0	$0.819 - 1.428i$	$0.863 + 0.011i$	$3.510 - 1.038i$
7.2	$0.808 - 1.405i$	$0.845 + 0.000i$	$3.546 - 0.815i$

Таблица 2. Оценка параметров уравнения (4.6) при профилях на различных удалениях от входа

x	\varkappa	u_0
0.0	$-0.152 + 0.236i$	$-0.854 + 0.475i$
0.8	$-0.128 + 0.244i$	$-0.789 + 0.520i$
1.8	$-0.111 + 0.250i$	$-0.741 + 0.555i$
3.4	$-0.092 + 0.257i$	$-0.690 + 0.593i$
5.0	$-0.077 + 0.262i$	$-0.650 + 0.622i$
7.2	$-0.062 + 0.268i$	$-0.606 + 0.653i$

(2.8) благодаря связи $|\omega''(\alpha_s)| = 2/|\lambda|$ (4.2), меняется очень незначительно – в пределах 3%. Эти соотношения позволяют принять коэффициенты близкими к постоянным. Найденные значения $\alpha_s(x)$, $\omega_s(x)$, $\lambda(x)$ приведены в табл. 1. Соответствующие им параметры \varkappa , u_0 представлены в табл. 2.

График изменения $\text{Im } \omega_s(x)$ показан на рис. 8, откуда очевидно близкое к линейному уменьшение инкремента роста абсолютной неустойчивости. Учитывая это, параметр μ_1 может быть оценен по табл. 1 как

$$\mu_1 = -\frac{d\text{Im}\omega}{dx} \approx 0.00700.$$

Принимая наименьший по модулю ноль функции Эйри $\zeta_1 \approx -2.338$ и рассматривая различные \varkappa из табл. 2, получаем следующие оценки правой части (4.11): 0.042; 0.043; 0.044; 0.045; 0.045; 0.046 для $x = 0.0, 0.8, 1.8, 3.4, 5.0, 7.2$. Условие (4.8) выполнено во всех случаях. Поскольку $\text{Im } \omega_s(0) = 0.050$, условие глобальной неустойчивости (4.11) выполнено для всех пяти профилей. Учитывая приближённый характер оценки параметра \varkappa , можно ожидать наличия глобальной неустойчивости, то есть в данном случае локальная абсолютная неустойчивость на ограниченном пространственном интервале достаточно сильна для порождения глобальной неустойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм, определяющий длину участка локальной абсолютной неустойчивости затопленной струи с заданным входным профилем скорости. После параметризации входного профиля проводится расчёт его эволюции вниз по потоку, затем – анализ характера неустойчивости профилей скорости на различных расстояниях от начала полученной струи. Характер неустойчивости определяется поведением линий уровня $\text{Im } \omega = 0$ частоты ω на комплексной плоскости волнового числа α . В исследованном классе входных профилей скорости найдена область параметров, для которой реализуется наибольшая длина участка локальной абсолютной неустойчивости струи $L \approx 7.6$.

Наличие достаточно протяжённого участка локальной абсолютной неустойчивости течения приводит к его глобальной неустойчивости [12, 13]. На основе рассмотрения модельного уравнения получена связь между характеристиками локальной абсолютной неустойчивости, имеющей место на ограниченном пространственном интервале, и глобальными собственными частотами и модами. Продемонстрирован начальный профиль скорости струи из рассматриваемого класса профилей, для которого ожидается существование растущей глобальной собственной моды. Таким образом, показана возможность глобальной неустойчивости эволюционирующей в пространстве плоской затопленной струи.

Экспериментальная реализация глобально неустойчивой затопленной струи может быть проведена с помощью технологии, описанной в [25]. Данная задача представляет как фундаментальный интерес, так и прикладной: такое течение может быть использовано для ускорения перехода к турбулентности

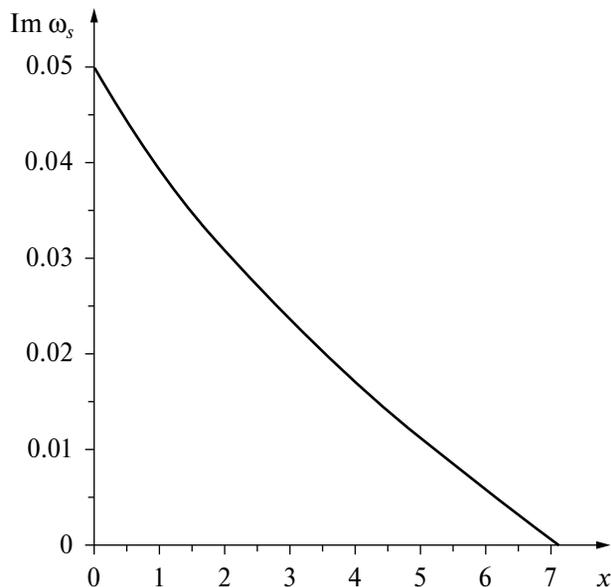


Рис. 8. Зависимость инкремента локальной абсолютной неустойчивости $\text{Im } \omega_s$ от продольной координаты x .

струй в различных технических устройствах и интенсификации перемешивания, например, в форсунках камер сгорания и в химических реакторах.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-19-00404-П.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайко Ю.С., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Чичерина А.Д. Исследование затопленных струй с увеличенной длиной начального ламинарного участка // Изв. РАН. МЖГ. 2018. Т. 1. С. 97–106.
2. Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A. Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 043603.
3. Зайко Ю.С., Гареев Л.Р., Чичерина А.Д., Трифонов В.В., Веденеев В.В., Решмин А.И. Экспериментальное обоснование применимости линейной теории устойчивости к затопленной струе // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 497. С. 44–48.
4. Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedeneev V.V. Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // J. Fluid Mech. 2022. V. 934. A3.
5. Schlichting H. Boundary Layer Theory // McGraw-Hill. 1979.
6. Иорданский С.В., Куликовский А.Г. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 4. С. 1326–1331.
7. Deissler R.L. The convective nature of instability in plane Poiseuille flow // Phys. Fluids. 1987. V. 30. No. 8. P. 2303–2305.
8. Brevdo L. Convectively unstable wave packets in Blasius boundary layer // ZAMM. 1995. V. 75. No. 6. P. 423–436.
9. Abid M., Brachet M., Huerre P. Linear hydrodynamic instability of circular jets with thin shear layers // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1993. V. 12(5). P. 683–693.
10. Vedeneev V.V., Zayko J.S. On absolute stability of free jets // J. Phys: Conf. Series. 2018. V. 1129. 012037.
11. Vedeneev V., Nikitin N. Absolute instability of plane incompressible jets // J. Fluid Mech. 2023. V. 962. A4.
12. Chomaz J.-M., Huerre P., Redekopp L.G. A frequency selection criterion in spatially developing flows // Stud. Appl. Math. 1991. V. 84. № 2. P. 119–144.
13. Le Dizès S., Huerre P., Chomaz J.M., Monkewitz P.A. Linear global modes in spatially developing media // Philos. Trans. R. Soc. London A. 1996. V. 354. № 1705. P. 169–212.
14. Monkewitz P.A. The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 5. P. 999–1006.

15. *Pier B.* On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 458. P. 407–417.
16. *Coenen W., Lesshaft L., Garnaud X., Sevilla A.* Global instability of low-density jets // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 820. P. 187–207.
17. *Woodley B.M., Peake N.* Global linear stability analysis of thin aerofoil wakes // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 339. P. 239–260.
18. *Le Dizés S.* Global modes in falling capillary jets // *Eur. J. Mech., B/Fluids.* 1997. V. 16. № 6. P. 761–778.
19. *Yakubenko P.A.* Global capillary instability of an inclined jet // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 346. P. 181–200.
20. *Веденеев В.В., Порошина А.Б.* Устойчивость упругой трубки, содержащей текущую неньютоновскую жидкость и имеющей локально ослабленный участок // *Труды МИАН.* 2018. Т. 300. С. 42–64.
21. *Bondarev V., Vedenev V.* Short-wave instability of an elastic plate in supersonic flow in the presence of the boundary layer // *Journal of fluid mechanics.* 2016. V. 802. P. 528–552.
22. *Веденеев В.В.* Математическая теория устойчивости плоскопараллельных течений и развитие турбулентности // *Долгопрудный: Издательский Дом “Интеллект”,* 2016. 152 с.
23. *Couairon A., Chomaz J.-M.* Fully nonlinear global modes in slowly varying flows // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. № 12. P. 3688–3703.
24. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965
25. *Спасова А.А., Зайко Ю.С.* Разработка алгоритма формирования затопленной струи с заданными характеристиками профиля скорости // *ПМТФ.* 2023. Т. 64. № 4. С. 67–75.

Absolute and Global Instability of Plane Submerged Jets

V. V. Vedenev*, L. R. Gareev, Ju. S. Zayko***, and N. M. Exter******

Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia

*e-mail: vasily@vedeneev.ru

**e-mail: gareev@imec.msu.ru

***e-mail: zayko@imec.msu.ru

****e-mail: exter@imec.msu.ru

The family of velocity profiles of a submerged jet, which are absolutely unstable in the plane-parallel approximation, is considered. The profiles are specified by two parameters, the first of them is responsible for the location of the only inflection point in the velocity profile, and the second is responsible for the shear layer thickness. An algorithm for determining the length of the section of local absolute instability of the jet with a given input velocity profile, that is, the distance at which absolute instability gives way to convective instability, has been implemented. The dependence of this length on the parameters defining the input profile is obtained. A connection between the characteristics of local absolute instability calculated in the plane-parallel approximation and global instability of the jet evolving in space is analytically obtained. The input velocity profile that corresponds to sufficiently large length of the zone of local absolute instability, at which global instability of spatially developing jet occurs is demonstrated. Thus, the possibility of existence of global instability of plane submerged jets with special velocity distributions is demonstrated.

Keywords: jet flow, linear stability theory, absolute instability, global instability.

УДК 532.5: 556.535.5

САМОИНДУЦИРОВАННОЕ СМЕЩЕНИЕ И ВРАЩЕНИЕ ТАЮЩЕГО ЛЕДЯНОГО ДИСКА НА ПОВЕРХНОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ВОДЫ

© 2024 г. А. В. Кистович, Т. О. Чаплина*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**e-mail: tanya75.06@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.

После доработки 14.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Представлены результаты экспериментальных исследований и физического моделирования явления самопроизвольного смещения и вращения ледяного диска на поверхности неподвижной воды. Измерены зависимости скорости вращения ледяного образца от солёности и глубины экспериментального контейнера. Показано, что причиной наблюдаемых движений на поверхности неподвижной воды является ячеистое конвективное течение, порождённое процессом таяния льда.

Ключевые слова: лед, таяние, вязкое увлечение, конвективные ячейки.

DOI: 10.31857/S1024708424040025, **EDN:** OYSVHR

Явление вращения плавучего льда на поверхности неподвижной воды, впервые описанное в конце XIX в., в последнее время снова стало привлекать внимание как натуральных [1, 2], так и лабораторных наблюдателей [3]. Несмотря на большое количество работ процессы формирования конвективных вихревых течений, образующихся вследствие таяния льда, изучены недостаточно полно; ряд сформулированных гипотез не нашел подтверждения в опытах, что объясняется сложностью теоретического описания и методическими трудностями выполнения экспериментов. До настоящего момента не существует единого мнения о механизме возникновения самоиндуцированного вращения ледяных объектов. В данной работе приводятся результаты измерений скорости вращения ледяного диска на поверхности исходно неподвижной пресной и соленой воды различной глубины, и построена новая физическая модель такого вращения.

Изучение течений, возникающих при размещении ледяного маркера на свободной поверхности покоящейся жидкости, требует учета целого ряда факторов, таких как состав и минерализация льда и воды, температура, солёность, форма и размер ледяного маркера, шероховатость его поверхности, имеющиеся подводные и поверхностные течения. При проведении эксперимента в лабораторных условиях удастся исключить или свести к минимуму влияние большинства слабо контролируемых факторов, исследовать упрощенную задачу, редуцировав ее термодинамическую часть к задаче свободной конвекции под гладкой поверхностью раздела. Эксперименты проводились в сосудах различной формы и размеров.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве ледяных маркеров использовались образцы льда различной формы (круг, прямоугольник, квадрат, звезда, пятиугольник). Ледяные маркеры с замороженными указателями размещались на свободной поверхности как пресной, так и соленой воды ($S=35\text{‰}$). Все эксперименты проводились при комнатной температуре воды и воздуха (20°C), ледяные маркеры охлаждались до температуры -11°C , регистрация картины возникающих перемещений производилась видеокамерой, закрепленной на штативе.

При размещении ледяного маркера любой формы и размера на поверхности сосуда с покоящейся водой (площадь свободной поверхности превосходит площадь верхней грани ледяного блока не менее, чем в 2 раза) регистрируется вращение льда, скорость которого зависит как от глубины слоя воды, так

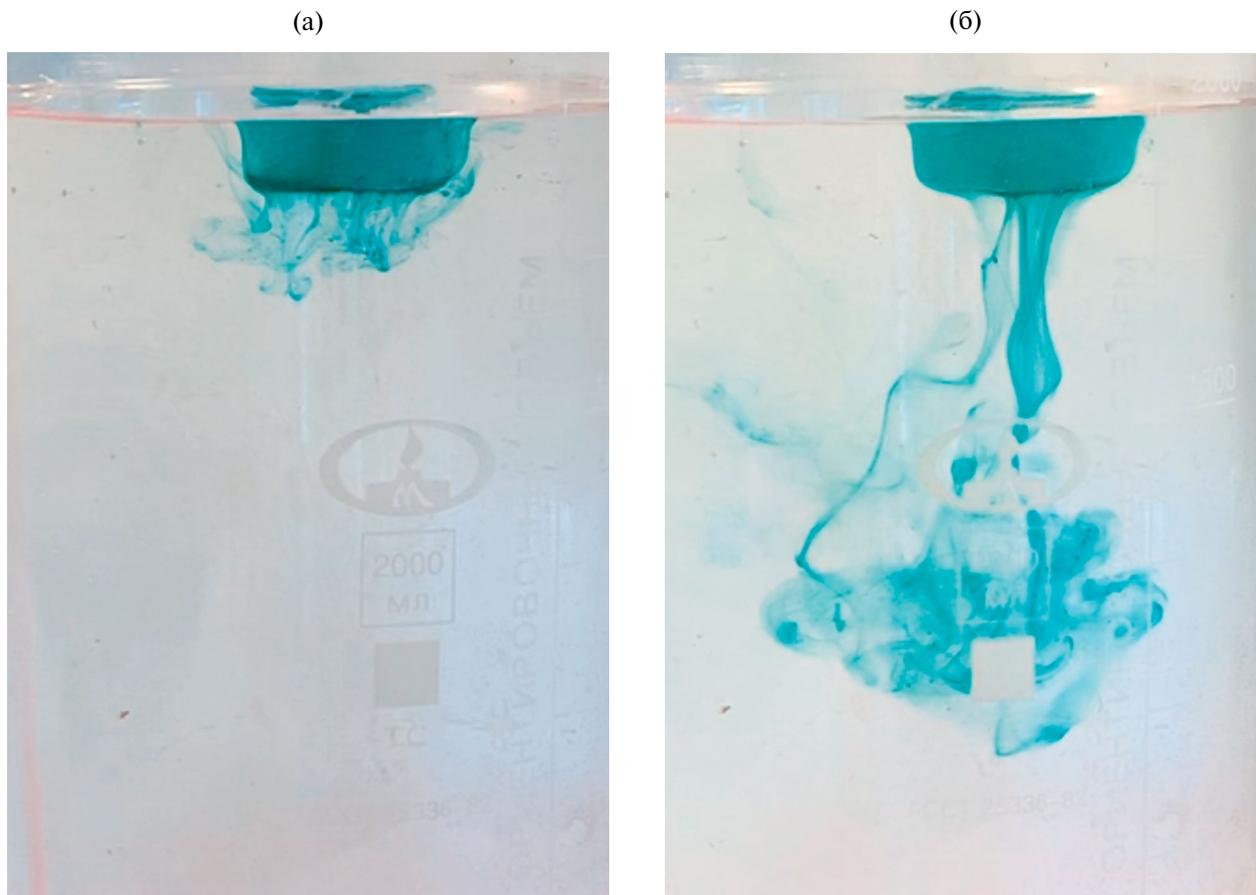


Рис. 1. Течение под ледяным диском ($d = 1.0$ см, $h_d = 0.3$ см, $t = 1, 10$ с).

и от размера маркера. В частности, в экспериментах при глубине жидкости 3 см вращение ледяного блока толщиной $h_d = 0.5$ см практически прекращалось. Для визуализации течения, возникающего в толще жидкости под размещенным на поверхности воды ледяным блоком, в ходе замораживания в воду добавлялся краситель – его высвобождение при таянии льда служит не только индикатором возникающего течения (рис. 1), но также выявляет его структуру – нисходящие под действием силы гравитации струи холодной талой воды.

При увеличении глубины слоя жидкости H (5, 10, 15, 20 см), на котором размещается ледяной блок, угловая скорость его вращения растет. Эксперименты также показали, что в соленой воде ($S=35\%$) угловая скорость вращения льда меньше, чем в пресной. В этом позволяет убедиться зависимости угла поворота ледяного блока от времени для разных глубин в пресной и соленой воде, приведенные на рис. 2.

Анализ экспериментальных результатов позволяет выдвинуть гипотезу о том, что причиной вращения ледяного диска, помещенного в покоящуюся воду, являются течения, возникающие в воде в результате проявления нескольких физических эффектов. Как следует из теоретической механики [4], приобретение диском ненулевого кинетического момента относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, возможно лишь в результате приложения к нему внешнего момента. Внешний вращательный момент, действующий на ледяной диск, представляет собой суммарный момент вязких касательных напряжений на границе “вода – лед”. Для того чтобы возникли вязкие касательные напряжения необходимо привести в движение исходно покоящуюся жидкость. Существуют два механизма, способные привести в движение жидкость в задаче в рассматриваемой постановке: неоднородность поверхностного натяжения как следствие неоднородности температурного распределения вдоль границы контакта сред, а также возникающие в воде конвективные течения.

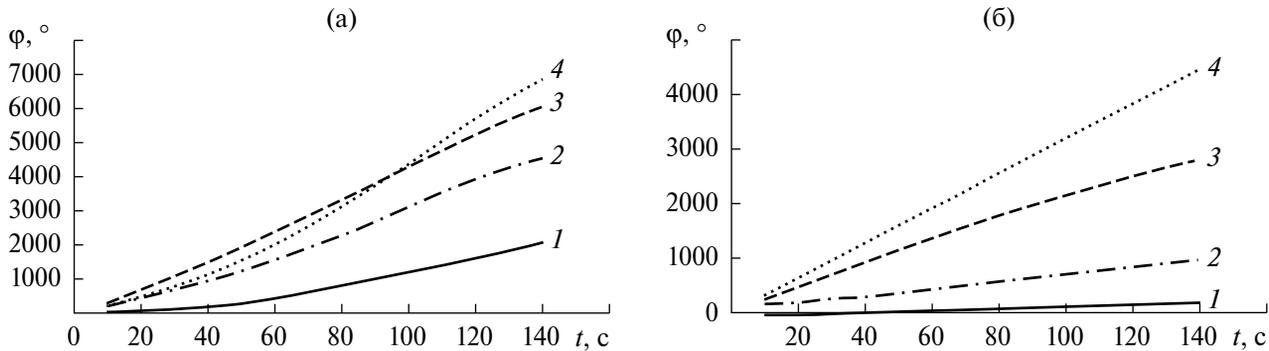


Рис. 2. Временная зависимость углового положения ледяных блоков ($d = 2$ см, $h = 1$ см) при различных глубинах пресной (а) и соленой (б) воды: 1–4 – $H = 5, 10, 15, 20$ см.

Обе эти причины обусловлены наличием центров таяния льда на нижней (и, возможно, боковой) поверхности маркера.

2. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ЛЕДЯНОГО ДИСКА

Каждый из центров таяния даёт свой вклад в нарушение равномерного распределения температуры по контактной поверхности “вода – лёд”, в результате чего градиент коэффициента поверхностного натяжения становится отличным от нуля. Рассматриваемая здесь модель тающего ледяного диска представляет собой объект с идеально гладкой поверхностью, дно которого расположено на уровне $z = z_b(t) < 0$ (уровень воды – $z = 0$), а положение боковой стенки задается радиусом диска $R(t)$. Используемая цилиндрическая система координат (r, φ, z) такова, что ее ось z совпадает с вертикальной осью, проходящей через центр диска. Так как внутри твёрдого льда макроскопическое движение его элементов отсутствует, то, согласно граничным условиям [5], возникающие вязкие напряжения на малом элементе dS поверхности льда задаются величиной $-\nabla\alpha|_S$, которая на дне диска ($z = z_b$) имеет вид

$$-(\alpha'_r \mathbf{e}_r + \alpha'_\varphi / r \mathbf{e}_\varphi)|_{z=z_b}, \quad (2.1)$$

при этом в (1.1) $\alpha = \alpha(r, \varphi)$, а на боковой стороне приобретает форму

$$-(\alpha'_z \mathbf{e}_z + \alpha'_\varphi / R \mathbf{e}_\varphi)|_{r=R}, \quad (2.2)$$

причём в (2.2) $\alpha = \alpha(z, \varphi)$.

Вклад вязких напряжений на дне диска во вращательный момент относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &\sim - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \left[\mathbf{r} \mathbf{e}_r \times (\alpha'_r \mathbf{e}_r + \alpha'_\varphi / r \mathbf{e}_\varphi)|_{z=z_b} \right] = \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \alpha'_\varphi|_{z=z_b} r dr = \\ &= \mathbf{e}_z \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \alpha'_\varphi|_{z=z_b} d\varphi = \mathbf{e}_z \int_0^R r dr (\alpha(r, 2\pi)|_{z=z_b} - \alpha(r, 0)|_{z=z_b}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

так как по причине непрерывности температурного распределения по поверхности льда имеет место и непрерывность распределения коэффициента поверхностного натяжения, то есть $\alpha(r, 2\pi)|_{z=z_b} - \alpha(r, 0)|_{z=z_b} = 0$, откуда и следует результат (2.3).

Вклад вязких напряжений на боковой стороне диска во вращательный момент относительно вертикальной оси задаётся величиной

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_2 &\sim - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_b}^0 dz \left[\mathbf{Re}_r \times \alpha'_\varphi / R \mathbf{e}_\varphi \Big|_{r=R} \right] = \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_b}^0 \alpha'_\varphi \Big|_{r=R} dz = \\
&= \mathbf{e}_z \int_{z_b}^0 dz \int_0^{2\pi} \alpha'_\varphi \Big|_{r=R} d\varphi = \mathbf{e}_z \int_{z_b}^0 dz \left(\alpha(z, 2\pi) \Big|_{r=R} - \alpha(z, 0) \Big|_{r=R} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

по той причине, что на боковой стороне диска $\alpha(z, 2\pi) \Big|_{r=R} - \alpha(z, 0) \Big|_{r=R} = 0$.

Таким образом, зависимость коэффициента поверхностного натяжения на границе “вода – лёд” может привести только к смещению, но не к вращению ледяного диска.

3. ВЛИЯНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ДИНАМИКУ ЛЕДЯНОГО ДИСКА

Нижняя поверхность ледяного диска, в используемой здесь модели плоская и однородная, на самом деле таковой не является. За счёт внутренних структурных неоднородностей льда, вызываемых различными причинами, на его поверхности образуются локальные области, называемые центрами таяния, на которых процесс таяния происходит интенсивнее, чем в среднем по поверхности. Этот факт подтверждается экспериментами [6] по изучению таяния нижней поверхности плавучего льда. В результате картина таяния, возникающая у нижней границы диска после контакта льда с водой, представляет собой слой талой воды и опускающиеся из него струи, порождённые центрами таяния льда. Эти струи вовлекают в своё движение окружающую воду, в том числе и слой талой воды вблизи границы “вода – лёд”, создавая на этой границе вязкие напряжения, которые при определённых условиях способны привести ледяной диск в движение.

Структура течения вблизи нижней границы льда талой жидкости, вовлечённой в движение опускающейся струей, порождённой единственным центром таяния, представляет собой вязкий пограничный слой, движение в котором направлено к этому центру [7–11]. При этом на границе “вода – лёд” и внешней границе слоя вовлечения горизонтальная скорость полагается равной нулю в предлагаемой модели, а вертикальная скорость считается отсутствующей во всём пограничном слое.

При наличии единственного центра таяния течение в жидкости симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей через этот центр и вертикальную ось симметрии ледяного диска. В результате момент вязких сил, действующих на поверхность диска, относительно центра его дна будет равен нулю, независимо от места расположения центра таяния. При этом результирующая сила может быть отличной от нуля, что может привести к смещению ледяного диска вдоль прямой, соединяющей центр дна диска и центр таяния. Если бы для течения, формирующегося под тающим диском, выполнялся принцип суперпозиции, то появление сразу двух центров таяния изменило бы только результирующую вязкую силу, но оставило бы неизменным её нулевой момент и диск только бы смещался, но не вращался. Но возникающее течение под диском, как показывают эксперименты, разбивается на конвективные ячейки, на границах которых горизонтальная компонента поля скорости обращается в ноль. Принцип суперпозиции нарушается, что и приводит к возникновению вращения. Предлагаемая ниже модель воздействия конвекции при таянии льда на движение ледяного диска основана, для простоты, на предположении о равенстве интенсивности течений от различных центров таяния.

Неподвижная граница конвективных ячеек, порождённых двумя центрами таяния, характеризуется равенством давлений по обе её стороны (в противном случае граница начала бы смещаться). В рамках используемой модели равенства интенсивностей центров таяний это означает, что граница между двумя соседними конвективными ячейками проходит по срединному перпендикуляру к отрезку, соединяющему центры таяния.

На рис. 3 приведено визуальное обоснование предлагаемой модели посредством сравнения результатов одной из её компьютерных реализаций (а) и фотографии реальной конвективной структуры (б), образовавшейся в эксперименте при нагреве плоского горизонтального источника тепла [11]. По сути дела, не существует отличия между экспериментально наблюдаемой и модельной структурами, что качественно подтверждает справедливость предлагаемой простейшей модели, которая далее будет использована при проведении необходимых расчётов.

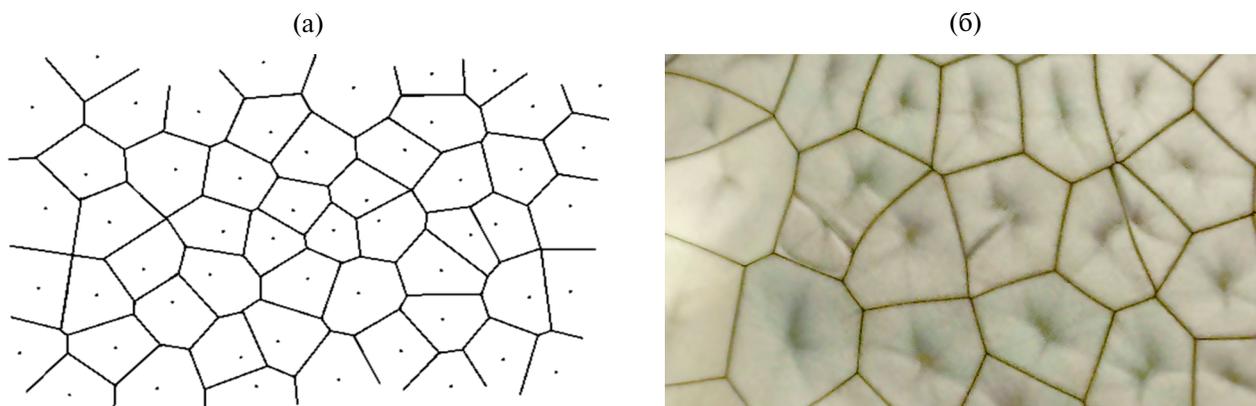


Рис. 3. (а) Компьютерное моделирование конвективного паркета, образованного одинаковыми всплывающими струями. (б) Фотография реальной конвективной структуры в тонком слое жидкости [11] (вид сверху).

Количественная проверка данного способа формирования ячеистой картины конвекции проводилась для модели прямоугольного маркера, на котором случайным образом генерируются координаты большого числа ($N = 40$) центров таяния с равномерным распределением координат по осям $x \in [0, 2]$ и $y \in [0, 1]$. На основании этих координат строились границы конвективных ячеек и определялись характеристики отдельной конвективной картины (реализации), а именно: набор значений площадей отдельных ячеек; набор значений их периметров; зависимость количества ячеек в реализации от числа сторон ячейки. Для получения статистически значимых результатов создавались ансамбли реализаций, изучение свойств которых показало, что стабильные характеристики конвективных структур обеспечиваются ансамблями, включающими в себя не менее 40 реализаций. Именно это число элементов ансамблей было использовано при построении графиков, представленных на рис. 4–6.

На рис. 4–5 результаты статистической обработки ансамбля реализаций ячеистой структуры представлены в виде функций распределения числа сторон ячейки (рис. 4) и её периметра (рис. 5), показанные тёмными окружностями, и их аппроксимации (пунктирные линии) по методу наименьших квадратов. На рис. 4 по горизонтальной оси откладывается дискретное значение числа сторон конвективной ячейки, а на рис. 5 – периметр (в тех же безразмерных единицах, что и длины сторон прямоугольной области, занимаемой конвективной картиной). По вертикали на обоих графиках отложена плотность вероятности соответствующего случайного события. Как показывает проведённый анализ, функция распределения числа сторон ячейки n описывается распределением Вейбулла

$$f(a, b, n) = Weibull(a, b, n - 2) = \frac{b}{n - 2} \left(\frac{n - 2}{a} \right)^b \exp \left(- \left(\frac{n - 2}{a} \right)^b \right), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (3.1)$$

при $a = 3.7$, $b = 3.2$.

Функция распределения периметра ячейки P представляет собой нормальное распределение со смещением

$$f(a, b, c, P) = Gauss(a, b, c) = a \exp(-b(P - c)^2), \quad P \in [0, 6], \quad (3.2)$$

при $a = 0.34$, $b = -8.1$, $c = 0.95$.

Функция распределения площади ячейки показана на рис. 6, где на левом графике представлены результаты статистической обработки ансамбля конвективных картин при дискретизации шага площади на величину 0.01 в диапазоне площадей $S \in [0, 1.5]$, а на правом – часть левого графика в диапазоне площадей $S \in [0, 0.12]$ (тёмные окружности) и аппроксимация этого распределения функцией Вейбулла $Weibull(a, b, S)$ при $a = 5.7$, $b = 2.2$ (пунктирная кривая).

Результаты проделанного моделирования – описание распределений площадей и числа сторон конвективных ячеек посредством двухпараметрической функции Вейбулла – совпадает с результатами

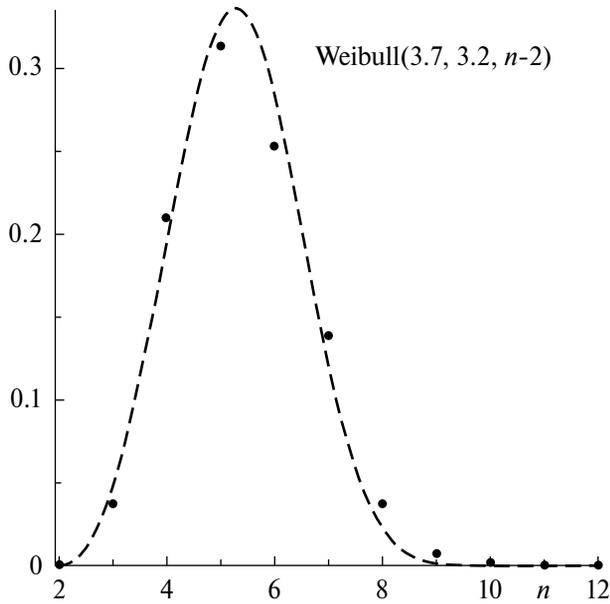


Рис. 4. Функция распределения числа сторон ячейки n – распределение Вейбулла (2.1).

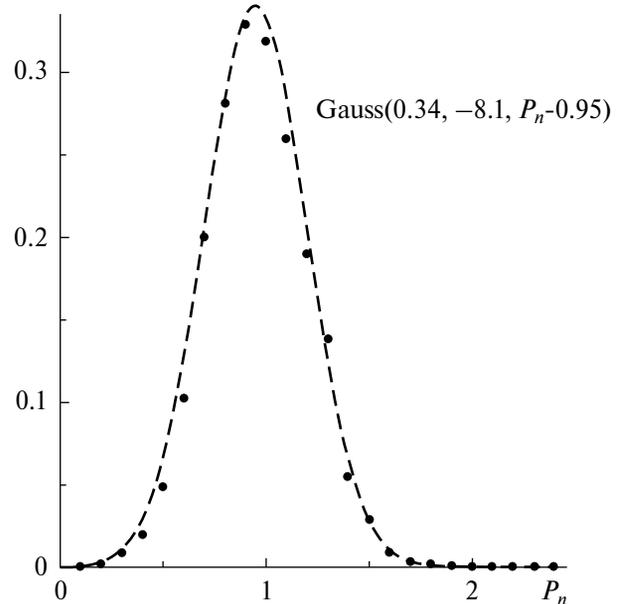


Рис. 5. Функция распределения периметра ячейки P – нормальное распределение со смещением (2.2).

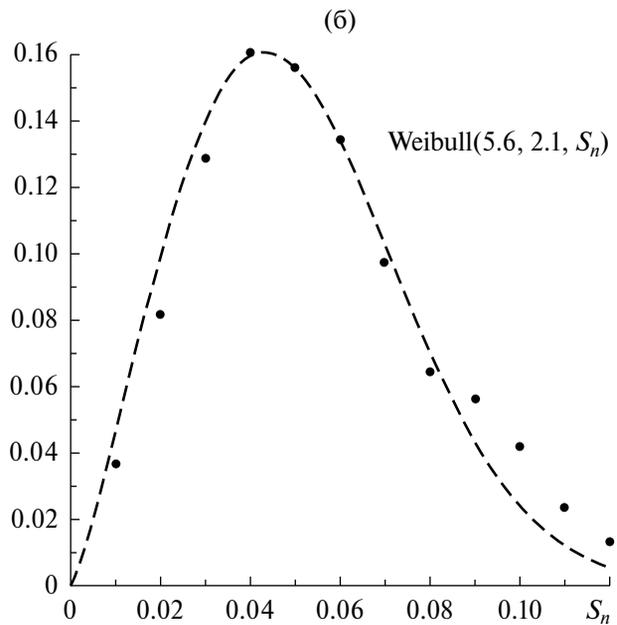
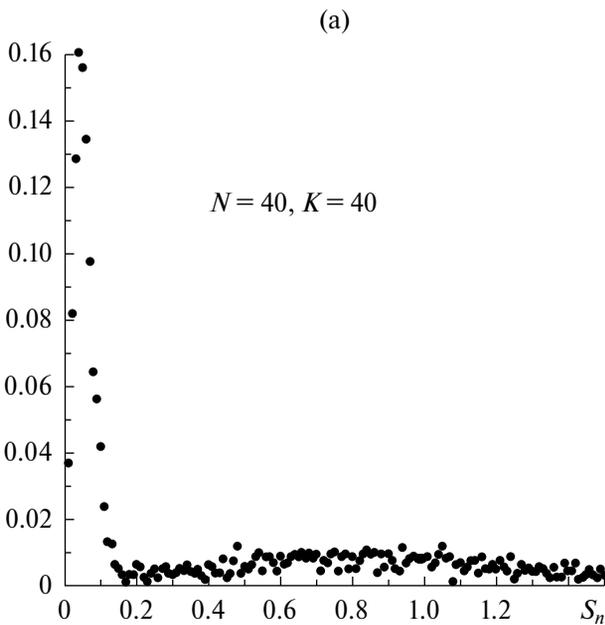


Рис. 6. Функция распределения площади ячейки: а) результаты статистической обработки ансамбля конвективных картин при дискретизации шага площади на величину 0.01 в диапазоне площадей $S \in [0, 1.5]$, б) часть рис. 6 (а) в диапазоне площадей $S \in [0, 0.12]$ (тёмные окружности) и аппроксимация этого распределения функцией Вейбулла $Weibull(a, b, S)$ при $a = 5.7, b = 2.2$ (пунктирная кривая).

статистической обработки тех же параметров для выходов конвективных магматических структур на поверхность Земли при криогенезе вечной мерзлоты во время криодеградационного перехода льда в воду [12] (максимум сторон грунтовых полигонов сосредоточен при числе сторон 5 или 6, в точном соответствии с рис. 4 или картин кракелюр при высыхании грязевых поверхностей [13], что указывает на применимость предлагаемого здесь метода разбиения поверхности ледяного маркера на отдельные ячейки.

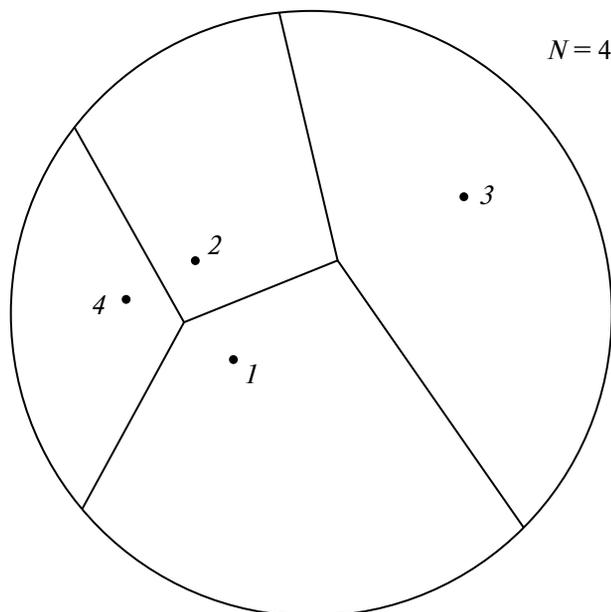


Рис. 7. Отдельная картина конвективных ячеек при $N = 4$.

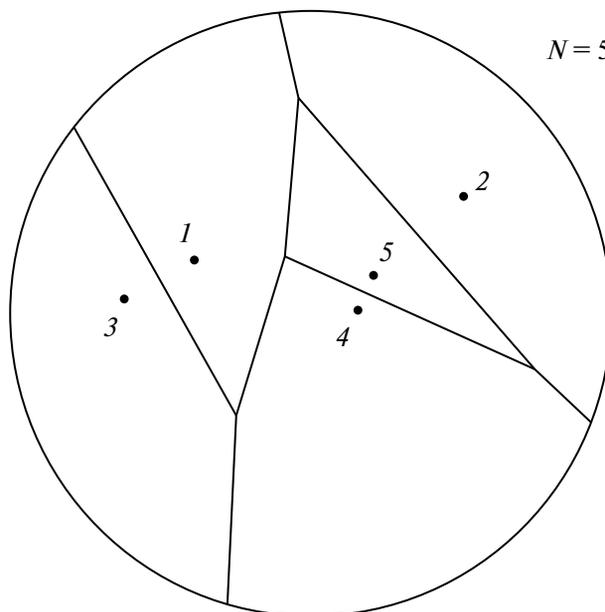


Рис. 8. Отдельная картина конвективных ячеек при $N = 5$.

Использование предложенной модели построения конвективной картины при таянии дна плавучего ледяного диска иллюстрируется двумя частными реализациями для четырёх и пяти центров таяния, показанными на рис. 7 и 8 соответственно.

Такое количество центров таяния соответствует экспериментальным наблюдениям. По причине того, что каждая отдельная реализация конвективной картины в данном случае содержит слишком малое число конвективных ячеек для создания устойчивых статистических характеристик, позволяющих проводить сравнения с известными лабораторными и натурными наблюдениями, построение функций распределения, подобных представленным на рис. 4–6, невозможно. Именно по этой причине статистическое обоснование принципа моделирования ячеистой картины таяния проводилось при большом числе центров $N = 40$, а прямоугольная форма области конвекции была выбрана для упрощения вычислений.

Для того, чтобы получить количественные оценки сил и моментов, действующих на таящий ледяной диск, необходимо задаться моделью поля скорости в пограничном слое, примыкающем к его дну. Многочисленные экспериментальные результаты, в том числе и [14], указывают на то, что внутри конвективной ячейки горизонтальная компонента поля скорости в произвольной точке всегда направлена вдоль прямой, соединяющей эту точку и точку всплытия (погружения) жидкости – в рассматриваемом здесь случае такой точкой является центр таяния льда. При этом горизонтальная скорость должна обращаться в ноль как в центре таяния, так и на границах конвективной ячейки.

С целью упрощения описания и вычислений, окружность на краю диска представлялась в виде правильного 100-угольника, что визуально трудноотлично, в том числе и на рис. 7. Каждая конвективная ячейка разбивается на треугольники отрезками, проведёнными из центра таяния в углы многоугольника, ограничивающего эту ячейку. Выбирается некоторая n -тая конвективная ячейка и j -тый треугольник в ней. Центр таяния расположен в точке (x_n, y_n) , а остальные две вершины этого j -того треугольника – в точках $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$ и $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$. Пусть какая-либо точка выбранного треугольника имеет координаты (x, y) . Прямая, проходящая через центр таяния и эту точку пересекает отрезок, соединяющий точки $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$ и $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$ в точке (x_n^*, y_n^*) . Согласно модели течения, у поверхности льда внутри образующейся конвективной ячейки поле скорости во всех точках, за исключением погружающейся струи и малых областей вблизи стенок ячейки, направлено радиально к центру таяния, спадает обратно пропорционально расстоянию от центра таяния до точки наблюдения и описывается выражением, которое представляет собой модификацию приближённого выражения для поля скорости [7–11], применительно к ячеистой структуре

$$\mathbf{v}_j^{(n)} = v_n \frac{(x_n - x)\mathbf{e}_x + (y_n - y)\mathbf{e}_y}{r_n^2} \operatorname{erf}^2(\kappa r_n) \operatorname{erf}^2(\kappa r_n^*) f(z), \quad (3.3)$$

где erf – функция ошибок, κ – некоторый параметр, величина которого будет оговорена в дальнейшем, и введены обозначения

$$f(z) = (z - z_b) \operatorname{erfc} \left(\frac{z_b - z}{\sqrt{\nu t_n}} \right), \quad r_n = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}, \quad r_n^* = \sqrt{(x_n^* - x)^2 + (y_n^* - y)^2},$$

при этом t_n – характерное время формирования пограничного слоя, ν – кинематическая вязкость воды, а сама функция $f(z)$ описывает поперечную структуру поля скорости в пограничном слое.

Координаты точки (x_n^*, y_n^*) на отрезке, соединяющий точки $(x_j^{(n)}, y_j^{(n)})$ и $(x_{j+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)})$, определяются выражениями

$$x_n^* = x_j^{(n)} + \lambda(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}), \quad y_n^* = y_j^{(n)} + \lambda(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)}), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Аналогично, координаты точки (x, y) на отрезке, соединяющем точки (x_n, y_n) и (x_n^*, y_n^*) , задаются соотношениями

$$x = x_n + \mu(x_n^* - x_n), \quad y = y_n + \mu(y_n^* - y_n), \quad \mu \in [0, 1]. \quad (3.5)$$

На основании (3.4, 3.5) представление поля скорости (2.3) приобретает вид

$$\mathbf{v}_j^{(n)} = -v_n \frac{\xi_j \mathbf{e}_x + \eta_j \mathbf{e}_y}{\mu r_j^2} \operatorname{erf}^2(\kappa \mu r_j) \operatorname{erf}^2(\kappa (1 - \mu) r_j) f(z), \quad r_j = \sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2} \quad (3.6)$$

$$\xi_j = x_j^{(n)} - x_n + \lambda(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}), \quad \eta_j = y_j^{(n)} - y_n + \lambda(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)})$$

При этом координаты точки внутри описываемого треугольника задаются соотношениями

$$x = (1 - \mu)x_n + \mu(x_j^{(n)} + \lambda(x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)})), \quad y = (1 - \mu)y_n + \mu(y_j^{(n)} + \lambda(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)})). \quad (3.7)$$

И тогда имеет место соотношение для элемента площади треугольника

$$dxdy = \left[(y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_n) - (x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)})(y_j^{(n)} - y_n) \right] \mu d\mu d\lambda = a_j^{(n)} \mu d\mu d\lambda, \quad (3.8)$$

где $a_j^{(n)}$ – удвоенная площадь j -го треугольника n -й ячейки.

Правила интегрирования некоторой функции f по поверхности j -го треугольника имеет вид

$$\iint_{S_j^{(n)}} f dS_j^{(n)} = \int_{\mu_0}^{\sqrt{1-\mu_0^2}} \left(\int_0^1 f(\mu, \lambda) a_j^{(n)} d\lambda \right) \mu d\mu. \quad (3.9)$$

Здесь $\mu_0 = 1$ – размер области вблизи центра таяния, в которой существует нисходящая струя холодной жидкости, а горизонтальная скорость обращается в ноль, $\sqrt{1 - \mu_0^2}$ – размер области вблизи границы ячейки, где имеет место восходящий поток и горизонтальная скорость также обращается в ноль, при этом выполняется закон сохранения массы в совместном действии восходящего и нисходящего потоком. Таким образом, величина κ , входящая в соотношения (3.3–3.6) задаётся выражением $\kappa = 1/\sqrt{1 - \mu_0^2}$.

Так как в области $\mu \in [\mu_0, \sqrt{1 - \mu_0^2}]$ справедливо соотношение

$$\Delta \mathbf{v}_j^{(n)} \Big|_{z=z_b} \approx -v_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi_j \mathbf{e}_x + \eta_j \mathbf{e}_y}{\mu r_j^2}$$

то, согласно (3.3) и (3.6), сила, действующая на n -ую ячейку, определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= -\eta v_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{J_n} \int_{\mu_0}^{\sqrt{1-\mu_0^2}} \int_0^1 \frac{\xi_j \mathbf{e}_x + \eta_j \mathbf{e}_y}{\mu(\xi_j^2 + \eta_j^2)} a_j^{(n)} \mu d\mu d\lambda = \\ &= -\eta v_n \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{1-\mu_0^2} - \mu_0 \right) \sum_{j=1}^{J_n} \left(I_{xj}^{(n)} \mathbf{e}_x + I_{yj}^{(n)} \mathbf{e}_y \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где η – динамическая вязкость воды, J_n – число сторон в n -ой конвективной ячейке и введены обозначения

$$\begin{aligned} I_{xj}^{(n)} &= \frac{a_j^{(n)}}{\Delta_j^{(n)2} \left[\Delta_{xj}^{(n)} \ln \frac{d_{j+1}^{(n)}}{d_j^{(n)}} + \Delta_{yj}^{(n)} \arcsin \frac{a_j^{(n)}}{d_j^{(n)} d_{j+1}^{(n)}} \right]} \\ I_{yj}^{(n)} &= \frac{a_j^{(n)}}{\Delta_j^{(n)2} \left[\Delta_{yj}^{(n)} \ln \frac{d_{j+1}^{(n)}}{d_j^{(n)}} - \Delta_{xj}^{(n)} \arcsin \frac{a_j^{(n)}}{d_j^{(n)} d_{j+1}^{(n)}} \right]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

при этом

$$\begin{aligned} \Delta_{xj}^{(n)} &= x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}, \quad \Delta_{yj}^{(n)} = y_{j+1}^{(n)} - y_j^{(n)}, \quad \Delta_j^{(n)2} = \Delta_{xj}^{(n)2} + \Delta_{yj}^{(n)2} \\ d_j^{(n)} &= \sqrt{(x_j^{(n)} - x_n)^2 + (y_j^{(n)} - y_n)^2}, \quad d_{j+1}^{(n)} = \sqrt{(x_{j+1}^{(n)} - x_n)^2 + (y_{j+1}^{(n)} - y_n)^2} \\ a_j^{(n)} &= \sqrt{p_j^{(n)}(p_j^{(n)} - \Delta_j^{(n)})(p_j^{(n)} - d_j^{(n)})(p_j^{(n)} - d_{j+1}^{(n)})}, \quad p_j^{(n)} = \frac{1}{2}(\Delta_j^{(n)} + d_j^{(n)} + d_{j+1}^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Момент сил относительно оси симметрии ледяного диска определяется выражением

$$\mathbf{M}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{M}_n = \mathbf{e}_z \cdot \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = -\eta \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{1-\mu_0^2} - \mu_0 \right) \sum_{n=1}^N v_n \left(x_n \sum_{j=1}^{J_n} I_{yj}^{(n)} - y_n \sum_{j=1}^{J_n} I_{xj}^{(n)} \right), \quad (3.13)$$

где N – число сформировавшихся конвективных ячеек на нижней поверхности тающего диска, $\mathbf{r}_n = x_n \mathbf{e}_x + y_n \mathbf{e}_y$.

Полная сила, действующая на ледяной диск, задаётся величиной

$$\mathbf{F} = \sum_{n=1}^N \mathbf{F}_n. \quad (3.14)$$

При реализации статистической обработки расчётов для $N = 4$ и $N = 5$ центров таяния создавались ансамбли из 200 реализаций конвективных структур. Обработка результатов показала, что средние по ансамблю значения компонент результирующей силы F_x , F_y и момента M_z относительно вертикальной оси и их средние квадратичные отклонения δF_x , δF_y и δM_z имеют значения

$$\overline{F_x} = -0.017, \quad \overline{F_y} = 0.097, \quad \overline{M_z} = 0.005; \quad \delta F_x = 0.736, \quad \delta F_y = 0.448, \quad \delta M_z = 0.126$$

при $N = 4$, а при $N = 5$ имеют место данные

$$\overline{F_x} = -0.0006, \quad \overline{F_y} = 0.0145, \quad \overline{M_z} = -0.0008; \quad \delta F_x = 0.122, \quad \delta F_y = 0.584, \quad \delta M_z = 0.224.$$

Полученные результаты указывают на то, что ледяной диск может закручиваться как в одну, так и в другую стороны, а также смещаться в произвольном направлении (в зависимости от расположения

центров таяния), но в среднем по ансамблю он остаётся на месте и не вращается. При этом увеличение числа центров таяния влечёт за собой уменьшение средних по ансамблю значений компонент сил и момента относительно вертикальной оси. При этом каждая отдельная реализация конвективной структуры характеризуется смещением ледяного диска и его вращением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что причина самопроизвольного смещения и вращения ледяных маркеров на поверхности покоящейся жидкости состоит в формировании под их нижней тающей поверхностью ячеистой конвективной структуры, порождённой несколькими центрами таяния льда. Именно наличие нескольких центров таяния способно придать ледяному диску не только поступательное, но и вращательное движение. Направление вращения зависит от знака суммарного момента, который определяется взаимным расположением центров таяния, и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда РНФ № 24-27-00029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nordell B., Westerstrom G. Large rotating ice discs on ice-covered rivers // *Weather*. 1997. № 209. P. 205–209.
2. Kouraev A.V., Zakharova E.A., Rémy F., Kostianoy A.G., Shimaraev M.N., Hall N.M.J., Zdrovennov R.E., Suknev A.Y. Giant ice rings on lakes and field observations of lens-like eddies in the Middle Baikal (2016–2017) // *Limnology and Oceanography*. 2019. № 64(6). P. 2738–2754.
3. Dorbolo S., Adami N., Dubois C., Caps H., Vandewalle N., Darbois-Textier B. Rotation of melting ice disks due to melt fluid flow // *Physical Review E*. 2016. № 93(3). P. 1–5
4. Айзерман М.А. Классическая механика. М.: Наука, 1980. 368 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
6. Bushuk M., Holland D.M., Stanton T.P., Stern A., Gray C. Ice Scallop: A Laboratory Investigation of the Ice-Water Interface // *J. Fluid. Mech*. 2019. P. 942–976.
7. Shlien D.J. Transition of the axisymmetric starting plume cap // *PhFl*. 1978. V. 21. № 12. P. 2154–2158.
8. Shlien D.J. Relations between point source buoyant convection phenomena // *PhFl* 1979. V. 22, № 12, P. 2277–2283.
9. Morton B.R., Taylor G., Turner J.S. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources // *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 1956. V. A234. № 1196, P. 1–23.
10. Scorer R.S. Experiments on convection of isolated masses of buoyant fluid // *J. Fluid. Mech*. 1957. V. 2. P. 583–594.
11. <https://i.ytimg.com/vi/RUc-xRyBtSU/maxresdefault.jpg>
12. http://ecosystema.ru/Географический_словарь/Полигонные_грунты
13. Bagnold R.A., Barndorff-Nelsen O. The pattern of natural size distributions // *Sedimentology*. 1980. V. 27, Issue 2, P. 199–207.
14. White D.B. The planforms and onset of convection with temperature dependent viscosity // *J. Fluid. Mech*. 1988, V. 191. P. 247–268.

Self-Induced Displacement and Rotation of a Melting Ice Disk on the Still Water Surface

V. Kistovich and T. O. Chaplina *

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

**e-mail: tanya75.06@mail.ru*

The results of an experimental investigation and physical modeling of self-induced displacement and rotation of an ice disk on the still water surface are presented. The dependence of the ice specimen rotation velocity on the water salinity and the depth of the experimental container is measured. It is shown that the reason for observable motions over the still water surface is the cellular convective flow generated by the ice melting process.

Keywords: ice, melting, viscous entrainment, convective cells.

УДК 532.517:2. 621.1.016.4

ВЗАИМОСВЯЗЬ ЛОКАЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ПОТОКА В КАНАЛЕ С АНОМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИФИКАЦИЕЙ ТЕПЛООБМЕНА В ДВУХРЯДНЫХ НАКЛОННЫХ КАНАВКАХ

© 2024 г. С. А. Исаев^{a, b, c, *}, О. О. Мильман^c, Н. И. Михеев^d, Д. В. Никущенко^a, Н. С. Душин^d, А. А. Ключ^b, Е. А. Осюк^b

^aСанкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

^bСанкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации им. Главного маршала авиации А. А. Новикова, Санкт-Петербург, Россия

^cНаучно-производственное внедренческое предприятие Турбокон, Калуга, Россия

^dКазанский научный центр РАН (ФИЦ КазНЦ РАН), Казань, Россия

*e-mail: isaev3612@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06..2024 г.

Проведено экспериментальное и численное исследование аномальной интенсификации ламинарного отрывного течения и теплообмена (АИЛОТТ) в канале с двумя рядами из 26 плотно расположенных канавок под углами наклона $\pm 45^\circ$ при равномерном потоке на входе и изменении чисел Re от 1000 до 5500. Обосновывается локальное ускорение потока с достижением в безразмерных переменных максимальной скорости порядка 1.8 и утончение пристеночного слоя с ростом продольной скорости, доходящей до величины 1.4 на расстоянии $y=0.005$ от стенки при $Re=2500$, над входными сферическими сегментами канавок. Установлена взаимосвязь местного ускорения в центре канала и АИЛОТТ, причем отмечается, что при $Re=5500$ минимальная величина относительного отрицательного трения доходит до -25 , а относительная теплоотдача от структурированного участка канала достигает 5.2.

Ключевые слова: аномальная интенсификация, наклонные канавки, узкий канал, ламинарный поток, отрывное течение, вихревой теплообмен, воздух.

DOI: 10.31857/S1024708424040038, **EDN:** OYSKEA

Интенсификация ламинарного теплообмена в микро- и миниканалах энергетических устройств типа воздушных конденсаторов [1] и объектов микроэлектроники, таких как микрочипы многопроцессорных компьютеров [2], играет важную роль в системах их охлаждения. Упорядоченные элементы дискретной шероховатости, такие как впадины [3] и выступы [4], служат для создания структурированных поверхностей энергообмена. Нанесенные ребрением или обвальцовкой [4] выступы на омываемой стенке каналов позволяют получить высокую тепловую эффективность таких поверхностей, но при этом потери полного давления растут опережающими темпами. Впадины, лунки, канавки [3] кардинально уменьшают гидравлические потери в проточных трактах, но теплоотдача от структурированных стенок оказывается заметно ниже по сравнению с выступами.

Следует отметить, что получившие широкое распространение в луночных технологиях [5] сферические лунки гораздо реже применяются для интенсификации ламинарного теплообмена в микроканалах [6, 7]. Стремление повысить тепловую эффективность структурированных поверхностей привело к использованию несимметричных форм лунок типа поперечных овальных лунок при их шахматном расположении [8], поперечных канавок и невысоких выступов [9]. Также интересны комбинированные системы, сочетающие сферические лунки с вихревыми генераторами флюгерного типа [10].

Овальные лунки представляют собой композиции половинок исходной сферической лунки, соединенные цилиндрической вставкой длиной λ в долях ширины лунки. Расположенные под углом к набегающему потоку овальные лунки оказались эффективными генераторами спиралевидных вихрей, интенсифицирующими теплообмен не только в следе за лунками, но и внутри них. Отрывное течение

и теплообмен в каналах с пакетами редко расположенных на нагретой стенке однорядных овальных лунок умеренного удлинения рассчитывались на стабилизированном [11] и начальном [12, 13] гидродинамических участках для воздушного и масляного теплоносителей. В [13] рассматривается течение воздуха в узком канале шириной 2.5 и переменной высотой от 0.4 до 0.8 при варьировании числа Рейнольдса от 100 до 2500. На стенку нанесен пакет из 22 овальных лунок глубиной 0.2, шириной 1, длиной 1.8, радиусом скругления кромки 0.25 и шагом между центрами лунок 1.8. Важно отметить, что максимальная скорость в канале достигает 2.04 от среднемассовой скорости, а максимальная поперечная скорость 0.75. Тепловая эффективность при $Re=2500$ оказалась равной 1.45 при росте относительных гидравлических потерь 1.25.

Увеличение λ свыше 1.5–2, когда длина траншейной части овальной лунки становится преобладающей в сравнении с шириной лунки, привело к рассмотрению овально-траншейных лунок (ОТЛ), позже названных канавками [14]. При увеличении λ наблюдается трансформация отрывного течения, которая сопровождается резким уменьшением длины зоны возвратных токов во входной части ОТЛ, ростом интенсивности возвратного течения и закрученного потока, причем максимальная величина вторичной скорости достигает величины порядка 0.85 при $\lambda \sim 5$. Аномальная интенсификация отрывного турбулентного течения и теплообмена в ОТЛ на стабилизированном гидродинамическом участке турбулентного воздушного потока ($Re=10^4$) в канале с однорядными редко расположенными (с шагом b) ОТЛ при угле наклона 45° открыта в [15]. Максимальная абсолютная величина отрицательного трения в среднем продольном сечении ОТЛ в 4 раза превосходит трение в плоскопараллельном канале, а максимальная величина числа Нуссельта почти в пять раз превышает аналогичную величину на плоской стенке [16]. В [17–19] рассчитано ламинарное течение воздуха (при $Re=10^3$) в узком канале шириной 4 с однорядными наклонными под углом 45° ОТЛ с $\lambda=3.5$ при варьировании глубиной лунки в пределах от 0 до 0.39 в долях высоты канала. Открыто местное ускорение воздуха в ядре потока, связанное с полуторакратным увеличением максимальной скорости в зоне над входной частью наклонных ОТЛ по сравнению с максимумом скорости в плоскопараллельном канале, при глубинах ОТЛ свыше 0.25. Аномальная интенсификация отрывного ламинарного течения ($Re=10^3$) и теплообмена в ОТЛ наблюдается при их плотном расположении на начальном гидродинамическом участке канала с 31 однорядными наклонными ОТЛ при постановке условий симметрии на боковых границах продольного участка [20]. Вдали от входа минимальная величина относительного отрицательного трения в характерном продольном сечении канала, проходящем через центр сечения стыковки входного сферического сегмента и траншейной части ОТЛ, достигает -4 . Физический механизм явления аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена связан с образованием экстраординарного сосредоточенного перепада давления между близко расположенными зонами торможения входящего в ОТЛ потока и низкого отрицательного давления в ядре смерчеобразного вихря, возникающего во входном полусферическом сегменте лунки.

Данная статья акцентирует внимание на взаимосвязи локального ускорения ламинарного потока над входными частями наклонных канавок с аномальной интенсификацией ламинарного отрывного течения и теплообмена (АИЛОТТ) на начальном гидродинамическом участке в узком микроканале с двухрядными ОТЛ – канавками, плотно расположенными под углами наклона к ламинарному потоку $\pm 45^\circ$ на нагретой изотермической стенке при размещении входных сферических сегментов вблизи продольной плоскости симметрии. Локальное ускорение потока в ядре канала над входными сегментами канавок и его замедление вблизи адиабатических боковых стенок канала обосновывается экспериментально и численно при числе Рейнольдса 10^3 . Устанавливается корреляция АИЛОТТ и ускорения потока в канале, прогрессирующих с ростом Re от 10^3 до 5.5×10^3 .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальные исследования выполнены с использованием двумерного оптического метода измерений Smoke Image Velocimetry [21], имеющего более высокое пространственное разрешение и лучшую устойчивость к большим градиентам скорости, чем PIV. Рабочим телом в опытах был воздух, движение которого создавалось воздуходувкой, установленной в выходной части экспериментальной установки и работающей на всасывание. Регулирование скорости течения осуществлялось дискретно, комбинациями задействованных калиброванных критических сопел. Засев потока трассерами

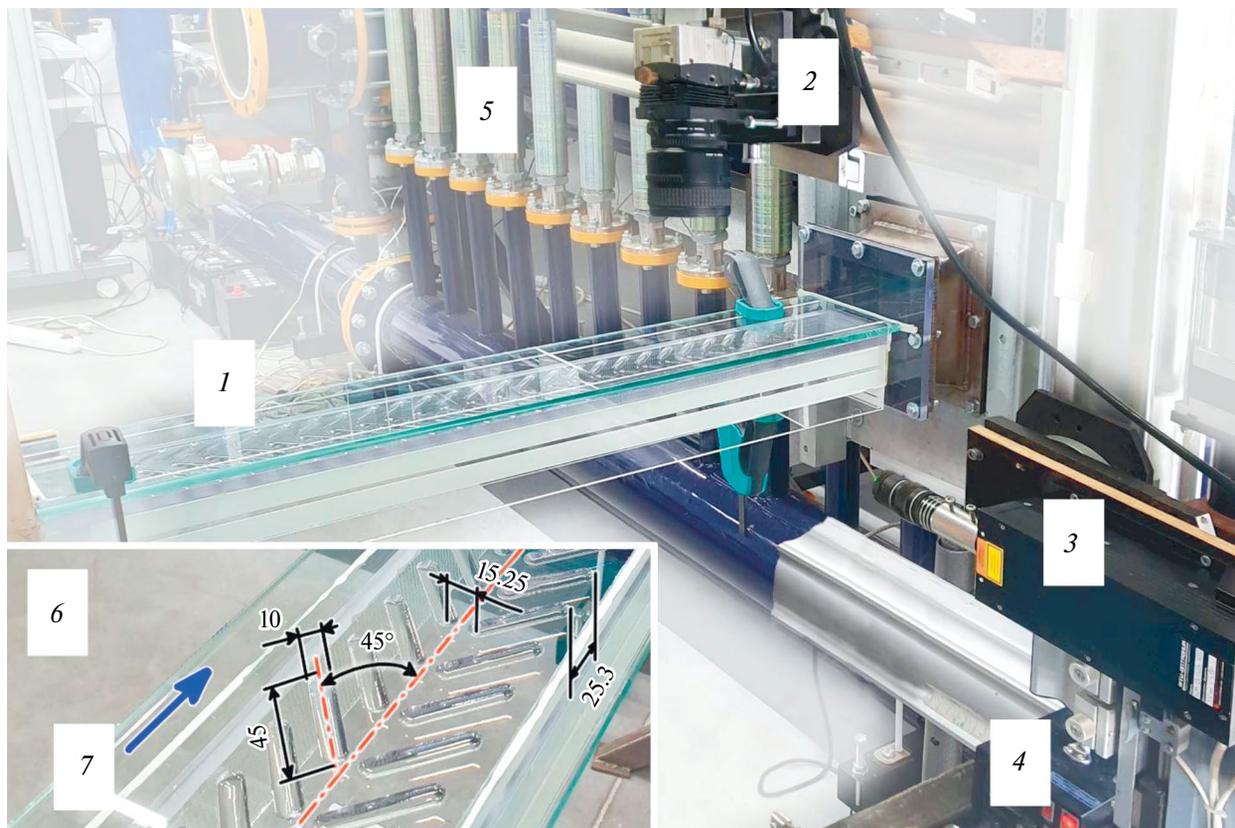


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 – рабочий участок; 2 – скоростная видеокамера; 3 – DPSS-лазер; 4 – координатное устройство; 5 – набор критических сопл; 6 – геометрия поверхности с канавками; 7 – направление потока.

выполнялся стандартным для оптических методов измерений способом – генератором тумана с рабочей жидкостью средней плотности. Для исключения влияния на результаты измерений струи, выходящей из генератора тумана, всасывание трассеров в измерительный участок осуществлялось из большого объема, ограниченного продуваемыми стенками, и заполняемого трассерами на значительном удалении от входного сечения измерительного участка.

Измерительный участок высотой $h=0.01$ м, шириной 0.1 м и длиной 0.8 м (рис. 1) изготовлен из стекла и прозрачного поликарбоната. Нижняя стенка измерительного участка представляла собой вкладыш из поликарбоната, на поверхности которого были отфрезерованы наклонные канавки. Геометрия поверхности с канавками показана на вставке 6 рис. 1. Размеры приведены в мм. Количество канавок в поперечном сечении измерительного участка – 2, вдоль участка – 26.

Съемка течения проводилась с частотой 4000 кадров/с скоростной видеокамерой Fastec HiSpec. Характеристики камеры при необходимых настройках, к сожалению, не позволяли снимать всю канавку и прилегающие к ней области, поэтому съемка поля течения в одной измерительной плоскости осуществлялась последовательно в нескольких окнах. Световой нож создавался непрерывным лазером KLM-532h с диодной накачкой и выходной мощностью до 5 Вт и ориентировался параллельно поверхности с канавками. Фокусировка светового ножа осуществлялась таким образом, что толщина светового ножа в области съемки не превышала 0.0005 м. Дальнейшее уменьшение толщины слоя, в котором снимается движение трассеров, выполнялось объективом скоростной видеокамеры за счет уменьшения глубины резкости. Точность позиционирования камеры и лазера относительно рельефа поверхности измерительного участка обеспечивалась автоматизированным прецизионным трех-координатным перемещающим устройством.

Измерения выполнены в окрестности 22 канавки от входа на расстояниях от стенки с канавками y/h : 0.02, 0.05, 0.08, 0.13, 0.23, 0.33, 0.43, 0.53, 0.63 и 0.73. Число Рейнольдса при измерениях равнялось 1000 и рассчитывалось по среднемассовой скорости и высоте канала.

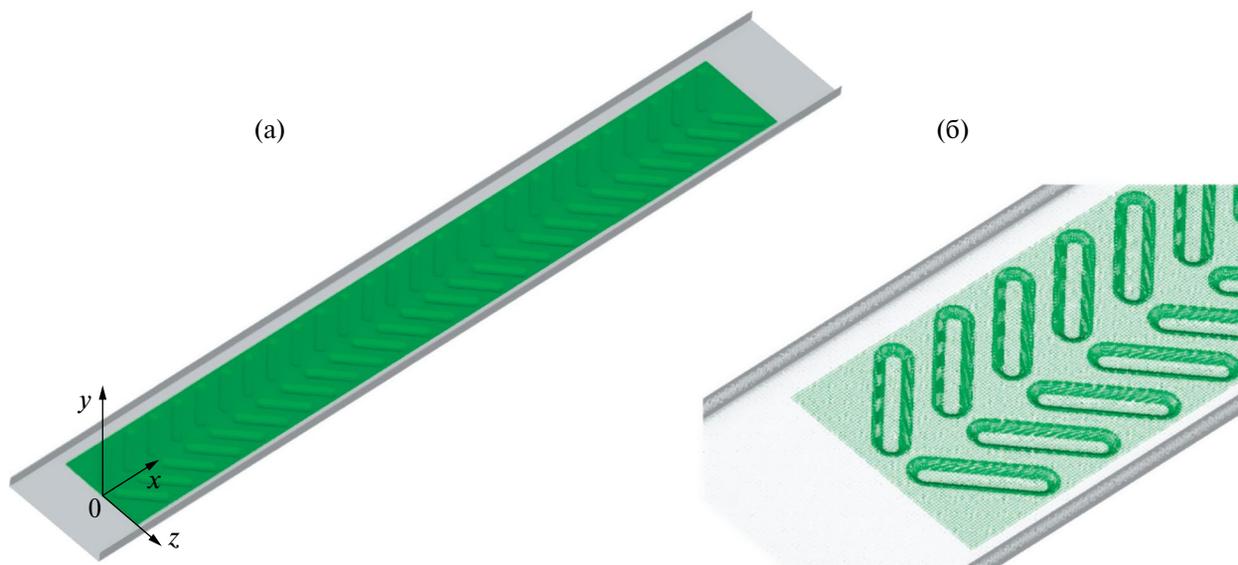


Рис. 2. Цифровой аналог стенда (а) с расчетной сеткой (б).

Размер сличаемых фрагментов изображений при программной обработке кадров составлял $16 \times 16 \text{ pix}^2$. Масштабный коэффициент равнялся 0.083 мм/пикс . Количество обрабатываемых пар кадров в каждом измерении составляло 10000 штук. Ко всем результатам измерений применялась процедура тестирования на предмет выпадающих векторов и коррекции осциллограмм скорости на основе получаемых статистических характеристик для фиксированной точки пространства.

Цифровой аналог экспериментального стенда (рис. 2а) представляет собой узкий плоскопараллельный канал с характерным размером – высотой H , на нижней стенке которого нанесены два ряда из 26 плотно расположенных канавок глубиной 0.25 под углами наклона $\pm 45^\circ$ к ламинарному потоку воздуха [14]. Во входном сечении канала низкоскоростной поток равномерный. Длина и ширина канала составляют 78.75 и 10 , а длина входного и выходного его участков с плоскими стенками – 5 и 5.75 соответственно. Структурированный участок канала с двухрядными канавками на рис. 2а, закрашенный зеленым цветом, имеет протяженность 68 , а его ширина равна 8 . В середине входного поперечного сечения участка с канавками располагается центр системы декартовых координат: продольной x , вертикальной y и поперечной z . Соответствующие декартовы составляющие скорости ламинарного течения обозначаются как U, V, W . Внутри каждой канавки вводится связанная система координат s, y, t , ориентированных в срединном продольном сечении, вертикальном направлении и в поперечном характерном сечении перехода от входного сферического сегмента к цилиндрической траншее.

Двухрядные канавки шириной 1 состоят из двух половин сферической лунки глубиной 0.25 и соединяются цилиндрической траншеей длиной 3.5 [14]. Они ориентируются таким образом (углы наклона $\pm 45^\circ$), чтобы их входные сферические сегменты располагались в районе центрального продольного сечения канала, а выходные сегменты находились в окрестности боковых стенок. Шаг между центрами канавок в плотном пакете выбирается равным 2.5 , а радиус скругления кромок канавок принимается равным 0.025 .

Для описания стационарного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале со структурированной стенкой используется система стационарных уравнений Навье–Стокса. Конвективный теплообмен описывается уравнением энергии. Соответствующий экспериментальным условиям равномерный поток, т.е. $U=1; V=W=0$, задается во входном сечении канала. Мягкие граничные условия (условия продолжения решения) выполняются на выходе из канала. Условие прилипания задается на стенках канала. Верхняя плоская стенка канала поддерживается при комнатной температуре 20°C (293K), которая выбирается в качестве характерной – безразмерная $T=1$. Температура нижней структурированной стенки принимается изотермической и равной 30°C (303K), т.е. безразмерная температура $T = 1.034$. Боковые стенки канала теплоизолированные.

Многоблочная сетка (рис. 2б) строится на основе разномасштабных фрагментов структурированных сеток [22]. Канальный поток с равномерным профилем продольной составляющей скорости на входе отображается на декартовой сетке MG, сеточные линии которой сгущаются по мере приближения к стенкам. Максимальные шаги сетки MG по продольной x и поперечной z координатам составляют 0.15, а по вертикальной координате y – 0.05. Шаги у стенки равны 2.5×10^{-4} . Сетка MG содержит порядка 4.2 млн расчетных ячеек. В нее встраивается согласованная с нижней стенкой сетка MR, покрывающая структурированный участок размером 68 на 8 и имеющая высоту 0.2. Сетка MR предназначена для детального отображения пристеночного отрывного течения. Шаги сетки по продольной и поперечной координатам равны 0.1. Сетка MG содержит порядка 1.6 млн расчетных ячеек. Для лучшего разрешения высокоградиентных зон течения каждая из 52 наклонных канавок накрывается кромочной криволинейной сеткой O-типа. Шаг кромочной сетки по окружной координате вдоль криволинейной кромки имеет величину порядка 0.05, а сеточные линии по нормали к кромкам сгущаются до величины шага, равной 0.03. В итоге многоблочная сетка содержит 10.8 млн расчетных ячеек.

Численное решение стационарных уравнений Навье–Стокса для описания ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости, а также уравнения энергии для прогнозирования характеристик теплообмена, основываются на концепции расщепления по физическим процессам [22] с применением согласованной процедуры коррекции давления SIMPLEC [23] и многоблочных структурированных сеток с их частичным перекрытием. Обобщенное уравнение переноса записывается в приращениях зависимых переменных, в качестве которых выступают декартовы составляющие скорости и теплоемкость. В явной части обобщенного уравнения дискретизация конвективных членов уравнений количества движения и энергии осуществляется с помощью гибридной схемы переменного порядка аппроксимации. Центально-разностная схема применяется для представления диффузионных членов. В неявной части обобщенного уравнения используется противопоточная схема с односторонними разностями. В гибридной схеме HS объединяются второго порядка аппроксимации противопоточная схема с квадратичной интерполяцией Леонарда [24], которая берется с весовым коэффициентом смещения R , и первого порядка аппроксимации противопоточная схема с односторонними разностями с весовым коэффициентом $(1-R)$.

Широко известный подход на основе центрированных расчетных сеток, в котором зависимые переменные определяются в центрах ячеек, требует монотонизации поля давления за счет введения коррекции Рхи–Чоу [25, 26]. Решение алгебраических уравнений проводится предобусловленным методом BiCGSTAB [27] с алгебраическим многосеточным ускорителем из библиотеки Демидова (amgcl) [28] для поправки давления и с помощью ILU(0) факторизованного алгоритма для остальных переменных. Решение тепловой задачи не влияет на решение динамической задачи, поскольку физические свойства теплоносителя не меняются. Оригинальный пакет VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D) разработан на базе многоблочных вычислительных технологий (МВТ), описанных в [22].

МВТ базируется на использовании разномасштабных структурированных сеток с перекрытием, согласованных с геометрией канала. Параметры в двух рядах приграничных ячеек каждой из перекрывающихся сеток определяются линейной интерполяцией [24]. Установлено, что такой подход эквивалентен применению адаптивных неструктурированных сеток и не требует чрезмерных вычислительных ресурсов. Его преимущество состоит в обеспечении надлежащей точности прогнозов без измельчения сеток, так как этот метод автоматически разрешает все значимые гидродинамические и теплофизические особенности. Вполне очевидно, что пересчеты с сетки на сетку с помощью линейной интерполяцией являются источником ошибок. Однако тестовые расчеты стационарного циркуляционного течения в каверне с подвижной крышкой при $Re=1000$ [29] показали приемлемую точность численных прогнозов.

Процесс решения задачи итерационный. На каждом итерационном шаге решается уравнение поправки давления и рассчитываются поля декартовых составляющих скорости, давления, а также характеристик турбулентности. Вычислительный процесс заканчивается при достижении максимальных погрешностей зависимых переменных уровня 10^{-5} и выходе на стабилизацию экстремальных локальных и интегральных параметров, включая коэффициент гидравлических потерь и суммарную теплоотдачу на контрольном участке с наклонными канавками. В данной работе представляются локальные характеристики течения и теплообмена в канале с двухрядными наклонными канавками. В их число входят продольные и поперечные распределения перепада статического давления $P-P_{pl}$, относительной теплоотдачи Nu/Nu_{pl} , в характерных сечениях канала и канавок. Индекс pl относится к параметрам плоскопараллельного канала, в том числе на нагретой стенке.

Следует отметить, что коэффициент гидравлических потерь ζ в канале, в том числе при нанесении на нагретую стенку двухрядных наклонных канавок, определяется по методике расчета гидравлических потерь в канале со сферической лункой [30]. Расчетные прогнозы по предложенной методике хорошо согласуются с оценками энтропийных источников по Хервигу [31].

Параметрические расчеты проводятся с помощью разработанного на основе многоблочных вычислительных технологий распараллеленного кода VP2/3 (Velocity-Pressure, 2D/3D) [22] на 24-ядерном процессоре Intel Xeon Gold 6562.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2–16 и в табл. 1 представлены некоторые из полученных результатов.

В качестве базовой расчетной сетки выбрана многоблочная сетка, содержащая 9.25 млн расчетных ячеек. В табл. 1 приведены результаты анализа сеточной сходимости при сравнении численных прогнозов интегральных и экстремальных локальных характеристик течения и теплообмена, полученных на трех различных сетках с количеством расчетных ячеек 9.1, 9.25 и 9.7 млн. Сетки отличаются высотой прилегающей к канавкам области, которая выбирается равной 0.1, 0.2 (базовая) и 0.3. Относительные величины тепловой эффективности $\text{Numm}/\text{Numm}_{\text{pl}}$ и гидравлических потерь ζ/ζ_{pl} выбраны в качестве интегральных характеристик, а $-U_{\text{min}}$ и W_{max} – в качестве экстремальных локальных параметров. Сходимость по сеткам удовлетворительная и в дальнейшем параметрические расчеты проводятся на базовой сетке.

Проведенные методом SIV [21] замеры полей продольной составляющей скорости в пространстве сечения канала в районе 22 канавки (цветная картина распределения U в вертикальном сечении на уровне $y=0.05$ приведена на рис. 3) нацелены прежде всего на анализ сформировавшейся структуры потока вдали от входного сечения. В районе срединного сечения канала формируется течение с максимальной скоростью, причем начиная с высоты $y=0.43$ ее величина превосходит максимальную скорость в плоскопараллельном канале U_{ch} , равную 1.5. У боковых стенок канала пристеночное течение в зазорах между стенками и концевыми участками канавок имеет локальный максимум скорости, по величине значительно уступающий U_{ch} . Наибольший интерес вызывает развитие канального потока в узком промежутке между поперечными сечениями канала, проходящими через характерные точки L и R в срединном сечении на дне канавки. Точки L и R являются центрами поперечных сечений стыковки входного и концевого сферических сегментов соответственно с траншейным участком канавки, а точка C представляет ее центр.

Измеренные профили скорости $U(z)$ в трех поперечных сечениях канала, проходящих через точки L , C , R на дне канавки, иллюстрируют динамику воздушного потока на разных высотах от нижней стенки канала, начиная от $y=0.02$ до $y=0.73$. Значительное влияние отрывного течения в наклонной канавке отмечается на высотах $y=0.02$ и 0.05 , на которых наблюдаются наибольшие различия в профилях $U(z)$ над канавкой в поперечных сечениях, проходящих через точки L , C , R на дне 22 канавки. В прилегающем к структурированной стенке слое воздуха толщиной порядка 0.1 возникает переменное по продольной координате поле скорости U . Над этим слоем происходит стабилизация в ядре канального потока. В вертикальных сечениях, начиная с $y=0.13$, профили $U(z)$ практически сливаются. Лишь при $y=0.43$, 0.63 , 0.73 в сечении, проходящем через центр канавки C , наблюдается некоторое отличие профилей измеренных $U(z)$ от других профилей $U(z)$ в зонах, прилегающих к боковым стенкам.

Профили скорости в рассматриваемых сечениях поперек канала можно разделить на несколько участков. Для сечений, проходящих через точки L и R , таких участков пять, а для сечения через центр канавки – три. Два общих участка в сечениях простираются над плоскими участками нижней стенки от плоскости симметрии до края 22 канавки и от краев 21 и 22 канавок до боковой стенки. Остальные участки лежат в сечениях канавок между их краями. В сечении через точку L присутствуют два участка во входном сферическом сегменте 22 канавки и в концевом сферическом сегменте 21 канавки. В сечении через точку R включаются участки в концевом сферическом сегменте 22 канавки и во входном участке 23 канавки.

В ближайшем к стенке сечении при $y=0.02$ продольные составляющие скорости в окрестности плоскости симметрии на рис. 3а для всех рассматриваемых профилей $U(z)$ минимальны и не слишком отличаются друг от друга, находясь в интервале изменения от 0.2 до 0.3. В сечении, проходящем через точку L 22 канавки, наблюдается резкое возрастание $U(z)$ с достижением максимума, близкого

Таблица 1. Влияние общего количества расчетных ячеек N на интегральные и локальные экстремальные характеристики

N (млн ячеек)	$Numm/Numm_{pl}$	ζ / ζ_{pl}	$-U_{min}$	W_{max}
9.1	2.69	2.12	-0.481	1.112
9.25	2.76	2.14	-0.505	1.177
9.7	2.92	2.22	-0.531	1.210

к скорости входного потока (порядка 0.85), с последующим снижением до края 21 канавки (~ 0.35). Второй локальный максимум $U(z)$ возникает над концевым сегментом 21 канавки и достигает величины порядка 0.5. В сечении через точку C 22 канавки максимум скорости $U(z)$ достигает величины порядка 0.7 и оказывается смещенным к центру канавки. Падение скорости отмечается над плоской стенкой между канавками. В сечении, проходящем через точку R , локальный максимум $U(z)$ порядка 0.6 возникает на входном участке 23 канавки. Далее скорость падает до величины порядка 0.25 перед краем 22 канавки и дальше растет до 0.45. За краем 21 и 22 канавки наблюдается локальный минимум $U(z)$ порядка 0.1. На ближайшем к боковой стенке участке возникают локальные максимумы, имеющие величины порядка 0.2–0.3.

В сечении $y=0.05$ продольные составляющие скорости в окрестности плоскости симметрии на рис. 3б для всех рассматриваемых профилей $U(z)$ немного подрастают по сравнению с аналогичными профилями на рис. 3а и не слишком отличаются друг от друга, находясь в интервале изменения от 0.35 до 0.45. Максимум продольной скорости, равный 1.16, наблюдается над точкой L в сечении, проходящем через эту точку. Второй максимум $U(z)$ порядка 0.5 в этом сечении возникает со смещением к переднему краю 21 канавки. В сечении через точку C 22 канавки максимум скорости $U(z)$ достигает величины порядка 1.06 и несколько смещается к плоскости симметрии по сравнению с соответствующим максимумом на рис. 3а. В сечении, проходящем через точку R , локальный максимум порядка 0.9 возникает на входном участке 23 канавки. Второй максимум порядка 0.46 наблюдается над концевой частью канавки с некоторым смещением к плоскости симметрии по сравнению с соответствующим максимумом на рис. 3а. За краем 21 и 22 канавки наблюдается локальный минимум $U(z)$ порядка 0.1–0.15. На ближайшем к боковой стенке участке возникают локальные максимумы, имеющие величины порядка 0.3–0.44, причем наибольшая величина скорости достигается в сечении, проходящем через точку L .

Начиная с $y=0.13$, как уже указывалось, профили скорости $U(z)$ в сечениях, проходящих через точки L , C , R 22 канавки, оказались весьма близкими, хотя наблюдаются и некоторые отличия. Так, локальные минимумы $U(z)$ вблизи плоскости симметрии при $y=0.13$ (рис. 3в) находятся в диапазоне изменения от 1.05 до 1.2, причем наибольшая величина U относится к сечению, проходящему через точку C . Максимумы $U(z)$ наблюдаются в продольном сечении, проходящем вблизи точки L . Наибольший из них порядка 1.5 относится к поперечному сечению через точку L , а наименьший порядка 1.43 принадлежит сечению через точку C . Резкое уменьшение $U(z)$ по мере удаления от плоскости симметрии переходит в плавное снижение до величины 0.45, соответствующее концевой части канавки там, где при меньших высотах от стенки наблюдались локальные максимумы $U(z)$. В продольных полосах канала между канавками и боковыми стенками наблюдается локальный максимум $U(z)$, величина которого приближается к 1. Стоит отметить, что локальный минимум $U(z)$ в начале полосы для сечения через центр 22 канавки оказывается порядка 0.6.

В вертикальном сечении $y=0.23$ (рис. 3г) локальные минимумы $U(z)$ вблизи плоскости симметрии находятся в диапазоне 1.45–1.55, причем наименьший из них принадлежит профилю $U(z)$ в сечении через центр 22 канавки. Максимум $U(z)$, равный 1.65, приближается к плоскости симметрии по сравнению со случаем для $y=0.13$. С ростом координаты ($-z$) быстрое уменьшение $U(z)$ переходит в плавное и достигает локального минимума порядка 0.7. Максимум скорости в продольной полосе между канавкой и боковой стенкой приближается к 1.2. Можно отметить, что локальный минимум $U(z)$ в начале канала между боковой стенкой и канавкой достигает 0.8 в сечении через центр 22 канавки.

В вертикальном сечении $y=0.43$ (рис. 3д), близком к среднему сечению канала, максимум $U(z)$ практически располагается в плоскости симметрии и составляет 1.7 для сечений, проходящих через точки L и R , а также 1.78 в сечении через точку C . Почти линейно скорость падает до 0.85 в сечении через точку C

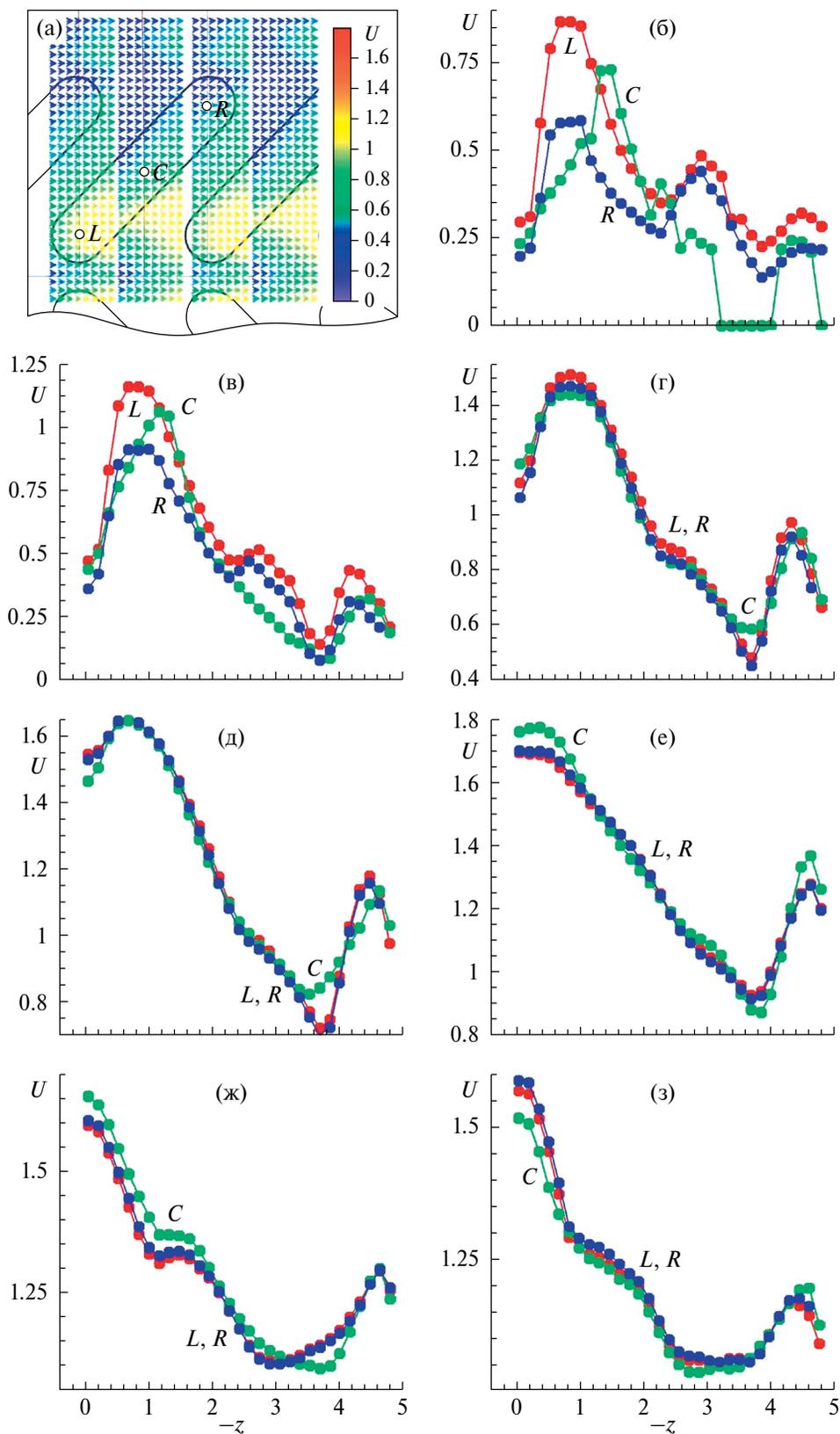


Рис. 3. Векторное поле продольной составляющей скорости U в сечении $y=0.05$ (а) и сравнение измеренных профилей $U(z)$ в трех сечениях L, C, R канала в окрестности 22 канавки при изменении координаты y : б) $y=0.02$; в) $y=0.05$; г) $y=0.13$; д) $y=0.23$; е) $y=0.43$; ж) $y=0.63$; з) $y=0.73$. $Re=1000$.

и до 0.9 в остальных сечениях. Максимум скорости в продольной полосе между канавкой и боковой стенкой приближается к 1.4 в сечении через точку C и к 1.3 для сечений через точки L и R .

В приближающемся к верхней плоской стенке сечении $y=0.63$ (рис. 3е) профиль $U(z)$ в окрестности плоскости симметрии канала носит струйный характер с максимумом 1.65 для поперечного сечения через точку C и 1.6 для остальных рассматриваемых сечений. Быстрое снижение $U(z)$ отмечается примерно до $z=-1$, а затем на протяжении 0.6 скорость почти не меняется, оставаясь в промежутке изменения от 1.3 до 1.36. Дальнейшее уменьшение $U(z)$ продолжается до $z=-3$ и достигает минимума 1.1. Максимум скорости в продольной полосе между канавками и боковыми стенками равен 1.3.

В ближайшем к верхней стенке сечении $y=0.73$ (рис. 3, ж) максимум скорости в срединной плоскости приближается к 1.6 для сечений, проходящих через точки L и R , и к 1.52 для сечения через центр 22 канавки. Профиль скорости $U(z)$ снижается довольно быстро до $z=-1$, а затем с замедлением, достигая минимума, равного 1.05, на дистанции примерно 2.6 от плоскости симметрии. Затем, на расстоянии 1.2 скорость на уровне 1.05 остается близкой к постоянной. Максимум скорости в продольной полосе между канавками и боковыми стенками равен 1.3.

Сравнение измеренных продольных составляющих скорости U в трех поперечных сечениях 22 канавки, проходящих через характерные точки L , C и R , с их численными прогнозами при варьировании расстоянием y от плоского участка нижней структурированной стенки, начиная от 0.02 до 0.73 проводится на трех рисунках 4–6. Экспериментальные точки взяты из рис. 3, а сплошные линии представляют расчетные зависимости $U(z)$. В целом, согласование экспериментальных и расчетных результатов удовлетворительное, но имеются отдельные значительные различия в минимальной величине U в зоне перехода от продольного участка с наклонными канавками к продольной полосе между этим участком и боковой стенкой, а также в максимальной величине U на указанном продольном участке около боковой стенки.

Аномальное отрывное течение и теплообмен в узком канале со структурированной нагретой стенкой анализируются с ростом Re (рис. 7) и характеризуются многократным увеличением экстремальных величин относительного трения f/f_{pl} , перепадов статического давления $P-P_{pl}$, относительной теплоотдачи Nu/Nu_{pl} в продольных сечениях канала, проходящих через центр стыковки сферического сегмента и траншейной части ($z=-0.764$). Параметры с индексами pl определяются в точках на нагретой стенке плоскопараллельного канала с координатами (x, z) , соответствующими точкам на структурированной поверхности.

Подобно численному исследованию [20], по мере удаления от начала структурированного участка канала отрывное течение на входных участках наклонных канавок быстро интенсифицируется, причем с ростом Re наблюдается усиление интенсивности возвратных токов (рис. 7а, б). При $Re=1000$ минимальное относительное трение в донной части канавок уменьшается от -0.5 до -2.4 , при $Re=2000$ — от -0.9 до -6.5 , при $Re=3500$ — от -1.6 до -9.3 , при $Re=5500$ — от -5.8 до -26 . При $Re=2000$ максимальные величины f/f_{pl} на наветренных кромках канавок увеличиваются от 3.3 до 18, а в промежутках между канавками уровень относительного трения растет от 1.55 до 5.

Аномальная интенсификация отрывного течения в наклонных канавках, как известно [14], связана с экстраординарным перепадом давления поперек них в месте перехода от сферического сегмента к траншейной части канавки. Особо следует подчеркнуть, что формирование зон отрицательного статического давления в сферическом сегменте обусловлено генерацией интенсивных смерчеобразных вихревых структур. По мере удаления от входного сечения в начале структурированного участка канала перепады давления в канавках (рис. 7в) быстро нарастают на первых 8 канавках, причем максимум $P-P_{pl}$ для $Re=2000$ на наветренном склоне 8 канавки оказывается порядка 0.25, а минимум на дне -0.13 . На удаленных от входа в канал канавках перепады давления стабилизируются.

Локальное число Нуссельта на структурированной нагретой стенке определяется по нормальному градиенту температуры, отнесенному к разнице между температурой стенки и среднemasсовой температурой в сечении канала, согласно описанной в [32] методике. Циклическое увеличение относительной теплоотдачи Nu/Nu_{pl} по длине канала в продольном сечении входных участков канавок при $z=-0.764$ значительно усиливается по мере роста Re (на рис. 7г, д показаны кривые 1–4 для Re в промежутке от 1000 до 5500). Максимумы относительной теплоотдачи на наветренных кромках канавок быстро увеличиваются и приближаются к стабилизации в конце канала. Для $Re=2000$ $(Nu/Nu_{pl})_{max}$ возрастают от 4 до 30. Внутри канавок на подветренных сторонах наблюдается резкий провал Nu/Nu_{pl} до уровня, не

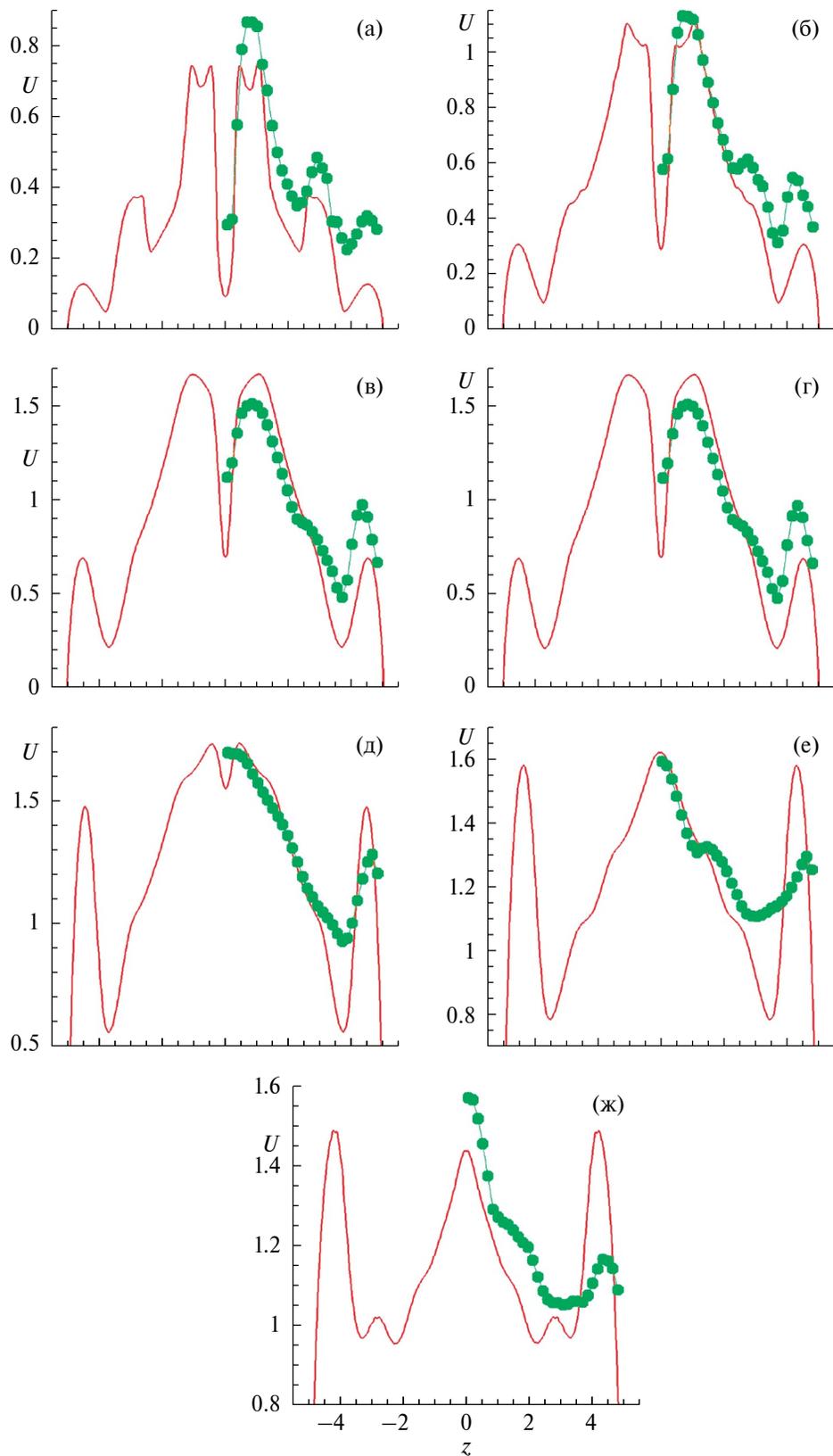


Рис. 4. Сравнение расчетных прогнозов (сплошные линии) и экспериментальных замеров (точки) профилей продольной составляющей скорости U в центре L переходного сечения от входного сферического сегмента к траншейной части: а) $y=0.02$; б) 0.05 ; в) 0.13 ; г) 0.23 ; д) 0.43 ; е) 0.63 ; ж) 0.73 . $Re=1000$.

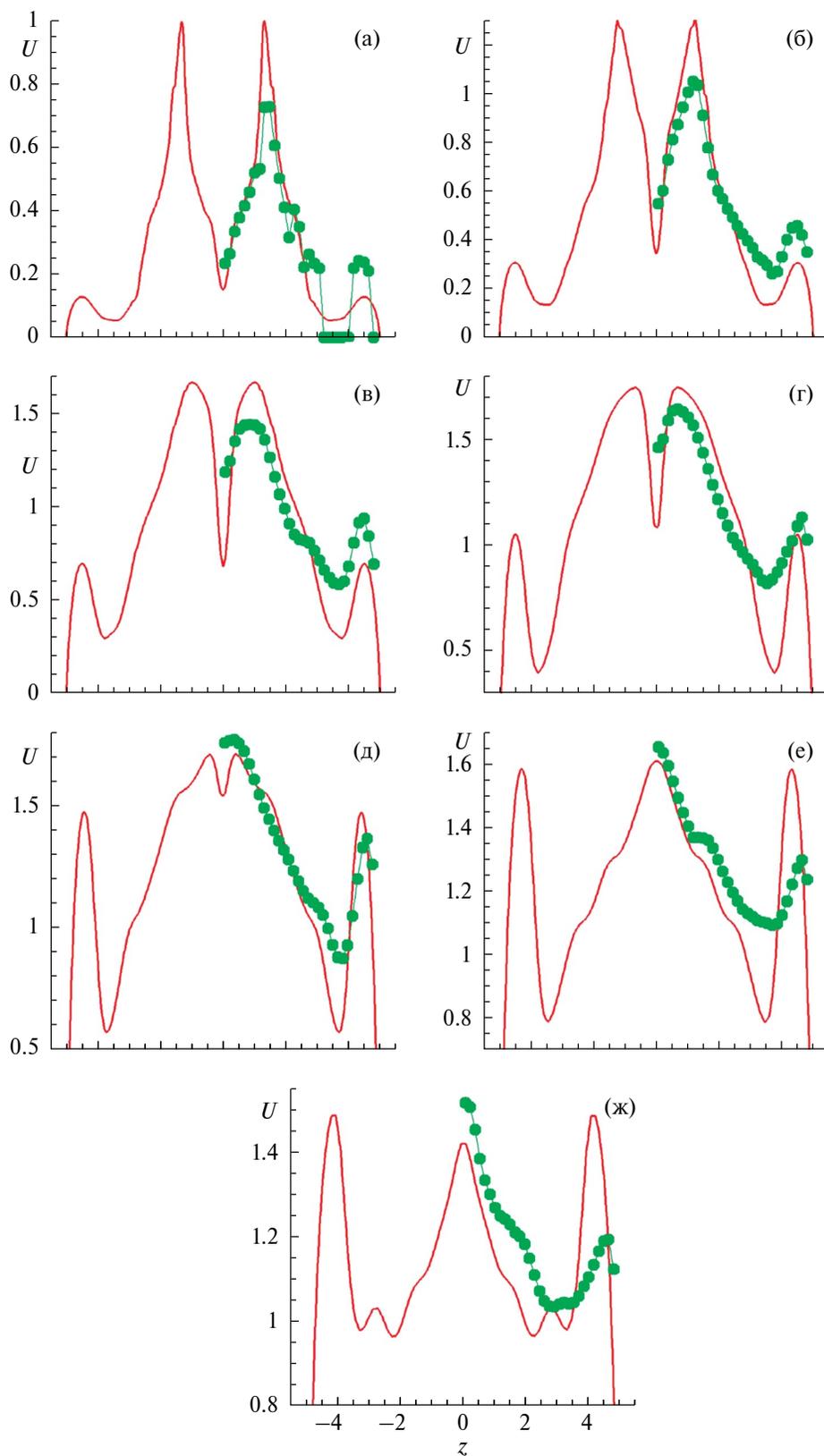


Рис. 5. Сравнение расчетных прогнозов (сплошные линии) и экспериментальных замеров (точки) профилей продольной составляющей скорости U в центре S 22-й канавки: а) – $y=0.02$; б) – 0.05 ; в) – 0.13 ; г) – 0.23 ; д) – 0.43 ; е) – 0.63 ; ж) – 0.73 . $Re=1000$.

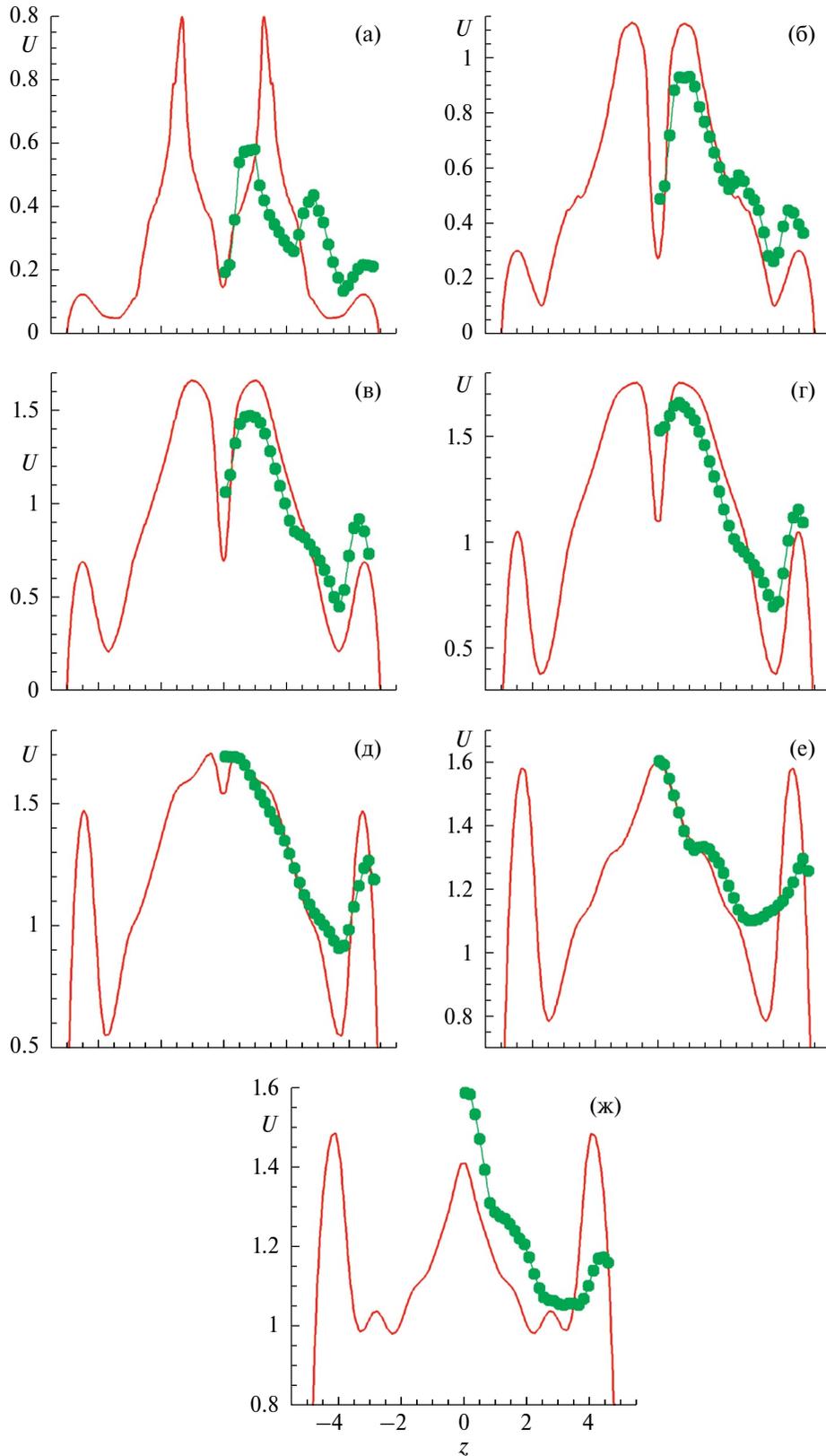


Рис. 6. Сравнение расчетных прогнозов (сплошные линии) и экспериментальных замеров (точки) профилей продольной составляющей скорости U в центре R переходного сечения от траншейной части и выходному сферическому сегменту: а) $y=0.02$; б) 0.05 ; в) 0.13 ; г) 0.23 ; д) 0.43 ; е) 0.63 ; ж) 0.73 . $Re=1000$.

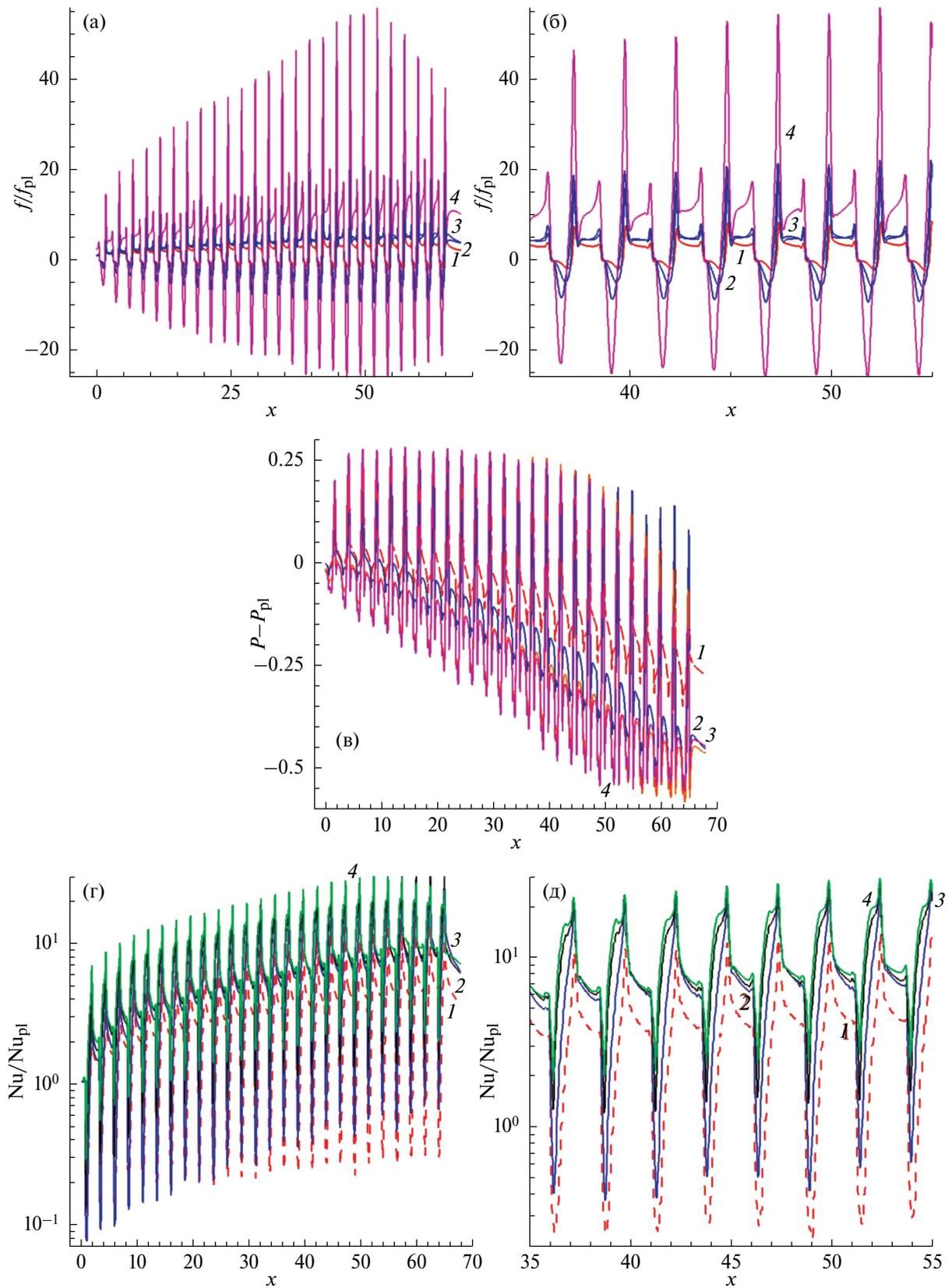


Рис. 7. Влияние Re на распределения относительного трения f/f_{pl} (а, б), перепада давления $P - P_{pl}$ (в), относительного числа Нуссельта Nu/Nu_{pl} (г, д) в сечении канала $z = -0.764$ (в): 1 – $Re = 1000$; 2 – 2000; 3 – 3500; 4 – 5500.

превышающего 0.7 в конце канала. В промежутках между канавками относительная теплоотдача уменьшается, но ее средний уровень растет по длине канала, достигая величин порядка 8 для $Re=2000$.

На рис. 8а, б анализируется влияние Re на распределения $U(x)$ вблизи стенки на высоте $y=0.005$ в продольном сечении канала $z=-0.764$. Осцилляции продольной составляющей скорости с нарастанием локальных максимумов над канавками по мере удаления от входа в канал сохраняются на двух рассмотренных участках канала от 0 до 25 и от 30 до 65. На первом ближайшем к входу участке наблюдается интенсификация ламинарного потока в пристеночном слое канала над входами в канавки, причем локальные максимумы монотонно возрастают с ростом Re . Например, для $Re=5500$ к шестой канавке U_{\max} увеличивается с 0.8 до 1.05. На втором участке канала протяженностью от 30 до 65 происходит трансформация потока с незначительным снижением локальных максимумов по мере роста Re свыше 2500 (кривые 3). При этом U_{\max} для $Re=2500$ достигает к концу участка величины 1.4. Отмеченное выше снижение U_{\max} усиливается с ростом Re . Так для $Re=5500$ к концу участка U_{\max} уменьшается от наибольшей величины 1.3 до 1.1.

Распределения проинтегрированных по поперечным и продольным полосам относительных чисел Нуссельта Num/Num_{pl} характеризуют удельную тепловую эффективность структурированных энергоэффективных поверхностей узкого канала (рис. 8в–г). По длине канала она нарастает от канавки к канавке по мере удаления от входа в канал. Минимумы Num/Num_{pl} приходятся на проекции подветренных склонов канавок, а максимумы – на наветренные склоны и промежутки между канавками. Осцилляции $Num/Num_{pl}(x)$ возрастают по длине канала для чисел Рейнольдса от 1000 до 2000. При $Re=2500$ после 21 канавки наблюдается стабилизация максимумов Num/Num_{pl} на уровне 6.8, а при $Re=3500$ – на уровне 7.7. При $Re=5500$ после достижения к 21 канавке максимума Num/Num_{pl} на уровне 10.5 следует снижение его до 8.5 в конце канала. Распределения Num/Num_{pl} по поперечной координате z характеризуются двумя максимумами в окрестностях боковых стенок канала, величины которых существенно возрастают с увеличением Re . Так $(Num/Num_{pl})_{\max}$ растет почти вдвое при изменении Re от 1000 до 2500, превосходя 6. При $Re=5500$ $(Num/Num_{pl})_{\max}$ достигает 7.7. Минимальная удельная тепловая эффективность наблюдается в середине канала, причем с ростом Re до 5500 она выходит на уровень 2.3. Сравнение распределений Num/Num_{pl} в окрестности 22 канавки при различных числах Рейнольдса проводится вдоль координаты x^* , измеренной от центра 21 канавки, и поперечной координаты z (рис. 8д, е). При $Re=1000$ максимум осредненной по поперечной координате относительной теплоотдаче с величиной порядка 2.5 располагается вблизи координаты центра 22 канавки. С ростом Re $(Num/Num_{pl})_{\max}$ заметно увеличивается – до 6 при $Re=2500$ и 8 при $Re=5500$, а также смещается к полосе, проходящей через точку L 22 канавки. Осредненные по длине участка 22 канавки относительные тепловые нагрузки поперек канала на рис. 8е демонстрируют более высокие, чем на рис. 8г, уровни. Так, $(Num/Num_{pl})_{\max}$ при $Re=1000$ приближается к 5, а при $Re=2500$ и 5500 достигает 10 и 12.5 соответственно. Также следует отметить смещение максимума к плоскости симметрии (к поперечной координате точки L) по мере роста Re .

Ускорение воздушного потока в канале с двумя рядами из 26 канавок, расположенных на нагретой стенке под углами наклона входных частей канавок $\pm 45^\circ$, рассматривается при числах Рейнольдса от 1000 до 5500 (рис. 9а–е). Анализируются профили скорости $U(z)$ на высоте $y=0.43$ от стенки в поперечных сечениях через центры 1, 5, 10, 15, 20 и 25 канавки. При всех Re в срединном сечении первой канавки профиль $U(z)$ в ядре потока мало отличается от равномерного, хотя следует отметить, что величина U по мере увеличения Re заметно снижается. Если при $Re=1000$ скорость в ядре примерно равняется 1.25, то к 5500 она уменьшается до 1.1. Профили скорости в пристеночной зоне при $Re=1000$ стабилизируются, начиная с сечения 15 канавки. Формируется течение у боковой стенки с максимумом скорости, приближающимся к 1.45, и минимумом порядка 0.6. Как уже отмечалось, максимум скорости пристеночного потока реализуется в продольном канале между боковой стенкой и канавками, а минимум скорости – над концевыми участками канавок. С 10 по 15 канавку в центральной продольной области канала близкий к равномерному поток ускоряется в зоне с поперечным размером 4, достигая величины скорости порядка 1.55. Развитие течения за 15 канавкой характеризуется возникновением растущих максимумов скорости U над местами сопряжения входных сферических сегментов с траншейными участками. Для 25 канавки величина максимумов скорости приближается к 1.75. При этом в плоскости симметрии наблюдается локальный минимум, величина которого не меняется с 15 канавки и равна примерно 1.53.

При умеренных числах Рейнольдса в промежутке 1000–2000 (рис. 9а–в) максимумы скорости вблизи боковых стенок сохраняются на уровне 1.4, а с $Re=2500$ постепенно убывают до величин порядка 1. Пристеночные профили $U(z)$ в продольных полосах канала около боковых стенок, в том числе над концевыми

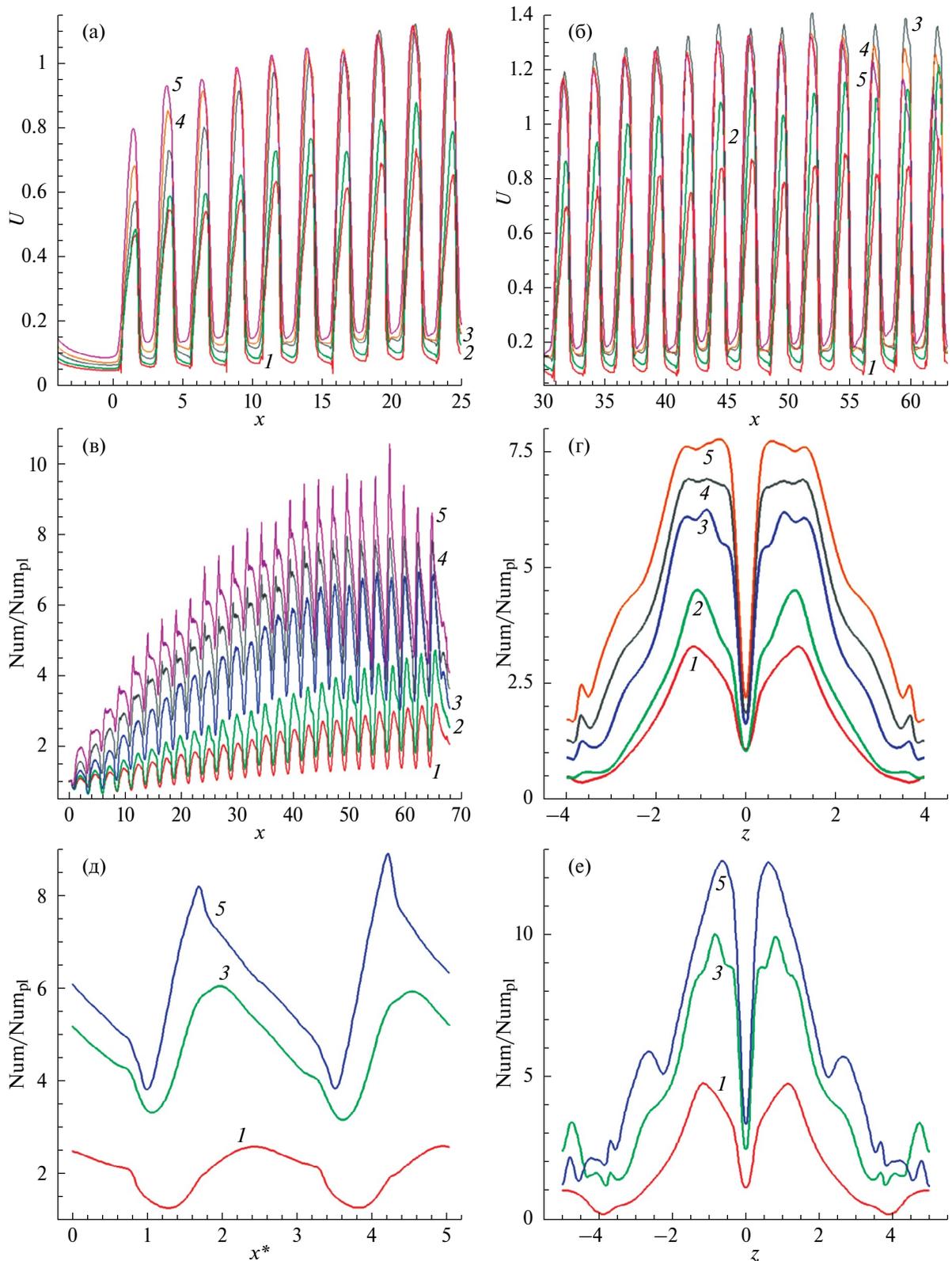


Рис. 8. Влияние числа Рейнольдса Re на корреляцию локального ускорения потока $U(x)$ на расстоянии $y=0.005$ в продольном сечении канала $z = -0.764$ (а, б) и распределения осредненных по поперечным полосам относительных чисел Нуссельта Num/Num_{pl} вдоль (в, д) и поперек (г, е) канала (в, г) и участка 22 канавки (д, е): 1 – $Re=1000$; 2 – 1500; 3 – 2500; 4 – 3500; 5 – 5500.

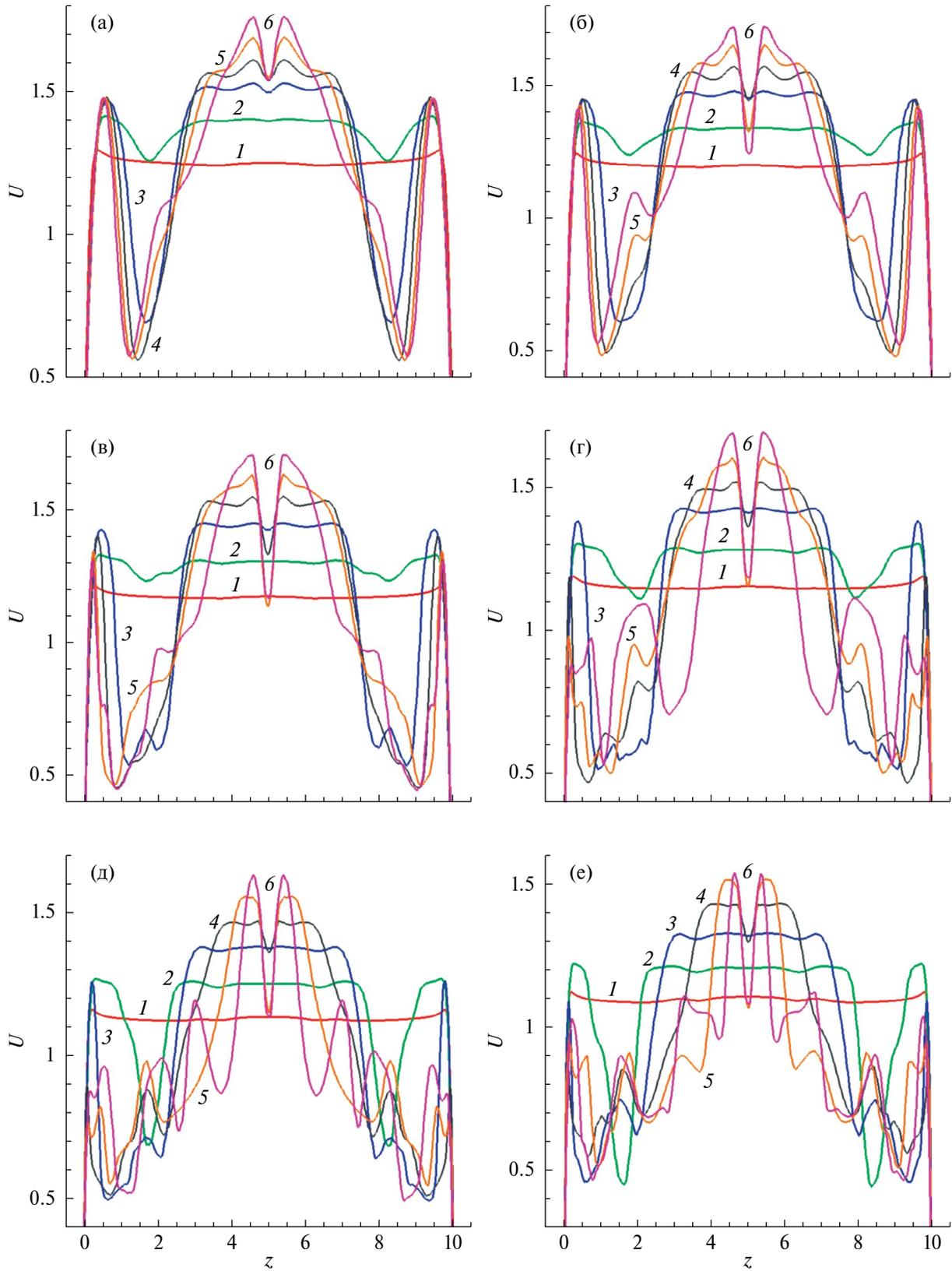


Рис. 9. Влияние числа Рейнольдса на эволюцию профилей $U(z)$ в срединных поперечных сечениях 1–1, 5–2, 10–3, 15–4, 20–5 и 25–6 канавок в канале при фиксированной координате $y=0.43$: а) – $Re=1000$; б) – 1500; в) – 2000; г) – 2500; д) – 3500; е) – 5500.

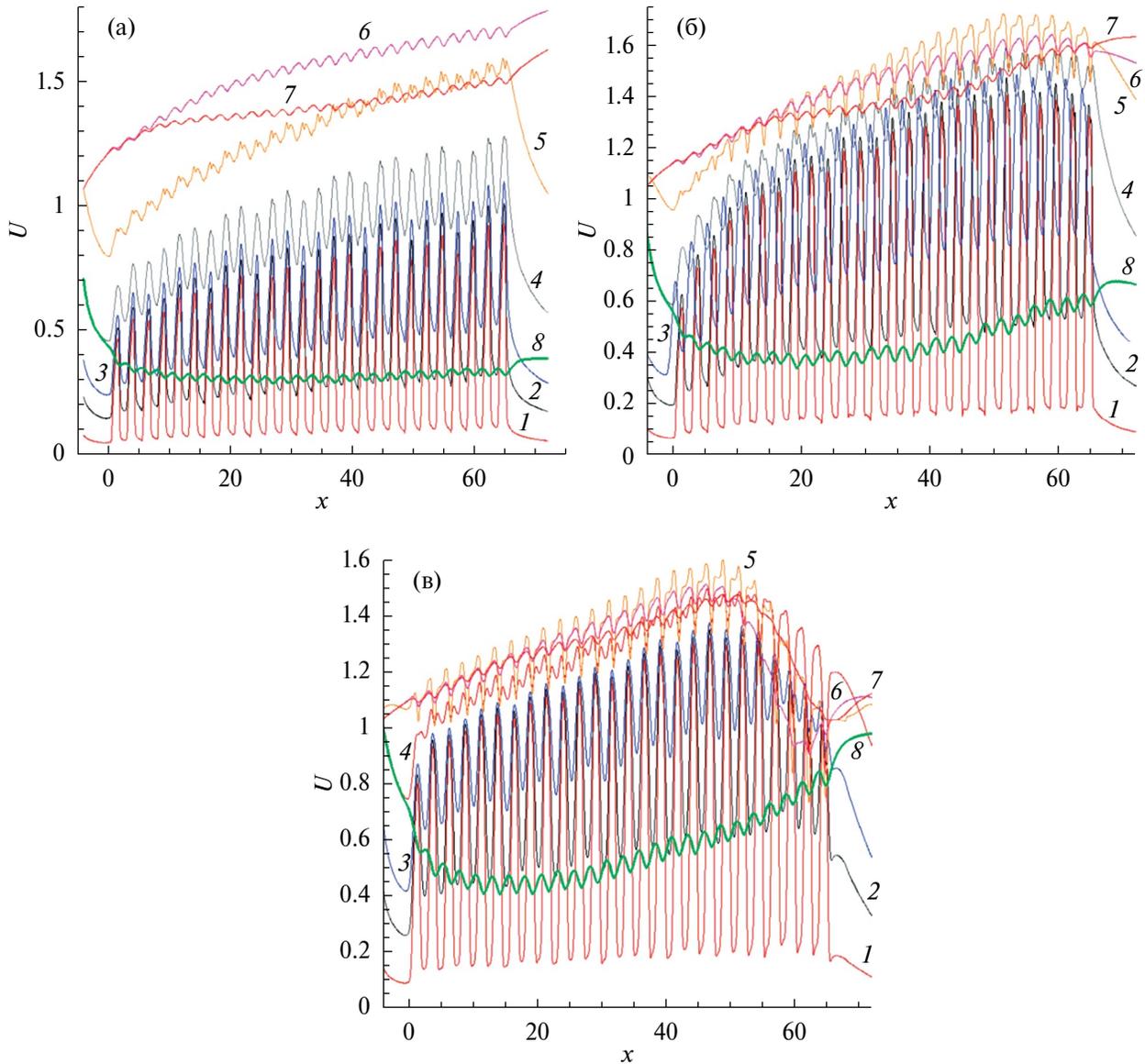


Рис. 10. Иллюстрирующие локальное ускорение потока в ядре по мере отхода от входного сечения распределения скорости $U(x)$ в продольном сечении канала, проходящем через центры сечений стыковки сферических сегментов и цилиндрических траншей L , при различных y от 0.005 до 0.95 для $Re=1000$ (а), 2500 (б), 5500 (в): 1 – $y=0.005$; 2 – 0.015; 3 – 0.025; 4 – 0.05; 5 – 0.1; 6 – 0.4; 7 – 0.6; 8 – 0.95.

участками наклонных канавок имеют достаточно сложный волнистый характер. В центральной продольной области канала до 10 канавки $U(z)$ формируется равномерное ядро потока, причем протяженность плато по мере роста Re сокращается. С 15 канавки в плоскости симметрии образуется минимум, уменьшающийся по мере удаления от входа. Минимум U достигает 1.1 при $Re=5500$. Максимумы скорости в центральной зоне с ростом Re монотонно снижаются с величины порядка 1.7 для $Re=1500-2000$ до 1.5 для $Re=5500$.

Зависимости $U(x)$ на разных удалениях от нижней стенки канала в продольном сечении при $z = -0.764$ для $Re=1000$ (рис. 10а) имеют осциллирующий характер с нарастающими быстрым темпом в начале структурированного участка экстремальными величинами по мере удаления наклонных канавок от входа и уменьшением амплитуды колебаний с ростом y , особенно быстрым при $y > 0.05$. При $y=0.005$ амплитуда колебаний U возрастает от 0.4 до 0.82 от первой до 26 канавки, а при $y=0.05$ она составляет от 0.15

до 0.25. При u свыше 0.1 амплитуды значительно снижаются и не слишком изменяются вдоль канала, находясь в диапазоне 0.03–0.05.

Следует отметить, что минимумы U соответствуют плоским участкам между последовательно расположенными канавками, а максимумы U наблюдаются над серединами канавок. Наибольшая интенсификация течения в ядре потока по сравнению со скоростью на входе происходит при $y=0.43 - U_{\max}$ достигает величин порядка 1.7. При u свыше 0.4 U_{\max} постепенно снижается, приближаясь к 0.33 при $y=0.95$.

С ростом Re до 2500 (рис. 10б) происходит значительное увеличение амплитуды колебаний U и локальных максимумов U над канавками на расстояниях y от 0.005 до 0.1, причем при $y=0.1 U_{\max}$ достигает величины 1.7. Локальные максимумы $U(x)$ при $y=0.4$ оказываются несколько меньше, чем для $Re=1000$. Также интересно отметить подъем $U(x)$ при $y=0.95$ по мере развития течения во второй половине канала.

И, наконец, для $Re=5500$ (рис. 10в) наблюдается существенная трансформация течения во второй половине канала, связанная с довольно резким уменьшением локальных максимумов U . Наибольшие величины U_{\max} отмечаются при $y=0.1$, причем на выходе из канала они падают почти до 1 с 1.6 в середине канала. При $y=0.95 U(y)$ заметно подрастает во второй половине канала, приближаясь к 1.

Влияние числа Рейнольдса на динамику распределений относительных тепловых нагрузок $Num/Num_{pl}(s)$ и $Num/Num_{pl}(t)$, осредненных по поперечным полосам вдоль и поперек прямоугольных участков, которые ограничены контурами 1, 5, 10, 15, 20 и 25 канавок на стенке канала, анализируется на рис. 11. Здесь s и t – координаты, связанные со срединным сечением наклонной канавки и поперечным сечением перехода от входного сферического сегмента к траншейной вставке. При $Re=1000$ в первой канавке Num/Num_{pl} вдоль s оказывается заметно ниже 1 (рис. 11а, б). Лишь в узкой зоне на наветренном склоне $Num/Num_{pl}(t)$ превосходит 1 с максимумом порядка 2.5 на кромке. Однако начиная с 5 канавки максимальные $Num/Num_{pl}(s)$ во входной части канавок превышают 1, доходя до 4 в 25 канавке. $Num/Num_{pl}(t)$ в достигает 8.5, но в подветренной части канавки не превосходит 1. С ростом числа Рейнольдса до 2500 в первой канавке $Num/Num_{pl}(s)$ немного превосходит единицу во входной части, но в концевой части теплообмен оказывается угнетенным (рис. 11в, г). Тем не менее, в 5 канавке максимум $Num/Num_{pl}(s)$ достигает уровня, характерного для 25 канавки при $Re=1000$, а к концу канала $(Num/Num_{pl}(s))_{\max}$ приближается к 11. Поперек первой канавки в подветренной зоне $Num/Num_{pl}(t)$ меньше 1. Однако к 25 канавке в этой зоне возникает локальный максимум на уровне 4, а на наветренном склоне к острой кромке $Num/Num_{pl}(t)$ подрастает до 16.5. Для числа Рейнольдса 5500 наибольшие относительные тепловые нагрузки наблюдаются в 20 канавке, в которой максимум $Num/Num_{pl}(s)$ достигает 14.5. В 25 канавке максимум снижается до 13 (рис. 11д, е). В 15 и 20 канавках $Num/Num_{pl}(t)$ достигает 19 на наветренной кромке.

Подобно [32], где анализируется интенсификация турбулентного теплообмена в канале с однорядным плотным пакетом наклонных канавок, здесь рассматривается усиление ламинарного отрывного течения в наклонных канавках по мере удаления от входа в канал и влияние на него числа Рейнольдса (рис. 12). Эволюция профилей декартовых составляющих скорости U , V , W в центрах стыковых входных сферических сегментов и траншейных частей 1 (1), 5 (2), 10 (3), 15 (4), 20 (5) и 25 (6) канавок при $Re=1000$, 2500 и 5500 демонстрирует ускорение потока по мере приближения к концу канала и интенсификацию отрывного течения на входных участках канавок. При числе Рейнольдса 1000 ламинарное отрывное течение не отличается высокой интенсивностью. Так, максимальная скорость вторичного потока в 25 канавке составляет 20% от скорости на входе в канал (рис. 12в). $U(y)$ при этом приближается к максимальной скорости порядка 1.8 в пристеночном слое на высоте $y=0.2$ (рис. 12а). Интересно отметить, что внутри канавок возникает усиливающийся к концу канала восходящий поток, а в пристеночном слое около структурированной стенки усиливается нисходящий поток (рис. 12б). С ростом Re значительно возрастают максимальные абсолютные величины скорости вторичного закрученного потока. Так, при умеренном $Re=2500 -W_{\min}$ приближается к 0.6 в 25 канавке, а при высоком $Re=5500$ она достигает 0.75 (рис. 12е, и). Максимальные абсолютные величины скорости возвратных токов $-U_{\min}$ при $Re=2500$ оказываются порядка 0.5 в 25 канавке, а при $Re=5500$ приближаются к 0.55 (рис. 12г, ж). Максимумы $U(y)$ для всех канавок с ростом Re приближаются к структурированной стенке, т.е. пристеночный слой над входными участками канавок утончается. По мере отхода от входа в канал течение в его ядре интенсифицируется, причем имеет место заметное выравнивание профилей $U(y)$. С ростом Re максимумы U снижаются, в частности до 1.5 при $Re=5500$ (рис. 12г). С возрастанием Re восходящий поток внутри канавок ослабевает, а при $Re=5500$ и вовсе исчезает. Интенсивность нисходящего потока увеличивается, достигая минимальной величины -0.2 в 15 канавке при $Re=2500$ и -0.3 при $Re=5500$ (рис. 12д, з).

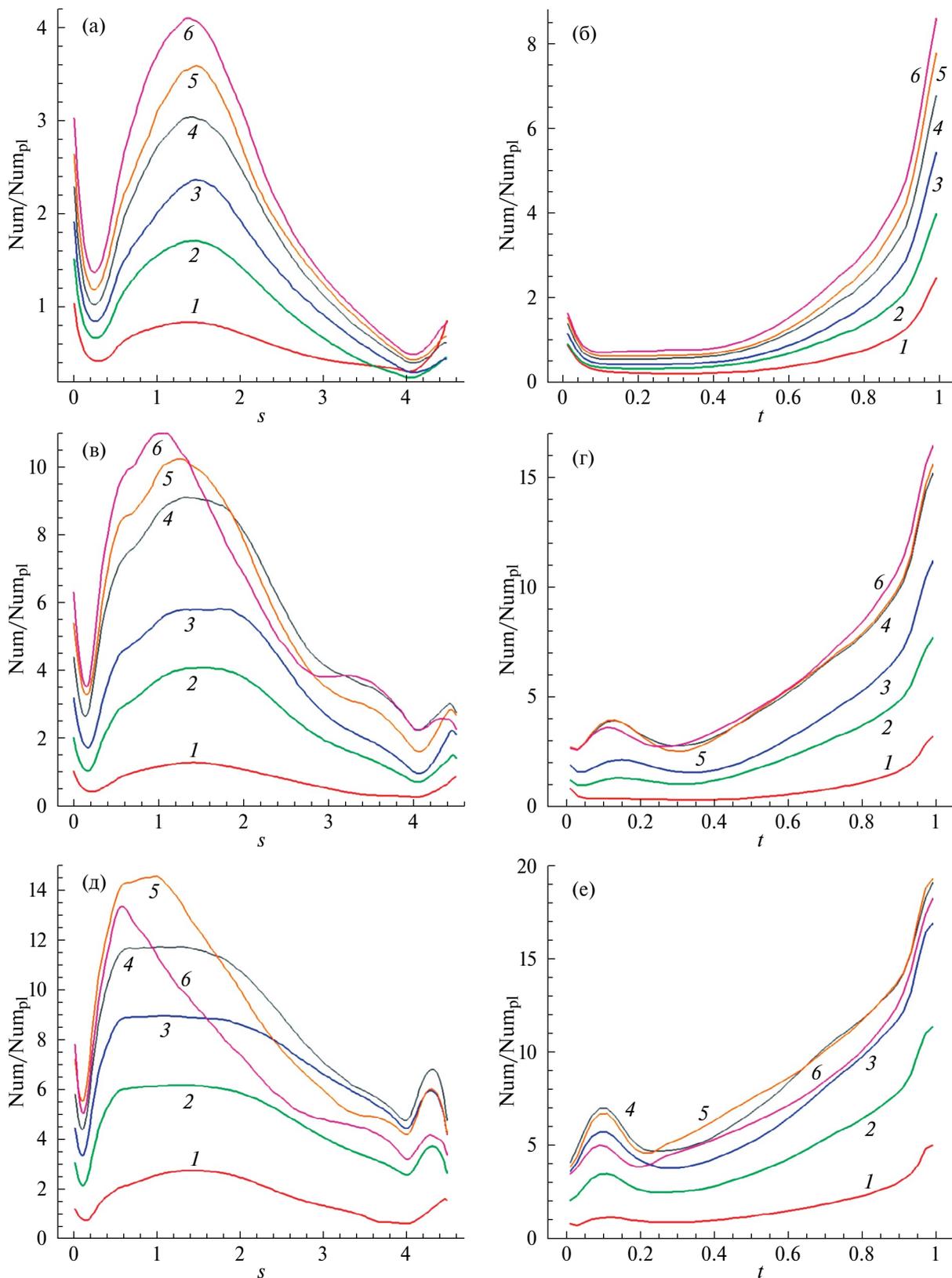


Рис. 11. Сравнение осредненных по поперечным полосам чисел Нуссельта Num/Num_{pl} вдоль (а, в, д) и поперек (б, г, е) участков, ограниченных контурами 1 (1), 5 (2), 10 (3), 15 (4), 20 (5) и 25 (6) канавок, при числах Рейнольдса 1000 (а, б), 2500 (в, г), 5500 (д, е).

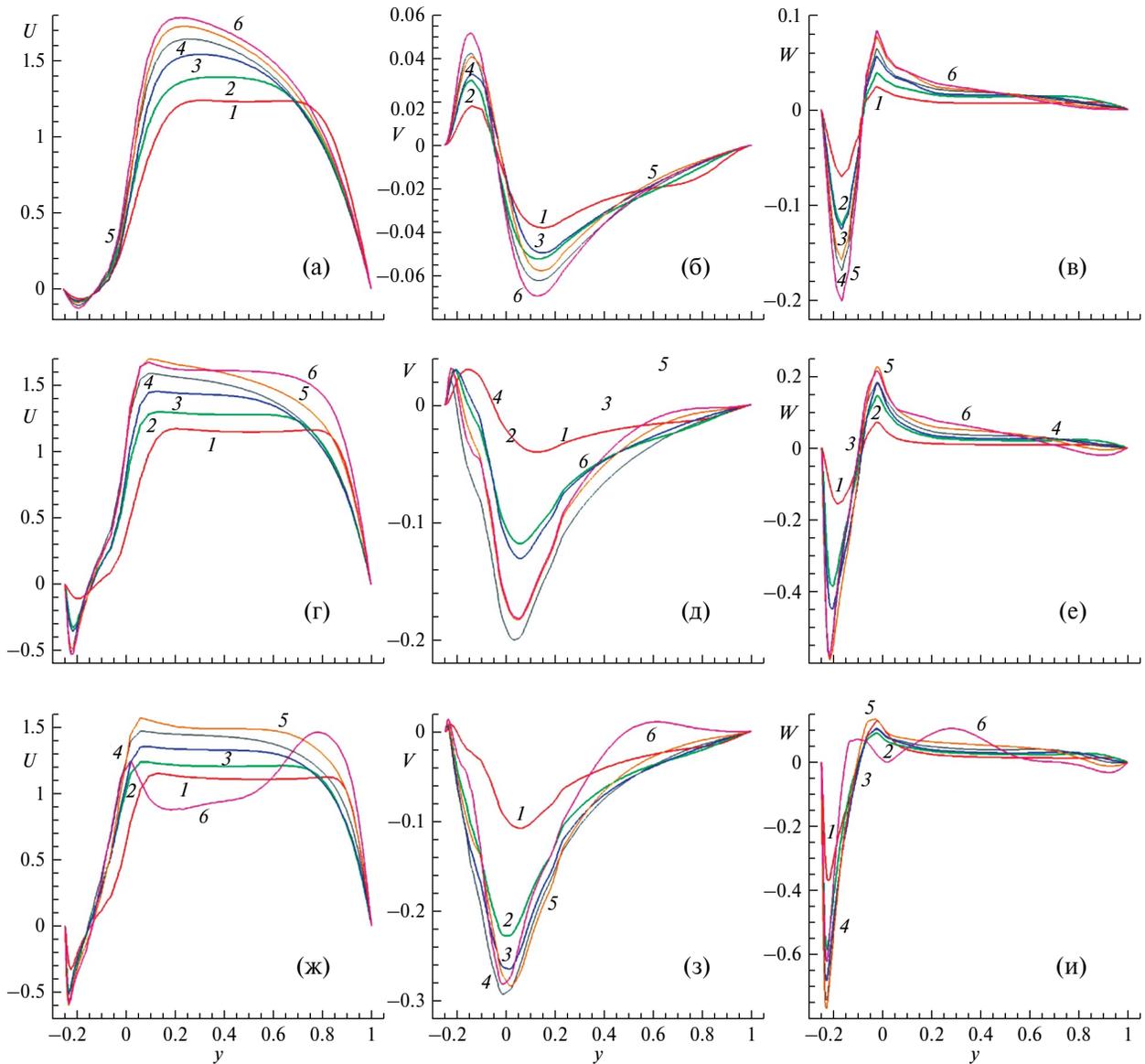


Рис. 12. Сравнение профилей декартовых составляющих скорости U (а, г, ж), V (б, д, з), W (в, е, и) в центрах стыков входных сферических сегментов и траншейных частей 1 (1), 5 (2), 10 (3), 15 (4), 20 (5) и 25 (6) канавок при числах Рейнольдса 1000 (а, б, в), 2500 (г, д, е), 5500 (ж, з, и).

Влияние числа Рейнольдса в диапазоне от 1000 до 5500 на эволюцию локальных характеристик течения и теплообмена внутри канавок рассматривается на примере 22 канавки (рис. 13). Сравниваются распределения относительного трения f/f_{pl} , перепада статического давления $P-P_{pl}$ и относительного числа Нуссельта Nu/Nu_{pl} вдоль срединного сечения канавки по координате s , измеренной от входной кромки (рис. 13а, в, д). Также указанные характеристики сравниваются в сечении перехода от входного сферического сегмента и траншейного участка вдоль координаты t , измеренной от подветренной кромки. Следует указать, что перепад давления $P-P_{pl}$ нормализуется, т.е. при $t=0.2$ все кривые проходят через нуль. Течение и теплообмен при $Re=1000$ малоинтенсивные, особенно в сравнении с более высокими числами Рейнольдса. При умеренном числе Рейнольдса 2500 минимальное относительное трение в срединном сечении достигает -4 , а в поперечном переходном сечении приближается к -10 . При высоком числе Рейнольдса эта характеристика падает до -22 в срединном и до -16 в поперечном сечении. Минимальное отрицательное давление на входной кромке канавки снижается по мере роста Re , в поперечном

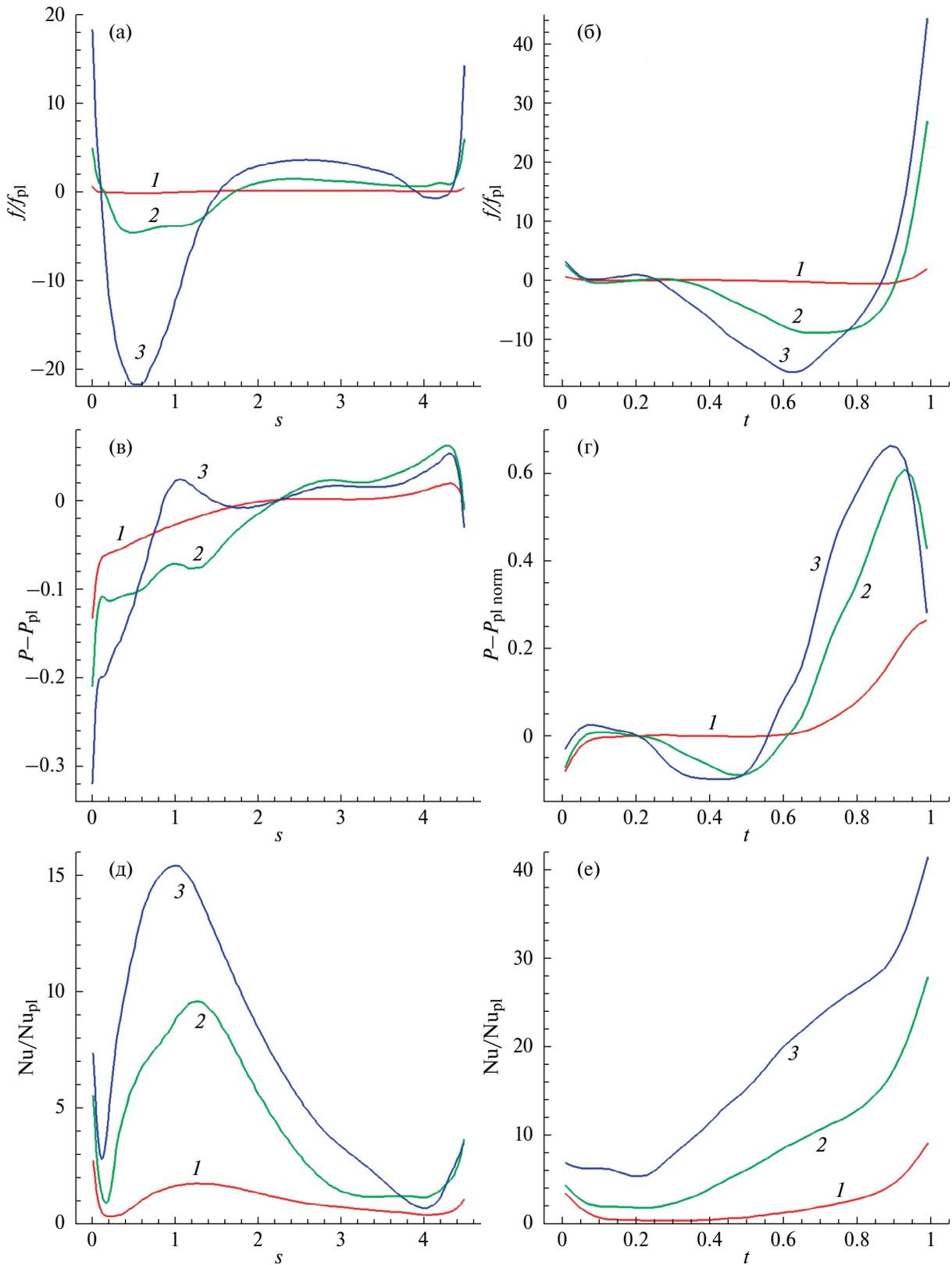


Рис. 13. Сравнение распределений f/f_{pl} (а, б), $P - P_{pl}$ (в, г) и Nu/Nu_{pl} (д, е) в срединном продольном сечении (а, в, д) и характерном сечении стыковки входного сферического сегмента и траншейной части 22 канавки (б, г, е) при различных числах Re: 1 – Re=1000; 2 – 2500; 3 – 5500.

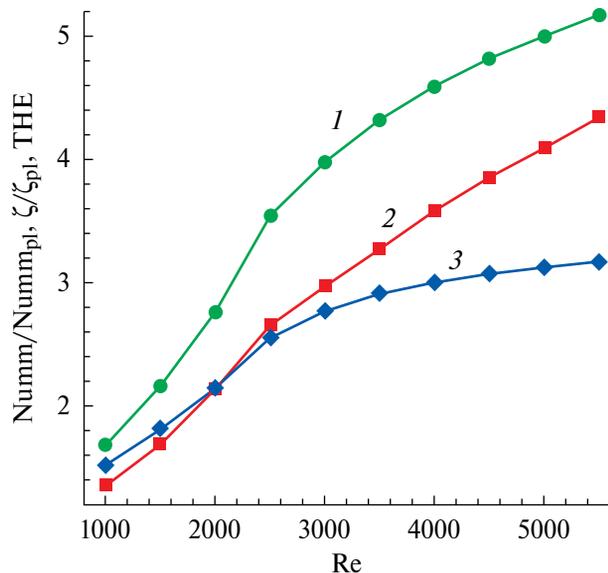


Рис. 14. Влияние числа Рейнольдса на $Numm/Numm_{pl}$ – 1, ζ/ζ_{pl} – 2, $THE = (Numm/Numm_{pl}) / (\zeta/\zeta_{pl})^{1/3}$ – 3.

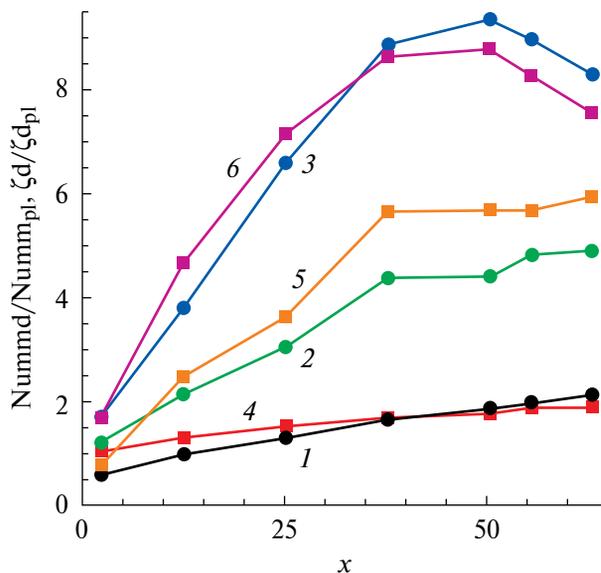


Рис. 15. Влияние Re на относительную теплоотдачу от участков, ограниченных контурами 1, 5, 10, 15, 20, 25 канавок, $Nummd/Nummd_{pl}$ (1, 2, 3) и гидравлические сопротивления секций канала, соответствующим их границам, ζ_d/ζ_{dpl} (4, 5, 6).

переходном сечении формируется экстраординарный перепад давления с максимумом 0.6 и минимумом -0.1 при $Re=2500$. Максимальная величина Nu/Nu_{pl} в срединном сечении на входном участке канавки увеличивается с 9.5 при $Re=2500$ до примерно 15 при $Re=5500$. При этом на наветренной кромке Nu/Nu_{pl} приближается к 30 при $Re=2500$ и превосходит 40 при $Re=5500$. Обращает на себя внимание в последнем случае довольно высокий уровень $Nu/Nu_{pl} = 6$ на подветренной стороне канавки.

Проинтегрированные по поверхности структурированного участка канала $Numm/Numm_{pl}$ определяют тепловую эффективность энергоэффективной стенки, а относительные коэффициенты гидравлических потерь ζ/ζ_{pl} , рассчитанные по методике [30], связаны с перепадом полного давления (рис. 14). Обе прогнозируемые характеристики отличаются возрастанием по закону, близкому к квадратичному, с ростом Re в диапазоне до $Re=2500$ и по линейному закону для Re свыше 2500. Наблюдается преобладающий рост $Numm/Numm_{pl}(Re)$ по сравнению с $\zeta/\zeta_{pl}(Re)$. 3.5-кратное увеличение $Numm/Numm_{pl}$ для $Re=2500$ сопровождается 2.6-кратным повышением ζ/ζ_{pl} . Для $Re=5500$ $Numm/Numm_{pl}$ достигает наибольшего значения 5.2 при $\zeta/\zeta_{pl} = 4.3$. Теплогидравлическая эффективность определяется зависимостью $THE = (Numm/Numm_{pl}) / (\zeta/\zeta_{pl})^{1/3}$, и практически при всех Re она превосходит 1, достигая 3 при $Re=5500$. Однако следует отметить, что при $Re=1000$ она оказывается меньше 1 из-за значительного гидравлического сопротивления.

Интересно проанализировать влияние Re на изменение относительных тепловых нагрузок на внутренние поверхности канавок по мере их удаления от входа в канал (рис. 15). Нагрузки рассчитываются по прямоугольным участкам, ограниченным контурами 1, 5, 10, 15, 20 и 25 канавок. В целом, по мере удаления канавки от входа теплоотдача от внутренней поверхности возрастает, причем она растет тем интенсивнее, чем выше число Рейнольдса. Максимальная тепловая эффективность при $Re=2500$ наблюдается в 25 канавке и приближается к 5, а при $Re=5500$ она превышает 9 в 15 канавке. Относительные гидравлические потери незначительно отличаются от тепловой эффективности при $Re=1000$ и 5500.

Интенсификация отрывного ламинарного течения в канале со структурированной стенкой с ростом Re иллюстрируется поведением экстремальных величин декартовых составляющих скорости возвратных токов в верховьях канавок ($-U_{min}$), восходящих V_{max} потоков во входных частях канавок, вторичных закрученных потоков W_{max} , формирующихся внутри канавок (рис. 16). Абсолютная скорость возвратных токов ($-U_{min}$) монотонно увеличивается от 0.2 до 0.67 с ростом Re от 1000 до 5500. Максимальная скорость вторичного течения в канавках W_{max} довольно быстро возрастает от 0.75 до 1.25 в промежутке

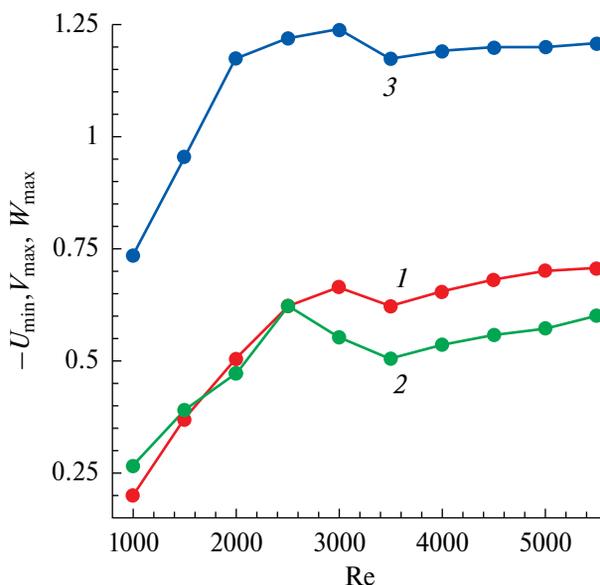


Рис. 16. Влияние числа Рейнольдса на экстремальные величины продольной ($-U_{\min}$) (1), вертикальной V_{\max} (2) и поперечной W_{\max} (3) компоненты скорости.

Re от 1000 до 3000. С дальнейшим ростом Re W_{\max} несколько снижается и остается на уровне 1.2. Максимальная скорость восходящих потоков V_{\max} в канавках растет практически одинаково с ($-U_{\min}$) для Re от 1000 до 2500 и достигает 0.6. С дальнейшим увеличением Re V_{\max} изменяется незначительно и сохраняется на уровне 0.55.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально обосновано явление локального ускорения ламинарного потока с максимумом продольной скорости в сдвиговом течении порядка 1.8 над входными частями канавок. Измеренные методом SIV-профили $U(z)$ в трех точках 22-й наклонной канавки в узком канале с 26 двухрядными канавками с расположением \setminus на стенке хорошо согласуются с численными прогнозами на основе решения уравнений Навье–Стокса при Re=1000. Установлена связь локального ускорения потока в ядре канала с аномальной интенсификацией отрывного ламинарного течения в двухрядных канавках с ростом числа Рейнольдса от 1000 до 2500. При Re=2000 в продольном сечении входных частей удаленных от входа канавок f/f_{pl} снижается до -5.5 , а при Re=2500 U_{\max} в сдвиговых слоях над канавками (на высоте $y=0.005$) достигает 1.45. Относительная теплоотдача от структурированного участка канала при Re=5500 достигает 5.2 при 4.3 кратном росте относительных гидравлических потерь.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда по грантам 22-19-00056 (методология) 23-19-00083 (расчеты).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Milman O., Ananiev P. Dry coolers and air-condensing units (Review) // Thermal Eng. 2016. V.63. P. 157–167.
2. Gao J., Hu Z., Yang Q., Liang X., Wu H. Fluid flow and heat transfer in microchannel heat sinks: modelling review and recent progress // Thermal Science and Engineering Progress. 2022. V.29. p.101203.

3. *Dzyubenko B., Kuzma-Kichta Yu., Leontiev A., Fedik I., Kholpanov L.* Intensification of heat and mass transfer on macro-, micro-, and nanoscales. Begell House, 2016. 630p
4. *Kalinin E.K., Dreitser G.A., Kopp I.Z., Myakotchin A.S.* Efficient surfaces for heat exchangers: fundamental and design. Begell house. 2002. 392p.
5. *Rashidi S., Hormozi F., Sunden B., Mahian O.* Energy saving in thermal energy systems using dimpled surface technology – A review on mechanisms and applications // *Appl. Energy*. 2019. V.250. P. 1491–1547.
6. *Wei X.J., Joshi Y.K., Ligrani P.M.* Numerical simulation of laminar flow and heat transfer inside a microchannel with one dimpled surface // *Journal of Electronic Packaging*. 2007. V. 129. № 1. P. 63–70.
7. *Xu M., Lu H., Gong L., Chai J.C., Duan X.* Parametric numerical study of the flow and heat transfer in microchannel with dimples // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2016. V.76. P. 348–357.
8. *Park D.S.* Experimental and numerical study of laminar forced convection heat transfer for a dimpled heat sink // Thesis of Master of Science. Texas A&M University. 2007. 60 p.
9. *Bi C., Tang G.H., Tao W.Q.* Heat transfer enhancement in mini-channel heat sinks with dimples and cylindrical grooves // *Applied Thermal Engineering*. 2013. V.55. p.121–132.
10. *Lu G., Zhai X.* Analysis on heat transfer and pressure drop of a microchannel heat sink with dimples and vortex generators // *International journal of thermal sciences*. 2019. V.145. p.105986.
11. *Isaev S.A., Leonardi E., Timchenko V., Usachov A.E.* Vortical investigation of heat transfer in microchannels with oval dimples // *Heat Transfer Research*. 2010. V. 41. № 4. p. 413–424.
12. *Исаев С.А., Леонтьев А.И., Готовский М.А., Усачов А.Е., Жукова Ю.В.* Анализ повышения теплогидравлической эффективности при движении трансформаторного масла в миниканале с однорядным пакетом сферических и овальных лунок на нагретой стенке // *Теплофизика высоких температур*. 2013. Т. 51. № 6. С. 884–890.
13. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Gotovskii M.A., Usachov A.E., Zhukova Yu.V.* Analysis of thermohydraulic efficiency increase during transformer oil flow in a minichannel with a single-row package of spherical and oval dimples at a heated wall // *High Temperature*. 2013. V. 51. No. 6. P. 804–809.
14. *Исаев С.А., Леонтьев А.И., Корнев Н.В., Хассель Э., Чудновский Я.П.* Интенсификация теплообмена при ламинарном и турбулентном течении в узком канале с однорядными овальными лунками // *Теплофизика высоких температур*. 2015. Т. 53. № 3. С. 390–402.
15. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Kornev N.V., Hassel E., and Chudnovskii Ja.P.* Heat transfer intensification for laminar and turbulent flows in a narrow channel with one-row oval dimples // *High Temperature*. 2015. V.53. № .3 P. 375–386.
16. *Исаев С.А.* Генезис аномальной интенсификации отрывного течения и теплообмена в наклонных канавках на структурированных поверхностях // *ИЗВ.РАН. Механика жидкости и газа*. 2022. № 5. С. 13–24.
17. *Isaev S.A.* Genesis of anomalous intensification of separation flow and heat transfer in inclined grooves on structured surfaces // *Fluid Dynamics*. 2022. V. 57. № .5. P. 558–570.
18. *Isaev S., Gritkevich M., Leontiev A., Popov I.* Abnormal enhancement of separated turbulent air flow and heat transfer in inclined single-row oval-trench dimples at the narrow channel wall // *Acta Astronautica*. 2019. VI. 163 (Part.A). P. 202–207.
19. *Исаев С.А., Баранов П.А., Леонтьев А.И., Попов И.А.* Интенсификация ламинарного течения в узком микроканале с однорядными наклонными овально-траншейными лунками // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44. Вып. 9. С. 73–80.
20. *Isaev S.A., Baranov P.A., Leontiev A.I., Popov I.A.* Intensification of a laminar flow in a narrow microchannel with single-row inclined oval-trench dimples // *Technical Physics Letters*. 2018. V. 44. № 5. P. 398–400.
21. *Исаев С.А., Леонтьев А.И., Мильман О.О., Судаков А.Г., Усачов А.Е., Гульцова М.Е.* Интенсификация теплообмена при ламинарном вихревом течении воздуха в узком канале с однорядными наклонными овальными лунками // *Инж.-физ. журн.* 2018. Т. 91. № 4. С. 1022–1034.
22. *Isaev S.A., Leont'ev A.I., Mil'man O.O., Sudakov A.G., Usachov A.E., Gul'tsova M.E.* Intensification of heat exchange in laminar vortex air flow in a narrow channel with a row of inclined oval trenches // *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2018. V. 91. № 4. P. 963–974.
23. *Isaev S.A., Leontiev A.I., Milman O.O., Popov I.A., Sudakov A.G.* Influence of the depth of single row oval-trench dimples inclined to laminar air flow on heat transfer enhancement in a narrow micro-channel // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 2019. V. 134. P. 338–358.
24. *Исаев С.А., Леонтьев А.И., Мильман О.О., Никущенко Д.В., Попов И.А.* Энергоэффективные поверхности с многорядными наклонными овально-траншейными лунками для воздушных конденсаторов // *Энергетика*. 2020. № 4. С. 3–10.

25. *Мухеев Н.И., Душин Н.С.* Метод измерения динамики векторных полей скорости турбулентного потока по видеосъемке дымовой визуализации // Приборы и техника эксперимента. 2016. № 6. С. 114–122.
26. *Mikheev N.I., Dushin N.S.* A method for measuring the dynamics of velocity vector fields in a turbulent flow using smoke image-visualization video // Instruments and Experimental Techniques. 2016. V. 59. № 6. P. 882–889.
27. *Исаев С.А., Баранов П.А., Усачов А.Е.* Многоблочные вычислительные технологии в пакете VP2/3 по аэротермодинамике. Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013. 316с.
28. *Isaev S.A., Baranov P.A., Usachov A.E.* Multiblock computational technologies in the VP2/3 package on aerothermodynamics (LAP LAMBERT Academic Publishing: Saarbrucken, Germany, 2013).
29. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Numerical Heat Transfer. 1984. V. 7. № 2. P. 147.
30. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. № 1. P. 59–98.
31. *Rhie C.M., Chow W.L.* A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation // AIAA J. 1983. V. 21. P. 1525.
32. *Pascau A., Garcia N.* Consistency of SIMPLEC scheme in collocated grids // Proc. V European Conf. on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD2010. Lisbon, Portugal, 2010. 12p.
33. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. 2nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003. 567p.
34. *Demidov D.* AMGCL: C++ library for solving large sparse linear systems with algebraic multigrid method. <http://amgcl.readthedocs.org/>.
35. *Исаев С.А., Судаков А.Г., Баранов П.А., Жукова Ю.В., Усачов А.Е.* Анализ погрешностей многоблочных вычислительных технологий при расчете циркуляционного течения в квадратной каверне с подвижной крышкой для $Re=1000$ // Инж.-физ. журнал. 2013. Т. 86. № 5. С. 1064–1079.
36. *Isaev S.A., Sudakov A.G., Baranov P.A., Zhukova Yu.V., Usachov A.E.* Analysis of errors of multiblock computational technologies by the example of calculating a circulation flow in a square cavity with a moving cover at $Re = 1000$ // J. Eng. Physics and Thermophysics. 2013. V. 86, Issue 5. P. 1134–1150.
37. *Isaev S.A., Kornev N.V., Leontiev A.I., Hassel E.* Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on the turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel // Int. J. Heat Mass Transfer. 2010. V.53. № 1–3. P. 178.
38. *Herwig H., Kock F.* Direct and indirect methods of calculating entropy generation rates in turbulent convective heat transfer problems // Heat Mass Transfer. 2007. V. 43. P. 207–215.
39. *Isaev S.A., Mil'man O.O., Klyus A.A., Nikushchenko D.V., Khmara D.S., Yunakov L.P.* Anomalous heat transfer enhancement in separated flow over a zigzag-shaped dense package of inclined grooves in a channel wall at different temperature boundary conditions // Fluid Dynamics. 2024. V. 59. № 2. P. 238–259.

Interrelation between the Local Acceleration of Laminar Flow in a Channel and the Anomalous Heat Transfer Enhancement in Inclined Two-Row Grooves

S. A. Isaev^{a, b}, O. O. Mil'man^c, N. I. Mikheev^d, D. V. Nikushchenko^a,
N. S. Dushin^d, A. A. Klyus^b, and E. A. Osiyuk^b

^a *St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, 190121 Russia*

^b *St. Petersburg State University of Civil Aviation, St. Petersburg, 196210 Russia*

^c *Scientific and Production Implementation Company "Turbokon", Kaluga, 248010, Russia*

^d *Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia*

*e-mail: isaev3612@yandex.ru

The anomalous enhancement of laminar separation flow and heat transfer (AELSFHT) is studied in a channel with two rows of 26 densely packed grooves inclined at angles of $\pm 45^\circ$ in the case of uniform flow at the entry and the Reynolds number Re varying from 1000 to 5500. The local flow acceleration is validated, when the greatest flow velocity becomes of the order of 1.8 in dimensionless units and the wall layer becomes thinner above the spherical entry segments. In this case, the longitudinal velocity increases to a value of 1.4 at a distance $y = 0.005$ from the wall for $Re = 2500$. The interrelation between the local acceleration at the channel center and the AELSFHT is established, the minimum value of the negative acceleration amounting to -25 at $Re = 5500$ and the relative heat removal from the structured region of the channel reaching up to 5.2.

Keywords: anomalous enhancement, inclined grooves, narrow channel, laminar flow, separation flow, vortex heat transfer, air.

УДК 532.517.4; 536.24

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАЗОКАПЕЛЬНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ИМПУЛЬСНОГО ВИХРЕВОГО ОБЛАКА

© 2024 г. М. А. Пахомов*, В. И. Терехов**

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

**e-mail: pma41976@yandex.ru*

*** e-mail: terekhov@itp.nsc.ru*

Поступила в редакцию 05.03.2024 г.

После доработки 07.04.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Представлены результаты численного моделирования формирования и движения в процессе выдува одиночной импульсной турбулентной газокapельной струи примерно соответствующим условиям кашля человека. Расчеты проведены при длительности импульса $t = 0.6$ с и максимальной скорости газовой фазы 20 м/с при массовом содержании капель $M_{L1} = 1\%$. Капельная фаза в выходном сечении была монодисперсной, а начальный размер частиц в расчетах изменялся диапазоне $D_1 = 5\text{--}30$ мкм. В начальный период движения внутри облака формируются две зоны повышенной завихренности: в слое смешения и в области торможения импульсной двухфазной струи. Наибольший уровень продольной скорости и кинетической энергии турбулентности достигается в период выдува импульса. В последующие моменты времени происходит монотонное уменьшение скорости и уровня турбулентности. Вихревое облако, образованное одиночным импульсом, существует довольно продолжительное время ($t \approx 4$ с) и за это время успевает проникнуть в окружающем затопленном пространстве на дистанцию более 3 м.

Ключевые слова: импульсная газокapельная струя, вихревое облако, численное моделирование.

DOI: 10.31857/S1024708424040041, **EDN:** OYQTTI

Изучение движения турбулентных компактных вихревых облаков, движущихся вынужденно под воздействием единичного начального импульса, представляет фундаментальный и практический интерес [1–3]. Фундаментальное значение состоит в том, что вихревое облако является примером изолированного концентрированного вихря, изучению которого уделено внимание многих исследователей [4–7]. Практическое значение исследования таких течений обусловлено тем, что они встречаются в природных явлениях (извержение вулканов и движение термиком) и их использованием в практических процессах (горение, взрывы, тушение пожаров при различных техногенных авариях и т.д.). В последнее десятилетие крайне актуальным является изучение распространения и динамики переноса инфекции воздушно-капельным путем при обычных (дыхание, разговор и пение) и острых (кашель и чихание) респираторных процессах [8–11]. Наиболее важным, как с практической, так и с фундаментальной точек зрения, является исследование процесса распространения одиночного вихревого облака с аэрозольными каплями при кашле и чихании.

Одним из основных параметров, характеризующим процессы в таких течениях, является параметр, имеющий физический смысл отнесенного к диаметру отверстия линейного масштаба объема, добавленного импульсной струей во внешнюю среду $P = (U_{m1}t_0/d)^{1/3}$ [5, 7, 12]. Здесь $U_{m1} = \frac{1}{t_0} \frac{1}{A} \int_0^{t_0} \int_A U_1(t) dt dA$ – осредненная по времени цикла и сечению отверстия скорость потока, t_0 – время цикла (время выдува), A – площадь выходного отверстия и d – его эквивалентный диаметр. По данным [5, 7] при $P = 1.6\text{--}8$ формируется вихревое облако (кольцо) [1–6], и это соответствует условиям обычного выдоха при острых респираторных заболеваниях [7, 13], а случай истечения нестационарной импульсной струи ($P > 8$) описывает процесс кашля [7, 13]. Тогда как в [14] предложено иное выражение для определения линейного масштаба объема $P_1 = U_{m1}t_0/d$.

Ранее проведенные измерения [15, 16] показали, что время выдоха воздуха при однократном цикле кашля составляет $t_0 = 0.5-0.8$ с, при этом, в окружающее пространство выбрасывается от 0.6 до 1.6 л газо-парокапельной смеси. Временная зависимость расхода выдыхаемого воздуха имеет несимметричную колоколообразную форму с передним фронтом, более крутым по сравнению с задним [15]. Максимальная величина скорости истечения в процессе кашля достигает 20 м/с [15, 16]. При однократном кашле формируется нестационарная импульсная турбулентная струя с числом Рейнольдса, равным $Re = U_{\max}d/\nu = (1-3)\times 10^4$. Здесь U_{\max} – максимальная скорость истечения импульсной струи за период и ν – кинематическая вязкость газа. Импульсная струя может распространяться в покоящейся среде на расстояние до семи метров [10–12]. При процессе кашля “выходное отверстие” имеет сложную форму, которую приближенно можно считать прямоугольной щелью, и ее форма и геометрические размеры изменяются во времени действия импульса [12]. Однако, по данным [15,16] с достаточной инженерной точностью такое “отверстие” можно считать круглым с эквивалентным диаметром $d \approx 0.02$ м.

Начальный диаметр капель в выдыхаемом из легких газе изменяется в диапазоне от $D_1 = 1-1000$ мкм [17]. По данным [18], более 80% капель, выделяемых при кашле человека, имеют размер менее 30 мкм. Диаметр капель является определяющим параметром и существенно образом влияет на их динамику и распространение в окружающем затопленном пространстве. Капли размером $D_1 \geq 60$ мкм довольно быстро оседают при отсутствии спутного потока ветра на поверхность пола на расстоянии до 2 м от выходного сечения, расположенного на высоте от пола $y \approx 1.6$ м [11, 18], а капли размером менее 60 мкм могут длительное время существовать в воздухе и попадать в дыхательные пути другого человека [10–12]. Предыдущие исследования (см. обзорные работы [10, 11]) показали, что большинство распыленных капель, выделяемых при кашле или чихании, переносятся влажным теплым турбулентным вихревым облаком. Расстояние, пройденное аэрозольными каплями, существенно зависит от их начального диаметра, параметров окружающего воздуха (температура и влажность), наличия спутного ветра и величины начального импульса [10,11]. Также отметим, что размер капель может уменьшаться за счет процесса их испарения и дробления и увеличиваться при их слиянии.

Авторы [16], используя URANS подход и $k-\omega$ SST изотропную модель турбулентности [19], показали, что при отсутствии спутного ветра капли при одиночном кашле не могут распространяться на расстояния дальше 2 м и находиться в воздухе более 1 мин. Наличие спутного потока ветра (1–4.2 м/с) способствует значительному увеличению этого расстояния до 6 м.

В работе [20] используется эйлерово-лагранжево описание при моделировании движения и испарения капель, выделяемых при кашле. Для описания движения газа при распространении турбулентной импульсной струи применяются интегральные соотношения для свободных струй. Отметим также, что использование интегральных подходов при описании двухфазных импульсных струй требует отдельного обоснования. При выполнении численных расчетов в рамках лагранжева подхода используется модель [21]. Авторы [22] численно показали важность учета неоднородного поля влажности при моделировании испарения и движения капель, выделяемых при кашле. URANS расчеты с применением эйлерово-лагранжева подхода выполнены на коммерческом CFD пакете CFX. Авторами [22] была использована RNG $k-\epsilon$ изотропная модель турбулентности. Очевидно, что гипотеза изотропной вязкости имеет свои ограничения при моделировании таких течений.

В последние несколько лет получили развитие методы моделирования таких течений с использованием методов прямого численного моделирования (DNS-метод) [23, 24] и моделирования крупных вихрей (LES-метод) [25]. Метод DNS позволяет полностью отказаться от дополнительных гипотез при решении нестационарных уравнений Навье–Стокса, но пока может быть применен для моделирования однократного воспроизведения кашля при числах Рейнольдса струи порядка 10^4 [24]. LES может быть использован для расчетов течений с большими числами Рейнольдса. Однако применение DNS и LES, особенно с учетом влияния дисперсной фазы на подсеточные напряжения в LES-методе, требует наличия высокопроизводительных вычислительных ресурсов суперкомпьютеров, что заметно ограничивает их применение для инженерных расчетов газокапельных импульсных струй.

Один из методов, позволяющих частично учесть сложные процессы смешения и анизотропию пульсаций скорости несущей фазы является использование моделей переноса компонент рейнольдсовых напряжений (SMC) [26]. Ранее успешное применение этого подхода было показано для моделирования двухфазных затопленных [27] и импульсных импактных [28, 29] струй.

Для описания динамики движения и теплообмена двухфазного потока используются два способа расчета: эйлеров (используемый в настоящей работе) и лагранжев. Лагранжев и эйлеров методы дополняют друг друга и имеют свои области применимости. При этом, как правило, преимущества одного из этих методов являются недостатками другого.

Лагранжев подход имеет известные преимущества при моделировании описания процесса распространения дисперсной фазы. Переход от результатов расчетов траекторий к распределениям параметров дисперсной фазы в физическом пространстве (например, при расчете концентрации капель) осуществляется путем осреднения этих результатов по контрольному объему эйлеровой сетки [13, 20, 21]. При расчетах динамики частиц в турбулентных потоках обычно используется классическая модель раздельного течения фаз (stochastic separated flow—SSF) [21], частично учитывающая стохастическое влияние турбулентности газа на движение частицы [30]. В качестве критерия генерации случайной составляющей скорости газа выбирается наименьшее из значений времени жизни вихря и времени взаимодействия частицы с турбулентным вихрем [30]. Это означает, что газовая фаза оказывает влияние на турбулентную дисперсию частиц только в точках, соответствующих моменту начала взаимодействия вдоль всей траектории движения дисперсной фазы. Взаимодействие рассматривается как дискретный процесс, поэтому для получения статистически достоверного решения вдоль траектории дисперсной фазы необходимо проводить большое количество вычислений траекторий частиц (порядка 10^4).

Другим подходом к расчету параметров дисперсной фазы является применение полного лагранжева метода [31, 32]. Данный метод основан на использовании системы дополнительных обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент якобиана при переходе от эйлеровых переменных к лагранжевым. Концентрация дисперсной фазы вычисляется из уравнения неразрывности, записанного в лагранжевой форме [31, 32]. Данный подход исключает необходимость проведения осреднения траекторий частиц по малому физическому контрольному объему, а также существенно уменьшает необходимое число траекторий частиц и получить решение, не зависящее от формы и размера применяемой вычислительной сетки. Указанный подход используется авторами [31, 32] при описании широкого класса двухфазных течений с твердыми частицами и жидкими каплями для учета эффектов пересечения траекторий частиц и формирования областей с высокими локальными значениями концентрации частиц (складки и “каустики”) [24, 31–34], включая распространение межзвездной пыли в галактике [35].

Целью данной работы является исследование динамики распространения одиночного нестационарного вихревого облака в импульсной газок капельной струе с использованием URANS подхода для условий, соответствующих процессу кашля человека. В работе создана математическая модель, позволяющая определять глубину проникновения вихревого газок капельного облака в процессе его распространения в окружающей среде. В практической области получены результаты, позволяющие определять безопасную дистанцию от источника и динамику распространения вихревого облака с каплями жидкости, содержащими вирус, в процессе кашля человека. Эти данные представляют интерес и для производителей систем кондиционирования воздуха при разработке усовершенствованных устройств для создания комфортных и безопасных условий работы для человека.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

С использованием системы нестационарных осесимметричных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса URANS, записанных с учетом влияния капель на процессы переноса в несущей фазе, решается задача о динамике двухфазной газок капельной импульсной струи с учетом межфазного тепломассопереноса. Динамика двухфазного потока описывается с применением эйлерова двухжидкостного подхода [36]. Схематическое представление течения приведено на рис. 1а. Турбулентность несущей фазы описывалась с использованием эллиптической модели переноса компонент рейнольдсовых напряжений [26], записанной с учетом наличия капель жидкости [37]. Для расчета пульсаций компонент скорости дисперсной фазы применяются кинетические уравнения, приведенные в [38, 39]. Объемная концентрация капель мала ($\Phi_1 = M_{L1}\rho_1/\rho_{L1} < 2 \times 10^{-4}$) и они достаточно мелкие (начальный диаметр $D_1 = 30$ мкм). Здесь M_{L1} — начальная массовая концентрация капель, ρ_1 и ρ_{L1} — плотность газа и материала капель во входном сечении. В силу малости величины Φ_1 дробление и коалесценция капель в потоке не принимаются во внимание [27–29]. Газок капельный поток является несжимаемой средой с одним давлением. Основные уравнения URANS модели для двухфазного потока при наличии испаряющихся капель воды имеют вид [28, 29]. Все уравнения записаны в декартовых координатах, но решались в осесимметричном приближении.

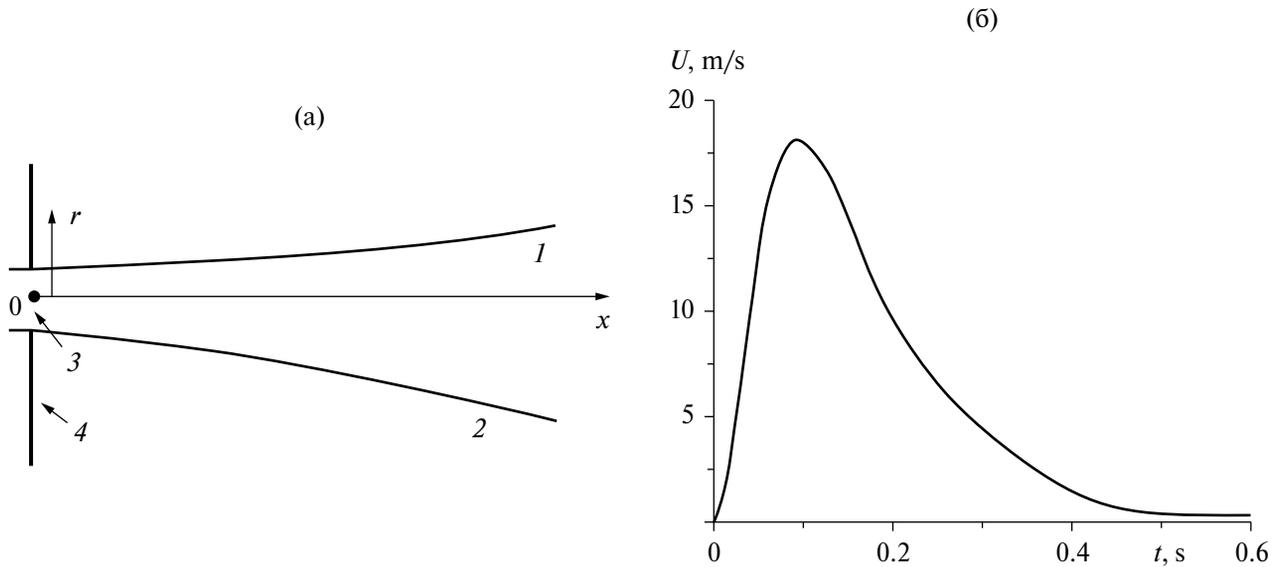


Рис. 1. Схема вычислительной области (а) и форма профиля аксиальной скорости газовой фазы за период одиночного импульса (б). 1 – ось струи; 2 – внешняя граница импульсной газокпельной струи; 3 – выходное отверстие диаметром d ; 4 – непроницаемая стенка.

Газовая фаза

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = \frac{6J\Phi}{D}$$

$$\frac{D(\rho U_i)}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \langle u_i u_j \rangle \right) - \frac{6\Phi}{d} (U_i - U_{Li}) \left(\frac{1}{8} C_D \rho |U - U_L| + J \right)$$

$$\frac{D(\rho C_p T)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} - \rho C_p \langle u_j t \rangle \right) - \frac{6\rho\Phi}{d} [\alpha(T - T_L) + JL] + \rho D_T (C_{pV} - C_{pA}) \left(\frac{\partial K_V}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{D(\rho K_V)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D \frac{\partial K_V}{\partial x_i} - \rho \langle u_j k_V \rangle \right) + \frac{6J\Phi}{D}$$

$$\rho = P / (R_g T).$$

Дисперсная фаза

$$\frac{\partial(\Phi \rho_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi \rho_L U_{Lj})}{\partial x_j} = -\frac{6J\Phi}{D}$$

$$\frac{D(\rho_L \Phi U_{Li})}{Dt} + \frac{\partial(\rho_L \Phi \langle u_{Li} u_{Lj} \rangle)}{\partial x_j} = \Phi (U_i - U_{Li}) \frac{\rho_L}{\tau} + \Phi \rho_L g - \frac{1}{\tau} \frac{\partial(\rho_L D_{Lij} \Phi)}{\partial x_j}$$

$$\frac{D(\rho_L \Phi T_{Li})}{Dt} + \frac{\partial(\rho_L \Phi \langle \theta u_{Lj} \rangle)}{\partial x_j} = \Phi (T_i - T_{Li}) \frac{\rho_L}{\tau_\theta} - \frac{1}{\tau_\theta} \frac{\partial(\rho_L D_{Lij}^\theta \Phi)}{\partial x_j}.$$

Здесь ρ , μ – плотность и коэффициент динамической вязкости газа, t – время, U_i – компоненты осредненной скорости газовой фазы, x_i – проекции на оси координат, J – массовый поток пара с поверхности испаряющейся капли, d – диаметр капли, $\Phi = M_L \rho / \rho_L$ – объемная доля дисперсной фазы, M_L – массовая концентрация капель, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial(U_i)}{\partial x_i}$ – субстанциальная производная, $2k = \langle u_i u_i \rangle$ – турбулентная кинетическая энергия (ТКЭ), P – давление, C_p – теплоемкость парогазовой смеси при постоянном давлении, α – коэффициент теплоотдачи испаряющейся капли, L – удельная теплота парообразования, D_T – коэффициент турбулентной диффузии, K_V – массовая концентрация пара в бинарной парогазовой смеси, R_g – удельная газовая постоянная, T – температура $\tau = \rho_{L1} D_1^2 / (18\mu W)$ – время динамической релаксации частиц, записанное с учетом отклонения от закона обтекания Стокса, $W = 1 + 0.15 \text{Re}_L^{0.687}$, $\text{Re}_L = |\mathbf{U}_S - \mathbf{U}_L| D_1 / \nu$ – число Рейнольдса дисперсной фазы, построенное по межфазной скорости. Здесь \mathbf{U}_S и \mathbf{U}_L – вектора осредненной скорости газовой фазы в точке расположения капли и дисперсной фазы соответственно, g – ускорение силы тяжести, D_{Lij} , D_{Lij}^\ominus – тензоры турбулентной диффузии и турбулентного переноса тепла дисперсной фазы [38, 39]; $\tau_\Theta = C_{PL} d^2 / (12\lambda Y)$ – время тепловой релаксации капель и $Y = 1 + 0.3 \text{Re}_L^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$. Индексы: A – воздух, L – дисперсная фаза, T – турбулентный параметр, V – водяной пар.

Турбулентные тепловой и диффузионный потоки в газовой фазе определены согласно гипотезе Бусинеска

$$\langle u_j t \rangle = -\frac{\nu_T}{\text{Pr}_T} \frac{\partial T}{\partial u_j}, \quad \langle u_j k_V \rangle = -\frac{\nu_T}{\text{Sc}_T} \frac{\partial K_V}{\partial u_j},$$

где ν_T – коэффициент вихревой вязкости. Значения турбулентных чисел Прандтля и Шмидта в работе принималось равным $\text{Pr}_T = \text{Sc}_T = 0.85$. Аналогичные значения использовались в [27–29] для стационарной газочапельной затопленной струи.

В системе уравнений для дисперсной фазы принимается во внимание изменение амплитуды флуктуаций скорости и концентрации капель, как в аксиальном, так и радиальном направлениях в струе. Учитывается существенная неизотропия турбулентных флуктуаций скорости частиц. Поперечное перемещение капель вызывается конвекцией импульса, силой вязкого трения, силой турбофореза (турбулентной миграцией), обусловленной неоднородностью турбулентной энергии дисперсной фазы, а также турбулентной диффузией дисперсной фазы, связанным с градиентом их концентрации. В силовых факторах, оказывающих влияние на движение и дисперсию капель, не учитываются силы термофореза F_T , присоединенной массы F_{AM} , Магнуса F_M и Сэффмена F_L ввиду малости этих сил в сравнении с учитываемыми в данной работе силами аэродинамического сопротивления F_D , турбулентной миграции (турбофореза) F_{TM} , турбулентной диффузии F_{TD} и силы тяжести F_g – см. табл. 1.

Уравнения для расчета вторых моментов пульсаций скорости дисперсной фазы $\langle u'_{Li} u'_{Lj} \rangle$ приведены в [38, 39]. Вторые моменты флуктуаций скорости дисперсной примеси в продольном и поперечном направлениях учитывают вовлечение частиц в турбулентное движение несущей фазы в результате действия сил вязкости, конвективного и диффузионного переносов, а также увеличения интенсивности пульсационного движения дисперсной фазы в продольном направлении за счет порождения турбулентности из осредненного движения. Турбулентный поток теплоты в дисперсной фазе обусловлен участием частиц в флуктуациях скорости и температуры газа и переносом тепла в результате хаотического движения капель. Интенсивность пульсаций температуры частиц определяется теплообменом между сплошной средой и частицами, конвективным переносом, турбулентной диффузией теплоты, а также порождением флуктуации температуры в результате неизотермичности потока. Используется классическая модель испарения капли [40], базирующийся на так называемой “пленочной теории”. Ключевыми понятиями этой теории являются толщины тепловой и диффузионной “пленок”, выражения для которых были получены из требований, чтобы скорости молекулярного переноса за счет теплопроводности или диффузии через “пленки” были равны интенсивности конвективного потока теплоты или массы между поверхностью капли и внешним потоком. Считается, что температура капли по ее радиусу остается постоянной величиной, так как число Био $\text{Bi} = \alpha_L D_1 / \lambda_L \ll 1$ и число Фурье $\text{Fo} = \tau_{\text{eq}} / \tau_{\text{evap}} \ll 1$. Здесь τ_{eq} – период времени, когда существует внутренний градиент температуры внутри капли, τ_{evap} – время жизни капли (время полного испарения капли). В этом случае на поверхности капли выполняются условия насыщения.

Таблица 1. Соотношение силовых факторов, действующих на капли различного диаметра

D_1 , мкм	F_T/F_D	F_{AM}/F_D	F_M/F_D	F_L/F_D	F_{TM}/F_D	F_{TD}/F_D	Fg/F_D
5	0.0002	0.001	0.007	0.011	0.5	0.6	0.01
10	0.0008	0.0018	0.012	0.019	0.8	0.9	0.03
30	0.001	0.005	0.042	0.05	1	1.2	0.09

2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ И ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Методика численной реализации эйлера подхода подробно описана в [27–29]. Решение было получено с использованием метода конечных объемов на разнесенных сетках с использованием численного кода, разработанного авторами данной работы. Для конвективных слагаемых дифференциальных уравнений применялась процедура QUICK. Для диффузионных потоков были использованы центральные разности второго порядка точности. Коррекция поля давления осуществлялась по конечно-объемной согласованной процедуре SIMPLEC. Уравнение для коррекции поля давления в нестационарном двухфазном потоке построено для объемных долей всех компонентов потока, сумма которых всегда равна единице, используя подход [41], и записано с учетом процесса испарения капель жидкости. При проведении настоящих расчетов была использована схема второго порядка точности по времени.

Вычислительная область представляла собой цилиндр радиусом $R = 25d$ и протяженностью $X = 80d$. Была применена расчетная сетка, неравномерная как в аксиальном, так и в радиальном направлениях. Размер вычислительной области соответствует таковому из недавней работы [7]. Сгущение расчетных узлов сделано в окрестностях оси струи и выходного отверстия для выдува импульсной струи. В радиальном направлении использовано преобразование координат [42], так чтобы вычислительная плоскость оставалась прямоугольной. Все расчеты были проведены на основной сетке, содержащей 400×100 контрольных объемов (КО). Количество ячеек в выходном отверстии в радиальном направлении равнялось 20. Дополнительно были проведены расчеты на “грубой” (200×50 КО) и “мелкой” (600×150 КО) сетках. Отличия в результатах расчетов осредненных аксиальных скоростей и температур газа и капель, а также массовой концентрации дисперсной фазы для базовой и “мелкой” сетках не превысили 0.13%. Сопоставления были сделаны для нескольких моментов времени ($t' = 10, 100, 300, 1000$). Шаг по времени равнялся $\Delta t = 10^{-5}$ с. Число Куранта не превышало 1. Осевая симметрия в двухфазных струях в силу влияния гравитации может нарушаться. Однако для малых размеров капель $D_1 = 30$ мкм, при которых были проведены расчеты этот эффект невелик. При этом концентрация капель мала $M_{L1} = 1\%$ и их влияние на несущую фазу будет небольшим.

В начальный момент времени ($t = 0$) среда покоится и $U(x, r, 0) = V(x, r, 0) = 0$. В период цикла ($0 < t \leq t_0$) газокпельный поток вытекает из отверстия диаметром d в окружающее неподвижное пространство со скоростью $U(0, r \leq R, t) = U(t)$ и $V(0, r \leq R, t) = 0.001U(t)$. Характер изменения аксиальной скорости газовой фазы во времени за период подачи одиночного импульса имеет вид аналогичный измерениям [15], что соответствует типичному распределению в процессе кашля. Аксиальные и радиальные осредненные скорости фаз в газокпельном потоке на срезе отверстия были постоянными по его радиусу во все время цикла выдува. Также во входном сечении распределение дисперсной фазы задавалось исходя из предположения о равномерном ее распределении по сечению отверстия. Капли в поток воздуха добавлялись во входном сечении, и их начальная средняя скорость осредненная за период выдува была постоянной $U_{Lm1} = 0.8U_{m1}$. На оси струи задаются условия симметрии для обеих фаз. На внешней границе вычислительной области для газовой фазы задаются условия равенства нулю производных параметров в аксиальном направлении.

Граничные условия на внешней границе расчетной области для скорости, температуры дисперсной фазы и интенсивности их пульсаций соответствуют условия “поглощающей поверхности” [39], когда капля после контакта с внешней границей не возвращается в поток и мгновенно “исчезают”. Соответственно происходит перерасчет их количества при проведении расчетов для следующего расчетного сечения. В выходном сечении заданы условия равенства нулю производных всех искомых параметров в продольном направлении.

Таблица 2. Параметры дисперсной фазы в начальном сечении при $Re = 7300$, $Re_\tau = 261$, $\eta_K = 0.2$ мм и $\tau_K = 3.5$ мс

D_1 , мкм	τ , мс	τ_f , мс	Stk	Stk _K	d/η_{Kmin}	τ^+	Re _L
5	0.07		0.04	0.02	-	0.8	0.01
10	0.3	1.7	0.2	0.08	31.5	3.3	0.07
30	2.6		1.5	0.7	63.6	28.7	0.2

Ранее авторами данной работы выполнено исследование импульсных импактных газочапельных струй [28, 29]. В этих работах проведено сравнение с имеющимися в литературе экспериментальными данными других авторов [43, 44] по теплообмену в импульсной импактной газочапельной струе с поверхностью преграды. Отметим, что газочапельные нестационарные импульсные импактные струи являются существенно более сложным случаем в сравнении с затопленными струйными течениями за счет торможения потока и заметного искривления линий тока вблизи поверхности преграды. Получено удовлетворительное количественное согласие наших расчетов с данными измерений и имеющееся отличие не превышало 20%).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Все численные расчеты выполнены для смеси воздуха с каплями воды при вдвух импульсной двухфазной струи в неподвижное затопленное окружающее пространство с атмосферным давлением, температурой $T_{env} = 298$ К сухого воздуха с относительной влажностью $\phi = 0\%$ (см. рис. 1а). Эквивалентный диаметр выходного отверстия составлял $d = 2R = 20$ мм. Среднерасходная скорость парогазового потока осредненная за цикл на входе в расчетную область $U_{m1} = 4\text{--}20$ м/с, а его температура $T_1 = 305$ К. Форма профиля скорости газового потока за цикл имеет вид, экспериментально определенный в [15–17] – см. рис. 1 б. Число Рейнольдса для газовой фазы, построенное по среднерасходной, осредненной по времени цикла, скорости $Re = U_{m1}d/\nu = 7300$ и параметр $P = (U_{m1}t_0/d)^{1/3} = 5.6$ и $P_1 = U_{m1}t_0/d = 176$ при $U_{m1} = 6$ м/с. Время истечения одиночного импульса было выбрано $t_0 = 0.6$ с в соответствии с данными [9–12]. Влияние подъемных сил за счет разности плотностей сред пренебрежимо мало и не учитывается в данной работе. Во входном сечении сопла капли были монодисперсными, далее по мере движения их диаметр менялся как вдоль оси струи, так и по ее радиусу. Численные расчеты были выполнены для капель воды с начальным диаметром $D_1 = 30$ мкм. Параметры дисперсной фазы показаны в табл. 2. В реальности капли, выделяющиеся в процессе кашля и (или) чихания, имеют сложный химический состав, включают неиспаряющиеся компоненты и могут проявлять свойства неньютоновской жидкости [9–12]. В данной работе предполагалось, что капля состоит только из воды и является ньютоновской жидкостью. Массовые концентрации капель воды равны $M_{L1} = 0.01$, а водяного пара $M_{V1} = 0.003$.

Выражение для расчета текущего диаметра испаряющейся капли в рассматриваемом расчетном контрольном объеме имеет вид:

$$D_{i,j}^3 = D_{i-1,j}^2 \left(D_{i-1,j} - J \frac{6\Delta x}{\rho_L U_{m1 i,j}} \right),$$

где J – поток массы пара на поверхности испаряющейся капли, Δx – шаг в соответствующем направлении и ρ_L – плотность материала капель.

Число Стокса осредненного движения $Stk = \tau/\tau_f$ – параметр инерционности, характеризующий поведение частиц в потоке. Оно представляет собой отношение времени динамической релаксации τ к характерному турбулентному временному макромасштабу τ_f , где $\tau_f = R/U_{m1} = 1.7$ мс – турбулентный временной макромасштаб [43]. Колмогоровские геометрический η_K и временной τ_K масштабы равнялись: $\eta_K = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} = 0.2$ мм и $\tau_K = \eta_K^2/\nu = 3.5$ мс соответственно. Число Стокса $Stk_K = \tau/\tau_K$ – число Стокса в пульсационном движении. Отношение начального диаметра капли к минимальному колмогоровскому масштабу турбулентности в выходном отверстии [45]: $d/\eta = \left(\frac{18 \cdot Stk \cdot \rho}{\rho_L \cdot Re_L} \right)^{0.5} \cdot \frac{Re_\tau}{\eta_W^+}$, где $Re_\tau = u_* R/\nu = 261$ – число Рейнольдса, построенное по скорости трения u_* и $\eta_W^+ \approx 1.6$ [45]. При этом скорость трения

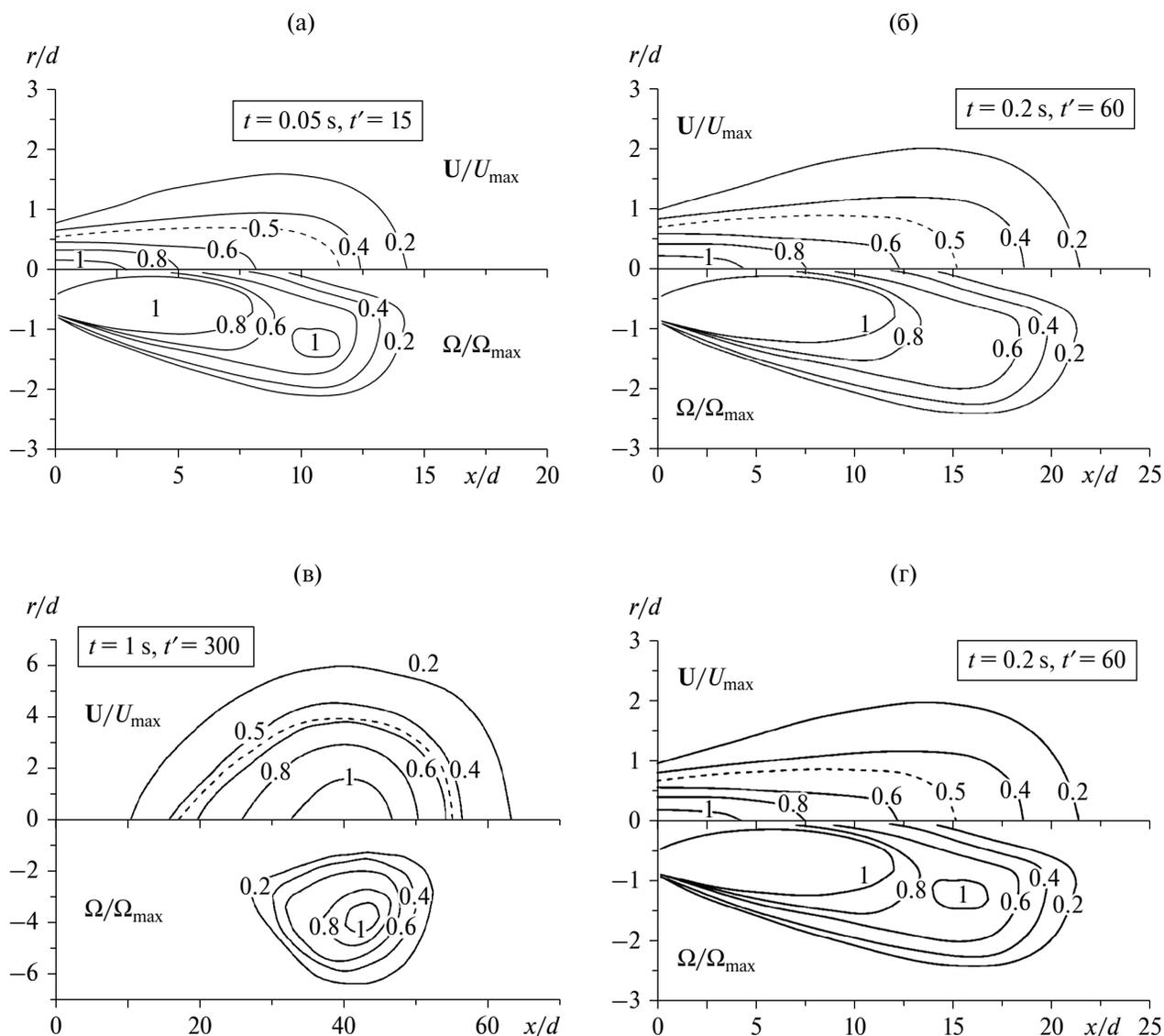


Рис. 2. Поля вектора полной скорости U и завихренности Ω газовой фазы в различные моменты времени. (а–г) – $(t, t') = (0.05 \text{ с}, 15)$; $(0.2 \text{ с}, 60)$; $(0.6 \text{ с}, 180)$; $(1 \text{ с}, 300)$. Значения параметров: $Re = U_{m1}d/\nu_1 = 7300$, $d = 0.02 \text{ м}$, $U_{m1} = 6 \text{ м/с}$, $T_1 = 305 \text{ К}$, $T_{env} = 298 \text{ К}$, $D_1 = 30 \text{ мкм}$, $g_{L1} = 5.2 \times 10^{-8} \text{ кг/с}$, $g_1 = 2 \times 10^{-3} \text{ кг/с}$, $M_{L1} = 1\%$, $M_{v1} = 0.003\%$, $\varphi = 0\%$, $t_0 = 0.6 \text{ с}$, $P = (U_{m1}t_0/d)^{1/3} = 5.6$ и $P_1 = 176$.

считается по параметрам однофазного течения в выходном отверстии. Безразмерное время релаксации: $\tau^+ = \tau u_*^2/\nu$.

Поля вектора мгновенной полной скорости U/U_{max} и завихренности Ω/Ω_{max} газовой фазы в различные моменты времени от начала истечения импульсной струи показаны на рис. 2. Здесь $\Omega = \omega_z d/U_{m1}$ – модуль завихренности газовой фазы, Ω_{max} – максимальная по модулю завихренность в соответствующий момент времени. Завихренность при осесимметричном течении определялась по соотношению: $\omega_z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$. Пунктирная линия на рис. 2 соответствует контуру половинной от максимальной скорости $U = 0.5U_{max}$.

В целом процесс распространения нестационарной импульсной газочапельной струи в период истечения одиночного импульса для безразмерного времени $t' = tU_{m1}/d < 180$ ($t < 0.6 \text{ с}$) соответствует картине истечения однофазных нестационарных струй [1–3, 46] и содержит ярко выраженные области ядра

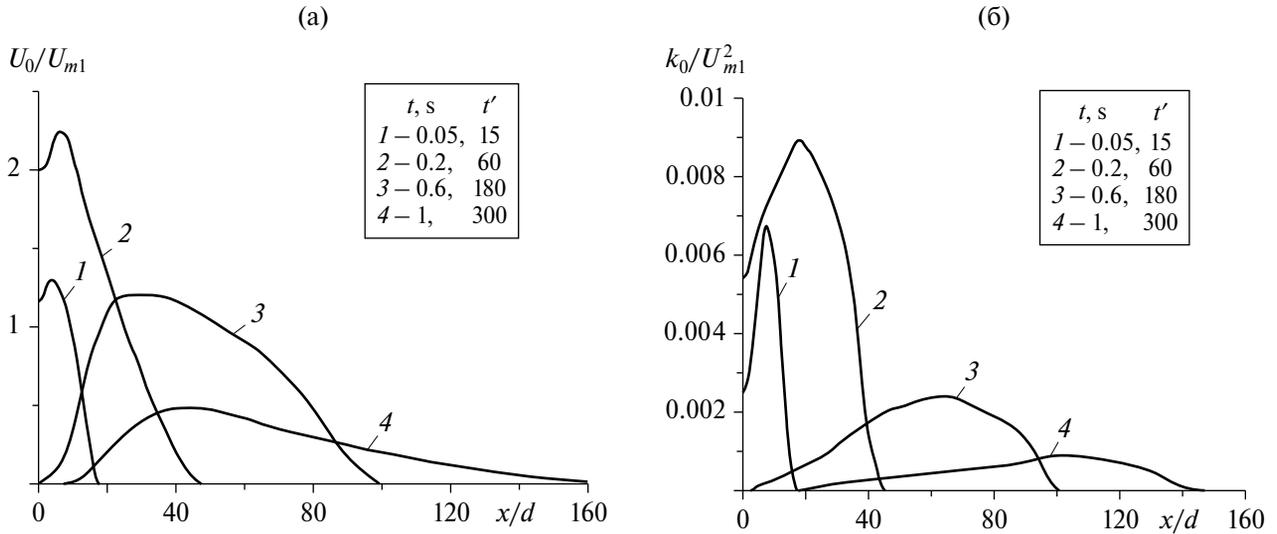


Рис. 3. Распределения аксиальной компоненты скорости U_0 (а) и турбулентной кинетической энергии k_0 (б) газовой фазы вдоль оси струи в различные моменты времени.

импульсной струи и слой смешения с затопленным пространством. В зоне смешения видны две области повышенной завихренности: вытянутая область (слой смешения) и область в зоне торможения струи (см. рис. 2а и 2б). По мере распространения струи, область максимальной завихренности, произведенной одиночным импульсом, сдвигается от оси струи ($t > 0.6$ с, $t' > 180$) (см. рис. 2в). Так, например, при $t = 0.2$ с максимум расположен при $r/d \approx 0.75$, а для $t = 1$ с наибольший уровень завихренности расположен при $r/d \approx 4$. К моменту времени $t = 1$ с ($t' = 300$) вихревое облако начинает приобретать форму вихревого кольца (см. рис. 2г). Эти выводы качественно согласуются с результатами численных расчетов для однофазной импульсной струи [7].

Распределения аксиальной компоненты скорости U_0 (а) и турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) k_0 (б) газовой фазы на оси струи в различные моменты времени приведены на рис. 3. Величина ТКЭ для осесимметричного течения определяется по формуле: $2k = \langle u_i u_i \rangle = u'^2 + v'^2 + w'^2 \approx u'^2 + 2v'^2$. Первоначально аксиальная компонента скорости потока и уровень энергии турбулентности возрастает, что связано с ростом скорости выдува струи – рис. 3. Наибольший уровень продольной скорости и турбулентности получен в период действия одиночного импульса при $t = 0.2$ с. Далее наблюдается монотонное уменьшение скорости и уровня кинетической энергии турбулентности.

Эволюция во времени полуширины струи, рассчитанной по половинному значению продольной скорости газовой фазы $r_{0.5}^{\max} - 1$, величины максимальной продольной компоненты скорости $U_{\max} - 2$ и наибольшего значения турбулентной кинетической энергии $k_{\max} - 3$ несущей фазы на оси струи демонстрируется на рис. 4. Стрелкой на рисунке показан момент времени окончания периода выдува одиночной импульсной струи. Из рисунка видно, что наблюдается значительное расширение струи – 1 во времени. При этом основное расширение струи происходит уже после завершения процесса ее истечения $t' = 180$ ($t > 0.6$ с). Величина аксиальной компоненты скорости – 2 первоначально возрастает и достигает своего максимума при $t' \approx 25$ ($t \approx 0.1$ с) и эта величина достигает $U_{\max}/U_{m1} \approx 3$. Далее, по завершению процесса выдува ($t' > 180$, $t > 0.6$ с) происходит уменьшение продольной скорости газовой фазы, что обусловлено процессами диссипации вихревого облака в окружающем пространстве. Наибольший уровень ТКЭ – 3 получен во время действия импульса, и он превышает соответствующую величину в начальный момент времени более чем в 3 раза. Далее, как и для максимальной продольной скорости наблюдается монотонное уменьшение турбулентности во времени.

На рис. 5 представлено влияние параметра $P = (U_{m1} t_0 / d)^{1/3}$ на глубину проникновения двухфазной импульсной струи в окружающее пространство. При расчете параметра P переменной величиной была только среднерасходная скорость потока в выходном отверстии $U_{m1} = 4-20$ м/с, что соответствовало диапазону его изменения $P = 4.9-8.4$. При этом время действия импульса t_0 и диаметр отверстия d были

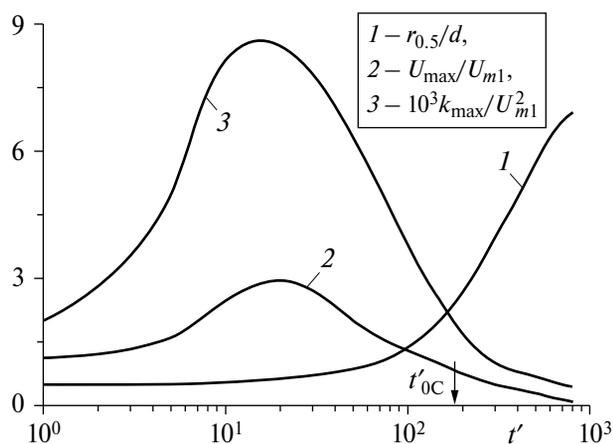


Рис. 4. Изменение полуширины струи $r_{0.5}$ – 1, максимальных значений продольной компоненты скорости U_{\max} – 2 и турбулентной кинетической энергии k_{\max} – 3 несущей фазы на оси струи во времени t' .

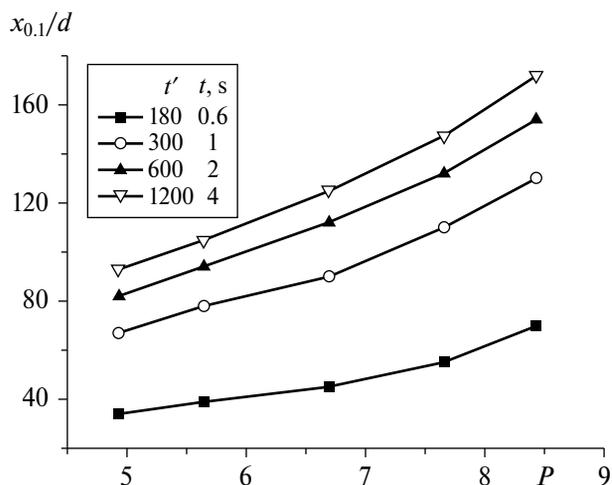


Рис. 5. Влияние параметра P на глубину проникновения двухфазной импульсной струи при $d = 0.02$ м, $D_1 = 30$ мкм, $U_{m1} = 4-20$ м/с, $M_{L1} = 1\%$, $M_{V1} = 0.003\%$, $\varphi = 0\%$, $t_0 = 0.6$ с.

неизменными. Здесь $x_{0.1}$ – глубина проникновения газодисперсной струи, рассчитанная по продольной координате, где величина аксиальной скорости газа на оси струи равна $U_0 = 0.1U_{m1}$. Исследованный режим по скоростям истечения импульсной струи соответствует периоду одиночного кашля [15]. Отметим, что по данным [7] при $P = 1.8-8$ формируется вихревое облако, а при $P > 8$ – нестационарная импульсная струя. Одиночное вихревое облако существует довольно продолжительное время (минимум $t \geq 4$ с) и за это время оно успевает проникнуть в окружающем затопленном пространстве на дистанцию $x_{0.1}/d \approx 160$ ($x \approx 3.2$ м).

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ДАННЫМИ ДРУГИХ РАБОТ ДЛЯ ОДНОФАЗНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СТРУИ

Изменение во времени координаты положения максимума продольной скорости x_c однофазной импульсной струи приведено на рис. 6. Измерения [5] были проведены для исследования динамики одиночного импульса водяной нестационарной струи в затопленное неподвижное окружающее водное пространство. Диаметры выходного отверстия трубы, из которой выдувался поток, $2R = 3.2$ и 6.4 мм, а его температура $T_1 = 298$ К. Число Рейнольдса потока, определенное по диаметру труб, $Re = (0.3 \text{ и } 1.2) \times 10^4$. Расчет проведен для постоянной величины скорости во времени жидкости за период действия одиночного импульса. Точки – измерения [5], линии – расчеты: линия 1 – URANS расчет [7] и линия 2 – расчет настоящей работы. Пунктирная линия на рис. 6а расчет при условии сохранения импульса струи, поэтому, пройденное вихревым облаком расстояние будет пропорциональным $x \sim t^{1/4}$ [7]. Как видно из рис 6 а, имеется качественное согласие с данными измерений [5] для времени $t' > 300$ и количественное согласие с расчетами [7] для всего временного интервала при $P = 4$. Для случая $P = 5.8$ расчеты качественно согласуются с данными [5] для времени $t' > 10$.

Сопоставление с данными недавних PIV-измерений [47] по развитию стартующей затопленной струи представлено на рис. 6б. Опыты проводились в водной среде с одинаковыми температурами струи и окружающего пространства $T = 293$ К. В расчетах профиль аксиальной скорости во входном сечении был задан на основании данных измерений [47]. Струя выходит на стационарный режим истечения при $t \approx 7$ с. Для сравнения приведены данные экспериментов и наших численных расчетов для стационарной струи (жирная линия). Отличие с данными измерений не превышает 10%. Исключение составляет наличие в данных измерениях зоны рециркуляции течения во внешней части струи, которая не предсказывается расчетными исследованиями. Значение скорости возвратного течения в этой области составляет порядка 30% от максимальной скорости в стационарной затопленной струе. Причины такого расхождения эксперимента и расчета требует специального рассмотрения.

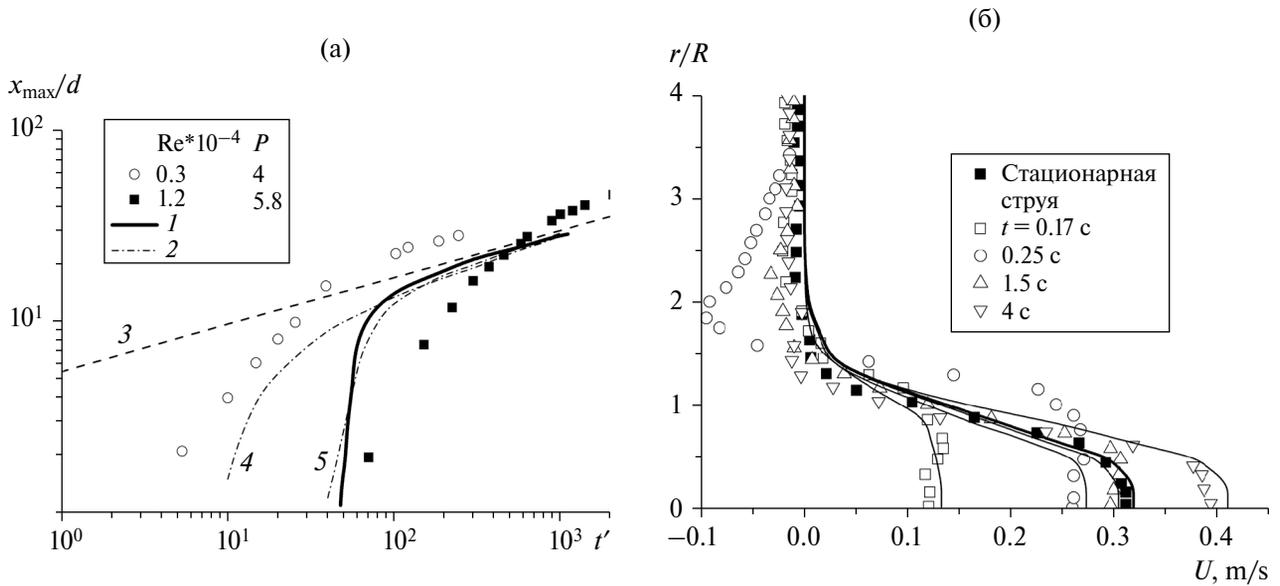


Рис. 6. Изменение во времени координаты положения максимума продольной скорости x_{\max} для однофазной импульсной струи (а) и эволюция во времени радиальных профилей аксиальной скорости развивающейся затопленной струи (б). (а): 1 – URANS расчет [7]; 2 – результаты настоящего расчета; 3 – расчет [7], $x \sim t^{1/4}$; 4, 5 – $(Re, P) = (3000, 4), (12000, 5.8)$ при $P_1 = 195$ (измерения [5]). (б): Точки – измерения [47]; закрытые и открытые символы – стационарный и импульсный струи соответственно; линии – расчеты авторов настоящей работы, $Re = 4900$, $U_{\max} = 0.32 \text{ м/с}$, $U_{m1} = 0.19 \text{ м/с}$, $d = 26 \text{ мм}$, $x/d = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты численного исследования формирования и движения вихревого облака при выдуве одиночной импульсной турбулентной газок капельной струи при условиях близких к моделированию процесса кашля. Исследование выполнено при вариации основных параметров двухфазного потока в следующем диапазоне: числа Рейнольдса $Re = (0.5-2.7) \times 10^4$ (скорость газовой фазы $U_{m1} = 4-20 \text{ м/с}$), исходный диаметр капель воды $D_1 = 30 \text{ мкм}$ и их начальная массовая концентрация $M_{L1} = 1\%$.

В целом, процесс распространения нестационарной импульсной газок капельной струи в период истечения одиночного импульса соответствует таковому для однофазного потока и содержит ярко выраженные области ядра импульсной струи и слоя смешения с неподвижным затопленным пространством. Основное расширение струи получено уже после завершения процесса ее истечения из сопла. При этом двухфазная импульсная струя становится более узкой и дальнобойной по сравнению с однофазным течением. Максимальная продольная скорость в вихревом облаке достигается в период выдува струи из сопла, и она может превышать скорость истечения более чем в три раза. После этого, за счет процесса диссипации происходит торможение газок капельного облака. Подобным образом ведет себя и максимальное значение турбулентной кинетической энергии как в начальный период движения облака на этапе выдува струи, так и при последующем его движении в затопленном пространстве.

Вихревое облако, образованное одиночным импульсом, которое на конечном этапе движения трансформируется в вихревое кольцо, существует довольно продолжительное время (минимум $t \geq 4 \text{ с}$) и за это время успевает проникнуть в окружающем затопленном пространстве на расстояния более 3 м. При этом, в начальный период движения внутри облака формируются две зоны повышенной завихренности: в слое смешения в области торможения импульсной двухфазной струи.

Выполнено сравнение результатов расчетов и измерений дальнобойности импульсных струй при вариации параметра P , характеризующего линейный масштаб, выдуваемого облака. Отмечено количественное соответствие с имеющимися опытными [5] и расчетными [7] данными. В то же время важно отметить тенденцию более быстрого проникновения газок капельной струи по сравнению с однофазным режимом, что требует более глубокого анализа причин подобного эффекта. Необходимо подчеркнуть и качественное согласие численного расчета и эксперимента [47] по профилям продольной компоненты

скорости в импульсном облаке за исключением области возвратных течений, что также диктует необходимость проведения более детальных исследований.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Результаты численных расчетов для импульсной газочапельной струи получены в рамках Государственного задания ИТ СО РАН (121031800217-8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахметов Д.Г.* Вихревые кольца. Новосибирск: ГЕО, 2007. 152 с.
2. *Maxworthy T.* Turbulent vortex rings // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64. № 2. P. 227–239.
3. *Glezer A., Coles D.* An experimental study of a turbulent vortex ring // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 211. P. 243–283.
4. *Тарасов В.Ф., Якушев В.И.* Экспериментальные исследования переноса примеси турбулентным вихревым кольцом // ПМТФ. 1974. № 1. С. 130–136.
5. *Sangras R., Kwon O.C., Faeth G.M.* Self-preserving properties of unsteady round nonbuoyant turbulent starting jets and puffs in still fluids // *ASME J. Heat Transfer.* 2002. V. 124 (3). P. 460–469.
6. *Никулин В.В.* Массообмен между атмосферой турбулентного вихревого кольца и окружающей средой // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 33–40.
7. *Засимова М.А., Рус В.В., Иванов Н.Г.* Численное моделирование формирования и движения турбулентных вихревых облаков // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 5. С. 57–69.
8. *Gratton J., Tovey E., McLaws M.L., Rawlinson W.D.* The role of particle size in aerosolised pathogen transmission: A review // *J. Infection.* 2011. V. 62(1). P. 1–13.
9. *Bu Y., Ooka R., Kikumoto H., Oh W.* Recent research on expiratory particles in respiratory viral infection and control strategies: A review // *Sustainable Cities Soc.* 2021. V. 73. P. 1–16.
10. *Bourouiba L.* The fluid dynamics of disease transmission // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2021. V. 53. P. 473–508.
11. *Pourfattah F., Wang L.P., Deng W.W., Ma Y.F., Hu L.Q., Yang B.* Challenges in simulating and modeling the airborne virus transmission: A state-of-the-art review // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. Paper 101302.
12. *Ghaem-Maghami E., Johari H.* Velocity field of isolated turbulent puffs // *Phys. Fluids.* 2010. V. 22. Paper 115105.
13. *Dbouk T., Drikakis D.* On coughing and airborne droplet transmission to humans // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. Paper 053310.
14. *Gharib M., Rambod E., Shariff K.* A universal time scale for vortex ring formation // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 360. P. 121–140.
15. *Gupta J.K., Lin C.H., Chen Q.* Flow dynamics and characterization of a cough // *Indoor Air.* 2009. V. 19(6). P. 517–525.
16. *Dudalski N., Mohamed A., Mubareka S., Bi R., Zhang C., Savory E.* Experimental investigation of far-field human cough airflows from healthy and influenza-infected subjects // *Indoor Air.* 2020. V. 30. P. 966–977.
17. *Chao C.Y.H., Wan M.P., Morawska L., Johnson G.R., Ristovski Z.D., Hargreaves M., Mengersen K., Corbett S., Li Y., Xie X., Katoshevski D.* Characterization of expiration air jets and droplet size distributions immediately at the mouth opening // *J. Aerosol Sci.* 2009. V. 40. P. 122–133.
18. *Arumuru V., Pasa J., Samantaray S.S.* Experimental visualization of sneezing and efficacy of face masks and shields // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. Paper 115129.
19. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering application // *AIAA J.* 1994. V. 32. P. 1598–1605.
20. *Wei J., Li Y.* Enhanced spread of expiratory droplets by turbulence in a cough jet // *Build. Environ.* 2015. V. 93. P. 86–96.
21. *Gosman A.D., Ioannides E.* Aspects of computer simulation of liquid-fuelled combustors // *J. Energy.* 1983. V.7. P. 482–490.
22. *Li X.D., Shang Y.D., Yan Y.H., Yang L., Tu J.Y.* Modelling of evaporation of cough droplets in inhomogeneous humidity fields using the multi-component Eulerian-Lagrangian approach // *Build. Environ.* 2018. V. 128. P. 68–76.
23. *Fabregat A., Gisbert F., Vernet A., Ferre J.A., Mittal K., Dutta S., Pallares J.* Direct numerical simulation of turbulent dispersion of evaporative aerosol clouds produced by an intense expiratory event // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. Paper 033329.

24. *Papoutsakis A., Danaila I., Luddens F., Gavaises M.* Droplet nuclei caustic formations in exhaled vortex rings // *Sci. Rep.* 2022. V. 12. Paper 3892–3908.
25. *Calmet H., Inthavong K., Both A., Surapaneni A., Mira D., Egukitza B., Houzeaux G.* Large eddy simulation of cough jet dynamics, droplet transport, and inhalability over a ten minute exposure // *Phys. Fluids.* 2021. V. 33. Paper 125122.
26. *Shima N.* Low-Reynolds-number second-moment closure without wall-reflection redistribution terms // *Int. J. Heat Fluid Flow* 1998. V. 19. P. 549–555.
27. *Пахомов М.А., Терехов В.И.* Численное исследование турбулентной структуры полидисперсной двухфазной струи с испаряющимися каплями // *Мат. моделирование.* 2016. Т. 28. № 11. С. 64–78.
28. *Пахомов М.А., Терехов В.И.* Структура течения и турбулентный тепломассоперенос в лобовой точке импульсной газодисперсной струи // *ТВТ.* 2014. Т. 52. № 4. С. 588–596.
29. *Pakhomov M.A., Terekhov V.I.* RANS modeling of flow structure and turbulent heat transfer in pulsed gas-droplet mist jet impingement // *Int. J. Thermal Sci.* 2016. V. 100. P. 284–297.
30. *Chan C.K., Zhang H.Q., Lau K.S.* An improved stochastic separated flow model for turbulent two-phase flow // *Comp. Mech.* 2000. V. 24. P. 491–502.
31. *Osiptsov A.N.* Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // *Astrophys. Space Sci.* 2000. V. 274. P. 377–386.
32. *Osiptsov A.N.* Development of the full Lagrangian approach for modeling dilute dispersed media flows (a Review) // *Fluid Dynamics.* 2024. V. 59, № 1. P. 1–48.
33. *Лебедева Н.А., Осипцов А.Н.* Течения вблизи критических точек при несимметричном столкновении вязких дисперсных потоков // *Изв. РАН. МЖГ.* 2007. № 5. С. 85–97.
34. *Rybdylova O., Osiptsov A.N., Sazhin S.S., Begg S., Heikal M.* A combined viscous-vortex, thermalblob and Lagrangian method for non-isothermal, two-phase flow modelling // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2016. V. 58. P. 93–102.
35. *Годенко Е.А., Измоденов В.В.* Сравнение Эйлера и Лагранжева подходов для нахождения особенностей распределения межзвездной пыли в гелиосфере в рамках модели холодного газа // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 2. С. 138–150.
36. *Деревич И.В., Зайчик Л.И.* Осаждение частиц из турбулентного потока // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 5. С. 96–104.
37. *Beishuizen N.A., Naud B., Roekaerts D.* Evaluation of a modified Reynolds stress model for turbulent dispersed two-phase flows including two-way coupling // *Flow, Turbulence, Combust.* 2007. V. 79. P. 321–341.
38. *Zaichik L.I.* A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. P. 1521–1534.
39. *Derevich I.V.* Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2000. V. 43. P. 3709–3723.
40. *Abramzon B., Sirignano W.A.* Droplet vaporization model for spray combustion calculations // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1989. V. 32(9). P. 1605–1618.
41. *Moukalled F., Darwish M.* Pressure based algorithms for multi-fluid flow at all speeds-part I: Mass conservation formulation // *Numerical Heat Transfer, B.* 2004. V. 45. P. 495–522.
42. *Крашенинников С.Ю.* К расчету осесимметричных закрученных и незакрученных турбулентных струй // *Изв. СССР. МЖГ.* 1972. № 3. С. 71–80.
43. *Zhang Z., Jiang P.-X., Hu Y.-T., Li J.* Experimental investigation of continual and intermittent-spray cooling // *Exp. Heat Transfer.* 2013. V. 26. P. 453–469.
44. *Назаров А.Д., Серов А.Ф., Терехов В.И.* Влияние спутного газового потока в импульсном аэрозоле на процесс испарительного охлаждения // *ТВТ.* 2014. Т. 52. № 4. С. 605–608.
45. *Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M.* Anomalous memory effects on transport of inertial particles in turbulent jets // *Phys. Fluids.* 2010. V. 22. Paper 051705.
46. *Mazzino A., Rosti M.E.* Unraveling the secrets of turbulence in a fluid puff // *Phys. Rev. Lett.* 2021. V. 127. № 9. P. 1–6.
47. *Wang X.K., Su B.Y., Li Y.L., Wang C.* Vortex formation and evolution process in an impulsively starting jet from long pipe // *Ocean Eng.* 2019. V. 176. P. 134–143.
48. *Ferrand V., Bazile R., Boree J.* Measurements of concentration per size class in a dense polydispersed jet using planar laser induced fluorescence and phase Doppler techniques // *Exp. Fluids.* 2001. V. 31. № 6. P. 597–607.
49. *Chen Y.-C., Starnner S.H., Masri A.R.* A detailed experimental investigation of well-defined, turbulent evaporating spray jets of acetone // *Int. J. Multiphase Flow.* 2006. V. 32. № 4. P. 389–412.

Distinctive Features of Propagation of a Turbulent Pulsed Gas-Droplet Eddy Cloud

M. A. Pakhomov * and V. P. Terekhov **

Kutateladze Institute of Thermophysics, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, Novosibirsk, 630090 Russia

**e-mail: pma41976@yandex.ru*

*** e-mail: terekhov@itp.nsc.ru*

We present the results of the numerical modeling of the formation and motion of a blown solitary pulsed turbulent gas-droplet jet under the conditions approximately corresponding to human cough. The calculations are performed for the pulse duration $t = 0.6$ s and the greatest velocity of the gas phase of 20 m/s at the mass content of droplets $M_{L1} = 1\%$. The drop phase in the exit section is monodisperse, while the initial dimension of particles in the calculations varied in the range $D_1 = 5\text{--}30$ μm . Two zones of elevated vorticity are formed within the cloud in the initial period of motion. They are situated in the mixing layer and in the region of deceleration of two-phase pulsed jet. The greatest levels of the longitudinal velocity and the kinetic energy of turbulence are attained in the interval of pulse blow-off. At the subsequent moments of time the turbulence velocity and level monotonically decrease. The vortex cloud produced by the solitary pulse exists for a fairly long time ($t \approx 4$ s) and has a time to penetrate into the surrounding space at a distance greater than 3 m.

Keywords: pulsed gas-droplet jet, vortex cloud, numerical modeling.

УДК 532.5.013

КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛЛОИДНОЙ СУСПЕНЗИИ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ

© 2024 г. И. Н. Черепанов*, Б. Л. Смородин**

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

**e-mail: che-email@yandex.ru*

***e-mail: bsmorodin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 27.02.2024 г.

После доработки 25.05.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Проведено численное моделирование конвекции коллоидной бинарной смеси в ячейке Хеле-Шоу под влиянием вертикальных вибраций конечной амплитуды. Найдена граница конвективной неустойчивости в модулированном поле тяжести. Построены бифуркационные диаграммы и проанализированы распределения концентрации наночастиц, соответствующие различным решениям. Изучены также термовибрационные конвективные течения в случае положительной термодиффузии наночастиц и их гравитационной стратификации. Показано, что вибрации в зависимости от частоты могут как увеличивать интенсивность конвективного течения, так и ослаблять его.

Ключевые слова: коллоидная суспензия, вибрации, термодиффузия, ячейка Хеле-Шоу.

DOI: 10.31857/S1024708424040057, **EDN:** OYQGLS

В последние десятилетия поведение коллоидных суспензий является объектом активного изучения и значительных достижений [1], имеющих приложения в системах управления, теплорегуляции, производстве энергии, технологии отображения информации и т.д. Потенциальными областями применения этих систем являются защита окружающей среды, производство современных материалов и пищевых продуктов.

Размер наночастиц в коллоидных системах намного больше размеров молекул, что расширяет спектр действия механизмов переноса примеси, изменяет пороги неустойчивости и усложняет характер течения коллоидных суспензий. К процессам диффузии и термодиффузии [2] в этих средах может добавиться магнеторефракция [3] или гравитационное оседание наночастиц [4, 5], изменяющие поле концентрации примеси и, как следствие, поле сил, действующих на среду. Влияние разнообразных механизмов: инерции, диффузии, термофореза, эффекта Магнуса, дренажа жидкости и гравитационной седиментации наночастиц, — на транспорт наночастиц в жидкости-носителе проанализировано в [6]. Приведенные в работе оценки, показывают, что для описания переноса тепла в коллоидных суспензиях необходимо использовать классическое уравнение теплопроводности, применяемое в случае молекулярных бинарных смесей. В [7] представлен анализ неустойчивости равновесного состояния коллоидной суспензии под действием внешних возбуждающих полей. Рассматривается вклад различных механизмов неустойчивости, таких как, как деформационный переход коллоидного монослоя, образование дорожек и полос в бинарных смесях, классический механизм Рэлея–Тейлора и кластеризация в стержнеобразные системы.

Подход, основанный на использовании приближения Хеле–Шоу [8, 9], широко применяется в настоящее время для исследования различных явлений в физике вещества, материаловедении, росте кристаллов, биологии и т.д. Ячейка Хеле-Шоу, состоящая из двух параллельных плоских пластин, разделенных узким зазором, признана доступной экспериментальной и теоретической моделью для изучения плоского конвективного течения однородной жидкости [10–15], молекулярных бинарных смесей [16] и коллоидных суспензий [17]. Сравнение экспериментальных данных и результатов численного моделирования показывает хорошее совпадение при изучении нелинейных конвективных течений в ячейке Хеле-Шоу как для однородных жидкостей [10–12, 14–15], так для молекулярной бинарной смеси [16].

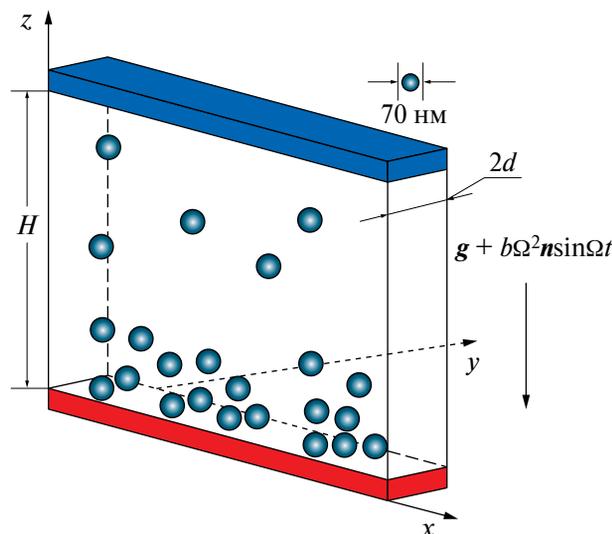


Рис. 1. Геометрия задачи.

Для управления течениями часто используются переменные внешние поля: электромагнитные [18–19] или вибрационные [16, 20–21]. В работе [20] с помощью метода конечных разностей смоделированы конвективные течения в ячейке Хеле–Шоу, под действием продольных высокочастотных вибраций и обнаружено, что все осредненные течения вибрационной конвекции возникают в результате прямой бифуркации. Влияние высокочастотных вибраций на установившиеся конвективные колебания молекулярной бинарной смеси при положительной термодиффузии примеси изучено в [16]. Показано, что вертикальные вибрации слабо влияют на форму (амплитуду и частоту) этих колебаний.

Целью настоящей статьи является изучение неустойчивости и анализ нелинейных конвективных течений в заполненной коллоидной суспензией нагреваемой снизу вертикальной ячейке Хеле–Шоу под влиянием вибрации произвольной частоты (модуляции гравитационного поля).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим влияние вертикальных вибраций с амплитудой b и частотой Ω на конвекцию коллоидной суспензии в ячейке Хеле–Шоу, находящейся в поле тяжести g . Толщина ячейки – $2d$, длина – $L = 40d$, высота – $H = 20d$. Начало декартовой системы координат расположим в углу нижней узкой грани (рис. 1), ось x направим вдоль длинной стороны этой грани, ось y – перпендикулярно ей, а ось z – вертикально вверх. На теплопроводных горизонтальных гранях ячейки фиксирована разность температур $T(z = 0) - T(z = H) = \Theta$, что задает величину вертикального градиента температуры $A = \Theta/H$. Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу. Считаем, что границы ячейки непроницаемы, поэтому поток вещества на них обращается в ноль.

При малых отклонениях температуры T и массовой концентрации тяжелой примеси (наночастиц) C от некоторых средних значений \bar{T} , \bar{C} уравнение состояния коллоидной суспензии аппроксимируется линейной зависимостью:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \alpha(T - \bar{T}) + \beta(\bar{C} - C) \right),$$

где α – температурный, а β – концентрационный коэффициенты расширения ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Используем в качестве масштабов длины – d , времени – $-d^2/\chi$, скорости – χ/d , температуры – θ , концентрации – $\alpha\theta/\beta$, (χ – температуропроводность жидкости).

В системе отсчета, связанной с ячейкой, уравнения для эволюции импульса, массы, тепла и концентрации в приближении Обербека–Буссинеска, характеризующие эволюцию коллоидной бинарной смеси запишутся в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \text{Pr} [\Delta \mathbf{v} + \text{Ra}(1 + A_v \sin \omega t)(T - C) \mathbf{n}], \quad (1.1a)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \Delta T, \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) C = \text{Le} \nabla \cdot \left[\nabla C + \psi \frac{\text{Ra}}{\text{Bm}l} C \nabla T + \frac{C}{l} (1 + A_v \sin \omega t) \mathbf{n} \right], \mathbf{n} = (0, 0, 1). \quad (1.1g)$$

Здесь ∇ – оператор градиента, $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа. В систему (1.1) входят следующие безразмерные параметры: число Релея $\text{Ra} = agd^4 A / \nu \chi$, относительная амплитуда вибраций $A_v = b\Omega^2/g$, число Больцмана $\text{Bm} = g\beta d^4 \bar{C} / l_{\text{sed}} \nu \chi$, безразмерная длина седиментации $l = l_{\text{sed}}/d$, число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$, число Льюиса $\text{Le} = D/\chi$, параметр разделения смеси $\psi = S_T \beta \bar{C} / \alpha$, безразмерная частота $\omega = \Omega d^2 / \chi$ (ν и D – коэффициенты кинематической вязкости жидкости и диффузии примеси, параметр термодиффузии примеси). Кроме этих безразмерных параметров, для описания конвекции коллоидной суспензии в ячейке Хеле-Шоу используются безразмерные длина ячейки и высота $L=L/d=40$, $H=H/d=20$. Отметим, что поток тепла в уравнении (1b) содержит только конвективное и теплопроводное слагаемое, пропорциональное градиенту температуры. Основанные на экспериментальных данных оценки, проведенные в [6], показали, что отклонение потока тепла от закона Фурье в коллоидных суспензиях пренебрежимо мало. Слагаемые в правой части уравнения (1g) отвечают за процессы диффузии, термодиффузии и оседания примеси в гравитационном и вибрационном полях, соответственно [5,15]. В системе отсчета связанной с ячейкой вместо ускорения свободного падения следует использовать $g(1 + A_v \sin \omega t)$, что изменяет поток примеси, связанный с ее оседанием: $\frac{\text{Le}}{l} C \mathbf{n} \rightarrow \frac{\text{Le}}{l} (1 + A_v \sin \omega t) C \mathbf{n}$.

Отметим также, что решение системы уравнений (1.1) должно удовлетворять закону сохранения массы дисперсной примеси.

Граничные условия соответствуют непроницаемым для наночастиц, жестким границам ячейки, причем, узкие грани считаются теплопроводными, а широкие теплоизолированными. Вдоль оси x используется условие периодичности.

В приближении плоских траекторий [10–15], справедливом в случае, когда длина и ширина ячейки гораздо больше ее толщины ($L \gg 1$, $H \gg 1$, считаем нулевой компоненту скорости v_y , перпендикулярную широким граням и введем функцию тока Ψ и завихренность Φ , связанные со скоростью жидкости \mathbf{v} соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Phi = (\text{rot } \mathbf{v})_y,$$

Как и в случае задачи о тепловой конвекции коллоидной суспензии в ячейке Хеле-Шоу [17] решение запишем в виде:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right),$$

$$T = T_0(z) + \vartheta(t, x, z), \quad (1.2)$$

$$C = C(t, x, z).$$

Независимость функций для температуры и концентрации от поперечной координаты y соответствует случаю теплоизолированных широких граней, на которых отсутствует поток коллоидных частиц.

После применения процедуры осреднения [20] поперек ячейки получим систему уравнений для конвекции коллоидной суспензии в ячейке Хеле-Шоу, находящейся в вибрационном поле

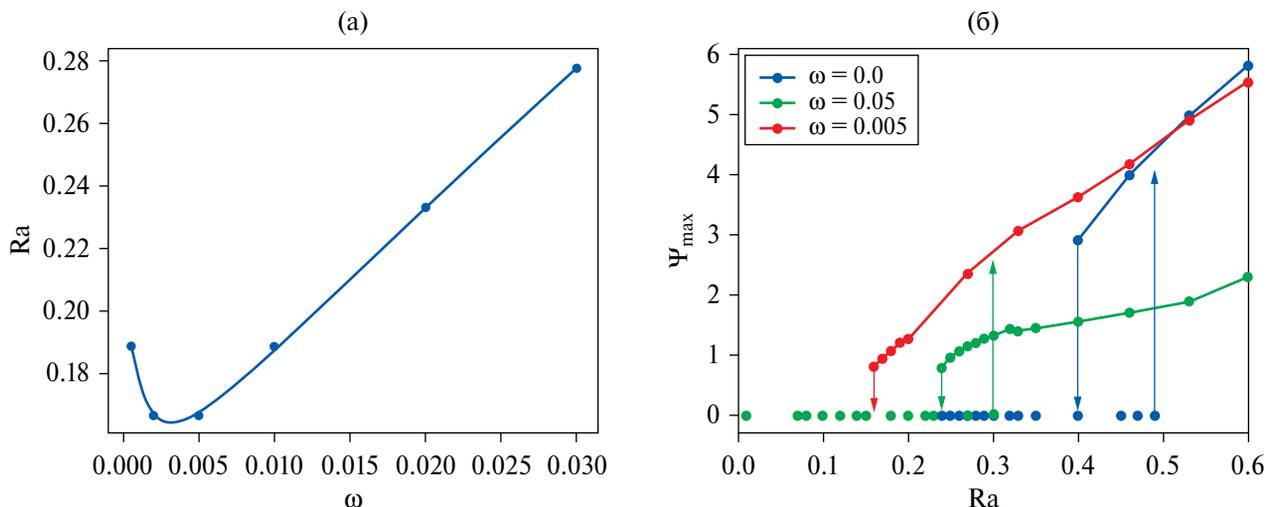


Рис. 2. Термодиффузия отсутствует ($\psi = 0$). (а) Порог устойчивости механического равновесия в зависимости от частоты; (б) зависимость максимальной функции Ψ_{\max} тока от числа Рейлея при различных частотах вибрации по сравнению со статическим случаем.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{8}{3\pi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = \text{Pr} \left[\Delta \Phi - \frac{\pi^2}{4} \Phi - \frac{4}{\pi} \text{Ra} (1 + A_v \sin \omega t) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) \right], \quad (1.3a)$$

$$\Phi = \Delta \Psi, \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right] = \Delta \vartheta - \frac{2}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial z} \right] = \text{Le} \nabla \cdot \left[\nabla C + \frac{C}{l} (1 + A_v \sin \omega t) \mathbf{n} + \psi \frac{\text{Ra}}{\text{Bm} l} C \nabla (T_0 + \vartheta) \right]. \quad (1.3g)$$

Для получения численного решения задачи (1.3) использован конечно-разностный метод. Пространственные производные аппроксимируются центральными разностями. Дискретное уравнение Пуассона (1.3б) решается с помощью метода последовательной релаксации. Конечно-разностная аппроксимация уравнения концентрации (1.3г) должна удовлетворять принципу сохранения массы. Консервативная форма уравнения (1.3г) и его аппроксимация методом контрольного объема, обеспечивает сохранения массы дисперсной примеси.

При расчетах использованы следующие типичные значения параметров коллоидной суспензии: число Льюиса $\text{Le} = 5 \cdot 10^{-4}$, число Прандтля $\text{Pr} = 48$, $\text{Bm} = 0.16$, $l/H = 1.6$, $A_v = 2$. Вычисления проводились на основной сетке, содержащей 128×64 узлов. Также сделаны проверочные расчеты более подробных сетках: “1” (150×75) и “2” (200×100), которые подтвердили результаты, полученные на сетке 128×64 . Например, в режиме образования пальцев ($\psi = 8.8$, $\text{Ra} = 0.02$, $\omega = 1.2 \cdot 10^{-3}$) изменение максимального значения функции тока, фиксируемое в ячейке Хеле–Шоу, при переходе с основной сетки на сетку “1” – 3.7%, а при переходе с сетки “1” на еще более подробную сетку “2” – 0.36%.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЛОИДНОЙ СУСПЕНЗИИ И КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрены два различных случая: 1) расслоение коллоидной суспензии происходит только благодаря седиментации наночастиц ($\psi = 0$); 2) седиментация и термодиффузионное разделение действуют совместно ($\psi = 8.8$).

В отсутствие термодиффузии ($\psi = 0$) изменение частоты вибраций немонотонным образом влияет на порог устойчивости механического равновесия коллоидной суспензии (рис. 2а).

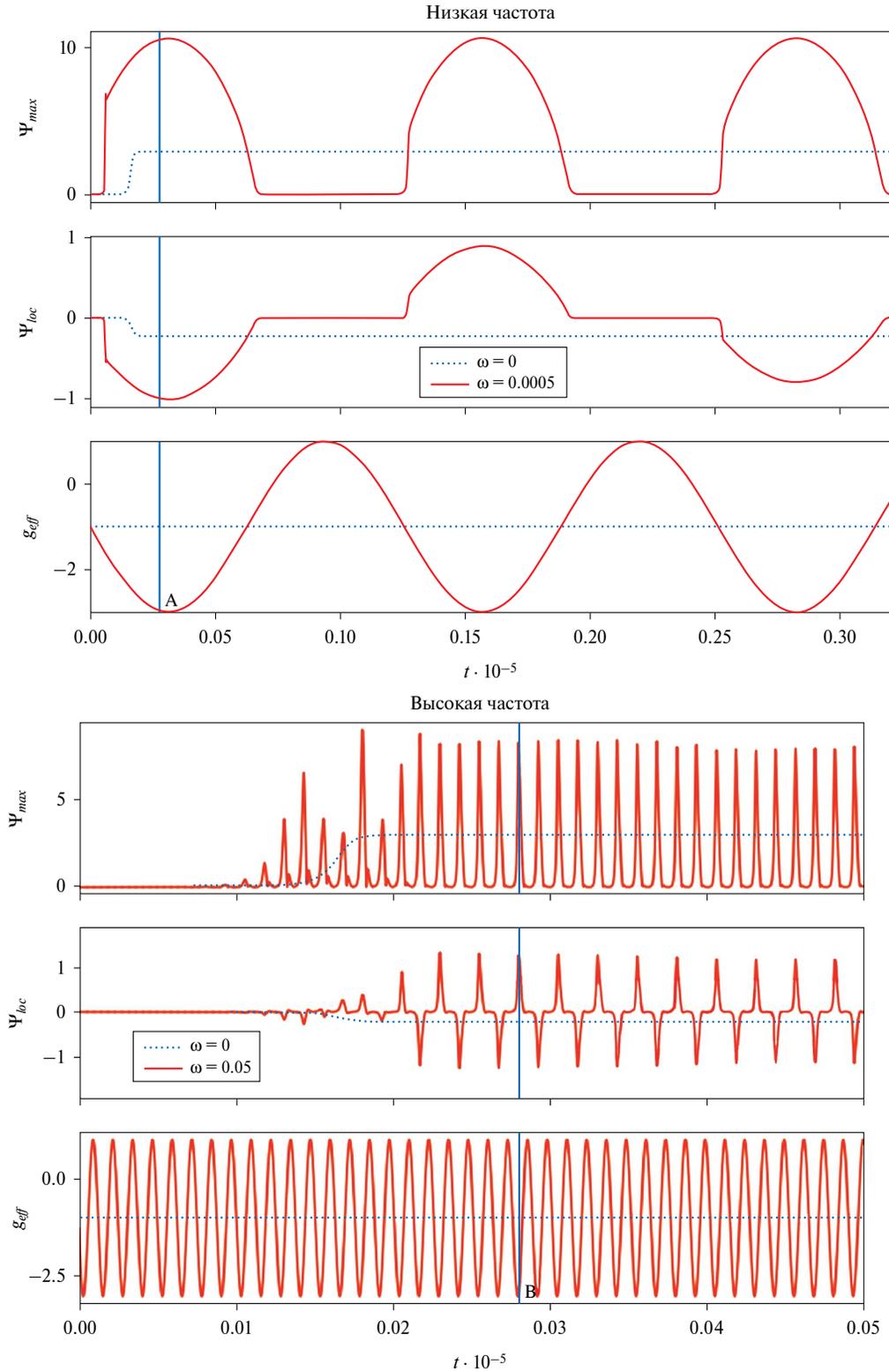


Рис. 3. Зависимости от времени максимального значения функции тока Ψ_{max} и значения функции тока в фиксированной точке ячейки Ψ_{loc} , а также эффективной силы тяжести g_{eff} , учитывающей ускорение в статическом и вибрационном поле; $\psi = 0$ при $Ra = 0.4$. Пунктирная линия соответствует течению в отсутствии вибраций. Вертикальными линиями А и В обозначены моменты времени, для которых на рис. 4 представлены поля распределения функции тока, температуры и концентрации в ячейке.

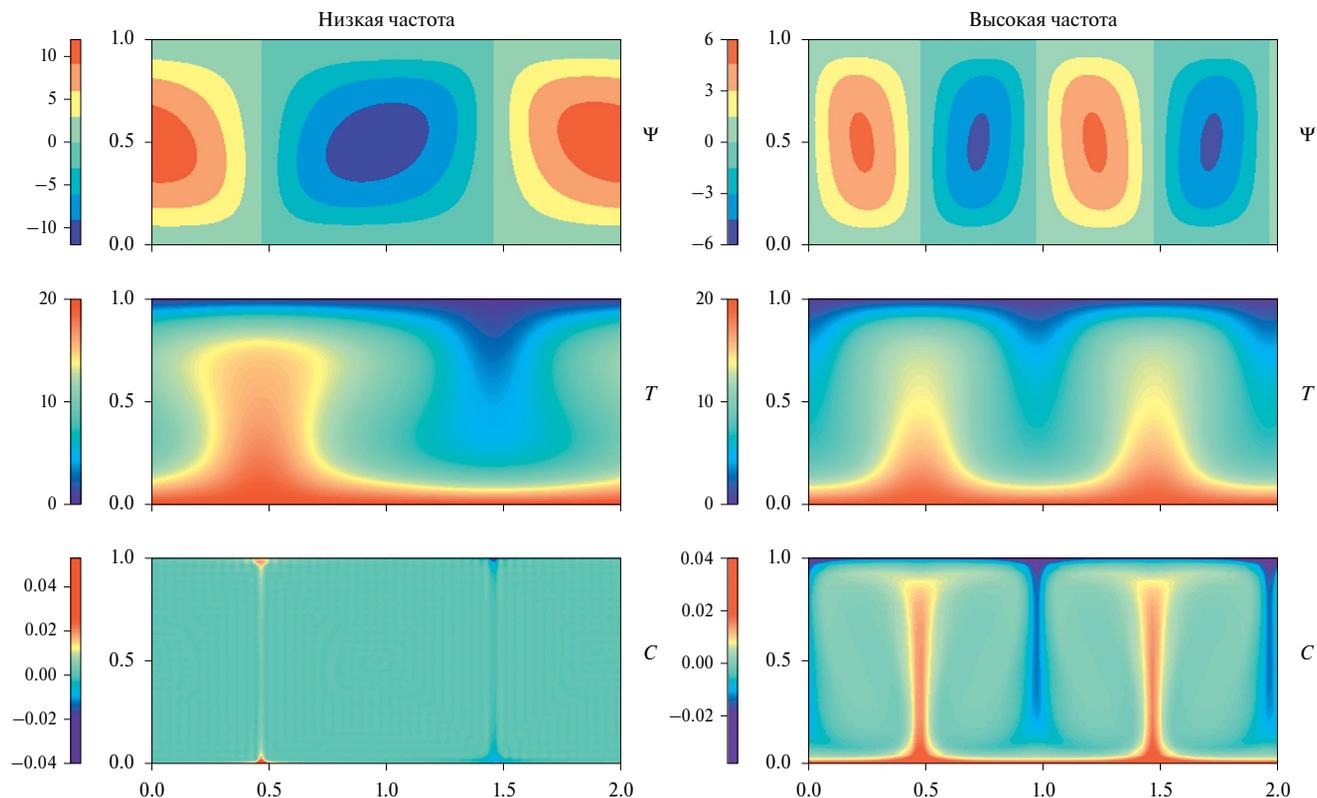


Рис. 4. Поля функции тока, температуры и концентрации при конвекции для различных частот: (а–б) – $\omega = 5 \cdot 10^{-4}$ и $5 \cdot 10^{-2}$, соответствующие вертикальным линиям А и В на рис. 3.

Граница устойчивости механического равновесия коллоидной суспензии, представляющая “язык” параметрического резонанса, представлена на рис. 2а (выше кривой – область неустойчивости). Отметим, что пороги возникновения вибрационных течений коллоидной суспензии лежат ниже, чем в статическом поле тяжести. Наиболее сильное понижение (более чем в два раза) имеет место на низких частотах: $Ra=0.16$ (при $\omega = 0.002$) по сравнению с $Ra=0.30$ (при $\omega = 0.05$). Период изменения функции тока в указанной на рис. 2а области вдвое больше периода модуляции гравитационного поля.

Согласно данным рис. 2б возникновение конвекции происходит жестким образом (в результате обратной бифуркации) как в статическом поле тяжести, так и в вибрационном поле. На графиках имеются области сосуществования двух устойчивых решений: механического равновесия и конвективного колебательного решения, а также гистерезисные переходы между ними. При увеличении числа Рейля пороги возникновения конвекции указаны стрелками вверх. Потеря устойчивости развитых нелинейных течений и переход к состоянию покоя суспензии (бифуркация типа седло-узел) при уменьшении числа Рейля в точке Ra_S^{TW} отмечена стрелкой вниз. Например, в статическом поле тяжести это значение совпадает с известным результатом ($Ra_S^{TW}=0.4$) [15]. Наиболее интенсивные течения соответствуют частоте вблизи минимума резонансного “языка” $\omega \approx 0.005$

Нелинейная эволюция конечно-амплитудного течения во времени для низких частот вибрации происходит следующим образом (рис. 3).

Течение меняет направление вращения вихрей на периоде, в два раза превышающем период вибрации, который можно рассматривать как период изменения эффективного ускорения: $g_{\text{eff}} = g(1 + A_s \sin \omega t)$. Кроме того, максимальное значение функции тока осциллирует между нулевым и некоторым максимальным значением и, следовательно, конвективная структура представляет собой стоячую волну. Такое течение обычно связывают с субгармоническим откликом на внешнее воздействие. Для случаев, представленных на рис. 3, фаза двухвихревого течения чередуется с состоянием покоя жидкости. Структура течения (поля функции тока и температуры) очень похожа на структуру течения при

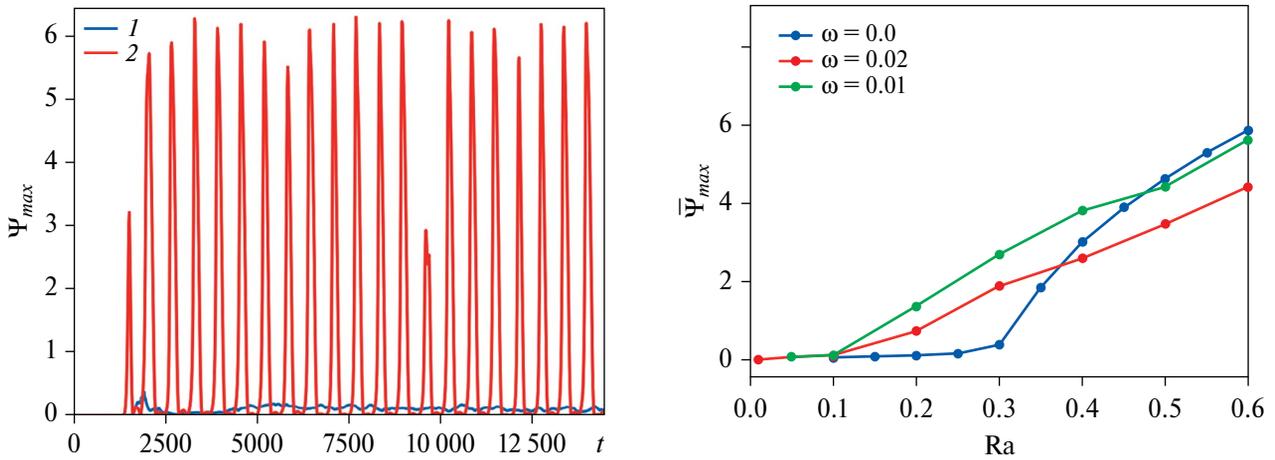


Рис. 5. а) Зависимость максимальной функции тока от времени при $Ra=0.2$: 1, 2 – $\omega = 0, 0.01$; б) Бифуркационные диаграммы (зависимости среднего значения максимальной функции тока при различных частотах вибрации, $Pr=48, Le=5 \cdot 10^{-4}, \psi = 8.8, Vm = 0.16; l/H=1.6, A_v = 2$).

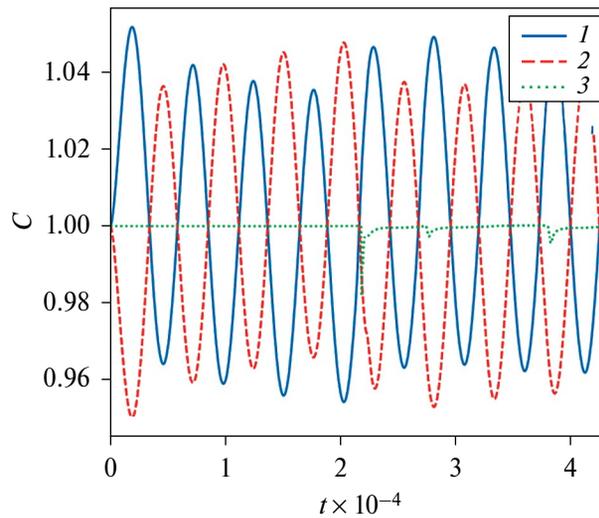


Рис. 6. Зависимость концентрации в центре –3, на нижней –1 и верхней границе –2 при $Ra = 0.02, \omega = 1.2 \cdot 10^{-3}$.

конвекции однородной жидкости. Поле концентрации практически везде однородно, за исключением тонких погранслоев на границах конвективных валов, там, где конвективная скорость максимальна по модулю (рис. 4а). При увеличении частоты вибраций в 100 раз (рис. 4б) пространственная картина течения изменяется качественно: длина волны возмущений уменьшается в два раза, а распределение концентрации проявляет большую неоднородность. Однако это течение по-прежнему представляет собой стоячую волну.

Рассмотрим влияние частоты вибрации на течение при наличии положительной термодиффузии коллоидных частиц ($\psi = 8.8$). В отсутствии вибраций порог возникновения конвекции – $Ra=0.018$. При увеличении числа Релея режимы конвекции последовательно сменяют друг друга [17].

I. Пальцеобразный регулярный режим ($0.018 < Ra < 0.17$). Термодиффузия тяжелых коллоидных частиц в сторону холодной верхней границы создает неустойчивое распределение примеси: плотность смеси вверх увеличивается, вниз – уменьшается. Смесь с более высокой (низкой) концентрацией тяжелой компоненты начинает формировать пальцы распространяющиеся вниз (вверх).

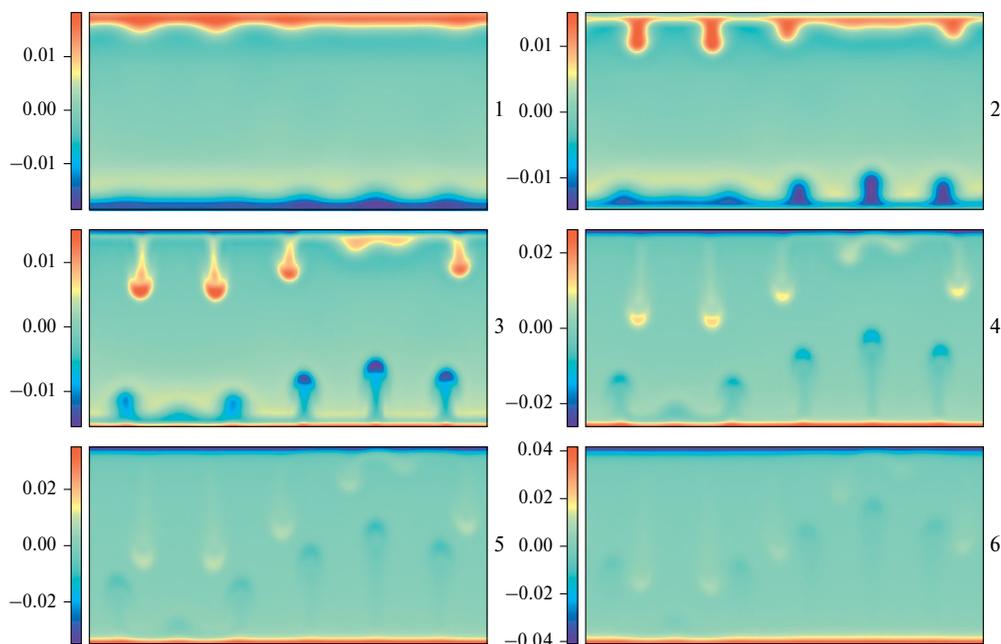


Рис. 7. Распределение примеси при $\psi = 8.8$, $Ra = 0.02$, $\omega = 1.2 \cdot 10^{-3}$, начальный кадр –1 соответствует времени $t_{\text{start}} = 84159$, интервал между кадрами $\delta t = 233$.

II. Хаотический режим пальцев ($0.17 < Ra < 0.32$).

В режимах I и II интенсивность течения мала (рис. 5, $\omega = 0$ – кривая 1).

При $Ra = 0.2$ реализуется хаотический колебательный режим пальцев, интенсивность которого мала (рис. 5 а). Вибрации в области значений $Ra < Ra_*$ (ω интенсифицирует течение (рис. 5, $\omega = 0.01$). Максимальное значение функции тока осциллирует с амплитудой в десятки раз превышающей ее значение в случае отсутствия вибраций. Среднее за период значение максимальной функции тока также увеличивается (рис. 5 б), но этот рост немонотонно зависит от частоты. При $Ra > Ra_*$ (ω вибрации уменьшают интенсивность конвективного течения коллоидной бинарной смеси, наблюдающуюся в статическом поле (рис. 5б).

Рассмотрим подробнее влияние вибраций на регулярный режим формирования пальцев ($\psi = 8.8$, $Ra = 0.02$). Картина конвективного течения зависит от частоты внешнего воздействия.

При “низкой” частоте вибраций, например, $\omega = 1.2 \cdot 10^{-3}$, концентрационные волны, генерируемые на горизонтальных границах ячейки (рис. 6), проникают вглубь жидкости. Отметим, что глубина проникновения концентрационной волны в ячейку может быть записана в виде $\delta_c/H = (Le/\omega)^{1/2}$. Число Льюиса для коллоидной суспензии экстремально мало $5 \cdot 10^{-4}$, поэтому для частоты $\omega = 1.2 \cdot 10^{-3}$, $\delta_c/H = 0.65$. Концентрационная волна может полностью проникнуть внутрь ячейки. Однако, из-за неустойчивости Реэля–Тейлора основное состояние теряет устойчивость, порождая пальцевидные структуры (плюмы): тонущей более тяжелой части суспензии, обогащенной наночастицами, и всплывающий более легкой части суспензии, обедненной наночастицами (рис. 7). Они влекут “вспышки” интенсивного течения, которые чередуются с периодами очень слабого течения жидкости.

Поле температур при этом практически не искажено. Поведение максимального значения функции тока в интервале времени приблизительно равном двум периодам модуляции поля тяжести приведено на рис. 8.

При частоте вибраций $\omega = 0.01$ отношение глубины проникновения концентрационной волны к высоте ячейки $\delta_c/H = 0.2$, и распределение примеси в сформированном режиме течения представляет собой пальцы, протяженные от одной до другой границы и осциллирующие с внешней частотой ω (рис. 9). Характер конвективной структуры на периоде вибраций качественно не меняется, изменяется лишь интенсивность течения.

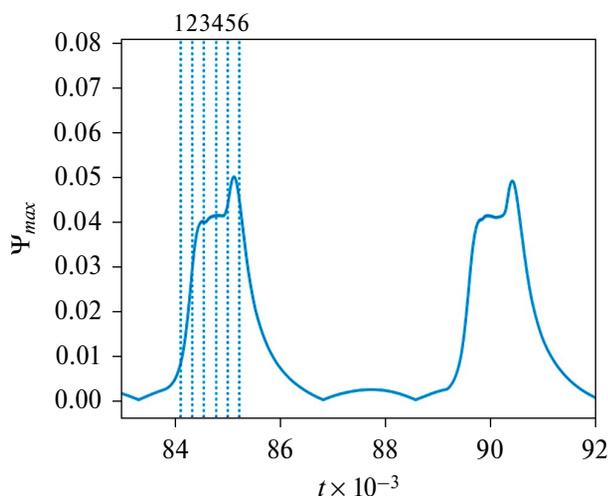


Рис. 8. Зависимость максимального значения функции тока от времени. $\psi = 8.8$, $Ra = 0.02$, $\omega = 1.2 \cdot 10^{-3}$, вертикальные линии соответствуют временам на рис 7.

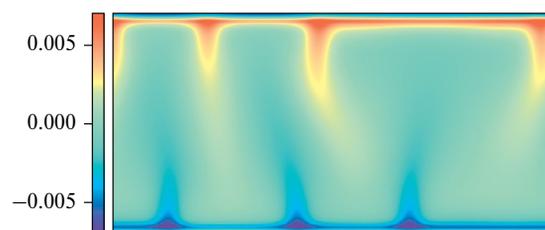


Рис. 9. Характерное распределение примеси при $Ra = 0.02$, $\omega = 1.0 \cdot 10^{-2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате численного моделирования конвективных течений коллоидной суспензии в ячейке Хеле-Шоу под влиянием вертикальных вибраций конечной амплитуды построены бифуркационные диаграммы и проанализированы распределения концентрации наночастиц. В случае положительной термомодиффузии наночастиц и их гравитационной стратификации изучено влияние вибраций на режимы формирования пальцев. В зависимости от частоты вибрации могут как увеличивать интенсивность конвективного течения, так и ослаблять его.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00344, <https://rscf.ru/project/23-21-00344/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mewis J., Wagner N.J.* Colloidal Suspension Rheology, Cambridge Series in Chemical Engineering. Cambridge: Univ. Press, 2012. 393 p.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М: Наука, 1986. 736 с.
3. *Shliomis M.I., Smorodin B.L.* Convective instability of magnetized ferrofluids // J. Magn. Magn. Mater. 2002. V. 252. № 1–3. P. 197–202.
4. *Mason M., Weaver W.* The Settling of Small Particles in a Fluid // Phys. Rev.. 1924. V. 23. P. 412–426.
5. *Shliomis M.I., Smorodin B.L.* Onset of convection in colloids stratified by gravity // Phys. Rev. E. 2005. T. 71. № 3. 036312.
6. *Buongiorno J.* Convective Transport in Nanofluids // Trans. ASME. J. Heat Transf. 2006. V. 128. P. 240–250.
7. *Löven H.* Particle-resolved instabilities in colloidal dispersions // Soft Matter. 2010. V. 6. P. 3133–3142.
8. *Hele-Shaw H.S.* The flow of water // Nature. 1898. V. 58, P. 34–36.
9. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1993. 768 p.
10. *Любимов Д.В., Путин Г.Ф., Чернатынский В.И.* О конвективных движениях в ячейке Хеле–Шоу // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235. № 3. С. 554–556.
11. *Путин Г.Ф., Ткачева Е.А.* Экспериментальное исследование надкритических конвективных движений в ячейке Хеле-Шоу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 3–8.

12. Глухов А.Ф., Путин Г.Ф. О возникновении конвекции на фоне медленного течения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 174–176.
13. Келлер И.О., Тарунин Е.Л. Конвекция в ячейке Хеле-Шоу с учетом теплообмена на широких гранях // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 24–32.
14. Бабушкин И.А., Демин В.А. Экспериментальное и теоретическое исследование переходных конвективных режимов в ячейке Хеле-Шоу // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 3. С. 3–10.
15. Гаврилов К.А., Демин В.А., Путин Г.Ф. Конвективные когерентные структуры в ячейке Хеле-Шоу // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 4. С. 68–74.
16. Глухов А.Ф., Демин В.А., Попов Е.А. Термовибрационная конвекция бинарной смеси в ячейке Хеле-Шоу // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. № 2 (20). С. 12–18.
17. Smorodin B.L., Cherepanov I.N., Ishutov S.N., Myznikova B.I. Convection of a colloidal suspension in a Hele-Shaw cell // Eur. Phys. J. E. 2017. V. 40. 18.
18. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 1. С. 3–11.
19. Могилевский Е.И. Неустойчивость слоя жидкости при периодических воздействиях: стекающая пленка в переменном электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 90–100.
20. Браверман Л.М. О вибрационной тепловой конвекции в ячейке Хеле-Шоу // Конвективные течения. Пермь, 1989. С. 73–78.
21. Гершуни Г., Келлер И.О., Смородин Б.Л. О вибрационно-конвективной неустойчивости в невесомости; конечные частоты // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 2. С. 194–196.
22. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Convective Flows of a Colloidal Suspension in a Hele-Shaw Cell under Vertical Vibrations

I. N. Cherepanov* and B. L. Smorodin**

Perm State National Research University, Perm, Russia

*e-mail: che-email@yandex.ru

**e-mail: bsmorodin@yandex.ru

Numerical simulation of convection of a colloidal binary mixture in a Hele-Shaw cell under vertical vibrations of finite amplitude has been carried out. The boundary of convective instability in a modulated gravity field is found. Bifurcation diagrams are constructed and the concentration distributions of nanoparticles corresponding to various solutions are analyzed. Thermal vibration convective flows are studied in the case of positive thermal diffusion of nanoparticles and their gravitational stratification. It is shown that vibrations, depending on the frequency, can both increase the intensity of the convective flow and weaken it.

Keywords: colloidal suspension, vibrations, thermal diffusion, Hele-Shaw cell.

УДК 532.591, 532.518

ДВУХСЛОЙНАЯ РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ СМЕШИВАЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: liapid@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.03.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается двухслойное течение стратифицированной по плотности жидкости с массообменом между слоями. В приближении Буссинеска уравнения движения сводятся к однородной квазилинейной системе уравнений в частных производных переменного типа. Параметры течения в промежуточном перемешанном слое определяются из условий равновесия в более общей модели трехслойного течения смешивающейся жидкости. В частности, из условий равновесия вытекает постоянство прослоечного числа Ричардсона в течениях со сдвигом скорости. Построено автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва (задачи о водообмене в шлюзе) в области гиперболичности рассматриваемой системы. Исследованы транскритические режимы течения над локальным препятствием и определены условия, при которых препятствие определяет течение вверх по потоку. Проведено сравнение стационарных и нестационарных решений с решениями, полученными для исходных трехслойных моделей течения смешивающейся жидкости.

Ключевые слова: равновесная модель, двухслойное течение, приближение Буссинеска, смешивающаяся жидкости.

DOI: 10.31857/S1024708424040066, **EDN:** OYNBYQ

Нелинейные внутренние волны в стратифицированной по плотности жидкости являются объектом интенсивных исследований в океане и атмосфере [1]. Характерной особенностью эволюции внутренних волн конечной амплитуды является неустойчивость сдвигового течения на фронте волны, приводящая к генерации коротких волн на внутренних границах раздела и турбулентному перемешиванию слоев различной плотности. Совместное воздействие нелинейности, топографических эффектов и турбулентного перемешивания порождает многообразие волновых конфигураций в течении стратифицированной жидкости в поле силы тяжести. Формирование слоя смешения влияет на структуру внутренних гидравлических прыжков [2–5] и определяет структуру и скорость распространения фронта плотностных течений [6–9]. Влияние топографических эффектов и связанные с ним геофизические приложения обсуждаются в монографиях [10, 11]. Особенности математического моделирования внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря представлены в [12–16].

Для описания длинных волн в стратифицированной жидкости применяется теория мелкой воды. Даже простейшие модели однослойного плотностного течения над склоном с учетом вовлечения окружающей покоящейся жидкости содержат большое число нелинейных уравнений в частных производных [17, 18] и математический анализ нестационарных процессов в рамках таких моделей представляет собой проблему. Поэтому наряду с исходной моделью используются различные подмодели, позволяющие познать порядок системы и пригодные для описания определенных классов течений.

Равновесную модель по отношению к исходной системе уравнений можно получить, заменив некоторые уравнения системы конечными соотношениями, вытекающими из структуры решений основной модели. Наиболее известен переход от классической модели течения мелкой воды над склоном (уравнения Сен-Венана) к кинематической модели распространения длинных волн [19]. Определяющая гипотеза при выводе кинематической модели состоит в том, что скатывающая сила в потоке уравновешивается донным трением и течение описывается одним уравнением гиперболического типа. Заметим, что переход к кинематической модели распространения волн широко используется в различных моделях

механики сплошных сред. Для моделей течения стратифицированной жидкости с учетом турбулентного перемешивания переход к равновесной модели уже не так очевиден.

Для трехслойной модели течения стратифицированной жидкости с турбулентным перемешиванием между слоями соответствующая равновесная модель получена в предположении о том, что скорость вовлечения окружающей жидкости в промежуточный слой является заданной функцией от остальных искомым параметров течения [20]. Важно отметить, что эта зависимость не является эмпирической, а вытекает из структуры исходной системы уравнений. Построенная равновесная модель применена для задачи о формировании слоя смешения в течениях со сдвигом скорости. В частности, показано, что модель описывает транскритические течения смешивающейся жидкости над локальным препятствием и может быть использована для интерпретации лабораторных и натуральных экспериментов. Другой вариант этой равновесной модели, примененный для расчета плотностных течений на наклонной плоскости с учетом вовлечения окружающей жидкости и подъема осадков, позволяет проанализировать структуру течения и оценить скорость фронта подводной лавины [21].

В данной работе исследована еще более простая модель, которая является равновесной по отношению к исходной трехслойной модели течения стратифицированной жидкости с перемешиванием между слоями. Модель является обобщением классических уравнений двухслойной мелкой воды и позволяет провести классификацию волновых конфигураций в нестационарной задаче о распаде произвольного разрыва и исследовать режимы стационарного транскритического обтекания локального препятствия аналогично случаю двухслойного течения без перемешивания, рассмотренному в [22].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Полная математическая модель плоскопараллельного течения стратифицированной смешивающейся жидкости в приближении Буссинеска построена в [22, гл. 5]. Для течений над неровным дном модель адаптирована в [18]. Уравнения трехслойной мелкой воды с учетом турбулентного перемешивания между слоями могут быть представлены в следующем дивергентном виде с использованием полных законов сохранения массы, импульса и энергии

$$\begin{aligned}
 h_t^- + (h^- u)_x &= -\sigma q, \quad h_t^+ + (h^+ w)_x = -\sigma q, \quad \eta_t + (\eta v)_x = 2\sigma q, \\
 u_t + (u^2 / 2 + bh^- + \bar{b}\eta + p)_x &= -bz_x, \quad w_t + (w^2 / 2 + p)_x = 0, \\
 (bh^- + \bar{b}\eta)_t + (bh^- u + \bar{b}\eta v)_x &= 0, \\
 (h^- u + \eta v + h^+ w)_t + (h^- u^2 + \eta v^2 + h^+ w^2 + b(h^-)^2 / 2 + \bar{b}\eta h^- + \\
 + \bar{b}\eta^2 / 2 + (h^- + h^+ + \eta)p)_x &= -(p + bh^- + \bar{b}\eta)z_x, \\
 (h^- u^2 + \eta(v^2 + q^2) + h^+ w^2 + b(h^-)^2 + 2\bar{b}\eta h^- + \bar{b}\eta^2)_t + (h^- u^3 + \\
 + \eta v(v^2 + q^2) + h^+ w^3 + 2p(h^- u + \eta v + h^+ w) + 2\bar{b}\eta h^- u + \\
 + 2\bar{b}(h^- + \eta)\eta v + 2b(h^-)^2 u)_x &= -2(bh^- u + \bar{b}\eta v)z_x - \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь h^- , h^+ , η толщины нижнего, верхнего слоев и прослойки; $z(x)$ форма дна; u , w , v – соответствующие скорости в слоях; $b = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+$ – заданная плавучесть нижнего слоя; $\bar{b} = (\bar{\rho} - \rho^+)g/\rho^+$ – плавучесть в прослойке; ρ^- , ρ^+ , $\bar{\rho}$ – соответствующие плотности слоев; g – ускорение свободного падения; p – модифицированное давление на верхней границе течения; q^2 – удельная кинетическая энергия “больших вихрей”, определяющих процесс вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку. В приближении Буссинеска полная глубина $H_0 = h^- + \eta + h^+ + z \equiv \text{const}$. Из условий несжимаемости жидкости следует, что полный расход $Q = h^- u + \eta v + h^+ w$ является функцией только времени, причем заданной в силу граничных условий. Учет диссипации энергии в турбулентной прослойке осуществляется заданием функции $\varepsilon = \sigma \kappa q^3$, $\sigma \equiv \text{const}$, $\kappa \equiv \text{const}$. Здесь σ , κ – коэффициенты, отвечающие за скорость вовлечения жидкости из однородных слоев в прослойку и скорость диссипации.

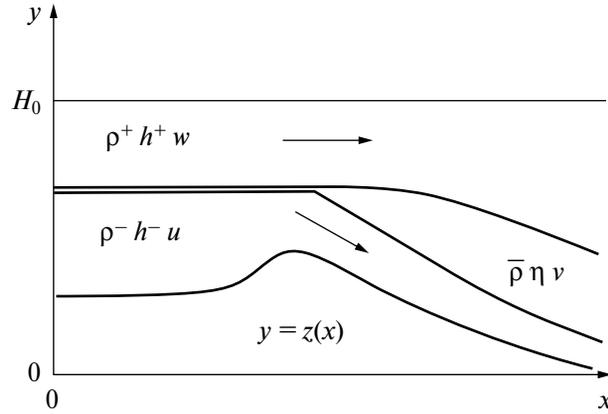


Рис. 1. Схема течения.

Более четкое представление о структуре (1.1) может быть получено из дифференциальной формы записи этой системы

$$\begin{aligned} h_t^- + u h_x^- + h^- u_x &= -\sigma q, & h_t^+ + w h_x^+ + h^+ w_x &= -\sigma q, & \eta_t + v \eta_x + \eta v_x &= 2\sigma q, \\ u_t + uu_x + b h_x^- + b z_x + \bar{b} \eta_x + \eta \bar{b}_x + p_x &= 0, & w_t + ww_x + p_x &= 0, \\ v_t + vv_x + \bar{b} h_x^- + \bar{b} z_x + \bar{b} \eta_x + \eta \bar{b}_x / 2 + p_x &= \sigma q(u + w - 2v) / \eta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\bar{b}_t + v \bar{b}_x = \sigma q(b - 2\bar{b}) / \eta, \quad (1.3)$$

$$q_t + v q_x = \sigma((u - v)^2 - (2 + \kappa)q^2 - b\eta + (w - v)^2) / (2\eta). \quad (1.4)$$

Подсистема (1.2) представляет собой неоднородную систему уравнений трехслойной мелкой воды в приближении Буссинеска, а левая часть в уравнениях (1.3)–(1.4) – производную вдоль траектории частиц в прослойке. Система (1.1)–(1.4) описывает нелинейную стадию развития процесса неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в течениях со сдвигом скорости и применима для описания развития интенсивного турбулентного перемешивания на подветренной стороне подводного хребта при его обтекании потоком стратифицированной жидкости.

Уравнения (1.1) допускают различные варианты перехода к более простым системам при уменьшении числа рассматриваемых слоев и использовании различных дополнительных условий равновесия между компонентами течения [22, гл. 5]. В недавней работе [20] при построении равновесной модели трехслойного течения (далее модель E1) вместо уравнения (1.4) использовано соотношение

$$(u - v)^2 - (2 + \kappa)q^2 - b\eta + (w - v)^2 \equiv 0, \quad (1.5)$$

из которого неотрицательная скорость вовлечения в прослойку задается как функция остальных искомым переменных. Модель E1 не меняет структуры исходных уравнений, в том числе неизменными остаются характеристики системы (уменьшается только кратность контактной характеристики). Эта модель использована для описания процесса формирования слоя смешения в нестационарных течениях над неровным дном.

При течении стратифицированной жидкости в длинном канале с относительно небольшими уклонами дна пригоден также равновесный вариант модели (E1), в котором средняя скорость турбулентного вовлечения в прослойку близка к нулю и генерация турбулентности в промежуточном слое уравновешивается ее диссипацией. В этом случае кроме (1.5) выполнены следующие соотношения:

$$v = \frac{u + w}{2}, \quad \bar{b} = \frac{b}{2},$$

и уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} h_t + (h^- u + \frac{1}{2}\eta v)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + bh_x + bz_x + p_x &= 0, \\ w_t + ww_x + p_x &= 0, \\ Q_x = uh_x^- + h^- u_x + \frac{1}{2}\eta u_x + \frac{1}{2}u\eta_x + \frac{1}{2}\eta w_x + \frac{1}{2}w\eta_x + h^+ w_x + wh_x^+ &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $h = h^- + 0.5\eta$, $h^- + \eta + h^+ = H = H_0 - z(x)$. Заменой $\gamma = u - w$ получаем равновесную модель (модель E2) для течения двухслойной мелкой воды над препятствием

$$\begin{aligned} h_t + (h(\bar{u} + (1 - \frac{h}{H})\gamma) - \frac{Ri\gamma^3}{4b})_x &= 0, \\ \gamma_t + (\gamma(\bar{u} - \frac{h\gamma}{H} + \frac{\gamma}{2}) + b(h + z))_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\bar{u} = Q/H$ – средняя скорость жидкости, $Ri = b\eta/(u - w)^2 = 1/2$ – число Ричардсона.

Следует подчеркнуть, что значение $Ri = 1/2$ является следствием (1.1) и условий равновесия в потоке. Число Ричардсона Ri удобно оставить в (1.6), так как при описании течения в прослойке между однородными слоями различной плотности также используются значения прослоечного числа Ri отличного от принятого в данной модели E2.

Перепишем систему (1.6) в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} h_t + (\bar{u} + (1 - 2\frac{h}{H})\gamma)h_x + ((1 - \frac{h}{H})h - \frac{3Ri\gamma^2}{4b})\gamma_x &= 0, \\ \gamma_t + (b - \frac{\gamma^2}{H})h_x + (\bar{u} + (1 - 2\frac{h}{H})\gamma)\gamma_x &= -bz_x, \end{aligned}$$

из которой находятся характеристики системы (1.6)

$$\lambda^\pm = \bar{u} + (1 - \frac{2h}{H})\gamma \pm \sqrt{R}, \quad R = (b - \frac{\gamma^2}{H})(h - \frac{h^2}{H} - \frac{3Ri\gamma^2}{4b}) > 0.$$

Условие гиперболичности системы состоит в положительности R , что влечет ограничение на сдвиг скорости в слоях. Заметим, что при $Ri = 0$ уравнения (1.6) являются классическими уравнениями двухслойной мелкой воды ($\eta = 0$), исследованными в [11, 22, 23]. В дальнейшем изложении будет рассматриваться фиксированное число Ричардсона $Ri = 0.5$. Основное отличие модели E2 при $Ri = 0$ от рассматриваемого случая состоит в том, что при $Ri = 0$ автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва с начальными данными из области гиперболичности не выходит из этой области, т.е. выполнение условия гиперболичности для системы (1.6) в начальный момент времени обеспечивает гиперболичность уравнений при $t > 0$ для течений в канале с ровным дном [22]. Заметим, что для течений над неровным дном выход решений из области гиперболичности при возрастании времени возможен также и при $Ri = 0$.

2. ЗАДАЧА О РАСПАДЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

При рассмотрении горизонтальных течений над ровным дном можно воспользоваться внутренней симметрией уравнений для решения задачи о распаде произвольного разрыва. Кроме того, введем безразмерные переменные так, чтобы $H_0 = 1$, $b = 1$. Система (1.6) принимает вид

$$h_t + (h\bar{u} + h(1 - h)\gamma - \frac{Ri\gamma^3}{4})_x = 0, \quad \gamma_t + (\gamma\bar{u} + \frac{\gamma^2}{2} - h\gamma^2 + h)_x = 0. \quad (2.1)$$

Нетрудно видеть, что при $u_m = \text{const}$ уравнения (2.1) допускают преобразование $h \rightarrow 1 - h, \gamma \rightarrow -\gamma$. При $\text{Ri} > 0$ областью гиперболичности системы (2.1) является множество

$$\Omega = \left\{ (h, \gamma): 0 < h < 1, h - h^2 - \frac{3}{4} \text{Ri} \gamma^2 > 0, \gamma^2 < 1 \right\}.$$

В частности, при $\text{Ri} = 1/2$ множество Ω представляет собой эллипс. При $\text{Ri} = 0$ область гиперболичности лежит внутри прямоугольника $\{(h, \gamma): 0 < h < 1, \gamma^2 < 1\}$.

Задача о распаде произвольного разрыва для (2.1) представляет собой задачу Коши со специальными начальными данными при $t = 0$

$$(h(0, x), \gamma(0, x)) = \begin{cases} (h_1, \gamma_1), & x < 0 \\ (h_2, \gamma_2), & x > 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Решением этой задачи в области $t > 0, -\infty < x < \infty$ с данными $(h_i, \gamma_i) \in \Omega, (i = 1, 2)$ является автомодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x/t$ и содержащее конечное число центрированных простых волн и устойчивых ударных волн. Полный анализ задачи (2.2) для классических уравнений двухслойной мелкой воды ($\text{Ri} = 0$) приведен в [22]. В частности, показано, что решение задачи (2.1), (2.2) существует для всех значений $(h_i, \gamma_i) \in \Omega$ и не выходит за границы этой области. Для $\text{Ri} > 0$ это утверждение уже не является справедливым. Выход решения из области гиперболичности означает, что условия равновесности модели (2.1) перестают выполняться и для описания течения следует перейти к моделям более высокого уровня, например, к трехслойной схеме течения. Далее в этом разделе рассматривается структура решений задачи (2.1), (2.2) при $\text{Ri} > 0$ с данными $(h_i, \gamma_i), (i = 1, 2)$, обеспечивающими принадлежность решения области гиперболичности Ω .

2.1. Простая центрированная волна

Под простой центрированной волной понимается непрерывное автомодельное решение задачи (2.1), (2.2). С использованием автомодельной переменной $\xi = x/t$ задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} ((1 - 2h)\gamma - \xi)h' + (h(1 - h) - 3/4 \text{Ri}\gamma^2)\gamma' &= 0, \\ (1 - \gamma^2)h' + ((1 - 2h)\gamma - \xi)\gamma' &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . На плоскости (h, γ) решения (2.3) задаются уравнениями

$$\frac{d\gamma}{dh} = \pm \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{h(1 - h) - 0.75 \text{Ri} \gamma^2}}. \quad (2.4)$$

Знак “+” соответствует волнам, распространяющимся вправо, знак “−” – распространяющимся влево. В силу монотонности кривых, представляющих решение (2.4), и ограниченности области Ω это решение существует вплоть до границы области гиперболичности. Далее, используя указанную выше симметрию исходной системы (2.1), достаточно рассмотреть свойства простых волн, обращенных вправо. В этом случае из (2.3) следует, что в простой волне

$$\xi = \lambda^+ = \bar{u} + (1 - 2h)\gamma + \sqrt{(1 - \gamma^2)(h(1 - h) - 0.75 \text{Ri} \gamma^2)}. \quad (2.5)$$

Поэтому из (2.5) следует, что $(\lambda^+)' > 0$ и допустимыми являются решения (2.3), в которых производные $h'(\xi)$ и $\frac{d\lambda^+(h, \gamma^+(h))}{dh}$ имеют один и тот же знак. При $\text{Ri} > 0$ кривая

$$\Gamma^+ = \left\{ (h, \gamma) \in \Omega, \frac{d\lambda^+}{dh} = 0 \right\}$$

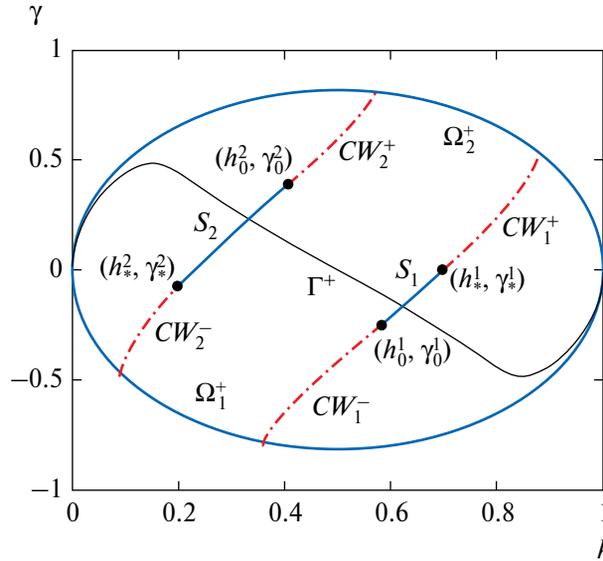


Рис. 2. Структура волновой адиабаты для волн, обращенных вправо: CW_i^\pm – простые центрированные волны; S_i – устойчивые разрывы ($i = 1, 2$).

на плоскости (h, γ) разделяет две односвязных области Ω_1^+ и Ω_2^+ , в которых производная $\frac{d\lambda^+}{dh}$ положительна и отрицательна, соответственно. На рис. 2 представлен вид этой кривой при $Ri = 0.5$. Если (h_0, γ_0) постоянное решение (2.1), к которому слева примыкает простая волна ($\xi < \xi_0 = \lambda^+(h_0, \gamma_0)$), то при $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_1^+$ допустимыми являются решения (2.4), для которых $h < h_0$. Аналогично, для $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_2^+$ решения (2.4) допустимы при $h > h_0$. Заметим, что при $Ri = 0$ кривая Γ^+ представляет собой диагональ прямоугольника $\Omega = \{0 < h < 1, |\gamma| < 1\}$, соединяющую точки $(0, 1)$ и $(1, -1)$ [22].

Для описания структуры всех возможных волн, распространяющихся вправо и являющихся автомодельным решением (2.1), требуется включить в рассмотрение ударные волны.

2.2. Ударные волны, распространяющиеся вправо

Пусть $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_1^+$. Так как система (2.1) записана в дивергентном виде, то любая точка (h, γ) , соединенная с (h_0, γ_0) ударным переходом, обращенным вправо, должна удовлетворять соотношениям на разрыве

$$\begin{aligned} D[h] &= \left[h\bar{u} + h(1-h)\gamma - 1/4 Ri \gamma^3 \right], \\ D[\gamma] &= \left[\gamma\bar{u} + 1/2 \gamma^2 - h\gamma^2 + h \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $[f] = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$, $D = dx/dt$ – скорость ударной волны ($D > 0$). Кроме того, на решении (2.6), представленном в виде $\gamma = \gamma_s^+(h)$, ударная волна должна удовлетворять условию Лакса [24]

$$\lambda^+(h_0, \gamma_0) \leq D \leq \lambda^+(h, \gamma_s^+(h)). \quad (2.7)$$

Из общих свойств разрывных решений нелинейных гиперболических систем [25, гл. 4] следует, что

$$D = 1/2(\lambda^+(h_0, \gamma_0) + \lambda^+(h, \gamma_s^+(h))) + O(|h - h_0|).$$

Поэтому в малой окрестности $(h_0, \gamma_0) \in \Omega_1^+$ разрыв устойчив только при $h > h_0$. При нарушении условия (2.7) для ударной волны конечной амплитуды при возрастании h решение может быть продолжено

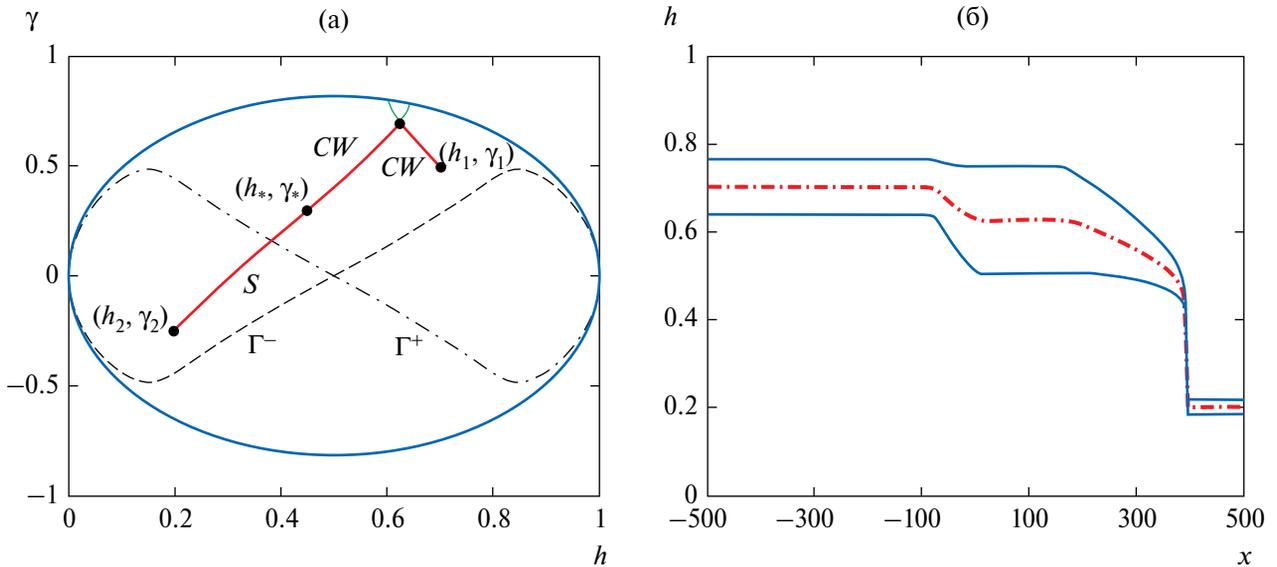


Рис. 3. Задача о распаде произвольного разрыва (2.1), (2.2): а) – структура решения на плоскости (h, γ) , CW – простая центрированная волна, S – ударный переход; б) – профиль решения при $t_0 = 500$ (сплошные линии – границы слоя смешения, штрихпунктирная линия – зависимость $h(t_0, x)$).

простой центрированной волной. Это означает, что точка (h_*, γ_*) , в которой (2.7) перестает выполняться, принадлежит области Ω_2^+ . Строго этот факт доказан при $Ri = 0$ в [22].

При $h > h_*$ решение задачи (2.1), (2.2) может быть продолжено простой волной, проходящей через точку (h_*, γ_*) , вплоть до границы области гиперболичности. Таким образом, волновая адиабата $\gamma = W^+(h, h_0^1, \gamma_0^1)$, проходящая через точку $(h_0^1, \gamma_0^1) \in \Omega_1^+$ и определяющая структуру волн, распространяющихся вправо, в классе автомодельных решений задачи (2.1), (2.2) состоит из центрированной волны CW_1^- при $h < h_0^1$, устойчивой ударной волны S_1 , соединяющей точки (h_0^1, γ_0^1) и (h_*^1, γ_*^1) , и центрированной волны CW_1^+ при $h > h_*^1$.

В случае, если $(h_0^2, \gamma_0^2) \in \Omega_2^+$, конфигурация волн аналогична при замене $h \rightarrow 1 - h, \gamma \rightarrow -\gamma$, то есть при $h > h_0^2$ имеет место центрированная волна CW_2^+ , при $h_*^2 < h < h_0^2$ – ударный переход S_2 , при $h < h_*^2$ – центрированная волна CW_2^- (рис. 2).

Для волн, обращенных влево, волновая адиабата $W^-(h, h_0, \gamma_0)$ строится аналогично с учетом отмеченной выше инвариантности системы (2.1) относительно преобразования зависимых переменных $h \rightarrow 1 - h, \gamma \rightarrow -\gamma$.

Решение задачи (2.1), (2.2) определяется точкой пересечения (h_3, γ_3) волновых адиабат $W^-(h, h_1, \gamma_1)$ и $W^+(h, h_2, \gamma_2)$, если такая точка лежит внутри области гиперболичности Ω . Так как $W^-(h, h_1, \gamma_1)$ монотонно убывает по h , а $W^+(h, h_2, \gamma_2)$ монотонно возрастает, то такая точка единственна. Ситуация, при которой волновые адиабаты не имеют точек пересечения требуют дополнительного исследования, поскольку в этом случае адиабаты достигают границы области Ω и решение выходит из области гиперболичности. Заметим только, что при $Ri = 0$ решение остаётся внутри замыкания области гиперболичности $\bar{\Omega}$, а выход волновых адиабат на границу Ω соответствует разлету в вакуум в волне разрежения для уравнений газовой динамики. В этом случае решение задачи (2.1), (2.2) будет существовать для любых значений $(h_i, \gamma_i), i = 1, 2$, если допускается появление “вакуума” между волнами, соответствующего части границы области гиперболичности [22].

На рис. 3а показано регулярное решение задачи (2.1), (2.2) на плоскости (h, γ) , построенное с использованием волновых адиабат W^\pm . Для выбранных значений $(h_i, \gamma_i), i = 1, 2$ решение представляет собой центрированную волну, обращенную влево, и комбинацию ударной волны и центрированной волны, обращенных вправо. Зависимость построенного решения от пространственной координаты x при заданном значении времени $t_0 = 500$ (безразмерная переменная) проиллюстрирована на рис. 3б. В качестве начальных данных выбраны значения $(h_1, \gamma_1) = (0.7, 0.5), (h_2, \gamma_2) = (0.2, -0.25)$. Решение построено

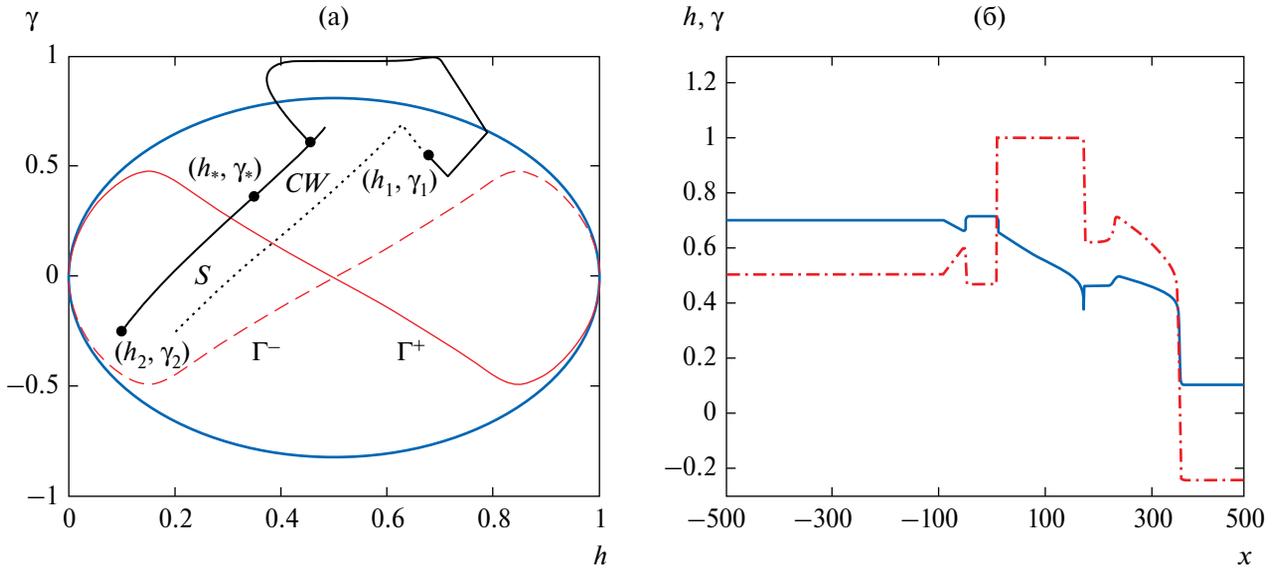


Рис. 4. Численное решение задачи (2.1), (2.2), выходящее из области гиперболичности Ω : а) – сплошная линия – численное решение на плоскости (h, γ) , точки – решение задачи, представленное на рис. 3а; б) – $t_0 = 500$ (сплошная линия – зависимость $h = h(t_0, x)$, штрихпунктирная линия – зависимость $-\gamma = \gamma(t_0, x)$).

численно с использованием схемы С. К. Годунова. Точное автомодельное решение, полученное с использованием формул (2.5), (2.6), а также условия устойчивости разрыва (2.7), полностью совпадает с численным решением и поэтому не приведено на рис. 3б. Штрихпунктирной линией обозначена зависимость $h = h(t_0, x)$, а сплошными линиями – графики функций $h(t_0, x) \pm \frac{1}{2} \eta(t_0, x)$. Если перейти к переменным (t, ξ) , где $\xi = x/t$, то построенные функции h, η в этих переменных не будут зависеть от времени t , т.е. при $t > t_0$ численное решение выходит на автомодельный режим.

Следует отметить, что в задаче о распаде произвольного разрыва (2.1), (2.2) с начальными данными (h_i, γ_i) , $i = 1, 2$, при которых волновые адиабаты $W^-(h, h_1, \gamma_1)$ и $W^+(h, h_2, \gamma_2)$ не пересекаются внутри Ω , решение не разваливается, а имеет вполне регулярную структуру. На рис. 4 жирной линией изображено численное решение задачи (2.1), (2.2) с данными $(h_1, \gamma_1) = (0.7, 0.5)$, $(h_2, \gamma_2) = (0.1, -0.25)$ на плоскости (h, γ) . Для сравнения точками обозначено рассмотренное выше регулярное решение, изображенное на рис. 3а. Участки сплошной линии, проходящие через начальные точки (h_i, γ_i) , $i = 1, 2$, являются волновыми адиабатами W^\pm . Они соединены участком кривой, выходящей из области гиперболичности Ω и частично совпадающей с границей $\gamma = 1$. Напомним, что при $\gamma = 1$ характеристики (2.5) исходной системы являются вещественными и совпадают.

На рис. 4б показаны зависимости $h = h(t, x)$ (сплошная линия) и $\gamma = \gamma(t, x)$ (штрихпунктир) при $t = 500$. Из рис. 4б видно, что построенное численное решение является разрывным и имеет вполне регулярную структуру.

К настоящему времени построены примеры обобщенных решений уравнений механики сплошных сред, в которых переход между несвязными компонентами области гиперболичности в нестационарных процессах происходит при помощи устойчивых ударных переходов [26, 27]. Однако этот подход не применим к рассматриваемому в данной статье вырожденному случаю и понятие обобщенного решения для модели (1.6) требует дальнейшего исследования.

3. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НАД ПРЕПЯТСТВИЕМ

При моделировании течений в канале конечной длины важной проблемой является корректность постановки граничных условий. Для адекватного описания докритических и транскритических течений требуется исследовать влияние локального препятствия на течение вверх по потоку. В классической

теории однослойной мелкой воды необходимым условием существования транскритического течения является свойство критичности потока над гребнем препятствия. Для двухслойных течений мелкой воды переход от докритического к сверхкритическому течению в стационарных течениях над локальным препятствием имеет существенно более сложную структуру. Даже при отсутствии перемешивания между слоями ($Ri = 0$) свойство критичности потока над гребнем уже не является необходимым для контроля препятствием течения вверх по потоку.

Возможность возникновения других типов контроля связана со сложной волновой структурой двухслойных течений. При $Ri = 0$ различные режимы двухслойного течения над локальным препятствием подробно исследованы в [22, 23]. При $Ri > 0$ анализ двухслойной равновесной модели усложняется еще больше, хотя качественно возникающие режимы стационарного течения над препятствием соответствуют течению двухслойной жидкости без перемешивания между слоями ($Ri = 0$). Поэтому ниже будут только проиллюстрированы основные особенности течений с учетом перемешивания.

В силу однородности системы (1.6) уравнения стационарного течения могут быть проинтегрированы. При $H_0 = 1$ и $b = 1$ получаем следующие соотношения для течений над неровным дном ($u_m = \text{const}$, $z = z(x)$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(hu_m + h \left(1 - \frac{h}{1-z} \right) \gamma - \frac{Ri \gamma^3}{4} \right) &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(\gamma u_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{1-z} \right) \gamma^2 + h + z \right) &= 0, \end{aligned}$$

которые нетрудно свести к алгебраической системе. Однако удобнее найти зависимости $h = h(z)$, $\gamma = \gamma(z)$ из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно независимой переменной z

$$\begin{aligned} u_m h' + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma h' + h \left(1 - \frac{h}{1-z} \right) \gamma' - \frac{3Ri \gamma^2}{4} \gamma' &= \frac{h^2 \gamma}{(1-z)^2}, \\ \left(1 - \frac{\gamma^2}{1-z} \right) h' + \left(u_m + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma \right) \gamma' &= \frac{h \gamma^2}{(1-z)^2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Система (3.1) приводится к нормальной форме

$$h' = \frac{f_1 c_2 - f_2 c_1}{\Delta}, \quad \gamma' = \frac{f_2 a_1 - f_1 a_2}{\Delta}, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= u_m + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma, \quad c_1 = h \left(1 - \frac{h}{1-z} \right) - \frac{3}{4} Ri \gamma^2, \quad f_1 = \frac{\gamma h^2}{(1-z)^2}, \\ a_2 &= 1 - \frac{\gamma^2}{1-z}, \quad c_2 = u_m + \left(1 - \frac{2h}{1-z} \right) \gamma, \quad f_2 = \frac{\gamma^2 h}{(1-z)^2} - 1, \quad \Delta = a_1 c_2 - a_2 c_1. \end{aligned}$$

На плоскости (h, z) решение уравнений (3.2) может представлять различные режимы обтекания локального препятствия $z = z(x)$ в зависимости от параметров набегающего потока. Регулярное транскритическое течение реализуется, если над гребнем препятствия набегающий докритический поток ($\Delta < 0$) преобразуется в сверхкритический над подветренной стороной препятствия. На рис. 5 жирной линией показано решение (3.2), соответствующее транскритическому течению над препятствием ($u_m = 0.3$). Из рисунка видно, что для реализации этого течения в канале высота локального препятствия z_m должна быть равна 0.1. При этом, как и для классических уравнений мелкой воды, решение не зависит от формы препятствия. На рис. 5б пунктирной линией показана зависимость $h = h(t_0, x)$, а сплошными линиями изображено поведение функций $(h \pm 0.5\eta)(t_0, x)$, полученных в численном решении нестационарной

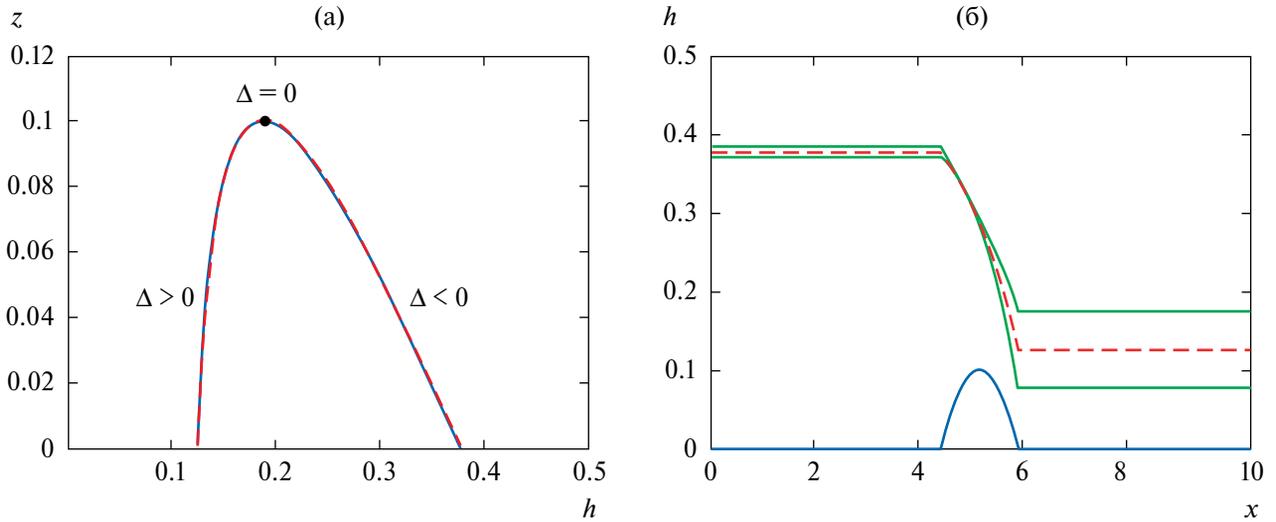


Рис. 5. Регулярное транскритическое течение над локальным препятствием ($u_m = 0.3$): а) – стационарное течение на плоскости (h, z) (докритическое при $\Delta < 0$ и сверхкритическое при $\Delta > 0$); б) – выход нестационарного течения на стационарный режим обтекания при $t_0 = 60$ (пунктирная линия – зависимость $h = h(t_0, x)$, сплошные линии – границы слоя смешения).

задачи об обтекании препятствия двухслойным потоком в рамках модели (1.6) ($t_0 = 60$, течение слева направо) с начальными данными

$$\begin{aligned} h(0, x) &= h_0 - z(x), \quad \gamma(0, x) = \gamma_0, \quad z(x) = \max\{0, z_m - 0.2(x - 5)^2\}, \\ h_0 &= 0.3, \quad \gamma_0 = 0, \quad z_m = 0.1, \quad -L < x < L. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Величина L выбрана достаточно большой так, чтобы возмущения начального состояния не достигали границ расчетной области. При этом над препятствием при $t > 20$ реализуется стационарное транскритическое течение, показанное на рис. 5а пунктирной линией. Это решение полностью совпадает с решением задачи Коши (3.2) с соответствующими начальными данными (3.3).

Другой тип стационарных транскритических течений показан на рис. 6а при $u_m = 0.4$. В этом случае течение непосредственно перед препятствием является критическим ($\Delta > 0$). На переднем склоне течение соответствует сверхкритической кривой Γ_1 ($0 \leq z \leq z_m$). Далее толщина нижнего слоя уменьшается вдоль подветренной стороны склона до локального максимума функции $z = z(h)$, ($z_M \leq z \leq z_m$), затем следует гидравлический прыжок S и течение снова становится сверхкритическим на кривой Γ_2 ($0 \leq z \leq z_M$). Поэтому построенное таким образом решение над гребнем препятствия ($z = z_m$) является сверхкритическим ($\Delta > 0$) а скачок S является “звуковым”, т.е. за скачком $\Delta > 0$ и условия (2.7) выполнены.

Для того, чтобы понять, как формируется такое решение, достаточно рассмотреть течение вверх по потоку от препятствия. На рис. 6б приведено численное решение задачи Коши для уравнений (1.6), аналогичной рассмотренной выше ($u_m = 0.4$, $h_0 = 0.25$, $\gamma_0 = 0$, $z_m = 0.33$). На рисунке показана волновая конфигурация перед препятствием, состоящая из бора максимальной амплитуды и следующей за ней простой волны. Если правая граница простой волны движется с отрицательной скоростью, то есть перед препятствием формируется область постоянного течения, то реализуется регулярный режим обтекания, показанный на рис. 5. Если же скорость этой границы волны обращается в нуль, то регулярный режим обтекания невозможен и течение над препятствием полностью сверхкритическое, как это показано на рис. 6а. Конфигурация течения на рис. 6б при $t = 60$ показывает, что и в этом случае препятствие контролирует поток вверх по течению, что следует иметь в виду при постановке граничных условий в каналах конечной длины. Штрихпунктирная линия представляет зависимость $h = h(t_0, x)$, а сплошные линии обозначают границы слоя смешения ($h \pm 0.5\eta$)(t_0, x). Пунктирная линия на рис. 6а, полученная из численного решения, показывает структуру течения над препятствием на плоскости (h, z) . Из рисунка видно, что численное нестационарное решение и стационарное решение системы (3.2) полностью совпадают

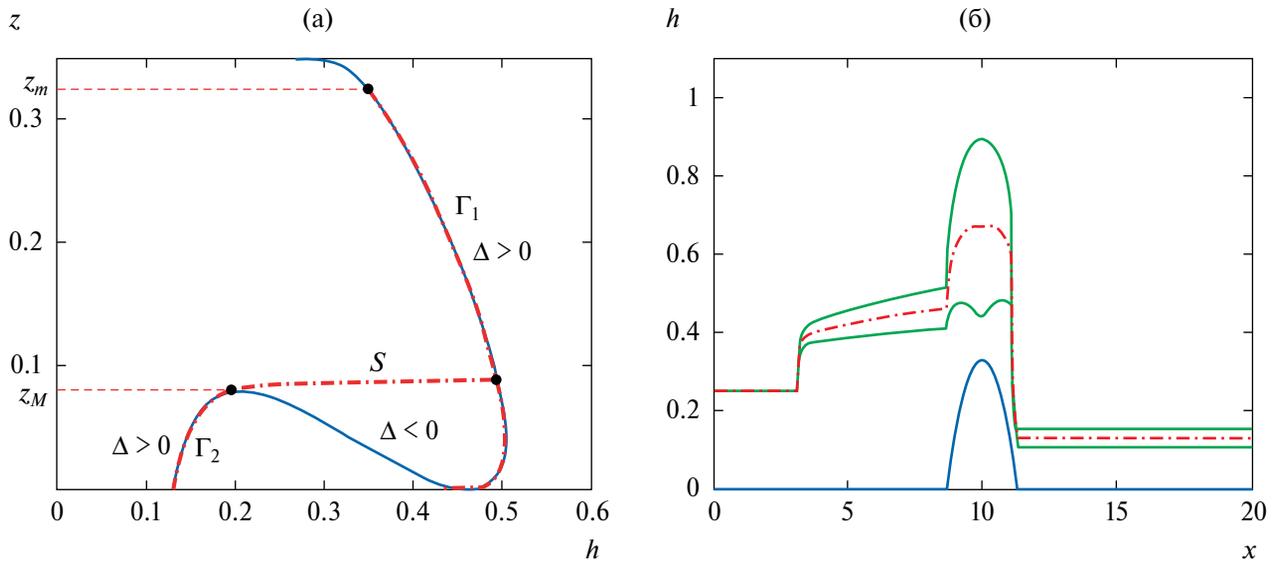


Рис. 6. Нерегулярный режим обтекания локального препятствия ($u_m = 0.4$): а) – структура стационарного течения на плоскости (h, z) , Γ_1 ($0 \leq z \leq z_m$) и Γ_2 ($0 \leq z \leq z_M$) – сверхкритические участки течения, S – внутренний гидравлический прыжок; б) – волновая конфигурация в окрестности препятствия при $t_0 = 60$ (штрихпунктирная линия – зависимость $h = h(t_0, x)$, сплошные линии – границы слоя смешения).

на участках сверхкритического течения ($\Delta > 0$), что подтверждает правило построения стационарных решений при нерегулярном режиме обтекания препятствия.

4. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ E1 И E2

Проведенный анализ стационарных течений над локальными препятствиями дает возможность сравнить поведение решений для моделей E1 и E2. С этой целью рассмотрим течения двухслойной стратифицированной жидкости, реализованные в большом экспериментальном лотке [5]. Особенностью этого эксперимента является возможность регулировки положения гидравлического прыжка на подветренной стороне препятствия условиями ниже по потоку. Детали проведения эксперимента можно найти в [5], результаты расчета по модели E1 в [20]. Здесь мы сравним результаты расчета нестационарных решений, выполненных по моделям E2 и E1 для двух режимов течения над препятствием [20, рис. 5а, 5г]. На рис. 7 приведено сравнение численных решений нестационарных задач, полученных для уравнений (1.6) (модель E2, сплошные линии) и уравнений (1.2, 1.3, 1.5) (модель E1, пунктирные линии). Сплошные и пунктирные линии показывают границы перемешанного слоя для соответствующих моделей.

При задании постоянных расходов Q^\pm в каждом из слоев на левой границе течения реализуется стационарный режим обтекания локального препятствия, соответствующий транскритическому течению, изображенному на рис. 5. На рис. 7а положение гидравлического прыжка на подветренном склоне, переводящего сверхкритическое течение в докритическое, определяется условиями вниз по потоку. В численных расчетах на некотором расстоянии от первого препятствия помещалось второе локальное препятствие, обеспечивающее контроль течения вверх по потоку. Высота этого препятствия выбиралась так, чтобы положение гидравлического прыжка за первым препятствием соответствовало экспериментальным данным. Так как течение за вторым препятствием сверхкритическое, то граничные условия на выходе канала не заданы. В безразмерных переменных, используемых в данной работе, полученное численное решение определяется следующими параметрами: $Q^- = 0.073$, $Q^+ = 0.11$, $z_m^2 = 0.138$, где z_m^2 – высота второго препятствия.

Из рис. 7 видно, что на транскритическом участке течения имеется хорошее соответствие между моделями E1 и E2. Однако за гидравлическим прыжком разность скоростей во внешних слоях резко уменьшается. Поэтому толщина прослойки в модели E2 близка к нулю. В рамках модели E1 перемешанный слой не схлопывается и соответствует толщине наблюдаемой в эксперименте подкрашенной прослойки (рис. 7а).

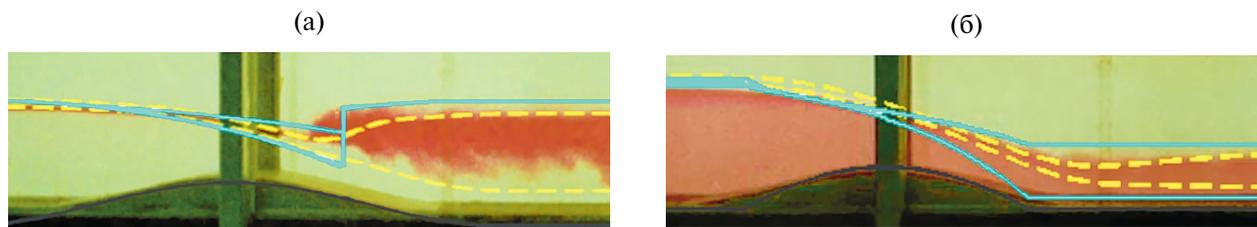


Рис. 7. Сравнение моделей E1 (пунктирные линии) и E2 (сплошные линии) с экспериментальными данными [5]: а) – течение с подветренным гидравлическим прыжком; б) – регулярное транскритическое течение.

В качестве второго примера сравнения моделей выбрано течение с отогнанным гидравлическим прыжком ($z_m^2=0$). В этом случае результаты расчета течения над препятствием в рамках модели E1 наиболее отличаются от полученных экспериментально (см. [20, рис. 5г]), в то же время вне препятствия границы между слоями передаются адекватно. Расчеты по модели E2 также существенно отличаются от наблюдаемой в эксперименте границы раздела над локальным препятствием, а вне препятствия соответствуют как экспериментальным данным, так и модели E1.

Для того, чтобы найти причину расхождения вычислительных и экспериментальных результатов заметим, что для приведенных в статье [5] определяющих безразмерных параметров ($Q^- = 0.134$, $Q^+ = 0.2$, $z_m = 0.21$) в рамках модели E2 течение соответствует картине, изображенной на рис. 6 б, то есть течение непосредственно перед препятствием критическое, а над гребнем сверхкритическое. Для трехслойной модели E1 классификация стационарных решений усложняется, но характерный немонотонный профиль внутренней границы раздела над гребнем также свидетельствует о сверхкритическом режиме обтекания [20, рис. 5г]. Так как модели E1 и E2 выведены с использованием гипотезы о гидростатичности распределения давления во всей области течения, то влияние негидростатических эффектов может быть более выраженным для такого режима течения, чем для регулярных режимов обтекания препятствия. Поэтому переход к нерегулярному режиму в лабораторном эксперименте при возрастании скоростей в слоях может затягиваться. Для модели без перемешивания ($Ri = 0$) учет влияния негидростатических эффектов показал возможность использования двухслойной схемы обтекания локального препятствия для интерпретации экспериментальных данных и в случае нерегулярного режима течения [28, рис. 5]. Учет негидростатических эффектов в равновесных моделях течения многослойной стратифицированной жидкости требует дальнейшего исследования.

Заметим, что даже относительно небольшое уменьшение расходов в слоях ($Q^- = 0.12$, $Q^+ = 0.17$, $z_m = 0.21$) в численных расчетах по моделям E1 и E2 приводит к регулярному режиму обтекания препятствия, близкому к наблюдаемому в эксперименте. Для этих данных на рис. 7б результаты расчета по модели E2 (сплошные линии) и модели E1 (пунктирные линии) приведены на фоне фотографии из статьи [5, рис. 6г]. В отсутствие подветренного гидравлического прыжка равновесные модели E1 и E2 качественно описывают эволюцию границ слоя смешения во всей области течения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Равновесные модели выводятся из более общих моделей при дополнительных и весьма ограничительных требованиях на характер движения сплошной среды. Поэтому они пригодны только для описания определенных классов течений. Но редукция определяющих течение уравнений к более простой системе позволяет расширить класс точных решений и более полно исследовать корректность постановки граничных условий для рассматриваемых нелинейных задач. Предложенная в работе модель (1.6) по структуре аналогична классическим уравнениям двухслойной мелкой воды без перемешивания между слоями ($Ri = 0$). Структура автомодельных решений (простых центрированных волн и устойчивых ударных переходов) также соответствует этому случаю. Основное отличие состоит в поведении решений в окрестности границы области гиперболичности. Проведенные численные расчеты нестационарных течений показывают возможность выхода решения из области гиперболичности и нарушения корректности задачи Коши для рассматриваемой системы. С другой стороны, полученное численное решение остается достаточно регулярным. Таким образом, вопрос о построении решения системы (1.6) со значениями,

выходящими из области гиперболичности, зависит от понятия обобщенного решения в рассматриваемом классе течений и требует дальнейшего исследования.

Анализ стационарных двухслойных течений над локальным препятствием в рамках модели (1.6) сводится к исследованию алгебраической системы уравнений. Показано, что транскритические течения смешивающейся жидкости кроме регулярного режима обтекания, в котором переход от докритического к сверхкритическому течению происходит над гребнем препятствия, допускают также полностью сверхкритическое течение над препятствием. В этом случае течение вверх по потоку не зависит от высоты препятствия, а контроль течения обеспечивается условием критичности потока непосредственно перед локальным препятствием. Таким образом показано, что условия, обеспечивающие контроль течения вверх по потоку, для равновесной модели (1.6) аналогичны случаю течения несмешивающихся жидкостей, исследованному в [22, 23].

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092129>
2. *Thorpe S.A., Li Lin.* Turbulent hydraulic jumps in a stratified shear flow. Part 2 // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 758. P. 94–120.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2014.502>
3. *Baines P.G.* Internal hydraulic jumps in two-layer systems // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 787. P. 1–15.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2015.662>
4. *Ogden K.A., Helfrich K.R.* Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear // *Phys. Rev. Fluids.* 2020. V. 5. 074803.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.074803>
5. *Lawrence G.A., Armi L.* Stationary internal hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 936. A25.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2022.74>
6. *Rastello M., Hopfinger E.J.* Sediment-entraining suspension clouds: a model of powder-snow avalanches // *J. Fluid. Mech.* 2004. V. 509. P. 181–206.
<https://doi.org/10.1017/S0022112004009322>
7. *Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V.* A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 574. P. 393–403.
<https://doi.org/10.1017/S0022112006004198>
8. *Dai A.* Experiments on gravity currents propagating on different bottom slopes // *J. Fluid Mech.* 2013. 731 pp. 117–141.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2013.372>
9. *Zhu R., He Z., Meiburg E.* Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks // *J. Fluid Mech.* 2023. V. 960. A1.
<https://doi.org/10.1017/jfm.2023.146>
10. *Turner J.S.* Turbulent entrainment: the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 183. P. 431–471.
<https://doi.org/10.1017/S0022112086001222>
11. *Baines P.G.* Topographic effects in stratified flows. Cambridge Univ. Press, 1995. 500 p.
DOI: 10.1017/9781108673983
12. *Klymak M., Moum J.N.* Internal solitary waves of elevation advancing on a shoaling shelf // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30, Issue 20. 2045.
<https://doi.org/10.1029/2003GL017706>
13. *Bourgault D., Kelley D.E., Galbraith P.S.* Interfacial solitary wave run-up in the St. Lawrence Estuary // *J. Marine Res.* 2005. V. 63. P. 1001–1015.
DOI:10.1357/002224005775247599
14. *Lamb K.* Shoaling solitary internal waves: on a criterion for the formation of waves with trapped cores // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 478. P. 81–100.
<https://doi.org/10.1017/S0022112002003269>

15. *Ляпидевский В.Ю., Храпченков Ф.Ф., Чесноков А.А., Ярошук И.О.* Моделирование нестационарных гидродинамических процессов на шельфе Японского моря // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 57–68.
<https://doi.org/10.31857/S0568528122010066>
16. *Кириллов В.В., Ляпидевский В.Ю., Суторихин И.А., Храпченков Ф.Ф.* Особенности трансформации нелинейных внутренних волн на шельфе и в глубоком озере // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 6. С. 121–131.
DOI: 10.31857/S1024708423600537
17. *Parker G., Fukushima Y., Pantin H.M.* Self-accelerating turbidity currents // J. Fluid Mech. 1986. V. 171. P. 145–81.
<https://doi.org/10.1017/S0022112086001404>
18. *Liapidevskii V. Yu., Dutykh D.* On the velocity of turbidity currents over moderate slopes // Fluid Dyn. Res. 2019. V. 51, № 3. 035501.
DOI: 10.1088/1873-7005/ab0091
19. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М; Мир, 1977. 621 с.
20. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.* Равновесная модель слоя смешения в сдвиговом течении стратифицированной жидкости // ПМТФ. 2024.
DOI: 10.15372/PMTF202315412
21. *Ляпидевский В.Ю.* Равновесная модель плотностного течения // Труды МИАН. 2023. Т. 322. № 6. С. 167–189.
<https://doi.org/10.4213/tm4303>
22. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Изд-во СО РАН, Новосибирск, 2000, 420 с.
23. *Vaines P.G.* A unified description of two-layer flow over topography // J. Fluid Mech. 1984. V. 146. P. 127–167.
<https://doi.org/10.1017/S0022112084001798>
24. *Lax P.D.* Hyperbolic systems of conservation laws II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
<https://doi.org/10.1002/cpa.3160100406>
25. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.
26. *Гаврилюк С.Л.* Задача о распаде произвольного разрыва для газа Ван-дер-Ваальса // Динамика жидкости со свободными границами. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1985. С. 36–54. (Динамика сплошной среды; Вып. 69).
27. *Ляпидевский В.Ю.* Течение Куэтта вязкоупругой среды максвелловского типа с двумя временами релаксации // Труды МИ АН. 2018, Т. 300. С. 146–157.
DOI: 10.1134/S0371968518010119
28. *Bukreev V.I., Gusev A.V., Liapidevskii V. Yu.* Blocking effects in supercritical flows over topography // PIV and Modeling Water Wave Phenomena, Proc. of the Int. Symp. (Cambridge, UK, April 18–19, 2002), Univ. of Oslo (2002). P. 86–90.

Two-Layer Equilibrium Model of Miscible Inhomogeneous Fluid Flow

V. Yu. Liapidevskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

e-mail: liapid@hydro.nsc.ru

Two-layer flow of a density-stratified fluid with mass transfer between the layers is considered. In the Boussinesq approximation, the equations of motion are reduced to a homogeneous quasilinear system of partial differential equations of mixed type. The flow parameters in the intermediate mixed layer are determined from the equilibrium conditions in a more general model of three-layer flow of a miscible fluid. In particular, the equilibrium conditions imply the constancy of the interlayer Richardson number in velocity-shift flows. A self-similar solution to the problem of breakdown of an arbitrary discontinuity (the lock-exchange problem) in the domain of hyperbolicity of the system under consideration is constructed. The transcritical flow regimes over a local obstacle are studied and the conditions under which the obstacle determines the upstream flow are determined. A comparison of steady-state and time-dependent solutions with the solutions obtained for the original three-layer models of miscible fluid flow is carried out.

Keywords: equilibrium model, two-layer flow, Boussinesq approximation, miscible fluids.

УДК 532.517.3

РАЗВИТИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ СТРУЕ

© 2024 г. Д. А. Ашуров^а, Н. В. Никитин^б

МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

^а*e-mail*: ashurovda@my.msu.ru

^б*e-mail*: nvnikitin@mail.ru

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Численно исследуется немодальное развитие стационарных трёхмерных возмущений в круглой струе при $Re=2850$. Воспроизводятся условия лабораторного эксперимента, выполненного ранее в НИИ механики МГУ. Разработан метод расчёта оптимальных возмущений в условиях развивающегося вниз по потоку основного течения. Рассчитаны возмущения, отвечающие разным азимутальным числам. Определены форма, характер развития и степень роста оптимальных возмущений.

Ключевые слова: затопленная струя, уравнения Навье–Стокса, гидродинамическая неустойчивость, немодальный рост, оптимальные возмущения.

DOI: 10.31857/S1024708424040071, **EDN**: OYMI3C

Широкое распространение струйных течений в природных системах и технических устройствах стимулирует интерес инженеров и исследователей к изучению различных явлений, связанных с их развитием. Турбулизация струй существенно меняет, например, интенсивность тепло- и массообмена с окружающей средой, поэтому изучение деталей ламинарно-турбулентного перехода в струях чрезвычайно актуально, в частности, с целью поиска средств управления переходом для получения оптимальных решений и повышения эффективности технологических процессов. Ламинарные струйные течения теряют устойчивость уже при очень низких числах Рейнольдса $Re \sim 10^1 - 10^2$ [1–3]. При больших $Re \sim 10^3 - 10^4$ переход к турбулентности в круглых струях происходит, как правило, в непосредственной близости от среза сопла, в пределах расстояния $1D$ (D – диаметр сопла). Несколько лет назад в стенах НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова было спроектировано и изготовлено компактное устройство создания круглых воздушных струй, обеспечивающее сохранение ламинарного течения при $Re = U_b R / \nu < 6000$ (U_b – средняя скорость во входном потоке, $R = D/2$, ν – кинематическая вязкость) на расстояниях до $\sim 6D$ при $D = 0.12$ м [4,5]. При этом размер устройства составляет всего около $1.5D$.

Процесс ламинарно-турбулентного перехода в струях существенно зависит как от формы начального профиля средней скорости, так и от состава и интенсивности возмущений на срезе сопла. Основным механизмом турбулизации является неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, возникающая в окрестности точек перегиба в профиле скорости. В последние годы определённый интерес исследователей привлекает также альтернативный, так называемый немодальный механизм роста возмущений [6,7]. Математически немодальный механизм представляет собой временное увеличение амплитуды возмущения, состоящего из комбинации затухающих неортогональных составляющих. К примеру, сумма двух исходно равных по длине, но противоположно направленных в пространстве векторов, затухающих по закону e^{-t} и e^{-2t} (t – время), сначала увеличивается по модулю от 0 до $1/4$, и только после начинает уменьшаться. Отметим, что так же, как и классический модальный рост возмущений, отвечающий линейной неустойчивости течения, немодальный механизм временного роста является линейным. Оператор линеаризованных уравнений Навье–Стокса, соответствующий задаче устойчивости течений с градиентом скорости, является несамосопряжённым, а значит, его собственные векторы (моды) неортогональны. Следовательно, наряду с растущими модами, отвечающими классическому модальному усилению возмущений, могут существовать возмущения, растущие немодальным образом. И хотя эти возмущения, в отличие от экспоненциально растущих собственных мод, в конечном итоге затухают, их начальный рост может быть более интенсивным и приводить к более раннему проявлению нелинейных эффектов.

Можно поставить задачу о поиске формы начального возмущения, приводящей к максимальному росту. Такие возмущения называются оптимальными. Структура и характеристики оптимальных возмущений определены для большинства классических сдвиговых течений. Особенно подробные исследования были выполнены для пристенных течений, в которых механизм модального роста (волны Толмина–Шлихтинга) либо слаб (течение Блазиуса, плоское течение Пуазейля), либо отсутствует вовсе (плоское течение Куэтта, течение Пуазейля в трубе) [8–12]. Считалось, что в струйных течениях, в которых механизм неустойчивости Кельвина–Гельмгольца приводит к интенсивному росту возмущений, механизм немодального роста не имеет потенциала существенного влияния на процессы ламинарно-турбулентного перехода. В, однако, было теоретически показано, что в круглых струях при $Re = 10^3$ интенсивность малых возмущений при учёте немодального механизма роста может в десятки раз превосходить интенсивность наиболее быстро растущей неустойчивой моды. Аналогичные выводы были сделаны в последующих численных исследованиях [14, 15]. Отметим также другие работы [16, 17], в которых изучались вопросы немодального развития возмущений в сдвиговых течениях. В [18] экспериментально показано, что при внесении в струю стационарного неосесимметричного возмущения ламинарно-турбулентный переход может происходить, минуя стадию развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, что косвенно свидетельствует о важности немодального механизма роста возмущений. В [19] проведено численное исследование устойчивости двумерных распределений скорости в струе, деформированной оптимальными возмущениями на разных стадиях (включая нелинейный этап) их развития. Обнаружено, что во многих случаях наиболее неустойчивое возмущение в деформированном течении имеет меньший инкремент роста, чем в исходном осесимметричном течении. Последнее наводит на мысль, что внесение в поток возмущений, развивающихся немодальным образом, может не только ускорять рост возмущений и приводить к более раннему переходу, но и наоборот, сдерживать проявление неустойчивости и, вероятно, затягивать переход к турбулентности.

Отметим, что во всех цитированных работах по численному исследованию развития возмущений в струях основное течение считалось параллельным, то есть не изменялось вниз по потоку. В настоящей работе впервые предложен алгоритм, а также проведено изучение немодального развития и поиск оптимальных стационарных возмущений в условиях, наиболее приближенных к экспериментальным условиям [4, 5, 18] с учетом развития потока в пространстве.

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача об истечении вязкой несжимаемой жидкости в полупространство $\{x > 0\}$ из круглого отверстия радиусом R (срез сопла) в плоскости $\{x = 0\}$. Свойства окружающей среды совпадают со свойствами вытекающей струи. Нестационарное поле скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ (t – время, \mathbf{x} – точка пространства) отыскивается путём численного решения уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь p – кинематическое давление, ν – вязкость жидкости.

Задача решается в цилиндрической системе координат $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$ в цилиндрической расчётной области $\{0 < x < X_m, r < R_m\}$. Радиус расчётной области R_m значительно превышает радиус сопла. На срезе сопла задаётся вообще говоря нестационарное поле скорости (входные граничные условия): $\mathbf{u}(x = 0, r \leq R) = \mathbf{U}_0(t, r, \theta)$. На остальной площади входного сечения $\{x = 0, r > R\}$ и на цилиндрической границе расчётной области $\{x = 0, r = R_m\}$ ставятся условия непротекания и свободного проскальзывания. На выходной границе $\{x = X_m\}$ задаются мягкие граничные условия $\partial \mathbf{u} / \partial x = 0$. Цель работы состоит в исследовании поведения струи на начальном участке длиной порядка $20R$; для исключения влияния искусственных выходных условий на результаты расчётов в интересующей области длина расчётной области X_m выбирается существенно превышающей этот размер.

Для численного решения задачи применяется универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса [20], использующий конечно-разностный метод пространственной дискретизации в направлениях x и r и полуявную схему интегрирования по времени. В продольном направлении используется равномерная расчётная сетка, а в радиальном – неравномерная, с экспоненциальным ростом шага сетки при $r > R$. Для представления искомым функций по угловой координате используются тригонометрические ряды Фурье.

2. ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

В настоящей работе приводятся результаты исследований, соответствующих условиям эксперимента [4, 5] при $Re = 2850$ (в упомянутых работах число Рейнольдса вычисляется не через радиус, а через диаметр сопла и принимает поэтому вдвое большие значения). Характерной особенностью профиля скорости на срезе сопла $U_0(r)$, реализующегося при этом Re , является наличие трёх точек перегиба. Первая точка перегиба расположена в районе $r = 0.5$, а пара других – в районе $r = 0.8 - 0.9$. Здесь и далее все величины представляются в безразмерном виде. В качестве масштабов берутся радиус сопла R и средняя скорость течения U_b . Рассматриваемой форме профиля скорости отвечают две моды неустойчивых возмущений, развивающихся по существенно различающимся законам. Результаты расчётов основного течения и его устойчивости представлены в [21].

Для расчёта основного течения $\mathbf{u} = \mathbf{U} = (U(x, r), V(x, r), 0)$ уравнения (1.1) решаются с осесимметричным стационарным условием на входе $\mathbf{u}(x = 0) = (U_0(r), 0, 0)$ и начальным условием $\mathbf{u}(x > 0) = \mathbf{u}(x = 0)$. Задача интегрируется по времени до установления стационарного решения. Скорость на оси струи при рассматриваемом числе Рейнольдса претерпевает лишь незначительные изменения, падение при $x = 40$ составляет всего около 1%. Основная деформация профиля продольной компоненты наблюдается в периферийной области $r > 0.85$. Внешние точки перегиба, наблюдающиеся во входном течении, пропадают уже при $x \approx 7.5$. Соответствующие обобщённые точки перегиба, определяемые из условия $(U'(r)/r)' = 0$ (штрих обозначает производную) и ответственные за возникновение неустойчивости в осесимметричных течениях, пропадают ещё раньше, при $x \approx 3.75$. Величина радиальной компоненты скорости на всём протяжении струи остаётся на три порядка меньше продольной. В каждом сечении x , радиальная скорость положительна в области ядра струи, $r < 1$, что отражает факт расширения струи. Во внешней области радиальная компонента отрицательна, что соответствует увлечению жидкости из окружающего пространства. Этот эффект максимален вблизи входного сечения и ослабевает по мере удаления от него.

При исследовании устойчивости основного течения поле скорости в (1.1) представляется в виде суммы основного течения и возмущения: $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$. Возмущения предполагаются малыми, и уравнения линеаризуются относительно \mathbf{u}'

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{u}' + (\mathbf{u}'\nabla)\mathbf{U} = -\nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}', \quad \nabla \mathbf{u}' = 0 \quad (2.1)$$

Здесь p' – возмущение давления. Решение линейных уравнений (2.1) проводилось в двух постановках. В первой, *квaziпараллельной* постановке, изменение основного течения вдоль направления x учитывается лишь параметрически. Другими словами, уравнения решаются для серии основных течений вида $\mathbf{U} = \mathbf{U}(r)$, полученных для разных значений координаты x , а членами, содержащими производные по x от компонент скорости основного течения, пренебрегается. Обоснованием применения квазипараллельного подхода является малая скорость изменения основного течения вдоль продольной координаты по сравнению с изменениями по радиусу. Во второй, более полной *пространственной* постановке, уравнения для возмущений решаются без дополнительных упрощений с определёнными нестационарными граничными условиями на входе. Факт устойчивости или неустойчивости основного течения устанавливается в этом случае по характеру эволюции разных возмущений вниз по потоку. Получено хорошее количественное согласие результатов двух подходов, а также согласие с результатами невязкой теории и экспериментальными данными [4, 22]. Основное качественное свойство устойчивости течения состоит в существовании двух мод растущих возмущений: внутренней и внешней, отвечающих внутренней ($r \approx 0.5$) и паре внешних ($r \approx 0.85$) точек перегиба. Скорость роста возмущений внешней моды на порядок превышает аналогичную скорость роста возмущений внутренней моды. Однако эта неустойчивость пропадает уже на ранних стадиях развития струи вместе с исчезновением внешних точек перегиба в профиле скорости основного течения. Неустойчивость к внутренним модам сохраняется на всём протяжении развития струи.

3. РАСЧЁТ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

При стационарных граничных условиях во входном сечении $x = 0$ стационарные решения (2.1) отыскиваются методом установления, т.е. как предельные при $t \rightarrow \infty$ значения решений нестационарных уравнений с начальными условиями, в которых продольная компонента скорости постоянна вдоль x ,

а поперечные компоненты при $x > 0$ равны нулю. Линейность и однородность системы (2.1) по угловой координате позволяют искать её стационарные решения в виде

$$\mathbf{u}'(x, r, \theta) = (u', v', w')^T = (u(x, r) \cos n\theta, v(x, r) \cos n\theta, w(x, r) \sin n\theta)^T$$

при различных целых значениях азимутального числа n .

Предполагается, что возмущения скорости при $x = 0$ могут иметь ненулевые значения только внутри сопла, то есть при $r < 1$. Пусть этой области отвечают первые M узлов радиальной сетки: $0 < r_1 < \dots < r_M < 1 < r_{M+1} < \dots < r_{Jm} \leq R_m$. При заданном n построим фундаментальную систему из $3M$ численных решений $\{\mathbf{u}'_k(x, r, \theta)\}$, отвечающих граничным условиям

$$\mathbf{u}'_k(0, r_m, \theta) = \begin{cases} (\delta_{k,m} \cos n\theta, 0, 0)^T, & k = 1, \dots, M \\ (0, \delta_{k-M,m} \cos n\theta, 0)^T, & k = M + 1, \dots, 2M \\ (0, 0, \delta_{k-2M,m} \sin n\theta)^T, & k = 2M + 1, \dots, 3M \end{cases}$$

Любое распределение возмущения скорости во входном сечении на заданной радиальной сетке может быть представлено в виде линейной комбинации функций $\mathbf{u}'_k(0, r, \theta)$, а следовательно, любое стационарное решение линейной системы (2.1) при принятых ограничениях на локализацию входного возмущения представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений:

$$\mathbf{u}'(x, r, \theta) = \sum_{k=1}^{3M} C_k \mathbf{u}'_k(x, r, \theta) \quad (3.1)$$

Для кинетической энергии возмущения в сечении x получаем выражение

$$E(x) = \frac{1}{2} \iint |\mathbf{u}'(x, r, \theta)|^2 r dr d\theta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3M} \sum_{m=1}^{3M} A_{km}(x) C_k C_m \quad (3.2)$$

Здесь интегрирование ведётся по площади поперечного сечения расчётной области. Коэффициенты $A_{km}(x)$ вычисляются по формуле

$$A_{km}(x) = \iint (\mathbf{u}'_k(x, r, \theta) \cdot \mathbf{u}'_m(x, r, \theta)) r dr d\theta$$

Задача отыскания оптимальных возмущений сводится к поиску значений коэффициентов $\{C_k, k = 1, \dots, 3M$ в (3.1), обеспечивающих максимальное значение кинетической энергии возмущений $E(x)$ при фиксированном её значении в начальном сечении, например, $E(0) = 1$. Таким образом, приходим к задаче отыскания условного экстремума $E(x)$ (3.2) как функции $\{C_k\}$. Для решения этой задачи строится функция Лагранжа

$$\Phi(C_1, \dots, C_{3M}, \lambda; x) = E(x) - \lambda(E(0) - 1)$$

Искомые значения коэффициентов C_k находятся из системы уравнений $\partial\Phi/\partial C_k = 0, k = 1, \dots, 3M$, откуда получается задача на собственные значения

$$|A(x) - \lambda A(0)| = 0, A(x) = \{A_{kn}(x)\} \quad (3.3)$$

Матрицы $A(x), A(0)$ положительно определены, что обеспечивает существование $3M$ положительных собственных значений задачи (3.3). Максимальное из собственных значений $\lambda_1 = \lambda_1(x)$ показывает коэффициент усиления (амплификацию) энергии оптимального возмущения $E(x)/E(0)$ при данном x , а соответствующий собственный вектор даёт набор коэффициентов $\{C_k\}$ в (3.1), отвечающий оптимальному возмущению.

Целью данной работы является численное сопровождение экспериментов [4, 5], в которых переход к турбулентности при любых условиях (при рассматриваемом $Re = 2850$ наблюдается не далее расстояния

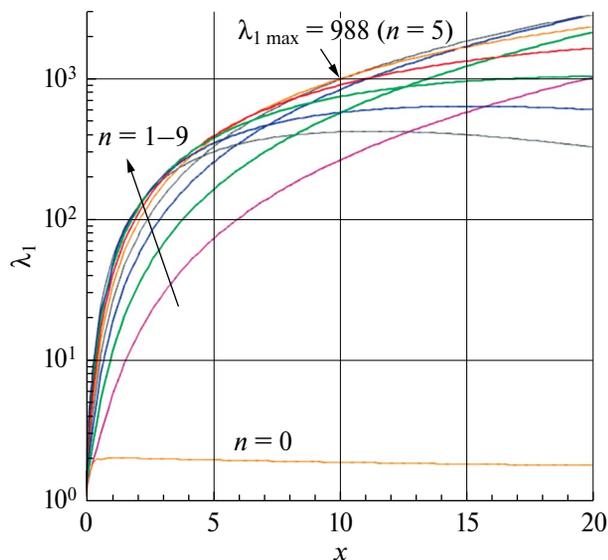


Рис. 1. Коэффициенты усиления оптимальных возмущений $\lambda_1(x) = E(x)/E(0)$.

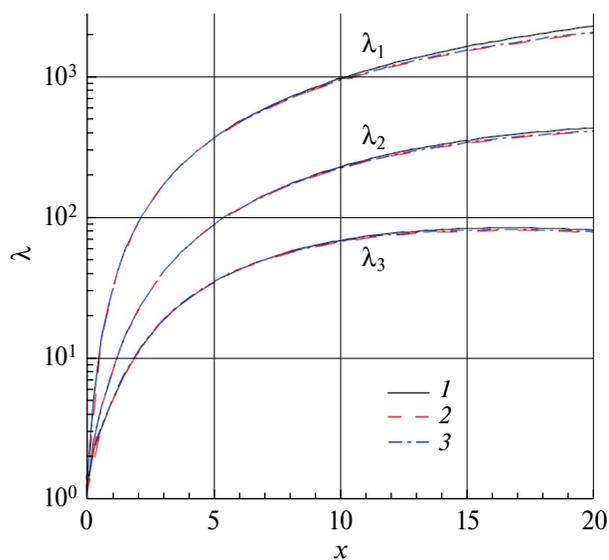


Рис. 2. Коэффициенты усиления оптимальных $\lambda_1(x)$ и субоптимальных $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ возмущений, рассчитанные на разных сетках при $n = 5$: 1 – $X_m = 20$, $R_m = 6$, $I_m \times J_m = 512 \times 64$, $M = 33$; 2 – $X_m = 12$, $R_m = 6$, $I_m \times J_m = 1024 \times 128$, $M = 42$; 3 – $X_m = 20$, $R_m = 6$, $I_m \times J_m = 1024 \times 128$, $M = 67$.

в 5–6 диаметров струи от среза сопла. Поэтому основное внимание уделяется изучению развития возмущений на небольших удалениях. Основная серия расчётов проведена в расчётной области размером X_m , $R_m = 6$ на сетке $I_m \times J_m = 512 \times 64$. При этом на область $r \leq 1$ приходится $M = 33$ узла радиальной сетки. Для оценки точности вычислений часть расчётов продублирована в областях большего размера и на сетках большего объёма.

На рис. 1 показаны результаты расчётов коэффициента усиления $E(x)/E(0) = \lambda_1(x)$ оптимальных возмущений, соответствующих разным значениям азимутального числа от $n = 0$ до $n = 9$. Осесимметричные возмущения не испытывают заметного усиления, едва достигая двухкратного максимального роста. Среди трёхмерных возмущений на начальном этапе наиболее быстро растут возмущения с наибольшими номерами n в исследованном диапазоне, однако на больших расстояниях они уступают возмущениям с меньшими номерами. При $x = 10$ наибольшая амплификация $\lambda_1 \approx 988$ отвечает возмущениям с $n = 5$. Отметим, что немодальное усиление амплитуды возмущений $A(x) = \sqrt{2E(x)}$ на отрезке $x < 10$ достигает 30, что в несколько раз превышает модальный рост возмущений в рассматриваемом течении под действием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Коэффициенты усиления оптимальных возмущений $\lambda_1(x)$, а также следующих двух субоптимальных возмущений, то есть соответствующих $\lambda_2(x)$ и $\lambda_3(x)$, полученные на трёх разных сетках для $n = 5$, показаны на рис. 2. Вторая сетка отличается от основной удвоенными размерами расчётной области $X_m = 40$, $R_m = 12$ с пропорциональным увеличением числа узлов $I_m \times J_m = 1024 \times 128$. При этом число узлов радиальной сетки на отрезке $[0, 1]$ увеличивается до $M = 42$. На третьей сетке число узлов удвоено в каждом направлении, а размеры расчётной области оставлены без изменения. Вариации сетки показывают отсутствие качественных различий в результатах с незначительными количественными изменениями. Вариации λ_1 при $x = 10$ на разных сетках составляют около 3%, ещё меньшие относительные погрешности наблюдаются для λ_2 и λ_3 . Аналогичная точность результатов расчётов достигается при других значениях n .

Рост энергии оптимального возмущения происходит благодаря действию лифт-ап-эффекта. В начальном возмущении присутствуют в основном только поперечные составляющие вектора скорости. Несмотря на затухание вниз по потоку под действием вязкости, это поперечное движение, действуя на фоне градиента скорости основного течения, успевает произвести значительное возмущение продольной

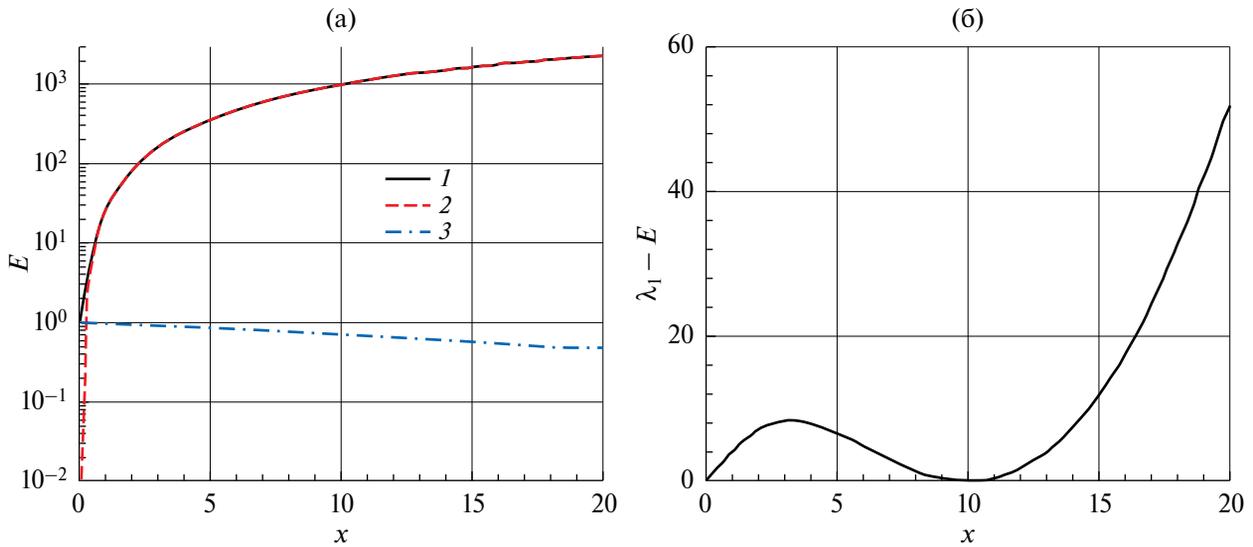


Рис. 3. Развитие оптимального возмущения, отвечающего $x = 10, n = 5$. (а): $1 - E(x), 2 - E_s(x), 3 - E_r(x)$ (3.4); (б): $\lambda_1 - E$.

компоненты. На рис. 3а показано изменение энергии возмущения $E(x)$, а также энергии продольной $E_s(x)$ и поперечной $E_r(x)$ составляющих при развитии оптимального возмущения при $n = 5$, соответствующего $x = 10$. Здесь

$$E_s(x) = \frac{1}{2} \iint u'^2(x, r, \theta) r dr d\theta; \quad E_r(x) = \frac{1}{2} \iint (v'^2(x, r, \theta) + w'^2(x, r, \theta)) r dr d\theta \quad (3.4)$$

В начальном сечении оптимальное возмущение практически полностью состоит из поперечного движения. При нормировке $E(0) = 1$ энергия продольной компоненты составляет менее 10^{-3} . Далее, при $x > 0$ поперечное движение монотонно затухает по близкому к экспоненциальному закону, а продольная компонента набирает силу, приближаясь по энергии к $E(x)$. Рост энергии продольной компоненты возмущения $E_s(x)$ на первых порах близок к квадратичному, а рост амплитуды $A_s(x) = \sqrt{2E_s(x)}$ – к линейному. Поэтому немодальный рост часто называют алгебраическим.

Отметим, что каждому значению $\lambda_1(x)$ отвечает свой собственный вектор оптимального возмущения, соответствующий этому значению x , который не является оптимальным для других x . Иллюстрацией сказанного является рис. 3б, где показана разница λ_1 и энергии оптимального возмущения, отвечающего $x = 10$, т.е. возмущения, вырастающего больше любых других на расстоянии $x = 10$. Величина $\lambda_1 - E$ в этом случае всюду положительна при $x > 0$ за исключением точки $x = 10$, где она обращается в ноль. В рассматриваемом случае рассогласование $\lambda_1(x)$ и $E(x)$ невелико, максимум при $x = 20$ едва достигает 3%.

На рис. 4 показаны распределения скорости оптимальных (а) и субоптимальных (б), т.е. отвечающих λ_1 и λ_2 возмущений в центральной части плоскости $x = 10$. Представлен случай $n = 1$. Аналогичные распределения для $n = 5$ даны на рис. 5. Цветом показаны поля продольной компоненты, стрелками – поперечные движения. При $n = 1$ оптимальное возмущение характеризуется поперечным движением, направленным на рисунке справа налево в ядре потока и в обратном направлении на периферии. В правую часть ядра струи переносятся частицы жидкости с низкой скоростью, отчего здесь возникает дефицит скорости продольной компоненты. Наоборот, в левую часть попадают частицы из приосевой области, вызывая положительное значение возмущения продольной компоненты скорости. В субоптимальном возмущении в поперечном движении присутствует две пары вихрей, внешняя и внутренняя. Внутренние вихри занимают область $r < 0.7$. Движение в нижнем вихре на рисунке направлено по часовой стрелке, а в верхнем – против. В результате в правой части ядра струи возникает повышение продольной компоненты скорости, а в левой части – понижение. За пределами области $r < 0.7$ наблюдается вихревое поперечное движение с обратным направлением: вверху по часовой стрелке, а внизу – против. В результате появляются ещё две области концентрации продольной компоненты возмущения скорости

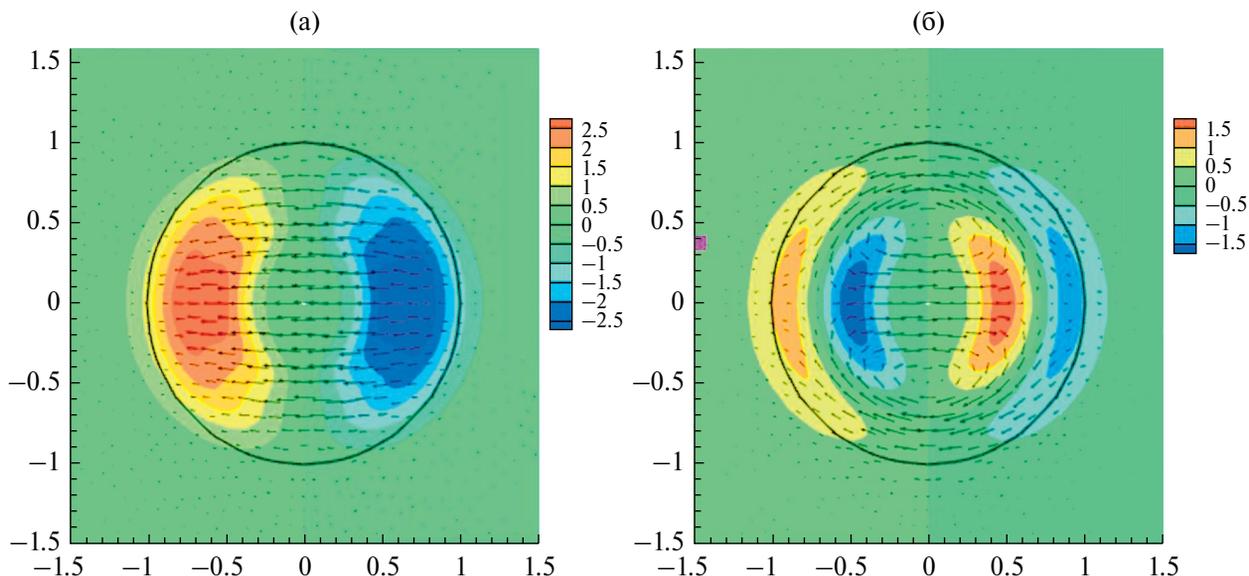


Рис. 4. Поле скорости оптимального (а) и субоптимального (б) возмущения, отвечающего $x = 10$, $n = 1$. Цветом показано возмущение продольной компоненты скорости, стрелки показывают поперечное движение.

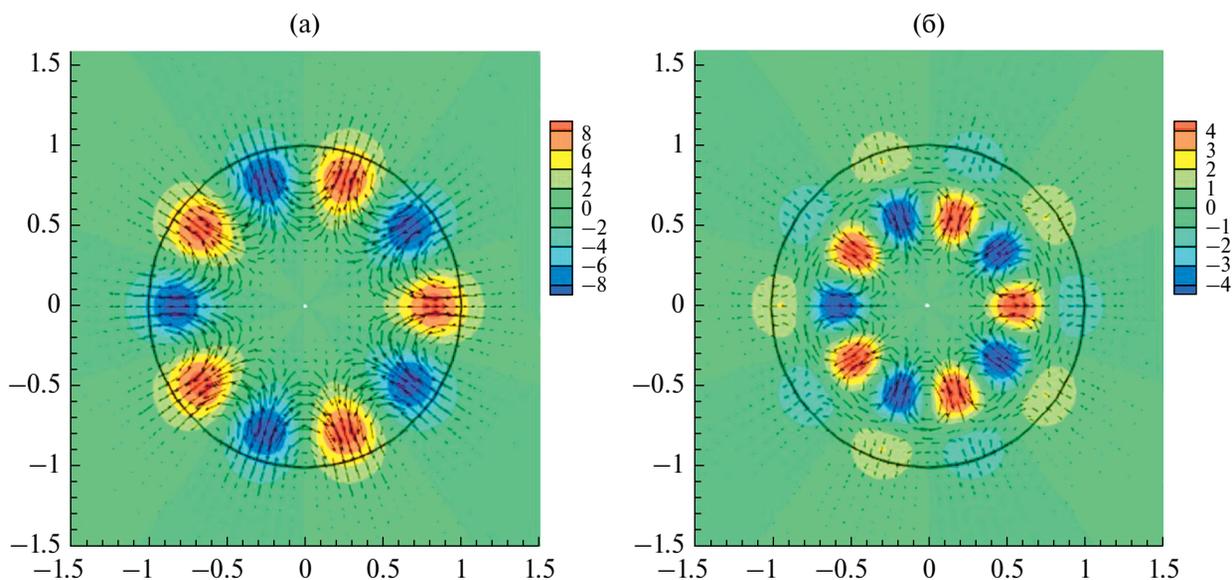


Рис. 5. Поле скорости оптимального (а) и субоптимального (б) возмущения, отвечающего $x = 10$, $n = 5$. Цветом показано возмущение продольной компоненты скорости, стрелки показывают поперечное движение.

с положительным значением слева и отрицательным значением справа. При $n = 5$ поперечная плоскость разбивается на 5 секторов, в каждом из которых в оптимальном возмущении соседствует пара вихрей поперечного движения противоположного знака. Там, где поперечное движение направлено в сторону центра струи, возникает отрицательное возмущение продольной компоненты скорости, а в смежных областях — положительное. В субоптимальном возмущении возникает цепочка внутренних вихрей поперечного движения в области $r < 0.83$ и цепочка внешних вихрей в окружающем пространстве. В каждом секторе поперечное движение, направленное в сторону центра струи, вызывает область отрицательного

возмущения продольной скорости, а движение от центра приводит к появлению положительного возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приводятся результаты численного исследования немодального развития стационарных возмущений в круглой струе. Воспроизводятся условия лабораторного эксперимента при $Re = 2850$, проведенного ранее в НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова [4,5]. Характерная особенность изучаемой струи – наличие трёх точек перегиба во входном профиле скорости, что существенно определяет свойства устойчивости течения.

Наряду с классическим модальным механизмом неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в течении может реализоваться альтернативный немодальный рост возмущений. Проведённые ранее численные [13–15,19] и экспериментальные [18] исследования свидетельствуют, что немодальный механизм может быть определяющим при переходе течения в струе от ламинарного режима к турбулентному. В прежних работах развитие немодально растущих возмущений в струях изучалось численно в предположении о параллельности, т.е. неизменности основного течения в направлении потока. Разработан метод и впервые определены оптимальные возмущения в развивающейся струе. Изучены стационарные трёхмерные возмущения при разных значениях азимутального числа. Определены свойства оптимальных возмущений, их форма, характер и степень роста вниз по потоку.

Авторы выражают признательность В. В. Веденееву за плодотворные обсуждения работы и полезные замечания по тексту статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-19-00404, с использованием вычислительных ресурсов ОВК НИЦ Курчатковский институт, <http://computing.nrcki.ru/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morris P.J.* The spatial viscous instability of axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. 3. P. 511–529.
2. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // *Prog. Aerospace Sci.* 1984. V. 21. P. 159–199.
3. Грек Г.Р., Козлов В.В., Лутвиненко Ю.А. Устойчивость дозвуковых струйных течений // Учебное пособие: Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. 2012. 208 с.
4. *Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A.* Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids.* 2018. V 30. P. 043603.
5. *Зайко Ю.С., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Чичерина А.Д.* Исследование затопленных струй с увеличенной длиной начального ламинарного участка // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. 1. С. 97–106.
6. *Ellingsen T., Palm E.* Stability of linear flow // *Phys. Fluids.* 1975. V 18. P. 487–488.
7. *Landahl M.L.* A note on algebraic instability of inviscid parallel shear flows // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. P. 243–251.
8. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Optimal energy density growth in Hagen–Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 277. P. 197–225.
9. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V 11. P. 134–150.
10. *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 289–309.
11. *Tumin A., Reshotko E.* Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers // *Phys. Fluids.* 2001. V 13. P. 2097–2104.
12. *Reshotko E., Tumin A.* Spatial theory of optimal disturbances in a circular pipe flow // *Phys. Fluids.* 2001. V 13. P. 991–996.
13. *Boronin S.A., Healey J.J., Sazhin S.S.* Non-modal stability of round viscous jets // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 716. P. 96–119.

14. *Jimenez-Gonzalez J. I., Brancher P., Martinez-Bazan C.* Modal and non-modal evolution of perturbations for parallel round jets // *Phys. Fluids*. 2015. V 27. P. 044105.
15. *Jimenez-Gonzalez J. I., Brancher P.* Transient energy growth of optimal streaks in parallel round jets // *Phys. Fluids*. 2017. V 29. P. 114101.
16. *Боронин С.А., Осипцов А.Н.* Модальная и немодальная неустойчивость течения запыленного газа в пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ*. 2014. 6. С. 80–93.
17. *Калашиник М.В., Чхетиани О.Г.* Оптимальные возмущения в развитии неустойчивости свободного слоя сдвига и системы из двух встречных струйных течений // *Изв. РАН. МЖГ*. 2020. 2. С. 28–41.
18. *Ivanov O., Ashurov D., Gareev L., Vedeneev V.* Non-modal perturbation growth in a laminar jet: an experimental study // *J. Fluid Mech*. 2023. V. 963. P. A8.
19. *Wang C., Lesshafti L., Cavalieri A.V., Jordan P.* The effect of streaks on the instability of jets // *J. Fluid Mech*. 2021. V. 910. P. A14.
20. *Nikitin N.* Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // *J. Comput. Phys*. 2006. V. 217. P. 759–781.
21. *Абдульманов К.Э., Никитин Н.В.* Развитие возмущений в круглой затопленной струе с двумя модами неустойчивости // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. 5. С. 25–40.
22. *Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedeneev V.V.* Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // *J. Fluid Mech*. 2022. V 934. A3.

Development of Stationary Disturbances in a Spatially Developing Jet

D. A. Ashurov^a and N. V. Nikitin^b

Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, 119192 Russia

^a *e-mail: ashurovda@my.msu.ru*

^b *e-mail: nvnikitin@mail.ru*

Nonmodal development of stationary three-dimensional disturbances in a circular jet is numerically investigated at the Reynolds number $Re = 2850$. The operating conditions of a laboratory experiment performed earlier in the Institute of Mechanics of Moscow State University are reproduced. A method for calculating optimal disturbances under the conditions of downstream developing main flow is developed. The disturbances associated with different azimuthal numbers are calculated. The shape, character of development, and growth degree of optimal disturbances are determined.

Keywords: submerged jet, Navier–Stokes equations, hydrodynamic instability, nonmodal growth, optimal disturbances.

УДК 532.546:536.421

БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ФРОНТОВ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

© 2024 г. Г. Г. Цыпкин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: tsypkin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 30.05.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается устойчивость расположения слоя воды над слоем пара, разделенных поверхностью кипения или конденсации, в геотермальном резервуаре. В невозмущенном состоянии в низкопроницаемых породах существует одна поверхность раздела, которая может быть как поверхностью кипения воды, так и поверхностью конденсации пара. При относительно больших значениях проницаемости могут образовываться два новых решения, соответствующие другим положениям поверхности раздела. Численно исследованы условия существования и слияния стационарных решений в зависимости от параметров физической системы. Методом нормальных мод проведено исследование устойчивости стационарных положений поверхностей раздела. Найдено, что переход к неустойчивости предшествует бифуркациям решений и может происходить как при конечных значениях волновых чисел, так и при бесконечных.

Ключевые слова: геотермальный резервуар, стационарное решение, бифуркация, устойчивость, метод нормальных мод, тепловая труба.

DOI: 10.31857/S1024708424040088, **EDN:** OYKFBX

Исследования геотермальных систем показали, что наиболее эффективный перенос тепла к поверхности Земли реализуется при образовании «тепловой трубы», которая характеризуется интенсивной конвекцией воды и пара [1–4]. С другой стороны, зачастую в геотермальных системах реализуется ситуация, когда область воды располагается над областью перегретого пара [1, 2] и эта конфигурация устойчива. Термодинамически существование воды над паром объясняется наличием большего температурного градиента, характерного для геотермальных систем. Однако с точки зрения классической теории гидродинамической устойчивости расположение тяжелой жидкости над легкой является неустойчивым [5]. Возможные физические механизмы, поддерживающие такую конфигурацию в устойчивом состоянии в геотермальных системах, обсуждались в [2]. Основная цель исследования таких геотермальных систем заключается в определении как условий существования слоя воды над слоем пара, так и условий формирования тепловой трубы.

Теоретические исследования устойчивости геотермальных систем были представлены в работе [6], где приведен пример устойчивого существования поверхности раздела между слоем воды и слоем пара в высокотемпературных породах. Предполагалось, что фазы в невозмущенном состоянии неподвижны, а фазовый переход отсутствует. Исследование линейной устойчивости показало, что поверхность раздела устойчива, если коэффициент проницаемости не превышает критического значения $k \sim 4 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2$. Авторами отмечено, что натурные наблюдения свидетельствуют о возможности существования области воды над областью пара при значительно более высоких значениях проницаемости.

В работе [7] была предложена более сложная математическая модель с учетом фазового перехода и движения фаз в невозмущенном состоянии, что позволило на порядок поднять критическое значение проницаемости. В [8] рассматривалось влияние конвективного переноса энергии и были найдены устойчивые стационарные режимы течений при проницаемостях $k \sim 10^{-15} \text{ м}^2$. Основная цель проведенных исследований в работах [7, 8] заключалась в доказательстве существования устойчивости конфигурации, когда слой воды располагается в геотермальной системе над слоем пара, при относительно высоких значениях проницаемости.

Проводились исследования устойчивости геотермальных систем, содержащих область смеси воды и пара. В работе [9] рассматривалась геотермальная система, содержащая слой воды над слоем вода–пар

с преобладанием жидкости. Исследовалось влияние капиллярных сил на устойчивость движения пароводяной смеси [10]. В [11, 12] капиллярные эффекты не учитывались, а в двухфазном слое, насыщенном смесью воды и пара, преобладал пар.

В настоящей работе исследуются бифуркации фронтов фазовых переходов и их устойчивость. Построены зависимости положений поверхности раздела от давления на границах геотермального резервуара. При изменении параметров происходят бифуркации, когда решения возникают или исчезают, в результате чего могут существовать одно или три решения. Методом нормальных мод проведено исследование устойчивости. Численные расчеты дисперсионного уравнения показали, что слиянию и исчезновению решений предшествует потеря их устойчивости, а возникающие решения являются неустойчивыми. Найдено, что в зависимости от значений параметров переходы к неустойчивости могут происходить как при конечных, так и при бесконечных волновых числах. Представлены бифуркационные диаграммы и дисперсионные кривые, иллюстрирующие различные виды переходов к неустойчивости.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим геотермальный резервуар, представляющий собой массив относительно невысокой проницаемости, ограниченный сверху $z = 0$ и снизу $z = L$ горизонтальными высокопроницаемыми пластами или трещинами. Если термодинамические условия таковы, что верхний высокопроницаемый пласт насыщен водой с температурой и давлением T_0 и P_0 а нижний – паром с параметрами T_L , P_L , то в промежуточной низкопроницаемой области $0 < z < L$ существует поверхность фазового перехода, разделяющая области воды и пара. Тогда устойчивость расположения слоя воды на слое пара определяется устойчивостью этой поверхности раздела.

Для описания процессов тепломассопереноса в областях воды и пара используем законы сохранения массы и энергии, закон Дарси для фаз, уравнения состояния и термодинамические соотношения [13]. Для простоты, следуя [5, 6] полагаем, что жидкость и газ несжимаемы. Система основных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v_j &= 0, \quad v_j = -\frac{k}{\mu_j}(\operatorname{grad} P - \rho_j g), \quad j = v, w \\ (\rho C)_{1,2} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_j C_j v_j \operatorname{grad} T &= \operatorname{div} (\lambda_{1,2} \operatorname{grad} T) \\ \lambda_{1,2} &= \phi \lambda_j + (1 - \phi) \lambda_s, \quad (\rho C)_{1,2} = \phi \rho_j C_j + (1 - \phi) \rho_s C_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v – скорость фильтрации, ϕ – пористость, k – проницаемость, μ – вязкость, P – давление, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность, C – теплоемкость, T – температура, λ – теплопроводность. Индексы: w, v, s – вода, пар и скелет пористой среды соответственно, 1 – область пара, 2 – область воды.

Условия на поверхности раздела между областями воды и пара формулируются как условия термодинамически равновесного скачка функции водонасыщенности [7]

$$\begin{aligned} T_+ &= T_- = T^*, \quad P_+ = P_- = P^* \\ \ln \frac{P^*}{P_a} &= A + \frac{B}{T^*}, \quad A = 12,512, \quad B = -4611,73, \quad P_a = 10^5 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \phi \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n &= \frac{k}{\mu_v} \frac{\rho_v}{\rho_w} (\operatorname{grad} P)_{n+} - \frac{k}{\mu_w} (\operatorname{grad} P)_{n-} + \frac{k}{\mu_w} \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\rho_v^2}{\rho_w^2} \right) \\ \phi q \rho_w V_n &= \lambda_- (\operatorname{grad} T)_{n-} - \lambda_+ (\operatorname{grad} T)_{n+} - \frac{k q \rho_w}{\mu_w} ((\operatorname{grad} T)_{n-} - \rho_w g) \end{aligned}$$

Здесь V – скорость межфазной поверхности, q – удельная теплота фазового перехода. Индексы: n – нормаль, плюс и минус – величины относящиеся к области пара и жидкости, соответственно, * – значения величин на фронте.

В работе [7] было показано, что существует широкий класс геотермальных течений, когда конвективным переносом тепла можно пренебречь. Условие малости конвективного переноса тепла имеет вид

$$k|\delta P - \rho_w g l| \ll 10^{-10} N$$

где l – характерный масштаб длины, а δP – вариация давления.

В этом случае уравнения энергии в обеих областях сводятся к обычным уравнениям теплопроводности.

2. БИФУРКАЦИИ БАЗОВОГО РЕШЕНИЯ

Если характерный размер по вертикали геотермального резервуара много меньше размера по горизонтали, то невозмущенное течение может быть исследована в одномерном приближении. Пусть давление и температура в обоих высокопроницаемых пластах постоянны. Постоянство температуры обеспечивается притоком тепла от окружающих пород, а постоянство давления по горизонтали – высокой проницаемостью верхнего и нижнего пласта. Если термодинамические условия при $z = 0$ соответствуют существованию воды, а при $z = L$ – пару, то фронт фазовых переходов в слое $0 < z < L$, займет некоторое равновесное положение $z = h$. Верхняя область $0 < z < h$ будет содержать воду, а нижняя $h < z < L$ – пар. В сформулированной задаче положение межфазной границы $z = h$, значения на ней температуры T_* и давления P_* являются неизвестными и определяются в процессе решения задачи.

В стационарном случае системы уравнений для давления и температуры при условии малости конвективного переноса энергии имеют вид

$$\frac{d^2 P(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T(z)}{dz^2} = 0 \tag{2.1}$$

Законы сохранения массы и энергии на границе фазового перехода (1.2) представимы в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \left(\frac{dP}{dz} \right)_+ - \left(\frac{dP}{dz} \right)_- + \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) &= 0 \\ \lambda_+ \left(\frac{dT}{dz} \right)_+ - \lambda_- \left(\frac{dT}{dz} \right)_- + \frac{kq\rho_w}{\mu_w} \left[\left(\frac{dP}{dz} \right)_- - \rho_w g \right] &= 0 \\ \ln \frac{P_*}{P_a} = A + \frac{B}{T_*}, \quad A = 12,512, \quad B = -4611,73, \quad P_a = 10^5 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вместе с условиями термодинамического равновесия на поверхности раздела соотношения (2.2) составляют полную систему уравнений на фронте.

Подставляя решения уравнений (2.1) в виде линейных функций в соотношения на границе (2.2), получаем систему трех уравнений для трех неизвестных параметров T_* , P_* и h

$$\begin{aligned} \frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \frac{P_L - P_*}{L - h} - \frac{P_* - P_0}{h} + \rho_w g \left[1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right] &= 0 \\ \lambda_+ \frac{T_L - T_*}{L - h} - \lambda_- \frac{T_* - T_0}{h} + \frac{kq\rho_w}{\mu_w} \left[\frac{P_* - P_0}{h} - \rho_w g \right] &= 0 \\ P_* = f(T_*) = P_a \exp \left(A + \frac{B}{T_*} \right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим режимы стационарных течений реализующихся в геотермальных системах при следующих значениях параметров: $C_s = 10^3$ Дж/(кг·К), $\lambda_s = 2$ Вт/(м·К), $g = 9,8$ м/с². Вязкости, плотности воды и пара, а также теплота фазового перехода определялись в зависимости от температуры и давления в областях [14].

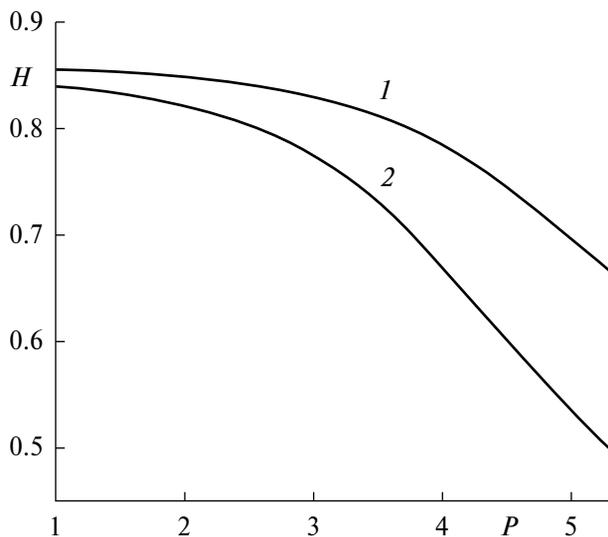


Рис 1. Положения поверхности фазового перехода в зависимости от давления P_L в нижнем высокопроницаемом слое. $L = 400$ м, $\phi = 0.2$, $k = 1.84 \cdot 10^{-17}$ м², $T_L = 540$ К, $P_0 = 1$ МПа: 1–2 – $T_0 = 440, 450$ К. $P = P_L/P_M$, $P_M = 1$ МПа.

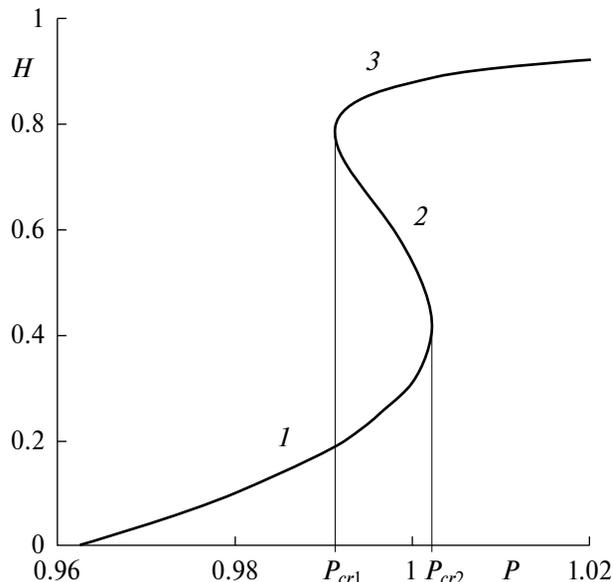


Рис 2. Бифуркации базового решения. Положения поверхности раздела в зависимости от давления P_0 в верхнем высокопроницаемом слое. $L = 40$ м, $\phi = 0.2$, $k = 10^{-16}$ м², $T_0 = 450$ К, $T_L = 468$ К, $P_L = 1.175$ МПа. $P = P_0/P_M$, $P_M = 1$ МПа.

Численные эксперименты показали, что в зависимости от параметров геотермальной системы, начальных и граничных условий система уравнений (2.3) может иметь три решения, одно решение или вообще не иметь решений. Решения могут соответствовать режимам кипения воды или конденсации пара.

Рассматриваемая физическая система многопараметрическая, ее состояние зависит, главным образом, от параметров L , ϕ , k , C_s , P_L , P_0 , T_L и T_0 , и привести полное параметрическое рассмотрение в одной статье затруднительно. Представим основные характерные режимы течений с фазовыми переходами в геотермальном резервуаре при расположении слоя воды над слоем пара. На плоскости (P, H) каждой точки кривой соответствует базовое стационарное решение. Если толщина пласта L велика, то характерным режимом является режим фазового перехода, при котором существует один корень системы (2.3), соответственно единственное положение поверхности раздела.

На рис. 1 представлено изменения положения поверхности раздела в зависимости от значения давления P_L на нижней границе $z = L$ при двух значениях температуры на верхней границе $z = 0$. При увеличении давления в высокопроницаемом пласте $z = L$, насыщенном паром, граница раздела H опускается, хотя градиент давления уменьшается и скорость течения снижается. Положение поверхности раздела определяется, главным образом, интенсивностью фазового перехода. Повышение давления на нижней границе снижает интенсивность кипения, а в случае режима конденсации его наоборот интенсифицирует. Расчеты показывают, что увеличение температуры T_0 (кривая 2) приводит к росту H , т.е. из-за снижения вязкости и повышения подвижности воды граница фазового перехода опускается.

При уменьшении толщины пласта система уравнений (2.3) допускает существование трех решений, соответствующих трем различным режимам течения (рис. 2). Пусть в начальном состоянии пласт $0 < z < L$ насыщен перегретым паром, а давление на верхней границе начинает медленно возрастать в квазистационарном режиме, так что поверхность раздела в каждый момент времени находится в равновесном состоянии. Тогда, как показано на рис. 2, существует единственное решение системы уравнений, а с ростом давления P_0 граница фазового перехода опускается вниз, что соответствует росту H (кривая 1). При достижении некоторого критического значения давления P_{cr1} происходит рождение двух новых решений системы (2.3) (кривые 2 и 3). При дальнейшем росте давления в верхнем высокопроницаемом слое решения 1 и 2 сближаются, а при критическом давлении P_{cr2} сливаются и перестают существовать.

Третье решение медленно возрастает, а положение поверхности фазового перехода приближается к нижнему высокопроницаемому слою.

При исчезновении первого решения возникает вопрос о перестройке режима течения с фазовым переходом в геотермальном резервуаре. Во-первых, потому что в области $P_{cr1} < P < P_{cr2}$ существуют три решения и надо выяснить, все ли три режима могут быть реализованы. Во-вторых, как реализуется переход от первого режима к третьему. Для этого требуется исследовать устойчивость найденных решений.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Исследуем устойчивость базового стационарного решения относительно малых возмущений. Системы основных уравнений, линеаризованные вокруг стационарного решения, при условии малости конвективного переноса энергии в обеих областях имеют вид

$$\Delta P = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a_{1,2} \Delta T, \quad a_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2}}{(\rho C)_{1,2}} \quad 0 < x < h, \quad h < x < L \quad (3.1)$$

Для простоты предполагаем, что теплоемкости и теплопроводности в обеих областях определяются соответствующими параметрами скелета пористой среды $a = a_1 = a_2$.

Исследуем устойчивость течения методом нормальных мод. Представим возмущения искомым функций в виде

$$\{\delta P(x, z, t), \delta T(x, z, t), \eta(x, t)\} = (P(z), T(z), \eta_0) \exp(\sigma t + i \kappa x),$$

Решаем систему (3.1) для возмущений и подставляем полученные решения в линеаризованную систему условий на поверхности раздела (1.2). В результате получим дисперсионное уравнение [7]

$$\begin{aligned} F(\Sigma, K) \equiv & \alpha \operatorname{cth}[\alpha(1-H)] \left[\frac{\omega_w}{a} \Gamma_3 K \operatorname{cth}(KH) - (1-R)\Sigma + \right. \\ & + \frac{\omega_v}{a} \Gamma_4 R K \operatorname{cth}[K(1-H)] \left. \right] + \alpha \operatorname{cth}(\alpha H) \left[\frac{\omega_v}{a} \Gamma_5 R K \operatorname{cth}[K(1-H)] + \right. \\ & + \frac{\omega_w}{a} \Gamma_0 K \operatorname{cth}(KH) - (1-R)\Sigma \left. \right] + \frac{\omega_v B}{T_0} \frac{m q \rho_w R}{\lambda T_0} \Gamma K \left[\Sigma \operatorname{cth}[K(1-H)] \right] + \\ & + \Sigma \frac{\mu_v}{\mu_w} \operatorname{cth}(\kappa H) + \Gamma_1 K \frac{\omega_w}{a} \operatorname{cth}(KH) \operatorname{cth}[K(1-H)] = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_f - 1}{H} + \frac{P_f - 1}{H}, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{H} + \frac{P_1 H - P_f}{H(1-H)}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{H} + \frac{T_1 H - T_f}{H(1-H)}, \\ \Gamma_3 &= \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_1 - T_f}{1-H} + \frac{P_f - 1}{H}, \quad \Gamma_4 = \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_1 - T_f}{1-H} + \frac{P_1 - P_f}{1-H}, \quad \Gamma = \frac{P_f}{T_f^2}, \\ \Gamma_5 &= \frac{B}{T_0} \Gamma \frac{T_f - 1}{H} + \frac{P_1 - P_f}{1-H}, \quad \alpha = \sqrt{K^2 + \Sigma}, \quad K = \kappa / L, \end{aligned}$$

$$\Sigma = a \sigma / L^2, \quad \omega_w = \frac{k P_0}{m \mu_w}, \quad \omega_v = \frac{k P_0}{m \mu_v},$$

$$R = \frac{\rho_v}{\rho_w}, \quad T_f = T_* / T_0, \quad T_1 = T_L / T_0, \quad P_f = P_* / P_0, \quad P_1 = P_L / P_0, \quad H = h / L.$$

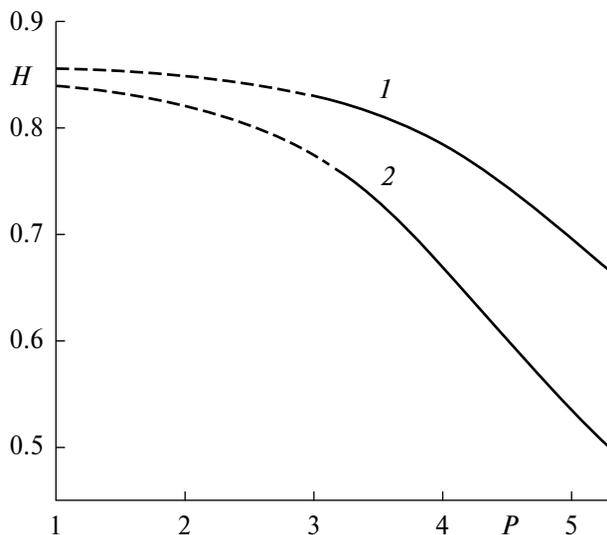


Рис 3. Устойчивые (сплошная линия) и неустойчивые (пунктирная линия) положения поверхности фазового перехода. $T_0 = 450$ К. Остальные параметры как на рис. 1.

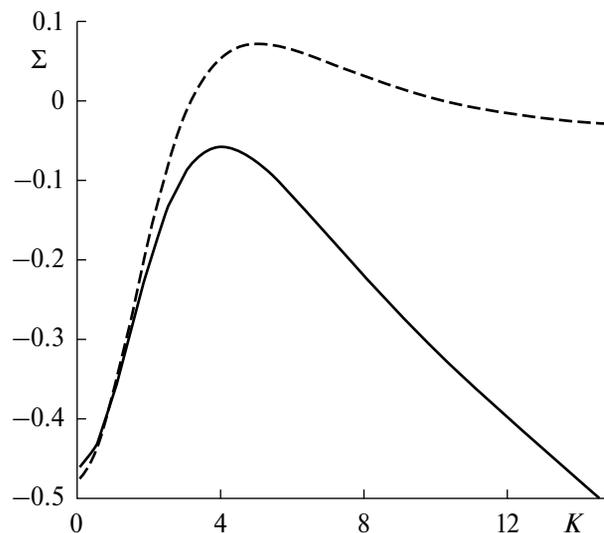


Рис. 4. Переход к неустойчивости при уменьшении давления в нижнем проникаемом слое. Скорость роста (пунктирная линия) и затухания (сплошная линия) при $P_L = 2.99$ и 3 МПа соответственно. Параметры как на рис. 1.

Полученное дисперсионное уравнение исследовалось численно. Расчеты, проведенные для режимов, представленных на рис. 1, показали, что устойчивые режимы реализуются при больших значениях давления P_L в нижнем высокопроницаемом слое $z = L$ (рис. 3). При снижении давления поверхность раздела опускается и становится неустойчивой. При этом повышение температуры T_0 на верхней границе $z = 0$ увеличивает область неустойчивости в пространстве параметров, что объясняется уменьшением вязкости и воды и возрастанием её подвижности.

Дисперсионные кривые, представленные на рис. 3, показывают, что переход к неустойчивости происходит при конечных волновых числах. Найденный размер (ширина) наиболее неустойчивого возмущения составляет порядка сантиметра. Определение характерного размера наиболее неустойчивого малого возмущения представляет интерес для расчетов нелинейных режимов течения, поскольку, как было показано в [15], нелинейные режимы существенно зависят от флуктуаций и начальных условий.

Исследуем случай существования трех стационарных решений для сравнительно небольшого по толщине размера геотермального резервуара $L = 40$ м. При небольших значениях давления воды P_0 на верхней границе поверхность фазового перехода единственна и устойчива (рис. 5). При увеличении давления поверхность опускается, а скорость затухания малых возмущений падает. При достижении критического значения P_{cr1} происходит рождение двух других решений, которое соответствует бифуркации с точкой поворота. Возникшие решения реализуются при больших значениях безразмерной глубины поверхности раздела, но первое решение при этом остается устойчивым.

В устойчивом режиме дисперсионная кривая, полученная для первого решения (рис. 6), лежит ниже оси абсцисс и имеет максимум ξ при конечном волновом числе K_m . Расчеты показывают, что положение максимума слабо меняется с изменением P_0 . Дальнейшее увеличение давления приводит к выполаживанию дисперсионной кривой, когда при всех значениях волнового числа больше K_m скорость затухания возмущений слабо зависит от значения волнового числа. С большой степенью точности можно утверждать, что переход к неустойчивости реализуется при всех больших значениях K . После перехода дисперсионной кривой через ось $\xi = 0$ наиболее быстро растущей модой становится мода, соответствующая бесконечно большому волновому числу.

После наступления неустойчивости первого решения происходит его сближение со вторым, при этом все три решения являются неустойчивыми. По достижению второго критического значения давления P_{cr2} происходит слияние и исчезновение двух действительных корней системы трансцендентных уравнений

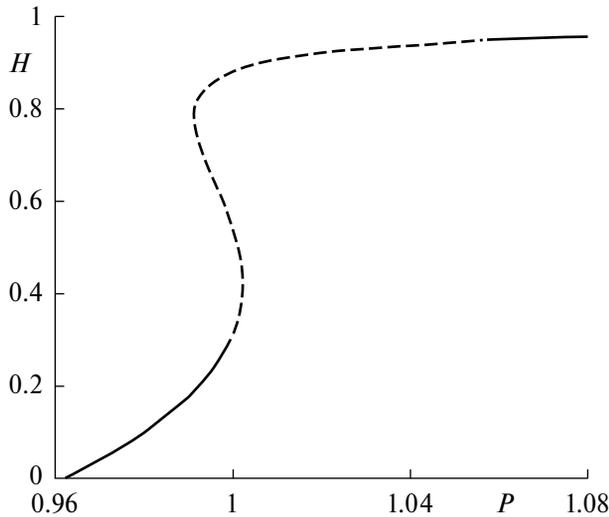


Рис. 5. Устойчивые (сплошные линии) и неустойчивые (пунктирные линии) решения. Параметры как на рис. 2.

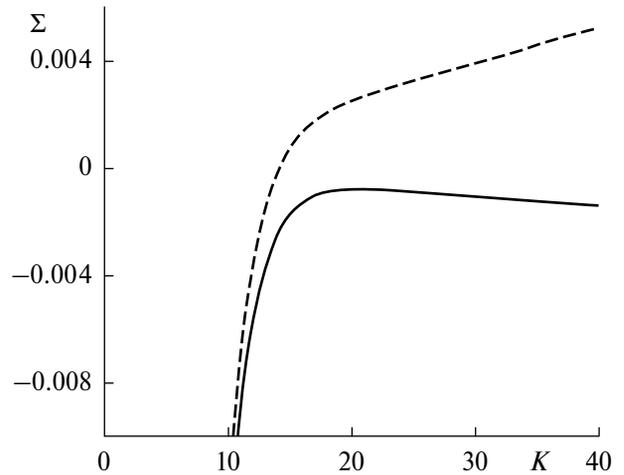


Рис. 6. Переход к неустойчивости первого решения при увеличении давления P_0 на верхней границе. Сплошная линия – устойчивое состояние при $P_0 = 0.998464$ МПа и пунктирная линия – неустойчивое состояние при $P_0 = 0.998463$ МПа. Остальные параметры как на рис. 2.

(2.3), с бифуркацией типа точки поворота. Оставшееся третье решение при дальнейшем увеличении давления P_0 становится устойчивым.

Численные эксперименты показывают, что потеря устойчивости третьего решения при уменьшении давления на верхней границе водонасыщенной области (рис. 7) происходит при бесконечно больших значениях волнового числа K . В этом случае используемая модель течения в рамках уравнения Дарси неприменима для предсказания наиболее неустойчивой моды, соответственно для определения характерного размера наиболее быстро растущего возмущения. Тем не менее параметры физической системы, при которых происходит переход к неустойчивости, определяются с достаточно хорошей точностью, как это было показано на примере, приведенном в [16].

Проанализируем полученные результаты с точки зрения поведения геотермальной системы. Естественно считать, что если в момент потери устойчивости реализуется режим конденсации, когда пар движется вверх, то при возникновении неустойчивости происходит «пробой» пара с его проникновением в область воды. Если неустойчивость возникает в режиме кипения, сопровождающего течением воды вниз, то в результате неустойчивости водяные пальцы будут опускаться в область пара. При этом, в области, расположенной близко к верхней границе $z = 0$ реализуется режим конденсации, а близко к верхней границе $z = L$ – режим кипения.

Между устойчивыми режимами течений, представленными на рис. 5, существует диапазон параметров, когда все три существующие решения неустойчивы. Потеря устойчивости первым решением в результате увеличения давления воды P_0 в верхнем высокопроницаемом слое происходит в режиме конденсации пара. Можно предположить, что неустойчивость приводит к образованию существенно нестационарного режима с зоной циркуляции воды, пара или пароводяной смеси [17], когда устойчивое стационарное решение задачи не существует. Естественно считать, что в верхней части области с режимом циркуляции происходит конденсация пара, а в нижней – кипение воды. Дальнейшее увеличение давления P_0 приводит к движению масс воды вниз вместе с областью циркуляции, формированию режима кипения и его стабилизации в виде возникновения устойчивого стационарного режима, который описывается третьим решением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование устойчивости стационарного решения в задаче о существовании слоя воды над слоем пара в геотермальном резервуаре. Течения делятся на два типа, которые соответствуют

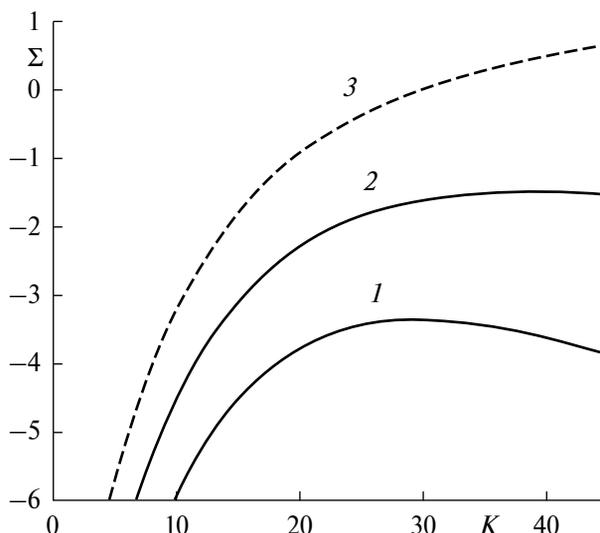


Рис. 7. Переход к неустойчивости третьего решения при уменьшении давления P_0 на верхней границе. Дисперсионные кривые 1–3: $P_0 = 1.067, 1.06, 1.053$ МПа. Остальные параметры как на рис. 2

кипению воды или конденсации пара. Найдено, что при изменении параметров может происходить рождение или исчезновение решений с бифуркацией типа точки поворота. Методом нормальных мод проведено исследование устойчивости течений. Численные эксперименты показали, что бифуркации решения предшествует переход к неустойчивости. Можно предположить, что неустойчивость с конденсацией приводит к прорыву пара вверх, а неустойчивость, сопровождающаяся кипением, к формированию водяных пальцев, опускающихся вниз. Показано, что существует область параметров, где все три стационарных решения неустойчивы. Естественно предположить, что в этом случае реализуется существенно нестационарный режим фильтрации с образованием зоны смеси воды и пара.

Полученные результаты показывают, что, изменяя давление в нижнем или в верхнем высокопроницаемом слое, можно как подавлять возникновение неустойчивости поверхности раздела, так и дестабилизировать течение. Этот факт можно использовать в практических целях, для формирования неустойчивых режимов, приводящих к формированию тепловой трубы, инициирующей интенсивный перенос тепла к поверхности Земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ 24-11-00222.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *White D.E., Muffler L.J.P., Truesdell A.H.* Vapor-dominated hydrothermal systems compared with hot water systems // *Econ. Geol.* 1971. V. 66. P. 75–97.
2. *Grant M.A.* Geothermal reservoir modeling // *Geothermics.* 1983. V. 12. No 4. P. 251–263.
3. *Igwe Ch.I.* Geothermal Energy: A Review // *Int. J. Eng. Res. and Technol.* 2021. V. 10 No 3. P. 655–661.
4. *Olasolo P., Juarez M.C., Morales M.P., et al.* Enhanced geothermal systems (EGS: A review) // *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2016. V.56. P. 133–144.
5. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford University Press. New York. 1967.
6. *Schubert G., Straus J.M.* Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system // *J. Geoph. Res.* 1980. V. 85. No B11. P. 6505–6512.
7. *Tsyppkin G., Il'ichev A.* Gravitational stability of the interface in water over steam geothermal reservoirs // *Transp. Porous Media.* 2004. V. 55. No 2. P. 183–199.
8. *Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г.* Влияние конвективного переноса энергии на устойчивость слоя воды над слоем пара в геотермальных системах // *Докл. РАН.* 2011. Т. 437. № 4. С. 480–484.
9. *Ramesh P.S., Torrance K.E.* Stability of boiling in porous media // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1990. V. 33. No 9. P. 1895–1908.

10. *McGuinness M.J.* Steady solution selection and existence in geothermal heat pipes – I. The convective case // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1996. V. 39. No 2. P. 259–274.
11. *Pestov I.* Stability of vapour–liquid counterflow in porous media // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 364. P. 273–295.
12. *Amili P., Yortsos Y.C.* Stability of heat pipes in vapor–dominated systems // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2004. V. 47. No 6–7. P. 1233–1246.
13. *O’Sullivan M.J.* Geothermal reservoir simulation // *Int. J. Energy Res.*, 1985. V. 9. P. 319–332.
14. *Lide D.R.* CRC Handbook of Chemistry and Physics (82nd edn). 2001. CRC.
15. *Соболева Е.Б.* Влияние конечных возмущений плотности на развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора в пористой среде // *ТМФ*. 2022. Т. 211. № 2. С. 333–346.
16. *Иlichev A.T., Tsyarkin G.G.* Stability of the interface in a porous medium in the framework of Darcy’s and Brinkman’s approximations // *Transp. Porous Media*. 2023. V.148. P. 317–333.
17. *Malkovsky V.I., Magri F.* Thermal convection of temperature-dependent viscous fluids within three-dimensional faulted geothermal systems: Estimation from linear and numerical analyses // *Water Res. Research*. 2016. V.52. P. 2855–2867.

Bifurcations and Stability of Phase Transition Fronts in Geothermal Reservoirs

G. G. Tsyarkin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS

email: tsyarkin@ipmnet.ru

The stability of a layer of water above a layer of vapor, separated by a boiling or condensation surface, in a geothermal reservoir is considered. In an unperturbed state in lower permeability rocks, there is one interface, which can be either a water boiling surface or a vapor condensation surface. At relatively large permeability values, two new solutions can be formed, corresponding to other positions of the interface. The conditions for the existence and merging of stationary solutions depending on the parameters of the physical system are studied numerically. The stability of stationary positions of interfaces was studied using the normal mode method. It was found that the transition to instability precedes bifurcations of solutions and can occur both at finite and infinite wave numbers.

Keywords: geothermal reservoir, stationary solution, bifurcation, stability.

УДК 532.613.5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСТВОРЕННОГО ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА НА ДИНАМИКУ ВСПЛЫТИЯ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

© 2024 г. Е. И. Борзенко*, А. С. Усанина, Г. Р. Шрагер

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

**e-mail: borzenko@ff.tsu.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

После доработки 03.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Представлены результаты экспериментального и численного исследования процесса всплытия одиночного газового пузырька в присутствии и в отсутствие растворенного поверхностно-активного вещества при числах Рейнольдса $Re > 1$. Предложена оригинальная численная методика, позволяющая исследовать динамику одиночного пузырька с учетом эффектов, возникающих при введении поверхностно-активного вещества в жидкость. Проанализировано влияние концентрации поверхностно-активного вещества на размер, форму и скорость всплытия пузырька. Выявлены три стадии всплытия пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества, характеризующие его накопление и распределение по свободной поверхности пузырька.

Ключевые слова: газовый пузырек, поверхностно-активное вещество, стадии всплытия, численное моделирование, экспериментальное исследование.

DOI: 10.31857/S1024708424040094, **EDN:** OYDDSI

Процессы взаимодействия пузырьков газа с потоком жидкости широко реализуется в природе и в различных технологичных приложениях [1], поэтому, несмотря на большое количество работ в области пузырьковых течений, интерес к вопросу о динамике движения газовых пузырьков в жидкости не ослабевает до настоящего времени. Одним из факторов, определяющих закономерности движения пузырьковых сред, является наличие поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости. Поверхностное натяжение межфазной границы газ-жидкость зависит от свойств жидкости и газа, от температуры дисперсной и внешней среды, от наличия переменного электрического заряда на поверхности жидкости и т.д. [2]. В ряде технологических процессов для изменения коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела фаз в жидкую внешнюю среду вводится поверхностно-активное вещество. В частности, в технологии обогащения полезных ископаемых флотационным методом поверхностно-активное вещество приводит к снижению поверхностного натяжения жидкости и повышению гидрофильности твердых частиц.

При физическом и численном моделировании процесса всплытия газового пузырька часто применяются следующие безразмерные критерии, определяющие характер и особенности процесса всплытия: числа Рейнольдса (Re), Бонда (Bo), Мортонна (Mo). В зависимости от целей исследования и для учета дополнительных факторов, влияющих на исследуемый процесс, используются также, например, такие критерии, как числа Марангони (Ma), Хатта (Ha), Ленгмюра (La).

Первые результаты по движению пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества получены Фрумкиным А. Н. и Левичем В. Г. [3]. Левичем В. Г. теоретически найдено выражение для скорости движения пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества в предположении, что пузырек во время движения сохраняет сферическую форму и изменение поверхностного натяжения вдоль пузырька мало по сравнению с его абсолютным значением [2].

Обзор основных результатов экспериментальных и теоретических исследований процесса движения пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества приведен в работах [4–8]. Вопрос о влиянии поверхностно-активного вещества на динамику всплытия пузырьков рассматривается в многочисленных работах [9–19]. Известно, что динамика всплытия газового пузырька в жидкости, содержащей

поверхностно-активное вещество, зависит от объемной концентрации и характеристик поверхностно-активного вещества [9–11]. В [9] показано, что стационарная скорость пузырька линейно зависит от концентрации поверхностно-активного вещества в растворе и при значении концентрации более некоторого критического значения, скорость пузырька остается неизменной. В экспериментах [10] обнаружено, что концентрация поверхностно-активного вещества влияет лишь на скорость всплытия пузырька на нестационарном участке, а стационарная скорость пузырька равна скорости пузырька, всплывающего в жидкости без поверхностно-активного вещества. В [11] при исследовании всплытия деформированного пузырька в капиллярной трубке выявлено, что по мере увеличения концентрации поверхностно-активного вещества скорость маленьких пузырьков не меняется, а подвижность больших пузырьков увеличивается.

Влияние поверхностно-активного вещества на подъемную силу, скорость всплытия (коэффициент сопротивления) пузырька и его форму рассматривалось также в работах [12–15]. В частности, авторы [14] экспериментально показали, что коэффициент сопротивления возрастает по мере увеличения содержания поверхностно-активного вещества в жидкости. Однако при достаточно больших значениях концентрации поверхностно-активного вещества наблюдается снижение коэффициента. Этот эффект объясняется изменением формы, размера и скорости всплытия пузырька после введения поверхностно-активного вещества в жидкость.

Условия возникновения концентрационно-капиллярного движения на границе раздела жидкость-газ рассмотрены в [16]. Авторы определили критические значения градиента концентрации поверхностно-активного вещества, необходимые для начала концентрационно-капиллярного движения.

В работе [17] экспериментально исследовано влияние поверхностно-активного вещества на процессы растворения и гидратообразования за ударной волной.

В [18–20] показано, что поверхностно-активное вещество влияет на траекторию всплытия одиночного пузырька. Экспериментально и численно получены три вида траектории всплытия пузырька: зигзагообразная, винтовая и комбинированная. Вид траектории пузырька при его всплытии зависит, главным образом, от формы пузырька и вихрей, образующихся при его всплытии, и режима обтекания пузырька (числа Рейнольдса).

С возникновением и развитием вычислительной гидродинамики появилась возможность численного моделирования всплытия одиночного пузырька в жидкости [21–23]. Метод численного моделирования позволяет получить более детальную информацию о гидродинамических характеристиках процесса, которые определить экспериментально сложно или невозможно. При численном моделировании процесса всплытия газовых пузырьков используются преимущественно две модели: модель угла стагнации [4, 24–26] и модель, учитывающая эффекты переноса и сорбции поверхностно-активного вещества на поверхности [27, 28].

Модель угла стагнации в плоском случае (рис. 1) основана на предположении, что граница раздела пузырька и жидкости разделена под определенным полярным углом θ на два сектора, дуга, одного из которых покрыта поверхностно-активным веществом, а на оставшейся части окружности поверхностно-активное вещество практически отсутствует. Угол стагнации θ задается, и скорость на участке стагнации на границе раздела фаз принимается равной нулю в системе отсчета, движущейся вместе с центром пузырька, а касательное напряжение на поверхности пузырька равно градиенту поверхностного натяжения. Чистая поверхность (в отсутствие поверхностно-активного вещества) пузырька характеризуется нулевым напряжением сдвига. Данное разделение на два отдельных сектора является идеализированным. Одним из недостатков модели угла стагнации является сложность или отсутствие возможности учесть динамические эффекты при нарушении допущения о вращательной симметрии.

В случае использования модели, учитывающей эффект переноса и сорбции поверхностно-активного вещества на поверхности, математическая постановка дополняется уравнениями конвективной диффузии в объеме и на поверхности, а также зависимостями поверхностного натяжения от концентрации поверхностно-активного вещества.

Несмотря на постоянный рост публикаций уровень разработки методов физического и математического моделирования и наличие результатов исследования в области пузырьковых течений нельзя считать достаточным в связи с многочисленными технологическими приложениями. В частности, требуются детальное исследование вопроса о влиянии поверхностно-активного вещества на динамику пузырька в нестационарном режиме всплытия, вопрос об определении коэффициента торможения в процессе всплытия пузырька, вопрос об оценке времени достижения равновесного состояния пузырька

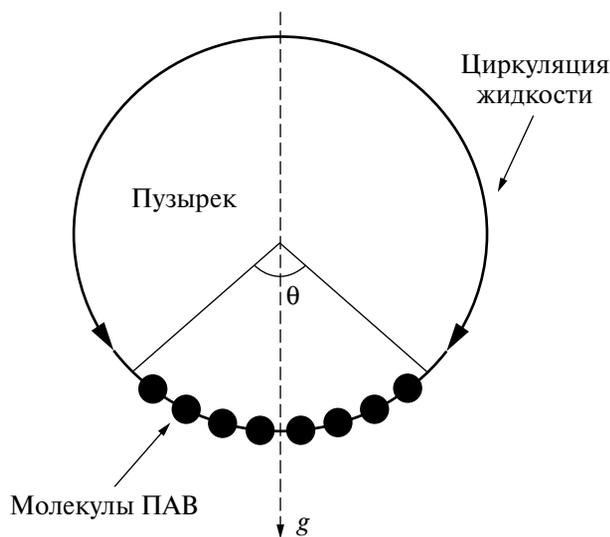


Рис. 1. Распределение поверхностно-активного вещества на поверхности пузырька в модели угла стагнации.

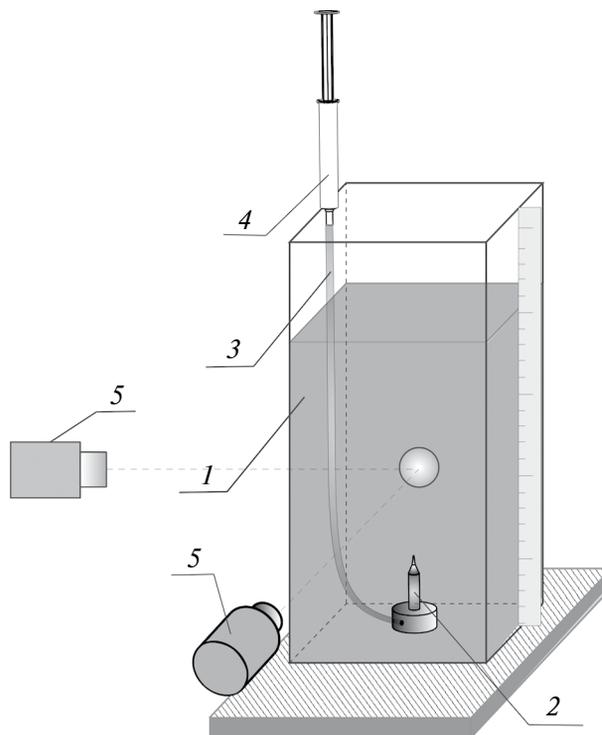


Рис. 2. Схема экспериментальной установки для исследования процесса всплытия одиночного пузырька воздуха: 1 – кювета с жидкостью; 2 – капилляр; 3 – полая металлическая трубка; 4 – шприц; 5 – видеокамера.

в зависимости от режима обтекания, вопрос о критериях применимости (диапазон изменения определяющих безразмерных критериев подобия) имеющихся моделей всплытия газового пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества.

В данной работе представлены результаты экспериментального и численного исследования всплытия одиночного пузырька воздуха в присутствии растворенного поверхностно-активного вещества с целью уточнения механизма влияния поверхностно-активного вещества на динамику всплытия пузырька в нестационарном режиме, конкретизации изменения формы пузырька при введении поверхностно-активного вещества. Экспериментальная методика исследования включает визуализацию процесса всплытия пузырька в поле силы тяжести путем высокоскоростной съемки. Для численного моделирования рассматриваемого процесса разработана оригинальная методика, позволяющая реализовать естественные граничные условия и учесть эффекты, возникающие при введении поверхностно-активного вещества, на выделенной границе раздела фаз.

1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

1.1. Экспериментальная установка и методика исследования

Исследования проводились на экспериментальной установке, состоящей из кюветы с жидкостью (дистиллированной водой), устройства для получения пузырька и системы визуализации процесса (рис. 2). Кювета размером $150 \times 150 \times 600$ мм (объемом 12 л) выполнена из стекла толщиной 5 мм. Для получения пузырьков воздуха использовался медицинский шприц, к выходному отверстию которого крепились полая металлическая трубка с внутренним диаметром 5 мм, на конце которой монтировалась медицинская игла, расположенная в середине нижней части кюветы.

Система визуализации процесса всплытия одиночного пузырька воздуха в жидкости включала две высокоскоростные видеокамеры и две светодиодные лампы мощностью 50 Ватт, расположенные

в перпендикулярных плоскостях. С помощью первой видеокамеры с возможностью вертикального хода «вверх-вниз» определялся размер и форма пузырька. Видеосъемка первой видеокамерой осуществлялась со скоростью 6300 кадров в секунду при разрешении 128×306 . Вторая видеокамера использовалась для измерения стационарной скорости всплытия пузырька с разрешением 1024×2448 . Для определения расстояния, пройденного пузырьком, в плоскости всплытия пузырька располагалась масштабная линейка.

В экспериментах исследовались два вида поверхностно-активного вещества – анионный (лаурилсульфат натрия) и неионогенный (синтанол АЛМ-10) ПАВ.

Линейные размеры пузырька определялись с относительной погрешностью не более 3%, связанной с разрешающей способностью видеокамеры. В экспериментах размер пузырька варьировался при помощи сменных медицинских игл разного калибра (внутреннего диаметра). Размеры используемой кюветы и формируемых пузырьков воздуха позволяют исключить влияние боковых стенок на процесс всплытия [5].

Плотность дистиллированной воды и растворов поверхностно-активного вещества (вода–лаурилсульфат натрия и вода–синтанол АЛМ-10) измерялась ареометром с относительной погрешностью 0.1% и составляла $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Коэффициент динамической вязкости жидкости μ_f определялся с помощью вискозиметра Геппле-ра с относительной погрешностью не более 2%. Величина μ_f не зависит от присутствия используемых поверхностно-активных веществ в жидкости. В проведенных экспериментах значение коэффициента динамической вязкости составляло $\mu_f = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Для каждой из изученных в экспериментах пар дистиллированная вода–поверхностно-активное вещество определялась критическая концентрация мицеллообразования (ККМ), то есть концентрация поверхностно-активного вещества, при превышении которой образуются устойчивые мицеллы (агрегаты молекул поверхностно-активного вещества). Величина ККМ определялась в соответствии с ГОСТ 29232–91 [29]. Значение ККМ для пары вода–лаурилсульфат натрия составляет $C_{cr} = 8.7 \cdot 10^{-3} \text{ моль/л}$, для пары вода–синтанол АЛМ-10 – $C_{cr} = 5.1 \cdot 10^{-4} \text{ моль/л}$ (рис. 3). Экспериментальные исследования в настоящей работе проведены в области значений концентрации поверхностно-активного вещества $C < C_{cr}$.

Коэффициент поверхностного натяжения на границе газ–жидкость измерялся сталагмометром СТ2 с относительной погрешностью 1%. Измерение поверхностного натяжения основано на определении объема капель, выдавливаемых на границе газ–жидкость. Значения коэффициента поверхностного натяжения σ дистиллированной воды на границе с воздухом в зависимости от концентрации используемых в экспериментах ПАВ приведены на рис. 3.

Стационарная скорость всплытия одиночного пузырька определялась по формуле

$$u = l/\Delta t,$$

где l – расстояние, пройденное пузырьком за время Δt . В экспериментах скорость всплытия одиночного пузырька изменялась в диапазоне 16.6–31.7 см/с. Относительная погрешность определения скорости u составляла 4%.

1.2. Результаты экспериментального исследования

Экспериментальные исследования процесса всплытия одиночного пузырька воздуха в чистой дистиллированной воде и растворах дистиллированная вода – поверхностно-активное вещество проводились в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 200–600$. Следует отметить, что по мере увеличения концентрации поверхностно-активного вещества наблюдается уменьшение размера формируемого пузырька воздуха в момент отрыва от конца медицинской иглы. В качестве примера, в табл. 1 приведены экспериментальные значения диаметра D эквивалентного сферического пузырька воздуха, всплывающего в растворе, дистиллированная вода–синтанол АЛМ-10 при разной концентрации поверхностно-активного вещества.

Экспериментально обнаружено, что пузырек воздуха, формируемый в чистой дистиллированной воде в виде сплюснутого сфероида, при введении поверхностно-активного вещества в воду приобретает форму, близкую к сферической. Для определения изменения формы пузырька в работе используется оценка отношения Z малой и большой оси сплюснутого сфероида. Данные в табл. 1 демонстрируют

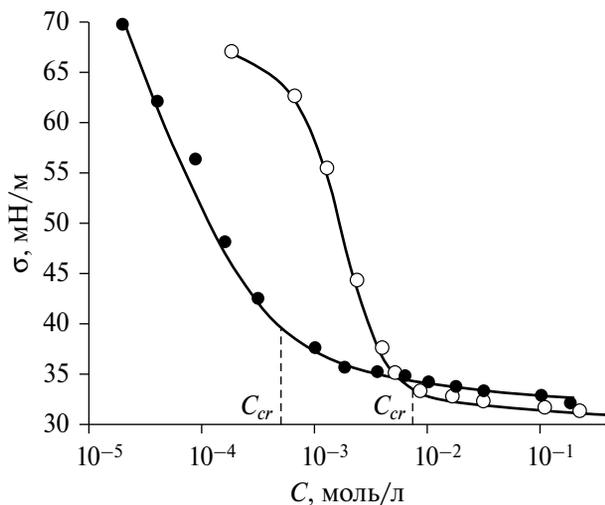


Рис. 3. Зависимость коэффициента поверхностного натяжения дистиллированной воды на границе с воздухом от концентрации поверхностно-активного вещества: • – синтанол АЛМ-10; ○ – лаурилсульфат натрия.

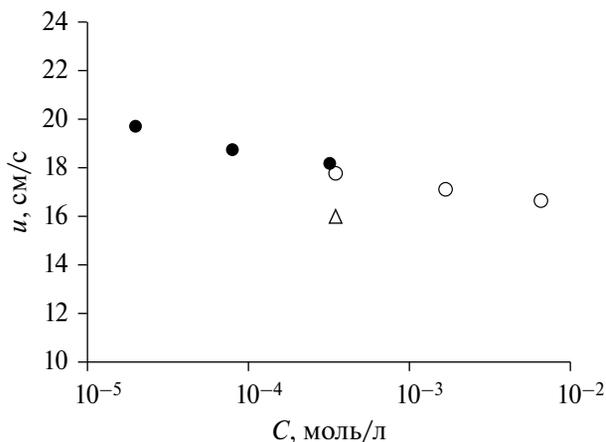


Рис. 4. Скорость всплытия одиночного пузырька воздуха диаметром 1.3 мм в зависимости от концентрации поверхностно-активного вещества в дистиллированной воде: • – раствор дистиллированная вода-синтанол АЛМ-10; ○ – раствор дистиллированная вода-лаурилсульфат натрия; Δ – данные [6] для раствора дистиллированная вода-лаурилсульфат натрия.

Таблица 1. Результаты экспериментов по всплытию одиночного пузырька воздуха в растворе синтанол-АЛМ10 с дистиллированной водой

<i>D</i> , мм	<i>C</i> , ммоль/л	<i>Z</i>	Форма пузырька
1.65±0.05	0	0.57	
1.65±0.05	0.02	0.96	
1.60±0.05	0.08	0.96	
1.55±0.05	0.32	0.89	

формирование сферической формы пузырька воздуха в растворе вода – синтанол АЛМ-10. Однако, начиная с некоторой концентрации поверхностно-активного вещества, пузырек вновь приобретает форму сплюснутого сфероида. По-видимому, это связано с разным градиентом концентрации

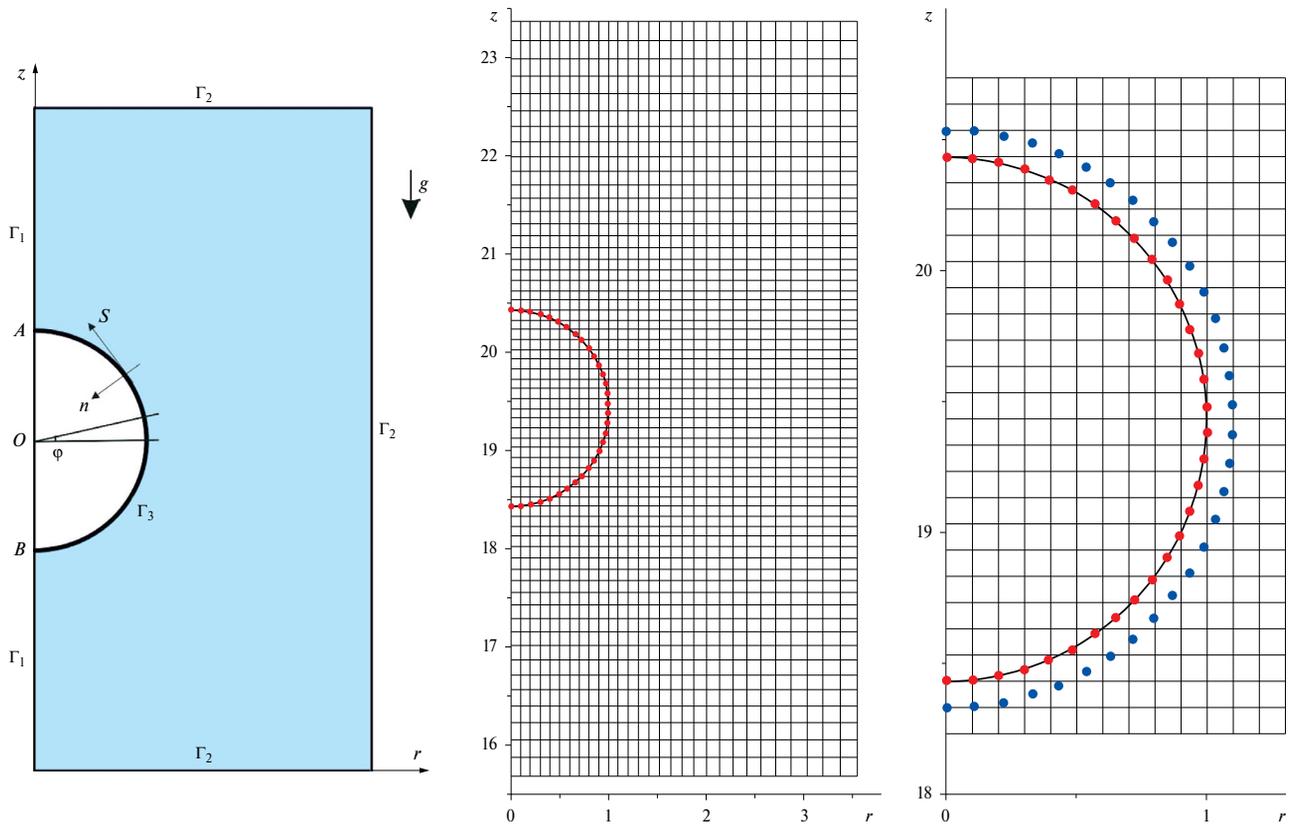


Рис. 5. Область решения (а) и расчетная сетка (б) в окрестности одиночного газового пузырька, всплывающего в присутствии поверхностно-активного вещества.

поверхностно-активного вещества на свободной границе. Аналогичное поведение пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества отмечено в [30–32].

Полученные экспериментальные данные показывают, что по мере увеличения концентрации поверхностно-активного вещества или, другими словами, при уменьшении коэффициента поверхностного натяжения на границе раздела фаз газ-жидкость, наблюдается снижение стационарной скорости u всплытия пузырька. Экспериментальные значения установившейся скорости u всплытия одиночного пузырька воздуха в зависимости от концентрации поверхностно-активного вещества в дистиллированной воде приведены на рис. 4. Данные, представленные на рис. 4, согласуются с результатами [9].

2. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

2.1. Постановка задачи

Задача о всплытии одиночного газового пузырька в вязкой среде в присутствии растворенного поверхностно-активного вещества формулируется следующим образом. Движение жидкости считается осесимметричным, а газ в пузырьке – идеальным. Течение среды описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности, а перенос поверхностно-активного вещества – уравнением конвективной диффузии, которые в векторной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_l \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \mu_l \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= D_f \nabla^2 C. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь \mathbf{u} – вектор скорости; t – время; p – гидродинамическое давление; D_f – коэффициент объемной диффузии; \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения; ρ_f , μ_f – плотность и вязкость жидкости, соответственно; C – объемная концентрация поверхностно-активного вещества. Газ в пузырьке описывается уравнением состояния Менделеева–Клапейрона.

Рассматриваемая область течения и вид расчетных сеток вблизи пузырька представлены на рис. 5. На оси симметрии Γ_1 выполняются условия симметрии, на внешних границах Γ_2 – жидкость покоится. При этом границы Γ_2 удалены на достаточное расстояние от пузырька для того, что избежать их влияния на динамику его всплытия. Граничные условия на свободной поверхности включают динамические условия для нормальных и касательных напряжений, записанные с учетом лапласовского давления и эффекта Марангони

$$\begin{aligned} -p + 2\mu_f \frac{\partial u_n}{\partial n} &= -p^* + \sigma(k_1 + k_2), \\ \mu_f \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} - u_n \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} - u_s \mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \right) &= -\nabla_s \sigma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где p^* – давление газа в пузырьке; k_1, k_2 – главные кривизны свободной поверхности; n, s – нормальное и касательное направление на свободной поверхности, соответственно.

Движение поверхности описывается кинематическим граничным условием. Значение коэффициента σ определяется по формуле [33, 34]

$$\sigma = \sigma_0 + R_G T C_\infty^\Sigma \ln \left(1 - \frac{C^\Sigma}{C_\infty^\Sigma} \right),$$

где σ_0 – коэффициент поверхностного натяжения для чистой жидкости (в отсутствие поверхностно-активного вещества); C^Σ – поверхностная концентрация поверхностно-активного вещества; C_∞^Σ – поверхностная концентрация насыщения; R_G – универсальная газовая постоянная; T – температура.

Поверхностная концентрация поверхностно-активного вещества рассчитывается в соответствии со следующим уравнением переноса вещества вдоль свободной границы [35, 36]

$$\frac{\partial C^\Sigma}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\mathbf{u}_s C^\Sigma) + C^\Sigma \nabla_s \cdot \mathbf{n} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{u} \cdot \nabla_s C^\Sigma = D^\Sigma \nabla_s^2 C^\Sigma + S^\Sigma. \quad (2.3)$$

Здесь D^Σ – поверхностный коэффициент диффузии; $\nabla_s = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \nabla$; $\mathbf{u}_s = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{u}$; S^Σ – источник член, определяемый по формуле

$$S^\Sigma = -D^\Sigma \nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

где $C^{|\Sigma}$ – объемная концентрация поверхностно-активного вещества вблизи границы, значение которой определяется из условия [37]

$$-D^\Sigma \nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n} = k_a C^{|\Sigma} (C_\infty^\Sigma - C^\Sigma) - k_d C^\Sigma. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) является граничным условием на свободной границе для уравнения конвективной диффузии системы (2.1).

В начальный момент времени пузырек имеет форму сферы радиусом R и находится в покоящейся жидкости на глубине H . При этом объемная концентрация поверхностно-активного вещества равна C_0 , а поверхностная концентрация равна нулю.

Физическое содержание представленной математической модели описано подробно в работе [27].

Для проведения численного моделирования поставленная задача записывается в безразмерном виде с использованием величины R для масштаба длины и следующих безразмерных переменных:

$$U = \frac{u}{\sqrt{gR}}, \tau = \frac{\sqrt{gRt}}{R}, P = \frac{p - \rho_l gH}{\rho_l gR}, \bar{C} = \frac{C}{C_0}, \Gamma = \frac{C^\Sigma}{C_\infty^\Sigma}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}.$$

Тогда система уравнений (3.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} &= -\nabla P + \frac{1}{\text{Ga}} \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{e}, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\ \text{Pe} \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} + \mathbf{U} \cdot \nabla \bar{C} \right) &= \nabla^2 \bar{C}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{g} / g$; $\text{Ga} = \rho_l \sqrt{gR^3} / \mu_l$ – число Галилея; $\text{Pe} = \sqrt{gR^3} / D_f$ – объемное число Пекле.

Граничные условия на свободной поверхности (2.2) в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} -P + \frac{2}{\text{Ga}} \frac{\partial U_n}{\partial n} &= -P^* + \frac{\bar{\sigma}}{\text{Bo}} (\bar{k}_1 + \bar{k}_2), \\ \frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{\partial U_s}{\partial n} - u_n \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial n} - u_s \mathbf{s} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} &= -\frac{\text{Ga}}{\text{Bo}} \nabla_s \bar{\sigma}, \end{aligned}$$

где \bar{k}_1, \bar{k}_2 – безразмерные главные кривизны свободной поверхности; P^* – безразмерное значение давления газа в пузырьке; $\text{Bo} = g\rho_l R^2 / \sigma_0$ – число Бонда.

Математическая постановка сопряженной задачи (2.3)–(2.5) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Pe}^\Sigma \left(\frac{\partial C^\Sigma}{\partial \tau} + \nabla_s \cdot (\mathbf{U}_s C^\Sigma) + C^\Sigma \nabla_s \cdot \mathbf{n} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{U} \cdot \nabla_s C^\Sigma \right) &= \nabla_s^2 C^\Sigma + \frac{\bar{S}^\Sigma}{\text{K}}, \\ \bar{S}^\Sigma &= -\nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n}, \\ -\nabla C^{|\Sigma} \cdot \mathbf{n} &= \text{Pe} \cdot \text{Na} \cdot \text{K} \left[C^{|\Sigma} (1 - \Gamma) - \frac{1}{\text{La}} \Gamma \right], \end{aligned}$$

где $\text{K} = \frac{C_\infty^\Sigma}{C_0 R}$ – безразмерная длина адсорбции; $\text{Pe}^\Sigma = \frac{\rho_l g R^3}{\mu_l D^\Sigma}$ – поверхностное число Пекле; \bar{S}^Σ – безразмерное значение источникового члена.

Значение безразмерного коэффициента поверхностного натяжения определяется согласно формуле

$$\bar{\sigma} = 1 + \text{Ma} \cdot \ln(1 - \Gamma).$$

Для решения поставленной задачи использовалась оригинальная численная методика, в основе которой лежит смешанный эйлерово-лагранжев подход [38], который позволяет точно выделять межфазную границу на дискретном уровне и задавать естественные граничные условия на ней. Система уравнений (2.6) дискретизируется на фиксированной разнесенной неравномерной сетке методом контрольного объема. В окрестности пузырька сетка имеет контрольные объемы размером h , а по мере удаления от свободной границы шаг сетки увеличивается (рис. 5б). Для выполнения разностного аналога уравнения неразрывности применялся алгоритм SIMPLE [39]. Свободная поверхность представлялась набором маркерных частиц, которые являются расчетными узлами и перемещаются в соответствии с кинематическим условием. Гидродинамические характеристики на свободной поверхности рассчитывались с использованием метода, предложенного в [40].

По мере всплытия пузырька маркеры, расположенные в начальный момент времени равномерно, перемещаются вдоль границы, что приводит к необходимости их перераспределения. Данная процедура проводилась с использованием интерполяционного сглаживающего сплайна. Шаг по времени выбирался в соответствии с формулой

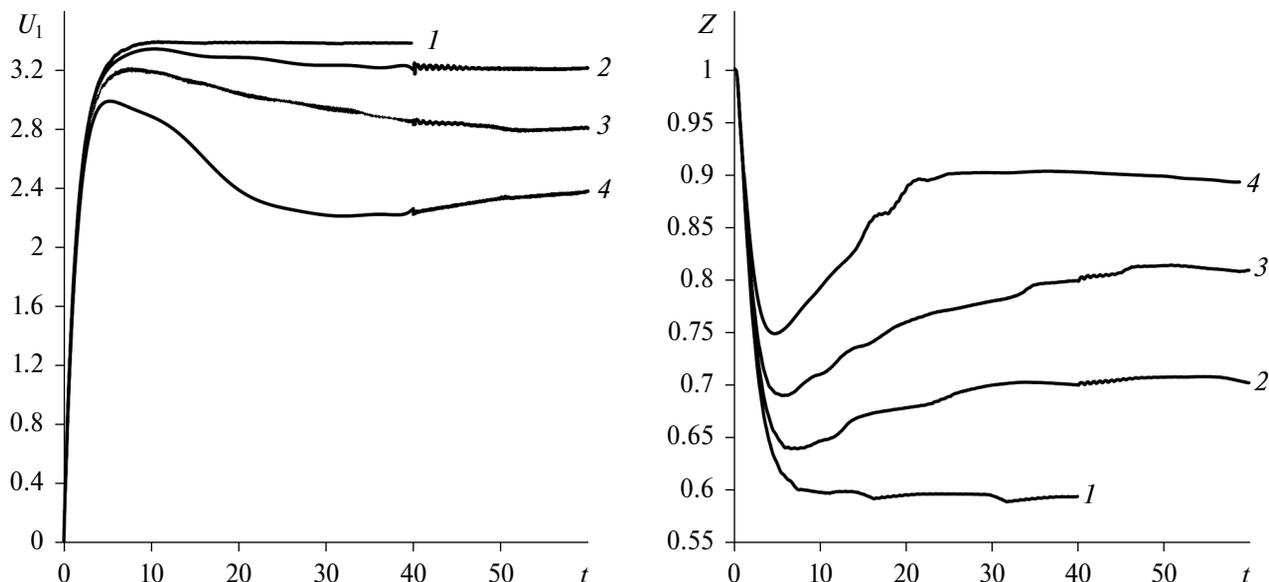


Рис. 6. Зависимость скорости всплытия (а) и параметра эллиптичности (б) от времени при различных значениях начальной объемной концентрации поверхностно-активного вещества: 1–4 – $La = 0, 0.24, 0.6, 1.2$.

$$\Delta t = 0.05 Ga \cdot h^2,$$

где h – шаг квадратной сетки в окрестности пузырька по пространству. Представленные расчеты проводились при $h=1/80$.

2.2. Результаты численного исследования

Численное моделирование процесса всплытия изначально сферического одиночного пузырька воздуха в присутствии поверхностно-активного вещества проводилось при следующих значениях параметров: $D=10^{-3}$ м; $k_a=40$ м³/моль; $k_d=3.5$ 1/с; $\Gamma_\infty=5 \cdot 10^{-6}$ моль/м²; $D_f=D^\Sigma=10^{-9}$ м²/с; $C_0=0.002-0.1$ моль/м³. Значения параметров k_a , k_d , Γ_∞ и D_f взяты из работы [41].

Результаты численного исследования получены для следующих значений безразмерных комплексов: числа Галилея $Ga=111$, объемного и поверхностного числа Пекле $Pe=Pe^\Sigma=99 \cdot 10^3$, числа Бонда $Bo=0.135$, произведения числа Хатта и безразмерной длины адсорбции $Ha \cdot K = 0.002$, числа Ленгмюра $La=0-1.2$.

Анализ результатов численного расчета показал, что движение газового пузырька в жидкости, не содержащей поверхностно-активное вещество, в поле силы тяжести характеризуется монотонным ростом скорости всплытия U_1 с последующим ее выходом на стационарное значение (рис. 6а). Изначально сферическая поверхность пузырька деформируется и приобретает форму, близкую к сплюснутому сфероиду. На рис. 6б приведены рассчитанные значения параметра эллиптичности Z , характеризующего деформацию пузырька от времени. Введение в жидкость поверхностно-активного вещества приводит к изменению динамики всплытия, связанному с проявлением эффекта Марангони на межфазной границе вследствие неоднородности коэффициента поверхностного натяжения. Рисунок 7 демонстрирует эволюция формы пузырька с течением времени для различных значений La .

Нестационарный процесс всплытия пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества можно условно разделить на три стадии.

На начальной стадии динамика всплытия совпадает с таковой в чистой жидкости. Это связано с интенсивностью адсорбции ПАВ на межфазную поверхность раздела из объема жидкости и его распределением вдоль границы. Под действием конвекции поверхностно-активное вещество сносится с верхней половины пузырька на нижнюю, формируя вдоль границе градиент концентрации и, следовательно, градиент коэффициента поверхностного натяжения σ . Начальная стадия характеризуется малыми

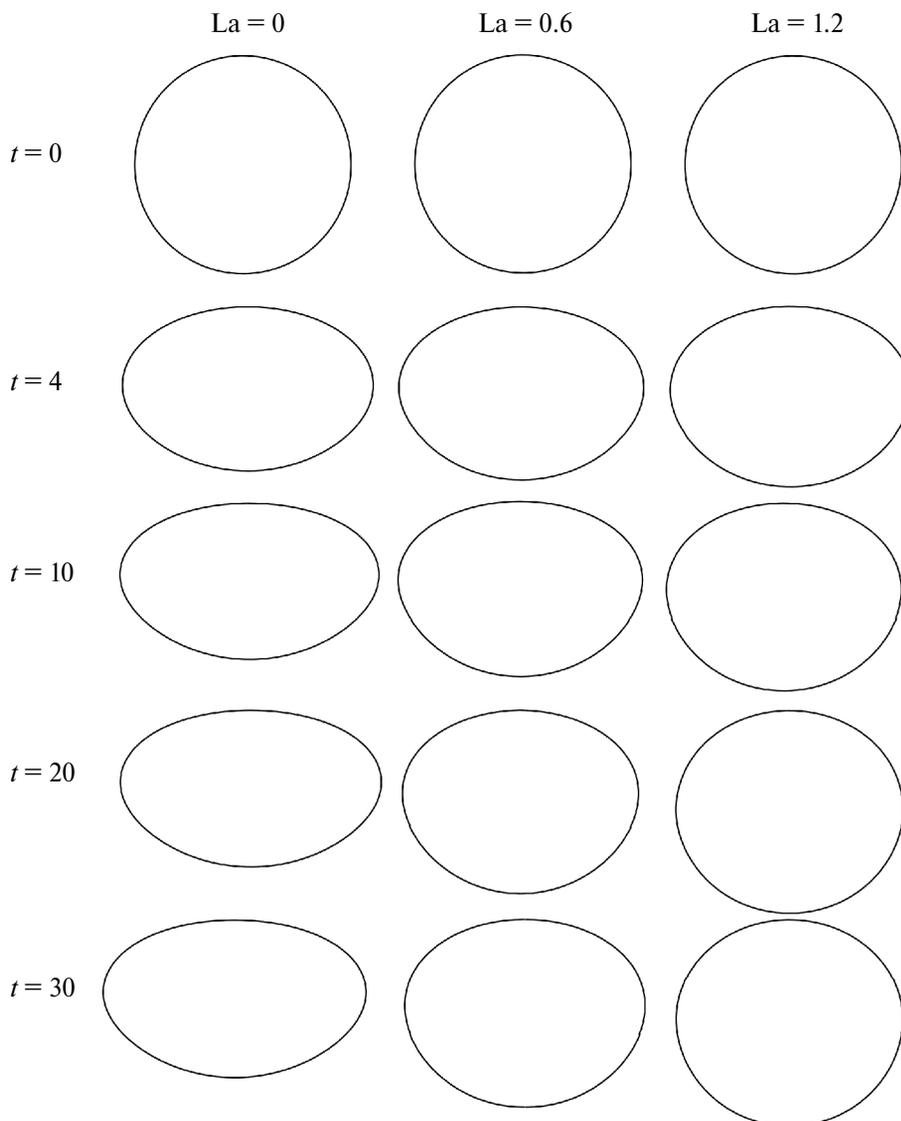


Рис. 7. Формы свободной поверхности в различные моменты времени для различных значений La .

значениями этих градиентов и, как следствие, малым влиянием на динамику всплытия. Изначально сферический пузырек на данной стадии приобретает форму сплюснутого сфероида.

Вторая стадия всплытия пузырька характеризуется дальнейшим накоплением поверхностно-активного вещества на границе раздела фаз по мере увеличения расстояния, пройденного пузырьком и ростом градиента концентрации, приводящему к значимому влиянию эффекта Марангони. В результате происходит увеличение коэффициента сопротивления пузырька из-за возникновения касательных напряжений, стремящихся уравновесить поверхностную концентрацию и «остановить» перенос молекул поверхностно-активного вещества в нижнюю часть пузырька, и скорость всплытия пузырька в жидкости, содержащей поверхностно-активное вещество, уменьшается по сравнению со случаем всплытия в чистой жидкости. Такое развитие процесса приводит к формированию максимума на кривой скорости. Процесс всплытия сопровождается деформацией пузырька с увеличением степени эллиптичности. Продолжительность второй стадии зависит от начальной объемной концентрации поверхностно-активного вещества и интенсивности процесса сорбции. По мере увеличения объемной концентрации поверхностно-активного вещества в жидкости (с увеличением числа Лангмюра La) продолжительность второй стадии уменьшается в связи с большей скоростью адсорбции и более быстрым насыщением поверхности.

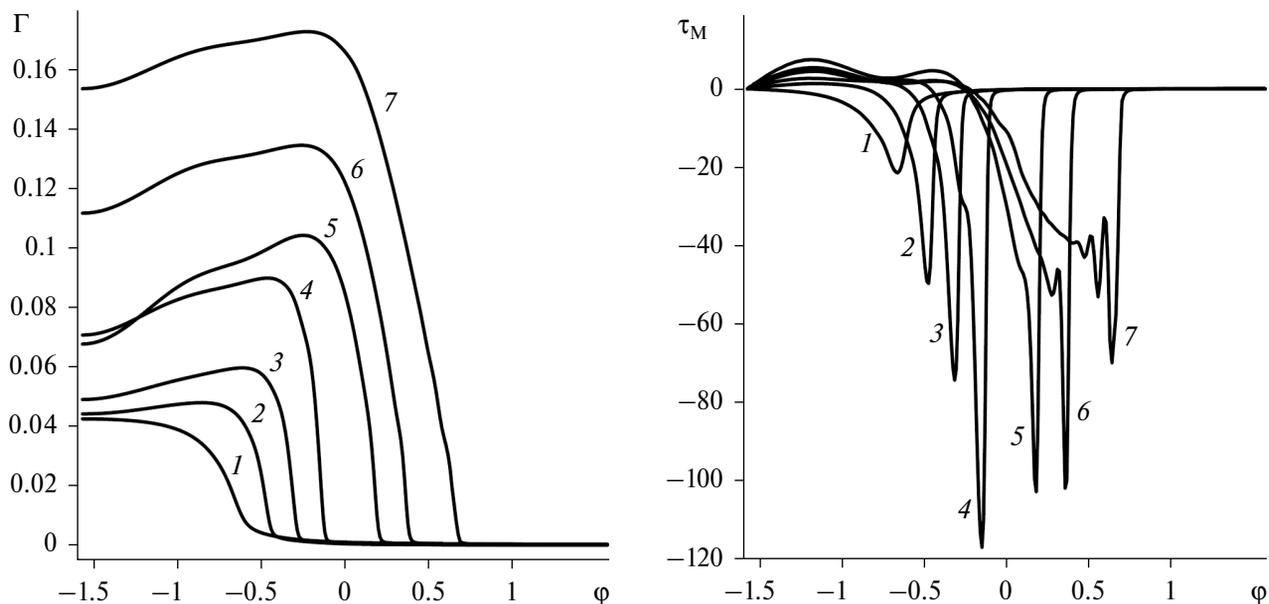


Рис. 8. Распределения концентрации Γ (а) и напряжений Марангони τ_M (б) на свободной поверхности от угла ϕ в различные моменты времени ($La=1.2$): 1–7 – $t=1.6, 2.6, 4.6, 11.5, 20, 28.6, 40$.

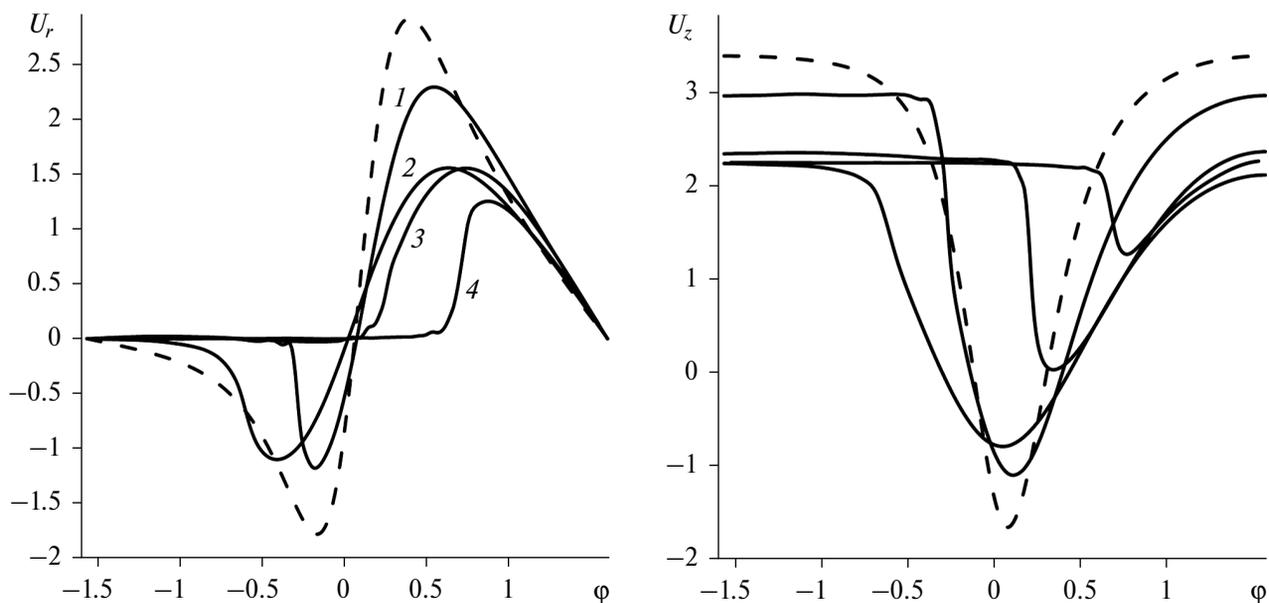


Рис. 9. Радиальная (а) и аксиальная (б) компоненты вектора скорости на свободной поверхности в зависимости от угла ϕ в различные моменты времени ($La=1.2$): 1–4 – $t=1.6, 4.6, 20.5, 40$.

Третья стадия процесса характеризуется насыщением межфазной границы, уменьшением градиента концентрации поверхностно-активного вещества на свободной поверхности и выходом скорости пузырька на стационарное значение.

Зависимости, характеризующие изменения концентрации поверхностно-активного вещества и напряжений Марангони τ_M вдоль межфазной границы в различные моменты времени показаны на рис. 8. Угол ϕ ($-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$) – это угол между горизонтальной прямой и прямой, соединяющей точку O ($z_O = 0.5(z_A + z_B)$) и точки поверхности (рис. 5а). Кривые 1 соответствуют первой стадии всплытия пузырька с малым

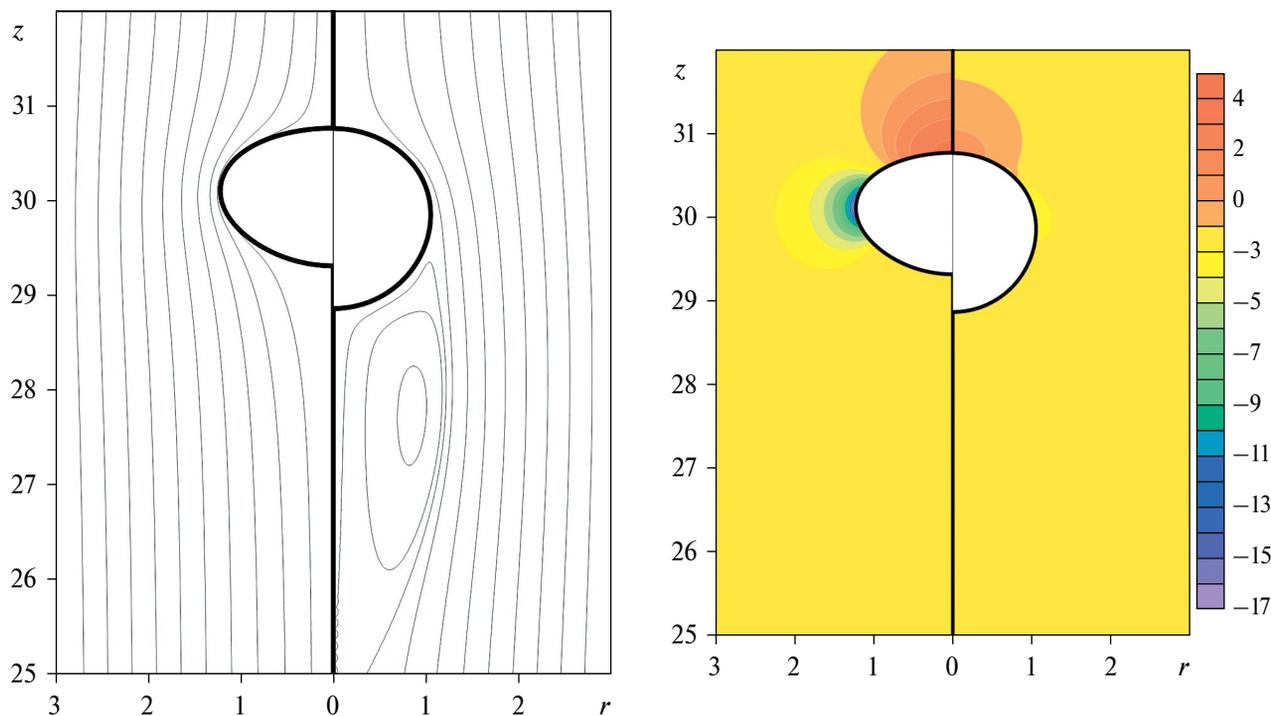


Рис. 10. Линии тока (а) и модифицированное давление (б) в окрестности всплывающего пузырька ($t=40$).

градиентом концентрации вдоль границы (рис. 8а) и, следовательно, меньшим напряжением Марангони по сравнению со следующими моментами времени (рис. 8б). На второй стадии продолжается накопление поверхностно-активного вещества на свободной поверхности и увеличение градиента его концентрации (кривые 2–5 на рис. 8). При этом формируются напряжения с выраженным экстремумом, который со временем смещается вверх по границе. Вторая стадия характеризуется наибольшими абсолютными значениями τ_M (кривая 4 на рис. 8). Кривые 6–7 на рис. 8 соответствуют третьей стадии и характеризуются дальнейшим накоплением поверхностно-активного вещества на границе с его перераспределением, сопровождающимся снижением градиента концентрации поверхностно-активного вещества вдоль границы раздела фаз.

Анализ распределения скорости вдоль поверхности пузырька показывает, что с течением времени на нижней части пузырька начинает формироваться участок, на котором радиальная компонента скорости равна нулю, а аксиальная распределена практически однородно (рис. 9). Из рис. 9 следует, что с увеличением времени этот участок увеличивается в размерах и при $t=20$ занимает нижнюю часть пузырька, а при $t=40$ – еще и часть верхней половины пузырька. Для сравнения на рис. 9 представлены распределения (отмечены штрихпунктирными линиями) компонент вектора скорости, соответствующие всплытию пузырька в отсутствие поверхностно-активного вещества при $t=40$. Видно, что в отсутствие поверхностно-активного вещества наблюдается качественно и количественно другая динамика изменения компонент вектора скорости пузырька.

На рис. 10 приведено распределения линий тока (а) и модифицированного давления, учитывающего гравитационный эффект, (б) в окрестности свободной поверхности в системе координат, движущейся вверх со скоростью всплытия пузырька, в момент времени, соответствующий постоянной скорости всплытия. Левая часть рис. 10 соответствуют $La=0$, правая – $La=1.2$. В отсутствие поверхностно-активного вещества линии тока плавно огибают пузырек. Введение поверхностно-активного вещества приводит к формированию циркуляционной зоны за пузырьком. Распределения модифицированного давления показывают, что в отсутствие поверхностно-активного вещества над пузырьком реализуется зона повышенных значений давлений, а в окрестности боковой части – пониженных значений. При наличии поверхностно-активного вещества данный эффект слабее. В обоих случаях эти распределения согласуются с характером формы пузырька.

Проведено сопоставление результатов экспериментального и численного исследования процесса всплытия одиночного пузырька воздуха диаметром 1.9 мм в присутствии и в отсутствие

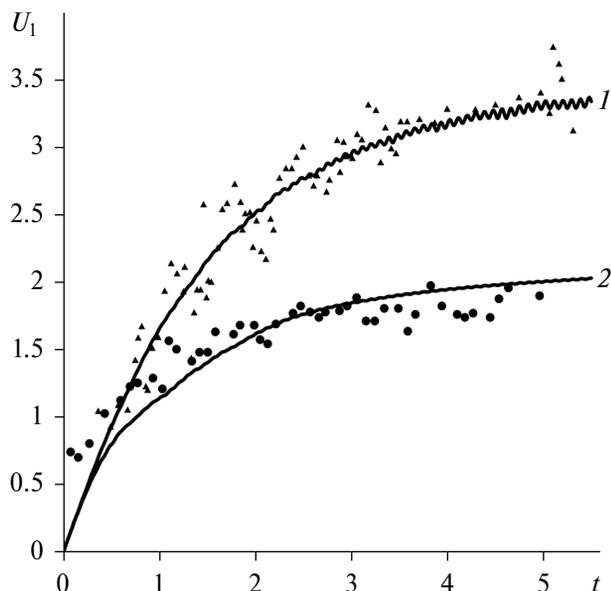


Рис. 11. Зависимость скорости всплытия одиночного пузырька от времени: сплошные кривые – численный расчет; точки – экспериментальные данные: 1, 2 – $C_0=0, 0.32$ ммоль/л.

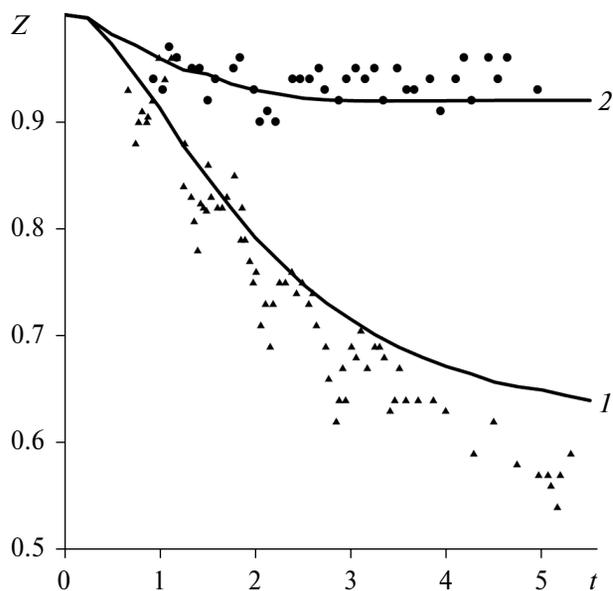


Рис. 12. Зависимость коэффициента эллиптичности одиночного пузырька от времени: сплошные кривые – численный расчет; точки – экспериментальные данные: 1, 2 – $C_0=0, 0.32$ ммоль/л.

поверхностно-активного вещества, растворенного в дистиллированной воде. На рис. 11 представлены расчетные и экспериментальные данные для скорости всплытия пузырька от времени в чистой жидкости (кривая 1) и в присутствии поверхностно-активного вещества с концентрацией $C_0=0.32$ ммоль/л (кривая 2). Рисунок 12 иллюстрирует результаты эксперимента и численного расчета коэффициента эллиптичности одиночного пузырька воздуха, всплывающего в отсутствие (кривая 1) и при наличии поверхностно-активного вещества (кривая 2) в жидкости в зависимости от времени. В экспериментах отрыв пузырька от капилляра (начальный момент всплытия пузырька) осуществлялся с ненулевой концентрацией поверхностно-активного вещества на межфазной границе, поскольку за время формирования пузырька (4 мс) поверхностно-активное вещество адсорбировалось на свободной поверхности. В численных расчетах начальная поверхностная концентрация задавалась равной $0.25 \Gamma_\infty$.

Наличие поверхностно-активного вещества на границе раздела фаз газ-жидкость привело к уменьшению скорости стационарного всплытия пузырька примерно на 41% и к увеличению коэффициента эллиптичности в среднем на 36%. Из рис. 11, 12 следует, что результаты экспериментального и численного исследования рассматриваемого процесса согласуются. Наличие поверхностно-активного вещества в жидкости влияет на динамику всплытия пузырька за счет возникновения касательного напряжения Марангони и зависимости капиллярного давления от концентрации поверхностно-активного вещества на свободной поверхности. Это влияние становится заметным с ростом концентрации поверхностно-активного вещества. Наличие касательного напряжения и перераспределение нормального напряжения, по-видимому, приводит к появлению обнаруженного эффекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов численного и экспериментального исследования процесса всплытия одиночного газового пузырька при наличии и в отсутствие поверхностно-активного вещества на свободной поверхности позволяет сделать следующие выводы.

Сформулирована математическая постановка задачи о движении газового пузырька в вязкой жидкости, которая предполагает формирование неоднородного слоя поверхностно-активного вещества на свободной границе в результате процессов адсорбции и десорбции, конвективного и диффузионного переносов. Граничные условия на межфазной поверхности записаны с учетом разрыва касательных

и нормальных напряжений и эффекта Марангони. Предложена оригинальная численная методика расчета. Продемонстрирована картина распределения основных характеристик в окрестности межфазной границы и на ней самой, а также описаны три стадии всплытия одиночного газового пузырька в присутствии поверхностно-активного вещества.

В диапазоне чисел Рейнольдса $Re=200-600$ получены экспериментальные данные по динамике всплытия одиночного пузырька воздуха в присутствии и в отсутствие поверхностно-активного вещества на границе раздела фаз газ-жидкость. Наличие поверхностно-активного вещества приводит к незначительному уменьшению начального размера пузырька и увеличению коэффициента эллиптичности формы пузырька. Экспериментально обнаружено, что, начиная с некоторой предельной концентрации поверхностно-активного вещества, значение которой зависит от размера пузырька и типа поверхностно-активного вещества, коэффициент эллиптичности снижается.

Результаты экспериментального и численного исследования показали, что наличие поверхностно-активного вещества в жидкости влияет на динамику всплытия пузырька за счет возникновения касательного напряжения Марангони и зависимости капиллярного давления от концентрации поверхностно-активного вещества на свободной поверхности. Это влияние становится заметным с ростом концентрации поверхностно-активного вещества. Наличие касательного напряжения и перераспределение нормального напряжения, по-видимому, приводит к изменению скорости стационарного всплытия пузырька и его формы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10028, <https://rscf.ru/project/22-79-10028/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бошенятов Б.В.* Гидродинамика микропузырьковых газожидкостных сред // Изв. ТПУ. 2005. Т. 308. № 6. С. 156–160.
2. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит, 1959. 700 с.
3. *Фрумкин А.Н., Левич В.Г.* О влиянии поверхностно-активных веществ на движение на границе жидких сред // ЖФХ 1947. Т. 21, Вып. 10. С. 1183–1204.
4. *Palaparthi R., Papageorgiou D.T., Maldarelli C.* Theory and experiments on the stagnant cap regime in the motion of spherical surfactant-laden bubbles // J. Fluid Mech. 2006. Vol. 559. P. 1–44. DOI: 10.1017/S0022112005007019
5. *Clift R., Grace J.R., Weber M.E.* Bubble, drops, and particles. New York. Academic press. 1978. 380 p.
6. *Воинов О.В., Петров А.Г.* Движение пузырей в жидкости // Итоги науки и техники. МЖГ. 1976. Т. 10. С. 86–147.
7. *Духин С.С., Буйков М.В.* Теория динамического адсорбционного слоя движущихся сферических частиц // ЖФХ. 1964. Т. 38, № 12. С. 3011–3013.
8. *Духин С.С., Буйков М.В.* Теория динамического адсорбционного слоя движущихся сферических частиц. II Теория динамического адсорбционного слоя пузырька (капли) при числе Рейнольдса $Re \ll 1$ и сильной заторможенности поверхности // ЖФХ. 1965. Т. 39. № 4. С. 913–920.
9. *Fdhila R. Bel, Duineveld P.C.* The effect of surfactant on the rise of a spherical bubble at high Reynolds and Peclet numbers // Phys. Fluids. 1996. V. 8. P. 310–321. DOI: 10.1063/1.868787
10. *Zhang Y., Finch A.* A note on single bubble motion in surfactant solutions // J. Fluid Mech. 2001. V. 429. P. 63–66. DOI: 10.1017/S0022112000002755
11. *Almatroushi E., Borhan A.* Surfactant effect on the buoyancy-driven motion of bubbles and drops in a tube // Ann. N. Y Acad. Sci. 2004. № 1027. P. 330–341. DOI: 10.1196/annals.1324.028
12. *Hessenkemper H., Ziegenhein T., Lucas D., Tomiyama A.* Influence of surfactant contaminations on the lift force of ellipsoidal bubbles in water // Int. J. Multiphase Flow. 2021. V. 145. P. 103833. DOI:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2021.103833
13. *Li Shao-bai, Fan Jun-geng, Li Run-dong, Wang Lei, Luan Jing-de.* Effect of surfactants on hydrodynamics characteristics of bubble in shear thinning fluids at low Reynolds number // J. CENT SOUTH UNIV. 2018. V. 25. P. 805–811. DOI: 10.1007/s11771-018-3785-9
14. *Takemura F., Yabe A.* Rising speed and dissolution rate of a carbon dioxide bubble in slightly contaminated water // J. Fluid Mech. 1999. V. 378. P. 319–334. DOI: 10.1017/S0022112098003358
15. *Архипов В.А., Васенин И.М., Усанина А.С.* Динамика всплытия пузырька в присутствии поверхностно-активных веществ // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 142–151. DOI: 10.7868/S0568528116020067

16. Бушуева К.А., Денисова М.О., Зуев А.Л., Костарев К.Г. Развитие течения на межфазной поверхности пузырьков и капель в присутствии ПАВ // Конвективные течения. 2007. С. 139–154.
17. Донцов В.Е. Процессы растворения и гидратообразования за ударной волной в жидкости с пузырьками из смеси азота и углекислого газа при наличии поверхностно-активного вещества // Ти А. 2009. Т. 16. № 1. С. 89–101.
18. Tagawa Y, Takagi S., Matsumoto Y. Surfactant effect on path instability of a rising bubble // // J. Fluid Mech. 2014. Vol. 738. P. 124–142. DOI: 10.1017/jfm.2013.571
19. Horowitz M., Williamson C.H.K. The effect of Reynolds number on the dynamics and wakes of freely rising and falling spheres // // J. Fluid Mech. 2010. V. 651. P. 251–294. DOI:10.1017/S0022112009993934
20. Wu M., Gharib M. Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water // Phys. Fluids. 2002. Vol.16. No 7. P. 49–52. DOI: 10.1063/1.1485767
21. Козелков А.С., Ефремов В.Р., Дмитриев С.М., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Тарасова Н.В., Стрелец Д.Ю. Исследование особенностей всплытия пузырьков воздуха и твердых сфер // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2018. Т. 11. № 4. С. 73–80. DOI: 10.7868/S2073667318040093
22. Ryskin G., Leal L.G. Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 3. Bubble deformation in an axisymmetric straining flow // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 37–43. DOI: 10.1017/S0022112084002238
23. Rusche H. Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fraction. PhD Thesis, 2002.
24. Griffith R. The effect of surfactants on the terminal velocity of drops and bubbles // Chem. Eng. Sci. 1962. Vol. 17. P. 1057–1070. DOI: 10.1016/0009–2509(62)80084–0
25. Harper J. Stagnant-cap bubbles with both diffusion and adsorption rate-determining // J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 115–123. DOI: 10.1017/S0022112004001843
26. Dukhin S.S., Kovalchuk V.I., Gochev G.G., Lotfi M., Krzan M., Malysa K., Miller R. Dynamics of rear stagnant cap formation at the surface of spherical bubbles rising in surfactant solutions at large Reynolds numbers under conditions of small Marangoni number and slow sorption kinetics // Adv. Colloid Interface Sci. 2015. V. 222. P. 260–274. DOI: 10.1016/j.cis.2014.10.002
27. Manikantan H., Squires T.M. Surfactant dynamics: hidden variables controlling fluid flows // J. Fluid Mech. 2020.V. 892. P. 1–115, DOI:10.1017/jfm.2020.170
28. Pesci C., Weiner A., Marshall H., Bothe D. Computational analysis of single rising bubbles influenced by soluble surfactant // J. Fluid Mech. 2018. V. 856. P. 709–763. DOI:10.1017/jfm.2018.723
29. Определение критической концентрации мицеллообразования. Межгосударственный стандарт. М.: Издательство стандартов. 2004. 7 с.
30. Chen J., Hayashi K., Legendre D., Lucas D., Tomiyama A. Effect of surfactant on lift coefficient of ellipsoidal bubbles in the viscous-force dominant regime // Multiphase Science and Technology. 2023. V. 35. № 1. P. 55–68. DOI: 10.1615/MultScienTechn.2023046718
31. Aoyama S., Hayashi K., Hosokawa S., Tomiyama A. Shapes of single bubbles in infinite stagnant liquids contaminated with surfactant // Exp. Therm Fluid Sci. 2018.V. 96. P. 460–469. DOI: 10.1016/j.exptermfluidsci.2018.03.015
32. Hayashi K., Tomiyama A., Effects of surfactant on lift coefficients of bubbles in linear shear flows// Int. J. Multiphase Flow. 2018. V. 99. P. 86–93. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.10.003
33. Langmuir I. The constitution and fundamental properties of solids and liquids. II. Liquids // ACS. 1917. V. 38, 1848–1906. DOI: 10.1021/ja02254a006
34. Chang C.-H. Franses E.I. Adsorption dynamics of surfactants at the air/water interface: a critical review of mathematical models, data, and mechanisms // Coll. Surf., A: Physicochem., Eng. Aspects. 1995. V. 100. P. 1–45. DOI: 10.1016/0927–7757(94)03061–4
35. Scriven L.E. Dynamics of a fluid interface Equation of motion for Newtonian surface fluids // Chem. Eng. Sci. 1960. V. 12. I. 2. P. 98–108. DOI: 10.1016/0009-2509(60)87003-0
36. Stone H.A. A simple derivation of the time-dependent convective-diffusion equation for surfactant transport along a deforming interface // Phys. Fluids A: Fluid Dynamics. 1992. V. 2. P. 111–112. DOI: 10.1063/1.857686
37. Langmuir I. The adsorption of gases on plane surfaces of glass, mica and platinum // ACS. 1918. V. 40. I. 9. P. 1361–1401. DOI: 10.1021/ja02242a004
38. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Течения неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. Томск: Издательство ТГУ, 2022. 208 с.
39. Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Hemisphere Publishing Corporation. 1980. 197 p.
40. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // Доклады АН СССР. 1974. V. 217. № 2. P. 295–298.
41. Wakao N. Particle-to fluid transfer coefficients and fluid diffusivities at low flow rate in packed beds // Chem. Eng. Sci. 1976. V.31. P. 1115–1122. DOI: 10.1016/0009-2509%2876%2985021-x.

Experimental and Theoretical Investigation of the Effect of Dissolved Surfactant on the Dynamics of Gas Bubble Floating-up

E. I. Borzenko*, A. S. Usanin, and G. R. Shrager

National Research Tomsk State University, Tomsk, 634050 Russia

**e-mail: borzenko@ftf.tsu.ru*

We present the results of an experimental and numerical investigation of the floating-up of a solitary gas bubble in the presence and absence of dissolved surfactant at Reynolds numbers $Re > 1$. An original numerical technique is proposed, which makes it possible to investigate the dynamics of a solitary bubble with account for the effects occurring when a surfactant is introduced into the fluid. The effect of the surfactant concentration on the bubble dimensions, shape, and rise velocity are analyzed. Three stages of the bubble rise in the presence of a surfactant are established; they characterize its accumulation and distribution over the free surface of the bubble.

Keywords: gas bubble, surfactant, floating-up stages, numerical modeling, experimental investigation.

УДК 532.65

КРУГЛЫЕ ВСПЛЕСКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. А. В. Базилевский^{a, *}, А. Н. Рожков^{a, **}

^aИнститут проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: baz@ipmnet.ru

**e-mail: rozhkov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 26.05.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Исследуются всплески высоковязкой жидкости (глицерин), возникающие в результате ее импульсного вытеснения из зазора между двумя быстро сближающимися дисками. Обнаружено, что за пределами дисков всплеск имеет форму тонкой пленки, ограниченной кольцевой краевой струей. Формулируется физическая модель всплеска, и приводятся аналитические решения, описывающие его траекторию. Результаты расчетов сравниваются с данными эксперимента. Анализируются эффекты вязкости жидкости, поверхностного натяжения и разрушения пленки. Показано, что ключевое влияние на сценарии развития всплеска оказывает поверхностное натяжение пленки, соединяющей краевую струю с дисками.

Ключевые слова: удар, всплеск, капля, пленка, струя, вязкость, поверхностное натяжение.

DOI: 10.31857/S1024708424040109, **EDN:** OYCNFE

Деформация и разрушение жидкости в результате ее высокоскоростного взаимодействия с твердым или жидким препятствием является фундаментальным гидродинамическим процессом, часто встречающимся в природе и технике. Известный пример – удар падающей капли о жидкую или твердую поверхность не только красивое физическое явление, часто используемое в рекламных видеороликах, но и предмет многочисленных научных исследований [1–3]. Несмотря на простоту эксперимента с падающей каплей, в нем содержатся ответы на многие фундаментальные вопросы гидродинамики, капиллярных явлений и реологии жидкости. В настоящей работе используется альтернативный подход к изучению разрушения капли – удар небольшим диском по капле, лежащей на другом диске такого же диаметра [4–6]. Метод быстро смыкающихся дисков (рис. 1а) имеет ряд преимуществ по сравнению с экспериментом с падающей каплей. Среди них – получение более высоких скоростей течения и возможность исследования высоковязких жидкостей. Кроме того, становится возможным исследовать поведение жидкостей со сложной реологией, даже консистентных, в условиях быстрых растягивающих деформаций [4].

Наши эксперименты с ударом по капле маловязкой жидкости (вода) [5, 6] выявили образование за пределами дисков сложных пространственных жидких структур. Их формирование обусловлено гиперболическим нарастанием радиальной скорости истечения жидкости при уменьшении зазора между дисками. Хотя практически в течение всего процесса выброса воды доминируют силы инерции и поверхностного натяжения, его поздняя стадия контролируется вязкими напряжениями, вызванными течением в исчезающем зазоре между дисками.

Аналогичные эксперименты с каплями концентрированных растворов полимеров [4] показали, что полимерная жидкость вытесняется в форме плоского всплеска, напоминающего всплеск при ударе падающей капли о плоское препятствие [7].

Данная работа посвящена исследованию влияния вязкости жидкости на форму и динамику генерируемых всплесков.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Идея эксперимента [4–6] заключается в том, чтобы поместить каплю жидкости на небольшой диск и ударить по ней другим диском такого же диаметра ($2r_2$, рис. 1а). В результате, жидкость быстро выдавливается из зазора h между дисками, образуя за их пределами всплеск. Из баланса расхода следует, что

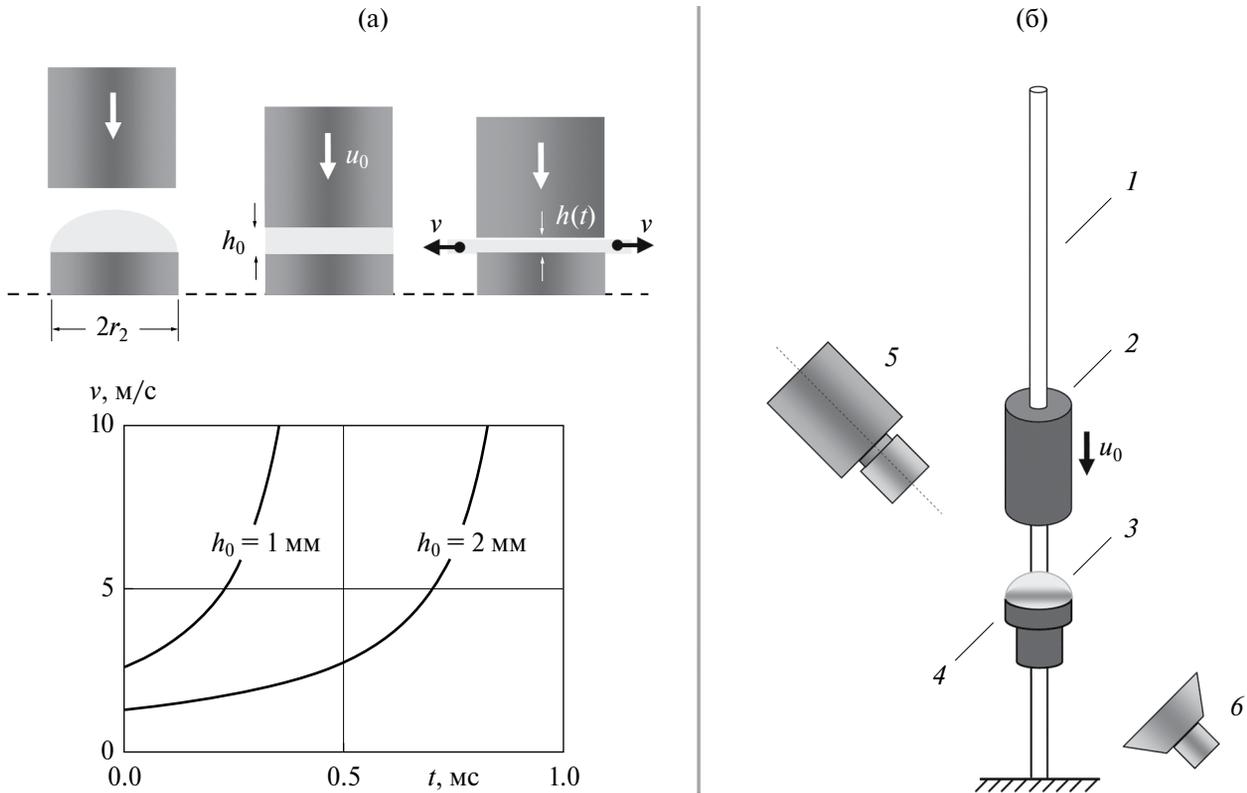


Рис. 1. Метод (а) и схема эксперимента (б): 1 – цилиндрическая направляющая; 2 – ударный диск; 3 – капля; 4 – неподвижный диск; 5 – видеокамера; 6 – светодиодный (LED) осветитель. График на (а) – расчет по формуле (1.1) для $r_2=2.5$ мм, $u_0=2.1$ м/с, $h_0=1$ мм и 2 мм.

в отсутствие диссипативных и инерционных потерь жидкость вытекала бы с бесконечно возрастающей скоростью (вязкость реальных жидкостей замедляет ударный диск, ограничивая скорость истечения) по закону

$$v = u_0 \frac{r_2}{2h}, \quad h = h_0 - u_0 t \tag{1.1}$$

где v – радиальная скорость истечения, h_0 – начальный зазор между дисками (определяется как зазор в момент его полного заполнения жидкостью), u_0 – скорость удара, t – время. Эти обстоятельства определяют гидродинамические особенности генерируемых всплесков и отличают данный процесс от падения капли на диск [7], где скорость истечения уменьшается во времени. Кроме этого, в рассматриваемом случае кинематика выброса жидкости строго детерминирована заданным в эксперименте законом сближения дисков.

Схема эксперимента показана на рис. 1. В экспериментальной установке ударный диск имел отверстие диаметром $2r_1$, позволяющее ему двигаться по цилиндрической направляющей. В этом случае скорость истечения определяется формулой

$$v = u_0 \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2r_2 h}. \tag{1.2}$$

Цилиндрическая направляющая длиной 250 мм и диаметром $2r_1=2$ мм установлена вертикально. На нижнем конце направляющей установлен неподвижный металлический диск диаметром $2r_2=5$ мм, на который помещается капля исследуемой жидкости. Ударный диск массой $M=6$ г, свободно падая вдоль направляющей, ударяет по капле со скоростью $u_0=1-2$ м/с, вытесняя ее из зазора в виде круглого всплеска. Начальная скорость удара определялась по формуле свободного падения $u_0=(2gH)^{1/2}$, где H – высота

падения ударного диска, $g=9.81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. В данной работе: $H=100$ и 225 мм , что соответствует $u_0=1.40$ и 2.10 м/с . Непосредственное измерение u_0 с помощью скоростной видеосъемки показало, что расчетная и измеренная скорости ударного диска отличаются не более чем на 5%. Из (1.2) следует, что при начальном зазоре $h_0=1.5 \text{ мм}$ данным значениям скорости удара соответствуют начальные скорости истечения $v_0=0.98$ и 1.47 м/с .

Эксперименты проводились с глицерином вязкостью $\mu=1.35 \text{ Па}\cdot\text{с}$, плотностью $\rho=1260 \text{ кг/м}^3$ и поверхностным натяжением $\gamma=0.060 \text{ Н/м}$. Объем капли, ее масса и начальный зазор между дисками составляли соответственно $w_0=14\text{--}30 \text{ мм}^3$, $m_0=\rho w_0=17.6\text{--}37.8 \text{ мг}$ и $h_0=w_0/\pi(r_2^2-r_1^2)=0.85\text{--}1.82 \text{ мм}$. Объем капли определялся с помощью компьютерного анализа ее изображения.

Числа Вебера, Рейнольдса, Фруда и Онезорге равны: $We=h_0\rho u_0^2/\gamma=35\text{--}168$, $Re=\rho v h/\mu=\rho u_0(r_2^2-r_1^2)/2r_2\mu=1.4\text{--}3.7$, $Fr=u_0^2/gh_0=110\text{--}530$, $Oh=\mu/(\rho h_0\gamma)^{1/2}=3.6\text{--}5.3$.

Процесс выброса жидкости снимался высокоскоростной видеокамерой VS-FAST. Видеосъемка осуществлялась под углом 45° к вертикали со скоростью 2000 кадров/с при пространственном разрешении 17 пикселей/мм. Эксперименты проводились при температуре $18\text{--}20 \text{ С}$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ

2.1 Результаты эксперимента

Установлено, что при импульсном вытеснении глицерина образуется кольцевая (тороидальная) краевая струя, диаметр и толщина которой изменяются во времени (рис. 2). К моменту смыкания дисков ($\sim 1 \text{ мс}$) струя находится в непосредственной близости к дискам. Между краевой струей и дисками формируется плоская пленка. При малых скоростях удара ($u_0=1.4 \text{ м/с}$) краевая струя сначала расширяется, а затем схлопывается под действием капиллярных сил (рис. 2а и 3а); при этом пленка обычно не разрушается до конца схлопывания всплеска. Для более высокой скорости удара ($u_0=2.1 \text{ м/с}$), характерно разрушение пленки еще на стадии расширения всплеска (рис. 2в). В этом случае краевая струя расширяется без обратного движения к дискам, распадаясь на капли и падая вниз. Однако и здесь возможна ситуация, когда пленка не разрушается и краевая струя “возвращается” к дискам (рис. 2б). Момент разрыва пленки кардинальным образом влияет на траекторию краевой струи. Если разрыв происходит на стадии расширения краевой струи, то расширение ускоряется, а если на стадии обратного движения к дискам, то движение замедляется.

Таким образом, для высоковязкой жидкости (глицерин) характерно образование плоских (2D) структур в отличие от маловязкой жидкости (вода), которая при тех же параметрах удара формирует объемные (3D) всплески [5, 6]. Переход от 3D- к 2D-структурам происходит благодаря замедлению выброса жидкости из-за действия сил вязкого трения.

2.2. Динамика вытеснения из зазора (формирование всплеска)

Эксперименты показали, что исследуемый процесс можно условно разделить на две основные стадии: 1) стадия импульсного вытеснения жидкости из зазора между двумя сближающимися дисками, приводящая к формированию жидкого кольца (краевой струи) и 2) стадия последующего инерционного разлета этого кольца. Поэтому здесь и далее в разд. 2.3 последовательно рассмотрим эти стадии всплеска.

Выброс жидкости из уменьшающегося зазора между дисками схематически показан на рис. 4. За время истечения t жидкости передается суммарный поток импульса

$$J = 2\pi r_2 \int_0^t \rho v^2 h dt = 2\pi r_2 \int_{h_0}^h \rho v^2 \frac{h}{u} dh = \rho 2\pi r_2 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2} \right)^2 \int_{h_0}^h \frac{u}{h} dh \quad (2.1)$$

и кинетическая энергия

$$E = \pi r_2 \int_0^t \rho v^3 h dt = \pi r_2 \int_{h_0}^h \rho v^3 \frac{h}{u} dh = \rho \pi r_2 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2} \right)^3 \int_{h_0}^h \frac{u^2}{h^2} dh \quad (2.2)$$

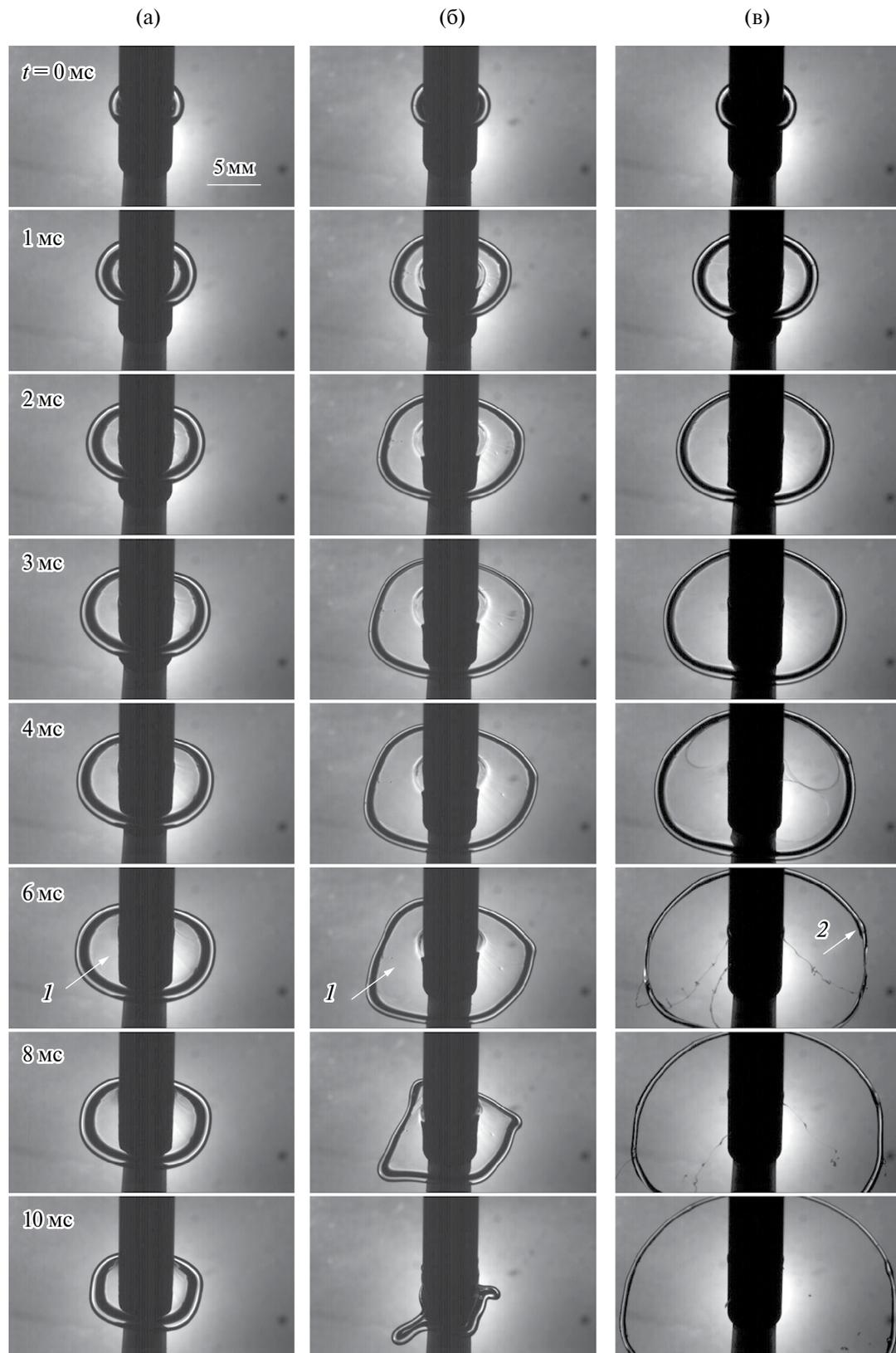


Рис. 2. Всплески глицерина: (а) – $u_0=1.4$ м/с ($H=100$ мм), $m_0=29$ мг, (б) – $u_0=2.1$ м/с ($H=225$ мм), $m_0=17.6$ мг, (в) – $u_0=2.1$ м/с, $m_0=22$ мг. Стрелка 1 показывает пленку, стрелка 2 – возмущение, растущее на краевой струе. Указано время, прошедшее с момента остановки ударного диска.

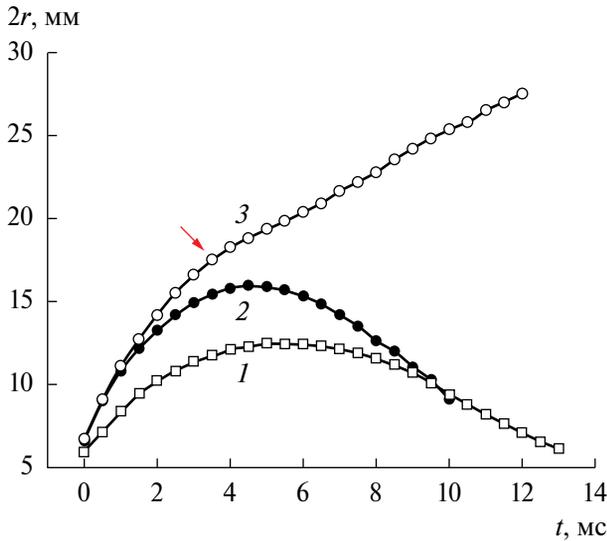


Рис. 3. Диаметр всплесков глицерина как функция времени: 1 – $u_0=1.4$ м/с, $m_0=29$ мг, без разрушения пленки; 2 – $u_0=2.1$ м/с, $m_0=17.6$ мг, без разрушения пленки; 3 – $u_0=2.1$ м/с, $m_0=22$ мг, с разрушением пленки. Стрелка показывает момент начала разрыва пленки. Время отсчитывается от момента закрытия зазора (остановки ударного диска).

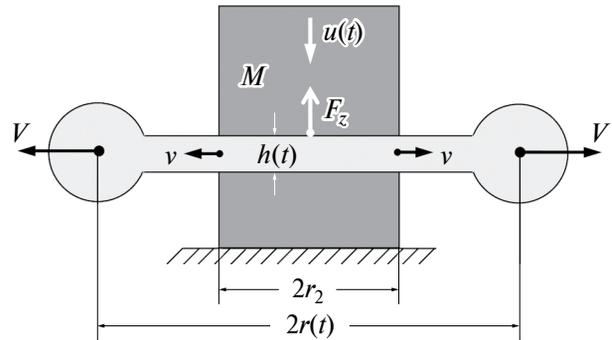


Рис. 4. К расчету импульсного выброса жидкости из зазора.

Если скорость ударного диска постоянна ($u=u_0$), то из (2.1) и (2.2) следует

$$J(h) = -\frac{\rho\pi(r_2^2 - r_1^2)^2 u_0}{2r_2} \ln(h / h_0) = -\frac{\rho\pi(r_2^2 - r_1^2)^2 u_0}{2r_2} \ln(1 - u_0 t / h_0)$$

$$E(h) = \frac{\rho\pi(r_2^2 - r_1^2)^3 u_0^2}{8r_2^2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right) = \frac{\rho\pi(r_2^2 - r_1^2)^3 u_0^2}{8r_2^2 h_0} \left(\frac{h_0}{h} - 1\right) \quad (2.3)$$

Вводя в рассмотрение суммарную скорость всплеска (краевой струи) $V=J/m$ (рис. 4), где $m(h)=\rho\pi(r_2^2 - r_1^2) h_0(1 - h/h_0)$ – масса вытесненной жидкости, имеем

$$V(h) = \frac{J}{m} = -\frac{u_0(r_2^2 - r_1^2)}{2h_0 r_2(1 - h / h_0)} \ln(h / h_0) = -\frac{v_0}{1 - h / h_0} \ln(h / h_0) \quad (2.4)$$

Зависимости (2.3) и (2.4) показаны на рис. 5 (линии для $\mu=0$). Скорость V и кинетическая энергия всплеска E неограниченно увеличиваются при уменьшении зазора. Таким образом, пренебрежение диссипативными и инерционными потерями приводит к бесконечной скорости всплеска. Однако при вытеснении реальной жидкости силы вязкого трения ограничивают рост скорости.

Чтобы оценить эффект вязкого торможения выброса, воспользуемся известной формулой [8, 9] для осевой силы F_z , необходимой для вытеснения жидкости вязкостью μ из зазора h между двумя пластинами радиуса r_2 (без отверстия в диске, $r_1=0$), сближающимися с постоянной скоростью u : $F_z = 3\pi\mu u r_2^4 / 2h^3$. Подставляя этот результат в динамическое уравнение для ударного диска массой M

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} = -Mg + F_z, \quad (2.5)$$

пренебрегая гравитационным членом и инерцией жидкости в зазоре, а, также полагая $u=dh/dt$, можно получить решение [6], описывающее скорость сближения дисков u и скорость истечения жидкости v

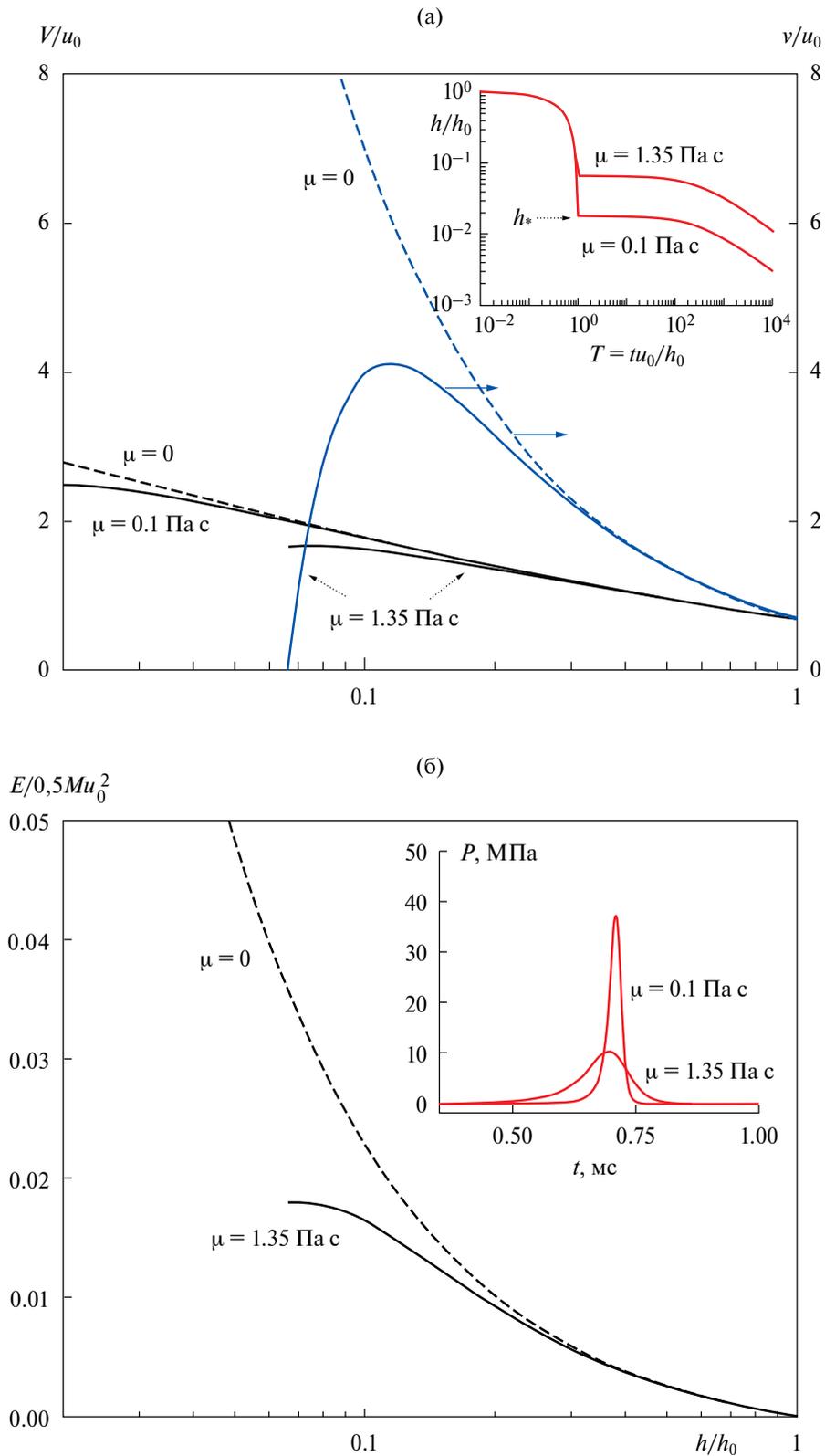


Рис. 5. Результаты вычислений по формулам (2.6) и (2.9): (а) – скорость истечения v и суммарная скорость V , (б) – кинетическая энергия E всплеска как функции зазора между дисками. Вставки: зазор между дисками (а) и избыточное давление в центре дисков (б) как функции времени. Используемые параметры: $\mu = 0, 0.1, 1.35$ Па·с, $u_0 = 2.1$ м/с, $h_0 = 1.5$ мм, $r_2 = 2.5$ мм, $r_1 = 1$ мм, $M = 6$ г.

$$\frac{u}{u_0} = 1 - k_1 \left(\left(\frac{h}{h_0} \right)^{-2} - 1 \right), \quad k_1 = \frac{3\pi\mu r_2^4}{4M h_0^2 u_0}$$

$$\frac{v}{u_0} = \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2 h_0} \right) \left[1 - k_1 \left(\left(\frac{h}{h_0} \right)^{-2} - 1 \right) \right] \left(\frac{h}{h_0} \right)^{-1}$$
(2.6)

Обычно $k_1 \ll 1$; так для параметров рассматриваемого эксперимента: $k_1 = 0.003 - 0.02$.

Из (2.6) следует зазор h_* , при котором происходит остановка ударного диска,

$$h_* = h_0 \left(\frac{1}{k_1} + 1 \right)^{-1/2} \cong h_0 k_1^{1/2} = \left(\frac{3\pi \cdot r_2^4}{4Mu_0} \right)^{1/2} \quad (k_1 \ll 1)$$
(2.7)

Максимальная скорость истечения v_{\max} , достигаемая при зазоре $h_{**} = h_0 [3k_1 / (k_1 + 1)]^{1/2} \cong h_0 (3k_1)^{1/2}$ и скорости ударного диска $u(h_{**}) = (2/3) u_0$, составляет

$$\frac{v_{\max}}{u_0} = \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 h_0} \right) \left(\frac{(k_1 + 1)^3}{27k_1} \right)^{1/2} \cong \left(\frac{4Mu_0}{81\pi \cdot r_2^2} \right)^{1/2} \quad (\text{при } r_2^2 \gg r_1^2, k_1 \ll 1)$$
(2.8)

Формулы (2.7) и (2.8) показывают, что наибольшее влияние на максимальную скорость истечения v_{\max} и минимальный зазор h_* оказывает внешний радиус дисков r_2 , а зависимость от начального зазора h_0 отсутствует. Отсутствие зависимости от h_0 (а значит и от объема капли) вызвано тем, что значительное замедление ударного диска начинается лишь на поздних стадиях удара. Следствием этого является и то, что начальная толщина пленки ($\sim h_*$), связывающей краевую струю с дисками, тоже не зависит от объема капли. Заметим также, что предсказываемая уравнением (2.6) полная остановка ударного диска на конечном расстоянии h_* от неподвижного диска является результатом пренебрежения весом ударного диска (Mg) в динамическом уравнении (2.5). Численное решение уравнения (2.5) показывает (вставка на рис. 5а), что после того как зазор h_* достигнут, ударный диск продолжает медленно и бесконечно долго сближаться с неподвижным диском под действием силы тяжести.

Подстановка решения (2.6) в (2.1) и (2.2) после интегрирования приводит к соотношениям для скорости и кинетической энергии всплеска с учетом диссипативных потерь в зазоре

$$V = -\frac{u_0(r_2^2 - r_1^2)}{2h_0 r_2 (1 - h/h_0)} \left((k_1 + 1) \ln \left(\frac{h}{h_0} \right) + \frac{k_1}{2} \left(\left(\frac{h}{h_0} \right)^{-2} - 1 \right) \right)$$

$$\frac{E}{\frac{1}{2} M u_0^2} = - \left(\frac{\rho \pi (r_2^2 - r_1^2)^3}{4r_2^2 h_0 M} \right) \left(\left(1 + \frac{4k_1}{3} + \frac{32k_1^2}{15} \right) - (1 + 2k_1 + k_1^4) \left(\frac{h}{h_0} \right)^{-1} + \left(\frac{2k_1}{3} + \frac{2k_1^2}{3} \right) \left(\frac{h}{h_0} \right)^{-3} - \frac{k_1^2}{5} \left(\frac{h}{h_0} \right)^{-5} \right)$$
(2.9)

Физический смысл имеют только нарастающие ветви функций (2.9) до момента остановки ударного диска ($h < h_*$). Зазор h_e , соответствующий максимальной кинетической энергии всплеска, равен

$$h_e = h_0 \left(\frac{1}{k_1} + 1 \right)^{-1/2} \cong h_0 k_1^{1/2} \quad (k_1 \ll 1).$$

Подстановка значения h_e/h_0 в решение (2.9), дает оценку максимальной кинетической энергии всплеска

$$\left(\frac{E}{\frac{1}{2} M u_0^2} \right)_{\max} \cong \frac{8}{15} \left(\frac{\rho \pi (r_2^2 - r_1^2)^3}{4r_2^2 h_0 M} \right) k_1^{-1/2} \cong \frac{4(r_2^2 - r_1^2)^3}{15r_2^4} \frac{\rho u_0^{1/2}}{M^{1/2} \mu^{1/2}}$$
(2.10)

Из (2.10) следует, что максимальная кинетическая энергия и максимальный КПД генерации всплеска не зависят от h_0 , а наиболее сильное влияние на них оказывает радиус дисков. Рисунок 5б показывает,

что на формирование всплеска высоковязкой жидкости (глицерин) расходуется менее 2% кинетической энергии ударного диска $Mu_0^2/2$.

Результаты расчета по формулам (2.9) для различных значений вязкости приведены на рис. 5. Видно, что существует максимально достижимая скорость V_{\max} краевой струи, которая определяет максимальный диаметр разлета всплеска; при этом 13 – кратное увеличение вязкости жидкости приводит к уменьшению V_{\max} лишь в 1.4 раза. Из (2.9) при $k_1 \ll 1$ можно получить

$$V_{\max} \approx u_0 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{4r_2 h_0} \right) (-1 - \ln k_1) \quad (k_1 \ll 1)$$

Скорость V_{\max} достигается при зазоре между дисками $h_v/h_0 = [k_1/(k_1+1)]^{1/2} \approx k_1^{1/2}$.

Оценим максимальное избыточное давление P_{\max} в центре дисков и силу F_{\max} , действующую на диски при их сближении. Для избыточного давления с учетом (2.6) имеем

$$P(h) = \frac{3\mu u(h)r_2^2}{h^3} = 3\mu r_2^3 \left(\frac{1+k_1}{h^3} - k_1 \frac{h_0^2}{h^5} \right)$$

Из условия экстремума ($dP/dh=0$ при $h=h_m$) получим

$$h_m = h_0 \left(\frac{5k_1}{3(1+k_1)} \right)^{1/2} \approx h_0 \left(\frac{5}{3} k_1 \right)^{1/2}, \quad u(h_m) = \frac{2}{5}(1+k_1)u_0 \approx \frac{2}{5}u_0$$

$$P_{\max} = \frac{3\mu u(h_m)r_2^2}{h_m^3} \approx \frac{48}{5^{5/2}\pi^{3/2}} \left(\frac{M^3 u_0^5}{\mu r_2^8} \right)^{1/2} \approx 0.154 \left(\frac{M^3 u_0^5}{\mu r_2^8} \right)^{1/2}$$

$$F_{\max} = \frac{3\mu u(h_m)\pi r_2^4}{2h_m^3} \approx \frac{24}{5^{5/2}\pi^{1/2}} \left(\frac{M^3 u_0^5}{\mu r_2^4} \right)^{1/2} \approx 0.242 \left(\frac{M^3 u_0^5}{\mu r_2^4} \right)^{1/2}$$

Обращает на себя внимание отсутствие зависимости избыточного давления P_{\max} и силы F_{\max} от начального зазора между дисками, а, следовательно, и от объема капли.

В заключение приведем результаты вычислений по полученным выше соотношениям. Для следующих значений параметров $\mu = 1.35$ Па·с, $u_0 = 2.1$ м/с, $h_0 = 1.5$ мм, $r_2 = 2.5$ мм, $r_1 = 1$ мм, $M = 6$ г, имеем: $k_1 = 0.0044$, $h_* = h_v = h_c = 0.099$ мм, $h_{**} = 0.17$ мм, $h_m = 0.13$ мм, $v_{\max} = 8.56$ м/с, $V_{\max} = 3.25$ м/с, $(E/0.5Mu_0^2)_{\max} = 0.02$, $P_{\max} = 10$ МПа (100 атм), $F_{\max} = 99$ Н. Следует подчеркнуть, что столь значительное давление и сила действуют только в течение короткого промежутка времени (много меньше $h_0/u_0 \sim 1$ мс, см. вставку на рис. 5б).

2.3. Модель движения всплеска

На основе данных видеосъемки предлагается следующая физическая модель всплеска. Вытесненная из зазора между дисками жидкость аккумулируется в жидком тороидальном кольце (краевой струе). К моменту остановки ударного диска кольцо расположено вблизи дисков, имеет радиальную скорость V_0 и связано с дисками тонкой пленкой толщиной порядка зазора h_* . Затем кольцо движется (расширяется) по инерции. Его диаметр увеличивается, а толщина уменьшается. Расширение тормозится поверхностным натяжением пленки и самого кольца, а также вязкими напряжениями в кольце. Таким образом, постулируется, что всплеск представляет собой расширение краевой струи, имеющей вид жидкого тора (рис. 6). Краевая струя может быть свободна от каких-либо контактов с дисками, либо соединена с ними пленкой. Принимается, что пленка, если существует, то она тонкая, и поэтому масса краевой струи приблизительно равна массе жидкости m_0 , первоначально помещенной в зазор. Также предполагается, что время развития капиллярной неустойчивости краевой струи значительно больше времени расширения всплеска и поэтому ее поверхность остается невозмущенной. В эксперименте выполнение этого условия обеспечивается использованием достаточно вязкой жидкости (глицерина), так как согласно теории

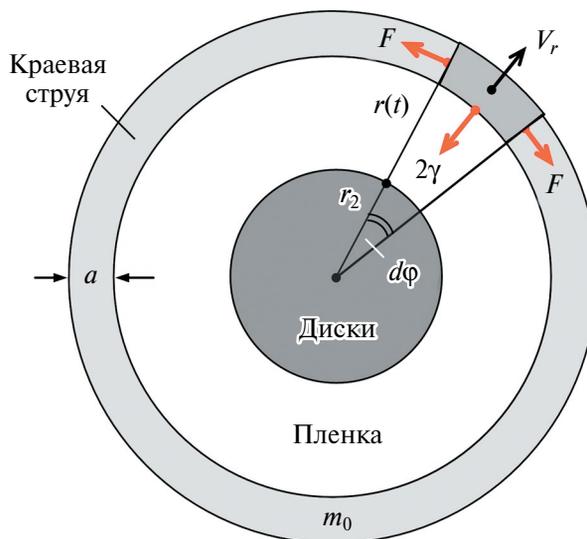


Рис. 6. Схема всплеска.

Рэля—Вебера [10] вязкость замедляет распад струй. Всплеск можно считать плоским (т.е. жидкость движется в горизонтальной плоскости), так как за время его движения ($t \sim 10$ мс) он смещается вниз относительно плоскости зазора лишь на величину порядка $gt^2/2 \approx 0.5$ мм.

Движение краевой струи в секторе $d\phi$ описывается динамическим уравнением

$$\frac{m_0 d\phi}{2\pi} \frac{d^2 r}{dt^2} = -F d\phi - 2\gamma r d\phi$$

или

$$\frac{m_0}{2\pi} \frac{d^2 r}{dt^2} = -F - 2\gamma r \tag{2.11}$$

где r — радиальная координата оси краевой струи, t — время, F — аксиальная сила натяжения краевой струи, $2\gamma r$ — поверхностная сила, действующая на краевую струю со стороны пленки, γ — коэффициент поверхностного натяжения. Слагаемое $2\gamma r$ присутствует только при наличии пленки.

Помимо силы поверхностного натяжения пленки $2\gamma r d\phi$ на краевую струю действует сила аэродинамического сопротивления $\sim (\rho_a V_r^2/2) a r d\phi$, где a — толщина краевой струи круглого сечения, $V_r = dr/dt$ — скорость ее расширения, ρ_a — плотность воздуха. Для параметров эксперимента отношение этих сил составляет $\rho_a V_r^2 a/4\gamma \sim 0.03$. Поэтому влиянием воздуха на процесс движения всплеска можно пренебречь.

Еще одним фактором, не учтенным в (2.11), является сила вязких напряжений в самой пленке, тоже препятствующая расширению всплеска [11]: $F_{vis} \sim 4\mu(dV_r/dr)l r d\phi \approx 4\mu(V_r/r)l d\phi$, где l — толщина пленки. Сравнивая эту силу со слагаемым $2\gamma r d\phi$, получим $F_{vis}/2\gamma r d\phi = 2\mu V_r l/\gamma r = 0.18$ для $\mu = 1.35$ Пас, $r \sim 5$ мм, $V_r \sim V_0 \sim 2$ м/с, $\gamma = 0.06$ Н/м, $l \sim 0.01$ мм. Действие силы F_{vis} значимо только на начальной стадии расширения всплеска, когда V_r и l имеют наибольшую величину. Впрочем, вязкие напряжения в пленке могут быть учтены при численном моделировании всплеска.

Сила F складывается из суммы сил поверхностного натяжения и вязкости

$$F = \frac{\pi a \gamma}{2} + 3\mu E_1 \pi a^2 \tag{2.12}$$

где $E_1 = -2a^{-1} da/dt = r^{-1} dr/dt$ — осевая компонента тензора скоростей деформации краевой струи.

Подстановка (2.12) в (2.11) с учетом баланса массы $m_0 = \rho(2\pi r)(\pi a^2/4)$ преобразует уравнение (2.11) к виду

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \left(\frac{3\mu E_1}{\rho} + \left(\frac{2\pi^2\gamma^2}{\rho m_0} \right)^{1/2} r^{1/2} \right) \frac{1}{r} - \frac{4\pi\gamma}{m_0} r \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) решалось численно (используя MatLab), но для двух частых случаев существуют аналитические решения. Если пренебречь влиянием вязкости, то расширение всплеска контролируется только силами инерции, поверхностного натяжения пленки $2\gamma r d\phi$ и краевой струи $0.5\gamma \pi a d\phi$. Отношение этих сил составляет $0.5\gamma \pi a d\phi / 2\gamma r d\phi \approx a/r \ll 1$. Поэтому при наличии пленки сила поверхностного натяжения краевой струи оказывает заметное влияние лишь на начальной стадии расширения всплеска ($r \sim a$). В тоже время, если пленка разрывается уже на начальной стадии движения всплеска, то именно эта сила определяет его дальнейшую траекторию. Отсюда имеем два асимптотических случая.

(i) В отсутствие диссипативных потерь ($\mu=0$) и при $r \gg a$, т.е. когда вклад силы поверхностного натяжения пленки является преобладающим, уравнение (2.13) преобразуется к виду

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{4\pi\gamma}{m_0} r \quad (2.14)$$

Принимая начальные условия, $r=r_0$ и $dr/dt=V_0$ при $t=0$, получаем решение уравнения (2.14)

$$r = V_0 \left(\frac{m_0}{4\pi\gamma} \right)^{1/2} \sin \left(\left(\frac{4\pi\gamma}{m_0} \right)^{1/2} t \right) + r_0 \cos \left(\left(\frac{4\pi\gamma}{m_0} \right)^{1/2} t \right) \quad (2.15)$$

Входящая в уравнение (2.15) начальная скорость V_0 описывает формирование всплеска в виде импульсного выброса краевой струи с единой скоростью V_0 . В качестве V_0 резонно использовать результирующую скорость V_{\max} . Из (2.15) следует, что время и максимальный радиус расширения всплеска при сохранении пленки равны соответственно

$$t_{\max 1} = \left(\frac{m_0}{4\pi\gamma} \right)^{1/2} \arctg \left(\frac{V_0 \left(\frac{m_0}{4\pi\gamma} \right)^{1/2}}{r_0} \right) = \left(\frac{m_0}{4\pi\gamma} \right)^{1/2} \arctg \left(\left(\frac{m_0 V_0^2}{4\pi\gamma r_0^2} \right)^{1/2} \right)$$

$$r_{\max 1} = r_0 \left(1 + \frac{m_0 V_0^2}{4\pi\gamma r_0^2} \right)^{1/2}$$

Таким образом, максимальный радиус всплеска $r_{\max 1}$ определяется отношением его начальной кинетической энергии к его начальной поверхностной энергии.

(ii) Если внутренняя пленка разрывается на начальных стадиях расширения всплеска, то слагаемое, описывающее силу поверхностного натяжения пленки, отсутствует и уравнение (2.13) принимает вид

$$\frac{d^2r}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi^2\gamma^2}{\rho m_0} \right)^{1/2} r^{-1/2}$$

Решение этого уравнения с начальными условиями, $r=r_0$ и $dr/dt=V_0$ при $t=0$, имеет вид

$$k_2^2 \left(\frac{3V_0}{2r_0} \right) t = (1 + k_2)(1 - 2k_2)^{1/2} \mp \left(1 + k_2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/2} \right) \left(1 - 2k_2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/2} \right)^{1/2}, \quad (2.16)$$

$$k_2 = \left(\frac{8\pi^2\gamma^2 r_0}{\rho m_0 V_0^4} \right)^{1/2}$$

здесь минус соответствует нарастающей ветви траектории всплеска, а плюс – падающей. Отсюда для скорости расширения всплеска ($V_r=dr/dt$) имеем: $V_r=V_0 [1-2k_2((r/r_0)^{1/2}-1)]^{1.2}$. Максимальный радиус

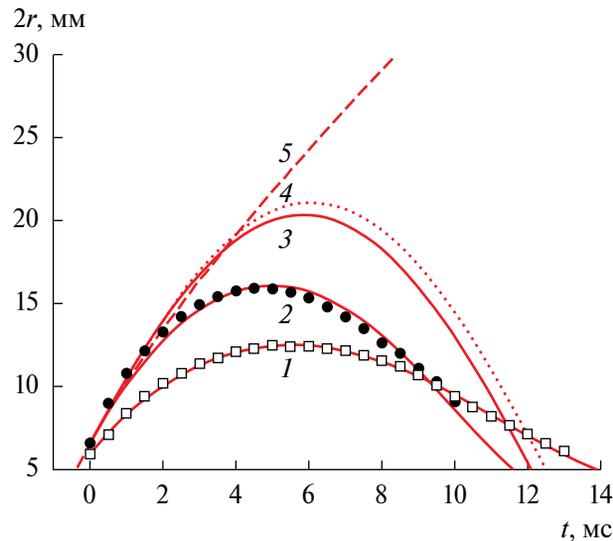


Рис. 7. Расчеты траекторий всплеска: 1 – эксперимент с глицирином (точки, $H=100$ мм, $m_0=29$ мг) и соответствующий расчет (линия для $V_0=1.43$ м/с, $m_0=29$ мг, $r_0=2.97$ мм, $\mu=1.35$ Па·с); 2 – эксперимент с глицирином ($H=225$ мм, $m_0=17.6$ мг) и соответствующий расчет ($V_0=2.07$ м/с, $m_0=17.6$ мг, $r_0=3.3$ мм, $\mu=1.35$ Па·с); 3 – расчет маловязкого всплеска для $V_0=2.07$ м/с, $m_0=17.6$ мг, $r_0=3.3$ мм, $\mu=0.01$ Па·с; 4 – аналитическое решение невязкого всплеска (2.15) для $V_0=2.07$ м/с, $m_0=17.6$ мг, $r_0=3.3$ мм; 5 – расчет вязкого всплеска без пленки для $V_0=2.07$ м/с, $m_0=17.6$ мг, $r_0=3.3$ мм, $\mu=1.35$ Па·с.

всплеска без пленки равен $r_{\max 2}/r_0=(1+1/2k_2)^2$, а время его расширения составляет $t_{\max 2}\approx(2r_0/3V_0)(1-3k_2)/k_2^2$.

Значения параметров $V_0=2$ м/с, $r_0=3$ мм, $m_0=17.6$ мг, $\rho=1260$ кг/м³, $\gamma=0.06$ Н/м, $k_2=0.0489$ дают для двух рассмотренных случаев следующие величины максимального радиуса и времени разлета всплеска: $r_{\max 1}=10.1$ мм, $t_{\max 1}=6.1$ мс и $r_{\max 2}=378$ мм, $t_{\max 2}\approx 0.4$ с. Таким образом, разрыв пленки приводит к многократному увеличению радиуса и времени разлета всплеска. Отметим, что уравнения (2.15) и (2.16), описывающие расширение тора маловязкой жидкости, применимы к реальному кольцевому всплеску только до момента его капиллярного распада по механизму Рэлея [12].

На рис. 7 представлены результаты численного решения уравнения (2.13), аналитическое решение (2.15) и экспериментальные данные для случая, когда пленка не разрывалась. Вычисления подтверждают обнаруженное в эксперименте ключевое влияние поверхностного натяжения пленки на движение и форму всплеска. Вязкость жидкости оказывает не столь сильное влияние – при изменении вязкости в 135 раз максимальный диаметр разлета всплеска изменяется лишь в 1.3 раза.

2.4. Разрыв пленки всплеска

Представленные выше данные показывают, что наличие или отсутствие пленки, соединяющей крайнюю струю с дисками, оказывает доминирующее влияние на движение всплеска. Поэтому вопрос об устойчивости и разрушении пленки приобретает особое значение. На рис. 8 показаны кадры появления и развития дырок в глицириновой пленке. Видно, что дырки могут появляться в разных ее частях. Из теории капиллярной устойчивости круглой дырки в плоской жидкой пленке известно, что дырка будет расширяться, если ее радиус больше половины толщины пленки [13]. Можно предположить, что дырки зарождаются в результате присутствия в жидкости микровключений, например микропузырьков воздуха. Время жизни глицириновой пленки после появления в ней дырки (или дырок) составляет $\tau\sim 2$ мс (рис. 8). Скорость распространения края дырки в пленке идеальной жидкости толщиной l равна $(2\gamma/l\rho)^{1/2}$ [14]. Тогда для времени жизни пленки радиуса r_* имеем: $\tau\sim r_*(l\rho/2\gamma)^{1/2}$. Отсюда можно оценить толщину пленки как $l\sim 2\gamma\tau^2/\rho r_*^2$. Подставляя значения $\tau\sim 2$ мс, $r_*\sim 7.5$ мм, $\rho=1260$ кг/м³ и $\gamma=0.06$ Н/м, получим $l\sim 8$ мкм. Данная величина согласуется с оценкой l по начальной толщине пленки h_* в момент остановки ударного диска: $l\sim h_*(r_2/r_*)^2=100(2.5/7.5)^2=11$ мкм.

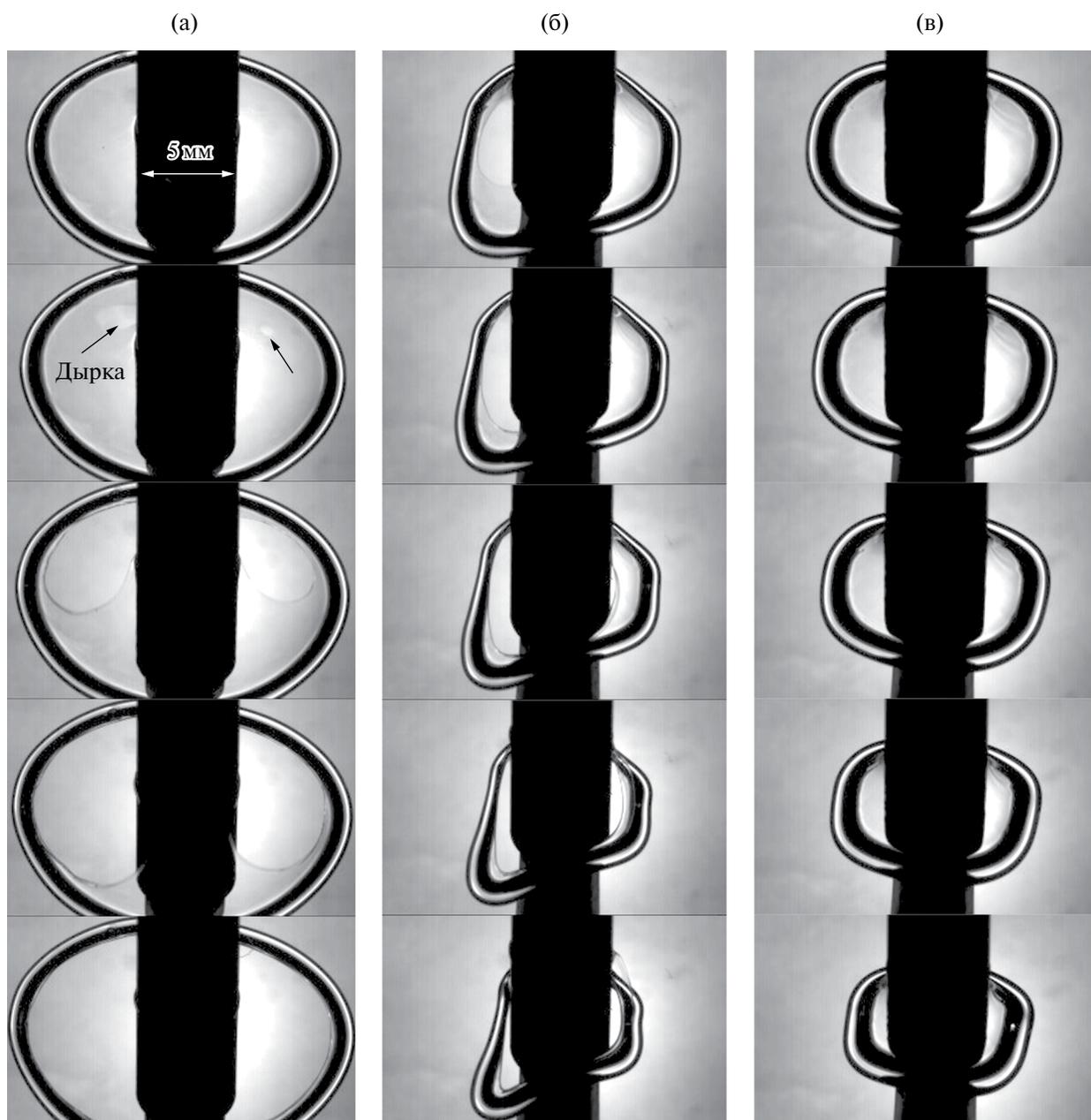


Рис. 8. Появление и расширение дырок в пленке глицерина (а). Искажение формы всплеска при его схлопывании с разрушением внутренней пленки (б) и без ее разрушения (в). Скорость удара $u_0=1.4$ м/с. Интервал времени между кадрами – 0.5 мс (а, б) и 1 мс (в).

2.5. Искажение формы всплеска

Всплеск на стадии разлета сохраняет кольцевую форму (рис. 2), в то время как на стадии схлопывания его форма обычно искажается (рис. 2б и рис. 8б, в). Одна из возможных причин этих искажений – продольное сжатие краевой струи, приводящее к потере устойчивости (выпучиванию) ее оси [15, 16]. Процесс является аналогом неустойчивости тонких стержней и контролируется поверхностным натяжением краевой струи и вязкими напряжениями в ней. Насколько нам известно, выпучивание струи тороидальной формы ранее не наблюдалось. Другая причина искажений краевой струи – локальный разрыв внутренней пленки (рис. 8б), что нарушает симметрию капиллярных сил, действующих на краевую струю. Совместное влияние этих двух факторов приводит к сложным несимметричным формам глицеринового кольца.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Импульсное вытеснение высоковязкой жидкости из зазора между двумя сближающимися дисками приводит к формированию плоских (2D) жидких структур. Образуется всплеск, состоящий из тонкой плёнки, ограниченной тороидальной краевой струёй. В процессе движения всплеска в плёнке могут появляться дырки, в результате чего она разрушается. Момент разрыва пленки обуславливает траекторию и форму всплеска. Если пленка сохраняется, то образуется всплеск ограниченного размера; если пленка спонтанно разрушается, то это способствует значительному увеличению диаметра разлета всплеска. Краевая струя всплеска в зависимости от скорости вытеснения жидкости либо распадается на капли, либо схлопывается путём обратного движения к дискам. Разработанные физические модели формирования и движения всплеска хорошо описывают результаты эксперимента.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 23-19-00451.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yarin A.L., Roisman I.V., Tropea C.* Collision Phenomena in Liquids and Solids, Cambridge University Press, 2017.
2. *Yarin A.L.* Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 159–192.
3. *Базилевский А.В., Рожков А.Н.* Удар микроструи по микроволокну // *Изв. РАН. МЖГ.* 2023. № 5. С. 110–118.
4. *Базилевский А.В., Рожков А.Н.* Всплеск упругой жидкости – реологический тест полимерных растворов // *Высокомолекулярные соединения. Серия А.* 2018. Т. 60. № 3. С. 235–248.
5. *Bazilevsky A.V., Rozhkov A.N.* Letter: Dome-shaped splashes generated by the impact of a small disk on a sessile water drop // *Phys. Fluids.* 2018. V. 30. P. 101702.
6. *Bazilevsky A.V., Rozhkov A.N.* Impact of a small disk on a sessile water drop // *Phys. Fluids.* 2020. V. 32. P. 087101.
7. *Rozhkov A., Prunet-Foch B., Vignes-Adler M.* Impact of water drops on small targets // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14. P. 3485.
8. *Reynolds O.* Papers on Mechanical and Physical Aspects // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1886. V. 177. P. 157–234.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика/ Уч. пособ. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.
10. *Eggers J., Villermaux E.* Physics of liquid jets // *Reports on Progress in Physics.* 2008. V. 71. 79p.
11. *Енто В.М., Кестенбойм Х.С., Рожков А.Н., Шарчевич Л.И.* О динамической форме равновесия пленки вязкой и упруговязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1980. № 2. С. 9–18.
12. *Rayleigh L.* On the instability of jets // *Proc. London Math. Soc.* 1879. V. 10. P. 4–13.
13. *Taylor G.I., Michael D.H.* On making holes in a sheet of fluid // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 58. № 4. P. 625–639.
14. *Taylor G.I.* The dynamics of thin sheets of fluid. III. Disintegration of fluid sheets // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* 1959. V. A253. № 1274. P. 313–321.
15. *Taylor G.I.* Instability of jets, threads, and sheets of viscous fluid // *Proc. 12th Int. Congr. Appl. Mech. (ICTAM 1968), Springer,* 1969. P. 382–388.
16. *Ribe N.M., Habibi M., Bonn D.* Liquid Rope Coiling // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2012. V. 44. P. 249–266.

Round Splashes of a Viscous Liquid

A. V. Bazilevskii^{a,*} and A. N. Rozhkov^{a,**}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: baz@ipmnet.ru*

^{**}*e-mail: rozhkov@ipmnet.ru*

The splashes of a highly viscous fluid (glycerol) resulting from its pulsed displacement from a gap between two rapidly approaching disks are studied. It is found that, outside the disks, the splash has the form of a thin film bounded by an annular rim. A physical model of the splash is formulated, and analytical solutions describing its trajectory are given. The calculation results are compared with experimental data. The effects of fluid viscosity, surface tension, and film breakdown are analyzed. It is shown that the key influence on the splash development scenarios is exerted by surface tension of the film connecting the rim to the disks.

Keywords: impact, splash, drop, film, jet, viscosity, surface tension.

УДК 533

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ОБЪЕМНОЙ АННИГИЛЯЦИИ В СОБСТВЕННОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

© 2024 г. А. Н. Голубятников*, С. А. Захаров**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: golubiat@mail.ru

**e-mail: zakchar5000@gmail.com

Поступила в редакцию 10.06.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается процесс объемной аннигиляции частиц и античастиц в собственном гравитационном поле. Решается задача об однородном сжатии такой системы как в рамках общей теории относительности, так и в ньютоновской механике. Рассмотрены две модели коллапсирующего вещества; горячей и холодной пыли, заполненной излучением. Учитывается градиент давления излучения.

Ключевые слова: аннигиляция, частицы и античастицы, излучение, гравитационное поле.

DOI: 10.31857/S1024708424040119, **EDN:** OYBJPJ

В свое время Л. И. Седов объяснил происхождение космических лучей путем решения задачи о взрыве в среде с переменной плотностью [1], а также указал на возможный механизм порождения безмассовых частиц [2]. Так на основании уравнения Мещерского для материальной точки переменной массы в ньютоновской механике

$$m\dot{v} = \dot{m}v_0(m)$$

если относительная скорость потери массы $v_0 \sim m^{-1/2}$, получится при $m \rightarrow 0$ выход конечной кинетической энергии $E = mv^2/2 \neq 0$. Аналогичный эффект выхода, но уже энергии-импульса $E = cP$, имеет место и в теории относительности (c – скорость света).

В работе [3] при численном решении задачи о релятивистском цилиндрическом взрыве в среде с падающей плотностью указан подобный эффект, названный отделением энергии-импульса от массы, вблизи ударной волны [3]. В [4] получен ряд точных неавтомодельных решений уравнений релятивистской гидродинамики с асимптотическим уходом энергии-импульса при взрыве.

В исследовании [5] решена задача Г. Герца о наилучшем распределении масс при распространении волны столкновений в бесконечной цепочке материальных точек с суммарной конечной массой, которая также дает выход конечной энергии на “нулевую” массу. В теории относительности – энергии-импульса. Причем остаток цепочки движется как твердое тело, не рассыпаясь. Там же решена задача об оптимизации столкновений в цепочке линейных осцилляторов с полным уходом энергии колебаний.

Кроме этого, помимо сосредоточения энергии на периферии системы решен ряд задач о концентрации энергии в точке при наличии сферической симметрии. На основании соображений О. И. Богоявленского о двойственных решениях [6], построено решение, двойственное к сильному взрыву [7]. Ударная волна здесь создается поршнем, сжимающим газ из бесконечности. В центре, действительно, концентрируется конечная энергия, но поршень совершает бесконечную работу (кпд=0).

Позже решена задача с использованием частичной инвариантности решения со сферическим поршнем, сжимающим вязкий теплопроводный газ, как в ньютоновской механике [8], так и в общей теории относительности [9], с полной концентрацией конечной энергии, причем без тепловых потерь (кпд=1). Одним из свойств этих решений является произвол в одну гармоническую функцию трех пространственных переменных, позволяющих смоделировать произвольное распределение горячих пузырей или

холодных капель в сжимающейся (или расширяющейся) среде. Одним из факторов сжатия здесь может служить гравитационное поле.

Наиболее эффективным процессом, переводящим массу в энергию, является аннигиляция. Явление аннигиляции частиц и античастиц, оставляющих за собой реликтовое излучение, хорошо известно в астрофизике [10]. Оценки преобладания материи, из которой состоит известный нам мир, над антиматерией дают значение 10^{-10} , чем явно можно пренебречь при анализе динамических явлений.

Работы [11–13] по динамике амбиплазмы – четнокомпонентной смеси частиц с симметричным распределением зарядов и масс, т.е. при отсутствии электрического поля, направлены на изобретение механизмов удержания материи и антиматерии в одном газовом облаке путем совместного действия гравитации и магнитного полей.

Данная работа будет посвящена динамике двухкомпонентной модели амбиплазмы без магнитного поля, но с учетом постепенно заполняющего ее равновесного излучения. Остаются в стороне вопросы распространения аннигиляционных ударных волн [14, 15], где аннигиляция проявляется как явление, происходящее в тонком ударном слое. Исследование стационарной структуры такого слоя является отдельной задачей. Ниже приводится ряд точных (или численных, сопровождающихся построением графиков) решений, связанных с объемными процессами.

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается стадия симметричной аннигиляции системы, имеющей одинаковые по модулю плотности зарядов, а также одинаковые скорости и массовые плотности вещества. Суммарное электромагнитное поле отсутствует, а взаимодействие осуществляется только посредством общего гравитационного поля. Некоторые оценки состояния и эволюции такой системы можно найти в [10] в связи с наблюдаемым во Вселенной реликтовым излучением.

Оказывается, задачу об однородном движении такой системы проще решить в рамках общей теории относительности, чем в ньютоновской механике.

Уравнения Эйнштейна (с учетом удвоенности источника поля) и независимое уравнение потери массы для каждой компоненты смеси имеют вид

$$G^{ij} = 16 \pi G T^{ij}, \quad T^{ij} = \rho h(p, S) u^i u^j - g^{ij} p, \quad u_i u^i = 1$$

$$\nabla_i(\rho u^i) = -\alpha \rho^2$$

где ρ – плотность массы покоя, u^i – 4-скорость ($i=0, 1, 2, 3$), h – удельная энтальпия, p – давление, S – удельная энтропия, α – параметр аннигиляции и g^{ij} – компоненты метрического тензора. Скорость света $c = 1$, G – гравитационная постоянная, G^{ij} – тензор Эйнштейна и T^{ij} – тензор энергии-импульса.

Нулевая дивергенция тензора энергии-импульса $\nabla_j T^{ij} = 0$, как следствие уравнений Эйнштейна, дает

$$\rho h u^k \nabla_k u^i - (g^{ij} - u^i u^j) \nabla_j p = 0, \quad -\alpha \rho^2 h + \rho T u^k \nabla_k S = 0$$

Здесь T – абсолютная температура. Для проверки второго закона термодинамики необходимо также составить уравнение производства энтропии

$$\nabla_i(\rho u^i S) = \frac{\alpha \rho^2}{T} (h - TS)$$

правая часть которого должна быть неотрицательной. В принципе, химический потенциал $\mu = h - TS$ не должен переходить через ноль, параметр аннигиляции $\alpha(\mu)$ считается положительным.

Отметим, что для облегчения интегрирования в правую часть уравнения потери массы можно добавить корень из $\det(\gamma_{\alpha\beta})$, где $\gamma_{\alpha\beta}$ – лагранжевы координаты тензора $u_i u_j - g^{ij}$. В ньютоновской механике это отвечает добавлению $\Delta = \det(\partial x^i / \partial \xi^j)$, в результате чего мы получаем независимое уравнение для $\rho \Delta$. Но в данной работе такая модернизация теории смеси использоваться не будет.

2. КОЛЛАПС ГОРЯЧЕЙ ПЫЛИ

Далее рассматривается сферически-симметричное движение газа. Для простоты пренебрежем давлением $p = 0$, благодаря чему легко удовлетворить граничным условиям для шара конечного радиуса. Такая модель есть предел состояния совершенного газа при показателе адиабаты $\gamma = 1 + 2/n$, $n \rightarrow \infty$. При этом аннигилирующая масса переходит в тепловую энергию компонент смеси, которая, в конце концов, отделяется от массы. Если

$$h = 1 + h_0 \exp(S / c_0), \quad \text{то} \quad h = 1 + c_0 T$$

где c_0 – удельная теплоемкость. Таким образом, потеря массы приводит к необратимому росту энтропии, пока не станет нулевым химический потенциал

$$h - TS = 1 + c_0 T \left(1 - \ln \frac{c_0 T}{h_0} \right) \geq 0$$

В качестве примера рассмотрим задачу А. Фридмана об однородном сферическом-симметричном сжатии облака пыли, конечного или бесконечного. Группы симметрии решения в зависимости от вида движения шестимерны, сохраняющие, соответственно, трехмерные гиперboloид, плоскость или сферу.

Используется форма уравнений поля Мизнера-Шарпа в синхронно-сопутствующих координатах с метрикой

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) \left(\frac{d\xi^2}{1 + \delta\xi^2} + \xi^2 d\omega^2 \right)$$

где $d\omega^2$ – метрика двумерной единичной сферы, a – масштабный фактор, характеризующий закон движения смеси по радиусу $r = a(\tau)\xi$, $\delta = 1, 0, -1$ для указанных движений: по Кеплеру гиперболического, параболического или эллиптического типов. Скорость $u_i = \delta_0^i$, а ρ и T – функции τ .

Для пыли эти уравнения имеют вид

$$1 - \frac{2GE}{r} + r_\tau^2 - \frac{(1 + \delta\xi^2)r_\xi^2}{a^2} = 0, \quad E_\tau = 0, \quad E_\xi = 8\pi\rho ha^3\xi^2$$

$$r_{\xi\tau} - r_\xi \frac{a_\tau}{a} = 0, \quad (\rho a^3)_\tau + \alpha \rho^2 a^3 = 0$$

Ускорение $u^k \nabla_k u^i \equiv 0$. Или

$$\dot{a}^2 - \frac{2GE}{a\xi^3} = \delta, \quad E = E_1 \xi^3, \quad E_1 = \frac{8\pi}{3} \rho ha^3 = \text{const}$$

Рассмотрим вначале параболическое сжатие, когда $\delta = 0$ и $\dot{a}(-\infty) = 0$. Решение уравнений для a дает

$$a = \left(\frac{9GE_1}{2} \right)^{1/3} |\tau|^{2/3}$$

Произвольная постоянная убирается сдвигом τ . Отметим, что движение среды фактически не зависит от поведения плотности и температуры.

Для $\rho(\tau)$, считая α положительной постоянной, получим уравнение Риккати, которое сводится к линейному относительно $1/\rho$. Его общее решение при $\tau < 0$ имеет вид

$$\rho = \frac{C}{\alpha|\tau|(C + \alpha|\tau|)} > 0$$

Постоянная $C > 0$ обеспечивает положительность плотности при всех $\tau < 0$. При этом плотность монотонно растёт от нуля до бесконечности.

Температура $T(\tau)$ определяется из формулы для постоянной $E_1 \sim \rho ha^3$. При малых $a \sim |\tau|^{3/2}$ плотность $\rho \sim 1/|\tau| \sim 1/a^{3/2}$ и температура также $T \sim 1/a^{3/2}$. При $|\tau| \rightarrow \infty$ температура конечна. Поэтому соображения насчет второго начала термодинамики могут быть существенны.

Аналогичным образом решается задача и об эллиптическом сжатии ($\delta = -1$), начиная от равновесного состояния с конечными $a_0 = 2GE_1$ и ρ_0 . Переменная $a(\tau)$ монотонна. Поэтому сначала удобно решить уравнение для $\rho(a)$

$$\dot{a}(\tau) = -\sqrt{a_0 / a - 1} \equiv ab, \quad \left(\frac{d\rho}{da} + \frac{3\rho}{a} \right) ab + \alpha\rho^2 = 0$$

также сводящемуся к линейному.

Решение имеет вид

$$\tau = \tau_0 + a^2 b + a_0 \arctg(ab), \quad \frac{1}{\rho} = a^3 \left(\frac{1}{\rho_0 a_0^3} + \frac{2\alpha}{3a_0^2} (2 + a_0 / a) ab \right)$$

Качественное исследование показывает, что вблизи начальной точки плотность падает, а при $a \rightarrow 0$ неограниченно растет как $1/a^{3/2}$, аналогично параболическому случаю. Имеется один минимум.

Физически это означает: в начале масса аннигилирует при сжатии за счет действием силы тяжести, а в конце коллапса происходит сферическая фокусировка к центру.

3. НЬЮТОНОВСКАЯ МЕХАНИКА

В этом случае уравнения движения симметричной смеси имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i (\rho v^i) + \alpha \rho^2 &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v^j \nabla_j v_i + \nabla_i p &= \rho \nabla_i \phi, \quad \Delta \phi + 8\pi G \rho = 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|v|^2}{2} + U \right) + \rho v^i \nabla_i \left(\frac{|v|^2}{2} + U \right) + \nabla_i (\rho v^i) &= \alpha \rho^2 U + \rho v^i \nabla_i \phi \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $U(\rho, S)$ – удельная внутренняя энергия, v^i – скорость. С помощью уравнений движения из уравнения энергии получим уравнение притока тепла

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \alpha \rho^2 h \tag{3.2}$$

Для однородного сферически-симметричного движения горячей пыли в координатах t, r , выбирая подходящие масштабы измерений: $\alpha = 1$ (считается постоянной), $8\pi G/3 = 1$, получим

$$r = a(t)\xi, \quad v = r(\dot{a}/a), \quad \dot{\rho} + 3\rho(\dot{a}/a) + \rho^2 = 0, \quad \ddot{a}/a + \rho = 0$$

$$\frac{dU}{dt} = \alpha \rho U$$

Таким образом, распределение температуры $U = c_0 T$ находится после независимого определения масштабного фактора и плотности из линейного уравнения в переменных t, ξ . Для вычисления удельной силы тяжести $\nabla_i \phi$ здесь использовано безразмерное уравнение Пуассона $\Delta \phi + 3\rho = 0$.

При решении и качественном анализе полезно понизить порядок, используя $b(t) = v/r = \dot{a}/a$. Тогда система сводится к уравнениям

$$\dot{b} + b^2 + \rho = 0, \quad \dot{\rho} + \rho(\rho + 3b) = 0$$

которые решаются численно.

Или к уравнению первого порядка

$$\frac{d\rho}{db} = \frac{\rho(\rho + 3b)}{b^2 + \rho} \quad (3.3)$$

Последнее показывает, что при движении влево от прямой $b = 0$, отвечающей равновесию, интегральная кривая всегда пересекает линию $\rho + 3b = 0$, на которой реализуется минимум плотности. Затем плотность неограниченно растет, приближаясь сверху к асимптоте $\rho = -2b - 4$ как $\rho = -2b - 4 + 8/b + 64/b^2 + O(1/b^3)$.

На рис. 1 указано поведение плотности ρ как функции радиальной скорости деформации b .

4. ХОЛОДНАЯ ПЫЛЬ И ЧЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Рассмотрим сферически-симметричное движение смеси холодной пыли и черного излучения, создающего ненулевое давление в безграничной среде.

Тогда, как известно, для холодного вещества ($p = 0$) энтальпия $h = 1$, а для излучения $\mu = 0$, так что общий химический потенциал $\mu \equiv 2$. Таким образом, потеря массы все время приводит к необратимому росту потока энтропии. Передача массы от пыли к излучению происходит с помощью передачи энергии покоя путем умножения массы на квадрат скорости света.

Рассмотрим задачу Фридмана о сжатии с более общей сопутствующей метрикой

$$ds^2 = B^2 dt^2 - A^2 d\xi^2 - r^2 d\omega^2$$

$r = r(t, \xi)$, а $A < 0$, $B > 0$ – функции t, ξ . Пусть скорость $u^i = \delta_0^i / B$ будет общая, а плотность каждой из первых двух компонент обозначим просто через ρ , а через p давление излучения, обе функции t . От термодинамики нам понадобится только соотношение для плотности внутренней энергии излучения $\rho U = \varepsilon = 3p$. Итак, общая плотность энергии смеси $\varepsilon = 2\rho + 3p$.

Общие уравнения Эйнштейна и уравнения потери массы имеют вид

$$1 - \frac{2GE}{r} + \frac{r_t^2}{B^2} - \frac{r_\xi^2}{A^2} = 0$$

$$E_t = -4\pi p r^2 r_t, \quad E_\xi = 4\pi \varepsilon r^2 r_\xi$$

$$r_\xi r_t - r_\xi A_t / A - r_t B_\xi / B = 0, \quad (\rho r^2 A)_t + \alpha \rho^2 r^2 AB = 0$$

Сохранение общей энергии-импульса

$$B p_\xi + (\varepsilon + p) B_\xi = 0, \quad A r^2 \varepsilon_t + (\varepsilon + p) \cdot (A r^2)_t = 0$$

Решение методом разделения переменных дает

$$A^2 = \frac{t^2}{1 + \delta \xi^2}, \quad B^2 = \frac{3}{3\delta + 8\pi G t^2 \varepsilon}$$

$$E = 4\pi \xi^3 |t|^3 \varepsilon, \quad t \varepsilon_t + 4\varepsilon = 2\rho, \quad (\rho t^3)_t + \alpha \rho^2 t^3 B = 0$$

где δ – произвольная постоянная. При $\delta < 0$ надо следить за положительностью A^2 и B^2 . Начальные условия: $\rho(t_0) = \rho_0$, $p(t_0) = 0$.

Рассмотрим параболическое движение $\delta = 0$. Тогда последние два обыкновенных уравнения для ρ, ε образуют автономную систему после замены вида $t = -\text{exрs}$. В переменных $\alpha = 1, 8\pi G/3 = 1$

$$\rho' + 3\rho = \rho^2 / \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon' + 4\varepsilon = 2\rho$$

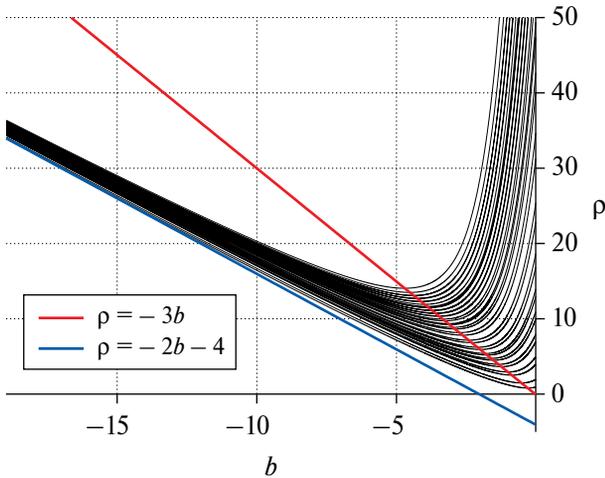


Рис. 1 Зависимость плотности ρ от радиальной скорости деформации в случае ньютоновской механики для горячей пыли.

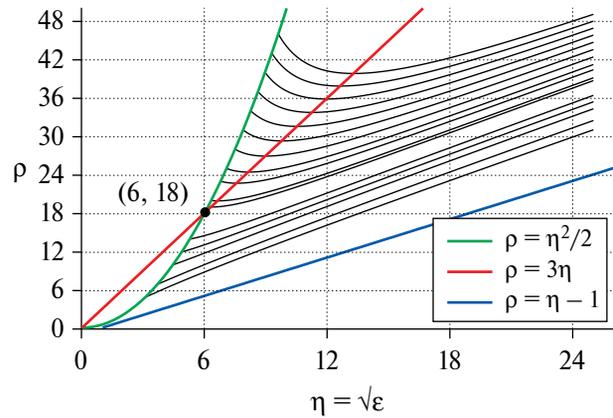


Рис. 2 Зависимость плотности ρ от переменной $\eta = \sqrt{\epsilon}$ в общей теории относительности для холодной пыли.

Для качественного исследования удобно ввести переменную $\eta = \sqrt{\epsilon}$. Тогда

$$\frac{d\rho}{d\eta} = \frac{\rho(\rho - 3\eta)}{\rho - 2\eta^2} \tag{4.1}$$

Кривая начальных данных имеет вид параболы $\rho = \eta^2/2$.

Это уравнение имеет ту же структуру, что и уравнение (3). Переменная $\eta > 0$ монотонна. Если $\rho_0 > 18$, то плотность сначала падает, достигая минимума при $\rho = 3\eta$, а затем растет до бесконечности, в противном случае сразу растет. Решение приближается сверху к асимптоте $\rho = \eta - 1$ как $\rho = \eta - 1 + 2/(3\eta) + O(1/\eta^2)$.

На рис. 2 указано поведение плотности ρ как функции переменной $\eta = \sqrt{\epsilon}$, где ϵ плотность общей энергии. Точка (6,18) есть пересечение линии минимума плотности с параболой начальных данных.

Предположим, что устанавливается тепловое равновесие между излучением и ненулевой внутренней энергией. Оценим учет внутренней энергии $U = c_v T \sim p^{1/4}$ вблизи асимптоты. Тогда $\rho \sim \eta = \sqrt{2\rho + 3p}$ или $\rho \sim \sqrt{p}$, что дает $\rho U \sim p^{3/4} \ll p$. Это оправдывает применение модели холодной плазмы.

5. ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ

В рамках ньютоновской механики рассмотрим задачу об аннигиляции конечного однородного амбиполярного шара с начальной плотностью $2\rho_0$, постепенно заполняющегося излучением. Уравнения радиального движения с разделением переменных $r = a(t)\xi$, $p = p_1(t)(R^2 - r^2)$ в силу уравнения притока тепла (2), записанного в дивергентной форме,

$$(3p)_t + \nabla_i (3pv^i) + p\nabla_i v^i = 0$$

даёт коэффициент давления $p_1 = C_1/a^6$, C_1 – постоянная, $R = a(t)\xi_0$ – внешний радиус, для одной из компонент смеси приводятся к виду

$$a^2\ddot{a} - \frac{2C}{\rho a^3} + \rho a^3 = 0, \quad \dot{\rho} + \frac{3\rho\dot{a}}{a} + \rho^2 = 0 \tag{5.1}$$

Начальные условия: $a(0) = 1$, $\dot{a}(0) = 0$. Кроме того, выбором размера длины можно считать $\xi_0 = 1$. В принципе, начальные условия должны были быть поставлены при $a_0(-\infty) = \infty$, но это затруднило бы

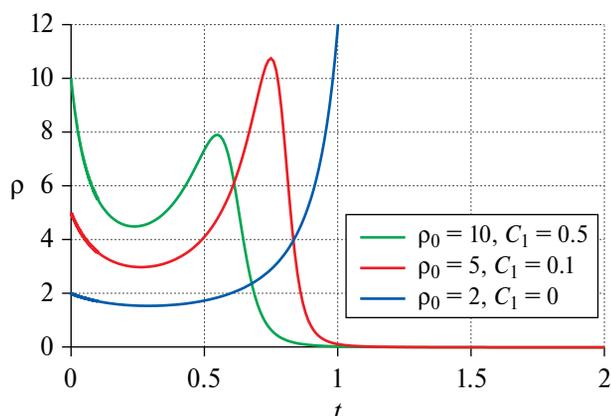


Рис. 3 Поведение плотности ρ как функции времени t при различных начальных условиях в рамках ньютоновской механики при наличии градиента давления.

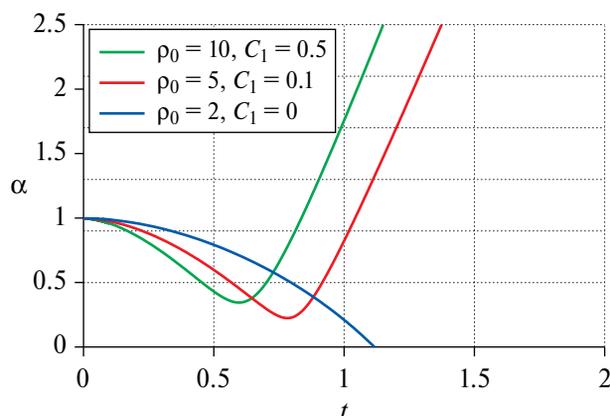


Рис. 4 Поведение масштабного фактора, соответствующего рис. 3.

проведение вычислений. Поэтому будем считать малой величиной некоторое “затравочное” давление $2C_1/\rho_0^2 \ll 1$. Результаты расчётов представлены на рис. 3, 4. Графики показывают, что при отсутствии излучения (синяя кривая) плотность понижается, а затем неограниченно растёт. Присутствие давления излучения (кривые красная и зелёная) в случае конечного тела приводит к изменению этой картины. Плотность массы при относительно малых временах, прошедших с начала движения, падает, достигая минимума, потом по мере нарастания давления излучения достигает максимума и, наконец, стремится к нулю. Суммарная масса шара всё время стремится к нулю. Масштабный фактор, характеризующий размер системы, имеет минимум, а затем уходит на бесконечность. Таким образом, аннигилирующее облако конечного размера будет неограниченно расширяться, заполняя Вселенную.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате решения задач гравитационного коллапса для моделей неограниченной симметричной плазмы, состоящей из частиц и античастиц, заполненной излучением, показано, что вблизи начального положения равновесия такая система, как правило, сжимается под действием силы тяжести с уменьшением плотности, а затем происходит инерционная сферическая фокусировка с неограниченным увеличением плотности. Решается задача об однородном сжатии такой системы как в рамках общей теории относительности, так и в ньютоновской механике. Рассматриваются модели горячей и холодной пыли. Учитывается градиент давления излучения, связанный с конечностью аннигилирующего шара. При этом эффект минимума плотности дополняется существованием её максимума, после чего она стремится к нулю. Масштабный фактор достигает минимума в точке максимума плотности, а затем неограниченно растёт. Облако расширяется с полным переходом массы в излучение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Седов Л.И. Об одном возможном механизме порождения безмассовых частиц. ДАН СССР. Т. 285, № 2. С. 350–353.
3. Shapiro P.L. Relativistic blast waves in two dimensions. J. Astrophys. 1979. V. 233. № 3, part. 1. P. 831–850.
4. Голубятников А.Н. О механизме отделения энергии-импульса от массы покоя. Сб. “Механика. Современные проблемы”. Изд. МГУ, 1987. 176 с. С. 152–157.
5. Голубятников А.Н., Плотников С.И. Об отделении энергии от массы в неоднородных дискретных механических системах // ДАН СССР. Т. 1989. № 3. С. 559–562.
6. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.

7. Голубятников А.Н. Об ускорении ударных волн и концентрации энергии // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 262–269.
8. Голубятников А.Н., Украинский Д.В. Одно точное решение об обжатии полости в вязкой теплопроводной сжимаемой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 4. С. 77–85.
9. Голубятников А.Н., Украинский Д.В. К проблеме концентрации энергии // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2023. Т. 322. С. 83–93.
10. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967. 656 с.
11. H. Alfven, O. Klain. Matter – antimatter annihilation and cosmology // Arkiv f. Fysik. V. 23. № 19, P. 187–197, 1962.
12. V. Bonnevier. On the early development of the Metagalactic system // Arkiv f. Fysik, V. 27. № 21, P. 305–310, 1964.
13. Х.Альвен. Антивещество и эволюция Метагалактики // Астрономический журнал. 1965. Т. 42, № 5. С. 873–892.
14. Golubiatnikov A.N., Lyuboshits D.B. On strong shock waves of annihilation // Gravitation and Cosmology. 2016. V. 22. P. 258–263.
15. Golubiatnikov A.N., Lyuboshits D.B. A cosmological solution with acceleration caused by an annihilation shock wave // Gravitation and Cosmology. 2019. V. 25. № 2. P. 131–137.

Modelling of the Process of Volume Annihilation in the Gravitational Self-Field

A. N. Glubyatnikov, S. A. Zakharov

Moscow State University, Moscow, Russia

e-mail: golubiat@mail.ru

e-mail: zakchar5000@gmail.com

The process of volume annihilation of particles and antiparticles in the gravitational self-field is considered. The problem of homogeneous compression of such a system is solved both within the framework of the general relativity theory and in Newtonian mechanics. Two models of collapsing matter are considered, namely, hot and cold dust filled with radiation. The radiation pressure gradient is taken into account.

Keywords: annihilation, particles and antiparticles, radiation, gravitational field.

УДК 533

АКУСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В КОЛЬЦЕВОЙ ПОЛОСТИ С ОСЕВЫМ ТРАНЗИТНЫМ ПОТОКОМ

© 2024 г. Е. В. Колесник^{а, *}, Д. К. Зайцев^а, Е. М. Смирнов^а, Е. И. Шмелев^б, М. Г. Маслов^а, А. В. Будников^б

^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

^бОпытно-конструкторское Бюро Машиностроения им. И. И. Африкантова, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: kolesnik.ev1@spbstu.ru

Поступила в редакцию 13.03.2024 г.

После доработки 20.04.2024 г.

Принята к публикации 20.04.2024 г.

Представлены результаты согласованного расчетно-экспериментального исследования акустических автоколебаний в кольцевой полости, опоясывающей круглую трубу с локальным сужением. В эксперименте измерялись пульсации давления на внешней стенке кольцевой полости для различных значений объемного расхода; воздух поступал в трубу при атмосферном давлении. Обнаружено, что в некотором диапазоне расходов реализуется режим течения с возбуждением акустических автоколебаний в полости. Частота колебаний соответствует первой собственной частоте, а среднеквадратические значения пульсаций давления достигают уровня 2300 Па. Численное моделирование на основе RANS-подхода, проведенное для геометрии и условий эксперимента, воспроизводит наблюдаемый эффект акустического возбуждения полости и дает близкие значения амплитуды пульсаций. На основе полученных расчетных данных проанализированы формы колебаний, возникающие при различных значениях объемного расхода.

Ключевые слова: акустический резонанс, кольцевая полость, измерение пульсаций давления, RANS-моделирование.

DOI: 10.31857/S1024708424040123, **EDN:** OXYPZO

Интенсивные акустические колебания, возникающие при движении газового потока вдоль открытой границы полости, привлекают внимание исследователей с середины прошлого века (см., например, обзоры [1–5]). Первопричиной таких автоколебаний обычно является неустойчивость сдвигового слоя на границе между транзитным потоком и полостью [6], однако механизм, который обеспечивает поддержание колебаний и контролирует их частоту, может быть разным. В частности, согласно классификации [1], автоколебания в полости с жесткими стенками можно разделить на гидродинамические (*fluid-dynamic* по терминологии [1]) и резонансные (*fluid-resonant*). В первом случае необходимая для поддержания автоколебаний положительная обратная связь и соответствующая временная задержка обусловлены преимущественно гидродинамическими эффектами, тогда как во втором случае существенное влияние на процесс оказывают резонансные свойства самой полости.

Автоколебания гидродинамической природы типичны, например, для неглубокой прямоугольной полости с открытым типом течения ($1 \leq L/H \leq 10$, где H – глубина полости, L – ее продольный размер) [7–11]. Одной из самых цитируемых применительно к данной геометрии является работа Росситера [7], в которой на основании проведенных измерений и сопутствующего теоретического анализа предложена формула для частоты автоколебаний f_m

$$f_m = \frac{U}{L} \cdot \frac{m - \gamma}{K^{-1} + M} \quad (1)$$

где U – скорость транзитного потока, $m = 1, 2, 3, \dots$ – номер моды колебаний, M – число Маха, $K = 0.57$ и $\gamma = 0.25$ – эмпирические коэффициенты. В опытах [7] число Маха варьировалось в диапазоне $0.4 \leq M \leq 1.2$. Для значений $0.8 \leq M \leq 3$ в [12] предложен уточненный вариант формулы (1), в котором

учитывается отличие скорости звука в полости от скорости звука во внешнем потоке. При $M \leq 0.3$ формула (1) занижает частоту автоколебаний [8] и может потребовать корректировки констант (например, в [13] для $M \leq 0.1$ получены значения $K = 0.5$ и $\gamma = 0$).

Примером автоколебаний резонансного типа может служить акустический резонанс в глубокой полости ($L \ll H$) или в глухом боковом отводе трубопровода [14–16], которому отвечает формирование стоячих звуковых волн с пучностью на закрытом конце полости и узлом вблизи ее устья. Набор собственных частот такого резонатора определяется из условия, что на отрезке $2H$ укладывается полуцелое число длин волн: $f_n = 0.5(n - 0.5) c/H$ (где $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер моды колебаний, c – скорость звука). Поскольку для первой собственной частоты длина резонатора H равна четверти длины волны, такой резонатор часто называют четвертьволновым. Когда частота пульсаций давления f_m (1), вызванных неустойчивостью сдвигового слоя, приближается к одной из собственных частот резонатора f_n , происходит резонансное увеличение амплитуды пульсаций давления, которые воздействуют на сдвиговый слой и приводят к синхронизации его колебаний с собственной частотой резонатора f_n . Благодаря эффекту синхронизации, резонансные автоколебания наблюдаются в некотором диапазоне скоростей транзитного потока, причем одновременно могут возбуждаться несколько мод собственных колебаний.

Резонансные автоколебания могут возбуждаться и в резонаторе Гельмгольца, который представляет собой относительно большую полость с узким горлом (или просто отверстием) [4, 17–19]. В отличие от акустического резонанса, резонанс Гельмгольца имеет лишь одну характерную частоту f_H , причем длина волны соответствующих звуковых колебаний гораздо больше размеров резонатора:

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{s}{V_0(l + \Delta l)}} \quad (2)$$

где V_0 – объем полости, s – площадь горла, l – его длина, $\Delta l \approx d$ – присоединенная длина, d – диаметр отверстия [20]. Хотя в выражении (2) фигурирует скорость звука c , резонанс Гельмгольца обусловлен не движением звуковых волн, а инерцией находящегося в горле резонатора газа, который колеблется подобно грузу на пружине; роль последней играет газ в объеме V_0 .

В зависимости от конфигурации полости и параметров потока возможна смена доминирующего механизма возбуждения автоколебаний и/или одновременное действие нескольких механизмов. Например, в [18] для весьма широкого резонатора Гельмгольца со щелевидным горлом (размеры полости $L \times H \times W = 32 \times 50 \times 500$ мм) помимо обычного резонанса Гельмгольца на частоте f_H (2) наблюдались дополнительные более высокочастотные моды с модуляцией амплитуды пульсаций давления по размаху полости, что свидетельствует о наличии стоячих волн, типичных для акустического резонанса. Частоты этих дополнительных мод не соответствовали собственным частотам простого полуволнового резонатора $f_n = 0.5nc/W$, а определялись сложением частот двух резонансов подобно сложению взаимно перпендикулярных акустических мод прямоугольной полости: $f_n^* \approx \sqrt{f_H^2 + f_n^2}$. В опытах [21] исследован цилиндрический ре-

зонатор Гельмгольца с квадратным входным отверстием на торце; авторам удалось зафиксировать одновременно наличие резонанса Гельмгольца и семи мод акустических автоколебаний (три продольных, азимутальная и их комбинации) в диапазоне частот от 68 до 1354 Гц, а также синхронизацию одновременно трех мод неустойчивости сдвигового слоя (1).

Работы по численному моделированию обсуждаемых автоколебаний относятся, главным образом, к исследованию высокоскоростного ($M > 0.8$) обтекания неглубокой прямоугольной полости (см., например, обзор [22]). Для такого течения характерно сложное взаимодействие эффектов сжимаемости и турбулентности [23, 24], поэтому в настоящее время расчеты данной направленности обычно проводятся с использованием вихреразрешающих подходов [25–27], хотя во многих случаях крупномасштабные вихревые структуры и частоты соответствующих автоколебаний успешно воспроизводятся и в RANS-расчетах (см. [22]). Расчеты резонансных автоколебаний в глубокой полости [28, 29] и в резонаторе Гельмгольца [30] относительно немногочисленны, возможно, из-за сложности одновременного разрешения мелкомасштабных процессов в горле резонатора и гораздо более длинноволновых акустических возмущений в объеме резонирующей полости.

В настоящей работе представляются результаты согласованного расчетного и экспериментального исследования акустических автоколебаний в кольцевой полости, опоясывающей круглую трубу

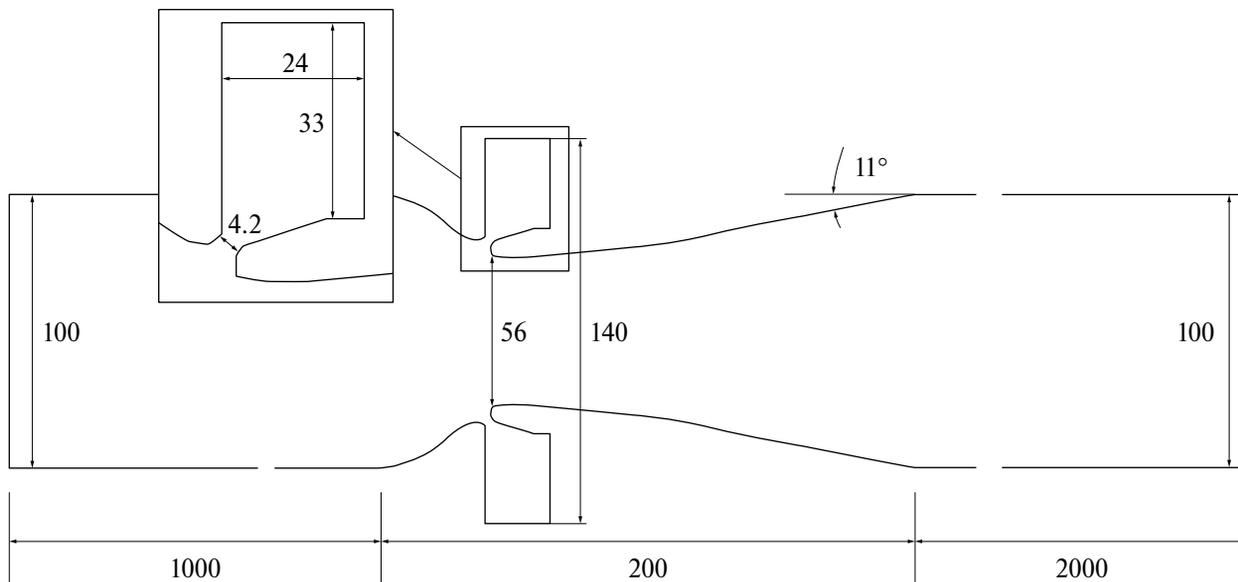


Рис. 1. Схема канала с кольцевой полостью.

с локальным сужением. Течение воздуха в трубе существенно дозвуковое. Полость соединяется с трубой узкой кольцевой щелью, что позволяет отнести ее к резонаторам Гельмгольца, однако мгновенные поля давления и спектры пульсаций позволяют утверждать, что наблюдаемые автоколебания соответствуют акустическому резонансу, а не резонансу Гельмгольца.

ПОСТАНОВКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В экспериментах исследовалось течение в канале, состоящем из входного прямого участка круглой трубы, конфузорного участка, глухой кольцевой полости, соединяющейся с трубой через узкую кольцевую щель, диффузорного участка трубы и выходного участка постоянного диаметра. Схема канала, а также основные размеры конструкции (в миллиметрах) указаны на рис. 1. Опорная конструкция циркуляционной трассы жестко установлена на фундамент стенда.

Выходной участок канала соединялся с камерой большого размера, где вентилятором, работающим в режиме на всасывание, создавалось разрежение. Воздух с параметрами $P = 1$ атм, $T = 23^\circ\text{C}$ засасывался из помещения лаборатории и, проходя через входной коллектор, исследуемый канал, камеру и вентилятор, выходил в атмосферу.

Экспериментальный стенд позволял организовать течение в канале с объемным расходом в диапазоне от $60\text{ м}^3/\text{ч}$ до $1200\text{ м}^3/\text{ч}$. Определение расхода осуществлялось с применением микроманометра по значению перепада давления на входном коллекторе. Для исследования акустических явлений на внешней стенке кольцевой полости располагался измерительный датчик пульсаций давления с чувствительностью $0.1\text{ пКл}/\text{Па}$.

В ходе экспериментов было обнаружено, что в диапазоне расходов от 170 до $770\text{ м}^3/\text{ч}$ реализуется режим течения с возбуждением акустических автоколебаний в полости. Частота колебаний составляет $\sim 1300\text{ Гц}$, что соответствует первой собственной частоте, вычисленной независимо в рамках линейного акустического анализа полости. В качестве примера на рис. 2 приведен типовой экспериментально полученный спектр плотности мощности (СПМ) пульсаций давления для расхода $Q = 520\text{ м}^3/\text{ч}$. Помимо основной частоты, в спектре пульсаций давления присутствуют ее гармоники, а также вторая ($\sim 2200\text{ Гц}$) и третья ($\sim 3100\text{ Гц}$) собственные частоты. В процессе анализа результатов измерений по данным, полученным от датчика давления, определялись среднеквадратические значения пульсаций давления (интеграл от 1200 Гц до 1400 Гц), которые достигали уровня 2300 Па . Опытные данные по зависимости интенсивности пульсаций от объемного расхода приводятся и обсуждаются ниже при сопоставлении с результатами численного моделирования.

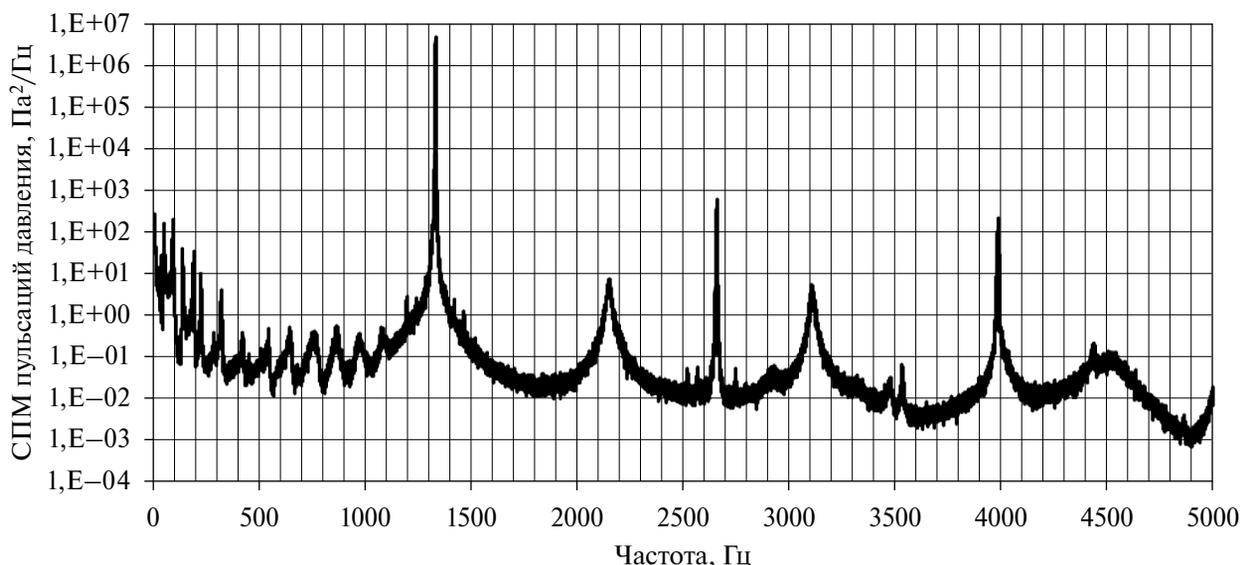


Рис. 2. Спектральная плотность мощности пульсаций давления для расхода $Q = 520 \text{ м}^3/\text{ч}$.

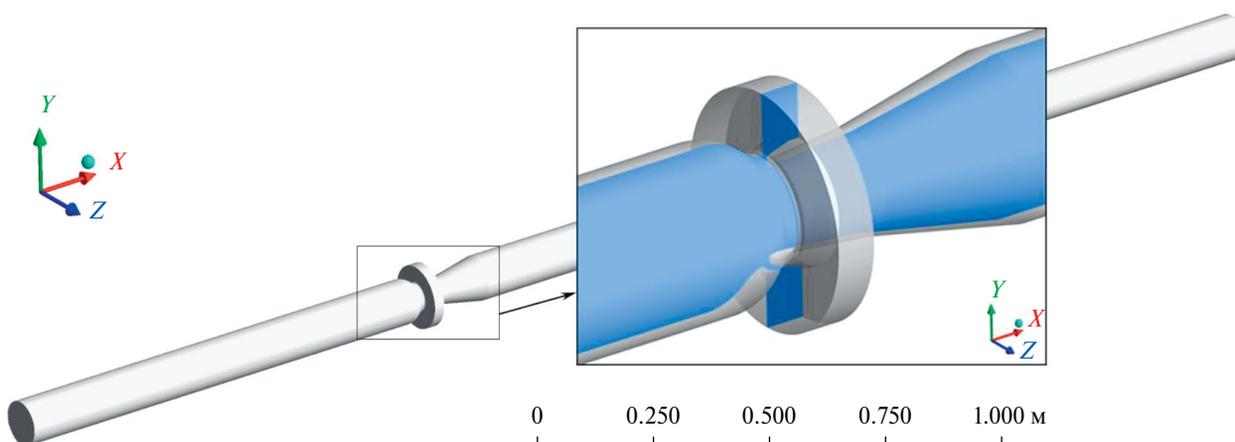


Рис. 3. Трехмерный вид модели экспериментального канала.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

Для численного моделирования была построена 3D-модель рабочей секции экспериментального стенда, включающая входной участок трубы длиной 1 м, конфузорный участок, кольцевую полость и выходной участок трубы длиной 2 м, входной и выходной участки трубы имеют постоянный внутренний диаметр 0.1 м. Геометрия конфузорного участка, кольцевой полости и диффузорного участка соответствует геометрии исследованной в эксперименте конфигурации. На рис. 3 показана модель с увеличенным изображением участка вблизи кольцевой полости.

Расчеты проводились с использованием гидродинамического пакета ANSYS Fluent 19.2. Решались осредненные по Рейнольдсу нестационарные трехмерные уравнения Навье–Стокса (URANS) для сжимаемого газа, полагаемого совершенным. Замыкание осредненных уравнений Навье–Стокса осуществлялось с применением $k-\omega$ SST модели турбулентности Ментера [31].

В качестве рабочей среды рассматривался воздух с постоянными свойствами: теплоемкость $C_p = 1006.43 \text{ Дж}/(\text{кг К})$, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0.0242 \text{ Вт}/(\text{м К})$, коэффициент динамической вязкости $\mu = 1.7894 \times 10^{-5} \text{ кг}/(\text{м с})$.

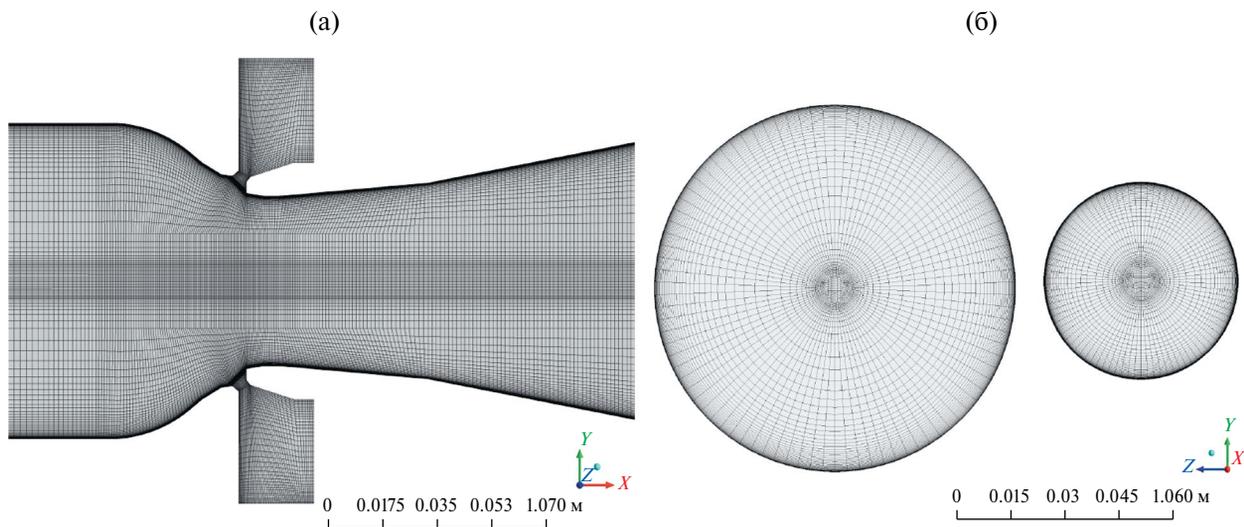


Рис. 4. Вид расчетной сетки в меридиональном сечении (а) и в двух поперечных сечениях (б).

Для расчетов использовался Pressure-based Solver, решение уравнений осуществлялось по методу SIMPLEC. Для аппроксимации конвективных слагаемых применялась схема второго порядка для уравнений баланса массы, импульса и энергии, и противопоточная схема первого порядка в уравнении для переноса характеристик турбулентности. Для продвижения по времени использовалась неявная схема второго порядка точности. Расчеты проводились с шагом по времени $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$ с, что обеспечивало число Куранта в основной части потока около 1.

На входе в расчетную область задавался однородный поток с массовым расходом Q и постоянная температура $T = 23$ °С, на выходе – нулевое значение относительного давления (уровень отсчитывается от атмосферного давления). В процессе расчетов на входной и выходной границах применялись реализованные в ANSYS/Fluent неотражающие условия, позволяющие улучшить устойчивость вычислений и сходимость итераций на текущем временном шаге, выполнение наложенных условий с заданными параметрами на проницаемых границах обеспечивалось при достижении установившегося режима. Для характеристик турбулентности на входе задавались интенсивность турбулентности $I = 5\%$ и отношение турбулентной вязкости к молекулярной $TVR = 10$. На стенках, которые полагались адиабатическими, ставилось условия прилипания.

Расчеты были проведены для значений расхода от 120 м³/ч до 1020 м³/ч с шагом 100 м³/ч. В качестве начального поля для первого из расчетных режимов (520 м³/ч) задавался покоящийся газ с параметрами $P = 1$ атм., $T = 23$ °С, для остальных расчетов в качестве начальных полей использовались решения, полученные при другом, ближайшем, значении расхода.

Для основных расчетов использовалась (базовая) сетка, состоящая из 2.8 млн ячеек, общий вид расчетной сетки в продольном сечении и в двух поперечных сечениях (во входном сечении и в самом узком участке трубы) приведены на рис. 4. В меридиональном сечении сетка содержала 120 ячеек поперек трубы, сеточные линии были сгущены к стенкам трубы, размер первой пристенной ячейки составлял 0.05 мм на участке трубы постоянного сечения и 0.01 мм на узком участке трубы (что при максимальном расходе обеспечивало в окрестности входа в кольцевую полость значения нормированной координаты ближайшей к стенке расчетной точки, y^+ , не более 3). Продольный размер ячеек вдоль трубы варьировался от 0.5 мм в конфузормом участке трубы до 35 мм вблизи входного и выходного сечения. В центре полости размер ячеек составлял примерно 1 мм, сеточные линии сгущались к стенкам полости, во входной щели размер ячеек составлял 0.3 мм.

Для оценки влияния сеточного разрешения расчеты были проведены также на измельченной сетке, сгенерированной на основе базовой путем увеличения количества точек примерно в 2 раза в поперечном и продольном направлениях, и в 2.5 раза в окружном направлении (в итоге сетка включала 26.3 млн ячеек).

Для проведения расчетов использовались вычислительные ресурсы суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (www.scc.spbstu.ru). В тех

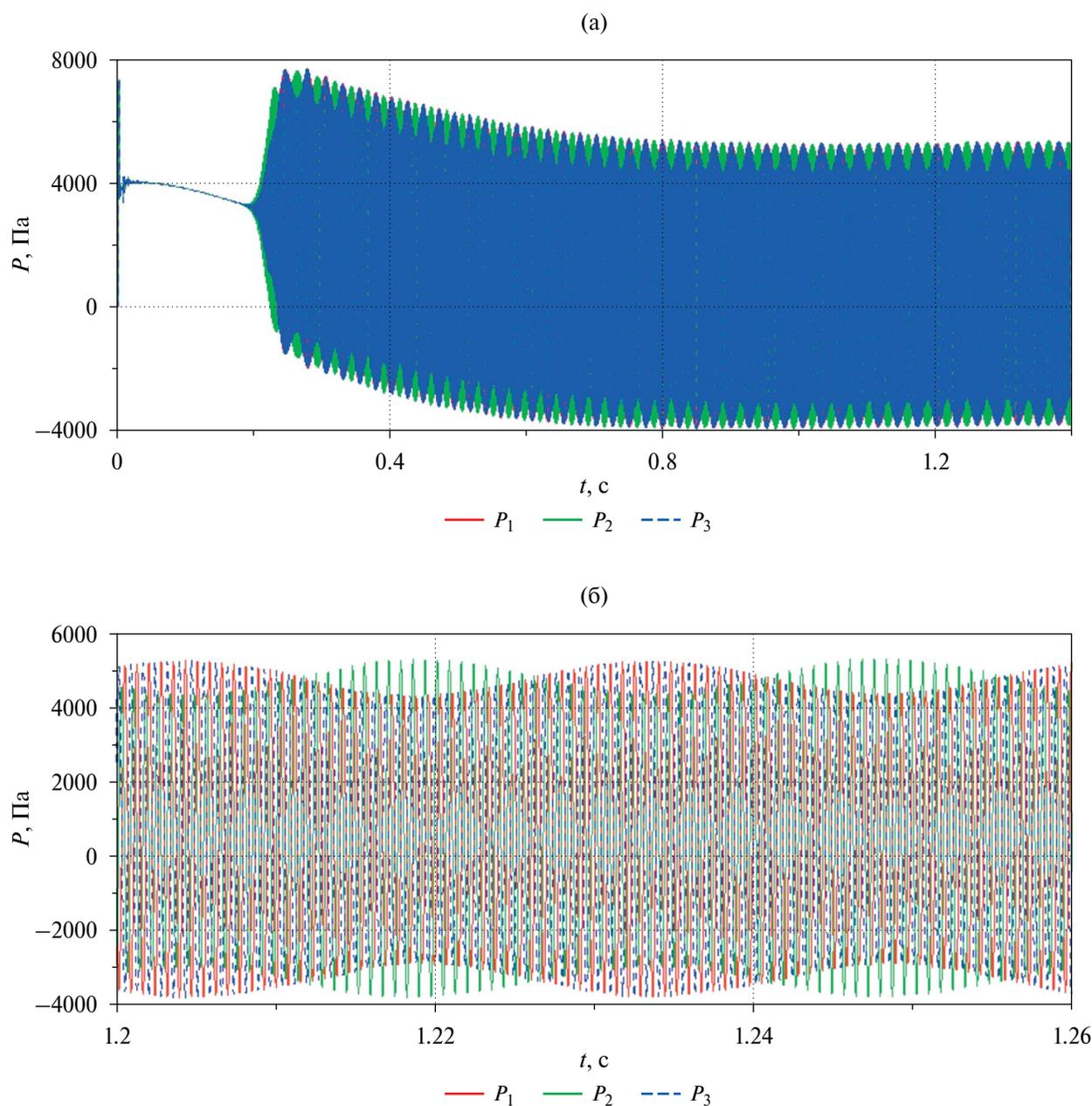


Рис. 5. Зависимости давления в точках мониторинга P_1 - P_3 от времени.

случаях, когда задача распараллеливалась на 140 ядер, время расчета одной секунды физического времени с использованием базовой сетки составляло 180 часов. Время расчета одной секунды на измельченной сетке, при распараллеливании задачи на 280 ядер, составляло 750 часов.

СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ

Обратимся к результатам, полученным в расчетах для расхода $Q = 520 \text{ м}^3/\text{ч}$, при котором, согласно экспериментальным данным, реализуется режим течения с возбуждением акустических автоколебаний в полости.

На рис. 5а приведены зависимости давления от времени в трех точках мониторинга, расположенных на внешней стенке полости с шагом 90° в окружном направлении (точки P_1 , P_2 , P_3). Видно, что, начиная

с момента $t = 0.2$ с, возникают колебания давления с амплитудой около 5000 Па и частотой $f = 1313$ Гц. На рис. 5б показаны зависимости давления в точках мониторинга на стенке полости для участка установившихся колебаний. Кроме высокочастотных колебаний видно наличие модулирующей низкой частоты (с периодом ~ 0.03 с).

На рис. 6 приведены мгновенные поля течения в меридиональном сечении для установившегося режима: модуль скорости (рис. 6а), поперечная составляющая скорости V_z (рис. 6б) и отношение турбулентной вязкости к молекулярной (рис. 6в). В сужающемся участке трубы наблюдается локальное ускорение потока, при этом значения поперечной составляющей скорости на входе в полость достигают 25 м/с. В актуальном распределении радиальной скорости по окружности чередуются области с преимущественным втеканием и преимущественным вытеканием газа из полости (рис. 6б), в соответствии с формой и фазой пульсирующего поля давления. На входном участке и в сужающейся части трубы поток можно считать квази-ламинарным, в диффузорной части наблюдается отрыв пограничного слоя от стенок трубы и турбулизация формирующейся струи.

ВЛИЯНИЕ РАСХОДА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Серия параметрических расчетов была выполнена при варьировании расхода в диапазоне от 120 м³/ч до 1020 м³/ч. При превышении величины расхода значения 320 м³/ч в расчетах реализовывался режим течения с возбуждением акустических автоколебаний в полости. На рис. 7 показаны фрагменты осциллограмм давления в точках мониторинга для рассчитанных режимов и соответствующие спектры колебаний. Длина выборки для построения спектров составляла 1 с физического времени.

Автоколебания, полученные для режимов с величиной расхода вплоть до 600 м³/ч, характеризуются наличием в спектре только первой собственной частоты $f_1 = 1313$ Гц (и ее гармоник, рис. 7а). Начиная с расхода 720 м³/ч (рис. 7б), характер пульсаций значительно усложняется, а в спектре появляется вторая собственная частота $f_2 = 2200$ Гц. При дальнейшем увеличении расхода вторая частота становится сопоставимой по величине пульсаций с первой собственной частотой, а на режиме 1020 м³/ч остается только вторая собственная частота (рис. 7в).

На рис. 8 приведены мгновенные распределения давления в различные фазы периода для расходов 520 м³/ч и 1020 м³/ч. Представленные поля иллюстрируют, что в случае расхода 520 м³/ч (рис. 8а) в полости возбуждены колебания первой азимутальной моды, которые можно трактовать как суперпозицию двух ортогональных стоячих волн с одинаковой частотой и сдвигом фаз 90°, что приводит к вращению точки максимума давления по окружности. Амплитуды двух волн близки, при этом происходит медленный переход энергии из одной волны в другую и обратно, что приводит к низкочастотному биению амплитуды пульсаций (см. рис. 5б).

Для режима 1020 м³/ч (рис. 8б) наблюдаются колебания второй азимутальной моды. Как и в случае колебаний на первой собственной частоте, имеет место вращение точки максимума давления. При этом уровень пульсаций значительно больше, чем в случае колебаний на первой собственной частоте.

СОПОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Для оценки интенсивности колебаний рассчитывалось среднеквадратическое значение пульсаций давления на заданной частоте (3), где A_f – спектральная плотность, $\Delta f = 100$ Гц – полуширина полосы интегрирования. В численном расчете эта величина определялась по формуле (4), где N – число точек спектра в полосе интегрирования $2\Delta f$, A_i – энергия, приходящаяся на частоту f_i в спектре.

$$F = \sqrt{\int_{f_1 - \Delta f}^{f_1 + \Delta f} A_f df} \quad (3)$$

$$F = \sqrt{\frac{2\Delta f}{N} \sum_i A_i}, \quad f - \Delta f < f_i < f + \Delta f \quad (4)$$

На рис. 9а приведена полученная по расчетным данным зависимость среднеквадратического значения пульсаций давления на первой собственной частоте $f_1 = 1300$ Гц (F_1) от расхода в сопоставлении с экспериментальными данными. На рис. 9б приведена зависимость среднеквадратического значения

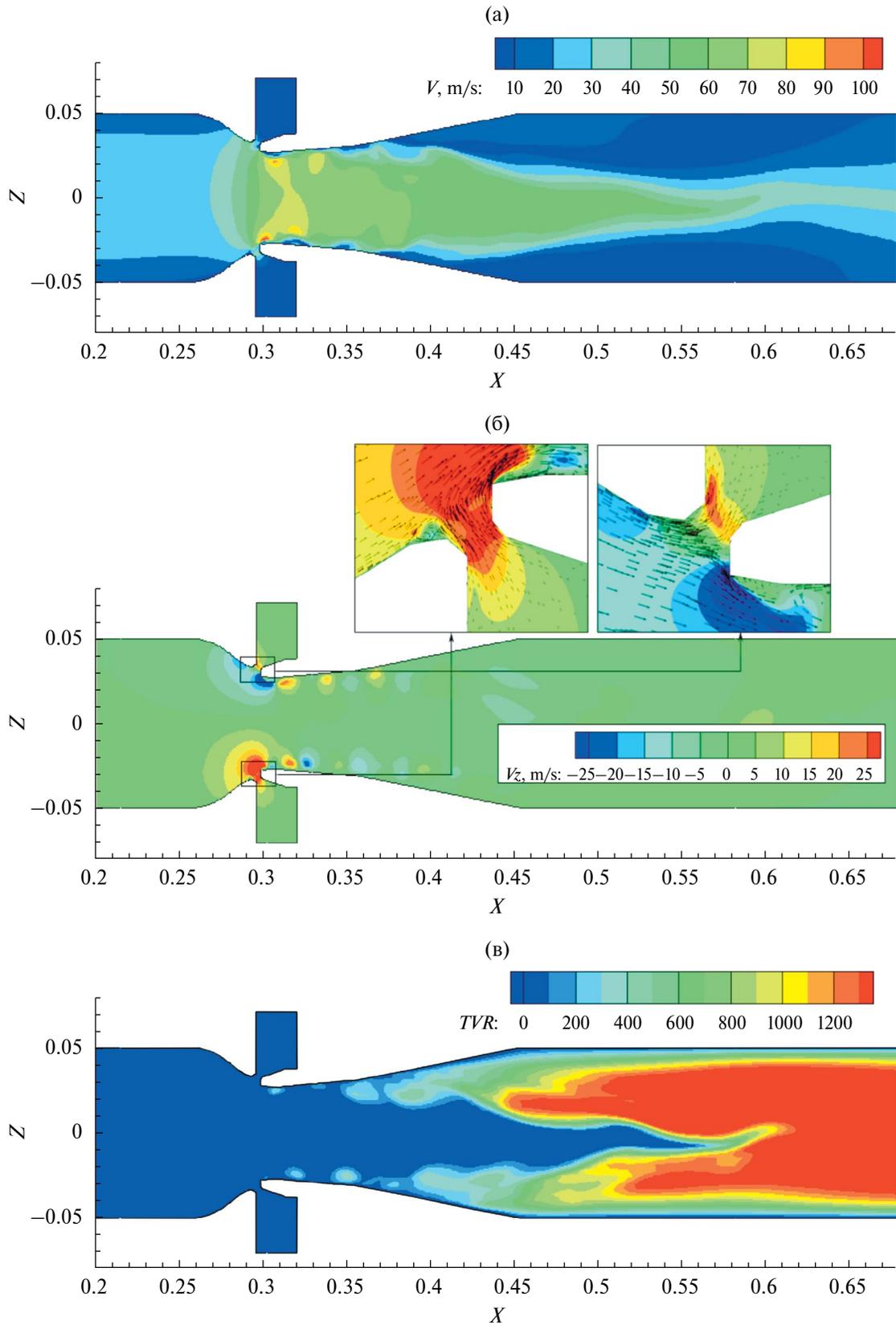


Рис. 6. Мгновенные поля течения в продольном сечении: а) поле модуля скорости; б) поле поперечной составляющей скорости; в) отношение турбулентной вязкости к молекулярной.

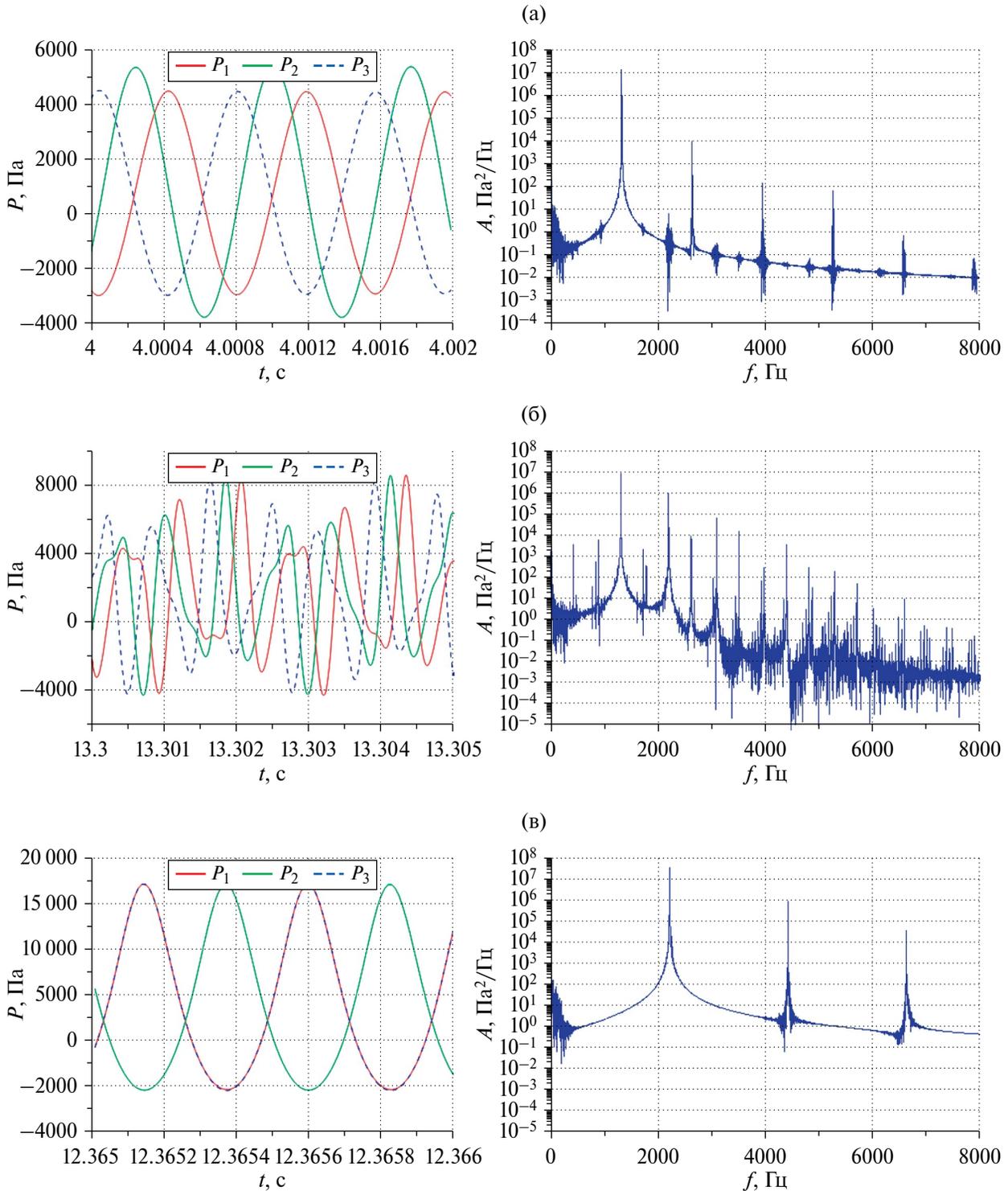


Рис. 7. Зависимости давления в точках мониторинга P_1 – P_3 от времени для различных расходов и соответствующие спектральные плотности мощности пульсаций давления в точке P_1 : а) $Q = 520$ м³/ч; б) $Q = 720$ м³/ч; в) $Q = 1020$ м³/ч.

пульсаций давления на частоте $f_2 = 2200$ Гц (F_2) от расхода. Начиная с расхода 720 м³/ч, наблюдаются пульсации давления на второй собственной частоте, интенсивность которых значительно растет с увеличением расхода. Видно, что в целом расчет воспроизводит наблюдаемый в эксперименте эффект

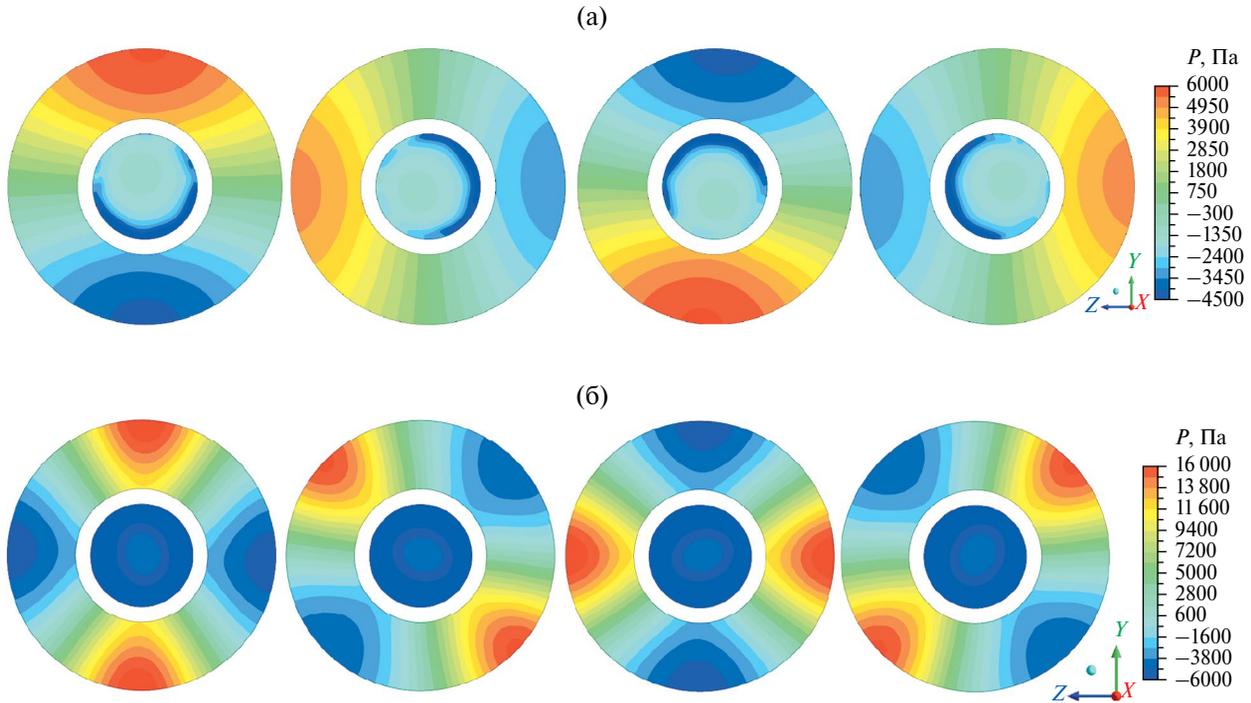


Рис. 8. Поле давления в различные фазы колебаний: а) $Q = 520 \text{ м}^3/\text{ч}$; б) $Q = 1020 \text{ м}^3/\text{ч}$.

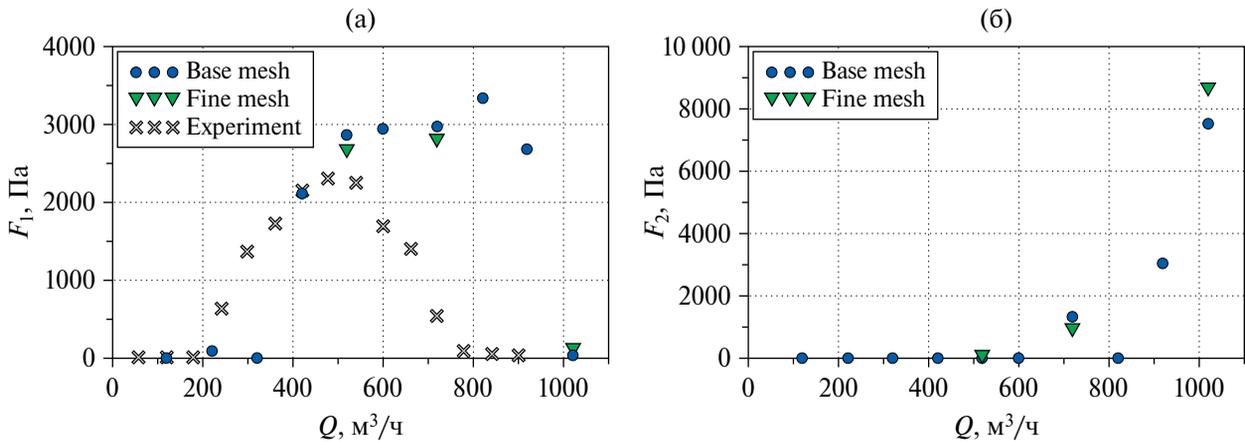


Рис. 9. Зависимость среднеквадратического значения пульсаций давления от расхода на частоте $f_1 = 1300 \text{ Гц}$ (а) и на частоте $f_2 = 2200 \text{ Гц}$ (б).

акустического возбуждения полости и дает близкие значения амплитуды пульсаций. Однако предсказываемый диапазон расходов, в котором возникает автоколебаний, сдвинут в сторону более высоких расходов.

Для оценки сеточной чувствительности результатов численного моделирования были проведены расчеты на измельченной сетке для трех режимов: в первом из них развиваются пульсации только на первой собственной частоте ($Q = 520 \text{ м}^3/\text{ч}$), во втором присутствуют обе моды колебаний ($Q = 720 \text{ м}^3/\text{ч}$), а в третьем – пульсации только на второй собственной частоте ($Q = 1020 \text{ м}^3/\text{ч}$). Сопоставление результатов, полученных на двух сетках (рис. 9), показывает, что для всех трех режимов отличия в рассчитанных значениях интенсивности пульсаций на первой собственной частоте не превышают 7%, а на второй собственной

частоте – не более 12%. Приведенные данные позволяют заключить, что основные причины отмеченного выше расхождения между расчетными и опытными результатами по определению границ диапазона расходов с развившимися автоколебаниями не связаны с недостаточностью сеточного разрешения, а обусловлены другими факторами, определение которых требует дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено согласованное расчетно-экспериментальное исследование явления акустического резонанса в кольцевой полости с транзитным осевым потоком. В эксперименте измерены пульсации давления на стенке кольцевой полости для диапазона расходов от 50 м³/ч до 900 м³/ч. Обнаружено, что в диапазоне расходов от 170 до 770 м³/ч реализуется режим течения с возбуждением акустических автоколебаний в полости. Частота колебаний составляет ~1300 Гц, что соответствует первой собственной частоте акустических колебаний.

С применением программного пакета ANSYS Fluent проведены RANS-расчеты для геометрии и условий, соответствующих эксперименту. Установлено, что выполненные расчеты устойчиво воспроизводят наблюдаемый в эксперименте эффект акустического возбуждения полости и дают согласующиеся с экспериментом значения амплитуды пульсаций. Однако предсказываемый диапазон расходов, в котором возникает режим автоколебаний, сдвинут в сторону более высоких расходов по сравнению с результатами измерений, что требует дальнейших исследований.

Параметрические расчеты при варьировании расхода показали, что автоколебания, предсказываемые для режимов с расходом до 600 м³/ч, характеризуются наличием в спектре только первой собственной частоты $f_1 = 1300$ Гц. Начиная с расхода 720 м³/ч, в спектре появляется вторая собственная частота $f_2 = 2200$ Гц, и на режиме 920 м³/ч она становится сопоставимой по величине пульсаций с первой собственной частотой. На режиме 1020 м³/ч остается только вторая собственная частота.

Показано, что формы колебаний давления на первой и второй собственной частоте соответствуют колебаниям первой и второй азимутальной моды с вращением точки максимума давления по окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rockwell D., Naudascher E.* Review – self-sustained oscillations of flow past cavities // *J. Fluids Eng.* 1978. V. 100. № 2. P. 152–165. DOI: 10.1115/1.3448624.
2. *Howe M.S.* Edge, cavity and aperture tones at very low Mach numbers // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 330. P. 61–84. DOI: 10.1017/S0022112096003606.
3. *Rowley C.R., Williams D.R.* Dynamics and control of high-Reynolds number flow over open cavities // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 251–276. DOI: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092057.
4. *Ma R., Slaboch P.E., Morris S.C.* Fluid mechanics of the flow-excited Helmholtz resonator // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 623. P. 1–26. DOI: 10.1017/S0022112008003911.
5. *Ziada S., Lafon P.* Flow-excited acoustic resonance excitation mechanism, design guidelines, and counter measures // *Applied Mechanics Reviews.* 2014. V. 66. № 1. ID010802. 22 p. DOI: 10.1115/1.4025788.
6. *Morris S.C.* Shear-layer instabilities: particle image velocimetry measurements and implications for acoustics // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2011. V. 43. P. 529–550. DOI: 10.1146/annurev-fluid-122109–160742.
7. *Rossiter J.E.* Wind tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds // *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda.* 1964. № 3438. 32 p.
8. *Tam C.K.W., Block P.J.W.* On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities // *J. Fluid Mech.* 1978. V. 89. № 2. P. 373–399. DOI: 10.1017/S0022112078002657.
9. *Knisely C., Rockwell D.* Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 116. P. 157–186. DOI: 10.1017/S002211208200041X.
10. *Tracy M.B., Plentovich E.B.* Cavity unsteady-pressure measurements at subsonic and transonic speeds // *NASA Tech. Paper.* 1997. № 3669. 78p.
11. *de Henshaw M.J.C.* M219 cavity case: Verification and validation data for computational unsteady aerodynamics // *Tech. Rep. RTO-TR-26, AC/323 (AVT) TP/19.* Canada, St. Joseph Ottawa/Hull, 2000. P. 473–480.
12. *Heller H., Holmes D., Covert E.* Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities // *J. Sound Vibr.* 1971. V. 18. № 4. P. 545–553. DOI: 10.1016/0022-460X(71)90105-2

13. *Chatellier L., Laumonier J., Gervais Y.* Theoretical and experimental investigations of low Mach number turbulent cavity flows // *Exp. Fluids*. 2004. V. 36. P. 728–740. DOI: 10.1007/s00348-003-0752-4.
14. *Elder S.A.* Self-excited depth-mode resonance for a wall-mounted cavity in turbulent flow // *J. Acoust. Soc. Am.* 1978. V. 64. P. 877–890. DOI: 10.1121/1.382047.
15. *Ziada S., Shine S.* Strouhal numbers of flow-excited acoustic resonance of closed side branches // *J. Fluids and Structures*. 1999. V. 13. P. 127–142. DOI: 10.1006/JFLS.1998.0189.
16. *Yang Y., Rockwell D., Cody K.L.F., Pollack M.* Generation of tones due to flow past a deep cavity: Effect of streamwise length // *J. Fluids and Structures*. 2009. V. 25. P. 364–388. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2008.05.003.
17. *Morel T.* Experimental study of a jet-driven Helmholtz oscillator // *J. Fluids Eng.* 1979. V. 101. P. 383–390. DOI: 10.1115/1.3448983.
18. *de Jong A.T., Bijl H.* Investigation of higher spanwise Helmholtz resonance modes in slender covered cavities // *J. Acoust. Soc. Am.* 2010. V. 128. № 4. P. 1668–1678. DOI: 10.1121/1.3473698.
19. *Абдрашитов А.А., Марфин Е.А.* Влияние длины сопла на работу струйного осциллятора Гельмгольца // *Изв. РАН. МЖГ*. 2021. № 1. С. 142–150. DOI: 10.31857/S0568528121010011.
20. *Комкин А.И., Быков А.И.* Инерционная присоединенная длина горла резонаторов Гельмгольца // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 3. С. 277–287. DOI: 10.7868/S0320791916030096 = *Komkin A.I., Bykov A.I.* Inertial attached neck length of Helmholtz resonators // *Acoust. Phys.* 2016. V. 62. № 3. P. 269–279. DOI: 10.1134/S106377101603009X.
21. *Bennett G.J., Stephens D.B.* Resonant mode characterisation of a cylindrical Helmholtz cavity excited by a shear layer // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 1. P. 7–18. DOI: 10.1121/1.4973212.
22. *Lawson S.J., Barakos G.N.* Review of numerical simulations for high-speed, turbulent cavity flows // *Progress in Aerospace Sciences*. 2011. V. 47. P. 186–216. DOI: 10.1016/j.paerosci.2010.11.002.
23. *Heller H.H., Bliss D.* The physical mechanism of flow-induced pressure fluctuations in cavities and concepts for their suppression // *AIAA Paper*. 1975. № 75–491. 8 p. DOI: 10.2514/6.1975-491.
24. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Анализ автоколебательных процессов в каверне с открытым типом течения на основе данных вихреразрешающих расчетов // *Изв. РАН. МЖГ*. 2023. № 4. С. 156–166. DOI: 10.31857/S1024708422600774.
25. *Даньков Б.Н., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Численное моделирование возникновения автоколебательного процесса возле трехмерного обратного уступа при трансзвуковом режиме обтекания // *Изв. РАН. МЖГ*. 2016. № 4. С. 108–119. DOI: 10.7868/S0568528116040083.
26. *Дубень А.П., Жданова Н.С., Козубская Т.К.* Численное исследование влияния дефлектора на аэродинамические и акустические характеристики турбулентного течения в каверне // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 4. С. 113–124. DOI: 10.7868/S0568528117040107.
27. *Ванг Дж.М., Ванг Х., Ма Й., Минг К. Дж., У Дж.К.* Характеристики течения в сверхзвуковой открытой полости // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 5. С. 135–149. DOI: 10.1134/S0568528119050128.
28. *Jiang L., Zhang H., Duan Q., Zhang Y.* Numerical study on acoustic resonance excitation in closed side branch pipeline conveying natural gas // *Shock and Vibration*. 2020. ID8857838. 19 p. DOI: 10.1155/2020/8857838.
29. *Ho I Y.W., Kim J.W.* A wall-resolved large-eddy simulation of deep cavity flow in acoustic resonance // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 917. ID A17. 30 p. DOI: 10.1017/jfm.2021.261.
30. *Марфин Е.А., Абдрашитов А.А.* Численные и экспериментальные исследования генерации звука в струйном осцилляторе Гельмгольца с щелевой камерой // *Noise Theory and Practice*. 2023. Т. 9. № 3 (34). С. 7–17.
31. *Menter F.R., Langtry R., Kuntz M.* Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*. Begell House, 2003. P. 625–632.

Acoustic Resonance in an Annular Cavity with Axial Transit Flow

E. V. Kolesnik^{a,*}, D. K. Zaitsev^a, E. M. Smirnov^a, E. I. Shmelev^b,
M. G. Maslov^a, and A. V. Budnikov^b

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, St.-Petersburg, Russia

^bAfrikantov Experimental Design Bureau of Mechanical Engineering, St.-Petersburg, Russia

**e-mail: kolesnik.ev1@spbstu.ru*

The results of a coordinated computational and experimental study of acoustic self-oscillations in an annular cavity surrounding a circular pipe with a local narrowing are given. In the experiment, pressure fluctuations were measured on the outer wall of the annular cavity for various volume flow rates; air entered the pipe at the atmospheric pressure. It was found that the flow regime with excitation of acoustic self-oscillations in the cavity is implemented in a certain range of flow rates. The oscillation frequency corresponds to the first natural frequency, and the root-mean-square values of pressure fluctuations reach a level of 2300 Pa. Numerical simulation based on the RANS approach, carried out for the geometry and conditions of experiment, reproduces the observed effect of acoustic excitation of the cavity and gives similar values of the fluctuation amplitude. The oscillation modes developed at various volumetric flow rates are analyzed based on the obtained calculated data.

Keywords: acoustic resonance, annular cavity, measurement of pressure fluctuations, RANS simulation.

УДК 533.6.011

РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ ЛЕТНЫХ ДАННЫХ ПО КОНВЕКТИВНОМУ НАГРЕВУ МАРСИАНСКОГО СПУСКАЕМОГО АППАРАТА В РАМКАХ МОДЕЛИ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

© 2024 г. С. Т. Суржиков

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: surg@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 25.06.2024 г.

После доработки 01.07.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

С использованием модели совершенного газа решается пространственная задача сверхзвукового обтекания спускаемого аппарата MSL в плотных слоях атмосферы Марса. Численно интегрируется система усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (RANS) совместно с алгебраической моделью турбулентного смешения Болдуина–Ломакса. Помимо изучения закономерностей поля течения в окрестности спускаемого аппарата для реальных траекторных условий анализируются расчетные данные по конвективному нагреву поверхности на наветренной и подветренной стороне. Учитывается изменение условий нагрева при переходе от ламинарного к турбулентному характеру течения вблизи обтекаемой поверхности. Представлено сравнение с летными данными.

Ключевые слова: пространственная задача обтекания спускаемого аппарата, нагрев поверхности в ламинарном и турбулентном потоке, RANS-модель совместно с алгебраической моделью турбулентности, сравнение с полетными данными.

DOI: 10.31857/S1024708424040135, **EDN:** OXTPNJ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение закономерностей нагрева поверхности космических зондов, при их входе в плотные слои атмосферы планет, остается одной из актуальных, поскольку во многом определяет успех конечной фазы полета космического аппарата. Результаты детальных исследований нашли отражение в многочисленных работах, включая обобщающие монографии [1–5].

По мере накопления опыта реальных космических миссий, а также результатов многочисленных лабораторных и стендовых испытаний, увеличивается востребованность в высокопроизводительных компьютерных кодах, позволяющих проводить расчетно-теоретическую интерпретацию получаемых опытных данных, а также выполнять прогностические исследования. Совершенствование экспериментальных измерительных технологий и способов обработки телеметрической информации летных экспериментов выдвинуло на первый план требование проведения валидации создаваемых компьютерных кодов.

Одним из убедительных положительных примеров указанной технологии исследований является получение стендовых и летных данных, а также сопровождающих численных исследований аэротермодинамики посадочного модуля марсианского космического аппарата Mars Science Laboratory (MSL).

Первая группа опытных данных была получена в процессе стендовых испытаний маломасштабных моделей спускаемых космических аппаратов (СА), предназначенных для входа в плотные слои атмосферы Марса [6], где выполнено экспериментальное исследование конвективного нагрева поверхности масштабной модели MSL в условиях ламинарного, переходного и турбулентного режимов течения молекулярного азота. Это исследование было проведено с использованием двух аэродинамических труб при числах Маха 6, 8 и 10 [6]. Миделево сечение испытываемой модели определялось по диаметру $D \sim 15$ см.

Условия испытаний модели СА MSL при указанных числах Маха были таковы, что обеспечивались режимы ламинарного, переходного и турбулентного обтекания. Числа Рейнольдса набегающего потока при $M=8$ изменялись в диапазоне $Re_{\infty}=1,3 \times 10^7$ 1/м – 16×10^7 1/м и при $M=10$: $Re_{\infty}=0,39 \times 10^7$ 1/м – 62×10^7 1/м.

Отметим значительное время испытаний в аэродинамической трубе AEDC Tunnel 9 $\Delta t=0,25-15$ с, что позволило изменять угол атаки испытываемой модели в одном эксперименте в диапазоне $\alpha=-10-+50^\circ$ со скоростью $\Delta\alpha=80^\circ$ 1/с. В некоторых испытаниях время испытаний достигало 15 мин. Подтверждено, что для получения требуемых данных достаточно нескольких секунд.

Полученные в [6] экспериментальные данные по конвективному нагреву поверхности модели MSL, обтекаемой под разными углами атаки послужили основой для проведения серии расчетных исследований. В этой же работе представлены результаты расчетов с использованием компьютерного кода LAURA (Langley Aerothermodynamic Upwind Relaxation Algorithm) [7], прошедшего весьма убедительную апробацию на ряде экспериментальных исследований в области аэротермодинамики.

В [6] использовались параболизированные уравнения Навье–Стокса совместно с алгебраическими моделями турбулентности Себечи–Смита [8] и Болдуина–Ломакса [9]. Показано, что указанные модели турбулентного смешения позволяют получить удовлетворительное расчетное описание экспериментальных данных по конвективному нагреву.

В работе [10] для интерпретации этих же экспериментальных данных использовались алгебраические модели турбулентного смешения Прандтля [3] и Болдуина–Ломакса. Как и в [6], была выбрана модель совершенного газа, но решалась полная система усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке, что позволило анализировать экспериментальные данные, полученные при разных углах атаки. Помимо сравнительного анализа расчетных и экспериментальных данных в [10] подробно обсуждалась проблема интегрирования алгебраических моделей турбулентного смешения совместно с полными уравнениями Навье–Стокса.

Несмотря на большую ценность стендовых испытаний, особый интерес представляют летные данные, полученные в реальных условиях входа спускаемого аппарата в плотные слои атмосфер планет. В работе [11] приведены такие летные данные, по плотностям тепловых потоков на лобовом аэродинамическом щите спускаемого марсианского аппарата MSL. Аэродинамический щит данного спускаемого аппарата имел диаметр $D=4.5$ м, что значительно превосходило размеры аэродинамических щитов ранее реализованных космических миссий. Помимо изложения технологии обработки телеметрических экспериментальных данных в [11] представлены результаты расчетной интерпретации этих данных.

Совместный анализ летных и расчетных данных показал, что для условий входа СА MSL может наблюдаться ламинарно-турбулентный переход на подветренной стороне лобового аэродинамического щита. Причем, турбулентный нагрев подветренной стороны оказывается весьма значительным.

Несмотря на протяженную обтекаемую поверхность реального спускаемого аппарата необходимо отметить важный расчетный факт весьма хорошего предсказания плотности конвективных тепловых потоков при использовании упомянутого выше компьютерного кода LAURA [7,11].

В работе [12] использована существенно более сложная пространственная модель обтекания и нагрева СА MSL в процессе аэродинамического торможения в атмосфере Марса для приведенных в [11] траекторных точек. Совместно с уравнениями RANS модели, построенной в [10], интегрировались уравнения физико-химической кинетики и спектрального радиационного теплообмена.

Ранее особо отмечалось, что в задачах аэрофизики спускаемых космических аппаратов в плотных слоях атмосферы сложно бывает выделить определяющие процессы, которые, к тому же, могут сменять друг друга на разных участках траектории торможения, тем не менее, следует признать, что для условий марсианского входа явление ламинарно-турбулентного перехода и турбулентного нагрева поверхности аппарата является одним из ключевых.

Особенность изучения турбулентного нагрева протяженных поверхностей при больших сверхзвуковых скоростях движения состоит в том, что после ламинарно-турбулентного перехода в области турбулентного течения градиенты газодинамических функций резко возрастают. Компьютерное моделирование и без того трудоемкой трехмерной задачи еще более усложняется из-за необходимости учета пристеночной структуры турбулентного пограничного слоя. От точности описания этой структуры в значительной степени зависит достоверность получаемых расчетных данных по интенсивности конвективного нагрева.

Проблему численного интегрирования уравнений аэротермодинамики и физико-химической кинетики легко наглядно пояснить сравнением характерных пространственных масштабов решаемой задачи. Протяженность наветренной и подветренной поверхностей СА MSL составляет 8 м. Типичные толщины

сжатого и пограничного слоев у лобовой (наветренной) поверхности имеют масштаб 10–20 и 1–2 см. Пространственный масштаб у поверхности, необходимый для описания ламинарного подслоя в турбулентном пограничном слое измеряется $\sim 10^{-4}$ см.

В данной работе решается существенно более простая задача, чем в [12]. Процессы физико-химической кинетики и радиационного теплообмена исключены из рассмотрения, а газ считается совершенным с показателем адиабаты $\gamma=1.15$. Выбор данного показателя адиабаты связан с тем, что в этом случае уровень температуры в сжимаемом слое за фронтом ударной волны получается близким к тому, который получается при решении полной задачи физической и химической кинетики [12]. Использование модели совершенного газа позволяет изучить влияние на конвективный нагрев поверхности учет только процессов турбулентного смешения.

Необходимо обратить внимание еще на одну принципиальную особенность выполненного численного моделирования реальной крупномасштабной модели СА, связанную с большим дефицитом узлов конечно-разностной сетки. Для получения требуемого сеточного разрешения при использовании модели турбулентного смешения необходимо сильное сгущение узлов сетки к поверхности, что с неизбежностью приводит к значительной деформации элементарных сеточных ячеек. По мере увеличения вычислительных мощностей актуальность этой проблемы будет снижаться.

1. РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ

Для численной реализации пространственной модели аэротермодинамики спускаемого космического аппарата при высокоскоростном торможении в плотных слоях атмосферы используется многоблочная сеточная технология. В каждом блоке реализуется численное интегрирование системы усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса с использованием единого для всей программы компьютерного модуля (“решателя”).

Систему газодинамических уравнений составляют уравнения неразрывности газа, усредненные по Рейнольдсу с использованием гипотезы Буссинеска уравнения Навье–Стокса и уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \Pi_{x,eff}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \Pi_{y,eff}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \Pi_{z,eff}, \quad (1.4)$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda_{eff} \text{grad } T) + \frac{dp}{dt} + \Phi_\mu, \quad (1.5)$$

где компоненты тензора вязких напряжений и диссипативная функция выражаются следующим образом:

$$\Pi_{x,eff} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu_{eff} \text{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\Pi_{y,eff} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_{eff} \text{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

$$\Pi_{z,eff} = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_{eff} \text{div} \mathbf{V}) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_{eff} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right],$$

$$\Phi_{\mu} = \mu_{eff} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$

u, v, w – проекции вектора скорости потока \mathbf{V} на оси прямоугольной декартовой системы координат x, y, z ; p, ρ, T – давление, плотность и температура газа; $\mu, \lambda, \mu_t, \lambda_t, \mu_{eff} = \mu + \mu_t, \lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$ – молекулярная, турбулентная и эффективная вязкость и теплопроводность, T – температура; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; μ, λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности, которые рассчитывались по формуле Сазерленда и посредством задания постоянного числа Прандтля:

$$\mu = \mu_0 \frac{274 + T_0}{274 + T} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2}, \quad T_0 = 273 \text{ K}, \quad \mu_0 = 1.384 \cdot 10^{-4} \text{ г/см} \cdot \text{с},$$

$$\lambda = \frac{\mu c_p}{\text{Pr}}, \quad \text{Pr} = 0.7.$$

В качестве модели турбулентного смешения выбрана алгебраическая модель Болдуина-Ломакса, в которой рассматривается двухслойная структура турбулентного пограничного слоя. Во внутреннем, прилегающем к поверхности слое:

$$\mu_{t,in} = \rho (\chi y D)^2 |\Omega| = \rho \left\{ \chi y \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right] \right\}^2 |\Omega| \quad (1.6)$$

где D – демпфирующая функция Ван-Дрифта,

$$y^+ = \frac{y}{\nu_w} u_\tau = \frac{y}{\mu_w} \rho_w u_\tau = \frac{y}{\mu_w} \sqrt{\rho_w \tau_w} = y \sqrt{\frac{\rho_w}{\mu_w} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w; \quad (1.7)$$

δ – толщина динамического пограничного слоя; $\chi = 0.4$ – эмпирическая константа Кармана; $A^+ = 26$; ν_w – кинематическая вязкость вблизи поверхности; $|\Omega|$ – функция завихренности скорости,

$$|\Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2}, \quad (1.8)$$

где, в общем случае пограничного слоя у криволинейной поверхности, в отличие от исходной постановки задачи, в соотношениях (1.6)–(1.8) под компонентами скоростей и координатами следует понимать скорости вдоль координатных линий локальной системы координат, связанной с нормалью к поверхности.

Во внешнем слое турбулентная вязкость рассчитывалась по корреляционному соотношению:

$$\mu_{t,out} = K C_{cp} \rho F_{wake} F_{kleb}(y) \quad (1.9)$$

$$F_{kleb}(y) = \left[1 + 5.5 \left(y \frac{C_{kleb}}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}, \quad C_{kleb} = 0.3,$$

$$F_{wake} = y_{max} F_{max}, \quad F(y) = y |\Omega| D,$$

где $K=0.018, C_{cp}=1.6$.

Выбор величины y_{max} определялся локальной координатой нормальной к поверхности y где $|\Omega|$ достигает своего максимума, а $F_{max}=F(y_{max})$.

Таблица 1. Траекторные параметры СА MSL [11]

t , с	H , км	V_{∞} , см/с	ρ_{∞} , г/см ³	T_{∞} , К	α , град	M
61.5	38.8	5.660×10^5	0.270×10^{-6}	157	15.7	28.4
65.1	34.7	5.515×10^5	0.431×10^{-6}	161	15.9	27.4
69.3	30.2	5.258×10^5	0.696×10^{-6}	169	16.2	25.5
74.0	25.8	4.862×10^5	0.144×10^{-5}	170	16.1	23.5

В итоге турбулентная вязкость находится из соотношения:

$$\mu_{t,in}, y \leq y_{cross}$$

$$\mu_{t,out}, y > y_{cross},$$

где y_{cross} – координата y , при которой $\mu_{t,in} = \mu_{t,out}$ (первый раз по мере увеличения y).

В литературе неоднократно отмечалось, что использование алгебраических моделей турбулентности совместно с полной моделью Навье–Стокса сталкивается с рядом проблем, которые отсутствуют при решении задачи в классической погранслоевой постановке. В [12] этой проблеме уделяется особое внимание. Заметим, что в данной модели не анализируется и не задается критическое число Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода. Здесь область получается автоматически в зависимости от величины $|\Omega|$. Очевидно такой эффект применения алгебраических моделей не стоит трактовать как автоматическое определение зоны ламинарно-турбулентного перехода. Тем не менее, многочисленные примеры использования алгебраических моделей турбулентности без введения критического числа Рейнольдса показывают на достаточно хорошее описание экспериментальных данных.

В качестве граничных условий для системы уравнений (1.1)–(1.5) использовались условия в невозмущенном набегающем потоке (см. табл. 1), условия прилипания на поверхности и условия Дирихле в выходном сечении расчетной области, где течение всегда было сверхзвуковым. Подробности численной реализации можно найти в работе [10].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты выполнены для условий в набегающем потоке [11], представленных в табл. 1. Был выбран наиболее теплонапряженный участок траектории, где число Маха полета падает от 28.4 до 23.5. Наиболее интенсивный нагрев наблюдается на 74 с активной фазы торможения. Результаты расчетов показали, что рассчитанные конфигурации полей газодинамических функций подобны для разных траекторных точек. Поэтому для примера проанализируем поля газодинамических функций вблизи спускаемого аппарата для одного из моментов времени, $t=65.1$ с.

На рис. 1 приведена пространственная конечно-разностная сетка. Кроме этого, в двух плоскостях вдоль продольной координаты в области отрывного течения на фоне расчетной сетки показаны изотермы. На этом же рисунке показана поверхностная сетка на лобовой и задней поверхности СА. По нормали к поверхности использовалась сетка с числом узлов $NI=71$. Хорошо видно сгущение узлов сетки вблизи оси симметрии СА и на боковой кромке аэродинамического щита. Направление набегающего потока со скоростью V_{∞} показано стрелкой.

На рис. 2, где показано поле продольной скорости, отметим важные для решаемой задачи структурные особенности решения. В области отрывного течения и следа за задней поверхностью СА идентифицируется область с отрицательными значениями скорости u , что свидетельствует о возвратно-вихревом движении, формируемым над задней поверхностью. Заметим, что для некоторых расчетных случаев в потоке, направленном к задней поверхности, могут достигаться сверхзвуковые скорости.

На рис. 3 показано температурное поле во всей расчетной области. У лобовой поверхности аэродинамического щита в сжатом слое за ударной волной формируется высокотемпературный сжатый слой с характерной температурой порядка 5000 К. Примечательны также охлаждение газа за кромкой лобового щита, где развивается классическое течение Прандтля–Майера, а также нагрев газа в области ближнего следа, где сходятся газовые потоки после зоны расширения.

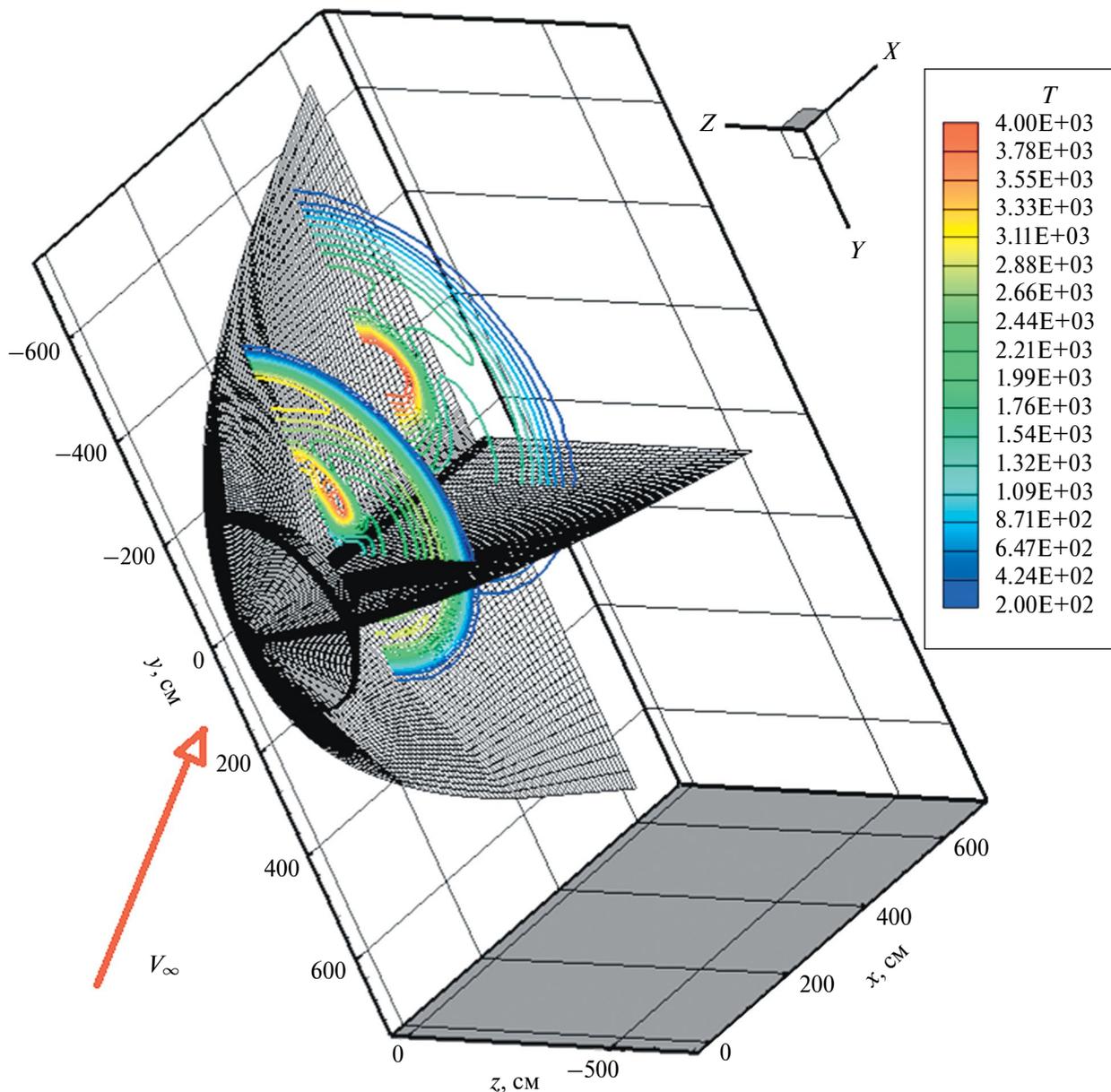


Рис. 1. Расчетная сетка и изотермы в двух сечениях вдоль оси x .

Наветренная и подветренная области течения у лобового аэродинамического щита обозначены на рис. 2 цифрами 1 и 2. Стрелка на рис. 1 показывает местоположение критической линии тока. От критической точки начинается растекание газа в сжатом слое по всем направлениям. В окрестности критической линии тока течение газа в сжатом слое дозвуковое практически по всей толщине сжатого слоя. По мере растекания газа вдоль лобовой поверхности скорость увеличивается и становится сверхзвуковой. В непосредственной близости к поверхности (в пограничном слое), оно остается дозвуковым. Видно, что толщина сжатого слоя у наветренной стороны лобового щита значительно превосходит толщину сжатого слоя над подветренной стороной, где поток уже разгоняется до больших сверхзвуковых скоростей.

Особенностью течения газа у лобовой поверхности СА MSL, как отмечалось выше, является тот факт, что в результате турбулизации газового потока в сжатом слое у поверхности, в области, отмеченной цифрой 2, интенсивность турбулентного смешения становится настолько высокой, что здесь наблюдается экстремальная плотность конвективного теплового потока.

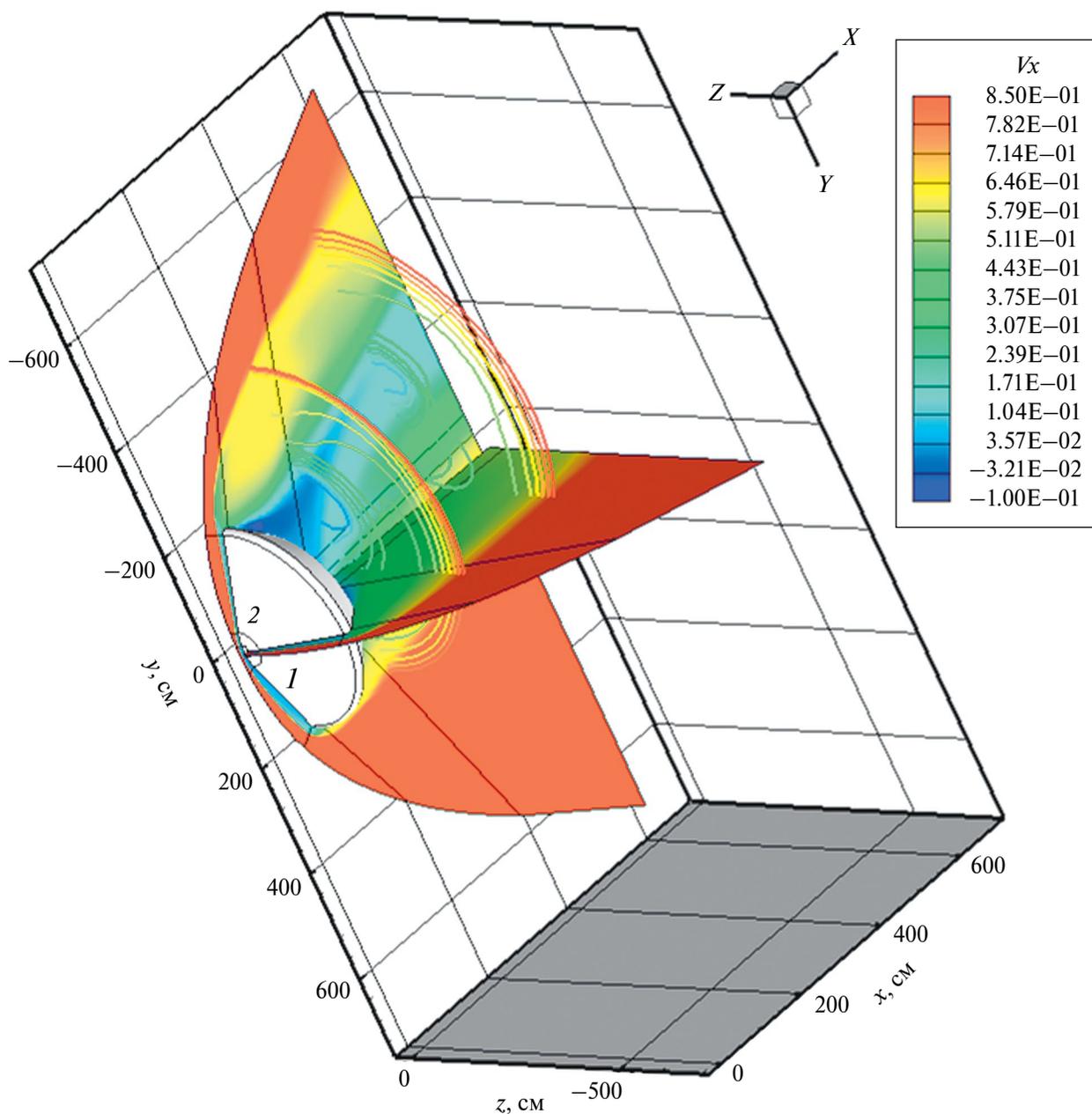


Рис. 2. Поле продольной скорости $V_x = u/V_\infty$ в окрестности CA MSL при $t=65.1$ с.

На рис. 4 показаны изолинии плотностей конвективных тепловых потоков на лобовом щите CA MSL для четырех моментов времени. На этих рисунках отчетливо видно, что наибольшие плотности конвективных тепловых потоков q_w достигаются именно на подветренной стороне лобового аэродинамического щита, что и является следствием указанной турбулизации газового потока.

В дополнение к рис. 4, на рис. 5 приведены распределения q_w вдоль поверхности в плоскости симметрии спускаемого аппарата, рассчитанные в приближении ламинарного характера течения и с учетом турбулентности.

Для сопоставления данных по распределению q_w на рис. 4б и 5б показаны области в окрестности критической линии тока (точка "1") и в области максимального нагрева в подветренной зоне лобового щита (точка "2"). Видно, что в области критической линии тока конвективные потоки в расчетах по ламинарной и турбулентной моделям оказываются близкими. При этом, нагрев подветренной стороны

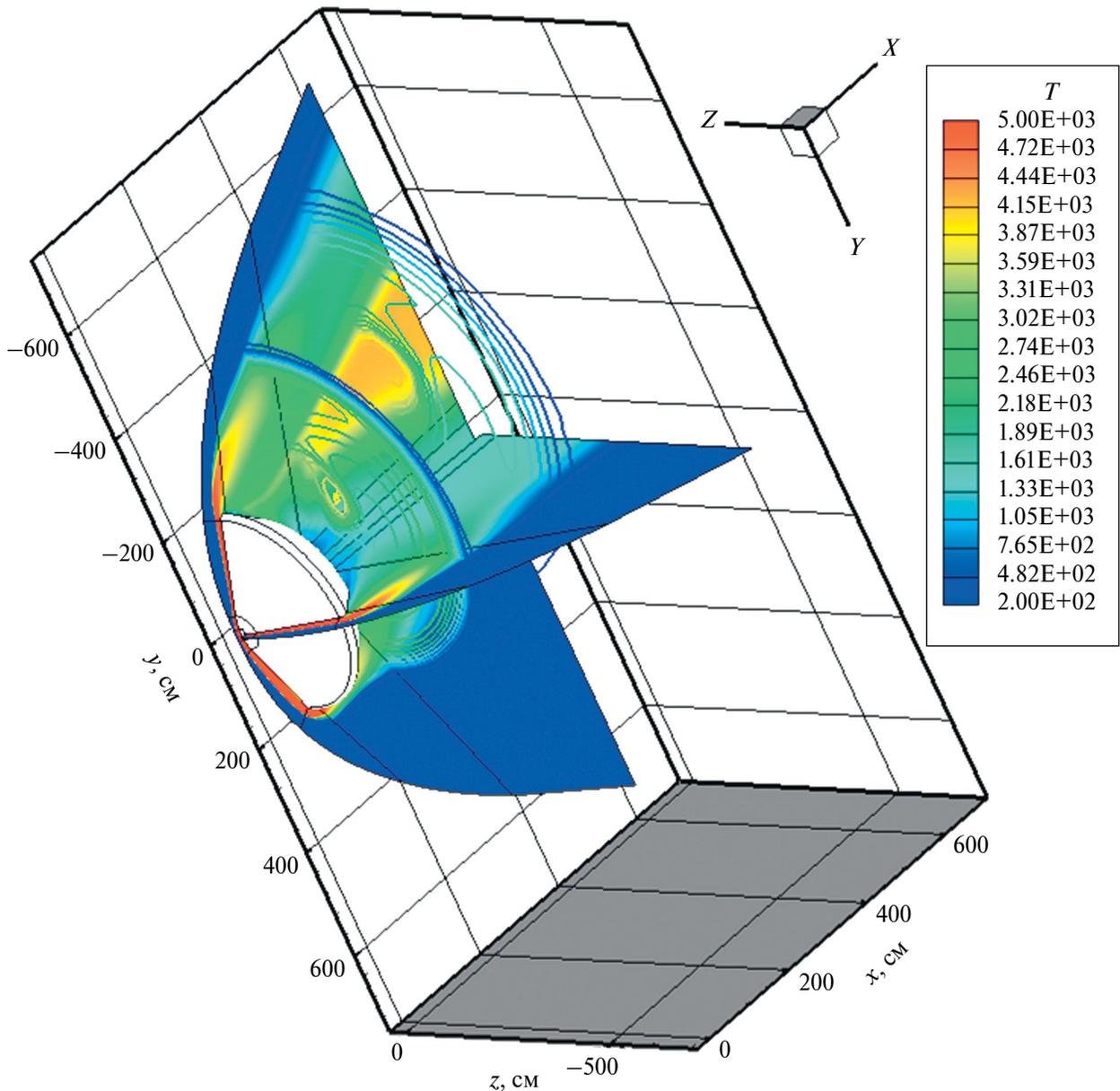


Рис. 3. Поле температуры в окрестности СА MSL при $t=65.1$ с.

лобового аэродинамического щита при турбулентном характере течения как минимум в два раза превышает нагрев при ламинарном течении.

Отметим также еще одну закономерность, проявляемую на рис. 5, связанную с постепенным входом спускаемого аппарата в плотные слои атмосферы и его торможением. Хорошо видно, что по мере увеличения времени от $t_1=61$ с до $t_4=74$ с плотность тепловых потоков на подветренной стороне возрастает. В ранние моменты времени набегающий поток газа относительно разрежен, а в поздние моменты времени — становится более плотным, хотя скорость и немного падает.

Представленные на рис. 6 распределения q_w , полученные в приближении совершенного газа, целесообразно сравнить с данными рис. 6, заимствованными из работы [12], и полученными с использованием неравновесной физико-химической и радиационно-газодинамической модели аэротермодинамики спуска СА MSL по исходным данным [11]. По сравнению с [12] здесь точками добавлены экспериментальные данные [11], что подтверждает хорошее соответствие получаемых расчетных данных летному эксперименту.

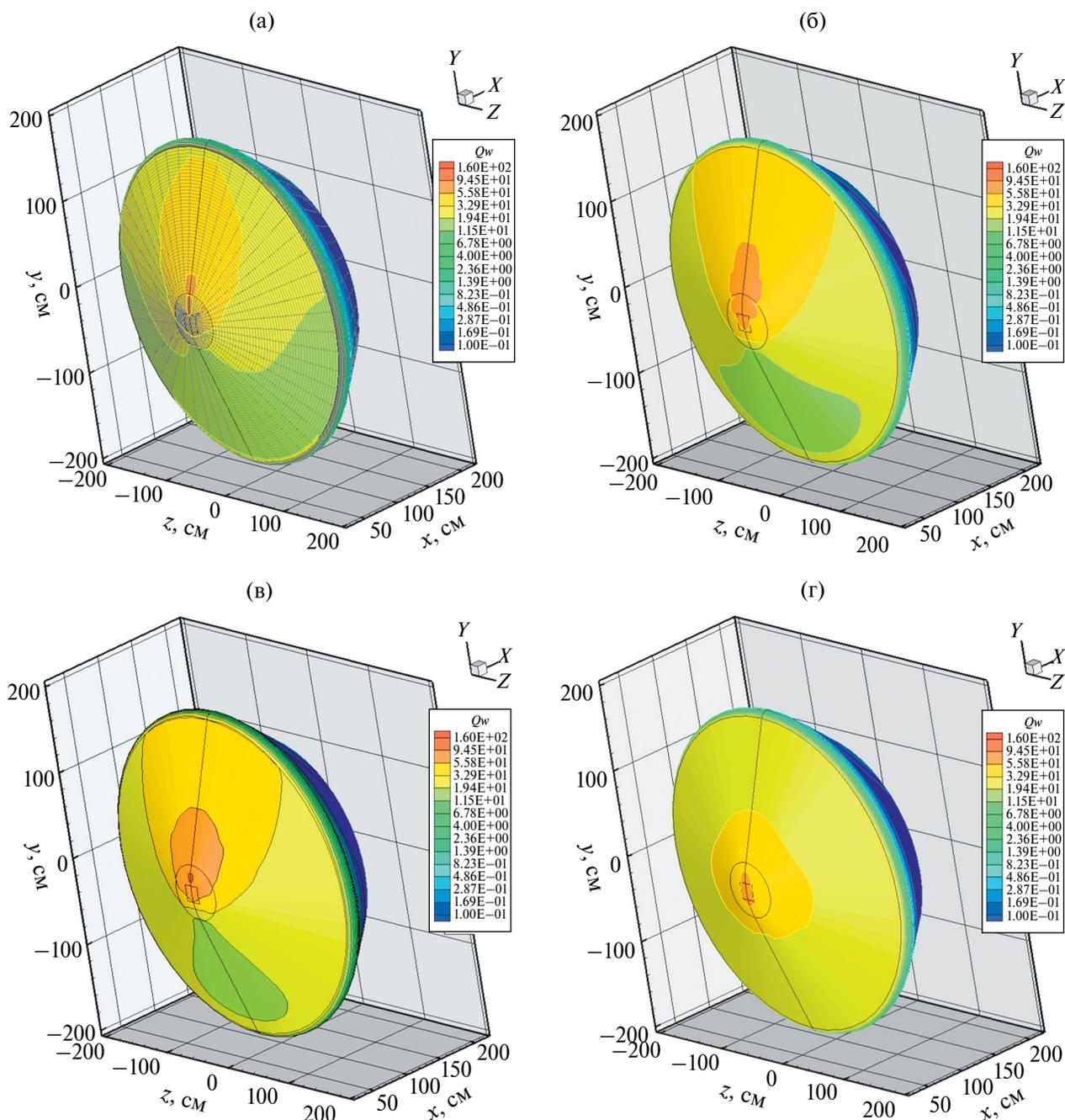


Рис. 4. Плотность конвективных тепловых потоков на лобовой поверхности аэродинамического щита CA MSL при $t_1=61.5$ с (а), $t_2=65.1$ с (б), $t_3=69.3$ с (в), $t_4=74.0$ с (г).

Сопоставление данных на рис. 5 и 6 показывает не сильное их различие, что позволяет рекомендовать модель совершенного газа для предварительного анализа аэротермодинамики СА. При этом следует помнить о правильном выборе показателя адиабаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование пространственной вычислительной модели, основанной на уравнениях Навье–Стокса, усредненных по Рейнольдсу совместно с алгебраической моделью турбулентности Болдуина–Ломакса

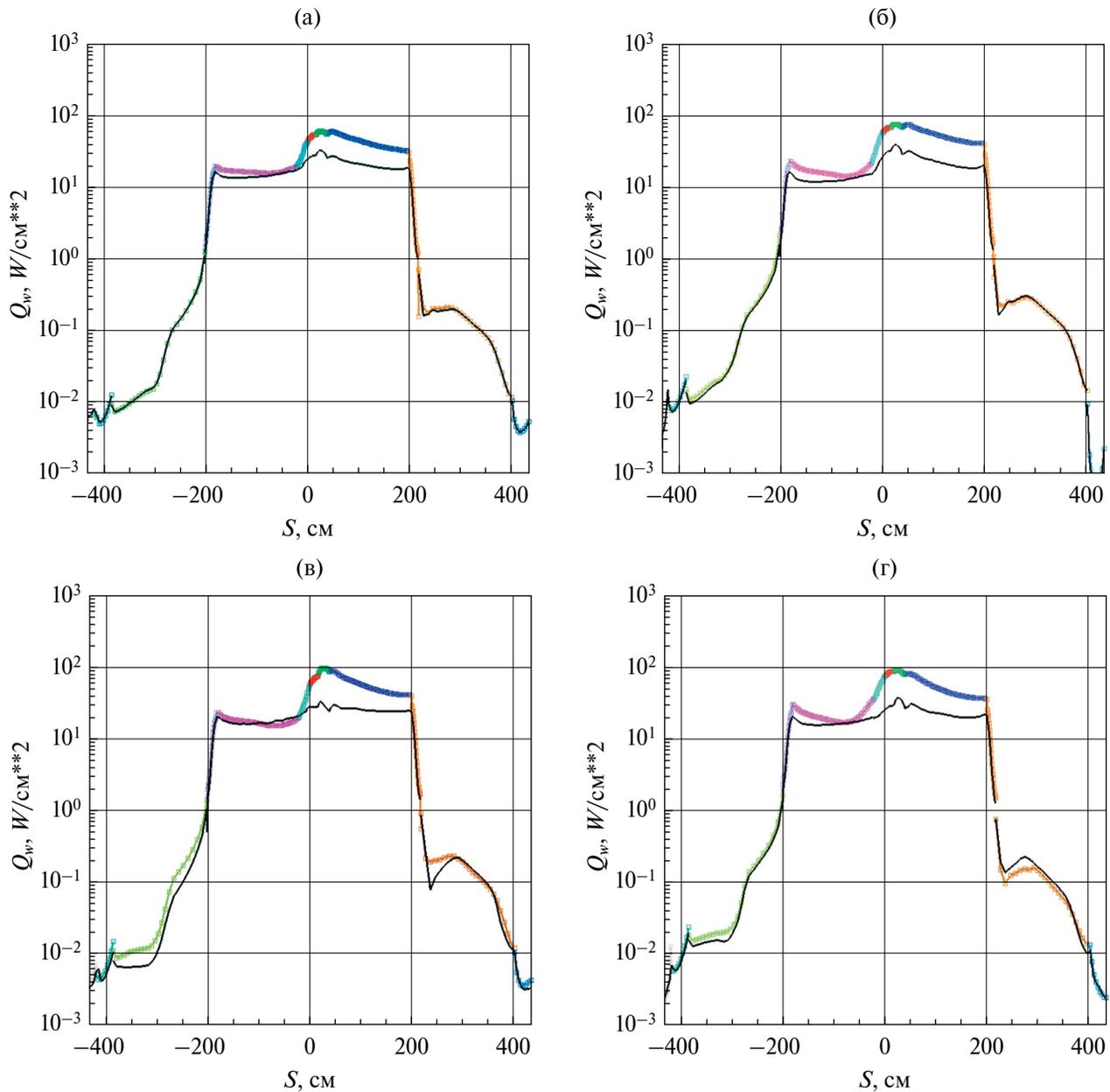


Рис. 5. Распределения плотностей конвективных тепловых потоков вдоль плоскости симметрии лобового аэродинамического щита СА MSL при $t_1=61.5$ с (а), $t_2=65.1$ с (б), $t_3=69.3$ с (в), $t_4=74.0$ с (г). Черные кривые – ламинарный поток, цветные кривые – турбулентный поток.

и с использованием модели совершенного газа для интерпретации летных данных по конвективному нагреву спускаемого марсианского аппарата MSL, показало хорошее соответствие расчетных данным экспериментальным. Показатель адиабаты $\gamma=1.15$ для модели совершенного газа выбирался из условия близости температуры в сжатом слое вблизи критической линии тока, получаемой в расчетах по неравновесной физико-химической модели.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-124012500440-9).

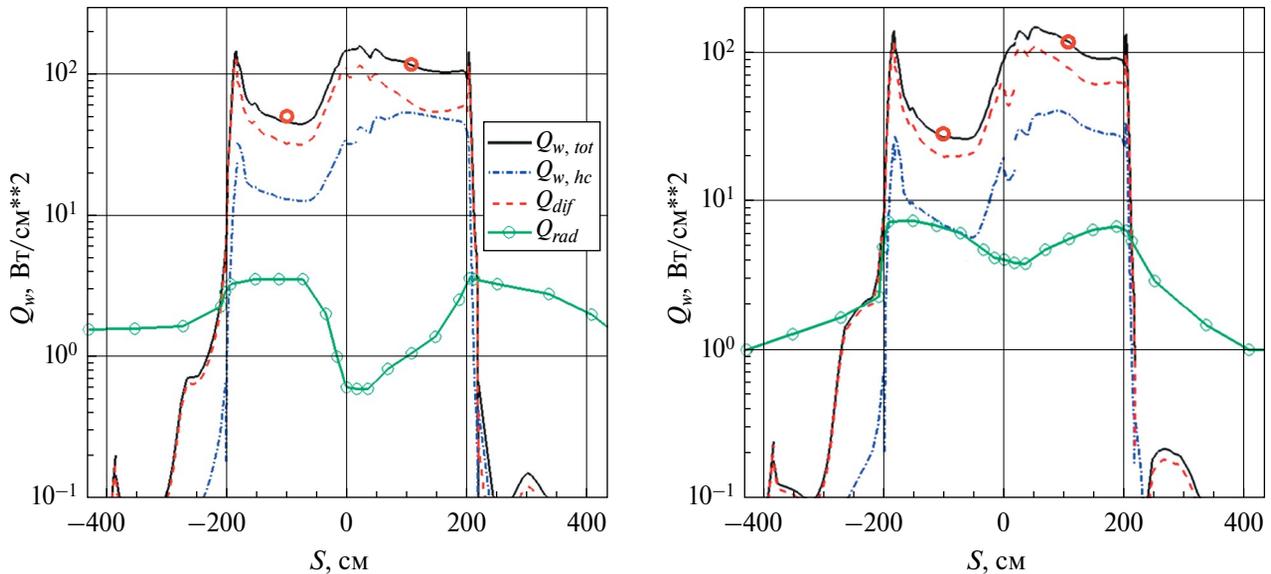


Рис. 6. Распределение плотностей конвективного $Q_{w,tot} = Q_{w,hc} + Q_{dif}$ и интегрального радиационного теплового потока Q_{rad} вдоль поверхности СА MSL в плоскости симметрии при $t=65$ с (слева) и $t=74$ с (справа). Модель турбулентного смешения Болдуина–Ломакса. Постоянная температура лобовой поверхности $T_w = 1000$ К. Сплошная черная кривая – полная плотность конвективного теплового потока, штриховая линия – плотность теплового потока, обусловленного диффузионным потоком к абсолютно каталитической поверхности; штрих-пунктир – теплопроводная составляющая; сплошная кривая с круглыми маркерами – плотность интегрального радиационного теплового потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими сверхзвуковыми скоростями. М.: Физматлит. 2007. 760 с.
2. Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И. и др. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. М.: Физматлит. 2014. 330 с.
3. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat transfer. 1997. Taylor&Francis. 792 p.
4. Bertin J.J. Hypersonic aerothermodynamics. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Washington, DC. 1994. 608 p.
5. Суржиков С.Т. Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. М.: Физматлит, 2018. 543 с.
6. Hollis B.R., Collier A.S. Turbulent Aeroheating Testing of Mars Science Laboratory Entry Vehicle in Perfect-Gas Nitrogen// AIAA 2007–1208. 2007. 20 p.
7. Cheatwood F.M., Gnoffo P.A. Users Manual for the Langley Aerothermo-dynamic Upwind Algorithm (LAURA)// NASA TM-4674, April 1996.
8. Cebeci T., Smith A.N.O. Analysis of Turbulent Boundary Layers. Academic Press. 1974. 404 p.
9. Baldwin B.S., Lomax H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. AIAA Paper 78–0257. 1978. 8 p.
10. Суржиков С.Т. Анализ экспериментальных данных по конвективному нагреву модели марсианского спускаемого аппарата с использованием алгебраических моделей турбулентности // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 6. С. 129–140.
11. Edquist K.T., Hollis B.R., Johnston C.O., Bose D., White T.R., Mahzari M. Mars Science Laboratory Heat Shield Aerothermodynamics: Design and Reconstruction// JSR. 2014. V.51. № v4. P. 1106–1124.
12. Суржиков С.Т. Радиационно-конвективный нагрев поверхности марсианского спускаемого аппарата MSL при учете турбулентного характера обтекания// Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 5. С. 119–137

Computational Analysis of Flight Data on Convective Heating of the Martian Descent Vehicle within the Framework of the Perfect Gas Model

© 2024 S. T. Surzhikov^{a,*}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: surg@ipmnet.ru*

The spatial problem of supersonic flow past the MSL descent space vehicle in the dense layers of the Martian atmosphere is solved using the perfect gas model. The system of Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations is numerically integrated together with the Baldwin-Lomax algebraic turbulent mixing model. In addition to studying the flow field patterns in the vicinity of the descent vehicle for real trajectory conditions, the calculated data on convective heating of the surface on the windward and leeward sides are analyzed. Change in the heating conditions during laminar-turbulent transition near the surface is taken into account. A comparison with flight data is presented.

Keywords: spatial problem of flow past a descent vehicle, surface heating in laminar and turbulent flows, RANS model together with an algebraic turbulence model, comparison with flight data.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-82144 от 20 ноября 2021 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзором)

Подписано к печати г. Формат 60 × 88¹/₈ Усл. печ. л. 18.33 Уч.-изд. л. 18.75

Тираж экз. Зак. Цена свободная

Учредители: Российская академия наук, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Издатель: Российская академия наук, 119991 Москва, Ленинский просп., 14
Исполнитель по контракту № 4У-ЕП-038-24 ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1
Отпечатано в ФГБУ «Издательство «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6, стр. 1

16+

Журналы РАН, выходящие в свет на русском языке

Автоматика и телемеханика
 Агрохимия
 Азия и Африка сегодня
 Акустический журнал
 Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы
 Астрономический журнал
 Биологические мембраны
 Биология внутренних вод
 Биология моря
 Биоорганическая химия
 Биофизика
 Биохимия
 Ботанический журнал
 Вестник Дальневосточного отделения Российской академии наук
 Вестник древней истории
 Вестник Российской академии наук
 Вестник российской сельскохозяйственной науки
 Водные ресурсы
 Вопросы истории естествознания и техники
 Вопросы ихтиологии
 Вопросы языкознания
 Вулканология и сейсмология
 Высокомолекулярные соединения. Серия А
 Высокомолекулярные соединения. Серия Б
 Высокомолекулярные соединения. Серия С
 Генетика
 Геология рудных месторождений
 Геомагнетизм и аэрономия
 Геоморфология и палеогеография
 Геотектоника
 Геохимия
 Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология
 Государство и право
 Дефектоскопия
 Дифференциальные уравнения
 Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления
 Доклады Российской академии наук. Науки о жизни
 Доклады Российской академии наук. Науки о Земле
 Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки
 Доклады Российской академии наук. Химия, науки о материалах
 Журнал аналитической химии
 Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова
 Журнал вычислительной математики и математической физики
 Журнал неорганической химии
 Журнал общей биологии
 Журнал общей химии
 Журнал органической химии
 Журнал прикладной химии
 Журнал физической химии
 Журнал эволюционной биохимии и физиологии
 Журнал экспериментальной и теоретической физики
 Записки Российского минералогического общества
 Зоологический журнал
 Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа
 Известия Российской академии наук. Механика твердого тела
 Известия Российской академии наук. Серия биологическая
 Известия Российской академии наук. Серия географическая
 Известия Российской академии наук. Серия литературы и языка
 Известия Российской академии наук. Серия физическая
 Известия Российской академии наук. Теория и системы управления
 Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана
 Известия Российской академии наук. Энергетика
 Известия Русского географического общества
 Исследование Земли из Космоса
 Кинетика и катализ
 Коллоидный журнал
 Координационная химия
 Космические исследования
 Кристаллография
 Латинская Америка
 Лёд и Снег
 Лесоведение
 Литология и полезные ископаемые
 Мембраны и мембранные технологии
 Металлы
 Микология и фитопатология
 Микробиология
 Микроэлектроника
 Молекулярная биология
 Нейрохимия
 Неорганические материалы
 Нефтехимия
 Новая и новейшая история
 Общественные науки и современность
 Общество и экономика
 Океанология
 Онтогенез
 Палеонтологический журнал
 Паразитология
 Петрология
 Письма в Астрономический журнал
 Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики
 Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования
 Почвоведение
 Приборы и техника эксперимента
 Прикладная биохимия и микробиология
 Прикладная математика и механика
 Проблемы Дальнего Востока
 Проблемы машиностроения и надежности машин
 Проблемы передачи информации
 Программирование
 Психологический журнал
 Радиационная биология. Радиоэкология
 Радиотехника и электроника
 Радиохимия
 Расплавы
 Растительные ресурсы
 Российская археология
 Российская история
 Российская сельскохозяйственная наука
 Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова
 Русская литература
 Русская речь
 Сенсорные системы
 Славяноведение
 Современная Европа
 Социологические исследования
 Стратиграфия. Геологическая корреляция
 США & Канада: экономика, политика, культура
 Теоретические основы химической технологии
 Теплофизика высоких температур
 Успехи современной биологии
 Успехи физиологических наук
 Физика Земли
 Физика и химия стекла
 Физика металлов и металловедение
 Физика плазмы
 Физикохимия поверхности и защита материалов
 Физиология растений
 Физиология человека
 Химическая физика
 Химия высоких энергий
 Химия твердого топлива
 Цитология
 Человек
 Экология
 Экономика и математические методы
 Электрохимия
 Энтомологическое обозрение
 Этнографическое обозрение
 Ядерная физика