ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2024, № 6, с. 37–45

УДК 532.5

ДОСТАТОЧНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский[a, b, *]

[a] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[b] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 06.07.2024 г.
После доработки 08.10.2024 г.
Принята к публикации 08.10.2024 г.

Исследуется эволюция во времени трёхмерной картины начальных возмущений, налагаемых на нестационарное течение, являющееся комбинацией одномерных $r\theta$- и rz-сдвигов ньютоновской вязкой жидкости в бесконечном по простиранию цилиндрическом слое. Заданы кольцевые и осевые скорости обеих цилиндрических границ, не меняющиеся в возмущённом движении. Приводится формулировка линеаризованной задачи в вариациях скоростей, скоростей деформаций, давления и девиатора напряжений. Для анализа данной задачи развивается метод интегральных соотношений, позволяющий получать в гильбертовом пространстве H_2 достаточные оценки развития возмущений, в частности, устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. В эти оценки входят как кинематические параметры основного течения, так и гармоники кольцевых и волновые числа осевых возмущений. В случае, когда основное движение в слое стационарно, имеют место экспоненциальные оценки устойчивости.

Ключевые слова: ньютоновская вязкая жидкость, цилиндрический слой, сдвиговое течение, возмущение, линеаризация, оценки устойчивости, квадратичный функционал, вариационные неравенства, экспоненциальная устойчивость

DOI: 10.31857/S1024708424060043, **EDN**: FENHOU

В линеаризованной теории гидродинамической устойчивости хорошо известна теорема Сквайра [1], позволяющая сводить трёхмерную картину возмущений, налагаемую на стационарное сдвиговое течение ньютоновской вязкой жидкости в плоском слое в случае условий прилипания на обеих границах, к двумерной в плоскости этого течения. Условия данной теоремы весьма жёстки и нарушение хотя бы одного из них делает общее утверждение неверным, причём известны соответствующие контрпримеры, в том числе и экспериментальные [2–4]. Если основное течение происходит не в плоском, а в цилиндрическом слое, то даже в стационарном случае при простом сдвиге ($r\theta$-кольцевом или rz-осевом) переход к возмущениям требует рассмотрение наиболее общей $r\theta z$-картины.

Целью работы является получение достаточных интегральных, или энергетических, оценок устойчивости комбинированного сдвигового течения, т. е. комбинации $r\theta$- и rz-сдвигов, вообще говоря, нестационарных в бесконечном по простиранию цилиндрическом слое.

1. НЕВОЗМУЩЁННОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ И ЕГО ПАРАМЕТРЫ

Пусть течение ньютоновской вязкой жидкости с постоянными плотностью ρ и динамической вязкостью μ реализуется в цилиндрическом слое Ω:

$$\Omega = \{0 < a < r < b,\ \ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty\}, \tag{1.1}$$

где (r, θ, z) — цилиндрическая система координат, связанная с осью слоя. На внутренней $r = a$ и внешней $r = b$ граничных поверхностях при $t > 0$ заданы скорости с физическими компонентами (v_r, v_θ, v_z):

$$\begin{aligned} &r = a, \ \ t > 0: \quad v_r = 0, \quad v_\theta = V_{\theta a}(t), \quad v_z = V_{za}(t), \\ &r = b, \ \ t > 0: \quad v_r = 0, \quad v_\theta = V_{\theta b}(t), \quad v_z = V_{zb}(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Выполняются также начальные условия

$$t = 0, \ \ \mathbf{x} \in \Omega: \quad v_r = 0, \quad v_\theta = u_\theta(r), \quad v_z = u_z(r), \tag{1.3}$$

согласующиеся с граничными условиями (1.2):

$$u_\theta(a) = V_{\theta a}(0), \quad u_\theta(b) = V_{\theta b}(0), \quad u_z(a) = V_{za}(0), \quad u_z(b) = V_{zb}(0).$$

Вектор скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, тензор скорости деформаций $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$, давление $p(\mathbf{x}, t)$ и девиатор напряжений $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют в Ω записанным в безындексной форме уравнениям движения с массовыми силами $\mathbf{F}(r, t)$:

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{Div} \mathbf{s} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{1.4}$$

соотношениям Стокса

$$\mathbf{d} = \operatorname{Def} \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2}\left(\operatorname{Grad} \mathbf{v} + (\operatorname{Grad} \mathbf{v})^T\right), \tag{1.5}$$

физически линейным определяющим соотношениям ньютоновской жидкости

$$\mathbf{s} = 2\mu \mathbf{d} \tag{1.6}$$

и условию несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1.7}$$

Поиск решения в Ω при $t > 0$ в виде комбинации двух нестационарных одномерных сдвиговых течений с ненулевыми физическими компонентами v_θ, v_z, $d_{r\theta}$, d_{rz}, p, $s_{r\theta}$ и s_{rz}, зависящими только от r и t, приводит к двум не связанным между собой начально-краевым параболическим задачам для функций $v_\theta(r, t)$ и $v_z(r, t)$. В слое Ω при $t > 0$ эти функции должны удовлетворять уравнениям движения

$$\nu\left(v_{\theta,rr} + \frac{v_{\theta,r}}{r} - \frac{v_\theta}{r^2}\right) + F_\theta = v_{\theta,t}, \tag{1.8}$$

$$\nu\left(v_{z,rr} + \frac{v_{z,r}}{r}\right) + F_z = v_{z,t}, \tag{1.9}$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости, а на цилиндрических поверхностях $r = a$ и $r = b$ и в начальный момент $t = 0$ соответствующим граничным (1.2) и начальным (1.3) условиям. Запятая в индексе означает частное дифференцирование по переменным, стоящим после запятой.

После нахождения поля скоростей ненулевые компоненты тензоров $\mathbf{d}$ и $\mathbf{s}$, а также давление p находятся из соотношений

$$\begin{gathered} d_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(v_{\theta,r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \quad d_{rz} = \frac{1}{2} v_{z,r}, \quad p = \rho \int \left(\frac{v_\theta^2}{r} + F_r\right) dr, \\ s_{r\theta} = \mu\left(v_{\theta,r} - \frac{v_\theta}{r}\right), \quad s_{rz} = \mu v_{z,r}, \end{gathered} \tag{1.10}$$

где давление определяется с точностью до произвольной аддитивной функции времени.

В дальнейшем будем помечать параметры описанного комбинированного сдвигового течения верхним индексом “$\circ$” и считать это течение невозмущённым, или основным. Кроме того обозначим

$$D_{r\theta}(t) = \sup_{a<r<b} |d_{r\theta}(r, t)|, \quad D_{rz}(t) = \sup_{a<r<b} |d_{rz}(r, t)|. \tag{1.11}$$

2. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЗАДАЧА В ВОЗМУЩЕНИЯХ

Наложим при $t \geqslant 0$ на рассмотренное выше течение трёхмерную картину малых возмущений, так что возмущённое течение будет характеризоваться величинами $\mathbf{v}^\circ(r,t) + \delta\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$; $\mathbf{d}^\circ(r,t) + \delta\mathbf{d}(\mathbf{x},t)$; $p^\circ(r,t) + \delta p(\mathbf{x},t)$; $\mathbf{s}^\circ(r,t) + \delta\mathbf{s}(\mathbf{x},t)$. Вариациям не подвержены: а) границы слоя, а следовательно, и сама область (1.1); б) заданные в (1.2) окружная и осевая скорости границ; в) массовые силы.

В терминах малых возмущений дадим постановку линеаризованной начально-краевой задачи, соответствующей задаче (1.2) – (1.7), вблизи основного течения. Изложение удобно вести, используя не физические компоненты векторов и тензоров, как это сделано, например, в [5], а их ко- и контравариантные компоненты в криволинейной системе координат q^i, где $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$ [6]. Напомним, что ненулевые символы Кристоффеля второго рода, коэффициенты Ламе и компоненты диагональной фундаментальной матрицы в этой системе имеют вид

$$\begin{gathered}\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^1_{22} = -r; \quad H_1 = H_3 = 1, \quad H_2 = r;\\ g_{11} = g_{33} = g^{11} = g^{33} = 1, \quad g_{22} = r^2, \ \ g^{22} = \frac{1}{r^2}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Замкнутая в Ω система уравнений (1.4) – (1.7) после линеаризации в индексной форме запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q^k}(-r\,\delta p\, g^{jk} + r\,\delta s^{jk}) - (\delta p\, g^{jk} - \delta s^{jk})\Gamma^i_{jk} =\\ = \rho\left(\frac{\partial \delta v^i}{\partial t} + v^{\circ j}\frac{\partial \delta v^i}{\partial q^j} + \frac{\partial v^{\circ i}}{\partial q^j}\delta v^j + (v^{\circ j}\delta v^k + v^{\circ k}\delta v^j)\Gamma^i_{jk}\right),\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\delta d_{kl} = \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl}\left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial q^j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial q^i} - 2\Gamma^m_{ij}\delta v_m\right), \tag{2.3}$$

$$\delta s^{ij} = 2\mu\,\delta d^{ij}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial (r\,\delta v^i)}{\partial q^i} = 0. \tag{2.5}$$

Граничные и начальные условия для системы (2.2) – (2.5) имеют вид

$$r = a, \ \ t > 0: \quad \delta v^i = 0; \quad r = b, \ \ t > 0: \quad \delta v^i = 0, \tag{2.6}$$

$$t = 0, \ \ \mathbf{x} \in \Omega: \quad \delta v^i = \delta v^i(\mathbf{x}, 0). \tag{2.7}$$

Начальные возмущения скоростей $\delta v^i(\mathbf{x},0)$, естественно, согласованные с однородными граничными условиями (2.6), являются заданными.

Поскольку в соотношения (2.2) – (2.7) не входят координаты q^2 и q^3 (компоненты $v^{\circ i}$ зависят только от q^1 и t), представим все величины с символом δ в виде отдельных гармоник

$$\begin{aligned}\delta v^j(\mathbf{x},t) &= v^j(q^1,t)\exp(inq^2 + isq^3),\\ \delta d^{jk}(\mathbf{x},t) &= d^{jk}(q^1,t)\exp(inq^2 + isq^3),\\ \delta p(\mathbf{x},t) &= p(q^1,t)\exp(inq^2 + isq^3),\\ \delta s^{jk}(\mathbf{x},t) &= s^{jk}(q^1,t)\exp(inq^2 + isq^3),\end{aligned} \tag{2.8}$$

где n и s — волновые числа в окружном и осевом направлениях; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 \leqslant s \in R$. Осесимметричным возмущениям соответствует значение $n = 0$, а плоским (в плоскостях ортогональных оси слоя Ω) — значение $s = 0$.

Подставим представления (2.8) в (2.2) – (2.7) и получим начально-краевую задачу, линеаризованную относительно функций v^j, d^{jk}, p, s^{jk} двух переменных q^1 и t. Эти функции, вообще говоря, комплекснозначны, поэтому будем с определённой долей условности называть их амплитудами вариаций. Волновые числа n и s в получившуюся постановку будут входить как внешние параметры. Из-за громоздкости, вызванной несимметричностью, выписывать в общем виде систему относительно амплитуд, образовавшуюся в результате разделения переменных (2.8), здесь не будем.

3. АНАЛИЗ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В H_2

Умножим обе части уравнений (2.2), записанных относительно амплитуд, на $f(r)\bar{v}_i$, где $\bar{v}_i(q^1, t)$ — комплексно сопряжённые ковариантные компоненты возмущений скорости, $f(r)$ — некоторая вещественнозначная весовая функция. Просуммируем по повторяющемуся индексу i от 1 до 3, тем самым получая одно скалярное соотношение, проинтегрируем его по r от a до b и удержим действительные части образовавшихся квадратичных функционалов, которые будут зависеть только от времени.

Вид функции $f(r)$ выберем из тех соображений, чтобы слагаемые с давлением $\delta p(\mathbf{x}, t)$ после указанных процедур в сумме стали равными нулю. Выделяя эти слагаемые из (2.2) и преобразуя их, запишем

$$
\begin{gathered}
-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q^k}(-r\,\delta p\, g^{jk} + \delta p\, g^{jk}\Gamma^i_{jk}\right) \implies \\
-\int_a^b \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(pr)\bar{v}_1 + \frac{in}{r^2}\,p\bar{v}_2 + isp\bar{v}_3 - \frac{1}{r}\,p\bar{v}_1\right) f(r)\,dr = \\
= \int_a^b p\left[\frac{\partial}{\partial r}(f(r)\bar{v}_r) - \frac{in}{r}f(r)\bar{v}_\theta - isf(r)\bar{v}_z\right] dr.
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Выражение в квадратных скобках в (3.1) в силу условия несжимаемости (2.5) равно нулю, если положить $f(r) = r$, что и сделаем далее.

Преобразуем каждое из слагаемых в правой части (2.2):

$$
\begin{gathered}
\bullet\quad \rho\frac{\partial \delta v^i}{\partial t} \implies \rho\int_a^b r\left(\bar{v}_i\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)_* dr = \rho\int_a^b r\frac{\partial}{\partial t}(v^i\bar{v}_i)_* dr - \\
-\rho\int_a^b r\left(v^i\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}\right)_* dr = \rho\frac{d}{dt}\int_a^b r|\mathbf{v}|^2 dr - \rho\int_a^b r\left(v^i\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t}\right)_* dr,
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

где знаки $*$ и $**$ в нижнем индексе означают соответственно действительную и мнимую части выражения. Из (3.2) следует, что

$$
\rho\int_a^b r\left(\bar{v}_i\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)_* dr = \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\int_a^b r|\mathbf{v}|^2 dr \equiv \frac{\rho}{2}\frac{dI^2}{dt}; \tag{3.3}
$$

$$
\bullet\quad \rho v^{\circ j}\frac{\partial \delta v^i}{\partial q^j} \implies \rho\int_a^b (inv^{\circ 2} + isv^{\circ 3})_* r|\mathbf{v}|^2 dr = 0; \tag{3.4}
$$

$$
\begin{gathered}
\bullet\quad \rho\frac{\partial v^{\circ i}}{\partial q^j}\delta v^j \implies \rho\int_a^b r\left(v^1\left(\frac{\partial v^{\circ 2}}{\partial r}\bar{v}_2 + \frac{\partial v^{\circ 3}}{\partial r}\bar{v}_3\right)\right)_* dr = \\
= \rho\int_a^b r\left(v_r\left(r\bar{v}_\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v^\circ_\theta}{r}\right) + \bar{v}_z\frac{\partial v^\circ_z}{\partial r}\right)\right)_* dr = 2\rho\int_a^b r\big(v_r(d^\circ_{r\theta}\bar{v}_\theta + d^\circ_{rz}\bar{v}_z)\big)_* dr,
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

где скорости деформаций $d^\circ_{r\theta}$ и d°_{rz} основного движения связаны со скоростями v°_θ и v°_z соотношениями Стокса (1.10);

$$
\begin{gathered}
\bullet\quad \rho(v^{\circ j}\delta v^k + v^{\circ k}\delta v^j)\Gamma^i_{jk} \implies \rho\int_a^b r(v^{\circ j}v^k\bar{v}_i + v^{\circ k}v^j\bar{v}_i)_*\Gamma^i_{jk}\,dr = \\
= 2\rho\int_a^b v^{\circ 2}(v^1\bar{v}_2 - r^2v^2\bar{v}_1)_*\,dr = 2\rho\int_a^b v^\circ_\theta(v_r\bar{v}_\theta - v_\theta\bar{v}_r)_*\,dr = 0.
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

Преобразуем теперь каждое из слагаемых в левой части (2.2), содержащих вариации девиатор напряжений:

$$\bullet\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q^k}(r\,\delta s^{ik}) \implies \int_a^b \left[\bar v_j \frac{\partial}{\partial r}(rs^{j1})\right]_* dr + \int_a^b r\left[i\bar v_j(ns^{j2}+ss^{j3})\right]_* dr =$$

$$= 2\mu\int_a^b r\left(-\frac{\partial \bar v_j}{\partial r}d^{j1} + in\bar v_j d^{j2} + is\bar v_j d^{j3}\right)_* dr = -\mu\int_a^b\left(2r\frac{\partial \bar v_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\right.$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar v_\theta)}{\partial r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} + r\frac{\partial \bar v_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{in}{r}v_r\frac{\partial(r\bar v_\theta)}{\partial r} - \frac{2v_\theta}{r}\frac{\partial(r\bar v_\theta)}{\partial r}+ \tag{3.7}$$

$$\left.+isrv_r\frac{\partial \bar v_z}{\partial r}\right)_* dr - \mu n^2\int_a^b \frac{1}{r}\left(|v_r|^2 + 2|v_\theta|^2 + |v_z|^2\right)dr-$$

$$-\mu s^2\int_a^b r\left(|v_r|^2 + |v_\theta|^2 + 2|v_z|^2\right)dr - 2\mu ns\int_a^b (v_\theta\bar v_z)_* dr+$$

$$+\mu n\int_a^b\left[i\left(\bar v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\bar v_r v_\theta + \frac{2}{r}\bar v_\theta v_r\right)\right]_* dr + \mu s\int_a^b\left(ir\bar v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_* dr,$$

где приняты во внимание определяющие соотношения (2.4) и выражения (2.3) контравариантных компонент скоростей деформаций через ковариантные компоненты вектора скорости;

$$\bullet\quad \delta s^{jk}\Gamma^i_{jk} \implies \int_a^b r(\bar v_i s^{jk}\Gamma^i_{jk})_* dr = 2\mu\int_a^b (2\bar v_2 d^{12} - r^2\bar v_1 d^{22})_* dr =$$

$$= 2\mu\int_a^b \frac{1}{r}\left[\bar v_\theta\left(inv_r + \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - 2v_\theta\right)\right]_* dr - 2\mu\int_a^b \frac{1}{r}[\bar v_r(v_r + inv_\theta)]_* dr = \tag{3.8}$$

$$= -2\mu\int_a^b \frac{1}{r}\left(|v_\theta|^2 + |v_r|^2\right) dr - \frac{2}{\mu}\int_a^b \frac{n}{r}[i(\bar v_r v_\theta - v_r\bar v_\theta)]_* dr.$$

Здесь учтено то, что

$$\int_a^b\left(\bar v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_* dr = \int_a^b\left[\frac{\partial|v_\theta|^2}{\partial r} - \left(v_\theta\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial r}\right)_*\right] dr = -\int_a^b\left(\bar v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_* dr, \tag{3.9}$$

а следовательно, интегралы в правой и левой частях цепочки (3.9) равны нулю.

Пусть функции $\sqrt{r}v_r$, $\sqrt{r}v_\theta$ и $\sqrt{r}v_z$ — элементы комплекснозначного гильбертова пространства $H_2^0(a,b)$ с нормами

$$I_r = \left(\int_a^b r|v_r|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}},\quad I_\theta = \left(\int_a^b r|v_\theta|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}},\quad I_z = \left(\int_a^b r|v_z|^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.10}$$

причём согласно обозначению в (3.3)

$$I^2 = I_r^2 + I_\theta^2 + I_z^2. \tag{3.11}$$

Будем оценивать сверху входящую в (3.3) производную по времени квадратичного функционала (3.11). Воспользуемся двумя группами неравенств в $H_2^0(a,b)$ — неравенствами Коши – Буняковского, оценивающими сверху скалярное произведение с некоторым весом $F(r)$, например,

$$\int_a^b rF(r)(v_r\bar{v}_z)_*\,dr \leqslant \sup_{a<r<b}|F(r)|I_rI_z, \tag{3.12}$$

а также неравенствами Фридрихса [7], дающими оценки снизу трёх интегралов, входящих в (3.7):

$$\begin{gathered}\int_a^b r\left(\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_* dr = \int_a^b r\left[\left(\frac{\partial v_{r*}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{r**}}{\partial r}\right)^2\right] dr \geqslant \\ \geqslant \lambda^2\int_a^b r(v_{r*}^2 + v_{r**}^2)\,dr = \lambda^2 I_r^2,\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}\int_a^b \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right)_* dr = \int_a^b \left(r\frac{\partial\bar{v}_\theta}{\partial r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{|v_\theta|^2}{r}\right)_* dr \geqslant \\ \geqslant \int_a^b \left(\lambda^2 r + \frac{1}{r}\right)|v_\theta|^2\,dr = \lambda^2 I_\theta^2 + \int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r}\,dr,\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\int_a^b r\left(\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_* dr = \int_a^b r\left[\left(\frac{\partial v_{z*}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{z**}}{\partial r}\right)^2\right] dr \geqslant \\ \geqslant \lambda^2\int_a^b r(v_{z*}^2 + v_{z**}^2)\,dr = \lambda^2 I_z^2,\end{gathered} \tag{3.15}$$

где λ^2 — наименьшее положительное собственное число задачи на собственные значения

$$(r\varphi')' + \lambda^2 r\varphi = 0, \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0, \quad \varphi \in R, \tag{3.16}$$

обладающее минимизирующим свойством [8, с. 260, 351]

$$\int_a^b r\varphi'^2\,dr \geqslant \lambda^2\int_a^b r\varphi^2\,dr. \tag{3.17}$$

Параметр λ, естественно, зависит от a и b.

Для дальнейших выкладок, принимая во внимание условие несжимаемости, преобразуем ещё ряд интегралов, участвующих в цепочке (3.7):

- $$-\int_a^b \left(\frac{in}{r}v_r\frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r}\right)_* dr = n^2\int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r}\,dr - 2n\int_a^b \frac{1}{r}(iv_r\bar{v}_\theta)_*\,dr + ns\int_a^b (v_z\bar{v}_\theta)_*\,dr, \tag{3.18}$$

- $$2\int_a^b \left(\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial(r\bar{v}_\theta)}{\partial r}\right)_* dr = 2\int_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r}\,dr, \tag{3.19}$$

- $$\int_a^b \left(isrv_r\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial r}\right)_* dr = s^2\int_a^b r|v_z|^2\,dr + ns\int_a^b (v_\theta\bar{v}_z)_*\,dr, \tag{3.20}$$

- $$\int\limits_a^b \left(in\bar{v}_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_* dr = -n^2\int\limits_a^b \frac{|v_\theta|^2}{r}\,dr + n\int\limits_a^b \frac{1}{r}(i\bar{v}_r v_\theta)_*\,dr - ns\int\limits_a^b (v_\theta\bar{v}_z)_*\,dr, \tag{3.21}$$

- $$\int\limits_a^b \left(isr\bar{v}_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)_* dr = -s^2\int\limits_a^b r|v_z|^2\,dr - ns\int\limits_a^b (\bar{v}_\theta v_z)_*\,dr. \tag{3.22}$$

Собирая вместе все выведенные ранее оценки и опуская промежуточные выкладки, запишем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{dI^2}{dt} \leqslant -\nu\int\limits_a^b r\left[\left(2\lambda^2+\frac{n^2+2}{r^2}+s^2\right)|v_r|^2+\left(\lambda^2+\frac{2n^2+1}{r^2}+s^2\right)|v_\theta^2|+\right.\\ \left.+\left(\lambda^2+\frac{n^2}{r^2}+2s^2\right)|v_z|^2\right]dr+2\left(\sup_{a<r<b}\left|\frac{in}{r}\nu-d_{r\theta}^\circ\right|+\sup_{a<r<b}\left|\frac{in}{r}\nu\right|\right)I_rI_\theta+\\ +2\sup_{a<r<b}|d_{rz}^\circ|I_rI_z+2\sup_{a<r<b}\left|\frac{ns}{r}\nu\right|I_\theta I_z.\end{gathered} \tag{3.23}$$

Так как, например, $I_rI_\theta \leqslant (I_r^2+I_\theta^2)/2$, то с учётом обозначений (1.11) из (3.23) получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{dI^2}{dt} \leqslant Q_1(t)I_r^2+Q_2(t)I_\theta^2+Q_3(t)I_z^2,\\ Q_1(t)=D_{r\theta}(t)+D_{rz}(t)+\nu\left(\frac{2n}{a^2}-2\lambda^2-\frac{n^2+2}{b^2}-s^2\right),\\ Q_2(t)=D_{r\theta}(t)+\nu\left(\frac{2n}{a^2}+\frac{2ns}{a}-\lambda^2-\frac{2n^2+1}{b^2}-s^2\right),\\ Q_3(t)=D_{r\theta}(t)+\nu\left(\frac{2ns}{a}-\lambda^2-\frac{n^2}{b^2}-2s^2\right).\end{gathered} \tag{3.24}$$

Пусть $Q(t) = \max\{Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)\}$. Тогда, продолжая (3.24), придём к дифференциальному неравенству для ключевой величины $I^2(t)$:

$$\frac{dI^2}{dt} \leqslant 2Q(t)I^2(t), \tag{3.25}$$

откуда нетрудно вывести итоговую оценку

$$I^2(t) \leqslant I^2(0)\exp\left(2\int\limits_0^t Q(\tau)\,d\tau\right), \tag{3.26}$$

фактически представляющую собой неравенство типа Гронуолла [9]. Множитель $I^2(0)$ зависит только от распределения начальных возмущений в Ω и известен в силу начальных условий (2.7).

4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ

Описанная в предыдущем пункте процедура по существу является развитием метода интегральных соотношений применительно к нестационарному основному течению. Этот метод (см. обзоры в [10, 11]) позволяет получать довольно общие, в основном достаточные, оценки устойчивости, в частности, нижние оценки критических чисел Рейнольдса. Первыми классическими результатами на этом пути были теорема Рэлея о точке перегиба и теоремы Фьортьофта и Хойланда о полукруге для невязких течений, а также оценки Джозефа – Йи действительных частей собственных чисел в задаче Орра – Зоммерфельда. В случае нестационарного основного движения из-за того, что коэффициенты линеаризованного уравнения в возмущениях явно зависят от времени и отделение множителя типа

$e^{\alpha t}$ со спектральным параметром $\alpha \in C$ не приводит к задаче на собственные значения, техника применения метода несколько усложняется [12–14].

Неравенство (3.26) можно рассматривать как интегральную в смысле нормы (3.10), или энергетическую с весом, верхнюю оценку развития во времени вплоть до $t \to \infty$ кинематических возмущений, наложенных при $t = 0$ на нестационарное комбинированное сдвиговое течение в цилиндрическом слое (1.1). Характер развития этих возмущений полностью определяется поведением функции $Q(t)$ как при конечных $t > 0$, так и при $t \to \infty$.

Достаточными условиями того, чтобы основное течение было: а) устойчиво по Ляпунову по мере пространства H_2^0 либо б) асимптотически устойчиво по этой же мере, являются требования того, чтобы соответственно а) функция $\int_0^t Q(\tau)\,d\tau$ была ограничена при $t > 0$, и б) эта же функция была не только ограничена при $t > 0$, но и стремилась к нулю при $t \to \infty$.

Рост слагаемых $D_{r\theta}(t)$ и $D_{rz}(t)$ в (3.24), т. е. увеличение максимальных по r скоростей сдвига основного течения дестабилизирует картину возмущений во времени, тогда как уменьшение в отрицательную область всех трёх выражений в скобках при ν в (3.24), наоборот, стабилизирует. Заметим, что три упомянутые выражения не зависят от времени, но в них входят параметры возмущений n и s. Таким образом, можно найти комбинацию номера n^* гармоники возмущения по углу θ и волнового числа s^* возмущения по оси z, при которых функция $Q(t)$ максимальна как функция двух переменных n и s, т. е. картина возмущённого движения наименее устойчива. Поскольку в реальном возмущении присутствуют все гармоники и волновые числа, то в достаточные оценки устойчивости будут входить именно параметры n^* и s^*. Тот факт, что возможны ситуации, когда $n^* \neq 0$ и $s^* \neq 0$, подтверждает необходимость учёта при постановке задачи устойчивости осевых возмущений, даже если $v_z^\circ \equiv 0$, и кольцевых возмущений, даже если $v_\theta^\circ \equiv 0$. Пара параметров (n^*, s^*), а также собственное значение λ^2 задачи (3.16) как функции радиусов a и b должны быть найдены в результате дополнительного анализа.

В случае, когда массовые силы и скорости границ слоя не зависят от времени, основное течение стационарно. Максимальные скорости деформаций $D_{r\theta}$ и D_{rz}, входящие в (3.24), а следовательно, и Q_1, Q_2, Q_3 и Q становятся постоянными. Неравенство (3.26) приобретает вид

$$I^2(t) \leqslant I^2(0)\, e^{2Qt}. \tag{4.1}$$

Если $Q < 0$, то имеет место асимптотическая устойчивость с экспоненциальным характером убывания начальных возмущений. Случай $Q = 0$ можно трактовать как устойчивость по Ляпунову по оговоренной ранее мере. Информативность же неравенства (5.1) при $Q > 0$ невелика и состоит лишь в том, что оно даёт верхнюю (также экспоненциальную) оценку возможного роста возмущений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с. = *Betchov R., Criminale W.O.* Stability of Parallel Flows. N.-Y, London: Acad. Press, 1967.

2. *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с. = *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Camdridge University Press, 2002.

3. *Coles D.* Transition in circular Couette flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. No. 3. P. 385–425.

4. *Pascal J.P., Rasmussen H.* Stability of power law fluid flow between rotating cylinders // Dynamics and Stability of Syst. 1995. V. 10. No. 1. P. 65–93.

5. *Георгиевский Д.В.* Интегральный анализ трёхмерной картины возмущений течения Пуазейля в трубе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 4. С. 40-45.

6. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М.* Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабонеоднородных вязких жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 56–67.

7. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 572 с. = *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Sciences and Engineering. Dordrect – Boston: Reidel, 1980.

8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 476 с.

9. *Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наукова думка, 1989. 270 с.

10. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.

11. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. 2-ое изд. М.: URSS, 2020. 560 с.

12. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 798–807.

13. *Георгиевский Д.В.* Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1366–1375.

14. *Georgievskii D.V., Putkaradze V.G.* Energy-Based Stability Estimates for Incompressible Media with Tensor-Nonlinear Constitutive Relations//Cont. Mech. and Thermodyn. 2023. V. 35. No. 4. P. 1403–1415.

SUFFICIENT ENERGY ESTIMATES OF STABILITY OF UNSTEADY COMBINED SHEAR FLOWS IN A CYLINDRICAL LAYER

D. V. Georgievskii[a, b, *]

[a] *Moscow State University, Moscow, Russia*
[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The time evolution of the three-dimensional pattern of initial disturbances imposed on an unsteady flow, which is a combination of one-dimensional $r\theta$- and rz-shears of Newtonian viscous fluid in a cylindrical layer infinite in length, is studied. The annular and axial velocities of both cylindrical boundaries, which do not vary in the disturbed motion, are specified. The formulation of the linearized problem in terms of variations in the velocities, the strain rates, the pressure, and the stress deviator is given. To analyze this problem, the method of integral relations is developed. The method makes it possible to obtain sufficient estimates of the development of disturbances in the Hilbert space H2, in particular, Lyapunov stability and asymptotic stability. These estimates include both the kinematic parameters of main flow and harmonics of the annular disturbances and wavenumbers of axial disturbances. For the steady-state main flow in the layer, exponential estimates of stability take place.

Keywords: Newtonian viscous fluid, cylindrical layer, shear flow, disturbance, linearization, stability estimates, quadratic functional, variational inequalities, exponential stability