

УДК 532.517.3

РАЗВИТИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ СТРУЕ

© 2024 г. Д. А. Ашуров^а, Н. В. Никитин^б

МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

^а*e-mail*: ashurovda@my.msu.ru

^б*e-mail*: nvnikitin@mail.ru

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

После доработки 11.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Численно исследуется немодальное развитие стационарных трёхмерных возмущений в круглой струе при $Re=2850$. Воспроизводятся условия лабораторного эксперимента, выполненного ранее в НИИ механики МГУ. Разработан метод расчёта оптимальных возмущений в условиях развивающегося вниз по потоку основного течения. Рассчитаны возмущения, отвечающие разным азимутальным числам. Определены форма, характер развития и степень роста оптимальных возмущений.

Ключевые слова: затопленная струя, уравнения Навье–Стокса, гидродинамическая неустойчивость, немодальный рост, оптимальные возмущения.

DOI: 10.31857/S1024708424040071, **EDN**: OYMI3C

Широкое распространение струйных течений в природных системах и технических устройствах стимулирует интерес инженеров и исследователей к изучению различных явлений, связанных с их развитием. Турбулизация струй существенно меняет, например, интенсивность тепло- и массообмена с окружающей средой, поэтому изучение деталей ламинарно-турбулентного перехода в струях чрезвычайно актуально, в частности, с целью поиска средств управления переходом для получения оптимальных решений и повышения эффективности технологических процессов. Ламинарные струйные течения теряют устойчивость уже при очень низких числах Рейнольдса $Re \sim 10^1 - 10^2$ [1–3]. При больших $Re \sim 10^3 - 10^4$ переход к турбулентности в круглых струях происходит, как правило, в непосредственной близости от среза сопла, в пределах расстояния $1D$ (D – диаметр сопла). Несколько лет назад в стенах НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова было спроектировано и изготовлено компактное устройство создания круглых воздушных струй, обеспечивающее сохранение ламинарного течения при $Re = U_b R / \nu < 6000$ (U_b – средняя скорость во входном потоке, $R = D/2$, ν – кинематическая вязкость) на расстояниях до $\sim 6D$ при $D = 0.12$ м [4,5]. При этом размер устройства составляет всего около $1.5D$.

Процесс ламинарно-турбулентного перехода в струях существенно зависит как от формы начального профиля средней скорости, так и от состава и интенсивности возмущений на срезе сопла. Основным механизмом турбулизации является неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, возникающая в окрестности точек перегиба в профиле скорости. В последние годы определённый интерес исследователей привлекает также альтернативный, так называемый немодальный механизм роста возмущений [6,7]. Математически немодальный механизм представляет собой временное увеличение амплитуды возмущения, состоящего из комбинации затухающих неортогональных составляющих. К примеру, сумма двух исходно равных по длине, но противоположно направленных в пространстве векторов, затухающих по закону e^{-t} и e^{-2t} (t – время), сначала увеличивается по модулю от 0 до $1/4$, и только после начинает уменьшаться. Отметим, что так же, как и классический модальный рост возмущений, отвечающий линейной неустойчивости течения, немодальный механизм временного роста является линейным. Оператор линеаризованных уравнений Навье–Стокса, соответствующий задаче устойчивости течений с градиентом скорости, является несамосопряжённым, а значит, его собственные векторы (моды) неортогональны. Следовательно, наряду с растущими модами, отвечающими классическому модальному усилению возмущений, могут существовать возмущения, растущие немодальным образом. И хотя эти возмущения, в отличие от экспоненциально растущих собственных мод, в конечном итоге затухают, их начальный рост может быть более интенсивным и приводить к более раннему проявлению нелинейных эффектов.

Можно поставить задачу о поиске формы начального возмущения, приводящей к максимальному росту. Такие возмущения называются оптимальными. Структура и характеристики оптимальных возмущений определены для большинства классических сдвиговых течений. Особенно подробные исследования были выполнены для пристенных течений, в которых механизм модального роста (волны Толмина–Шлихтинга) либо слаб (течение Блазиуса, плоское течение Пуазейля), либо отсутствует вовсе (плоское течение Куэтта, течение Пуазейля в трубе) [8–12]. Считалось, что в струйных течениях, в которых механизм неустойчивости Кельвина–Гельмгольца приводит к интенсивному росту возмущений, механизм немодального роста не имеет потенциала существенного влияния на процессы ламинарно-турбулентного перехода. В, однако, было теоретически показано, что в круглых струях при $Re = 10^3$ интенсивность малых возмущений при учёте немодального механизма роста может в десятки раз превосходить интенсивность наиболее быстро растущей неустойчивой моды. Аналогичные выводы были сделаны в последующих численных исследованиях [14, 15]. Отметим также другие работы [16, 17], в которых изучались вопросы немодального развития возмущений в сдвиговых течениях. В [18] экспериментально показано, что при внесении в струю стационарного неосесимметричного возмущения ламинарно-турбулентный переход может происходить, минуя стадию развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, что косвенно свидетельствует о важности немодального механизма роста возмущений. В [19] проведено численное исследование устойчивости двумерных распределений скорости в струе, деформированной оптимальными возмущениями на разных стадиях (включая нелинейный этап) их развития. Обнаружено, что во многих случаях наиболее неустойчивое возмущение в деформированном течении имеет меньший инкремент роста, чем в исходном осесимметричном течении. Последнее наводит на мысль, что внесение в поток возмущений, развивающихся немодальным образом, может не только ускорять рост возмущений и приводить к более раннему переходу, но и наоборот, сдерживать проявление неустойчивости и, вероятно, затягивать переход к турбулентности.

Отметим, что во всех цитированных работах по численному исследованию развития возмущений в струях основное течение считалось параллельным, то есть не изменялось вниз по потоку. В настоящей работе впервые предложен алгоритм, а также проведено изучение немодального развития и поиск оптимальных стационарных возмущений в условиях, наиболее приближенных к экспериментальным условиям [4, 5, 18] с учетом развития потока в пространстве.

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача об истечении вязкой несжимаемой жидкости в полупространство $\{x > 0\}$ из круглого отверстия радиусом R (срез сопла) в плоскости $\{x = 0\}$. Свойства окружающей среды совпадают со свойствами вытекающей струи. Нестационарное поле скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ (t – время, \mathbf{x} – точка пространства) отыскивается путём численного решения уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь p – кинематическое давление, ν – вязкость жидкости.

Задача решается в цилиндрической системе координат $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$ в цилиндрической расчётной области $\{0 < x < X_m, r < R_m\}$. Радиус расчётной области R_m значительно превышает радиус сопла. На срезе сопла задаётся вообще говоря нестационарное поле скорости (входные граничные условия): $\mathbf{u}(x = 0, r \leq R) = \mathbf{U}_0(t, r, \theta)$. На остальной площади входного сечения $\{x = 0, r > R\}$ и на цилиндрической границе расчётной области $\{x = 0, r = R_m\}$ ставятся условия непротекания и свободного проскальзывания. На выходной границе $\{x = X_m\}$ задаются мягкие граничные условия $\partial \mathbf{u} / \partial x = 0$. Цель работы состоит в исследовании поведения струи на начальном участке длиной порядка $20R$; для исключения влияния искусственных выходных условий на результаты расчётов в интересующей области длина расчётной области X_m выбирается существенно превышающей этот размер.

Для численного решения задачи применяется универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса [20], использующий конечно-разностный метод пространственной дискретизации в направлениях x и r и полуявную схему интегрирования по времени. В продольном направлении используется равномерная расчётная сетка, а в радиальном – неравномерная, с экспоненциальным ростом шага сетки при $r > R$. Для представления искомым функций по угловой координате используются тригонометрические ряды Фурье.

2. ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

В настоящей работе приводятся результаты исследований, соответствующих условиям эксперимента [4, 5] при $Re = 2850$ (в упомянутых работах число Рейнольдса вычисляется не через радиус, а через диаметр сопла и принимает поэтому вдвое большие значения). Характерной особенностью профиля скорости на срезе сопла $U_0(r)$, реализующегося при этом Re , является наличие трёх точек перегиба. Первая точка перегиба расположена в районе $r = 0.5$, а пара других – в районе $r = 0.8 - 0.9$. Здесь и далее все величины представляются в безразмерном виде. В качестве масштабов берутся радиус сопла R и средняя скорость течения U_b . Рассматриваемой форме профиля скорости отвечают две моды неустойчивых возмущений, развивающихся по существенно различающимся законам. Результаты расчётов основного течения и его устойчивости представлены в [21].

Для расчёта основного течения $\mathbf{u} = \mathbf{U} = (U(x, r), V(x, r), 0)$ уравнения (1.1) решаются с осесимметричным стационарным условием на входе $\mathbf{u}(x = 0) = (U_0(r), 0, 0)$ и начальным условием $\mathbf{u}(x > 0) = \mathbf{u}(x = 0)$. Задача интегрируется по времени до установления стационарного решения. Скорость на оси струи при рассматриваемом числе Рейнольдса претерпевает лишь незначительные изменения, падение при $x = 40$ составляет всего около 1%. Основная деформация профиля продольной компоненты наблюдается в периферийной области $r > 0.85$. Внешние точки перегиба, наблюдающиеся во входном течении, пропадают уже при $x \approx 7.5$. Соответствующие обобщённые точки перегиба, определяемые из условия $(U'(r)/r)' = 0$ (штрих обозначает производную) и ответственные за возникновение неустойчивости в осесимметричных течениях, пропадают ещё раньше, при $x \approx 3.75$. Величина радиальной компоненты скорости на всём протяжении струи остаётся на три порядка меньше продольной. В каждом сечении x , радиальная скорость положительна в области ядра струи, $r < 1$, что отражает факт расширения струи. Во внешней области радиальная компонента отрицательна, что соответствует увлечению жидкости из окружающего пространства. Этот эффект максимален вблизи входного сечения и ослабевает по мере удаления от него.

При исследовании устойчивости основного течения поле скорости в (1.1) представляется в виде суммы основного течения и возмущения: $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$. Возмущения предполагаются малыми, и уравнения линеаризуются относительно \mathbf{u}'

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{u}' + (\mathbf{u}'\nabla)\mathbf{U} = -\nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}', \quad \nabla \mathbf{u}' = 0 \quad (2.1)$$

Здесь p' – возмущение давления. Решение линейных уравнений (2.1) проводилось в двух постановках. В первой, *квaziпараллельной* постановке, изменение основного течения вдоль направления x учитывается лишь параметрически. Другими словами, уравнения решаются для серии основных течений вида $\mathbf{U} = \mathbf{U}(r)$, полученных для разных значений координаты x , а членами, содержащими производные по x от компонент скорости основного течения, пренебрегается. Обоснованием применения квазипараллельного подхода является малая скорость изменения основного течения вдоль продольной координаты по сравнению с изменениями по радиусу. Во второй, более полной *пространственной* постановке, уравнения для возмущений решаются без дополнительных упрощений с определёнными нестационарными граничными условиями на входе. Факт устойчивости или неустойчивости основного течения устанавливается в этом случае по характеру эволюции разных возмущений вниз по потоку. Получено хорошее количественное согласие результатов двух подходов, а также согласие с результатами невязкой теории и экспериментальными данными [4, 22]. Основное качественное свойство устойчивости течения состоит в существовании двух мод растущих возмущений: внутренней и внешней, отвечающих внутренней ($r \approx 0.5$) и паре внешних ($r \approx 0.85$) точек перегиба. Скорость роста возмущений внешней моды на порядок превышает аналогичную скорость роста возмущений внутренней моды. Однако эта неустойчивость пропадает уже на ранних стадиях развития струи вместе с исчезновением внешних точек перегиба в профиле скорости основного течения. Неустойчивость к внутренним модам сохраняется на всём протяжении развития струи.

3. РАСЧЁТ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

При стационарных граничных условиях во входном сечении $x = 0$ стационарные решения (2.1) отыскиваются методом установления, т.е. как предельные при $t \rightarrow \infty$ значения решений нестационарных уравнений с начальными условиями, в которых продольная компонента скорости постоянна вдоль x ,

а поперечные компоненты при $x > 0$ равны нулю. Линейность и однородность системы (2.1) по угловой координате позволяют искать её стационарные решения в виде

$$\mathbf{u}'(x, r, \theta) = (u', v', w')^T = (u(x, r) \cos n\theta, v(x, r) \cos n\theta, w(x, r) \sin n\theta)^T$$

при различных целых значениях азимутального числа n .

Предполагается, что возмущения скорости при $x = 0$ могут иметь ненулевые значения только внутри сопла, то есть при $r < 1$. Пусть этой области отвечают первые M узлов радиальной сетки: $0 < r_1 < \dots < r_M < 1 < r_{M+1} < \dots < r_{Jm} \leq R_m$. При заданном n построим фундаментальную систему из $3M$ численных решений $\{\mathbf{u}'_k(x, r, \theta)\}$, отвечающих граничным условиям

$$\mathbf{u}'_k(0, r_m, \theta) = \begin{cases} (\delta_{k,m} \cos n\theta, 0, 0)^T, & k = 1, \dots, M \\ (0, \delta_{k-M,m} \cos n\theta, 0)^T, & k = M + 1, \dots, 2M \\ (0, 0, \delta_{k-2M,m} \sin n\theta)^T, & k = 2M + 1, \dots, 3M \end{cases}$$

Любое распределение возмущения скорости во входном сечении на заданной радиальной сетке может быть представлено в виде линейной комбинации функций $\mathbf{u}'_k(0, r, \theta)$, а следовательно, любое стационарное решение линейной системы (2.1) при принятых ограничениях на локализацию входного возмущения представляется в виде линейной комбинации фундаментальных решений:

$$\mathbf{u}'(x, r, \theta) = \sum_{k=1}^{3M} C_k \mathbf{u}'_k(x, r, \theta) \quad (3.1)$$

Для кинетической энергии возмущения в сечении x получаем выражение

$$E(x) = \frac{1}{2} \iint |\mathbf{u}'(x, r, \theta)|^2 r dr d\theta = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3M} \sum_{m=1}^{3M} A_{km}(x) C_k C_m \quad (3.2)$$

Здесь интегрирование ведётся по площади поперечного сечения расчётной области. Коэффициенты $A_{km}(x)$ вычисляются по формуле

$$A_{km}(x) = \iint (\mathbf{u}'_k(x, r, \theta) \cdot \mathbf{u}'_m(x, r, \theta)) r dr d\theta$$

Задача отыскания оптимальных возмущений сводится к поиску значений коэффициентов $\{C_k, k = 1, \dots, 3M$ в (3.1), обеспечивающих максимальное значение кинетической энергии возмущений $E(x)$ при фиксированном её значении в начальном сечении, например, $E(0) = 1$. Таким образом, приходим к задаче отыскания условного экстремума $E(x)$ (3.2) как функции $\{C_k\}$. Для решения этой задачи строится функция Лагранжа

$$\Phi(C_1, \dots, C_{3M}, \lambda; x) = E(x) - \lambda(E(0) - 1)$$

Искомые значения коэффициентов C_k находятся из системы уравнений $\partial\Phi/\partial C_k = 0, k = 1, \dots, 3M$, откуда получается задача на собственные значения

$$|A(x) - \lambda A(0)| = 0, A(x) = \{A_{kn}(x)\} \quad (3.3)$$

Матрицы $A(x), A(0)$ положительно определены, что обеспечивает существование $3M$ положительных собственных значений задачи (3.3). Максимальное из собственных значений $\lambda_1 = \lambda_1(x)$ показывает коэффициент усиления (амплификацию) энергии оптимального возмущения $E(x)/E(0)$ при данном x , а соответствующий собственный вектор даёт набор коэффициентов $\{C_k\}$ в (3.1), отвечающий оптимальному возмущению.

Целью данной работы является численное сопровождение экспериментов [4, 5], в которых переход к турбулентности при любых условиях (при рассматриваемом $Re = 2850$ наблюдается не далее расстояния

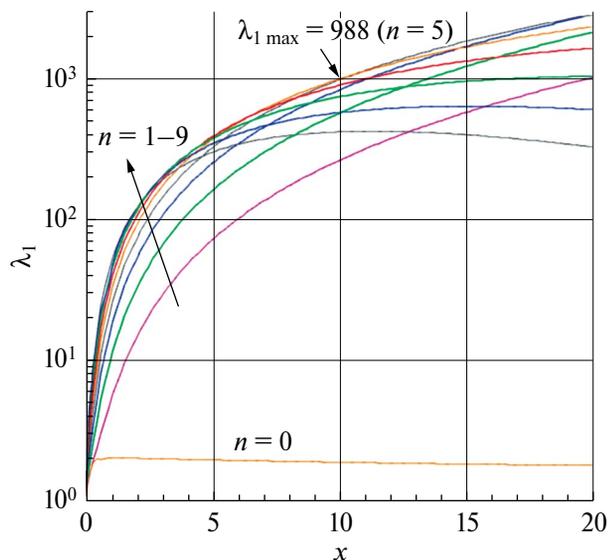


Рис. 1. Коэффициенты усиления оптимальных возмущений $\lambda_1(x) = E(x)/E(0)$.

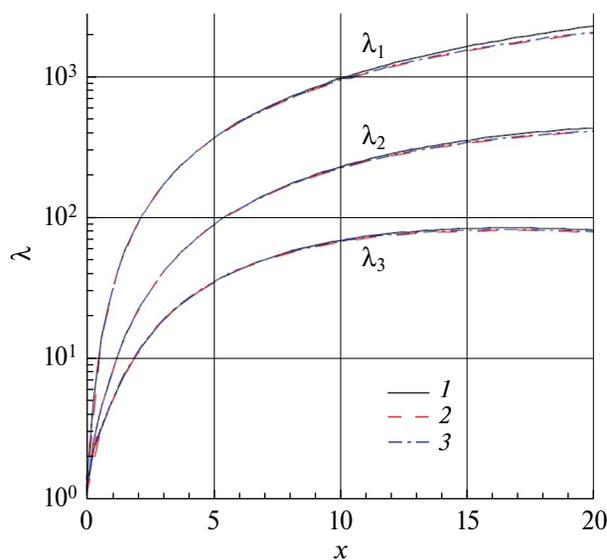


Рис. 2. Коэффициенты усиления оптимальных $\lambda_1(x)$ и субоптимальных $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ возмущений, рассчитанные на разных сетках при $n = 5$: 1 – $X_m = 20$, $R_m = 6$, $I_m \times J_m = 512 \times 64$, $M = 33$; 2 – $X_m = 12$, $R_m = 6$, $I_m \times J_m = 1024 \times 128$, $M = 42$; 3 – $X_m = 20$, $R_m = 6$, $I_m \times J_m = 1024 \times 128$, $M = 67$.

в 5–6 диаметров струи от среза сопла. Поэтому основное внимание уделяется изучению развития возмущений на небольших удалениях. Основная серия расчётов проведена в расчётной области размером X_m , $R_m = 6$ на сетке $I_m \times J_m = 512 \times 64$. При этом на область $r \leq 1$ приходится $M = 33$ узла радиальной сетки. Для оценки точности вычислений часть расчётов продублирована в областях большего размера и на сетках большего объёма.

На рис. 1 показаны результаты расчётов коэффициента усиления $E(x)/E(0) = \lambda_1(x)$ оптимальных возмущений, соответствующих разным значениям азимутального числа от $n = 0$ до $n = 9$. Осесимметричные возмущения не испытывают заметного усиления, едва достигая двухкратного максимального роста. Среди трёхмерных возмущений на начальном этапе наиболее быстро растут возмущения с наибольшими номерами n в исследованном диапазоне, однако на больших расстояниях они уступают возмущениям с меньшими номерами. При $x = 10$ наибольшая амплификация $\lambda_1 \approx 988$ отвечает возмущениям с $n = 5$. Отметим, что немодальное усиление амплитуды возмущений $A(x) = \sqrt{2E(x)}$ на отрезке $x < 10$ достигает 30, что в несколько раз превышает модальный рост возмущений в рассматриваемом течении под действием неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Коэффициенты усиления оптимальных возмущений $\lambda_1(x)$, а также следующих двух субоптимальных возмущений, то есть соответствующих $\lambda_2(x)$ и $\lambda_3(x)$, полученные на трёх разных сетках для $n = 5$, показаны на рис. 2. Вторая сетка отличается от основной удвоенными размерами расчётной области $X_m = 40$, $R_m = 12$ с пропорциональным увеличением числа узлов $I_m \times J_m = 1024 \times 128$. При этом число узлов радиальной сетки на отрезке $[0, 1]$ увеличивается до $M = 42$. На третьей сетке число узлов удвоено в каждом направлении, а размеры расчётной области оставлены без изменения. Вариации сетки показывают отсутствие качественных различий в результатах с незначительными количественными изменениями. Вариации λ_1 при $x = 10$ на разных сетках составляют около 3%, ещё меньшие относительные погрешности наблюдаются для λ_2 и λ_3 . Аналогичная точность результатов расчётов достигается при других значениях n .

Рост энергии оптимального возмущения происходит благодаря действию лифт-ап-эффекта. В начальном возмущении присутствуют в основном только поперечные составляющие вектора скорости. Несмотря на затухание вниз по потоку под действием вязкости, это поперечное движение, действуя на фоне градиента скорости основного течения, успевает произвести значительное возмущение продольной

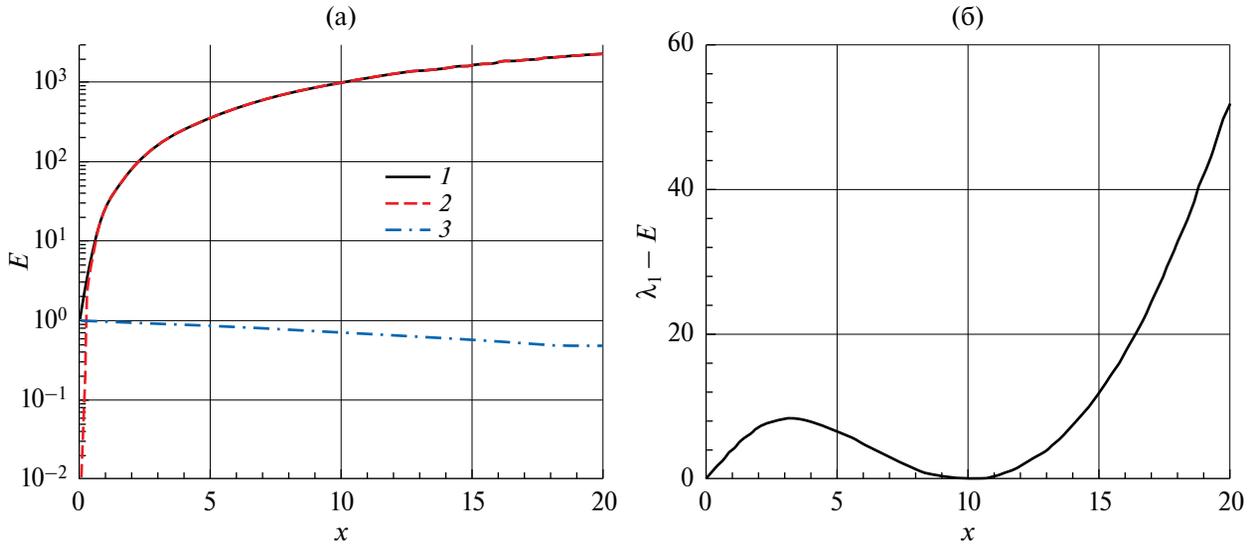


Рис. 3. Развитие оптимального возмущения, отвечающего $x = 10, n = 5$. (а): $1 - E(x), 2 - E_s(x), 3 - E_r(x)$ (3.4); (б): $\lambda_1 - E$.

компоненты. На рис. 3а показано изменение энергии возмущения $E(x)$, а также энергии продольной $E_s(x)$ и поперечной $E_r(x)$ составляющих при развитии оптимального возмущения при $n = 5$, соответствующего $x = 10$. Здесь

$$E_s(x) = \frac{1}{2} \iint u'^2(x, r, \theta) r dr d\theta; \quad E_r(x) = \frac{1}{2} \iint (v'^2(x, r, \theta) + w'^2(x, r, \theta)) r dr d\theta \quad (3.4)$$

В начальном сечении оптимальное возмущение практически полностью состоит из поперечного движения. При нормировке $E(0) = 1$ энергия продольной компоненты составляет менее 10^{-3} . Далее, при $x > 0$ поперечное движение монотонно затухает по близкому к экспоненциальному закону, а продольная компонента набирает силу, приближаясь по энергии к $E(x)$. Рост энергии продольной компоненты возмущения $E_s(x)$ на первых порах близок к квадратичному, а рост амплитуды $A_s(x) = \sqrt{2E_s(x)}$ – к линейному. Поэтому немодальный рост часто называют алгебраическим.

Отметим, что каждому значению $\lambda_1(x)$ отвечает свой собственный вектор оптимального возмущения, соответствующий этому значению x , который не является оптимальным для других x . Иллюстрацией сказанного является рис. 3б, где показана разница λ_1 и энергии оптимального возмущения, отвечающего $x = 10$, т.е. возмущения, вырастающего больше любых других на расстоянии $x = 10$. Величина $\lambda_1 - E$ в этом случае всюду положительна при $x > 0$ за исключением точки $x = 10$, где она обращается в ноль. В рассматриваемом случае рассогласование $\lambda_1(x)$ и $E(x)$ невелико, максимум при $x = 20$ едва достигает 3%.

На рис. 4 показаны распределения скорости оптимальных (а) и субоптимальных (б), т.е. отвечающих λ_1 и λ_2 возмущений в центральной части плоскости $x = 10$. Представлен случай $n = 1$. Аналогичные распределения для $n = 5$ даны на рис. 5. Цветом показаны поля продольной компоненты, стрелками – поперечные движения. При $n = 1$ оптимальное возмущение характеризуется поперечным движением, направленным на рисунке справа налево в ядре потока и в обратном направлении на периферии. В правую часть ядра струи переносятся частицы жидкости с низкой скоростью, отчего здесь возникает дефицит скорости продольной компоненты. Наоборот, в левую часть попадают частицы из приосевой области, вызывая положительное значение возмущения продольной компоненты скорости. В субоптимальном возмущении в поперечном движении присутствует две пары вихрей, внешняя и внутренняя. Внутренние вихри занимают область $r < 0.7$. Движение в нижнем вихре на рисунке направлено по часовой стрелке, а в верхнем – против. В результате в правой части ядра струи возникает повышение продольной компоненты скорости, а в левой части – понижение. За пределами области $r < 0.7$ наблюдается вихревое поперечное движение с обратным направлением: вверху по часовой стрелке, а внизу – против. В результате появляются ещё две области концентрации продольной компоненты возмущения скорости

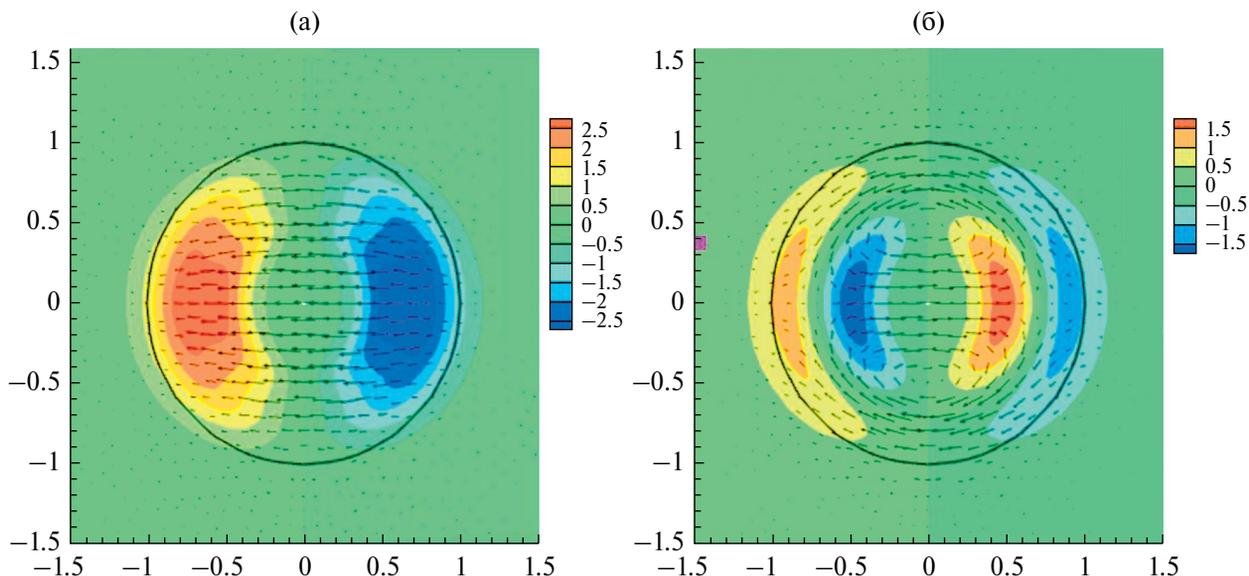


Рис. 4. Поле скорости оптимального (а) и субоптимального (б) возмущения, отвечающего $x = 10$, $n = 1$. Цветом показано возмущение продольной компоненты скорости, стрелки показывают поперечное движение.

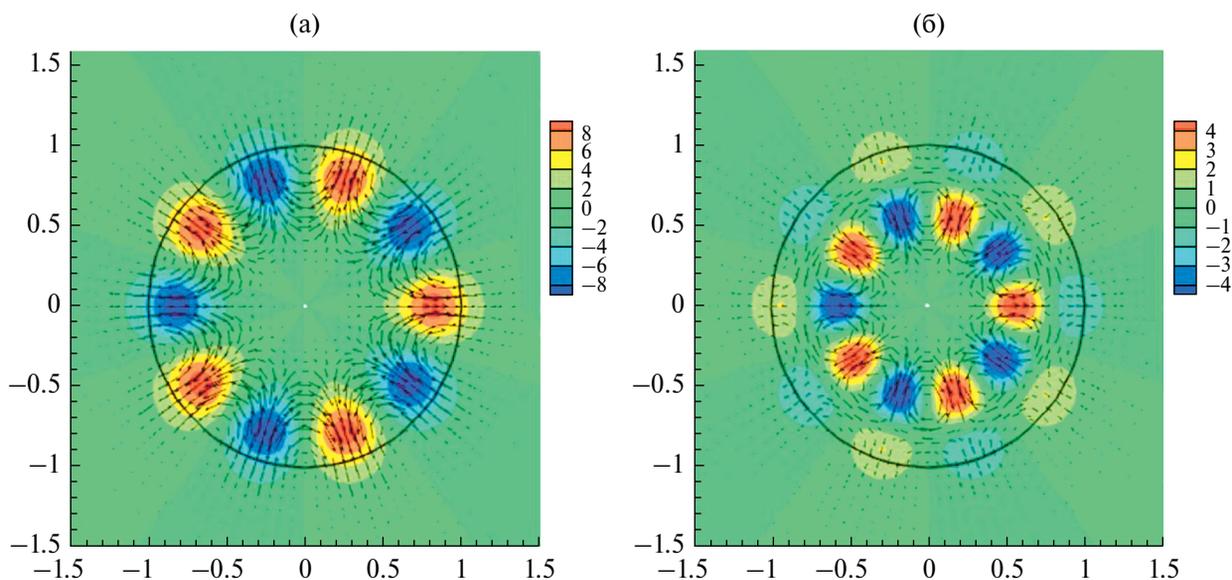


Рис. 5. Поле скорости оптимального (а) и субоптимального (б) возмущения, отвечающего $x = 10$, $n = 5$. Цветом показано возмущение продольной компоненты скорости, стрелки показывают поперечное движение.

с положительным значением слева и отрицательным значением справа. При $n = 5$ поперечная плоскость разбивается на 5 секторов, в каждом из которых в оптимальном возмущении соседствует пара вихрей поперечного движения противоположного знака. Там, где поперечное движение направлено в сторону центра струи, возникает отрицательное возмущение продольной компоненты скорости, а в смежных областях — положительное. В субоптимальном возмущении возникает цепочка внутренних вихрей поперечного движения в области $r < 0.83$ и цепочка внешних вихрей в окружающем пространстве. В каждом секторе поперечное движение, направленное в сторону центра струи, вызывает область отрицательного

возмущения продольной скорости, а движение от центра приводит к появлению положительного возмущения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приводятся результаты численного исследования немодального развития стационарных возмущений в круглой струе. Воспроизводятся условия лабораторного эксперимента при $Re = 2850$, проведенного ранее в НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова [4,5]. Характерная особенность изучаемой струи – наличие трёх точек перегиба во входном профиле скорости, что существенно определяет свойства устойчивости течения.

Наряду с классическим модальным механизмом неустойчивости Кельвина–Гельмгольца в течении может реализоваться альтернативный немодальный рост возмущений. Проведённые ранее численные [13–15,19] и экспериментальные [18] исследования свидетельствуют, что немодальный механизм может быть определяющим при переходе течения в струе от ламинарного режима к турбулентному. В прежних работах развитие немодально растущих возмущений в струях изучалось численно в предположении о параллельности, т.е. неизменности основного течения в направлении потока. Разработан метод и впервые определены оптимальные возмущения в развивающейся струе. Изучены стационарные трёхмерные возмущения при разных значениях азимутального числа. Определены свойства оптимальных возмущений, их форма, характер и степень роста вниз по потоку.

Авторы выражают признательность В. В. Веденееву за плодотворные обсуждения работы и полезные замечания по тексту статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-19-00404, с использованием вычислительных ресурсов ОВК НИЦ Курчатовский институт, <http://computing.nrcki.ru/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morris P.J.* The spatial viscous instability of axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. 3. P. 511–529.
2. *Michalke A.* Survey on jet instability theory // *Prog. Aerospace Sci.* 1984. V. 21. P. 159–199.
3. Грек Г.Р., Козлов В.В., Лутвиненко Ю.А. Устойчивость дозвуковых струйных течений // Учебное пособие: Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. 2012. 208 с.
4. *Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A.* Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // *Phys. Fluids.* 2018. V 30. P. 043603.
5. *Зайко Ю.С., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Чичерина А.Д.* Исследование затопленных струй с увеличенной длиной начального ламинарного участка // *Изв. РАН. МЖГ.* 2018. 1. С. 97–106.
6. *Ellingsen T., Palm E.* Stability of linear flow // *Phys. Fluids.* 1975. V 18. P. 487–488.
7. *Landahl M.L.* A note on algebraic instability of inviscid parallel shear flows // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. P. 243–251.
8. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Optimal energy density growth in Hagen–Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 277. P. 197–225.
9. *Andersson P., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // *Phys. Fluids.* 1999. V 11. P. 134–150.
10. *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 404. P. 289–309.
11. *Tumin A., Reshotko E.* Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers // *Phys. Fluids.* 2001. V 13. P. 2097–2104.
12. *Reshotko E., Tumin A.* Spatial theory of optimal disturbances in a circular pipe flow // *Phys. Fluids.* 2001. V 13. P. 991–996.
13. *Boronin S.A., Healey J.J., Sazhin S.S.* Non-modal stability of round viscous jets // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 716. P. 96–119.

14. *Jimenez-Gonzalez J. I., Brancher P., Martinez-Bazan C.* Modal and non-modal evolution of perturbations for parallel round jets // *Phys. Fluids*. 2015. V 27. P. 044105.
15. *Jimenez-Gonzalez J. I., Brancher P.* Transient energy growth of optimal streaks in parallel round jets // *Phys. Fluids*. 2017. V 29. P. 114101.
16. *Боронин С.А., Осипцов А.Н.* Модальная и немодальная неустойчивость течения запыленного газа в пограничном слое // *Изв. РАН. МЖГ*. 2014. 6. С. 80–93.
17. *Калашник М.В., Чхетиани О.Г.* Оптимальные возмущения в развитии неустойчивости свободного слоя сдвига и системы из двух встречных струйных течений // *Изв. РАН. МЖГ*. 2020. 2. С. 28–41.
18. *Ivanov O., Ashurov D., Gareev L., Vedeneev V.* Non-modal perturbation growth in a laminar jet: an experimental study // *J. Fluid Mech*. 2023. V. 963. P. A8.
19. *Wang C., Lesshafti L., Cavalieri A.V., Jordan P.* The effect of streaks on the instability of jets // *J. Fluid Mech*. 2021. V. 910. P. A14.
20. *Nikitin N.* Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // *J. Comput. Phys*. 2006. V. 217. P. 759–781.
21. *Абдульманов К.Э., Никитин Н.В.* Развитие возмущений в круглой затопленной струе с двумя модами неустойчивости // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. 5. С. 25–40.
22. *Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedeneev V.V.* Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // *J. Fluid Mech*. 2022. V 934. A3.

Development of Stationary Disturbances in a Spatially Developing Jet

D. A. Ashurov^a and N. V. Nikitin^b

Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, 119192 Russia

^a *e-mail: ashurovda@my.msu.ru*

^b *e-mail: nvnikitin@mail.ru*

Nonmodal development of stationary three-dimensional disturbances in a circular jet is numerically investigated at the Reynolds number $Re = 2850$. The operating conditions of a laboratory experiment performed earlier in the Institute of Mechanics of Moscow State University are reproduced. A method for calculating optimal disturbances under the conditions of downstream developing main flow is developed. The disturbances associated with different azimuthal numbers are calculated. The shape, character of development, and growth degree of optimal disturbances are determined.

Keywords: submerged jet, Navier–Stokes equations, hydrodynamic instability, nonmodal growth, optimal disturbances.