

УДК 532.5.031:532.591

РАЗВИТИЕ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ПРИДОННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ДВУХСЛОЙНОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

© 2024 г. И. В. Стурова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 14.12.2023 г.

В линейном приближении для двумерной нестационарной задачи исследовано поведение волнового движения, возникающего в идеальной несжимаемой однородной жидкости при включении периодических донных возмущений. В невозмущенном состоянии скорости двухслойного потока жидкости в каждом слое являются линейными функциями вертикальной координаты с различными градиентами и совпадают на границе слоев. Верхняя граница жидкости может быть либо свободной, либо ограничена твердой крышкой. Определены дисперсионные зависимости и групповые скорости возникающих волновых мод. Вычислены вертикальные смещения свободной поверхности и границы раздела слоев. Выполнено сопоставление с решением для однослойной жидкости.

Ключевые слова: поверхностная волна, донное возмущение, фоновое сдвиговое течение, дисперсионная зависимость

DOI: 10.31857/S1024708424020069 EDN: RIZKFA

Генерация волнового движения в жидкости, вызванного включением периодических возмущений (поверхностных, погруженных или придонных) уже давно привлекает внимание исследователей. Наибольшее число результатов получено в рамках линейной модели для изначально покоящейся жидкости. Решение различных двумерных и трехмерных задач представлено в работах [1–3]. Влияние сдвиговых фоновых течений на генерацию вынужденных волновых движений интенсивно изучается в последние десятилетия в связи с большой практической важностью [4]. Известно, что в природе сдвиговые течения жидкости обладают большим разнообразием. Однако в настоящее время не существует аналитических методов решения задачи о генерации волновых движений для общего случая сдвигового потока. Одним из приближенных методов является замена реального профиля скорости фонового потока его кусочно-линейной аппроксимацией с условием непрерывности скорости на границе слоев. Сходимость такого приближения к точному решению при $N \rightarrow \infty$ (N – число слоев) доказана в исследовании [5]. Наличие в жидкости $N - 1$ тангенциальных разрывов скорости объясняет появление пропорционального количества волновых мод, дисперсионные свойства которых определяются как корни полинома соответствующей степени. Устойчивость волнового движения в такой многослойной жидкости имеет место только при отсутствии комплексных корней этого полинома [6].

В данной работе в линейном приближении и двумерной постановке исследовано развитие волнового движения, возникающего в двухслойной жидкости под действием малых периодических колебаний участка дна бассейна. В каждом слое горизонтальная скорость основного потока линейно меняется с глубиной и непрерывна на границе раздела слоев. Верхняя граница жидкости является либо свободной поверхностью, либо твердой крышкой. Выполнено сопоставление с решением для однослойного потока с линейным профилем скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоский безграничный в горизонтальном направлении поток однородной невязкой несжимаемой жидкости постоянной глубины H , состоящей из двух слоев (рис. 1а).

В невозмущенном состоянии свободная поверхность жидкости и граница раздела слоев горизонтальны, скорости жидкости в каждом из слоев являются линейными функциями вертикальной координаты и совпадают на границе раздела. Система декартовых координат x, y введена так, что горизонтальная ось x

совпадает с невозмущенной границей раздела между слоями, и ось y направлена вертикально вверх. Толщины верхнего и нижнего слоев равны соответственно H_1 и H_2 , и полная глубина жидкости составляет $H = H_1 + H_2$. Скорость потока в верхнем слое равна $U_1(y) = by + V_1$, а в нижнем слое – $U_2(y) = cy + V_1$ где b и c – постоянные вертикальные градиенты скорости в слоях; V_1 – скорость потока на границе раздела слоев. На верхней границе жидкости скорость потока равна $V_0 = V_1 + bH_1$, а на дне – $V_2 = V_1 - cH_2$. Предполагается, что значения V_0, V_1, V_2 неотрицательны.

Наряду с двухслойным потоком будет рассмотрен частный случай однослойного сдвигового потока, в котором горизонтальная скорость равна $U(y) = by + V_0$ (рис. 1б).

Исследуем процесс развития волновых движений в жидкости, возникающих при включении в начальный момент времени $t = 0$ периодического источника донных колебаний. Движение жидкости в каждом из слоев описывается линеаризованными уравнениями Эйлера

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_j \nabla \right) v_j + v_j \frac{dV_j}{dy} + \frac{\nabla p_j}{\rho} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

где $V_j = (U_j(y), 0)$ – вектор скорости основного потока в верхнем ($j = 1$) и нижнем ($j = 2$) слоях; $v_j = (u_j, v_j)$ – возникающие возмущения скорости жидкости, которые предполагаются малыми; p_j – динамические добавки давления; ρ – плотность жидкости.

На верхней границе жидкости рассмотрим два типа граничных условий: свободная поверхность и твердая крышка. Для свободной поверхности, вертикальное смещение которой описывается функцией $\eta(x, t)$, кинематическое и динамическое условия имеют вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_1, \quad g\eta = p_1 \quad (y = H_1), \quad (1.2)$$

где g – ускорение свободного падения. Динамическое условие представляет собой линеаризованное условие равенства нулю давления на свободной поверхности [2, 3, 6].

В случае твердой крышки граничное условие имеет вид

$$v_1 = 0 \quad (y = H_1). \quad (1.3)$$

На границе раздела слоев выполняются условия непрерывности вертикальной скорости и давления

$$v_1 = v_2, \quad p_1 = p_2 \quad (y = 0). \quad (1.4)$$

Вертикальное смещение границы раздела слоев описывается функцией $\zeta(x, t)$ и определяется из кинематического условия

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v_1 \quad (y = 0). \quad (1.5)$$

Малые периодические колебания участка дна бассейна происходят с вертикальной скоростью

$$v_2 \alpha(x) \sin(\sigma t) \quad (y = -H_2), \quad (1.6)$$

где безразмерная функция $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, а постоянные величины a и σ характеризуют соответственно амплитуду и частоту колебаний вертикальной скорости.

Начальные условия означают отсутствие волновых движений вплоть до момента $t = 0$:

$$u_j(x, y, 0) = v_j(x, y, 0) = \eta(x, 0) = \zeta(x, 0) = 0. \quad (1.7)$$

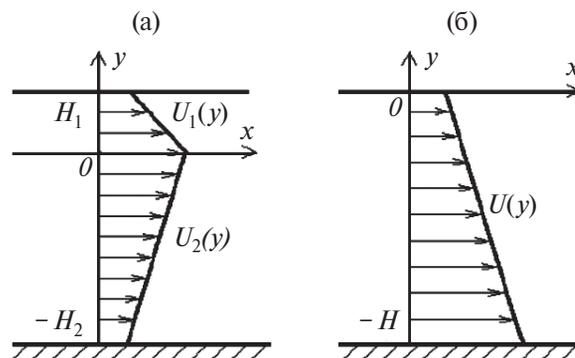


Рис. 1. Схема течения в невозмущенном состоянии: а – двухслойная жидкость; б – однослойная жидкость.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Известно, что в двумерном случае при наличии линейного сдвига продольной скорости основного течения компоненты волнового движения можно представить в виде [7]

$$u_j(x, y, t) = U_j(y) + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \quad v_j(x, y, t) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \quad (j = 1, 2),$$

где функции $\varphi_j(x, y, t)$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\partial^2 \varphi_j / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_j / \partial y^2 = 0. \quad (2.1)$$

Для решения начально-краевых задач, сформулированных в п. 1, используем преобразования Фурье и Лапласа в виде

$$\bar{\varphi}_j(k, y, s) = \int_0^\infty e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \varphi_j(x, y, t) e^{-ikx} dx dt. \quad (2.2)$$

Аналогичные преобразования вводятся и для остальных искомым функций.

Функции $\bar{\varphi}_j(k, y, s)$ после преобразования Фурье уравнения Лапласа (2.1) удовлетворяют уравнению

$$\partial^2 \bar{\varphi}_j / \partial y^2 - k^2 \bar{\varphi}_j = 0.$$

Далее рассмотрим отдельно решения для двухслойной жидкости со свободной поверхностью (п. 2.1) и под твердой крышкой (п. 2.2). Решение для однослойной жидкости изложено в п. 2.3.

2.1. Двухслойная жидкость со свободной поверхностью

Решения для функций $\bar{\varphi}_1(k, y, s)$ и $\bar{\varphi}_2(k, y, s)$ ищем в виде

$$\bar{\varphi}_1 = C_1 \operatorname{sh}[|k|(H_1 - y)] + D_1 \operatorname{ch}[|k|(H_1 - y)] \quad (0 \leq y \leq H_1), \quad (2.3)$$

$$\bar{\varphi}_2 = C_2 \operatorname{sh}(|k|y) + D_2 \operatorname{ch}(|k|y) \quad (-H_2 \leq y \leq 0),$$

где функции $C_j(k, s)$, $D_j(k, s)$ ($j = 1, 2$) являются неизвестными.

Функции $\bar{\eta}(k, s)$, $C_j(k, s)$, $D_j(k, s)$ ($j = 1, 2$) определяются из системы пяти линейных алгебраических уравнений, вытекающих из граничных условий (1.2), (1.4) и (1.6):

$$(s + ikV_0)\bar{\eta} + |k|C_1 = 0, \quad g\bar{\eta} + i\gamma bC_1 + (s + ikV_0)D_1 = 0, \quad C_1 \operatorname{ch}(|k|H_1) + D_1 \operatorname{sh}(|k|H_1) + C_2 = 0,$$

$$C_1 [(s + ikV_1) \operatorname{sh}(|k|H_1) + i\gamma b \operatorname{ch}(|k|H_1)] + D_1 [(s + ikV_1) \operatorname{ch}(|k|H_1) + i\gamma b \operatorname{sh}(|k|H_1)] + i\gamma cC_2 - (s + ikV_1)D_2 = 0, \quad (2.4)$$

$$C_2 \operatorname{ch}(|k|H_2) - D_2 \operatorname{sh}(|k|H_2) = \Lambda(k, s),$$

где

$$\gamma = \operatorname{sgn}k, \quad \Lambda(k, s) = \frac{\alpha \tilde{f}(k)}{|k|(s^2 + \sigma^2)}, \quad \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.5)$$

Решение системы уравнений (2.4) для функции $\bar{\eta}(k, s)$ имеет вид

$$\bar{\eta} = \frac{\alpha \tilde{f}(k)(s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)(s^2 + \sigma^2)P(k, s)}, \quad \lambda_1(k) = ik(V_0 + V_1), \quad \lambda_2(k) = -k^2 V_0 V_1. \quad (2.6)$$

Здесь $P(k, s)$ – полином третьей степени относительно s :

$$P(k, s) = s^3 + ia_1 s^2 + a_2 s + ia_3, \quad (2.7)$$

где

$$a_1(k) = \gamma [k(2V_0 + V_1) - br_1 - cr_2], \quad (2.8)$$

$$a_2(k) = |k| \left\{ \operatorname{th}(|k|H) [g + b(V_1 - V_0)] + V_0 [2(br_1 + cr_2) - |k|(2V_1 + V_0)] \right\} - b(c - b)r_3, \quad (2.9)$$

$$a_3(k) = \gamma |k| \left\{ |k| \left[\operatorname{th}(|k|H) (gV_1 + bV_0(V_1 - V_0)) - V_0^2 (|k|V_1 - br_1 - cr_2) \right] - (c - b)(g + bV_0)r_3 \right\}, \quad (2.10)$$

$$r_1(k) = \frac{\operatorname{sh}(|k|H_1) \operatorname{ch}(|k|H_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)},$$

$$r_2(k) = \frac{\operatorname{ch}(|k|H_1) \operatorname{sh}(|k|H_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)},$$

$$r_3(k) = \frac{\operatorname{sh}(|k|H_1) \operatorname{sh}(|k|H_2)}{\operatorname{ch}(|k|H)}.$$

Используем в формуле (2.6) следующее представление для дроби:

$$\frac{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}{(s^2 + \sigma^2)P(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\alpha_n(k)}{s - s_n(k)}, \quad (2.11)$$

где $s_n(k) (n = \overline{1, 3})$ – корни уравнения $P(k, s) = 0$, $s_{4,5} = \pm i\sigma$, а функции $\alpha_n(k)$ определяются из решения системы пяти линейных алгебраических уравнений, получающихся из равенства коэффициентов при степенях $s^j (j = \overline{0, 4})$ в числителях левой части уравнения (2.11) и его правой части после суммирования.

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение для вертикального смещения свободной поверхности имеет вид

$$\eta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)}{\operatorname{ch}(|k|H)} [A_1(k, t) \cos kx - B_1(k, t) \sin kx] dk, \quad (2.12)$$

где $A_1(k, t)$ и $B_1(k, t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^5 \alpha_n(k) e^{s_n(k)t}$. При выводе (2.12) использовано свойство функций $s_n(k) (n = 1, 3)$ и $\alpha_n(k) (n = 1, 5)$, заключающееся в том, что их значения при $k > 0$ и $k < 0$ являются комплексно-сопряженными.

Функция $\tilde{\zeta}(k, s)$ определяется с использованием соотношения (1.5) и решений для функций $C_1(k, s)$, $D_1(k, s)$ из системы уравнений (2.4):

$$\tilde{\zeta} = \frac{a\sigma \tilde{f}(k) \operatorname{ch}(|k|H_1) (s^2 + \mu_1 s + \mu_2)}{\operatorname{ch}(|k|H) (s^2 + \sigma^2) P(k, s)}, \quad (2.13)$$

$$\mu_1(k) = i[2kV_0 - \gamma b \operatorname{th}(|k|H_1)], \quad \mu_2(k) = |k|(g + bV_0) \operatorname{th}(|k|H_1) - k^2 V_0^2.$$

Аналогично (2.12) решение для вертикального смещения границы раздела слоев имеет вид

$$\zeta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k) \operatorname{ch}(|k|H_1)}{\operatorname{ch}(|k|H)} [A_2(k, t) \cos kx - B_2(k, t) \sin kx] dk, \quad (2.14)$$

где $A_2(k, t)$ и $B_2(k, t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^5 \beta_n(k) e^{s_n(k)t}$. Функции $\beta_n(k)$ определяются согласно (2.13) из равенства

$$\frac{s^2 + \mu_1 s + \mu_2}{(s^2 + \sigma^2)P(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\beta_n(k)}{s - s_n(k)}.$$

2.2. Двухслойная жидкость под твердой крышкой

В этом случае система уравнений (1.1) решается с учетом граничных условий (1.3), (1.4), (1.6) и начальных условий (1.7). После введения преобразований Фурье и Лапласа (2.2) для определения неизвестных функций $C_j(k, s)$, $D_j(k, s) (j = 1, 2)$ в (2.3) получаем систему уравнений аналогичную (2.4), в которой первые два уравнения заменены тождеством $C_1 \equiv 0$. Из оставшихся трех уравнений определяется функция $D_1(k, s)$, и решение для функции $\tilde{\zeta}(k, s)$ получим в виде

$$\bar{\zeta} = \frac{a\sigma\tilde{f}(k)\operatorname{sh}(|k|H_1)}{\operatorname{sh}(|k|H)(s-s_1)(s^2+\sigma^2)}, \quad (2.15)$$

$$s_1(k) = i\gamma[(c-b)r_4 - |k|V_1], \quad r_4(k) = \frac{\operatorname{sh}(|k|H_1)\operatorname{sh}(|k|H_2)}{\operatorname{sh}(|k|H)}.$$

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение для вертикального смещения границы раздела в жидкости под твердой крышкой имеет вид

$$\zeta(x,t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)\operatorname{sh}(|k|H_1)}{\operatorname{sh}(|k|H)} [A_3(k,t)\cos kx - B_3(k,t)\sin kx] dk, \quad (2.16)$$

где $A_3(k,t)$ и $B_3(k,t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^3 v_n(k)e^{s_n(k)t}$. Функции $v_n(k)$ определяются согласно (2.15) из равенства

$$\frac{1}{(s-s_1)(s^2+\sigma^2)} = \sum_{n=1}^3 \frac{v_n(k)}{s-s_n(k)}, \quad s_{2,3} = \pm i\sigma. \quad (2.17)$$

Решение данной задачи для стратифицированной двухслойной жидкости, в которой к различным градиентам скорости основного потока в слоях добавлены и различные плотности, изложено в работе [8] и повторено в исследовании [3, гл. 9].

2.3. Однослойная жидкость

Аналогично (1.1) линеаризованные уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V\nabla\right)v + v\frac{dV}{dy} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

где $V = (U(y), 0)$, $U(y) = by + V_0$, $v = (u, v)$, p – динамический добавок давления. Система координат показана на рис. 1б.

Для свободной поверхности жидкости $\eta(x,t)$ граничные условия аналогично (1.2) имеют вид

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + V_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} = v, \quad g\rho\eta = p \quad (y=0). \quad (2.18)$$

На дне выполняется условие, аналогичное (1.6):

$$v\alpha(x)\sin(\sigma t) \quad (y=-H). \quad (2.19)$$

Вертикальные смещения жидкости на горизонте $y = -H_1$ ($H_1 < H$) определяются функцией $\zeta(x,t)$ из условия

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\zeta}{\partial x} = v \quad (y=-H_1). \quad (2.20)$$

Начальные условия аналогичны (1.7).

Компоненты волнового движения представим в виде

$$u(x,y,t) = U(y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v(x,y,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

где функция $\varphi(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа аналогично (2.1).

После введения преобразований Фурье и Лапласа аналогично (2.2) решение для функции $\bar{\varphi}(k,y,s)$ ищем в виде

$$\bar{\varphi}(k,y,s) = C\operatorname{sh}(|k|y) + D\operatorname{ch}(|k|y),$$

где функции $C(k,s)$, $D(k,s)$ являются неизвестными. Для определения функций $\bar{\eta}(k,s)$, $C(k,s)$, $D(k,s)$ из граничных условий (2.18), (2.19) получим систему трех линейных алгебраических уравнений

$$(s + ikV_0)\bar{\eta} - |k|C = 0, \quad g\bar{\eta} - i\gamma bC + (s + ikV_0)D = 0, \quad (2.21)$$

$$C\text{ch}(|k|H) - D\text{sh}(|k|H) = \Lambda(k, s),$$

где использованы обозначения (2.5).

Решение этой системы для функции $\bar{\eta}(k, s)$ имеет вид

$$\bar{\eta} = \frac{a\sigma\tilde{f}(k)(s + ikV_0)}{\text{ch}(|k|H)(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)}, \quad (2.22)$$

где $Q(k, s)$ – полином второй степени относительно s :

$$Q(k, s) = s^2 + i\gamma[2|k|V_0 - b\text{th}(|k|H)]s + |k|[(g + bV_0)\text{th}(|k|H) - |k|V_0^2].$$

Функция $\bar{\zeta}(k, s)$ определяется из условия (2.20) и решения для функций $C(k, s)$, $D(k, s)$ из системы уравнений (2.21):

$$\bar{\zeta} = \frac{a\sigma\tilde{f}(k)\text{ch}(|k|H_1)(s^2 + \tau_1s + \tau_2)}{\text{ch}(|k|H)(s + ikV_1)(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)}, \quad (2.23)$$

где

$$\tau_1(k) = i\gamma[2|k|V_0 - b\text{th}(|k|H_1)], \quad \tau_2(k) = |k|[(g + bV_0)\text{th}(|k|H_1) - |k|V_0^2].$$

После выполнения обратных преобразований Лапласа и Фурье решение для вертикального смещения свободной поверхности получим в виде

$$\eta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)}{\text{ch}(|k|H)} [A_4(k, t)\cos kx - B_4(k, t)\sin kx] dk, \quad (2.24)$$

где $A_4(k, t)$ и $B_4(k, t)$ – соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^4 \chi_n(k)e^{s_n(k)t}$, $s_{1,2}(k)$ – корни квадратного уравнения $Q(k, s) = 0$, $s_{3,4} = \pm i\sigma$. Функции χ_n ($n = 1, 4$) определяются согласно (2.22) из равенства

$$\frac{s + ikV_0}{(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)} = \sum_{n=1}^4 \frac{\chi_n(k)}{s - s_n(k)}.$$

Вертикальные смещения жидкости на горизонте $y = -H_1$ имеют вид

$$\zeta(x, t) = \frac{a\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tilde{f}(k)\text{ch}(|k|H_1)}{\text{ch}(|k|H)} [A_5(k, t)\cos kx - B_5(k, t)\sin kx] dk, \quad (2.25)$$

где $A_5(k, t)$ и $B_5(k, t)$ соответственно вещественная и мнимая части суммы $\sum_{n=1}^5 \theta_n(k)e^{s_n(k)t}$, $s_5 = -ikV_1$. Функции θ_n ($n = 1, 5$) определяются согласно (2.23) из равенства

$$\frac{s^2 + \tau_1s + \tau_2}{(s + ikV_1)(s^2 + \sigma^2)Q(k, s)} = \sum_{n=1}^5 \frac{\theta_n(k)}{s - s_n(k)}.$$

Решение для однослойной жидкости в случае твердой крышки на верхней границе можно получить из решения (2.16) при $c = b$. При $V_1 = 0$ волновое движение в такой жидкости отсутствует, так как в этом случае в (2.17) $s_1 = 0$, $v_1 = \sigma^{-2}$, $v_2 = v_3 = -v_1/2$ и функции A_3 и B_3 равны соответственно $A_3 = [1 - \cos(\sigma t)]/\sigma^2$, $B_3 = 0$.

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Исследуем дисперсионные свойства волн, возникающих в рассмотренных случаях. Дисперсионное соотношение устанавливает для каждой волны зависимость ее частоты ω от волнового числа k .

Для случая двухслойной жидкости со свободной поверхностью используем уравнение $P(k, s) = 0$, где функция $P(k, s)$ дана в формуле (2.7). Вводя замену $\omega = is$, получим полином для определения дисперсионных соотношений каждой из трех волновых мод:

$$\omega^3 - a_1(k)\omega^2 - a_2(k)\omega + a_3(k) = 0, \quad (3.1)$$

где значения $a_n(k)$ ($n = \overline{1,3}$) даны в (2.8)–(2.10). Легко видеть, что для каждой из трех волн выполняется равенство $\omega_n(k) = -\omega_n(-k)$.

Групповая скорость каждой волновой моды равна $c_g^{(n)} = d\omega_n/dk$. Используя выражение (3.1), получим

$$c_g^{(n)} = \frac{a_1'\omega_n^2 + a_2'\omega_n - a_3'}{3\omega_n^2 - 2a_1\omega_n - a_2}, \quad (3.2)$$

где штрих означает дифференцирование по k .

Известно, что для кубического уравнения с вещественными коэффициентами возможно существование двух сопряженных комплексных корней. Для уравнения (3.1) это возможно при условии, если значение Z положительное, где

$$Z = (r/3)^3 + (q/2)^2, \quad r(k) = -\left[a_2(k) + \frac{a_1^2(k)}{3} \right], \quad q(k) = a_3(k) - 2\left[\frac{a_1(k)}{3} \right]^3 - \frac{1}{3}a_1(k)a_2(k). \quad (3.3)$$

Устойчивость волнового движения для трехслойной жидкости исследована в работе [6]. Как указано в труде [9], альтернативным методом определения устойчивости волнового движения является решение начальной задачи. Для неустойчивого потока полученное решение будет корректно описывать волновое движение только в течение некоторого начального отрезка времени, когда амплитуда волн достаточно мала и нелинейные эффекты можно не учитывать. Дальнейшее развитие волнового движения следует рассматривать с использованием нелинейных уравнений и граничных условий.

В двухслойной жидкости под твердой крышкой существует только одна волновая мода, дисперсионная зависимость которой согласно (2.15) имеет вид

$$\omega = kV_1 - \gamma(c - b)r_4(k). \quad (3.4)$$

Групповая скорость этой волны при $k=0$ равна $c_g = V_1 - (c - b)H_1H_2/H$ и $c_g \rightarrow V_1$ при $k \rightarrow \infty$.

В частном случае однослойной жидкости с линейным сдвиговым потоком под свободной поверхностью дисперсионные зависимости для двух существующих волновых мод приведены, например, в работе [7], а с учетом поверхностного натяжения – в работе [10]:

$$\omega_{1,2} = kU_0 - \frac{\gamma b}{2} \text{th}(|k|H) \pm \sqrt{\left(g|k| + \frac{b^2}{4} \text{th}^2(|k|H) \right) \text{th}(|k|H)}. \quad (3.5)$$

Подкоренное выражение в (3.5) всегда неотрицательно, следовательно, в этом случае сдвиговое течение всегда устойчиво.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Значения исходных параметров частично заимствованы из работы [7]:

$$H_1 = 0.3 \text{ м}, \quad H_2 = 0.7 \text{ м}, \quad H = 1 \text{ м}, \quad \sigma = 2\pi c^{-1}, \quad g = 9.81 \text{ м/с}^2.$$

Для донных возмущений в выражении (1.6) использована функция $f(x) = \exp(-dx^2)$, где $dH_1^2 = 0.1$.

Выбраны два примера распределения скорости основного потока в двухслойной жидкости: $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.5, 0.75, 0.2)$ (случай 1) и $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.5, 0.2, 2)$ (случай 2), где $\bar{V}_j = V_j/\sqrt{gH_1}$ ($j = 0, 1, 2$). Проверка на устойчивость этих профилей скорости по критерию, изложенному в п. 3, показала, что они устойчивы.

Интересно отметить, что в обоих случаях при фиксированных значениях V_0 , V_1 и изменении V_2 не удалось обнаружить неустойчивых режимов. Однако при фиксированных значениях V_1 и V_2 имеются ограничения на скорость V_0 . Границы устойчивости на плоскости (\bar{V}_0, \bar{k}) , где $\bar{k} = kH_1$, можно определить, используя нулевую изолинию функции Z в (3.3). На рис. 2 показаны нулевые изолинии функции Z для случаев 1 и 2 соответственно кривыми 1, 2. Согласно рис. 2, неустойчивыми являются режимы при $\bar{V}_0 > 1.4$ и $\bar{V}_0 > 1.0$ соответственно в первом и втором случаях.

На рис. 3 представлены в безразмерном виде дисперсионные зависимости $\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{H_1/g}$ (рис. 3а, в) и групповые скорости $\bar{c}_g^{(n)} = c_g^{(n)}/\sqrt{gH_1}$ (рис. 3б, г) соответственно для случаев 1 (рис. 3а, б) и 2 (рис. 3в, г).

Кривые 1–3 показывают значения для характеристик трех волн, возникающих в двухслойной жидкости, которые определяются как корни полинома (3.1). Нумерация корней полинома производится по убыванию их вещественной части. Групповая скорость каждой волны определяется соотношением (3.2).

Кривая 4 показывает дисперсионную зависимость и групповую скорость единственной волновой моды, которая имеет место в двухслойной жидкости под твердой крышкой согласно формуле (3.4). Как видно из рис. 3, эта волновая мода по своим характеристикам практически полностью совпадает со второй модой для случая двухслойной жидкости под свободной поверхностью. Причем с ростом волнового числа k групповые скорости в случае 1 первой и второй мод, а в случае 2 – второй и третьей мод становятся очень близки.

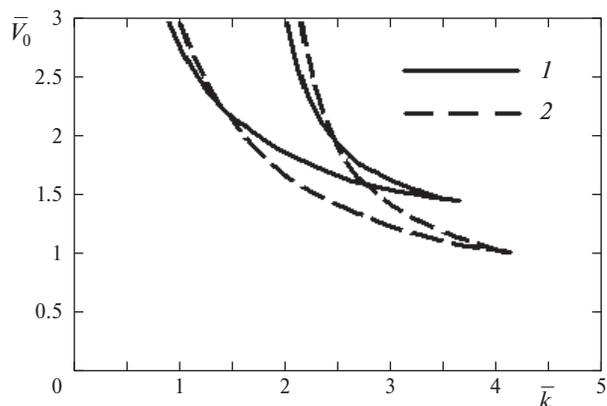


Рис. 2. Области неустойчивых значений волновых чисел в зависимости от скорости сдвигового потока V_0 : 1, 2 – случаи 1 и 2.

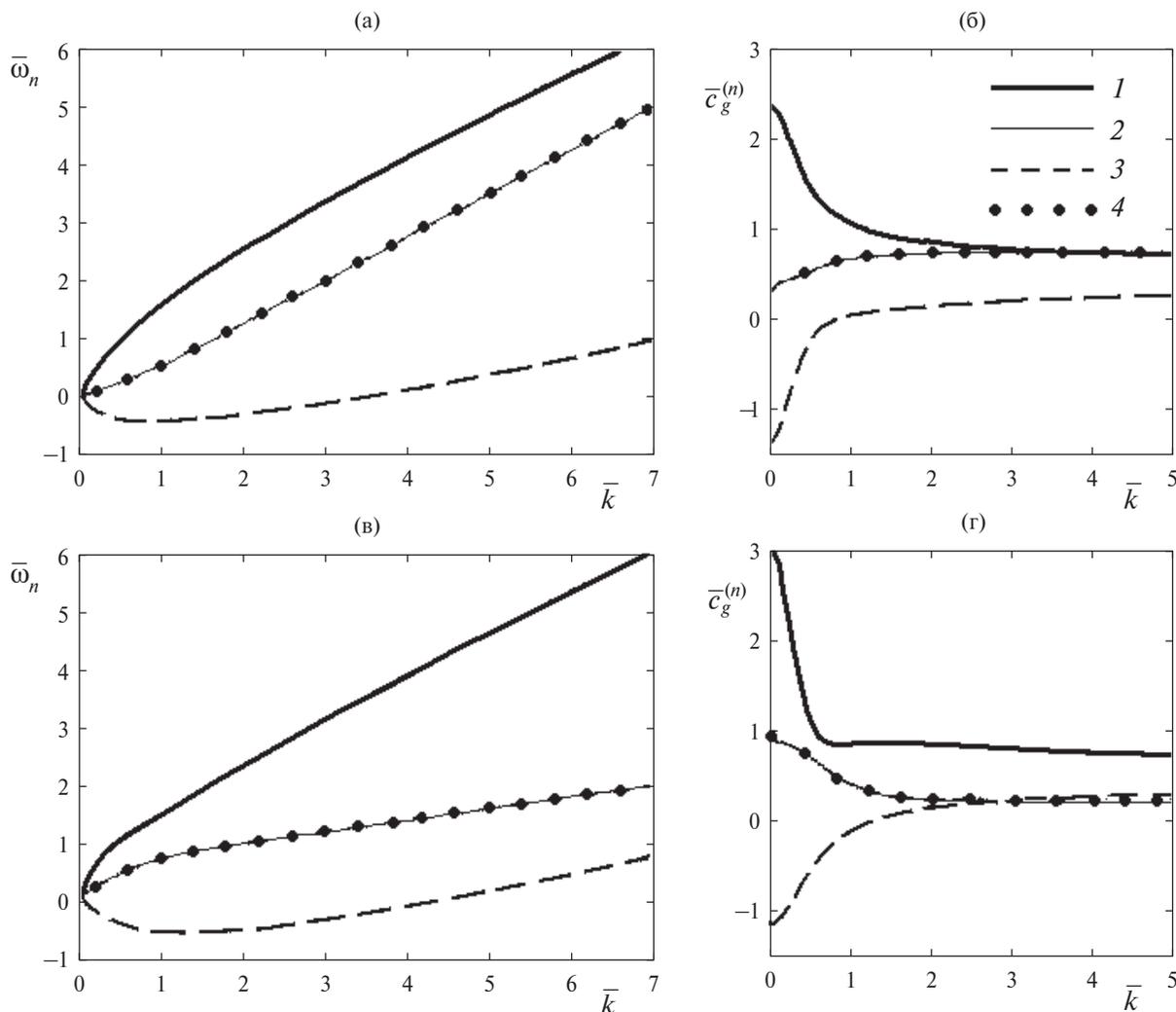


Рис. 3. Дисперсионные зависимости $\bar{\omega}_n(\bar{k})$ (а, в) и групповые скорости $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$ (б, г): кривые 1–3 соответствуют номеру моды для случая 1 (а, б) и случая 2 (в, г). Кривые 4 показывают дисперсионную зависимость и групповую скорость единственной волновой моды в рассмотренных случаях для двухслойной жидкости под твердой крышкой.

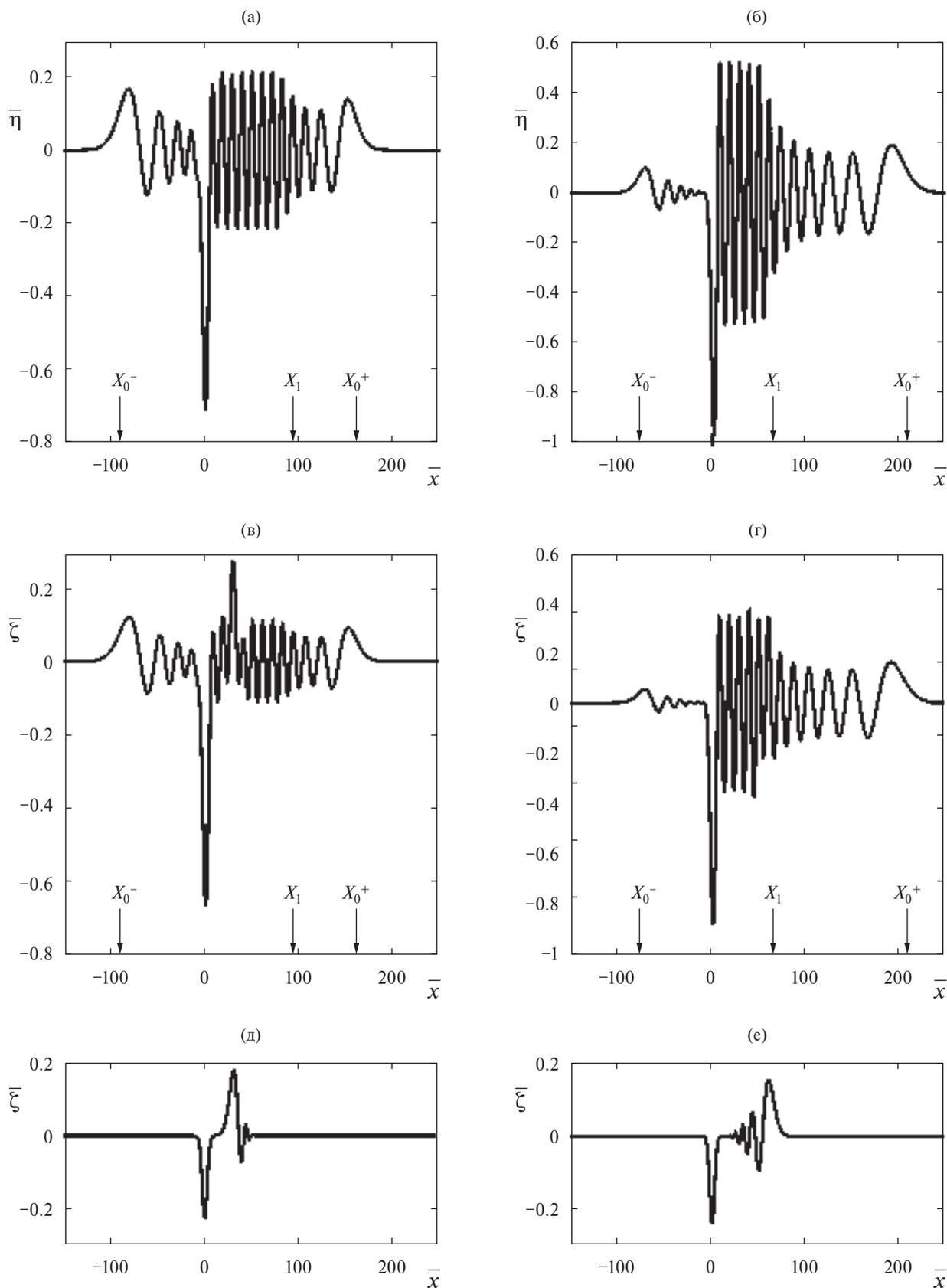


Рис. 4. Возвышения свободной поверхности (а, б) и границы раздела слоев (в–е) при $t = 12$ с для случая 1 (а, в, д) и случая 2 (б, г, е) при наличии свободной поверхности (а–г) и твердой крышки (д, е). Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.

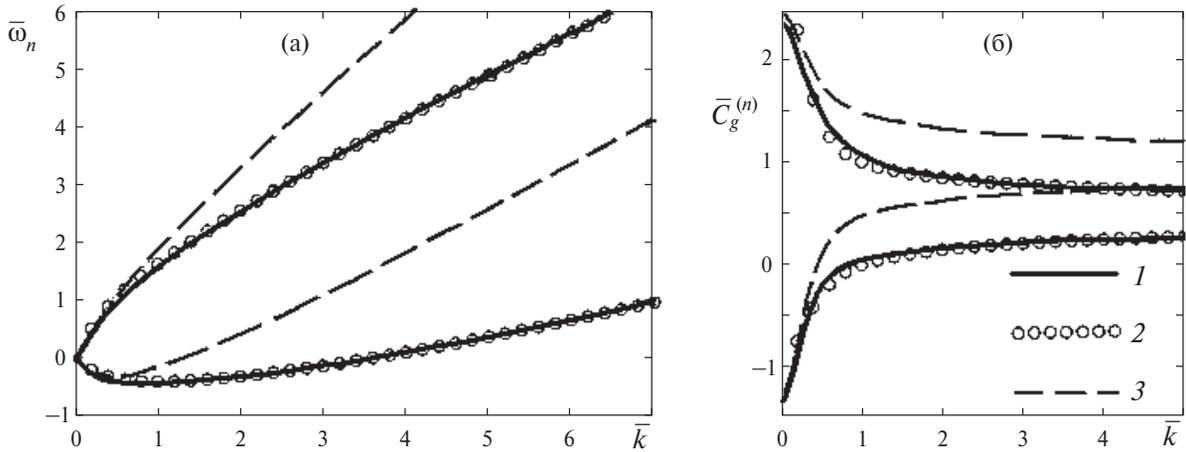


Рис. 5. Дисперсионные зависимости $\bar{\omega}_n(\bar{k})$ (а) и групповые скорости $\bar{c}_g^{(n)}(\bar{k})$ (б): 1 – $n = 1$ и $n = 3$ для двухслойной жидкости в случаях 1; 2 и 3 – моды $n = 1$ и $n = 2$ для однослойной жидкости в случаях 3 и 4 соответственно.

Возвышения свободной поверхности $\eta(x, t)$ и поверхности раздела слоев $\zeta(x, t)$ для момента $t = 12$ с определены в результате численного интегрирования формул (2.12), (2.14) и представлены на рис. 4а, в и рис. 4б, г соответственно для случаев 1 и 2. Используются следующие безразмерные переменные: $(\bar{\eta}, \bar{\zeta}) = (\eta, \zeta)\sqrt{g/H_1}/a, \bar{x} = x/H_1$.

Зависимости групповой скорости волновых мод от волнового числа позволяют определить границы фронтов возбуждаемых волн (подробнее см. [7]). Скорость распространения длинноволновых возмущений определяется значением $\bar{c}_g^{(n)}(0)$. Эти возмущения являются затухающими. В рассматриваемой задаче периодические донные колебания происходят с частотой σ .

Для каждой волновой моды нужно определить значение k_n такое, что $\omega_n(k_n) = \sigma$, и тогда скорость волнового фронта незатухающих колебаний заданной частоты равна $\bar{c}_g^{(n)}(k_n)$. На рис. 4а–г вертикальными стрелками показаны координаты волновых фронтов. Для случая 1 на рис. 4а, в использованы значения $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 2.36$, $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.33$, $\bar{k}_1 = 0.585$, $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 1.36$. Для заданного момента времени $t = 12$ с (в безразмерных переменных $\bar{t} = t\sqrt{g/H_1} = 6862$) координаты волновых фронтов равны: $X_0^+ = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(0) = 162.3$, $X_0^- = \bar{t}\bar{c}_g^{(3)}(0) = -91.01$, $X_1 = \bar{t}\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 9345$.

Для случая 2 (рис. 4б, г) $\bar{c}_g^{(1)}(0) = 2.98$, $\bar{c}_g^{(3)}(0) = -1.15$, $\bar{k}_1 = 0.599$, $\bar{c}_g^{(1)}(\bar{k}_1) = 0.915$, $X_0^+ = 4.6$, $X_0^- = -78.78$, $X_1 = 6277$. В обоих случаях волны с частотой донных пульсаций распространяются только вниз по потоку, т.е. при $x > 0$. Максимальные возвышения как свободной поверхности, так и поверхности раздела возникают в случае 2.

На рис. 4д, е представлены возвышения границы раздела соответственно для случаев 1 и 2 при наличии твердой крышки, полученные в результате численного интегрирования (2.16). Скорость распространения длинноволновых возмущений единственно возможной моды значительно меньше, чем при наличии свободной поверхности (ср. рис. 3б, г), поэтому для рассматриваемого момента еще не сформировались заметные волновые возмущения, которые бы позволили оценить границы волнового фронта.

Сравнение дисперсионных зависимостей и групповых скоростей для двухслойной и однослойной жидкости представлено соответственно на рис. 5а, б. Кривые 1 показывают зависимости для первой и третьей мод в случае 1 для двухслойной жидкости (сравним рис. 3а, б).

Рассмотрено два варианта однослойной жидкости, которые назовем случаями 3 и 4. В случае 3 для всей толщины жидкости используется градиент скорости верхнего слоя случая 1 так, что значения скорости основного потока на различных горизонтах равны $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.5, 0.75, 1.33)$. Кривые 2 соответствуют двум модам такой однослойной жидкости. В случае 4 сохраняется градиент скорости нижнего слоя из случая 1 и значения скорости на различных горизонтах равны $(\bar{V}_0, \bar{V}_1, \bar{V}_2) = (0.986, 0.75, 0.2)$. Кривые 3 соответствуют двум модам этой однослойной жидкости. Практическое совпадение кривых 1 и 2 для дисперсионных зависимостей и групповых скоростей свидетельствует о том, что волновые свойства двухслойной жидкости определяются в основном поведением основного потока вблизи свободной поверхности.

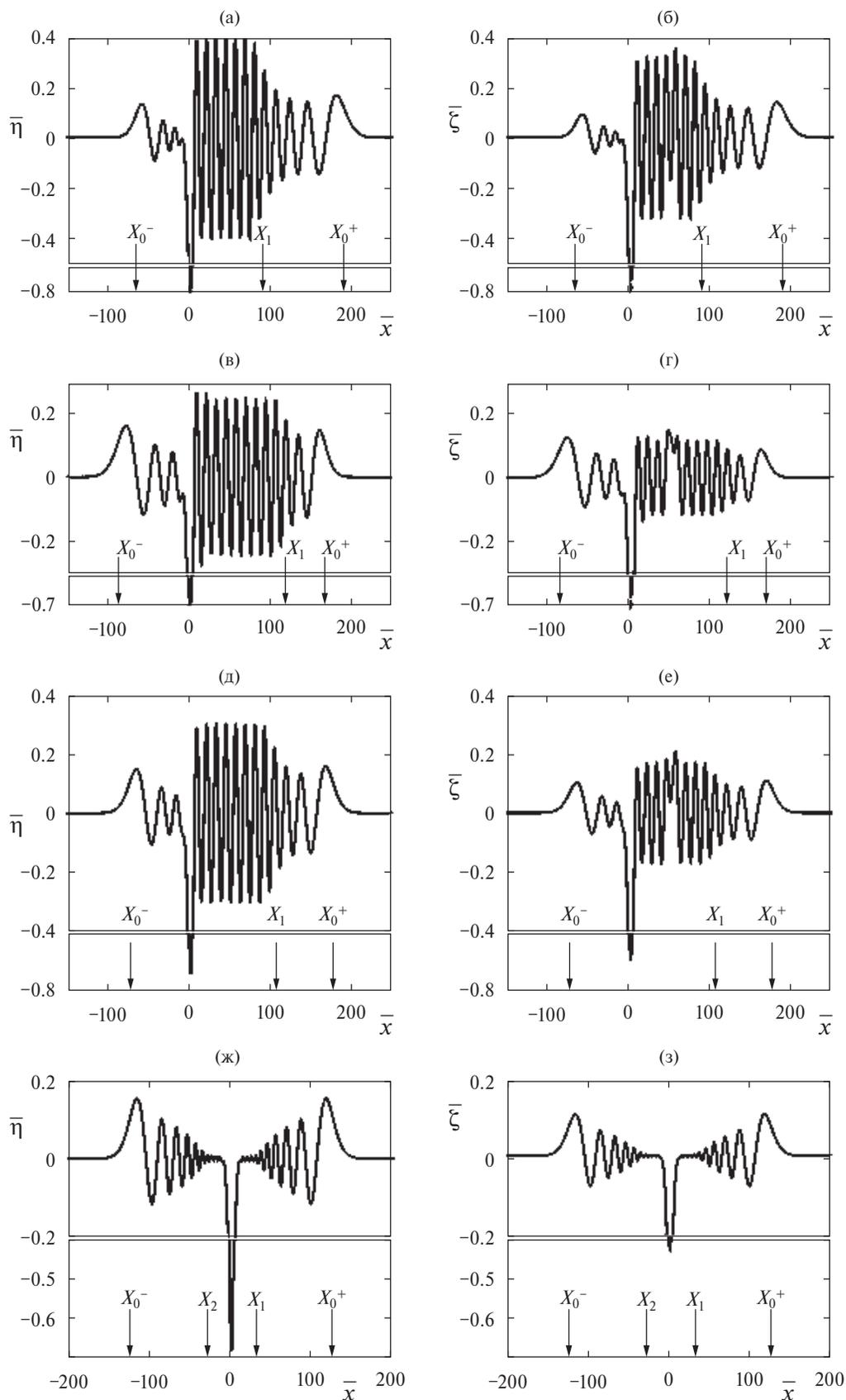


Рис. 6. Вертикальные смещения свободной поверхности (а, в, д, ж) и на горизонте $y = -H_1$ (б, г, е, з) при $t = 12$ с для однослойной жидкости соответственно случаи 3–6. Вертикальные стрелки указывают положения волновых фронтов для различных мод.

Рисунок 6 показывает вертикальные смещения жидкости на свободной поверхности (рис. ба, в, д, ж) и на горизонте $y = -H_1$ (рис. бб, г, е, з) для четырех вариантов однослойной жидкости в момент $t = 12$ с. Использовано численное интегрирование соотношений (2.24) и (2.25). К введенным выше случаям 3 и 4 добавлены случай 5, в котором по всей глубине жидкости безразмерная скорость основного потока равна $V_1 = 0.75$, и случай 6, в котором основной поток отсутствует ($V_1 = 0$).

В последнем случае волновые возмущения симметричны относительно линии $x = 0$. Случаи 3–5 объединяет то, что скорость V_1 на горизонте $y = -H_1$ для всех этих случаев совпадает. Вертикальными стрелками, аналогично рис. 4, показаны границы волновых фронтов для длинноволновых возмущений и возмущений с частотой донных пульсаций: для случая 3 $(X_0^+, X_0^-, X_1) = (191.4, -65.60, 92.53)$ (рис. ба, б); для случая 4 $(X_0^+, X_0^-, X_1) = (168.8, -87.47, 120.8)$ (рис. бв, г); для случая 5 $(X_0^+, X_0^-, X_1) = (176.7, -73.82, 107.0)$ (рис. бд, е); для случая 6 $(X_0^\pm, X_{1,2}) = (\pm 125.3, \pm 31.37)$ (рис. бж, з).

Отметим, что в рассматриваемых случаях для однослойной жидкости наибольшие волновые возмущения как на свободной поверхности, так и на горизонте $y = -H_1$ имеют место для случая 3, а наименьшие – для случая 6. В случае твердой крышки для случаев 3–5 вертикальные смещения на горизонте $y = -H_1$ совпадают. Исследование поведения волнового движения, вызванного периодическими донными колебаниями в установившемся режиме для равномерного потока, выполнено в [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован процесс развития волнового движения в жидкости под действием включения в начальный момент времени периодических колебаний участка дна. Предполагается, что в начальный момент времени фоновый сдвиговой поток не возмущен. Рассмотрено два варианта сдвигового потока: двухслойный поток, в котором градиенты горизонтальной скорости различны в каждом слое, а на границе раздела слоев скорости совпадают, и поток с постоянным градиентом скорости по всей глубине жидкости.

Сопоставлены два типа граничных условий на верхней границе жидкости: свободная поверхность и твердая крышка. Анализ дисперсионных соотношений показал, что при наличии свободной поверхности в двухслойной жидкости существует три волновые моды, а в однослойной жидкости – две волновые моды, тогда как при наличии твердой крышки в обоих вариантах возможна только одна волновая мода.

С использованием интегральных преобразований Фурье и Лапласа получено интегральное представление решения для вертикальных смещений свободной поверхности и границы раздела слоев.

Для двухслойного сдвигового потока возможно существование неустойчивых режимов, в которых волновые возмущения возрастают со временем, что делает несправедливым применение линейной теории спустя некоторый промежуток времени после включения источника возмущения. Тогда в исходных уравнениях и граничных условиях необходимо учитывать нелинейные члены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черкесов Л.В. Неустановившиеся волны. Киев: Наук.думка, 1970. 196 с.
2. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн. Киев: Наук.думка, 1976. 364 с.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика волн. Киев: Наук.думка, 1980. 259 с.
4. Ellingsen S.Å., Li Y. Approximate dispersion relations for waves on arbitrary shear flows // J. Geophysical Research: Oceans. 2017. V. 122. P. 9889–9905.
5. Zhang X. Short surface waves on surface shear // J. Fluid Mech. 2005. V. 541. P. 345–370.
6. Longuet-Higgins M.S. Instabilities of a horizontal shear flow with a free surface // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 147–162.
7. Стурова И.В. Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 4. С. 14–26.
8. Суворов А.М. Генерация внутренних волн в потоке двухслойной жидкости со сдвигом скорости // Цунами и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. С. 170–178.
9. Кейз К.М. Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными // В сб.: Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 37–46.
10. Wahlén E. On rotational water waves with surface tension // Phil. Trans. R. Soc. A. 2007. V. 365. № 3. P. 2215–2225.
11. Tyvand P.A., Torheim T. Surface waves from bottom vibrations in uniform open-channel flow // Eur. J. Mech. B./ Fluids. 2012. V. 36. P. 39–47.

DEVELOPMENT OF THE WAVE MOTION INDUCED BY NEAR-BOTTOM PERIODIC DISTURBANCES IN A TWO-LAYER SHEAR CURRENT

I. V. Sturova*

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

** E-mail: sturova@hydro.nsc.ru*

The behavior of wave motion arising in an ideal incompressible homogeneous fluid under switching-on periodic bottom disturbances is studied in the linear approximation for the two-dimensional non-stationary problem. In the undisturbed state, the velocities of two-layer fluid flow are linear functions of the vertical coordinate in each of the layers with different gradients and coincide on the boundary of the layers. The upper boundary of fluid can be either free or bounded by the rigid cover. The dispersion dependences and the group velocities of the appearing wave modes are determined. The vertical displacements of the free surface and the interface between the layers are calculated. A comparison with the solution for a single-layer fluid is carried out.

Keywords: surface waves, near-bottom disturbances, background shear currents, dispersion dependences