

УДК 533.6.013.128

## КОНИЧЕСКИЕ ТЕЛА С ВОЛНООБРАЗНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ КОНТУРОМ, ИМЕЮЩИЕ МИНИМАЛЬНОЕ ВОЛНОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

© 2024 г. С. А. Таковицкий

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского, г. Жуковский, Россия

E-mail: c.a.t@tsagi.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023 г.

После доработки 30.11.2023 г.

Принята к публикации 30.11.2023 г.

Рассмотрена задача построения поперечного контура конического тела, имеющего минимальное волновое сопротивление в диапазоне сверхзвуковых скоростей, при условии сохранения длины и объема. За исходное тело принят конус, сделано предположение о локальности связи между изменениями геометрических параметров и давления на поверхности, и применена квадратичная аппроксимация. Найденное решение сопоставлено с результатами, полученными в рамках модели Ньютона, и предложено объединение этих решений на основе допущения о степенной зависимости между радиусом и производной радиуса по угловой координате. При этом выделяется класс контуров, у которых половина цикла состоит из элемента с монотонным изменением радиуса и дуги окружности, и описывается заданием одного геометрического параметра — показателя степени. В рамках модели невязкого совершенного газа проведена прямая численная оптимизация формы поперечного контура и показана возможность уменьшения волнового сопротивления по сравнению со звездообразными телами, имеющими плоские грани.

*Ключевые слова:* волновое сопротивление, звездообразное тело, вариационная задача, локальный анализ, модель Ньютона, объединение решений

DOI: 10.31857/S1024708424010097 EDN: SDLZOK

В диапазоне сверхзвуковых скоростей волновое сопротивление, связанное с объемом тела, составляет значительную долю суммарного аэродинамического сопротивления, что объясняет интерес к исследованиям, определяющим направления его уменьшения. Одно из таких направлений — переход к телам с неосесимметричным поперечным сечением.

Первые результаты, подтверждающие возможность уменьшения сопротивления, были получены для тел эллиптической и пирамидальной формы [1, 2]. Допущения, основанные на локальной модели Ньютона, позволили сформулировать и решить вариационную задачу построения поперечного контура тела минимального волнового сопротивления [3, 4].

Установлено, что оптимальные тела имеют звездообразную форму. Лучи стыкуются друг с другом непосредственно или через дуги окружности. Волновое сопротивление тела уменьшается при увеличении расстояния между конусами, которые охватывают лучи. Геометрической особенностью тел является заостренность лучей, половинки каждого луча соединяются под нулевым углом в окрестности вершины. Данная особенность звездообразных конфигураций устраняется при введении в анализ составляющей сопротивления, обусловленной трением [5]. Аналогичные результаты получены в случае совместной минимизации сопротивления тела и его нагрева [6].

Основные теоретические заключения были подтверждены экспериментальными и численными исследованиями. При этом наибольшее внимание уделялось звездообразным телам с плоскими гранями лучей, для которых достигается значительное уменьшение лобового сопротивления по сравнению с конусом, в том числе с учетом донного давления [7–9].

Для практического использования положительных свойств звездообразных тел важно обеспечить плавное сопряжение носовой части с центральной частью корпуса, которая может иметь произвольное поперечное сечение. Первые результаты были получены для носовых частей с линейчатой поверхностью, примыкающих к осесимметричному корпусу, с положительным эффектом в широком диапазоне скоростей [10]. Для задачи минимизации полного сопротивления общее решение в приближении локального взаимодействия и постоянства коэффициента трения представлено в исследованиях [11–13].

Точность модели Ньютона снижается при уменьшении числа Маха. В диапазоне малых и умеренных сверхзвуковых скоростей более надежные результаты получаются в рамках модели Эйлера. При этом на основе локального анализа можно аппроксимировать соотношения, связывающие газодинамические и геометрические параметры, и определить вариации формы, направленные на улучшение аэродинамических характеристик. Для задач, связанных с построением осесимметричных носовых частей с минимальным волновым сопротивлением, установлено согласование результатов, полученных в рамках модели Ньютона и локального анализа [14–16].

В частности, обе модели показывают, что степенные и усеченные степенные тела близки к оптимальным конфигурациям. Объединение решений сопровождается выделением основных геометрических параметров, число которых предельно уменьшено, что упрощает последующую прямую численную оптимизацию. Данный подход развит и применен к построению тел со звездообразным поперечным сечением.

## 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача построения контура поперечного сечения конического тела, имеющего минимальное волновое сопротивление при условии сохранения длины и площади миделевого сечения. В качестве исходного тела принят конус равной длины и объема. Тело обтекается под нулевым углом атаки, давление на донном срезе принимается равным давлению в набегающем потоке. Таким образом минимизируется единственная составляющая аэродинамического сопротивления — волновое сопротивление, связанное с объемом. Определяющими параметрами являются число Маха  $M$ , которое характеризует условия в набегающем потоке, и основная геометрическая характеристика  $\lambda$  — удлинение тела. В представленном исследовании длина тела принята за единицу линейного размера, удлинение тела вычисляется по радиусу  $R$  миделевого сечения исходного конуса,  $\lambda = 1/(2R)$ .

Форма контура описывается зависимостью радиуса  $r$  в миделевом сечении от угла  $\varphi$ , образованного радиусом и вертикальной плоскостью. Увеличению угла соответствует обход по часовой стрелке при виде на тело сзади. Следуя условию замкнутости контура поперечного сечения, считаем, что контур составлен из  $N$  (натуральное число) симметричных циклов. Каждый цикл занимает сектор с углом  $2\pi/N$  и имеет симметричные половинки, соответствующие увеличению и уменьшению радиуса в направлении возрастания угла. Для построения контура достаточно определить зависимость  $r(\varphi)$  в одной из половинок. Далее будем рассматривать половинку цикла в угловом секторе, ограниченном углами  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi_N = \pi/N$ .

Целевая функция — коэффициент волнового сопротивления тела  $C_x$ , который определяется интегрированием сил давления по наветренной поверхности. Для исходного конуса коэффициент сопротивления равен коэффициенту давления на поверхности  $C_{xк} = C_{рк}$ . Предполагаем, что при изменении формы поперечного сечения конуса справедлива локальная зависимость между геометрическими параметрами и давлением на поверхности. Геометрическими параметрами являются приращение радиуса  $y = r - R$  и его производная  $y'$  по углу  $\varphi$ .

Можно показать, что линейной аппроксимации зависимости коэффициента давления от геометрических параметров недостаточно для решения вариационной задачи. Квадратичная аппроксимация в рамках локального анализа записывается следующим образом:

$$C_p = C_{рк} + Dy + Ey' + 0.5Ay^2 + Byy' + 0.5Cy'^2.$$

Здесь,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $B$  — первые и вторые производные коэффициента давления по  $y$  и  $y'$ . Из условий симметрии очевидно, что производные  $E$  и  $B$  равны нулю. В то же время эти производные не входят в итоговый первый интеграл уравнения Эйлера. Для тел большого удлинения приближенные значения производных по приращению радиуса можно определить с помощью метода локальной линеаризации. Он оказался эффективным при построении оптимальных осесимметричных тел [14].

Метод ограничивается рассмотрением вариаций формы тела в плоскости, задаваемой вектором скорости и нормалью к элементу поверхности, и не позволяет определить соотношения, связывающие изменение коэффициента давления с изменением производной  $y'$ . Поэтому он должен быть дополнен прямым численным вычислением производной  $C$  для конкретных условий, определяемых числом Маха и удлинением.

Для целевой функции имеем следующее выражение:

$$C_x = \frac{1}{\varphi_N R^2} \int_0^{\varphi_N} (C_{pk} + Dy + 0.5Ay^2 + 0.5Cy'^2)(R + y)^2 d\varphi.$$

Условие сохранения площади миделевого сечения определяется соотношением

$$\int_0^{\varphi_N} (R + y)^2 d\varphi = \varphi_N R^2.$$

Переход к безусловной минимизации осуществляется введением функции Лагранжа  $L$  с неизвестным множителем  $\mu$ :

$$L = \int_0^{\varphi_N} (C_{pk} + Dy + 0.5Ay^2 + 0.5Cy'^2 + \mu)(R + y)^2 d\varphi.$$

Для экстремали  $y(\varphi)$  функции Лагранжа должно выполняться необходимое условие оптимальности, определяемое уравнением Эйлера. Основная функция функционала не содержит в явном виде независимую переменную  $\varphi$ , что позволяет записать первый интеграл уравнения Эйлера:

$$(C_{pk} + Dy + 0.5Ay^2 - 0.5Cy'^2 + \mu)(R + y)^2 = \text{const}.$$

Вернемся к исходной переменной  $r$  и ее производной  $r'$ :

$$\begin{cases} (F + 2(D - AR)r + Ar^2 - Cr'^2)r^2 = \text{const}; \\ F = 2(C_{pk} - DR + \mu) + AR^2. \end{cases}$$

Для определения неизвестной константы можно использовать значения  $r_1$  и  $r'_1$  в произвольной точке  $\varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_N$ :

$$r'^2 = \frac{F}{C} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + 2 \frac{D - AR}{C} r_1 \left( \frac{r}{r_1} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \frac{A}{C} r_1^2 \left( \frac{r^2}{r_1^2} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + r_1'^2 \frac{r_1^2}{r^2}. \tag{1.1}$$

Решение (1.1) содержит два типа экстремалей. Первый тип представляет собой дугу окружности с центром на оси исходного конуса. В частности, дуга может соответствовать минимальному или максимальному допустимому значению радиуса. Второй тип — экстремали с изменяющимися значениями радиуса  $r$  и производной  $r'$ . Половинка цикла может быть образована произвольным числом указанных экстремалей. В соответствии с условием Эрдмана–Вейерштрасса в точке стыковки экстремалей производные радиуса совпадают по абсолютному значению.

Решение определяется заданием радиуса и производной в одной из точек экстремали и трех параметров  $(F/C, (D - AR)/C, A/C)$ , и должно обеспечивать выполнение условия сохранения площади миделевого сечения. При этом можно отказаться от вычисления конкретных значений производных коэффициента давления, использованных при постановке задачи. Это полностью согласуется с другими решениями, полученными на основе метода локальной линеаризации. Например, при построении осесимметричного тела с минимальным волновым сопротивлением [14] в постановке задачи в качестве исходных параметров использовались давления на торце и поверхности конуса и производная давления по радиусу.

В результате анализа полученного решения были выделены два геометрических параметра, экстремальные значения которых, конечно, могли быть определены с помощью исходных параметров. Однако с учетом предельного уменьшения числа геометрических параметров оказалось возможным отказаться от сделанных допущений и провести прямое варьирование в рамках численного расчета аэродинамических характеристик.

Далее ограничимся случаем, когда половинка цикла содержит два элемента, состыкованных при  $\varphi = \varphi_1$ . При этом условимся, что радиус имеет максимальное значение при  $\varphi_0$ , а минимальное — при  $\varphi_N$ . Первый элемент ( $\varphi \leq \varphi_1$ ) представляет собой боковую поверхность луча с монотонным убыванием радиуса в пределах  $r_1 \leq r \leq r_0$ . Второй элемент ( $\varphi \geq \varphi_1$ ) — дуга окружности с радиусом  $r_1$ . Если  $\varphi_1 = \varphi_N$ , то второй элемент отсутствует.

Заметим, что при проведении численной оптимизации необходимо предусмотреть возможность построения тел с негладкой (с разрывом производной) стыковкой элементов. Нарушение гладкости обусловлено изменением модели течения (например, модель Эйлера вместо модели локальной линеаризации). Таким образом, в общем случае условие Эрдмана – Вейерштрасса  $r'_1 = 0$  не будет выполняться.

## 2. ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛИ НЬЮТОНА

Представленное исследование направлено на установление характерных особенностей оптимальных конфигураций и выделение основных геометрических параметров. Поэтому для дальнейшего упрощения решения (1.1) проведен его анализ и сопоставление с аналогичными решениями, полученными в рамках модели Ньютона.

Предположим, что известны значения производных  $r'_0$  и  $r'_1$  в точках  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Тогда для первого элемента половинки цикла из (1.1) получаем

$$\begin{cases} r'^2 = \left( r_1'^2 - \frac{F}{C} - 2 \frac{D - AR}{C} r_1 - \frac{A}{C} r_1^2 \right) \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{F}{C} + 2 \frac{D - AR}{C} r + \frac{A}{C} r^2; \\ \frac{F}{C} = \left[ r_1'^2 - r_0'^2 \frac{r_0^2}{r_1^2} - 2 \frac{D - AR}{C} r_0 \left( \frac{r_1}{r_0} - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) - \frac{A}{C} r_0^2 \left( \frac{r_1^2}{r_0^2} - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \right] / \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right). \end{cases} \quad (2.1)$$

Соотношения упрощаются в предельном случае  $r_1 \ll r_0$ , который соответствует лучам с большим перепадом высот:

$$\begin{cases} r'^2 = r_1'^2 \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{F}{C} + 2 \frac{D - AR}{C} r + \frac{A}{C} r^2; \\ \frac{F}{C} + 2 \frac{D - AR}{C} r_1 + \frac{A}{C} r_1^2 = 0. \end{cases}$$

Данный случай наиболее интересен, поскольку волновое сопротивление тела уменьшается с ростом расстояния между конусами, ограничивающими лучи. При этом на значительной части боковой поверхности луча  $r_1 \ll r$  и выполняется приближенное соотношение

$$r'^2 = 2 \frac{D - AR}{C} r + \frac{A}{C} r^2.$$

В зависимости от удлинения исходного конуса и соотношения между производными коэффициента давления возможно преобладание одного из слагаемых. В случае тел большого удлинения в рассмотрении остается член с меньшим показателем степени. Учитывая принятое условие монотонного убывания радиуса при увеличении угла  $\varphi$ , находим

$$r' = -\sqrt{2 \frac{D - AR}{C}} r. \quad (2.2)$$

Сопоставим найденное локальным анализом решение с результатами, полученными в рамках модели Ньютона. Для тонких тел установлена зависимость [4]

$$r' = -T \frac{r^3}{\sqrt{r_0^2 - r^2}},$$

где  $T$  — положительная константа.

На части экстремали выполняется условие  $r \ll r_0$ , и зависимость упрощается:

$$r' = -(T/r_0) r^3. \quad (2.3)$$

Для отрезка, лежащего на плоской боковой поверхности луча звездообразного тела с полууглом  $\delta$  при вершине, изменение радиуса по углу  $\varphi$  определяется зависимостью

$$r = \frac{r_0}{\cos \varphi (1 + \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \delta)}.$$

Выполнив дифференцирование, получаем

$$r' = -\frac{\cos \varphi (1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta)}{r_0 \operatorname{tg} \delta} r^2.$$

Соотношение упрощается в случае большого числа циклов и большой высоты волны, когда углы  $\varphi$  и  $\delta$  имеют малые значения и можно заменить числитель единицей

$$r' = -\frac{1}{r_0 \operatorname{tg} \delta} r^2. \quad (2.4)$$

Общей особенностью теоретических решений (2.2)–(2.4) является степенная зависимость производной радиуса от радиуса с изменением показателя степени в пределах от 0.5 до 3. Решения объединяются принятием показателя степени  $k$  в качестве искомого геометрического параметра:

$$r' = P r^k, \quad (2.5)$$

где  $P$  — константа.

При  $k \neq 1$  боковая поверхность луча описывается уравнением, полученным интегрированием объединенного решения (2.5) с константами  $P_1, C_1$ :

$$r = P_1 (\varphi + C_1)^{1/(1-k)}.$$

При  $k = 1$  из решения (6) получается экспоненциальная зависимость с константами  $P_2, C_2$ :

$$r = C_2 e^{P_2 \varphi}.$$

С учетом принятых ограничений объединенное решение (2.5) содержит единственный геометрический параметр — показатель степени, значение которого определяется в процессе численной оптимизации.

### 3. ЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

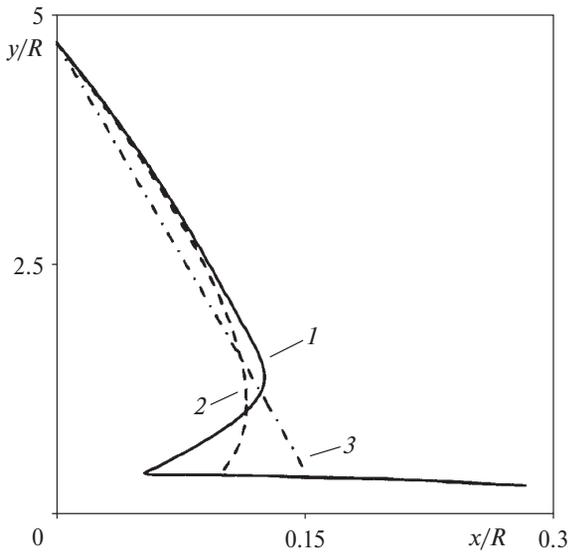
Построение поперечного контура выполнено при  $M = 2$  и  $\lambda = 1.3$  для тела, образованного четырьмя циклами, при минимальном радиусе  $r_1 = 0.4R$ . Оптимизация проводилась при фиксированном значении  $r_0$ , которое соответствовало максимальному радиусу звездообразного тела с лучами, имеющими плоские боковые поверхности. Рассмотрены четыре варианта, отвечающие разным значениям угла, при котором состыкованы элементы контура (отрезок прямой и дуга):  $\varphi_{1pl} = 0.25\varphi_N, 0.5\varphi_N, 0.75\varphi_N, \varphi_N$ .

Фиксирование максимального значения радиуса обеспечивает корректность сопоставления тел по значениям коэффициента сопротивления, поскольку изменение  $r_0$  непосредственно влияет на  $C_x$  и поперечные габариты тела. При этом угол  $\varphi_1$  стыковки элементов у оптимальных тел не совпадает с  $\varphi_{1pl}$ . Это обусловлено сохранением площади поперечного сечения независимо от изменения формы луча.

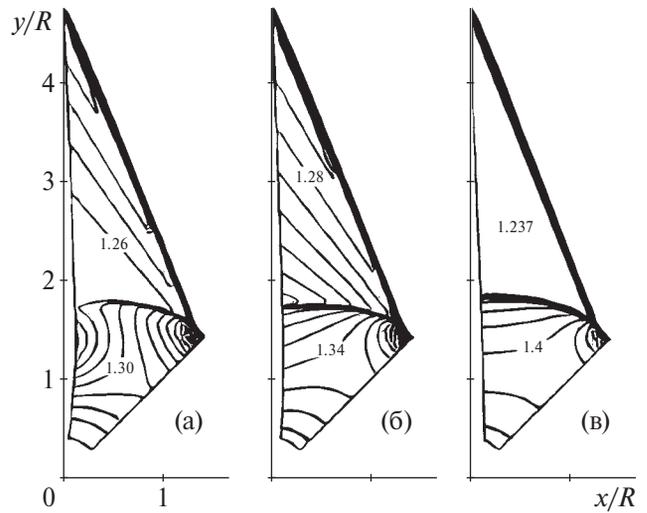
При оптимизации, базирующейся на решении (2.5), константы ( $P_1, C_1$  или  $P_2, C_2$ ) определяются из граничного условия  $r = r_0$  при  $\varphi = \varphi_0$  и условия сохранения площади поперечного сечения. Значение показателя степени  $k$  находится в процессе минимизации волнового сопротивления. В случае использования решения (2.1) число независимых переменных увеличивается. Выполняется минимизация целевой функции по трем параметрам.

Течение около тела моделировалось в рамках уравнений Эйлера. Волновое сопротивление вычислялось непосредственным интегрированием сил избыточного давления по поверхности тела. Головной скачок уплотнения не выделялся и размеры расчетной области выбирались таким образом, чтобы создаваемые телом возмущения не достигали внешней границы. При интегрировании уравнений движения применялась маршевая процедура в цилиндрической системе координат [17]. Суммарное число узлов расчетной сетки в поперечном сечении незначительно превышало 25 000.

Сопоставление поперечных сечений построенных оптимальных тел и звездообразного тела с плоскими гранями при  $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$  представлено на рис. 1.



**Рис. 1.** Сопоставление контуров тел,  $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$ : 1 — тело, построенное оптимизацией по трем параметрам; 2 — тело, построенное оптимизацией по одному параметру; 3 — звездообразное тело с плоскими боковыми поверхностями лучей.



**Рис. 2.** Линии равных значений давления  $p/p_\infty$  в поле течения около тел, построенных оптимизацией по трем (а) и одному (б) параметру, и около звездообразного тела с плоскими боковыми поверхностями лучей (в),  $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$ .

Начало системы координат  $(x, y)$  расположено на продольной оси тела, ось  $y$  соответствует нулевому значению угла  $\varphi$ , для улучшения зрительного восприятия изменен масштаб по горизонтальной оси. Построенные на основе решений (2.1) и (2.5) тела характеризуются увеличением абсолютного значения производной радиуса по угловой координате в окрестности вершины луча. При этом толщина луча увеличивается в верхней части и уменьшается в нижней части, что наиболее заметно для решения (2.1). Соответственно, увеличивается длина примыкающей к лучу дуги окружности. В представленном случае относительное увеличение длины дуги превышает 50%. Заметим, что отклонение от прямолинейности контура луча приводит к незначительному увеличению площади омываемой поверхности тела. При  $\varphi_{1pl} = 0.5\varphi_N$  относительный прирост площади составляет около 1%.

Поперечные сечения полей течения около тел показаны на рис. 2.

Линии равных значений  $p/p_\infty$  давления, отнесенного к давлению в набегающем потоке, построены в пределах ударного слоя с шагом 0.02. Для тела с плоской боковой поверхностью луча характерно постоянство давления на части поверхности, которая выступает за пределы скачка уплотнения, формирующегося при обтекании элемента осесимметричного конуса. Изменение формы боковой поверхности луча в результате оптимизации сопровождается увеличением давления в области, примыкающей к вершине, и уменьшением давления в области, примыкающей к элементу, образованному дугой окружности.

Основные результаты оптимизационных исследований на основе решений (2.1) и (2.5) представлены в табл. 1 для рассмотренных углов стыковки элементов половинки цикла  $\varphi_{1pl}$ . Приведены значения  $C_x/C_{xpl}$  коэффициентов сопротивления, отнесенных к коэффициенту сопротивления звездообразного тела с плоскими гранями, и относительные значения углов стыковки  $\varphi_1/\varphi_N$ . Дополнительно для тела, построенного оптимизацией по одному геометрическому параметру, указаны значения показателя степени  $k$ .

**Таблица 1.** Результаты оптимизационных исследований

$\varphi_{1pl}/\varphi_N$	Решение (2.1)		Решение (2.5)		
	$C_x/C_{xpl}$	$\varphi_1/\varphi_N$	$C_x/C_{xpl}$	$\varphi_1/\varphi_N$	$k$
0.25	0.936	0.059	0.951	0.135	1.56
0.5	0.955	0.165	0.964	0.315	1.6
0.75	0.982	0.34	0.984	0.564	1.69
1	0.992	0.41	0.993	0.73	1.65

Для всех рассмотренных значений угла стыковки  $\varphi_{1pl}$  результаты оптимизации подтверждают возможность уменьшения волнового сопротивления по сравнению со звездообразными телами, имеющими плоские боковые грани. Выигрыш по сопротивлению тем больше, чем меньше ширина и, следовательно, больше высота луча.

При  $\varphi_{1pl} = \varphi_N$  относительное уменьшение коэффициента сопротивления не превышает 1%. Для варианта  $\varphi_{1pl} = 0.25\varphi_N$ , соответствующего максимальной (из рассмотренных) высоте волны, коэффициент волнового сопротивления уменьшается примерно на 6 и 5% для решений (2.1) и (2.5) соответственно. Отметим, что тела, построенные на основе двух решений, заметно отличаются по форме в окрестности стыковки боковой поверхности и конического элемента, что проявляется в значениях угла  $\varphi_1$ . При этом выигрыши по сопротивлению отличаются незначительно.

Таким образом, можно заключить, что решения, полученные на основе локального анализа и модели Ньютона, могут быть объединены введением степенной зависимости между радиусом и производной радиуса по угловой координате. Тела с волнообразным поперечным контуром, построенные в соответствии с объединенным решением, имеют меньшее волновое сопротивление по сравнению со звездообразными телами, лучи которых имеют плоские боковые грани. Выигрыш по сопротивлению возрастает при увеличении высоты луча.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит А.Н. Крайко за внимание к работе и полезные замечания.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа финансирована из средств бюджета института (учреждения, организации). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ferry A., Ness N., Kaplita T.* Supersonic flow over conical bodies without axial symmetry // JAS. 1953. 20. № 8. P. 563–571.
2. *Майканар Г.И.* О волновом сопротивлении неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 376–378.
3. *Гонор А.Л.* О пространственных телах наименьшего сопротивления при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 185–189.
4. *Гонор А.Л., Черный Г.Г.* Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 292–305.
5. *Миеле А., Саарис Дж.* Поперечный контур тела минимального полного сопротивления / Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 306–324.
6. *Аргучинцева М.А.* Аналитическое решение одного класса вариационных задач аэродинамики больших скоростей // Известия Иркутского государственного университета. Сер.: Математика. 2007. Т. 1. № 1. С. 52–61.
7. *Ведерников Ю.А., Гонор А.Л., Зубин М.А., Остапенко Н.А.* Аэродинамические характеристики звездообразных тел при числах  $M=3-5$  // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 4. С. 88–93.
8. *Зубин М.А., Лапыгин В.И., Остапенко Н.А.* Теоретическое и экспериментальное исследование структуры сверхзвукового обтекания тел звездообразной формы и их аэродинамических характеристик // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 3. С. 34–40.
9. *Щепановская Г.И., Щепановский В.А.* Влияние ударного слоя на вязкое сопротивление звездообразных тел с плоскими боковыми гранями // Прикладная механика и техническая физика. 1985. № 4. С. 105–112.
10. *Гусаров А.А., Дворецкий В.М., Иванов М.Я., Левин В.А., Черный Г.Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик пространственных тел // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 3. С. 97–102.
11. *Якунина Г.Е.* К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 299–310.

12. Якунина Г.Е. Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 605–614.
13. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е. Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: Янус-К, 2001. 132 с.
14. Таковицкий С.А. Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 157–162.
15. Таковицкий С.А. Усеченные степенные тела как результат приближенного решения задачи Ньютона о теле с минимальным сопротивлением // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 5. С. 113–118.
16. Таковицкий С.А. Осесимметричные носовые части с передним торцом и гипергеометрической образующей как результат решения задачи Ньютона о теле минимального сопротивления при заданных габаритах и объеме // Ученые записки ЦАГИ. 2023. Т. 54. № 4. С. 21–27.
17. Таковицкий С.А. Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многозонных расчетных сеток // Труды ЦАГИ. 1997. Вып. 2590.

## CONICAL BODIES WITH STAR-SHAPED TRANSVERSE CONTOUR HAVING THE MINIMUM WAVE DRAG

© 2024 S. A. Takovitskii

*Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Moscow oblast, Russia  
e-mail: c.a.t@tsagi.ru*

The problem of constructing the transverse contour of a conical body having the minimum wave drag in the range of supersonic velocities provided that the length and the volume are preserved is considered. A cone is taken as the initial body, an assumption about locality of the relation between variations in the geometric parameters and the pressure on the surface is made, and the quadratic approximation of this relation is used. The found solution is compared with the results obtained within the framework of the Newton model. These solutions are proposed to combine being based on the assumption of the power-law relation between the radius and the derivative of radius with respect to the angular coordinate. In this case, a class of contours in which half of the cycle consists of the element with monotonic variation in the radius and arc of the circle is distinguished. These contours can be described by specifying a single geometric parameter, namely, the exponent. Using the inviscid perfect gas model, direct numerical optimization of the shape of transverse contour is carried out and the possibility of reducing the wave drag as compared to the star-shaped bodies with plane faces is demonstrated.

*Keywords:* wave drag, star-shaped body, variational problem, local analysis, Newton model, combination of solutions