

УДК 532.59:539.3

ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ПРИ НАЛИЧИИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ СО СДВИГОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ

Л. А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.09.2023 г.

После доработки 25.09.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Исследовано поведение ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления при наличии в верхнем слое потока со сдвигом скорости. Предполагается, что в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, прогиб льда установившийся. Использован метод преобразования Фурье в рамках линейной теории волн. Исследованы критические скорости, прогиб ледяного покрова и волновые силы в зависимости от градиента скорости течения, толщины сдвигового слоя, направления движения и коэффициента сжатия.

Ключевые слова: тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационная волна, сдвиговой поток, движущаяся нагрузка

DOI: 10.31857/S1024708424010074 EDN: SDQOMI

В настоящее время ведутся активные работы по освоению Арктики. Задача о поведении ледяного покрова под действием движущейся нагрузки изучается, в целях исследования, с одной стороны, способов разрушения ледяного покрова с помощью судов на воздушной подушке, а с другой — возможности использования ледяного покрова в качестве переправ, плавающих платформ различного назначения. Для безопасности работ на льду необходимо изучать закономерности его поведения при механическом воздействии.

В настоящее время задача о поведении ледяного покрова под действием прямолинейно движущейся нагрузки изучена достаточно хорошо при ее стационарном и нестационарном движении. Имеется значительное число работ о влиянии различных физических факторов на характер распространения изгибно-гравитационных волн в плавающем ледяном покрове. Однако влияние подледного течения со сдвигом скорости изучено недостаточно.

Данная статья является продолжением работы [1], в которой исследованы критические скорости и прогиб ледяного покрова с учетом равномерного сжатия в ближнем и дальнем поле при наличии течения с постоянным сдвигом скорости по всей толщине жидкости. Однако в реальных условиях скорость течения жидкости может меняться произвольным образом и по величине, и по направлению. Поэтому необходимы дальнейшие исследования с учетом таких факторов. Обзор предыдущих источников по указанной теме можно найти в работе [1].

Достаточно хорошо изучено влияние течения с вертикальным сдвигом скорости общего вида на поверхностные волны. Аналитические результаты по волнам при наличии течения со сдвигом скорости получены только для нескольких типов распределения скорости течения по глубине: линейного [2], экспоненциального [3], степенного со степенью $1/7$ [4], в виде суммы гиперболических функций [5]. Различные приближенные модели использовались для описания взаимодействия волн и течений с применением разложений по малому параметру [6–10].

Другой приближенный метод решения задач при сдвиговом течении с произвольным профилем по глубине жидкости основан на приближении его ломаной линией и делении области жидкости на слои [11–16]. В каждом слое завихренность постоянна, и решение строится аналитически.

Сходимость такого приближения к точному решению при $N \rightarrow \infty$ (N — число слоев) доказана в работе [15]. Метод кусочно-линейной аппроксимации прост и эффективен, но он приводит к системе уравнений

порядка $N + 2$ Дисперсионное соотношение в этом случае приближается полиномом порядка $N + 1$, которое имеет дополнительные корни. Смысл этих дополнительных собственных значений и векторов выяснен в работах [14, 15]. При этом непрерывное распределение скорости течения заменяется кусочно-линейным распределением с наличием $N - 1$ тангенциальных разрывов. Устойчивость такого течения к возмущениям необходимо дополнительно исследовать.

Далее приведено решение задачи о поведении плавающего ледяного покрова под действием прямолинейно, с постоянной скоростью движущейся нагрузки при наличии верхнего слоя жидкости с линейным сдвигом скорости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный ледяной покров на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины H . Предполагается, что имеется два слоя жидкости, из которых нижний слой толщиной H_2 покоится, а верхний толщиной $H_1 = H - H_2$ имеет постоянный сдвиг скорости γ . Ледяной покров моделируется упругой бесконечной пластиной постоянной толщины, плывущей по поверхности жидкости.

Если в неподвижной системе координат ось Ox' направлена вдоль течения жидкости, то в подвижной декартовой системе координат, связанной с пластиной, жидкость течет в противоположном направлении.

Введем декартову систему координат $Oxyz$, связанную с пластиной, с центром O на верхней границе жидкости и осью Oz , направленной вертикально вверх. Вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = U(z) + u, v, w, \quad U(z) = \begin{cases} \gamma z, & -H_1 < z < 0, \\ -\gamma H_1, & -H < z < -H_1. \end{cases}$$

Основное течение жидкости $U(z)$ не потенциально, имеет постоянную завихренность γ в верхнем слое; u, v, w — возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением. Предполагается, что заданное внешнее давление p_0 равномерно распределено по области прямоугольной формы шириной $2b$ и длиной $2a$. Область давления движется с постоянной скоростью V под углом ψ к оси Ox . Давление внешней нагрузки равно $p_0 = gM/(4ab)$, где M — масса движущегося тела, g — ускорение свободного падения. Данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Рассмотрим движение жидкости. Скорость ее течения удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P/\rho - g\mathbf{i}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad P = -\rho gz + p. \quad (1.1)$$

Здесь d/dt — полная производная по времени, P — гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления p , ρ — плотность жидкости, $\mathbf{i}_z$ — единичный орт оси Oz . Прогиб ледяного покрова $\eta(x, y, t)$ описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа–Лява

$$D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + \rho_0 h d^2\eta/dt^2 = -\rho g\eta + p(x, y, 0, t) - p_0(x, y, t), \quad (1.2)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины, Q — сжимающие усилия в пластине, ρ_0, h — плотность и толщина льда, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$w(x, y, -H, t) = 0, \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости — кинематическое условие

$$w(x, y, 0, t) = d\eta/dt \quad (1.4)$$

и динамическое условие (1.2). На границе между слоями ставятся условия непрерывности вертикальной скорости и давления.

2. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', z', H', H'_1, H'_2, a', b') = (x, y, z, H, H_1, H_2, a, b) / L, \quad t' = t \sqrt{g / L}, \quad L = a,$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{gL}}, \quad S = \gamma \sqrt{L/g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho g L^4}, \quad q = \frac{Q}{\rho g L^2}, \quad \chi = \frac{\rho_0 h}{\rho L},$$

$$(U', u', v', w') = (U, u, v, w) / \sqrt{gL}, \quad \eta' = \eta / L, \quad (p', p'_0) = (p, p_0) / (\rho g L).$$

Штрихи далее опускаем. Среди всех безразмерных параметров задачи параметр χ , который характеризует инерцию пластины, является малым и несущественным, инерция пластины мала по сравнению с инерцией жидкости. Для упрощения выражений можно положить его равным нулю.

Введем вертикальную координату в каждом слое:

$$z_1 = z, \quad z_2 = z + H_1,$$

так что на верхней границе каждого слоя $z_j = 0$, а на нижней границе $z_j = -H_j$. Скорость течения в каждом слое имеет вид

$$U_1(z_1) = S_1 z_1, \quad U_2 = -S_1 H_1.$$

Рассмотрим волновые линейные возмущения вида

$$(\eta, u, v, w, p) = (\bar{\eta}, \bar{u}(z), \bar{v}(z), \bar{w}(z), \bar{p}(z)) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \Omega t)},$$

$$\Omega = \omega \sqrt{L/g}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y), \quad \mathbf{r} = (x, y),$$

где ω — частота в размерных переменных. Тогда система уравнений (1.1) линеаризуется и записывается в каждом слое в виде

$$\begin{aligned} i(-\Omega + k_x U_j(z_j)) \bar{u}_j + S_j \bar{w}_j &= -ik_x \bar{p}_j, \\ i(-\Omega + k_x U_j(z_j)) \bar{v}_j &= -ik_y \bar{p}_j, \\ i(-\Omega + k_x U_j(z_j)) \bar{w}_j &= -\bar{p}'_j, \\ ik_x \bar{u}_j + ik_y \bar{v}_j + \bar{w}'_j &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $j = 1, 2$; $S_2 = 0$, штрих означает дифференцирование по z .

После преобразований в каждом слое получаем уравнение

$$\bar{w}''_j - k^2 \bar{w}_j = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Общее решение имеет вид

$$\bar{w}_j = A_j \operatorname{sh}(k(z_j + H_j)) + B_j \operatorname{ch}(k(z_j + H_j)).$$

Для определения четырех неизвестных констант A_j, B_j имеем два уравнения на границе между слоями, а также условия на дне (1.3) и верхней границе (1.2). Из условия (1.3) и условия непрерывности вертикальной скорости следует

$$B_2 = 0, \quad B_1 = A_2 \operatorname{sh} k H_2.$$

Для давления получаем формулу

$$\begin{aligned} k^2 p_j &= [i(\Omega - k_x U_j(z_j)) k \operatorname{ch} k(z_j + H_j) + ik_x S_j \operatorname{sh} k(z_j + H_j)] A_j + \\ &+ [i(\Omega - k_x U_j(z_j)) k \operatorname{sh} k(z_j + H_j) + ik_x S_j \operatorname{ch} k(z_j + H_j)] B_j. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Из условия непрерывности давления на границе слоев находим ($z_1 = -H_1, z_2 = 0, S_2 = 0, S_1 = S$)

$$i(\Omega + k_x S H_1) A_1 k + ik_x S B_1 = i(\Omega + k_x S H_1) k A_2 \operatorname{ch} k H_2.$$

Подставляем выражение для A_2 через B_1 :

$$i(\Omega + k_x SH_1)kA_1 + ik_x SB_1 - i(\Omega + k_x SH_1)k \operatorname{cth} kH_2 B_1 = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (1.2) на верхней границе с помощью выражения для гидродинамического давления (2.2) и условия (1.4) при $p_0 = 0$ преобразуется к виду

$$[k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) \operatorname{th} kH_1 - \Omega^2 k - \Omega k_x S \operatorname{th} kH_1]A_1 + \\ + [k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \Omega^2 k \operatorname{th} kH_1 - \Omega k_x S]B_1 = 0. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.3), (2.4) образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений. Чтобы она имела нетривиальное решение, определитель должен быть равен нулю. Этот определитель и является дисперсионным соотношением, определяющим зависимость частоты от волнового числа k и направления распространения. В данном случае это полином третьего порядка. Приравнявая его нулю и вводя цилиндрические координаты в плоскости волновых чисел $k_x = k \cos \alpha$, после преобразований получаем уравнение

$$\Omega^3 + \Omega^2 S \cos \alpha \left(kH_1 + \frac{\operatorname{sh} kH_1 \operatorname{ch} kH_2}{\operatorname{ch} kH} \right) - \\ - \Omega \left[k(\beta k^4 - qk^2 + 1) \operatorname{th} kH - S^2 \cos^2 \alpha \left(kH_1 \operatorname{th} kH - \frac{\operatorname{sh} kH_1 \operatorname{sh} kH_2}{\operatorname{ch} kH} \right) \right] - \\ - k(\beta k^4 - qk^2 + 1) S \cos \alpha \left(kH_1 \operatorname{th} kH - \frac{\operatorname{sh} kH_1 \operatorname{sh} kH_2}{\operatorname{ch} kH} \right) = 0. \quad (2.5)$$

Можно эту систему свести к обобщенной задаче на собственные значения для системы удвоенного порядка.

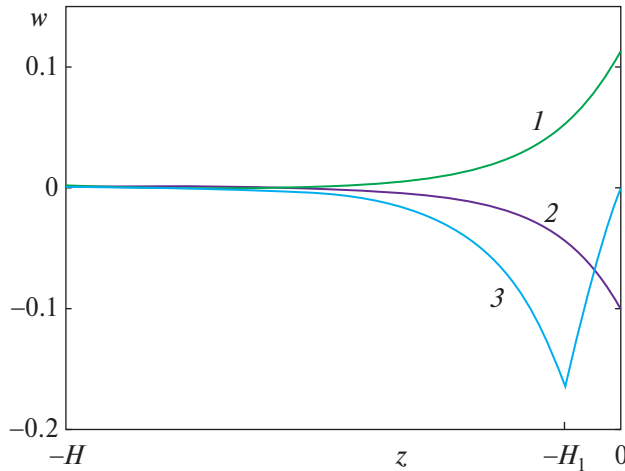


Рис. 1. Пример собственных векторов дисперсионного соотношения для системы уравнений (2.3), (2.4).

Проведенные расчеты (исходные данные приведены в разд. 4) показали, что в системе есть две частоты, соответствующие изгибно-гравитационным волнам в жидкости под упругой пластиной, а также дополнительная частота малой величины, соответствующая волнам на границе слоев. Различить частоты можно по их собственным векторам [14].

Собственные векторы, соответствующие изгибно-гравитационным волнам, имеют максимум на верхней поверхности, а собственный вектор дополнительной частоты имеет максимум на границе слоев. Пример таких векторов показан на рис. 1. Из рисунка видно, что векторы с номерами 1, 2 соответствуют изгибно-гравитационным волнам, а с номером 3 — волнам на границе слоев.

Исследовалась линейная устойчивость двуслойного течения к малым возмущениям в зависимости от толщины сдвигового слоя. Если кубическое уравнение (2.5) имеет только один действительный корень при некоторых параметрах задачи, то два других корня являются комплексно-сопряженными, одно из них дает растущее со временем решение.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение строится аналогично работе [14]. Поскольку мы ищем стационарное решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, в исходной системе координат, связанной с ледяной пластиной, возмущенные скорости движения жидкости имеют вид

$$(u, v, w) = (u(\mathbf{r}_1, z), v(\mathbf{r}_1, z), w(\mathbf{r}_1, z)), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{F}t, \quad \mathbf{F} = (F \cos \psi, F \sin \psi).$$

Применяем преобразование Фурье по переменным x, y . Неизвестные функции u, v, w, η, p ищем в виде

$$(u, v, w)(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y),$$

$$\eta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y,$$

$$p(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}(k, z) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y.$$

Функцию $p_0(\mathbf{r}_1)$ также представим в виде

$$p_0(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} dk_x dk_y.$$

Решение строим таким же образом, как в разд. 2, только в уравнениях (2.1)–(2.3) $\Omega = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})$. Уравнение движения пластины теперь содержит в правой части движущуюся область давления

$$\left[k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) \operatorname{th} k H_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 k - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) k_x S \operatorname{th} k H_1 \right] A_1 +$$

$$+ \left[k^2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 k \operatorname{th} k H_1 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) k_x S \right] B_1 = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) k^2 \bar{p}_0 / \operatorname{ch} k H_1.$$

После преобразований, вводя полярные координаты $k_x = k \cos \alpha$, $k_y = k \sin \alpha$, получаем уравнение

$$\left[(\beta k^4 - qk^2 + 1) \left(k - \frac{S \cos \alpha S_H}{S H_1 \cos \alpha + F \cos(\alpha - \psi)} \right) - k^2 F^2 \cos^2(\alpha - \psi) \operatorname{cth} k H + \right.$$

$$+ \frac{S F \cos \alpha \cos(\alpha - \psi)}{S H_1 \cos \alpha + F \cos(\alpha - \psi)} [k F \cos(\alpha - \psi) + S \cos \alpha \operatorname{th} k H_1] C_H -$$

$$\left. - k S F \cos \alpha \cos(\alpha - \psi) \right] B_1 = \frac{i k^2 F \cos(\alpha - \psi) \operatorname{sh} k H_2}{\operatorname{sh} k H} \bar{p}_0,$$

где

$$S_H = \frac{\operatorname{sh} k H_1 \operatorname{sh} k H_2}{\operatorname{sh} k H}, \quad C_H = \frac{\operatorname{ch} k H_1 \operatorname{sh} k H_2}{\operatorname{sh} k H}.$$

Перейдем в систему координат $Ox_1 y_1 z$, движущуюся вместе с нагрузкой, повернутую на угол ψ относительно исходной системы, с осью Ox_1 направленной вдоль линии движения, осью Oy_1 — перпендикулярной к ней. Получаем

$$f(k, \sigma) B_1 = \frac{i k^2 F \cos \sigma \operatorname{sh} k H_2}{\operatorname{sh} k H} \bar{p}_0, \quad (3.1)$$

$$\sigma = \alpha - \psi,$$

$$\bar{p}_0(k) = 4 p_0 \frac{\sin(k a \cos \sigma) \sin(k b \sin \sigma)}{k^2 \cos \sigma \sin \sigma},$$

$$f(k, \sigma) = \left(\beta k^4 - qk^2 + 1 \right) \left(k - \frac{S \cos(\sigma + \psi) S_H}{S H_1 \cos(\sigma + \psi) + F \cos \sigma} \right) - k^2 F^2 \cos^2 \sigma \operatorname{cth} k H -$$

$$- k S F \cos \sigma \cos(\sigma + \psi) + \frac{S F \cos \sigma \cos(\sigma + \psi)}{S H_1 \cos(\sigma + \psi) + F \cos \sigma} [k F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi) \operatorname{th} k H_1] C_H.$$

Из условий (1.4), (2.3) находим

$$\bar{\eta} = \frac{A_1 \operatorname{sh} k H_1 + B_1 \operatorname{ch} k H_1}{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} = -\frac{\bar{p}_0 [k F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(k H_1 - S_H)]}{f(k, \sigma) [F \cos \sigma + S H_1 \cos(\sigma + \psi)]}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье из (3.1) получаем

$$\eta(x_1, y_1) = -\frac{2p_0}{\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(ka \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)}{k \cos \sigma \sin \sigma f_1(k, \sigma)} \cos(k(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)) g(k, \sigma) dk d\sigma, \quad (3.2)$$

$$g(k, \sigma) = kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H),$$

$$\begin{aligned} f_1(k, \sigma) = & (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] - \\ & - [k^2 F^2 \cos^2 \sigma \operatorname{cth} kH + kSF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi)] [F \cos \sigma + SH_1 \cos(\sigma + \psi)] + \\ & + SF \cos \sigma \cos(\sigma + \psi) [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi) \operatorname{th} kH] C_H. \end{aligned}$$

В частных случаях $\psi = 0, \pi$ формулы упрощаются: при $\psi = 0$

$$g(k, \sigma) = kF + S(kH_1 - S_H),$$

$$f_1(k, \sigma) = (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S(kH_1 - S_H)] - \cos^2 \sigma [(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH + kSF)(F + SH_1) - SF(kFC_H + SS_H)];$$

при $\psi = \pi$

$$g(k, \sigma) = kF - S(kH_1 - S_H),$$

$$f_1(k, \sigma) = (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF - S(kH_1 - S_H)] - \cos^2 \sigma [(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH - kSF)(F - SH_1) + SF(kFC_H - SS_H)].$$

Известно, что существует критическая скорость движения нагрузки. При движении со скоростью, меньшей критической, функция $f_1(k, \sigma)$ не имеет корней, соответствующих изгибно-гравитационным модам. Волны в ледяном покрове не возникают, деформации льда локализованы вблизи области нагрузки. Для определения критической скорости исследуем корни функции f_1 . Рассмотрим случай $\psi = 0$. Из условия $f_1(k, \sigma) = 0$ получаем

$$\cos^2 \sigma = \frac{(\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S(kH_1 - S_H)]}{(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH + kSF)(F + SH_1) - SF(kFC_H + SS_H)} \leq 1. \quad (3.3)$$

Критическое значение параметра F_* достигается при $\cos^2 \sigma = 1$. Получаем

$$\begin{aligned} G(k, F_*) = 0, \quad G(k, F) = & F^3 k^2 \operatorname{cth} kH + kF^2 S(kH_1 \operatorname{cth} kH + 1 - C_H) + \\ & + F[S^2(kH_1 - S_H) - k(\beta k^4 - qk^2 + 1)] - S(\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку F_* является наименьшим значением, для которого выполнено уравнение (3.4), то $\partial F / \partial k = 0$. Дифференцируем уравнение (3.4) по k :

$$\partial G / \partial k(k, F_*) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.4) и (3.5) с условием $\partial F / \partial k = 0$ составляют систему для определения критических значений F_*, k_* . Система решалась методом Брауна [17].

При $\psi = \pi$ получаем аналогично:

$$\cos^2 \sigma = \frac{(\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF - S(kH_1 - S_H)]}{(k^2 F^2 \operatorname{cth} kH - kSF)(F - SH_1) + SF(kFC_H - SS_H)} \leq 1. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} G(k, F_*) = 0, \quad G(k, F) = & F^3 k^2 \operatorname{cth} kH - kF^2 S(kH_1 \operatorname{cth} kH + 1 - C_H) + \\ & + F[S^2(kH_1 - S_H) - k(\beta k^4 - qk^2 + 1)] + S(\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.5), (3.7) с условием $\partial F / \partial k = 0$ находим критические значения F_*, k_* . В общем случае произвольного угла ψ уравнение $f_1(k, \sigma) = 0$ преобразуется к виду

$$a_1(k) \operatorname{tg}^3 \sigma + a_2(k) \operatorname{tg}^2 \sigma + a_3(k) \operatorname{tg} \sigma + a_4(k) = 0, \quad (3.8)$$

$$a_1(k) = S \sin \psi (\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H),$$

$$a_2(k) = FS^2 \sin^2 \psi (kH_1 - S_H) - (\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S \cos \psi (kH_1 - S_H)],$$

$$a_3(k) = S \sin \psi [(\beta k^4 - qk^2 + 1)(kH_1 - S_H) - k^2 F^2 H_1 \operatorname{cth} kH - kF(F + 2SH_1 \cos \psi) + F(kF + 2S \cos \psi \operatorname{th} kH_1)C_H].$$

$$a_4(k) = -(\beta k^4 - qk^2 + 1)[kF + S \cos \psi (kH_1 - S_H)] + FS^2 \cos^2 \psi (kH_1 - S_H) + k^2 F^2 \operatorname{cth} kH (F + SH_1 \cos \psi) + kF^2 S \cos \psi (1 - C_H).$$

Поскольку это кубическое уравнение с вещественными коэффициентами, то оно всегда имеет действительный корень. При $F > F_*$ имеется интервал значений параметра k , где уравнение (3.8) имеет три действительных корня. На границах этого интервала комплексно-сопряженные корни становятся действительными и соответственно кратными. Запишем это уравнение в виде

$$a_1(k)t^3 + a_2(k)t^2 + a_3(k)t + a_4(k) = 0, \quad t = \operatorname{tg} \sigma.$$

Тогда производная по t тоже равна нулю на границах интервала

$$3a_1(k)t^2 + 2a_2(k)t + a_3(k) = 0,$$

$$t_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}}{3a_1}, \quad t_2 = -\frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 - 3a_1a_3}}{3a_1}. \quad (3.9)$$

Подставляем значения t_1, t_2 в уравнение (3.8) и получаем два трансцендентных уравнения. Для t_1 корней нет, а для t_2 при $F > F_*$ находятся два корня. При $F = F_*$ эти два корня совпадают. Из условия кратности корней производная по k тоже обращается в нуль:

$$a'_1(k)t_2^3 + a'_2(k)t_2 + a'_3(k)t_2 + a'_4(k) = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, получили опять систему двух уравнений: (3.8) при $\operatorname{tg} \sigma = t_2$ и (3.10), которая решается методом Брауна. Начальные приближения для поиска F_*, k_* находятся с помощью численных расчетов.

Множество всех корней функции $f_1(k, \sigma)$ при $F > F_*$ образует в плоскости волновых чисел две кривые: C_k^1 и C_k^2 . C_k^1 соответствует изгибно-гравитационным волнам, а C_k^2 — волнам на границе слоев. Анализ функции $f_1(k, \sigma)$ показывает, что при $F > F_*$ имеется интервал (σ_1, σ_2) угла σ , где функция f_1 имеет два действительных корня $k_1(\sigma), k_2(\sigma)$, соответствующих изгибно-гравитационным волнам. А также есть небольшой интервал (σ_3, σ_4) , где функция f_1 имеет дополнительный корень $k_0(\sigma)$, соответствующий волнам на границе слоев. При $\psi = 0, \pi$ дополнительной моды нет.

При $\psi = 0, \pi$ значения σ_1, σ_2 находим из формул (3.3), (3.6) как минимальные и максимальные величины. При произвольном угле ψ и $F > F_*$ сначала находим с помощью уравнений (3.8), (3.9) интервал значений (k_1^*, k_2^*) , в котором существуют изгибно-гравитационные волны, т.е. уравнение (3.8) имеет три корня. На этом интервале находим значения параметра k , при которых $\partial \sigma / \partial k = 0$ для верхней и нижней кривой. Значения угла σ в этих точках определяют (σ_1, σ_2) . На рис. 2 изображены для примера кривые C_k^1, C_k^2 для ледяного покрова толщиной $h = 1$ м, $H_1 = 5$ м, $H = 50$ м, $Q = 0$, $\psi = \pi/3$, $S = 0.4; 0.8; 1.2$ (остальные исходные данные приведены в разд. 4). Из рисунка видно, что при $S = 1.2$ кривая C_k^1 проходит через начало координат.

Поскольку дополнительная мода соответствует действительному корню уравнения (3.8), который существует при любых значениях параметра k , то σ_3 и σ_4 определяются из асимптотики при $k \rightarrow 0$ и $k \rightarrow \infty$. При $k \rightarrow 0$ имеем

$$a_1(k) \approx kSH_1^2 \sin \psi / H, \quad a_2(k) \approx k(-F - S \cos \psi H_1^2 / H + FS^2 \sin^2 \psi H_1^2 / H),$$

$$a_3(k) \approx kS \sin \psi H_1 [H_1 - 2F(F + SH_1 \cos \psi)] / H,$$

$$a_4(k) \approx k[-F - S \cos \psi H_1^2 / H + F(F + SH_1 \cos \psi)^2 / H].$$

Решаем уравнение (3.8) с этими коэффициентами, деленными на k , и получаем значение $\operatorname{tg} \sigma_4$. Если это уравнение имеет три действительных корня, то это означает, что кривая C_k^1 проходит через начало

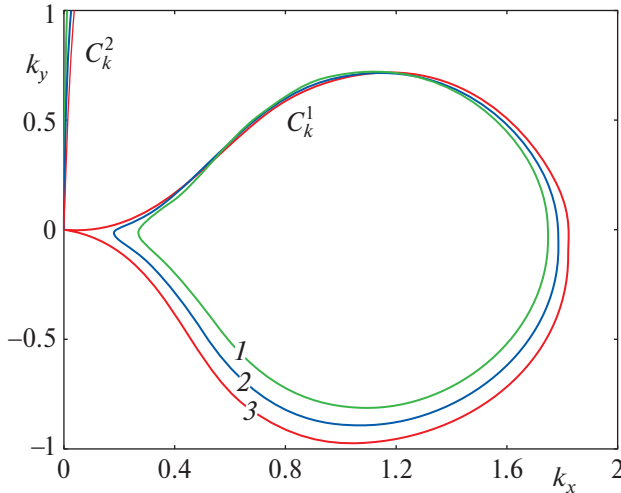


Рис. 2. Кривые волновых чисел C_k^1, C_k^2 для ледяного покрова толщиной 50 м, $Q = 0$, $\psi = \pi/3$; 1–3 – $S = 0.4, 0.8, 1.2$.

координат, и два других корня дают углы, под которыми кривая волновых чисел C_k^1 подходит к началу координат.

При $k \rightarrow \infty$ для $\text{tg } \sigma_3$ находим

$$a_1(k) \approx \beta k^5 S H_1 \sin \psi, \quad a_2(k) \approx -\beta k^5 (F + S H_1 \cos \psi),$$

$$a_3(k) \approx \beta k^5 S H_1 \sin \psi, \quad a_4(k) \approx -\beta k^5 (F + S H_1 \cos \psi).$$

Получаем

$$\text{tg } \sigma_3 = \frac{F + S H_1 \cos \psi}{S H_1 \sin \psi}.$$

При $\psi \rightarrow 0, \pi$ $\sigma_3 \rightarrow \pi/2$.

При $F > F_*$ интеграл (3.2) является интегралом в смысле главного значения. Чтобы правильно выполнить условие излучения на бесконечности и найти стационарное решение, применялся метод, изложенный в работе [18]. В области нагрузки вводится нестационарное давление с малым параметром ε :

$p(x, y, t) = p_0 e^{\varepsilon t}$, $\varepsilon > 0$. Тогда полюсы сдвигаются с действительной оси в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Этот сдвиг и определяет правило обхода. Стационарное решение определяется как предел решения, полученного при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получено, что при вычислении интеграла (3.2) корни k_0, k_1 обходятся сверху, а корень k_2 – снизу.

Вклад дополнительной моды в прогиб ледяного покрова мал. Как видно из рис. 2, интервал (σ_3, σ_4) мал, и собственный вектор, соответствующий дополнительной моде, дает значение на верхней границе, близкое к нулю (см. рис. 1).

Как и в работе [1], картину изгибно-гравитационных волн в дальнем поле можно построить с помощью асимптотических методов. При этом дополнительную моду можно не учитывать. Гребни волн в дальнем поле на основе кривых C_k^1 строятся аналогичным образом, как в работе [1], и имеют такой же характер.

Волновое сопротивление F_1 и боковая сила F_2 , действующие на движущееся тело, определяются по формуле

$$(F_1, F_2) = -p_0 \int_{-a-b}^a \int_{-b}^b \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial y_1} \right) dx_1 dy_1.$$

Подставляем выражение для прогиба (3.2) и интегрируем:

$$F_1 = i \frac{4p_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} \frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] dk d\sigma,$$

$$F_2 = i \frac{4p_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi\infty} \int_0^{2\pi\infty} \frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] dk d\sigma.$$

В силу симметрии вклад в эти интегралы дают только вычеты в нулях знаменателя. Получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{8p_0^2}{\pi} \left\{ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] \right) \right\}_{k_2}^{k_1} d\sigma + \\ &+ \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} \frac{\sin^2(k_0 a \cos \sigma) \sin^2(k_0 b \sin \sigma)}{k_0^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k_0, \sigma)} [k_0 F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(k_0 H_1 - S_H)] d\sigma \Bigg\}. \quad (3.11) \\ F_2 &= \frac{8p_0^2}{\pi} \left\{ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(\frac{\sin^2(ka \cos \sigma) \sin^2(kb \sin \sigma)}{k^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k, \sigma)} [kF \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(kH_1 - S_H)] \right) \right\}_{k_2}^{k_1} d\sigma + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\sigma_3}^{\sigma_4} \frac{\sin^2(k_0 a \cos \sigma) \sin^2(k_0 b \sin \sigma)}{k_0^2 \sin \sigma \cos^2 \sigma f_1'(k_0, \sigma)} [k_0 F \cos \sigma + S \cos(\sigma + \psi)(k_0 H_1 - S_H)] d\sigma \Bigg\}. \quad (3.12)$$

Безразмерные коэффициенты волновых сил находятся по формуле

$$(A_1, A_2) = \frac{g\rho}{2bp_0^2}(-F_1, F_2).$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводили для ледяного покрова при следующих входных параметрах задачи: $E = 5$ ГПа, $\rho = 1025$ кг/м³, $\rho_0 = 922.5$ кг/м³, $\nu = 1/3$, $a = 20$ м, $b = 10$ м, толщина льда $h = 1$ м, глубина жидкости $H = 50$ м. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде $Q = \bar{Q}\sqrt{\rho g D}$, $\bar{Q} = 0$ и 1. Глубина сдвигового слоя H_1 , скорость и направление движения нагрузки менялись.

Проведены расчеты на исследование линейной устойчивости возникающих изгибно-гравитационных волн к малым возмущениям при значениях параметра S в пределах от 0 до 1 и различных значениях угла α , коэффициента сжатия $\bar{Q}$, толщины сдвигового слоя H_1 и волнового числа k с помощью уравнения (2.5).

Оказалось, что при $\bar{Q} = 0$ решение устойчиво при всех значениях указанных параметров. С увеличением коэффициента сжатия $\bar{Q}$ появляются зоны неустойчивости при больших значениях глубины сдвигового слоя. Так, при $\bar{Q} = 1$ неустойчивость обнаружена при $S = 0.2$, $H_1 \geq 45$ м; $S = 0.3$, $H_1 \geq 35$ м; $S = 0.4$, $H_1 \geq 29$ м; $S = 0.5$, $H_1 \geq 24$ м и т.д. С ростом параметров $\bar{Q}$ и S область неустойчивости растет. При $\bar{Q} = 1.5$ решение неустойчиво с любой толщиной сдвигового слоя.

Проведенные расчеты показали, что наибольшее отличие критических скоростей наблюдается при углах $\psi = 0$ и $\psi = \pi$. При $\psi = \pi/2$ критические скорости при различных значениях параметра сдвига S близки к значению при $S = 0$ (в отсутствие течения). На рис. 3 приведены зависимости критических скоростей изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове от глубины сдвигового слоя H_1 при $\psi = 0, \pi$; $\bar{Q} = 0, 1$ и различных значениях параметра сдвига S .

При $\bar{Q} = 1$ кривые представлены в пределах устойчивости. Минимальные критические скорости достигаются при $\psi = 0$. Максимальные критические скорости наблюдаются при $\psi = \pi$. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Критические скорости уменьшаются с ростом толщины сдвигового слоя при $\psi = 0$ и растут при $\psi = \pi$. Видно, что сдвиг скорости, направление движения, коэффициент сжатия льда и толщина сдвигового слоя оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн.

На рис. 4 показаны зависимости прогиба ледяного покрова вдоль линии движения нагрузки $\eta(x_1, 0)$ от координаты x_1 при $V = 20$ м/с, в отсутствие сжатия $\bar{Q} = 0$ (а, б) и $\bar{Q} = 1$ (в, г), при $\psi = 0$ (а, в) и $\psi = \pi$ (б, г) для случаев однослойной ($H_1 = H$) и двухслойной жидкости с $H_1 = 5$ м, $S = 0, 0.3, 0.5$.

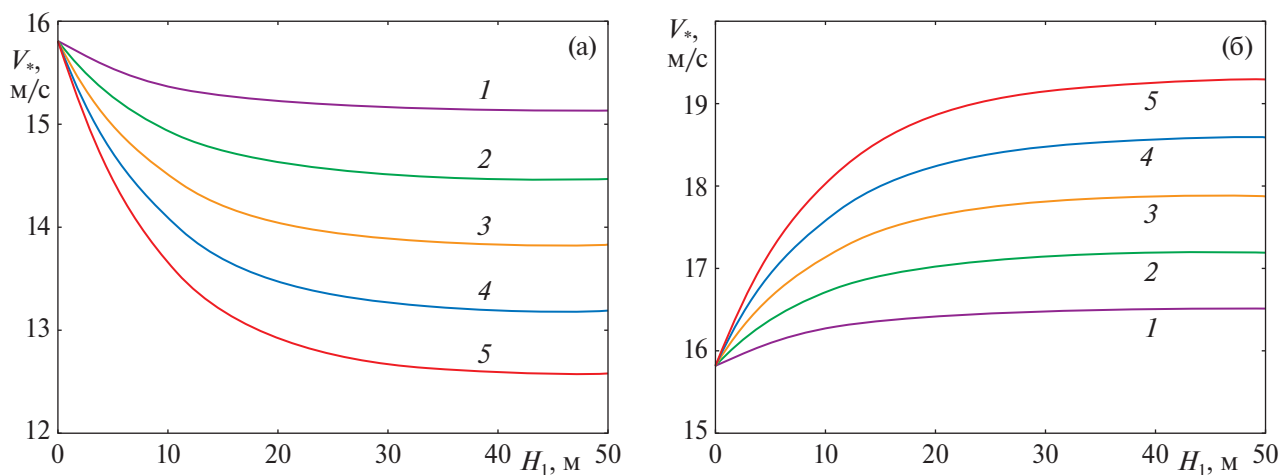


Рис. 3 (окончание следует).

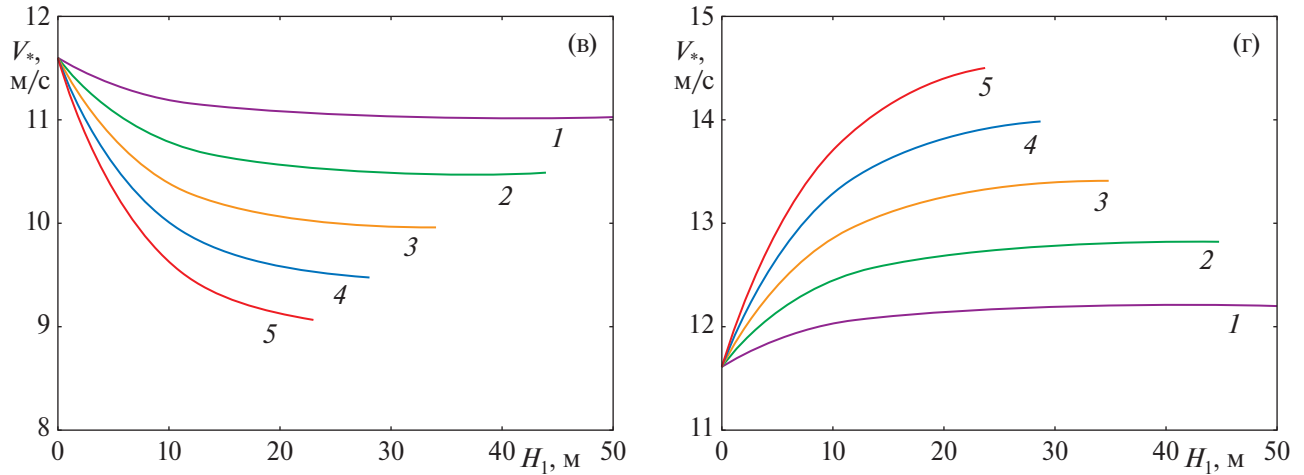


Рис. 3 (окончание). Зависимость критических скоростей от толщины сдвигового слоя при $\bar{Q} = 0$ (а, б) и $\bar{Q} = 1$ (в, г), $\psi = 0$ (а, в) и $\psi = \pi$ (б, г): кривые 1–5 соответствуют значениям $S = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

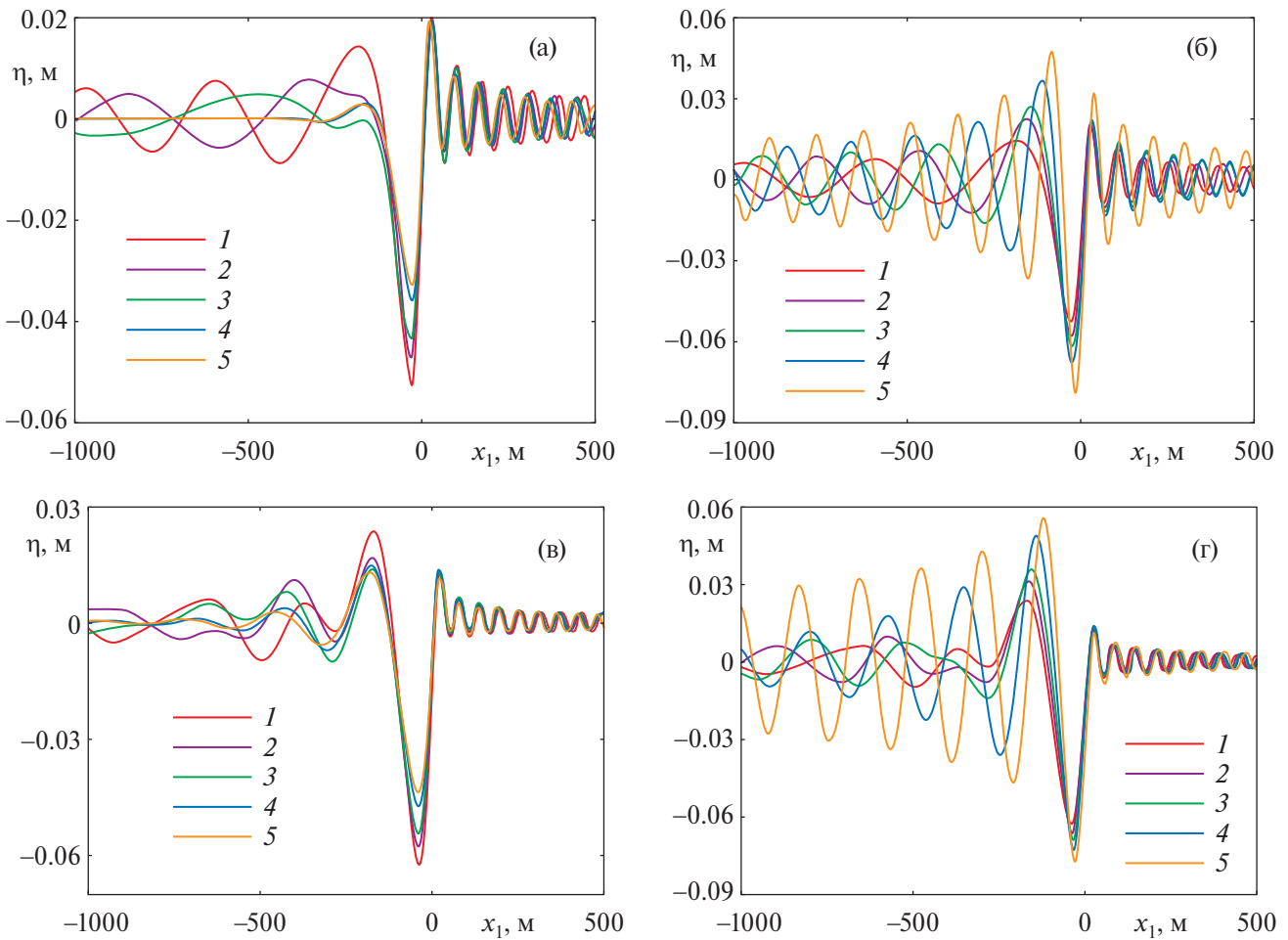


Рис. 4. Прогиб ледяного покрова при $\bar{Q} = 0$ (а, б) и $\bar{Q} = 1$ (в, г), $\psi = 0$ (а, в) и $\psi = \pi$ (б, г): 1 – $S = 0$; 2, 3 – $S = 0.3, 0.5$ для двух слоев $H_1 = 5$ м, $H_2 = 45$ м; 4, 5 – $S = 0.3, 0.5$ для одного слоя $H_1 = H = 50$ м.

Как видно из рисунка, волны перед нагрузкой для всех случаев практически одинаковой амплитуды. Только на рис. 4б для однослойной жидкости при $S = 0.5$ (кривая 5) амплитуды волн и перед нагрузкой, и за нагрузкой значительно выше остальных. Это объясняется тем, что для этого случая скорость движения нагрузки близка к критической скорости $V_* = 19.3$ м/с.

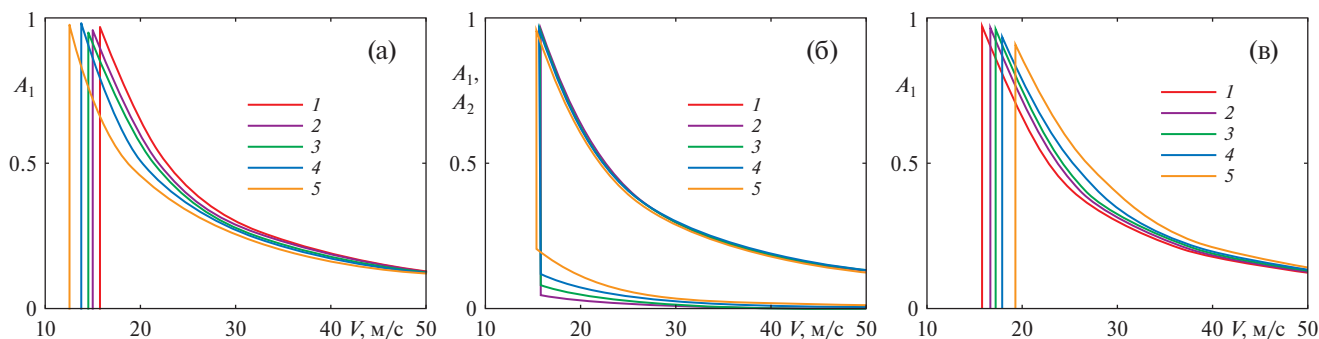


Рис. 5. Безразмерные коэффициенты волновых сил A_1, A_2 в зависимости от скорости движения нагрузки при $\bar{Q}=0$, $\psi=0$ (а), $\psi=\pi/2$ (б) и $\psi=\pi$ (в): 1 – $S=0$; 2, 3 – $S=0.3, 0.5$ для двух слоев: $H_1=5$ м, $H_2=45$ м; 4, 5 – $S=0.3, 0.5$ для одного слоя: $H=50$ м.

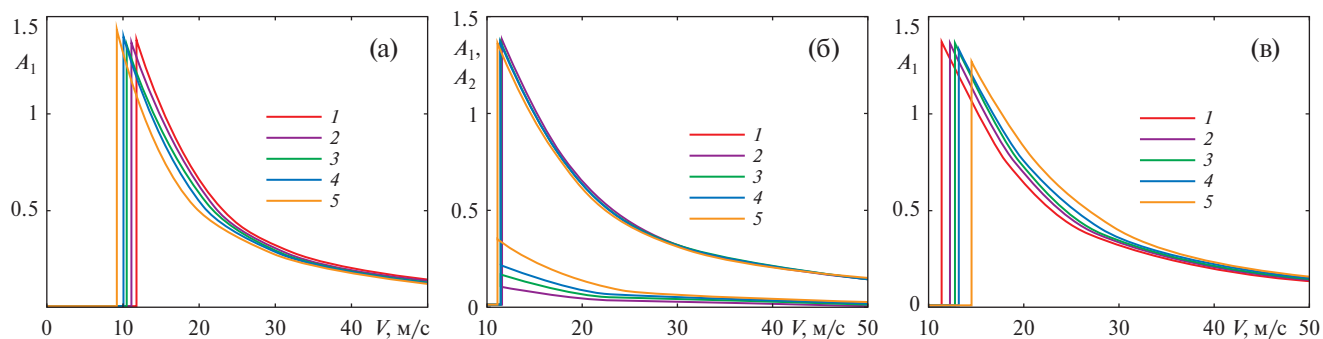


Рис. 6. Безразмерные коэффициенты волновых сил A_1, A_2 в зависимости от скорости движения нагрузки при $\bar{Q}=1$, $\psi=0$ (а), $\psi=\pi/2$ (б) и $\psi=\pi$ (в): 1 – $S=0$; 2, 3 – $S=0.3, 0.5$ для двух слоев: $H_1=5$ м, $H_2=45$ м; 4, 5 – $S=0.3, 0.5$ для одного слоя: $H=50$ м.

При $\psi=0$ волны перед нагрузкой укорачиваются, а за нагрузкой удлиняются в обоих случаях. При $\psi=\pi$ волны перед нагрузкой удлиняются, а за нагрузкой укорачиваются. При $\psi=0$ с увеличением параметра S амплитуда волн за нагрузкой становится меньше в обоих случаях: двуслойной и однослойной жидкости. При $\psi=\pi$ с ростом параметра S все происходит наоборот – амплитуда волн за нагрузкой увеличивается в обоих случаях. Сжатие льда приводит к увеличению прогиба ледяного покрова. Увеличение толщины сдвигового слоя дает такой же результат, как увеличение параметра S – при $\psi=0$ амплитуды прогиба за нагрузкой уменьшаются, а при $\psi=\pi$ растут. При движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения симметрия прогиба нарушается.

На рис. 5 изображены зависимости безразмерных коэффициентов волновых сил A_1, A_2 от скорости движения нагрузки при $\bar{Q}=0$, $\psi=0, \pi/2, \pi$ для однослойной ($H_1=H$) и двуслойной жидкости с $H_1=5$ м, $S=0, 0.3, 0.5$.

Как видно из рисунка, графики сил подобны, основное отличие связано с различием критических скоростей. Поскольку при $\psi=\pi/2$ критические скорости мало меняются с изменением параметра S , все кривые для коэффициента продольной волновой силы A_1 практически сливаются. Коэффициент боковой силы A_2 максимален при $\psi=\pi/2$ и растет с увеличением параметра S .

На рис. 6 представлены аналогичные графики для случая $\bar{Q}=1$. Видно, что коэффициенты волновых сил в этом случае в 1,5 раза выше, чем при $\bar{Q}=0$. Продольная волновая сила уменьшается с ростом параметра S при $\psi=0$ и увеличивается при $\psi=\pi$ в области сверхкритических скоростей. При $\psi=0$ увеличение толщины сдвигового слоя приводит к уменьшению пика продольной силы, а при $\psi=\pi$ – к увеличению.

Исследован вклад дополнительных корней в волновые силы, который характеризуется отношениями

$$R_1 = F_1^0/F_1, \quad R_2 = F_2^0/F_2,$$

где F_1^0, F_2^0 , определяются интегралами по интервалу (σ_3, σ_4) в формулах (3.11), (3.12). На рис. 7 показаны зависимости отношений R_1, R_2 от скорости движения нагрузки V при $\psi=\pi/2$, $\bar{Q}=0$ (а) и $\bar{Q}=1$ (б), $S=0.3, 0.5$. Как видно из графиков, вклад дополнительных корней в волновые силы мал, вклад их в боковую силу

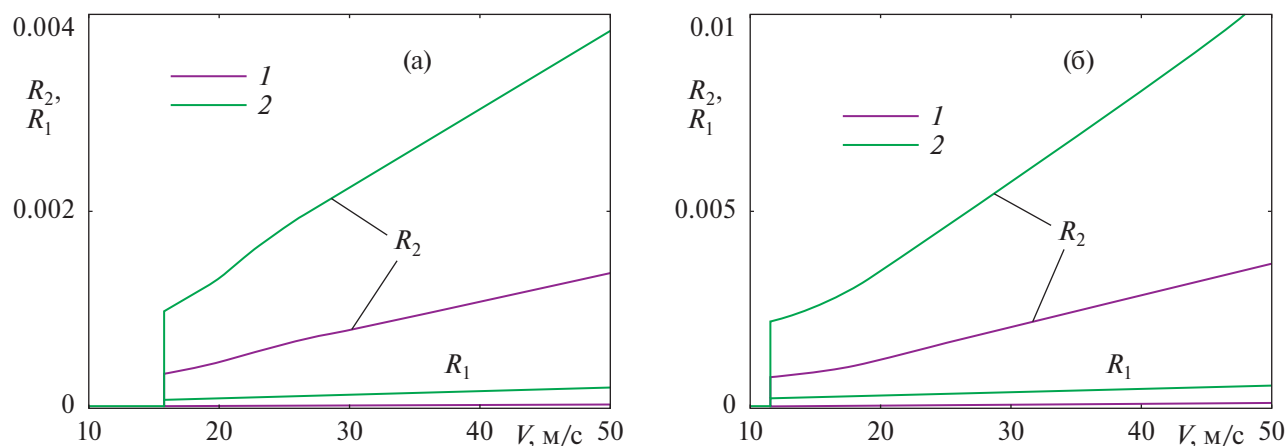


Рис. 7. Вклад дополнительных корней в волновые силы в зависимости от скорости движения нагрузки при $H_1 = 5$ м, $\psi = \pi/2$, $\bar{Q} = 0$ (а), $\bar{Q} = 1$ (б); 1–2 – $S = 0.3, 0.5$.

значительно выше, чем в продольную. Сжатие ледяного покрова приводит к увеличению интервала (σ_3, σ_4) , и вклад дополнительных корней в волновые силы увеличивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано поведение ледяного покрова при равномерном прямолинейном движении нагрузки при наличии в верхнем слое сдвигового потока с учетом однородного сжатия льда. Поле скоростей жидкости не потенциально. Показано, что сдвиг скорости, толщина сдвигового слоя, направление движения нагрузки и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн и прогиб ледяного покрова. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Сжатие льда приводит к неустойчивости возмущений при большой толщине сдвигового слоя.

При увеличении коэффициента сжатия амплитуды прогиба льда значительно увеличиваются за нагрузкой и уменьшаются перед нагрузкой. Увеличение параметра сдвига S оказывает качественно такое же влияние, как увеличение скорости движения нагрузки. При движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения симметрия прогиба нарушается. Боковая сила максимальна при движении нагрузки перпендикулярно течению. При увеличении коэффициента сжатия льда волновые силы значительно растут.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ткачева Л.А. Движение нагрузки по ледяному покрову при наличии течения со сдвигом скорости // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 2. С. 113–122.
2. Thompson P.D. The propagation of small surface disturbances through rotational flow // Ann. NY Acad. Sci. 1949. V. 51. P. 463–474.
3. Abdullah A.J. Wave motion at the surface of a current which has an exponential distribution of vorticity // Ann. NY Acad. Sci. 1949. V. 51. P. 425–441.
4. Fenton J.D. Some results for surface gravity waves on shear flows // J. Inst. Maths. Applies. 1953. V. 1. P. 1–20.
5. Peregrine D.H. Interaction of water waves and currents // Adv. Appl. Mech. 1976. V. 16. P. 9–117.
6. Kirby J.T., Chen T.M. Surface waves on vertically sheared flows: Approximate dispersion relation // J. Geophys. Res. 1989. V. 94. P. 1013–1027. DOI: 10.1029/jc094ic01p01013.
7. Skop R.A. Approximate dispersion relation for wave-current interactions // J. Waterw., Port, Coastal, Ocean Eng. 1987. V. 113. P. 187–195.
8. Swan C., James R. A simple analytical model for surface water waves on a depth-varying current // Appl. Ocean Res. 2001. V. 22. P. 331–347.
9. Stewart R.H., Joy J.W. HF radio measurements of surface currents // Deep Sea Res. 1974. V. 21. P. 1039–1949.
10. Shrira V.I. Surface waves on shear currents: Solution of the boundary-value problem // J. Fluid Mech. 1993. V. 252. P. 565–584.
11. Thompson P.D. The propagation of small surface disturbances through rotational flow // Ann. NY Acad. Sci. 1949. V. 51. P. 463–474.

12. Герцеништейн С.Я., Ромашева Н.Б., Чернявский М.В. О возникновении и развитии ветрового волнения // Изв. РАН. МЖГ. 1988. № 3. С. 163–169.
13. Longuet-Higgins M.S. Instabilities of a horizontal shear flow with a free surface // J. Fluid Mech. 1998. V. 364. P. 147–162.
14. Smeltzer B.K., Ellingsen S.A. Surface waves on arbitrary vertically-sheared currents // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 047102.
15. Zhang X. Short surface waves on surface shear // J. Fluid Mech. 2005. V. 541. P. 345–370.
16. Стурова И.В. Действие пульсирующего источника в жидкости при наличии сдвигового слоя // Изв. РАН. МЖГ. 2023. № 4. С. 14–26.
17. Brown M.K. A quadratically convergent Newton-like method upon Gaussian elimination // SIAM Numer. Anal. 1969. V. 6. № 4. P. 560–569.
18. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981.

LOAD MOTION ON AN ICE COVER IN THE PRESENCE OF A LIQUID LAYER WITH VELOCITY SHEAR

L. A. Tkacheva

The behavior of an ice cover on the surface of an ideal incompressible fluid of finite depth under the action of a pressure domain that moves rectilinearly at a constant velocity in the presence of a current with velocity shift in the upper layer is studied. It is assumed that the ice deflection is steady in the coordinate system moving with the load. The Fourier transform method is used within the framework of the linear wave theory. The critical velocities, the deflection of ice cover, and the wave forces are studied depending on the current velocity gradient, the shear layer thickness, the direction of motion, and the compression ratio.

Keywords: thin elastic floating plate, flexural-gravity wave, shear current, moving load