

УДК 532.59

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ С ВОЗВЫШЕНИЕМ НА ДНЕ

© 2024 г. С. В. Нестеров, В. А. Калиниченко*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

* E-mail: kalin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 22.09.2023 г.

После доработки 20.10.2023 г.

Принята к публикации 25.10.2023 г.

В приближении длинных волн сформулирована и численно при использовании алгоритма ускоренной сходимости решена задача о стоячих волнах в круговом цилиндрическом сосуде с возвышением на дне. В результате проведенных расчетов с высокой точностью определена собственная частота основной волновой моды. Для сравнения теоретических результатов представлены новые экспериментальные данные по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в круговом цилиндрическом сосуде с параболическим и коническим возвышениями на дне. Показано совпадение рассчитанных и измеренных значений собственной частоты основной волновой моды в сосудах с профилированным дном.

Ключевые слова: стоячая поверхностная волна, круговой цилиндрический сосуд, собственная частота, приближение длинных волн, метод ускоренной сходимости

DOI: 10.31857/S1024708424010063 EDN: SDUEAZ

При рассмотрении волновых движений жидкости со свободной поверхностью в сосудах произвольной формы одна из гидродинамических задач состоит в определении собственных частот колебаний. В классических работах [1, 2] рассмотрен случай колебаний жидкости в круговом цилиндрическом сосуде с горизонтальным дном.

В середине прошлого столетия было опубликовано большое количество работ, в которых определены собственные частоты и формы колебаний жидкости в круговом цилиндре с коническим, параболическим и сферическим дном — см., например [3–6]. Указанное направление исследований, проведенных в основном вариационными методами, связано с потребностями космической техники — расчет колебаний топлива в баках. Отметим, что особое значение авторы названных исследований придавали основной моде колебаний, имеющей одну диаметрально узловую линию.

В приближении теории длинных волн в работе [2] рассмотрена задача о стоячих волнах в круговом цилиндре при убывании глубины жидкости от оси сосуда к стенкам по параболическому закону. Указанная геометрия дна сосуда использована в работах [7, 8] для получения изохронных колебаний жидкости, при которых частота волн (аналогично маятнику Гюйгенса) не зависит от амплитуды.

В нашей работе рассмотрено влияние возвышения на дне кругового цилиндра на собственные частоты низших волновых мод на свободной поверхности жидкости. Все количественные оценки получены методом ускоренной сходимости в приближении мелкой воды. Проводится сравнение результатов теоретической модели и лабораторного эксперимента. Отметим, что метод ускоренной сходимости [9] был успешно апробирован авторами в работах [10–12] для стоячих волн в прямоугольных сосудах с переменной глубиной и шириной.

1. ВОЛНЫ В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Решение задачи о гравитационных волнах на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости в жестком круговом цилиндре радиуса R_0 с горизонтальным дном приведено во многих публикациях (напр., [4–6]). Потенциал скоростей $\varphi(r, \varphi, z, t)$ и смещение свободной поверхности $\eta(r, \varphi, t)$ определяются следующими выражениями:

$$\varphi(r, \varphi, z, t) = [\alpha_{nm} \cos n\varphi + \beta_{nm} \sin n\varphi] J_n(k_{nm}r) \frac{\operatorname{ch}(k_{nm}(z+h))}{\operatorname{ch}(k_{nm}h)},$$

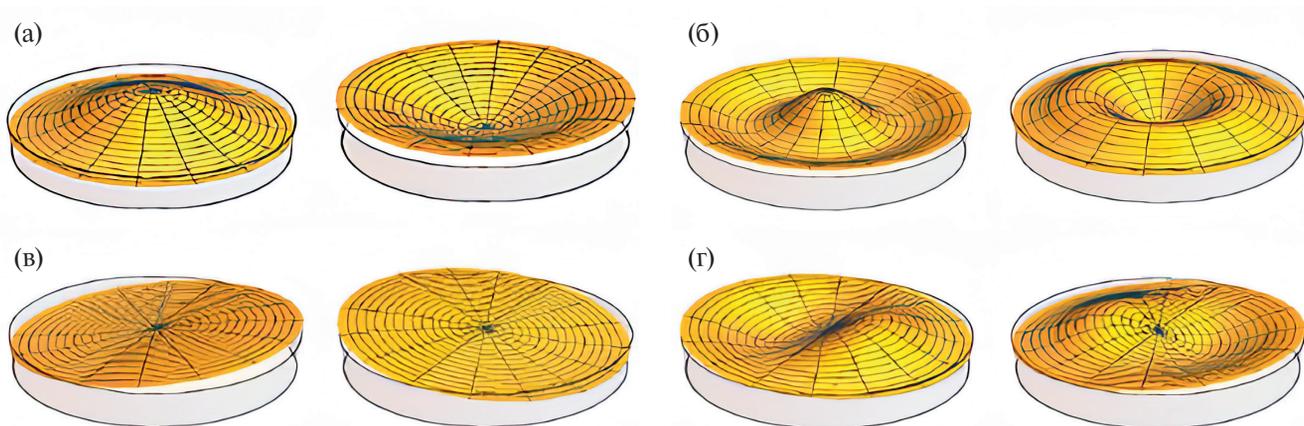


Рис. 1. Профили волн максимального развития для осесимметричных и асимметричных мод при $t=0, \pi/\omega$ ($A_{nm}=3$ см, $B_{nm}=0$; $R_0=9.8$ см; $h=4$ см): (а–г) — (0, 1), (0, 2), (1, 1) и (1, 2).

$$\eta(r, \varphi, t) = [A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi] J_n(k_{nm}r) \cos \omega_{nm}t \quad \text{при } (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots), \quad (1.1)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, причем z отсчитывается вертикально вверх от невозмущенной поверхности жидкости; h — глубина жидкости; $J_n(k_{nm}r)$ — функция Бесселя; α_{nm}, β_{nm} — зависящие от времени t коэффициенты, которые могут быть выражены через гармонические функции $\sin \omega_{nm}t$.

Выражение для собственной частоты имеет вид

$$\omega_{nm} = \sqrt{gk_{nm} \operatorname{th}(k_{nm}h)}. \quad (1.2)$$

Используя граничное условие на стенках сосуда $\partial\varphi/\partial r|_{r=R_0} = J'_n(k_{nm}R_0) = 0$, для первых двух осесимметричных мод, получаем $k_{01}R_0 = 3.832$ и $k_{02}R_0 = 7.015$, а для асимметричных мод — $k_{11}R_0 = 1.841$ и $k_{12}R_0 = 5.335$.

Расчитанные по (1.1) профили волн максимального развития для осесимметричных (0,1), (0,2) и асимметричных мод (1,1) и (1,2) приведены на рис. 1. Расчет проведен для сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см при глубине жидкости $h = 4$ см и $A_{nm} = 3$ см, $B_{nm} = 0$.

Рассмотрим случай, когда глубина бассейна $H = H_0 f(r/R_0)$ зависит от расстояния, измеряемого от центра бассейна. Обозначим через $\eta = \eta(x, y, t)$ возвышение свободной поверхности над уровнем покоящейся жидкости.

Согласно работе [2], смещение свободной поверхности отвечает дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right], \quad (1.3)$$

где g — ускорение свободного падения.

Поскольку стоячие волны представляют собой периодические во времени движения свободной поверхности, будем искать решение уравнения (1.3) в виде

$$\eta = u(x, y) e^{i\omega t}. \quad (1.4)$$

После подстановки (1.4) в уравнение (1.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\omega^2}{g} u = 0. \quad (1.5)$$

Так как предполагается, что глубина жидкости зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то, переходя к полярным координатам (r, φ) , получаем для (1.5)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(Hr \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} H \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\omega^2}{g} u = 0.$$

В дальнейшем полагаем, что $u = U_m(r) \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$, где n — целое число. Функция $U(r)$ подчиняется следующим краевым условиям:

$$|U_m(0)| \leq M; \quad \left. \frac{dU_m}{dr} \right|_{r=R_0} = 0.$$

Вводя безразмерную переменную $z = r/R_0$, приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d}{dz} \left[z f(z) \frac{dU_m}{dz} \right] + \left[\lambda z - \frac{n^2}{z} f(z) \right] U_m = 0, \quad (1.6)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_{n,m} = \frac{\omega^2 R_0^2}{gH_0}$.

Требуется найти такие значения $\lambda_{n,m}$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (1.6), удовлетворяющие краевым условиям

$$|U_m(0)| \leq M; \quad U'_m(1) = 0. \quad (1.7)$$

Искомые значения $\lambda_{n,m}$ принято называть собственными числами, а соответствующие решения краевой задачи (1.6), (1.7) — собственными функциями, или формами (модами) колебаний.

Введем следующим образом регуляризирующий параметр a задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[(z+a) f(z) \frac{dU_m}{dz} \right] + \left(\lambda z - \frac{n^2}{z+a} f(z) \right) U_m &= 0, \\ |U_m(0)| \leq M; \quad U'_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Для нахождения собственных чисел применяется метод ускоренной сходимости, подробно описанный в работе [9]. Отметим, что с помощью этого метода при $a = 10^{-7}$ удастся получить собственные числа с точностью до 10^{-6} .

Если найдены собственные числа $\lambda_{n,m}$, то размерные собственные частоты колебаний определяются формулой

$$\omega_{n,m} = \frac{\sqrt{\lambda_{n,m}}}{R_0} \sqrt{gH_0}.$$

Все вычисления проводятся в предположении, что глубина бассейна задается формулами

$$f(z) = \begin{cases} 1 + bz^2; \\ 1 + bz. \end{cases}$$

Указанные формы дна бассейна (параболоид или конус) достаточно просто реализовать в экспериментальных условиях. Описание проведенных опытов и сравнение измеренных и рассчитанных значений частоты приводятся далее.

На рис. 2а приведены зависимости безразмерной собственной частоты $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ от параметра b . Соответствующие формы свободной поверхности в случае волновых мод (0,1) и (0,2) при $b=0$ (горизонтальное дно бассейна) представлены на рис. 1а и 1б.

На рис. 2б приведены зависимости безразмерной собственной частоты $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ от параметра b . Соответствующие формы свободной поверхности в случае волновых мод (1, 1) и (2, 2) при $b=0$ (горизонтальное дно бассейна) представлены на рис. 1в, г.

Из рис. 2 следует, что с увеличением параметра b , характеризующего возвышение на дне сосуда, безразмерные собственные частоты $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ симметричных и асимметричных волновых мод монотонно растут. Далее полученные результаты сравниваются с данными лабораторного эксперимента.

Отметим, что приведенные на рис. 2 численные значения $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ проверялись с помощью метода Рэлея–Ритца для решения краевой задачи (1.6), (1.7). В качестве тестовых функций использовались функции

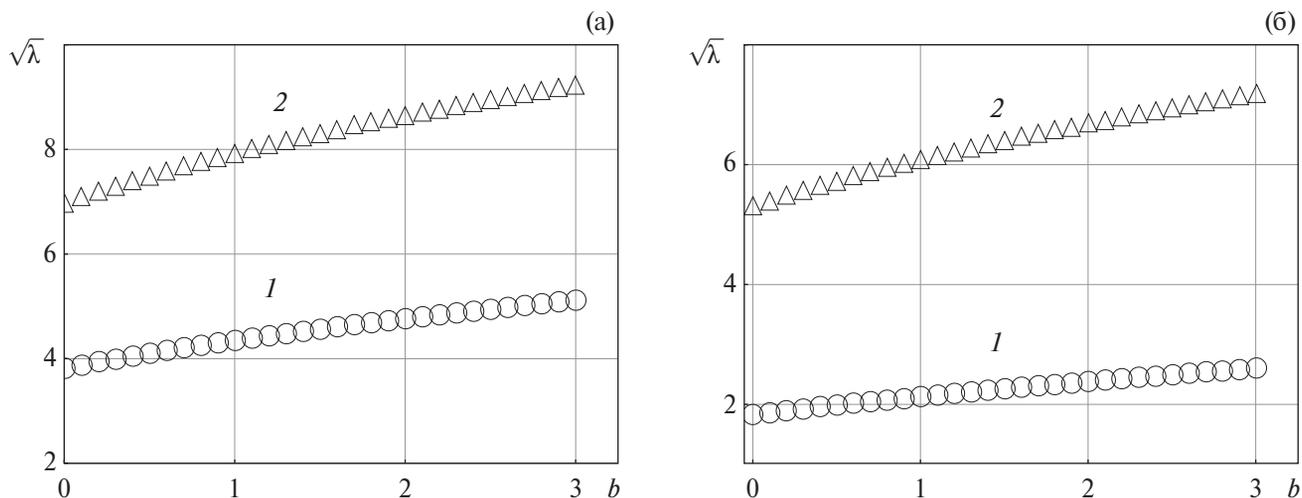


Рис. 2. Зависимости безразмерных собственных частот от параметра b : (а) — осесимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ (2); (б) — асимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ (2).

Бесселя. Собственные частоты, полученные методом Рэлея–Ритца, несколько превышали приведенные на рис. 2 — совпадали первые три знака после запятой. Кроме того, вычисления по методу Рэлея–Ритца потребовали больших временных затрат по сравнению с методом ускоренной сходимости.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для верификации численно-аналитической модели проведена серия экспериментов на электромеханическом вибростенде Динамики и структуры осциллирующих течений [13], входящем в состав Уникальных исследовательских установок ГФК ИПМех РАН.

Волновые движения жидкости исследовались в режиме основного и гармонического резонансов Фарадея [14, 15]. В первом случае для моды (1.1) частота вертикальных колебаний сосуда в два раза превышала частоту возбуждаемых волн ($\Omega \sim 2\omega$); при гармоническом резонансе для моды (0.1) эти частоты совпадали ($\Omega \sim \omega$). При фиксированной амплитуде сосуда $s = 0.7$ см вариации Ω обеспечивали возбуждение соответствующей волновой моды (n, m) . В качестве рабочей жидкости использовали воду.

Волновая картина регистрировалась цифровой камерой Canon PowerShot SX50HS (скорость видеосъемки 30 и 120 кадров в секунду). Разрешение видеоизображения составляло 0,15 мм/пиксель. Последующая обработка видеок кадров производили при использовании программы ImageJ. Все эксперименты проводили при комнатной температуре 21–22 °С.

В опытах собственная частота гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась волновая мода (n, m) . Затем вибростенд выключали и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводили видеосъемку затухания волновых движений воды. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, предполагалось, что затухание волн проходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту.

В экспериментах использовали два сосуда с радиусами $R_0 = 7$ и 9.8 см при глубине воды $h = 3.7$ и 4 см соответственно. Оценивалась собственная частота волновых мод (0, 1) и (1, 1) в сосудах с горизонтальным и профилированным дном.

Профилированное дно представляло собой симметричное относительно оси сосуда возвышение, изготовленное из технического пластилина. На рис. 3а и 3б приведены фотографии дна сосудов с $R_0 = 7$ и 9.8 см соответственно.

Для получения описывающих форму дна функций с помощью программы ImageJ проведена оцифровка профиля, данные которой позволили получить следующие аппроксимирующие зависимости:

$$y = 2.66 - 0.05r^2 \text{ при } R_0 = 7 \text{ см;}$$

$$y = 1.45 - 0.15r \text{ при } R_0 = 9.8 \text{ см,}$$

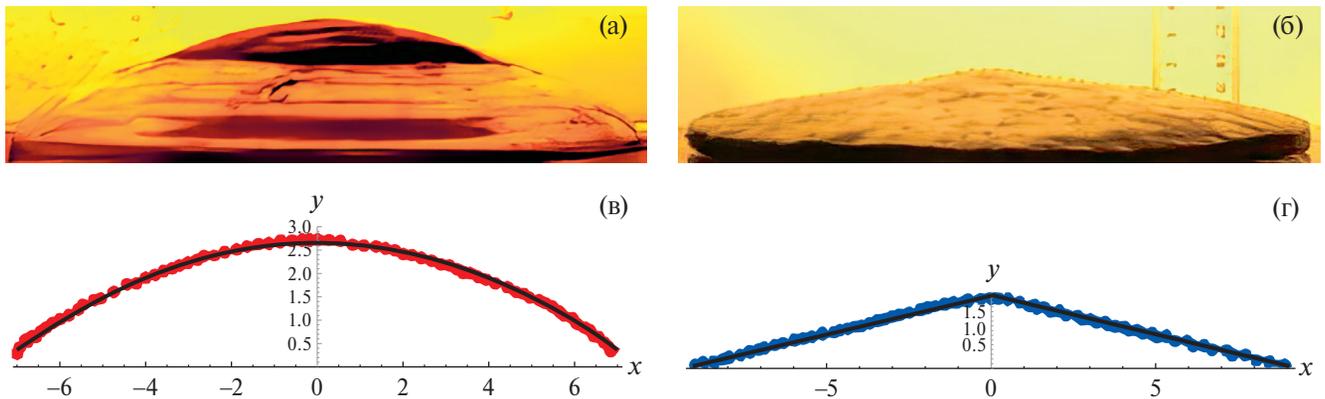


Рис. 3. Форма возвышения на дне сосуда (а, б) и графики аппроксимирующих профиль дна функций (в, г): (а, в), (б, г) — $R_0 = 7$ и 9.8 см; точки — данные оцифровки фотографий (а, б).

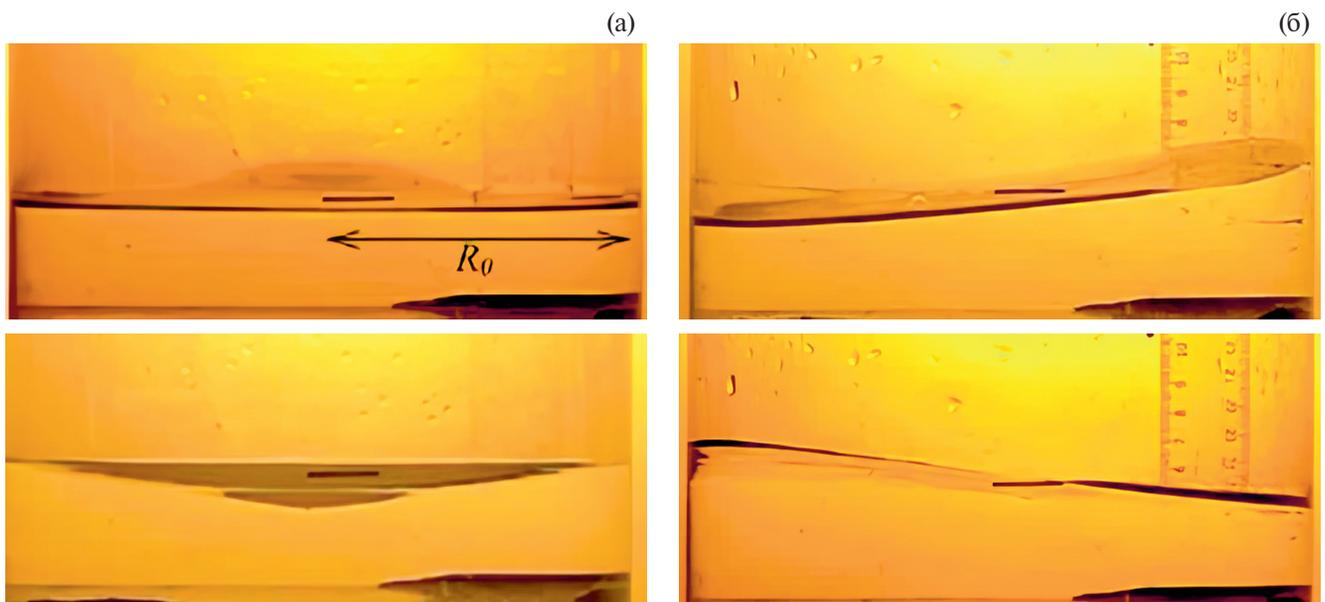


Рис. 4. Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8$ см с горизонтальным дном при глубине жидкости $h = 4$ см: (а, б) — осесимметричная (0, 1) и асимметричная (1, 1) волновые моды.

графики которых приведены на рис. 3в и 3г. Таким образом, если для цилиндра с $R_0 = 7$ см форма возвышения описывалась квадратичной функцией, то в случае $R_0 = 9.8$ см имеем линейную зависимость от радиальной координаты r .

Экспериментально проведены оценки собственных частот волновых мод (0,1) и (1,1) в сосудах с горизонтальным дном. Фотографии волновых профилей в случае сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см представлены на рис. 4. Видно полное их соответствие формам рис. 1а и 1в.

Измеренные по описанной методике собственные частоты волн в сосудах с горизонтальным дном приведены в табл. 1. Средняя частота и соответствующая погрешность оценивались по 15–20 экспериментальным значениям. В таблице также приведены частоты, рассчитанные по формуле (1.2) и полученные при решении краевой задачи (1.8).

Видно, что классическая теория и метод ускоренной сходимости в случае сосудов указанных размеров с горизонтальным дном дают практически совпадающие значения собственных частот волновых мод на свободной поверхности воды малой глубины. Данные эксперимента с учетом погрешности измерений частоты неплохо соответствуют численно-аналитическим оценкам.

Перейдем к рассмотрению волновых движений жидкости в круговых цилиндрах с профилированным дном. Фотографии волновых мод (0, 1) и (1, 1) в случае сосуда радиуса $R_0 = 9.8$ см представлены на рис. 5.

Таблица 1. Собственные частоты волновых мод в сосудах с горизонтальным и профилированным дном

Горизонтальное дно				Профилированное дно		
$R_0 = 7 \text{ см}, h = 3.7 \text{ см}$						
Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет		Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет, краевая задача (1.8)
		Формула (1.2)	Краевая задача (1.8)			
(0, 1)	22.60 ± 0.99	22.72	22.76	(0, 1)	20.92 ± 1.85	22.75
(1, 1)	13.84 ± 0.23	13.96	13.90	(1, 1)	11.73 ± 0.72	11.43
$R_0 = 9.8 \text{ см}, h = 4 \text{ см}$						
Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет		Мода (n, m)	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)}$ эксперимент	$\omega_{nm} \text{ (с}^{-1}\text{)},$ расчет, краевая задача (1.8)
		Формула (1.2)	Краевая задача (1.8)			
(0, 1)	19.22 ± 0.65	18.82	18.74	(0, 1)	18.20 ± 0.35	22.21
(1, 1)	11.03 ± 0.54	10.82	10.82	(1, 1)	10.20 ± 0.50	10.75

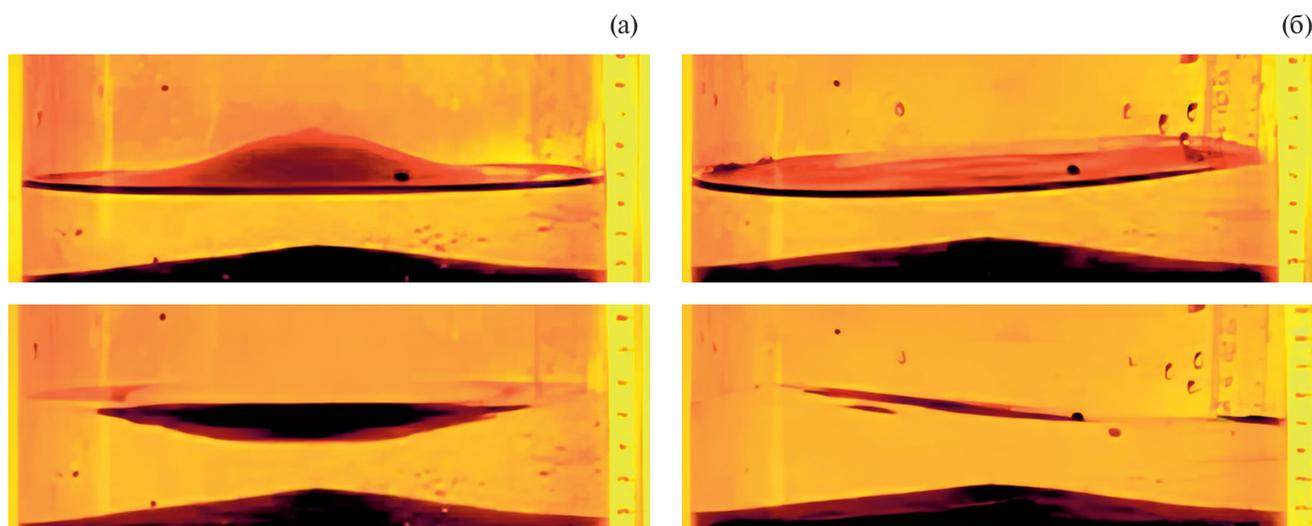


Рис. 5. Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8 \text{ см}$ с коническим возвышением на дне при максимальной глубине жидкости $h = 4 \text{ см}$: (а, б) — осесимметричная (0, 1) и асимметричная (1, 1) волновые моды.

Визуально эти профили не отличаются от показанных на рис. 4. Однако собственные частоты, как следует из табл. 1, существенно ниже значений, отвечающих сосуду с горизонтальным дном — уменьшение частоты порядка 10–15%.

Дадим интерпретацию экспериментальных результатов об уменьшении собственных частот волновой моды (1, 1) в сосудах с возвышением на дне в рамках модели мелкой воды — краевая задача (1.8).

Сосуд радиуса $R_0 = 7 \text{ см}$ имел профиль дна $y = 2.66 - 0.05r^2$, которому соответствовала глубина жидкости $H = H_0(1 + 0.054192 R_0^2 z^2) = 1.0122(1 + 2.6553z^2)$. Здесь $z = r/R_0$, $H_0 = 1.0122 \text{ см}$.

Вычисленная безразмерная частота волновой моды (1, 1) $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 2.54037$. Соответствующая размерная частота

$$\omega_{1,1} = \frac{\sqrt{\lambda_{1,1}}}{R_0} \sqrt{gH_0} = 11.43 \text{ с}^{-1}.$$

Измеренная в эксперименте (см. табл. 1) собственная частота волновой моды (1, 1) $\omega_{1,1} = 11.73 \text{ с}^{-1}$.

Таким образом, различие между данными эксперимента и численными оценками составляет 2.6%.

Сосуд радиуса $R_0 = 9.8 \text{ см}$ имел профиль дна $y = 1.45 - 0.15r$ что соответствовало глубине жидкости $H = 2.5488(1 + 0.4694z)$, $H_0 = 2.5488$. Отметим, что глубина жидкости в этом эксперименте изменяется линейно, в отличие от первого сосуда.

Вычисленная безразмерная частота волновой моды (1, 1) $\sqrt{\lambda_{1,1}} = 2.1078$. Соответствующая размерная частота $\omega_{1,1} = 10.75 \text{ с}^{-1}$. Измеренная в эксперименте (см. табл. 1) собственная частота волновой моды (1, 1) $\omega_{1,1} = 10.20 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, различие между данными эксперимента и численными оценками составляет 5.3%.

Таким образом, представленная в разд. 1 численно-аналитическая модель неплохо описывает экспериментальные результаты по измерению собственных частот стоячих поверхностных гравитационных волн в том случае, когда возбуждается волна с одной узловой линией, проходящей через центр сосуда, — волновая мода (1, 1) — рис. 1в и 5б. Эта волна соответствует безразмерной собственной частоте $\sqrt{\lambda_{1,1}}$. Кроме того, для волновой моды (1, 1) достаточно хорошо выполняется требование теории длинных волн.

Отметим, что в проведенных экспериментах волны с частотами $\sqrt{\lambda_{0,1}}$, $\sqrt{\lambda_{0,2}}$, $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ и т. п. уже не удовлетворяют длинноволновому приближению ($k_{nm}h < 1$). Поэтому измеренные и рассчитанные собственные частоты волн (0, 1) совпадают гораздо хуже по сравнению со случаем моды (1, 1) — см. табл. 1.

При формулировке краевой задачи (1.8) был введен безразмерный регуляризирующий параметр a , который в расчетах собственной частоты волновой моды (1, 1) для сосудов с $R_0 = 7$ и 9.8 см принимал значения порядка 10^{-7} . Физически это соответствует колебаниям жидкости в зазоре между двумя концентрическими цилиндрами с внешним радиусом R_0 и бесконечно малым внутренним R^* . Значение $R^* = aR_0$ для использованных в эксперименте сосудов составляли величину порядка 10^{-6} см.

В эксперименте для оценки эффекта внутреннего цилиндра на частоту волновых мод в цилиндре с $R_0 = 9.8$ см в центр донного возвышения помещалась стальная проволочка диаметром $2R^* = 0.1$ см, что соответствовало безразмерному параметру $a = 0.005$. Измеренные собственные частоты равны $\omega_{0,1} = 18.30 \pm 0.41 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_{1,1} = 10.42 \pm 0.63 \text{ с}^{-1}$ и с учетом погрешности измерений совпали с частотой для кругового цилиндра радиуса $R_0 = 9.8$ см (см. табл. 1). Этот экспериментальный факт подтверждает правомерность введения в краевую задачу (1.8) безразмерного регуляризирующего параметра a .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В приближении длинных волн сформулирована и численно решена задача о стоячих волнах в круговом цилиндрическом сосуде переменной глубины при использовании алгоритма ускоренной сходимости. В результате проведенных расчетов с высокой точностью определена собственная частота основной волновой моды.

Для сравнения теоретических результатов представлены новые экспериментальные данные по возбуждению стоячих поверхностных гравитационных волн в круговом цилиндрическом сосуде с параболическим и коническим возвышениями на дне. Показано совпадение рассчитанных и измеренных значений собственной частоты основной волновой моды в сосудах с профилированным дном.

Получено экспериментальное подтверждение эффекта влияния донного возвышения на частоту основной моды в круговом цилиндре.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена по темам государственных заданий № 123021700050-1 и 123021700044-1. Эксперименты проводились на стенде ДСО (уникальная научная установка Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh L.* On waves // Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci. 1876. V. 1. No. 4. P. 257–279. DOI: 10.1080/14786447608639037
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. *Lawrence H.R., Wang C.J., Reddy R.B.* Variational solution of fuel sloshing modes // J. Jet Propuls. 1958. V. 28. No. 11. P. 729–736. DOI: 10.2514/8.7443

4. *Мусеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. Серия «Математические методы в динамике космических аппаратов». Вып. 3. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
5. *Abramson H.N.* The Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers // NASA SP-106. 1966.
6. *Ibrahim R.A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications. Cambridge Univ. Press, 2005. 948 p.
7. *Калашник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Дж.Г., Патарашвили К.И., Свиркунов П.Н., Цакадзе С.Д.* Нелинейные изохронные колебания жидкости в параблоиде. Теория и эксперимент // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 131–142.
8. *Weidman P.* New axisymmetric containers for isochronous sloshing: a tribute to B. Andreas Troesch // Inverse Probl. Sci. Eng. 2016. V. 24. No. 7. P. 1240–1248. DOI: 10.1080/17415977.2016.1160394
9. *Akulenko L.D., Nesterov S.V.* High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
10. *Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В.* Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 103–111.
11. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н.* Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 65–74. DOI: 10.7868/S0568528117020104
12. *Нестеров С.В.* Собственные частоты и формы сейш в канале переменной глубины // ПММ. 2022. Т. 86. № 3. С. 365–369. <https://doi.org/10.31857/S0032823522030080>
13. Стенд «Исследования динамики и структуры осциллирующих течений» (ДСО). УИУ ГФК ИПМех РАН. <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#aboutDSO>
14. *Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 122–129.
15. *Калиниченко В.А., Кравцов А.В., Родригес-Мижангес Р., Секерж-Зенькович С.Я., Флорес-Эспиноза Р.* Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 285–292.

OSCILLATIONS OF A FLUID IN A CIRCULAR CYLINDER WITH BOTTOM ELEVATION

S. V. Nesterov^a and V. A. Kalinichenko^{a,*}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**e-mail: kalin@ipmnet.ru*

Received September 22, 2023; revised October 20, 2023; accepted October 25, 2023

The problem of standing waves in a circular cylindrical vessel with an elevation on the bottom is formulated and numerically solved in the long wave approximation using an accelerated convergence algorithm. As a result of the calculations, the natural frequency of the fundamental wave mode is determined with a high accuracy. To compare the theoretical results, new experimental data on the excitation of standing surface gravity waves in a circular cylindrical vessel with parabolic and conical elevations at the bottom are presented. It is shown that the calculated and measured natural frequencies of the fundamental wave mode in vessels with the profiled bottom coincide between themselves.

Keywords: standing surface wave, circular cylindrical vessel, natural frequency, long wave approximation, accelerated convergence method