

УДК 533.6.011

НЕСУЩИЕ ПРОФИЛИ, БЛИЗКИЕ К ОБТЕКАЕМЫМ С НАИБОЛЬШИМИ КРИТИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ МАХА

© 2023 г. А. Н. Крайко^{а,*}, В. А. Шаповалов^а

^аЦентральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

*E-mail: akraiko@ciam.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 11.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Прямой метод построения двумерных оптимальных по критическим числам Маха M^* тел построены близкие к оптимальным по M^* несущие профили. Их практически нулевые коэффициенты волнового сопротивления c_x остаются таковыми не только при числах Маха набегающего потока M_0 меньших M^* , но и при M_0 заметно превышающих M^* . Этим новые несущие профили отличаются от суперкритических несущих профилей, c_x которых стремительно растут при превышении расчетных значений M_0 . При равных толщинах и $M_0 = M^*$ суперкритические профили реализуют большие коэффициенты подъемной силы c_y . Однако из-за отмеченного выше отличия в поведении c_x при M_0 , больших расчетных, качество суперкритических профилей может стать ниже даже как отношение c_y не к c_x , а к коэффициенту полного сопротивления.

Ключевые слова: несущие профили, близкие к оптимальным по наибольшим критическим числам Маха, отрезки звуковых линий тока, аппроксимируемые кривыми Бернштейна–Безье, генетический алгоритм

DOI: 10.31857/S0568528122700013, **EDN:** AKJBPI

Анализ [1] для симметричных профилей и тел вращения в равномерных набегающих потоках с числами Маха $M_0 < 1$ и его обобщения [2] на тела в цилиндрических каналах и в решетках, на контуры с отрезками горизонталей и областями поступательного звукового течения определили важную роль отрезков звуковых линий тока в контурах конфигураций, обтекаемых идеальным (невязким и нетеплопроводным) газом с наибольшими критическими числами Маха $M_0 = M^* < 1$. Анализ обтекания таких тел включал доказательство и применение “свойства прямолинейности” звуковых линий (“линий перехода”), отличных от звуковых линий тока, отрезки которых формируют оптимальные контуры. Второе утверждение – принцип максимума, согласно которому в таких течениях число Маха может достигать своего максимального значения $M = 1$ только на обтекаемых контурах. Свойство прямолинейности линий перехода и принцип максимума справедливы и при “дозвуковом” (как и в [1, 2], с $M \leq 1$) обтекании несимметричных профилей. Однако для них доказать ключевые при выяснении структуры оптимальных тел утверждения, названные в [1] “теоремой сравнения” и “леммой граничной точки”, не удалось.

Построенные в [3–10] примеры оптимальных тел в безграничном равномерном дозвуковом набегающем потоке включают симметричные профили и замкнутые тела вращения, обтекаемые под нулевым углом атаки, а также головные или кормовые части полубесконечных пластины и кругового цилиндра. Для их построения созданы численно-аналитические инструменты с весьма сложными аналитическими составляющими. Подход, развитый в [11], оказался намного проще. В его основе – прямой метод оптимального профилирования с численным решением “установлением” уравнений Эйлера, описывающих дозвуковое обтекание идеальным газом искомых тел, представление выпуклых звуковых участков их контуров кривыми Бернштейна–Безье (КББ) и нахождение оптимальных КББ с помощью генетического алгоритма (ГА). При этом минимизируются интегралы по выпуклым участкам контура от квадрата разности давления p и его известной отвечающей $M = 1$ “критической” величины p_* . У оптимальных по M^* тел выпуклые участки – отрезки звуковых линий тока и эти интегралы равны нулю.

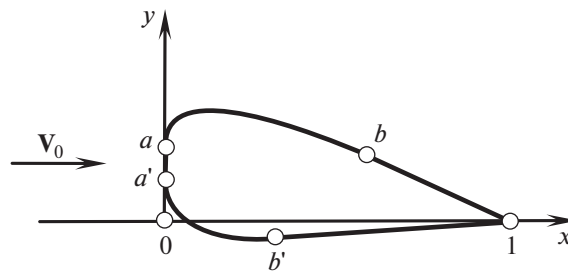


Рис. 1. Близкий к оптимальному по M^* несущий профиль с отрезками звуковых (при $M_0 = M^*$) линий тока ab и $a'b'$.

1. БЛИЗКИЕ К ОПТИМАЛЬНЫМ ПО M^* НЕСУЩИЕ ПРОФИЛИ

Все построенные в [11] плоские и осесимметричные оптимальные по M^* тела, как и в [3–10], обтекаются равномерным набегающим потоком под нулевым углом атаки. Далее, как и в [11], ось x декартовых координат xy направлена по скорости V_0 набегающего потока. При построении близких к оптимальным по M^* несущих профилей зададим и примем за линейный масштаб проекцию их хорды на ось x . При передней точке профиля i , помещенной на ось y , и концевой точке f , помещенной на ось x , профилю отвечают $0 \leq x \leq 1$. Как и в [1–11], возможны и иные ограничения, например

$$\frac{dy}{dx} \equiv \tan \theta \geq \tan \theta_m, \quad S \equiv \int_i^f (y^+ - y^-) dx \geq S_m \quad (1.1)$$

с заданными константами $\theta_m < 0$ и $S_m > 0$ и уравнениями $y = y^+(x)$ и $y = y^-(x)$ верхней и нижней образующими профиля.

Первое ограничение (1.1) приводило к появлению у построенных ранее оптимальных по M^* симметричных обтекаемых под нулевым углом атаки профилей прямолинейных участков $dy/dx = \tan \theta_m$, заканчивающихся в их концевой точке $x = 1, y = 0$. Ограничение же на площадь “продольного” сечения S , введенное еще в [1], приводило к появлению у этих профилей переднего торца ia , на котором $x = 0$, и выпуклого отрезка звуковой линии тока, на котором $M = 1$ и $p = p_*$. При гладкой стыковке всех участков оптимальных образующих (непрерывности угла наклона касательной к ним θ) кривизна звуковых участков в их концевых точках обращается в бесконечность [7–12]. При приближении к этим точкам по отрезкам $\theta = \text{const}$ бесконечны производные p и V , а при приближении по нормали к контуру – производные всех параметров [12].

Согласно “Заключению” [11]: “... ставшие легко доступными оптимальные по M^* конфигурации по-прежнему ограничены симметричными профилями, телами вращения и головными и кормовыми частями, обтекаемыми под нулевым углом атаки. Тем не менее хочется верить, что легкость проб поможет найти структуру принципиально иных оптимальных по M^* двумерных конфигураций”. Ниже построены примеры именно таких, близких к оптимальным по M^* несущих профилей.

Изображенный на рис. 1 несущий профиль отличается от профилей, построенных ранее, несимметрией его верхней и нижней образующих. Во-первых, отрезок $a'b'$ звуковой при $M_0 = M^*$ линии тока меньше подобного верхнего отрезка ab . По этой причине при построении искомых профилей прямым методом [11] минимизируются интегралы

$$I = \int_a^b (p - p_*)^2 d\xi, \quad I' = \int_{a'}^{b'} (p - p_*)^2 d\xi \quad (1.2)$$

Здесь и далее, как в [11], ξ – расстояние, отсчитываемое вдоль контура, p_* – отвечающее $M = 1$ критическое давление, за масштабы плотности ρ и скоростей взяты их размерные (с индексом “градус”) критические величины ρ_*° и a_*° , а за масштаб $p - \rho_*^\circ a_*^{\circ 2}$. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями и их отношением (показателем адиабаты) γ безразмерное $p_* = 1/\gamma$. Во-вторых, для увеличения подъемной силы дозвуковой при $M_0 = M^*$ концевой участок нижнего контура, плавно примыкающий к отрезку $a'b'$, может быть вогнутым.

Наряду с функционалом (1.2) вычисляются коэффициенты волнового сопротивления c_x и подъемной силы c_y и площадь S продольного сечения профиля

$$c_x = \frac{2}{\rho_0 V_0^2} \oint_{ff} (p - p_0) dy, \quad c_y = \frac{2}{\rho_0 V_0^2} \oint_{ff} (p - p_0) dx, \quad S = \int_i^f (y^+ - y^-) dx \quad (1.3)$$

со средней точкой i торца $a'a$. Для совершенного газа давление p_0 и $\rho_0 V_0^2$ — функции числа Маха M_0 набегающего потока

$$V_0^2 = \frac{(\gamma + 1)M_0^2}{2 + (\gamma - 1)M_0^2}, \quad p_0 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma + 1}{2} - \frac{\gamma - 1}{2} V_0^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho_0 V_0^2 = \gamma p_0 M_0^2.$$

КББ, которыми аппроксимировались криволинейные участки контуров искомым несущим профилей, задаются формулами [13]

$$P(t) = \sum_{k=0}^K B_k^K(t) P_k, \quad B_k^K(t) = \frac{K!}{k!(K-k)!} t^k (1-t)^{K-k}, \quad t \in [0, 1]$$

в которых P — координаты (x, y) , t — параметр, $B_k^K(t)$ — полиномы Бернштейна, а P_k — координаты концов (контрольных точек) отрезков ломаной (“полигона”). В общем случае КББ проходит лишь через крайние контрольные точки, касаясь в них соответствующего отрезка полигона. Существенна линейная зависимость координат КББ от координат P_k ее контрольных точек.

Верхние звуковые при $M_0 = M^*$ отрезки образующих искомым профилей КББ определяют так же, как при построении симметричных профилей в [11]. При построении выпуклого и вогнутого участков нижних образующих две КББ обеспечивают гладкую стыковку выпуклого участка $a'b'$ с торцом $a'a$ в точке a' и с вогнутым концевым участком в точке b' . Гладкую стыковку в точке b' реализует помещение этой точки и двух соседних с ней контрольных точек КББ на отрезок заранее неизвестной прямой линии.

Ближние к оптимальным по M^* несущие профили строились прямым методом [11], который ранее развивался и применялся при построении оптимальных аэродинамических форм в [14–18]. Оптимальные параметры КББ — оставшиеся не заданными (“свободными”) координаты контрольных точек, включая координаты точек стыковки $y_a, x_b, x_{b'}$ и $y_{b'}$ (индексы $a, b, \dots$ метят величины в точках $a, b, \dots$), обеспечивающие близкие к нулю значения введенных в (1.2) и (1.3) функционалов I, Γ и c_x , находил ГА, описанный в [11].

Распределения параметров и значения I, Γ, c_x и c_y при стационарном обтекании каждого сгенерированного ГА профиля находились установлением по времени при численном решении уравнений течения идеального газа (уравнений Эйлера). Записанные в дивергентной форме нестационарные уравнения Эйлера интегрировались разностной схемой Годунова [19] повышенного согласно [20, 21] порядка аппроксимации (на гладких решениях). Как и в [11], в плоскости xy уравнения Эйлера численно интегрировались в области, ограниченной окружностью $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2} = 15$ с параметрами невозмущенного потока в примыкающем к окружности слое “вспомогательных” ячеек [22]. Ячейки разностной сетки, адаптированной к обтекаемым телам, увеличивались линейно по r . Чтобы избежать связанного с этим роста времени установления, интегрирование уравнений велось по неявной разностной схеме [23] с числом Куранта $cu = 10$ –20. Не вдаваясь в дальнейшие подробности, перейдем к примерам построенных близких к оптимальным по M^* несущим профилям.

2. ПРИМЕРЫ БЛИЗКИХ К ОПТИМАЛЬНЫМ ПО M^* НЕСУЩИХ ПРОФИЛЕЙ

Все расчеты выполнены для $\gamma = 7/5 = 1.4$ с заданием выпуклых звуковых участков симметричных профилей кривыми Бернштейна–Безье 10-го порядка ($K = 10$). Вогнутые концевые участки их нижних образующих задавались КББ 3-го порядка, а при представлении полей чисел Маха координаты x и y отнесены к проекции хорды профиля на ось x .

В табл. 1 приведены числа Маха M_0 , углы атаки α и относительные толщины h — максимальные разности y при фиксированном x верхней и нижней образующих трех построенных прямым методом оптимизации близких к оптимальным по $M^* = M_0$ несущим профилей. Четвертый несущий профиль — суперкритический для $M_0 = 0.785$ несущий профиль SC(2)_NASA_0410 из [24]. С этим профилем будет сравниваться один из построенных близких к оптимальному по $M^* = 0.785$ несущий профиль. Существенно, что все четыре профиля обтекаются под небольшими отрицательными углами атаки. Методы построения двумерных суперкритических конфигураций, обтекаемых на расчетном режиме с местными безударными сверхзвуковыми зонами, развивались в [25–29].

Таблица 1

M_0	$-\alpha$	h
0.7	0.0211	0.1774
0.785	0.009	0.101
0.785 (NASA)	0.0076	0.1
0.85	0.0044	0.0546

Таблица 2

M_0	N	$I \times 10^4$	$\Gamma \times 10^4$	$c_x \times 10^5$	$c_y \times 10^3$	$(M^m - 1) \times 10^3$
0.7	13744 ($\times 4$)	18 (17)	18 (19)	42 (8)	488 (489)	11 (37)
0.785	14688 ($\times 4$)	64 (63)	14 (16)	17 (2)	246 (246)	29 (31)
0.785 (NASA)	16960 ($\times 4$)			58 (20)	395 (398)	139 (121)
0.85	15664 ($\times 4$)	31 (31)	44 (47)	8 (1)	150 (150)	25 (32)

В табл. 2 собраны величины I , Γ , c_x , c_y и отличие от единицы максимальных чисел Маха M^m при числах Маха набегающего потока M_0 и углах атаки, указанных в табл. 1. Все перечисленные величины были получены на двух разностных сетках с числом ячеек N и $4N$. Сравнение значений, полученных на исходных и более “тонких” сетках (в скобках), демонстрирует достоверность результатов расчета. Из приведенных величин практически неизменен коэффициент подъемной силы, слегка изменяются интегралы I и Γ и умеренно — максимальные числа Маха M^m . Уменьшение же почти на порядок крайне малых значений c_x , близких к оптимальным по M^* несущих профилей, как и в [11], — свидетельство высокой точности результатов, ибо здесь отличие c_x от нуля — следствие погрешностей счета. С учетом сказанного далее приводятся результаты, полученные на исходных сетках.

На рис. 2 показаны поля чисел Маха при обтекании с $M_0 = 0.785$ несущего профиля, близкого к оптимальному по $M^* = 0.785$ (а), и суперкритического профиля SC(2)_NASA_0410, спрофилированного на $M_0 = 0.785$ (б). Хотя согласно табл. 2 отличие M^m от единицы у второго профиля вчетверо больше, чем у первого, на расчетном режиме (при $M_0 = 0.785$), он обтекается почти безударно с $c_x \approx 0.2 \times 10^{-3}$.

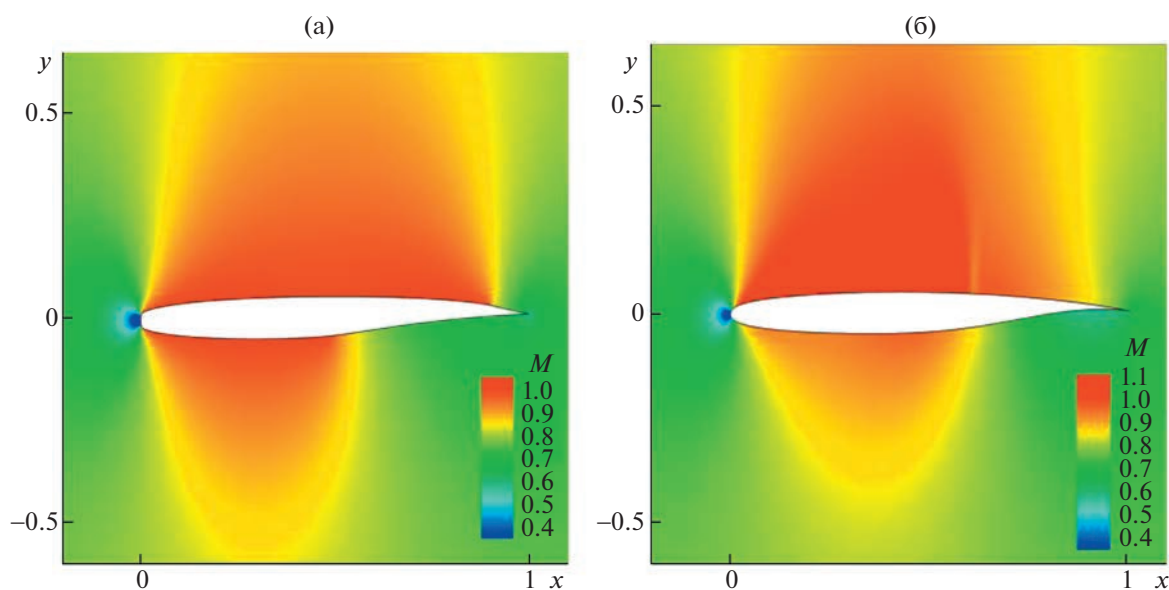


Рис. 2. Поля чисел Маха при обтекании с $M_0 = 0.785$ несущего профиля, близкого к оптимальному по $M^* = 0.785$ (а), и суперкритического профиля SC(2)_NASA_0410, спрофилированного на $M_0 = 0.785$ (б).

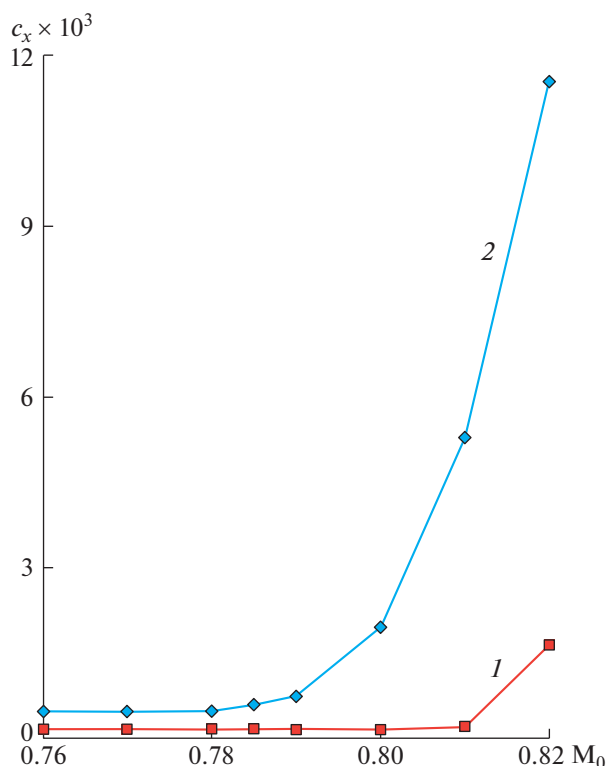


Рис. 3. Зависимость c_x от M_0 профилей: близкого к оптимальному по $M^* = 0.785$ (1) и профиля SC(2)_NASA_0410 (2).

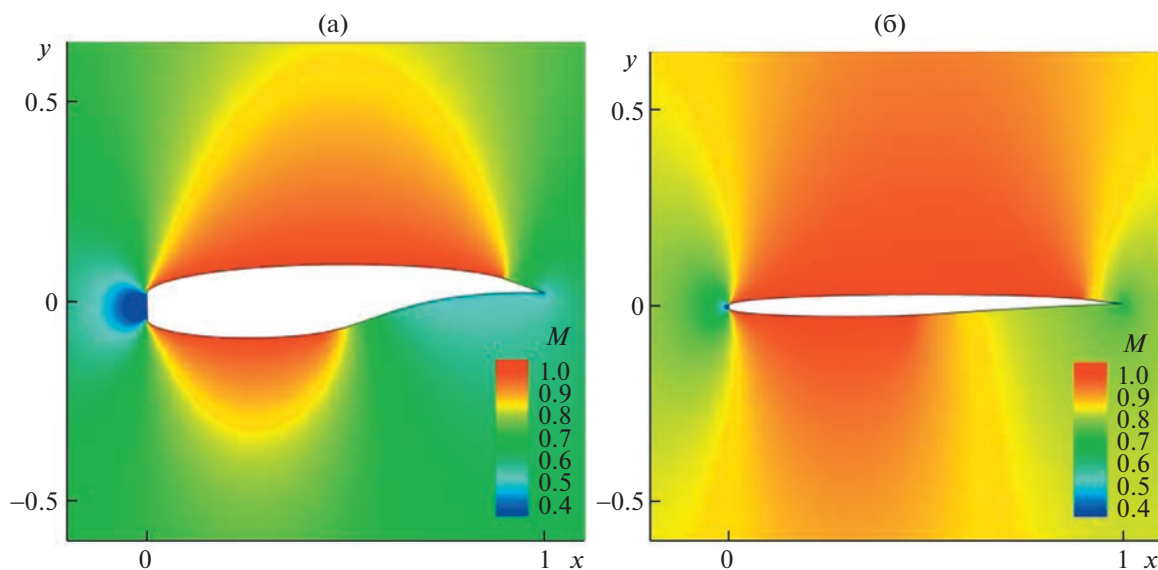


Рис. 4. Поля чисел Маха около близких к оптимальным по M^* несущих профилей: (а, б) – $M^* = 0.7, 0.85$.

Согласно рис. 3 ситуация резко меняется при M_0 , больших расчетного значения $M_0 = 0.785$. У близкого к оптимальному по M^* несущего профиля c_x не изменяется до $M_0 = 0.81$, возрастая затем до $c_x = 1.64 \times 10^{-3}$ при $M_0 = 0.82$ на исходной сетке и до $c_x = 1.48 \times 10^{-3}$ на четверо более густой. В отличие от этого c_x суперкритического профиля NASA начинает при $M_0 > 0.785$ расти сразу, достигая при $M_0 = 0.82$ много большей величины $c_x \approx 1.2 \times 10^{-2}$. На рис. 3 и далее ломанные кривые образуют прямолинейные отрезки, которые соединяют представленные значками результаты расчета.

На рис. 4 даны поля чисел Маха при обтекании с $M_0 = M^*$ несущих профилей, близких к оптимальным по $M^* = 0.7$ (а) и $M^* = 0.85$ (б). Зависимости от M_0 коэффициентов волнового сопро-

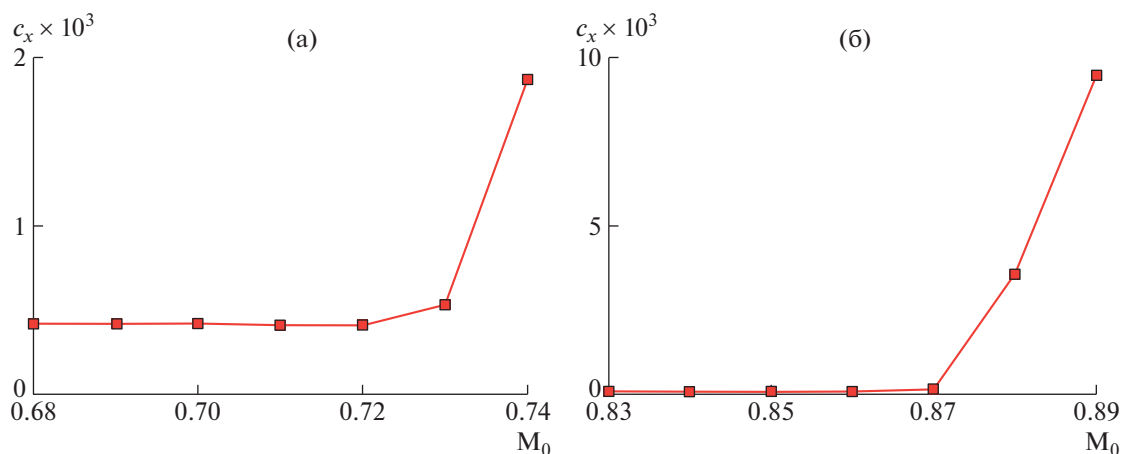


Рис. 5. Зависимость c_x близких к оптимальным по M^* несущих профилей, отвечающих $M^* = 0.7$ (а) и $M^* = 0.85$ (б), от M_0 .

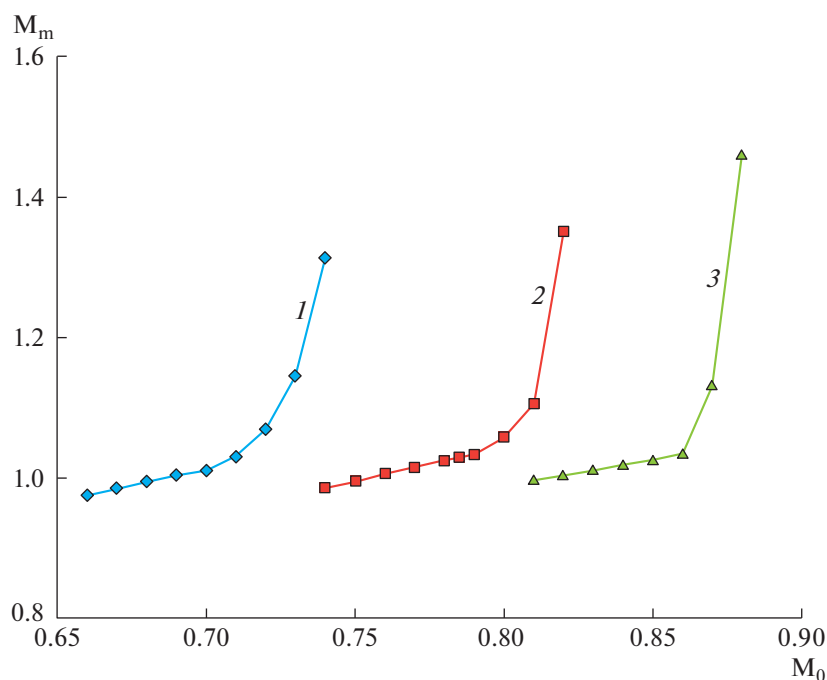


Рис. 6. Зависимость от M_0 максимальных чисел Маха M^m на близких к оптимальным по M^* несущих профилях, отвечающих $M^* = 0.7$ (1), 0.785 (2) и 0.85 (3).

тивления этих несущих профилей показывает рис. 5. Как и у несущего профиля с $M^* = 0.785$, увеличение c_x этих несущих профилей начинается не сразу при превышении расчетных значений чисел Маха набегающего потока $M_0 = M^*$ и идет не столь стремительно, как рост c_x суперкритических профилей [24] с такими же относительными толщинами h и расчетными числами Маха M_0 .

Рисунок 6 для близких к оптимальным по M^* несущих профилей дает зависимости от числа Маха набегающего потока M_0 максимальных чисел Маха M^m , которые реализуются на выпуклых участках их контуров. Для всех трех построенных профилей величина M^m слегка превышает единицу на расчетных $M_0 = M^*$, линейно по M_0 уменьшается при $M_0 < M^*$ и, ускоряясь, возрастает при $M_0 > M^*$. Сравнение кривых рис. 6 с кривыми рис. 3 и 5 показывает, что для близких к оптимальным по M^* несущих профилей ускоренный рост M^m начинается заметно раньше ускоренного роста волнового сопротивления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как и ожидалось, построение близких к оптимальным по M^* несущих профилей удалось благодаря простоте примененного для их построения прямого метода. Вторым существенным, но понятным не сразу моментом — отрицательные углы атаки. При положительных углах атаки искомые несущие профили не получались.

Авторы благодарны К.С. Пьянкову за предоставленные программы, консультации и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gilbarg D., Shiffman M.* On Bodies Achieving Extreme Values of the Critical Mach Number. I // *J. Ration. Mech. and Analysis*. 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
2. *Крайко А.Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // *ПММ*. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
3. *Fisher D.D.* Calculation of Subsonic Cavities with Sonic Free Streamlines // *J. Math. Phys.* 1963. V. 42. № 1. P. 14–26.
4. *Брутян М.А., Ляпунов С.В.* Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1981. Т. 12. № 5. С. 10–22.
5. *Щербаков С.А.* Расчет головной или кормовой части плокого тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1988. Т. 19. № 4. С. 10–18.
6. *Schwendeman D.W., Kropinski M.C.A., Cole J.D.* On the Construction and Calculation of Optimal Nonlifting Critical Airfoils // *ZAMP*. 1993. Bd 44. P. 556–571.
7. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // *ПММ*. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 93–107.
8. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* Отрывное обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 3. С. 166–172.
9. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О полубесконечных телах вращения, обтекаемых с максимальным критическим числом Маха // *ПММ*. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 97–107.
10. *Зигангареева Л.М., Киселев О.М.* О плоских конфигурациях, обтекаемых потоком идеального газа с максимальным критическим числом Маха // *ПМТФ*. 1998. № 5. С. 106–115.
11. *Крайко А.Н., Шаповалов В.А.* Плоские и осесимметричные тела, обтекаемые с наибольшими “критическими” числами Маха // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. № 4. С. 86–95.
12. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* О кривизне граничных линий тока течений идеального газа в точках схода и присоединения // *ПММ*. 2022. Т. 96. Вып. 3. С. 349–364.
13. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: Торус пресс, 2010. 440 с.
14. *Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Многокритериальная многодисциплинарная оптимизация лопатки рабочего колеса вентилятора на основе генетического алгоритма // *ТВФ*. 2010. № 3. С. 58–67.
15. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. и др.* Оптимизация биротативного вентилятора с учетом напряженно-деформированного состояния на основе генетического алгоритма // *ТВФ*. 2014. № 1. С. 22–34.
16. *Крайко А.А., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Профилирование двусторонних несимметричных плоских сопел максимальной тяги // *Изв. РАН МЖГ*. 2016. № 1. С. 115–120.
17. *Тилляева Н.И.* Сравнение эффективности штыревых и комбинированных кольцевых сопел // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 4. С. 140–152.
18. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. и др.* Внутренние скачки уплотнения при сверхзвуковом обтекании контуров оптимальных тел и сопел // *Изв. РАН. МЖГ*. 2020. № 6. С. 121–138.
19. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики // М.: Наука, 1976. 400 с.
20. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
21. *Тилляева Н.И.* Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26.
22. *Гринь В.Т., Крайко А.Н., Славянов Н.Н.* Решение задачи о запуске сопла, вмонтированного в торец ударной трубы // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1981. № 6. С. 117–123.

23. Браилко И.А., Попов Е.Н. Расчеты стационарных двух- и трехмерных вязких течений в межлопаточных каналах турбин // Труды НПО Энергомаш им. акад. В.П. Глушко. 2002. № 20. 448 с. С. 4–22.
24. Harris C.D. NASA Supercritical Airfoils. A Matrix of Family-Related Airfoils. 1990. NASA TR-2969.
25. Sobieczky H., Yu N.J., Fung K.-Y., Seebass A.R. A New Method for Designing Shock-Free Transonic Configurations // AIAA J. 1979. V. 17. № 7. P. 722–729.
26. Nakamura M. A Method for Obtaining Shockless Transonic Flows past Two-Dimensional Airfoils whose Profiles are Partially Modified from a Given Arbitrary Profile // Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci. 1981. V. 23. № 62. P. 195–213.
27. Dulikravich D.S., Sobieczky H. Shockless Design and Analysis of Transonic Cascade Shapes // AIAA J. 1982. V. 20. № 11. P. 1572–1578.
28. Beauchamp P., Seebass A.R. Shock-Free Turbomachinery Blade Design // AIAA J. 1985. V. 23. № 2. P. 249–253.
29. Крайко А.Н., Пьянков К.С. Построение профилей и мотогондол, суперкритических в околосзвуковом потоке идеального газа // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1890–1904.