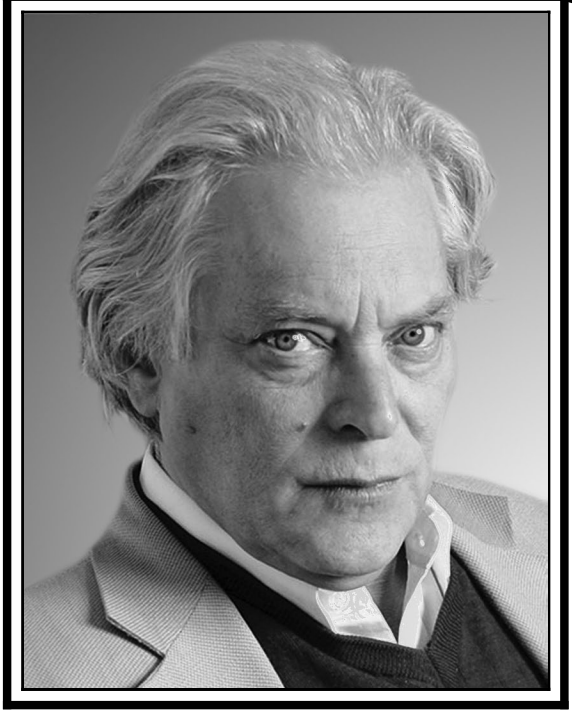
ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)
ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная нелинейная динамика



50 лет постоянным Фейгенбаума

(1975 год)

1
2025

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)
А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

М. В. Сысоева, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)
Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)
С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном исследовательском совете (Флоренция, Италия)
А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН (Санкт-Петербург, Россия)
Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)
С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)
А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)
О. И. Канаков, д.ф.-м.н., ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)
С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова (Ярославль, Россия)
А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)
Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)
Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)
А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)
Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)
В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)
И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)
А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)
В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)
А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)
А. В. Порубов, д.ф-.м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)
В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)
Е. Я. Фрисман, чл.-корр. РАН, д.б.н., профессор, ИКАРП ДВО РАН (Биробиджан, Россия)
В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А. (Саратов, Россия)
В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН (Москва, Россия)
М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)
В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Журнал «Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-77991 от 20 марта 2020 года

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписной индекс издания 73498. Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru). Свободная цена

Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией А. А. Грищенко
Редактор А. Р. Нигметулина
Верстка О. Н. Строгановой

Подписан в печать 16.01.2025
Вышел в свет 31.01.2025
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 16,28 (17,5)
Тираж 100 экз. Заказ № 1-Т

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83. Тел.: +7 (927) 625-9020, e-mail: andjournal@sgu.ru, сайт: http://andjournal.sgu.ru

Отпечатан в Типографии Саратовского университета. Адрес типографии: Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

© Саратовский университет, 2025

Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy

APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The journal "Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics" is registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Registration ПИ No ФС77-77991 of 20 March 2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

The journal subscription index is 73498. A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru). Free price

The journal is Open Access

Head of Editorial office A. A. Grishchenko
Editor A. R. Nigmetulina
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (927) 625-9020, e-mail: andjournal@sgu.ru, website: http://andjournal.sgu.ru

Signed to press 16.01.2025. Published 31.01.2025
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 16,28 (17,5)
Edition of 100 copies. Order No. 1-T

Printed by Printing House of Saratov State University. Address of Printing House: 83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia. Ph.:+7 (8452) 273385, e-mail:sguprint@bk.ru

© Saratov State University, 2025

Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
научно-технический журнал
издается с 1993 года

Выходит 6 раз в год 2025, том 33, № 1

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

Кузнецов А. П., Седова Ю. В. К 50-летию открытия закономерностей Фейгенбаума 5

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

Москаленко О. И., Ханадеев В. А. Перемежающееся поведение вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием 9

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

Моисеенко И. М., Фатеев Д. В., Попов В. В. Анизотропия и усиление терагерцевого электромагнитного отклика, вызванные протеканием постоянного электрического тока в графене 19

Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Реконструкция автоколебательных систем с модуляцией времени запаздывания 27

Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И. Мультистабильность синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой и их устойчивость в целом и в большом 38

НОВОЕ В ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКЕ

Петросян М. М., Рыжов А. И. Модель построения двумерных изображений источников радиосвета с использованием корреляционного приёма 69

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

Ермолаева А. В., Кастальский И. А., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю. Эффекты динамики шумоиндуцированных кальциевых сигналов в биофизической модели астроцитарного отростка 82

Шушарина Н. Н. Сравнительный анализ эффективности трансферного обучения по обобщенным данным ЭЭГ для использования в задаче диагностики депрессии 100

Егоров Е. Н., Журавлёв М. О., Руннова А. Е., Евстропов М. А., Реджепова А. С. Метод ортогональной декомпозиции Карунена–Лоэва для задач оценок ЭЭГ пациентов с мигренью 123

Izvestiya VUZ
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS
scientific-technical journal
published since 1993

Published 6 times a year 2025, vol. 33, no. 1

C O N T E N T S

EDITORIAL

Kuznetsov A. P., Sedova Yu. V. On the 50th anniversary of the discovery of Feigenbaum's laws 5

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS. QUANTUM CHAOS

Moskalenko O. I., Khanadeev V. A. Intermittent behavior near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled time-delayed systems 9

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

Moiseenko I. M., Fateev D. V., Popov V. V. Anisotropy and amplification of terahertz electromagnetic response enabled by direct electric current in graphene 19

Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Reconstruction of self-oscillating systems with delay time modulation 27

Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I. Multistability of synchronous modes in a multimachine power grid with a common load and their global and non-local stability 38

INNOVATIONS IN APPLIED PHYSICS

Petrosyan M. M., Ryzhov A. I. Model of 2D-imaging system using correlation-based reception for image synthesis of radio light sources 69

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

Ermolaeva A. V., Kastalskiy I. A., Kazantsev V. B., Gordleeva S. Yu. Effects of the dynamics of noise-induced calcium signals in a biophysical model of the astrocytic process 82

Shusharina N. N. Comparative analysis of transfer learning performance on generalised EEG data for use in a depression diagnosis task 100

Egorov E. N., Zhuravlev M. O., Runnova A. E., Evstropov M. A., Redzhepova A. S. Karhunen–Loeve orthogonal decomposition method for problems of EEG assessment of patients with migraine 123

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003158
EDN: NDDGMU

К 50-летию открытия закономерностей Фейгенбаума

А. П. Кузнецов✉, *Ю. В. Седова*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: ✉apkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.01.2025, опубликована 31.01.2025

Для цитирования: *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* К 50-летию открытия закономерностей Фейгенбаума // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 5–8. DOI: 10.18500/0869-6632-003158. EDN: NDDGMU

For citation: Kuznetsov AP, Sedova YuV. On the 50th anniversary of the discovery of Feigenbaum's laws. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):5–8. DOI: 10.18500/0869-6632-003158

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

В 1975 году, экспериментируя с карманным программируемым калькулятором, американский физик Митчелл Фейгенбаум (Mitchell Feigenbaum) открыл универсальные закономерности перехода к хаосу через бифуркации удвоения периода, которые теперь носят его имя. Изученные им отображения с квадратичным экстремумом привлекали внимание исследователей и ранее, например, в контексте описания динамики популяций. Было обнаружено, что такие отображения $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$ при вариации параметра λ могут демонстрировать последовательность удвоений периода циклов с последующим переходом к хаосу (Myrberg, 1963 [1], Шарковский, 1964 [2], Metropolis и др., 1973 [3]). Простейшей системой, демонстрирующей переход к хаосу через каскад бифуркаций рождения 2^k-циклов, является логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \tag{1}$$

Здесь x_n — значения динамической переменной в дискретные моменты времени n, λ — управляющий параметр. Последовательность бифуркационных точек λ_k накапливается к критической точке $\lambda_c = 1.40115518909\ldots$ При этом имеют место два закона Фейгенбаума.

1. Значения параметра λ_k удовлетворяют закону геометрической прогрессии

$$\lambda_k \to \lambda_c - \frac{\text{const}}{\delta_F^k}, \tag{2}$$

© *Кузнецов А. П., Седова Ю. В., 2025*

тем более точно, чем выше номер k. Здесь $\delta_F = 4.669201609102990671\ldots$ — первая константа Фейгенбаума.

2. Расстояния d_k от точки экстремума $x = 0$ до ближайшей к ней точки на 2^k-цикле в точках бифуркаций подчиняются асимптотическому соотношению

$$\frac{d_k}{d_{k+1}} \to \alpha_F, \tag{3}$$

где $\alpha_F = -2.50290787509589282\ldots$ — вторая константа Фейгенбаума.

Замечательное открытие Фейгенбаума состояло не только в обнаружении законов (2), (3), а и в том, что они универсальны, то есть не зависят от конкретного вида функции $f(x)$. Достаточно, чтобы она имела квадратичный экстремум. Соответственно, универсальными являются и константы δ_F и α_F.

Законы Фейгенбаума приводят к возникновению свойства *скейлинга* (подобия). Скейлинг для бифуркационного дерева логистического отображения иллюстрирует рис. 1, *a*. При увеличении выделенного фрагмента в δ_F по горизонтали и в α_F раз по вертикали приходим к эквивалентной картинке. При этом ее надо зеркально отразить относительно горизонтальной оси в силу отрицательности константы α_F. Аналогичный скейлинг можно наблюдать и на рис. 1, *b* для

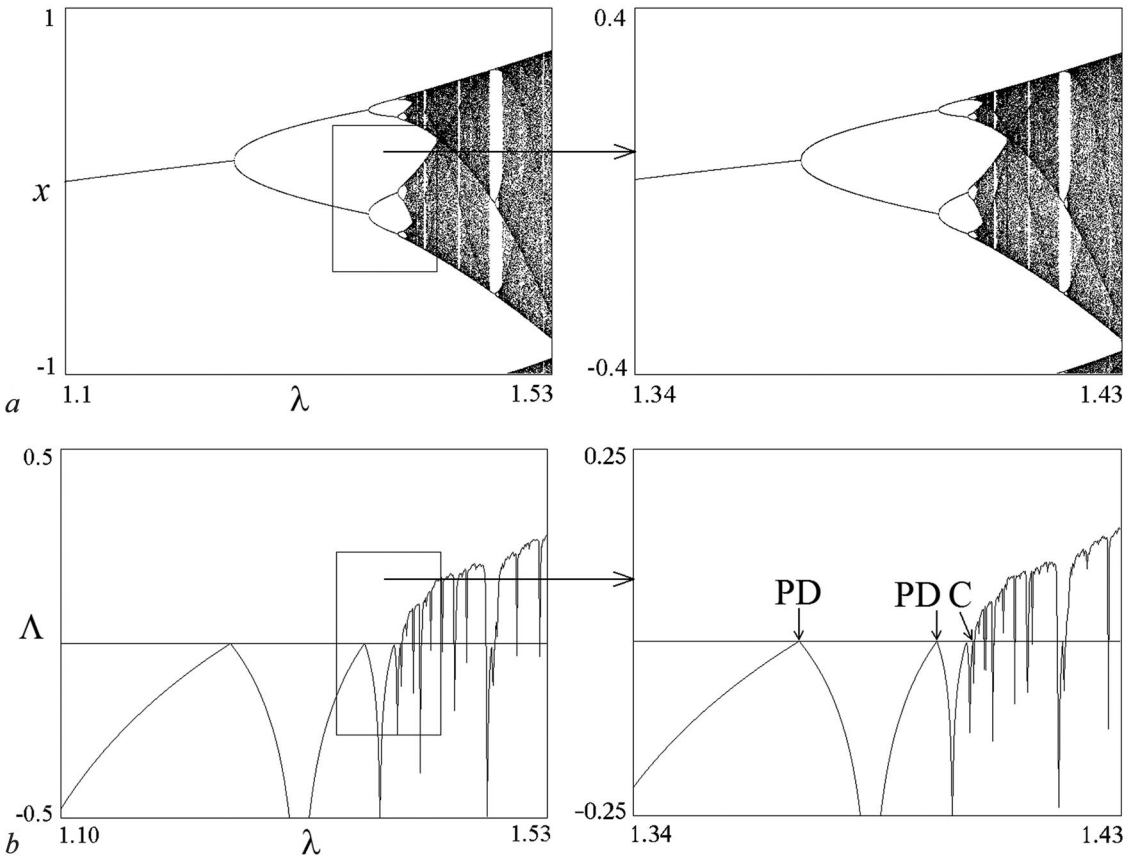


Рис. 1. Скейлинг на бифуркационном дереве (*a*) и графике ляпуновского показателя (*b*) логистического отображения (1). PD — точки удвоений периода, C — критическая точка Фейгенбаума

Fig. 1. Scaling on the bifurcation tree (*a*) and the graph of the Lyapunov exponent (*b*) of the logistic map (1). PD are the period doubling points, C is the Feigenbaum critical point

графика ляпуновского показателя Λ, для которого масштаб пересчитывается в δ_F раз по горизонтали и в 2 раза по вертикали (что отвечает удвоению периода). Отметим, что на рис. 1 хорошо видны точки удвоений периода PD и критическая точка C, $\lambda = \lambda_c$, за которой возможен хаос с положительным показателем $\Lambda > 0$.

Универсальность законов Фейгенбаума была обоснована им в работах [4, 5] с помощью метода *ренормализационной группы*, известного также в физике фазовых переходов, квантовой физике и других областях. Уравнение ренормгруппы для бифуркаций удвоения имеет вид

$$g(x) = \alpha_F g(g(x/\alpha_F)). \tag{4}$$

При этом $g(0) = 1$ и $\alpha_F = 1/g(g(0))$. Функция $g(x)$ оказывается универсальной, поскольку она не зависит от конкретной формы исходного отображения и определяется только порядком экстремума. Она дает асимптотическую форму 2^k-кратно примененного оператора эволюции в критической точке при $k \to \infty$ с учетом перенормировки динамической переменной x. Константа α_F может быть, таким образом, найдена из уравнения ренормгруппы. Константа δ_F определяется из уравнения ренормгруппы в вариациях, дающего динамику при приближении к критической точке [4, 5].

Для русскоязычных читателей описание критических явлений в одномерных отображениях можно найти в переводе статьи Фейгенбаума [6], а также в обзоре, опубликованном в самом первом номере журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» [7].

Результаты Фейгенбаума вызвали настоящий бум и поток последующих работ. Так, работы [4, 5] насчитывают более 7000 цитирований. Его универсальные закономерности были обнаружены не только для одномерных, но и для двух- и более высокоразмерных отображений. Замечательно, что их демонстрируют также системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Причина универсальности и применимости к разным классам динамических систем состоит в том, что при приближении к критической точке рождения непериодического режима — хаоса — характерный временной масштаб становится очень большим и, соответственно, превышает все характерные величины с размерностью времени в уравнениях системы. Локальные во времени особенности динамики становятся несущественными, и собственно переход к хаосу оказывается универсальным [8]. При этом природа систем может быть самой разнообразной — это гидродинамические, электронные, оптические, биологические, химические и другие системы. Как в численных расчетах, так и в экспериментах обнаруживаются характерные, даже достаточно тонкие особенности сценария Фейгенбаума.

Теперь сценарий Фейгенбаума входит во все монографии и учебники по нелинейной динамике и динамическому хаосу. Были обнаружены и другие типы критической динамики, связанные с удвоениями периода. Например, трикритические точки, представляющие феномен коразмерности два. Им отвечают концевые точки фейгенбаумовских линий на плоскости параметров, и вблизи них наблюдается двухпараметрический скейлинг с двумя новыми универсальными константами [9, 10]. Ряд новых, связанных с удвоениями периода типов критичности обнаружен для двумерных отображений [8]. Отметим, что аналогичный Фейгенбауму подход с использованием метода ренормгруппы был использован также при описании перехода к хаосу через перемежаемость (Hirsh, 1982 [11]), Hu и Rudnik, 1982 [12]) и через разрушение квазипериодических колебаний (Feigenbaum и др., 1982 [13], Ostlund и др., 1983 [14]). Целый ряд публикаций был посвящен универсальности и методу ренормгруппы для связанных систем с удвоениями периода (Кузнецов С. П., 1985 [15], Kook и др., 1991 [16], Kim и Kook, 1992, 1993 [17, 18]).

Таким образом, сценарий Фейгенбаума стал одним из ключевых феноменов теории хаоса и привел к новым обобщениям. Благодаря работам Фейгенбаума сформировалось фактически целое направление исследований.

Список литературы

1. *Myrberg P. J.* Iteration der reellen Polynome zweiten Grades III // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1963, no. 336/3. P. 1–18. DOI: 10.5186/aasfm.1964.336-03.
2. *Шарковский А. М.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26, № 1. С. 61.
3. *Metropolis N., Stein P. K., Stein M. L.* Finite limit sets for transformations of the unit interval // J. Comb. Theory. 1973. Vol. 15, no. 1. P. 25–44. DOI: 10.1016/0097-3165(73)90033-2.
4. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, no. 1. P. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.
5. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. c21, no. 6. P. 669–706. DOI: 10.1201/9780203734636.
6. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т. 141, № 10. С. 343–374. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198310e.0343.
7. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1. Сценарий Фейгенбаума // Известия вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1. С. 15–33.
8. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
9. *Chang S. J., Wortis M., Wright J. A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // Phys. Rev. A. 1981. Vol. 25, no. 5. P. 2669–2684. DOI: 10.1103/PhysRevA.24.2669.
10. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Известия вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 3. С. 17–35.
11. *Hirsch J. E., Nauenberg M., Scalapino D. J.* Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // Physics Letters A. 1982. Vol. 87, no. 8. P. 391–393. DOI: 10.1016/0375-9601(82)90165-7.
12. *Hu B., Rudnick J.* Exact solutions to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48, no. 24. P. 1645–1648. DOI: 10.1103/PhysRevLett.48.1645.
13. *Feigenbaum M. J., Kadanoff L. P., Shenker S. J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // Physica D. 1982. Vol. 5, no. 2–3. P. 370–386. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90030-6.
14. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Physica D. 1983. Vol. 8, no. 3. P. 303–342. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90229-4.
15. *Кузнецов С. П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Известия вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991–1007.
16. *Kook H., Ling F. H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, no. 6. P. 2700. DOI: 10.1103/PhysRevA.43.2700.
17. *Kim S. Y., Kook H.* Critical behavior in coupled nonlinear systems // Phys. Rev. 1992. Vol. 46, no. 8. P. R4467-R4470. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.R4467.
18. *Kim S. Y., Kook H.* Period doubling in coupled maps // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48, no. 2. P. 785. DOI: 10.1103/PhysRevE.48.785.

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003129
EDN: FFUEBY

Перемежающееся поведение вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием

О. И. Москаленко✉, *В. А. Ханадеев*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ✉o.i.moskalenko@gmail.com, v.a.hanadeev@gmail.com

*Поступила в редакцию 15.06.2024, принята к публикации 11.09.2024,
опубликована онлайн 2.10.2024, опубликована 31.01.2025*

Аннотация. *Целью* работы является анализ характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием. Рассмотрен случай взаимодействия систем, характеризующихся различным числом положительных показателей Ляпунова. Для определения длительностей характерных фаз поведения систем использован *метод* вспомогательной системы. *Результатом* работы является определение типа перемежаемости, имеющего место вблизи границы обобщенной синхронизации. В данном случае путем расчета статистических характеристик длительностей ламинарных фаз (распределений длительностей ламинарных фаз и зависимостей средних длительностей ламинарных фаз от параметров надкритичности) установлено, что на границе синхронного режима имеет место перемежаемость типа on-off. Показано, что для перемежающейся обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием характерна мультистабильность. Для этого произведен расчет усредненной по времени меры мультистабильности от величины параметра связи между системами и осуществлено ее сравнение с поведением спектра показателей Ляпунова. Обнаружено, что мера мультистабильности может использоваться для диагностики обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, однонаправленная связь, обобщенная синхронизация, перемежаемость типа on-off, мультистабильность, вероятность наблюдения турбулентной фазы.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00033, https://rscf.ru/project/24-22-00033.

Для цитирования: *Москаленко О. И., Ханадеев В. А.* Перемежающееся поведение вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 9–18. DOI: 10.18500/0869-6632-003129. EDN: FFUEBY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Москаленко О. И., Ханадеев В. А., 2024*

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003129

Intermittent behavior near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled time-delayed systems

O. I. Moskalenko✉, *V. A. Khanadeev*

Saratov State University, Russia
E-mail: ✉o.i.moskalenko@gmail.com, v.a.hanadeev@gmail.com
Received 15.06.2024, accepted 11.09.2024, available online 2.10.2024, published 31.01.2025

Abstract. The *aim* of the work is an analysis of characteristics of intermittent behavior taking place near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled time-delayed generators. The case of interaction of systems characterized by different numbers of positive Lyapunov exponents is considered. To determine the lengths of characteristic phases of the system behavior the auxiliary system *method* has been used. The *result* of the work is the determination of the type of intermittency taking place near the boundary of generalized synchronization. In this case by calculation the statistical characteristics of the laminar phase lengths (distributions of the laminar phase lengths and the dependencies of the mean lengths of the laminar phases on the criticality parameters) it has been found that near the boundary of the synchronous regime the on-off intermittency is observed. It has been shown that the intermittent generalized synchronization in time-delayed systems is characterized by multistability. For these purposes a time-averaged measure of multistability depending on the value of the coupling parameter between systems has been calculated and compared with the behavior of the spectrum of Lyapunov exponents. It has been found that the multistability measure can be used to detect the generalized synchronization in time-delayed systems.

Keywords: time-delayed systems, unidirectional coupling, generalized synchronization, on-off intermittency, multistability, probability of observation the turbulent phase.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation (project N. 24-22-00033, https://rscf.ru/project/24-22-00033).

For citation: Moskalenko OI, Khanadeev VA. Intermittent behavior near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled time-delayed systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):9–18. DOI: 10.18500/0869-6632-003129

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Обобщенная синхронизация является широко распространенным явлением, которое представляет большой интерес в современном мире [1, 2]. Данное явление может найти своё применение в задачах передачи информации, в том числе скрытой [3], при контроле хаоса в СВЧ-генераторах [4], а также при диагностике динамики некоторых биологических систем [5].

Режим обобщенной синхронизации подразумевает установление функциональной связи между состояниями взаимодействующих систем [6, 7] и может возникать при взаимодействии систем различной природы и с разным фазовым пространством [8].

Вблизи границы обобщенной синхронизации, как правило, наблюдается перемежающееся поведение — режим перемежающейся обобщенной синхронизации [9, 10]. В данном случае функциональная связь между состояниями взаимодействующих систем наблюдается только в определенные интервалы времени, называемые ламинарными фазами поведения, в то время как на фоне ламинарных фаз имеют место кратковременные турбулентные всплески, в течение которых функциональная связь между взаимодействующими системами отсутствует. При этом для систем с малым числом степеней свободы известно, что тип перемежаемости, реализуемой в данном случае, не зависит от типа связи между системами (однонаправленной или взаимной), а существенным образом определяется топологией аттракторов взаимодействующих систем [10, 11]. В случае взаимодействия систем с относительно простой топологией аттрактора (как правило, с аттрактором ленточного типа) вблизи границы обобщенной синхронизации имеет место перемежаемость типа on-off [9, 11], в то время как в системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора реализуется перемежаемость перескоков (jump intermittency) [10]. Подобных исследований для систем с бесконечномерным фазовым пространством до настоящего времени проведено

не было. Исключением является лишь работа [12], где обнаружена on-off перемежаемость в однонаправленно связанных уравнениях Гинзбурга–Ландау со связью в каждой точке пространства взаимодействия, находящихся вблизи границы этого синхронного режима.

Целью настоящей работы является исследование возможности существования перемежаемости на границе режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием. В качестве объекта исследования в работе выбрана система двух однонаправленно связанных радиотехнических генераторов с запаздыванием, описываемая следующими уравнениями [13]:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + k_1 f(x_1(t-\tau)), \\ \varepsilon\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + k_2 f(x_2(t-\tau)) + k_3[f(x_1(t-\tau)) - f(x_2(t-\tau))], \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_1(t)$, $x_1(t-\tau)$ и $x_2(t)$, $x_2(t-\tau)$ — безразмерные напряжения на входе и выходе линии задержки ведущей и ведомой систем соответственно, $\varepsilon = 1$ — параметр, характеризующий инерционные свойства систем, $k_1 = 1.015$, $k_2 = 1.004$ — управляющие параметры, определяющие характерные масштабы колебаний в ведущем и ведомом генераторах, k_3 — параметр связи, $f(x) = a - x^2$ — передаточная функция нелинейного элемента, выбранная квадратичной по аналогии с работами предшественников [13, 14], $a = 1.5$ — параметр нелинейности, $\tau = 10$ — время запаздывания. Начальные условия для ведущей системы были выбраны фиксированными $x_1(t_0) = 0.5$, а для ведомой системы задавались случайным образом в диапазоне $x_2(t_0) \in [-1;1]\ \forall\ t_0 \in [0;\tau]$. При выбранных значениях управляющих параметров во взаимодействующих системах в отсутствие связи между ними реализуются хаотические колебания с различным числом положительных показателей Ляпунова.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных генераторах (1) использовался метод расчета спектра показателей Ляпунова, предложенный в работе [15]. Метод представляет собой обобщение классического алгоритма Бенеттина и процедуры ортогонализации Грама–Шмидта на случай систем с отклоняющимся аргументом. Он основан на рассмотрении эволюции во времени состояния системы, определенного на интервале времени с длительностью, равной времени запаздывания, и его возмущений. Критерием обобщенной синхронизации в данном случае является переход старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений [16].

На рис. 1 приведены результаты расчета спектра показателей Ляпунова однонаправленно связанных систем с запаздыванием (1) при помощи описанного выше подхода. Из рисунка видно,

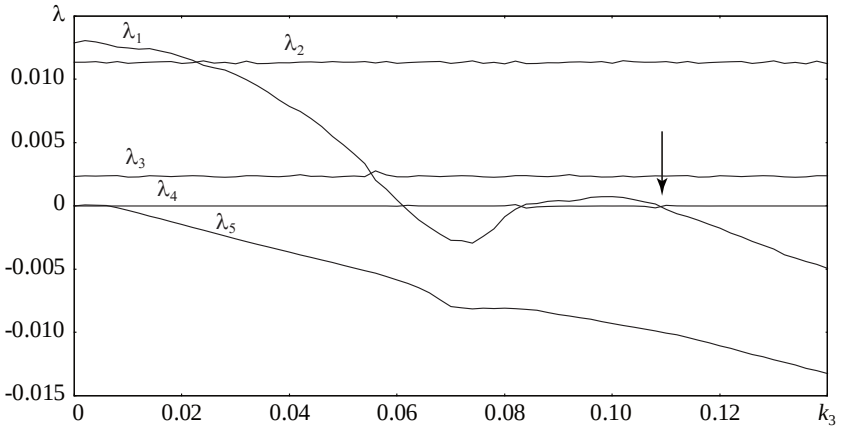


Рис. 1. Зависимости пяти старших показателей Ляпунова от параметра связи k_3 для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (1)

Fig. 1. Dependencies of five highest Lyapunov exponents on the coupling parameter k_3 for unidirecyionally coupled time-delayed generators (1)

что изначально, в отсутствие связи между взаимодействующими системами, в системе (1) присутствует три положительных показателя Ляпунова, что соответствует случаю взаимодействия систем с одним и двумя положительными показателями Ляпунова. При увеличении параметра связи k_3 два положительных показателя Ляпунова, соответствующие ведущей системе, не меняют своих значений, в то время как старший условный показатель (положительный показатель Ляпунова ведомой системы) переходит в область отрицательных значений. Далее данный показатель возвращается к положительным значениям и затем опять выходит в отрицательную область. Когда остается только два положительных показателя Ляпунова, в системе окончательно устанавливается режим обобщенной синхронизации.

Диагностику режима обобщенной синхронизации можно произвести также при помощи метода вспомогательной системы [17]. Согласно данному подходу необходимо ввести в рассмотрение еще одну систему $x_3(t)$, называемую вспомогательной, которая полностью идентична ведомой системе из (1) по управляющим параметрам, но начальные условия для нее отличаются от последних для ведомой системы. Тогда в режиме обобщенной синхронизации, ввиду наличия функциональной связи между состояниями как ведущей и ведомой, так и ведущей и вспомогательной систем, состояния ведомой и вспомогательной систем должны быть полностью идентичными, в то время как в отсутствие синхронного режима состояния этих систем будут достаточно сильно отличаться друг от друга. Вышесказанное иллюстрирует рис. 2, где представлены плоскости состояний взаимодействующих ведущей и ведомой, а также ведомой и вспомогательной систем при различных значениях параметра связи. Видно, что в режиме обобщенной синхронизации (рис. 2, *h*) все точки на плоскости (x_2, x_3) выстраиваются вдоль главной диагонали, в то время

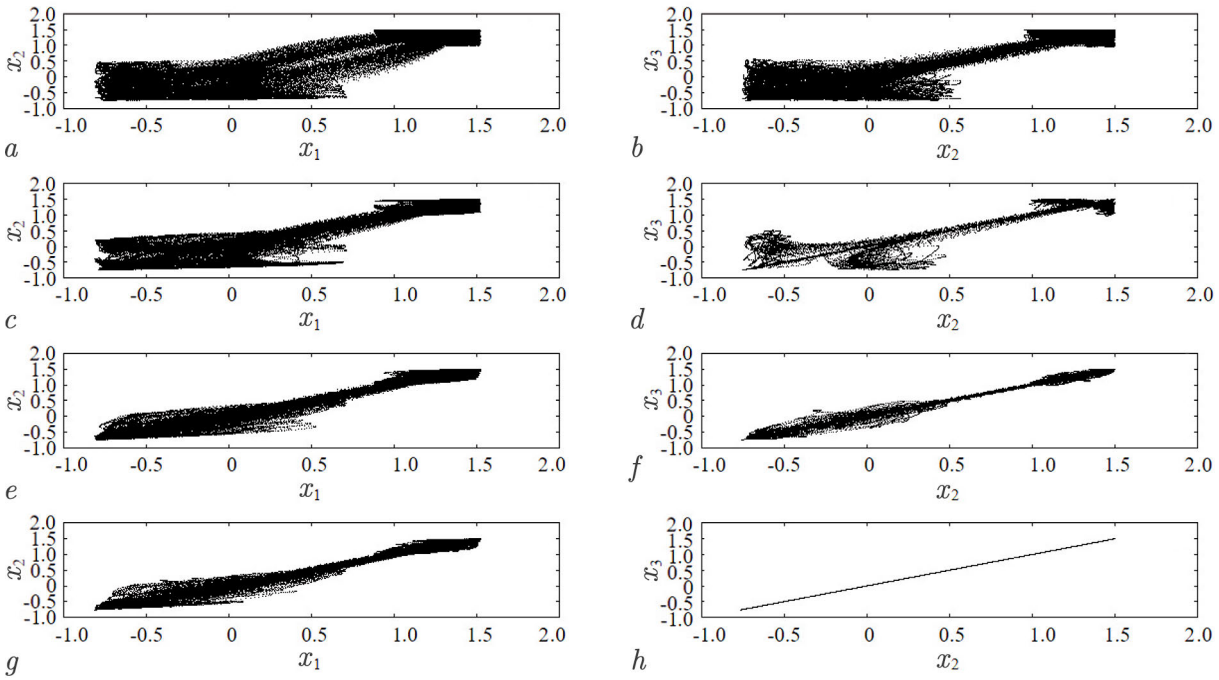


Рис. 2. Плоскости состояний ведущего и ведомого (x_1, x_2) (*a, c, e, g*) и ведомого и вспомогательного (x_2, x_3) (*b, d, f, h*) генераторов с запаздыванием (1) при различных значениях параметра связи k_3: $k_3 = 0.02$ — асинхронный режим (*a, b*), $k_3 = 0.06$ — режим перемежающейся обобщенной синхронизации (*c, d*), $k_3 = 0.106$ — режим перемежающейся обобщенной синхронизации (*e, f*), $k_3 = 0.12$ — режим обобщенной синхронизации (*g, h*)

Fig. 2. State planes of the drive and response (x_1, x_2) (*a, c, e, g*) as well as the response and auxiliary (x_2, x_3) (*b, d, f, h*) time-delayed generators (1) for different values of the coupling parameter k_3: $k_3 = 0.02$ — asynchronous regime (*a, b*), $k_3 = 0.06$ — intermittent generalized synchronization regime (*c, d*), $k_3 = 0.106$ — intermittent generalized synchronization regime (*e, f*), $k_3 = 0.12$ — generalized synchronization regime (*g, h*)

как в отсутствие этого режима точки достаточно сильно распределены по плоскости (x_2, x_3) (рис. 2, *b*). Важно отметить, что на плоскости (x_1, x_2) (рис. 2, *a*, *c*, *e* и *g*) состояния систем в отсутствие и при наличии обобщенной синхронизации качественно аналогичны друг другу, что говорит о невозможности диагностирования этого режима только по временным реализациям ведущей и ведомой систем, а также об отличии этого режима от режимов полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием.

Установлению режима обобщенной синхронизации предшествует режим перемежающейся обобщенной синхронизации. В данном случае часть точек на плоскости (x_2, x_3) выстраивается вдоль главной диагонали, в то время как другая часть остается разбросанной по всей плоскости. Первая часть точек соответствует реализации фаз синхронного поведения (ламинарным фазам), а вторая часть — асинхронным (турбулентным) фазам. Эта ситуация проиллюстрирована также на рис. 2, *d* и 2, *f*). Для определения типа перемежаемости, реализуемого в данном случае, были рассчитаны статистические характеристики перемежаемости: распределения длительностей ламинарных фаз $N(l)$ при нескольких фиксированных значениях параметра связи k_3 (рис. 3, *a*) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности $k_3^c - k_3$, где $k_3^c = 0.11$ соответствует порогу обобщенной синхронизации (близко к моменту перехода старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений) (рис. 3, *b*). Видно, что и распределения длительностей ламинарных фаз, и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности в высокой степени точности соответствуют теоретическим закономерностям

$$N(l) \sim l^{-3/2} \tag{2}$$

и

$$\langle l \rangle \sim (k_3^c - k_3)^{-1}, \tag{3}$$

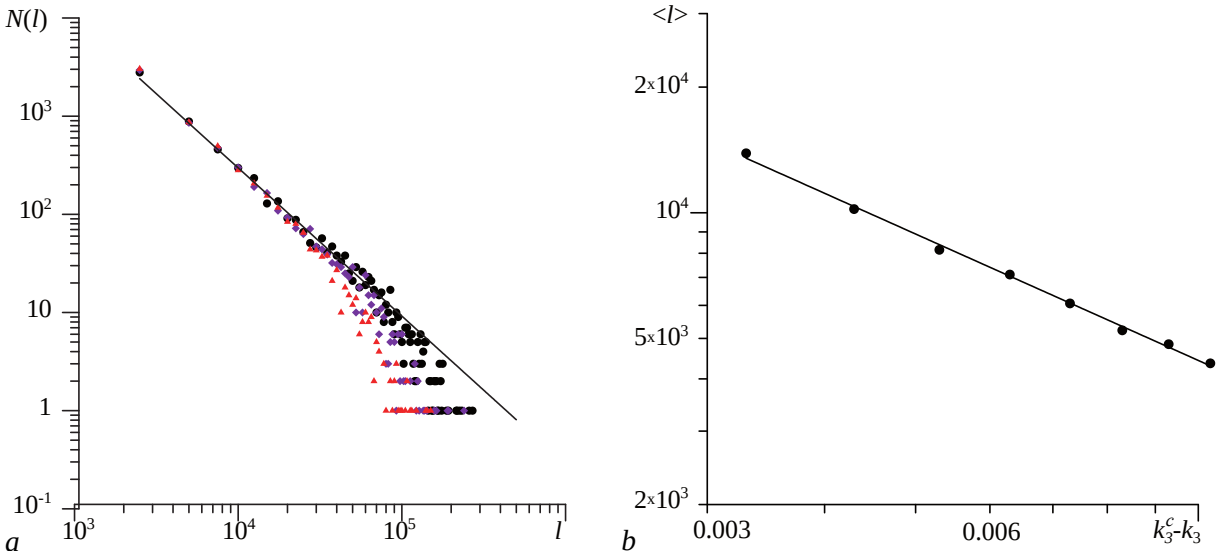


Рис. 3. Распределения длительностей ламинарных фаз $N(l)$ (*a*) и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности $k_3^c - k_3$ (*b*), полученные для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (1), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, и их аппроксимации теоретическими законами (2) и (3) соответственно. Данные численного моделирования показаны символами, теоретические аппроксимации — сплошными линиями: (*a*) • — $k_3 = 0.106$, ♦ — $k_3 = 0.104$, ▲ — $k_3 = 0.102$, (*b*) $k_3^c = 0.11$ (цвет онлайн)

Fig. 3. Distributions of the laminar phase lengths $N(l)$ (*a*) and dependence of the mean length of the laminar phases $\langle l \rangle$ on the criticality parameter $k_3^c - k_3$ (*b*) obtained for the unidirectionally coupled time-delayed generators (1) being in the regime of intermittent generalized synchronization and their approximations by theoretical laws (2) and (3), respectively. The numerically obtained data are marked by symbols, theoretical approximations are shown by solid lines: (*a*) • — $k_3 = 0.106$, ♦ — $k_3 = 0.104$, ▲ — $k_3 = 0.102$, (*b*) $k_3^c = 0.11$ (color online)

характерным для перемежаемости типа on-off [9, 18]. Аналогичное поведение с аналогичными характеристиками предшествует первому переходу условного положительного показателя Ляпунова в область отрицательных значений (рис. 4), а также имеет место на границе обобщенной синхронизации при изменении управляющих параметров взаимодействующих систем. Можно утверждать, что независимо от выбора управляющих параметров взаимодействующих систем на границе обобщенной синхронизации в автогенераторах с запаздыванием наблюдается перемежаемость типа on-off.

Для режима перемежающейся обобщенной синхронизации характерна мультистабильность, под которой в данном контексте подразумевается существование в фиксированные моменты времени фаз различного поведения в зависимости от выбора начальных условий одной из взаимодействующих систем [19, 20]. Мультистабильность на границе обобщенной синхронизации достаточно хорошо изучена в системах с малым числом степеней свободы, однако вопрос о существовании мультистабильности в системах с запаздыванием до настоящего времени не рассматривался.

Для расчета меры мультистабильности использовался подход, предложенный в работе [21]. Для этого рассматривался ансамбль из $M = 100$ ведомых систем с запаздыванием, находящихся под воздействием одной и той же ведущей системы. При этом значения начальных условий ведомых систем отличались, а значения управляющих параметров были одинаковыми. Согласно методу проводилось сравнение состояний ведомых систем между собой и вычислялось

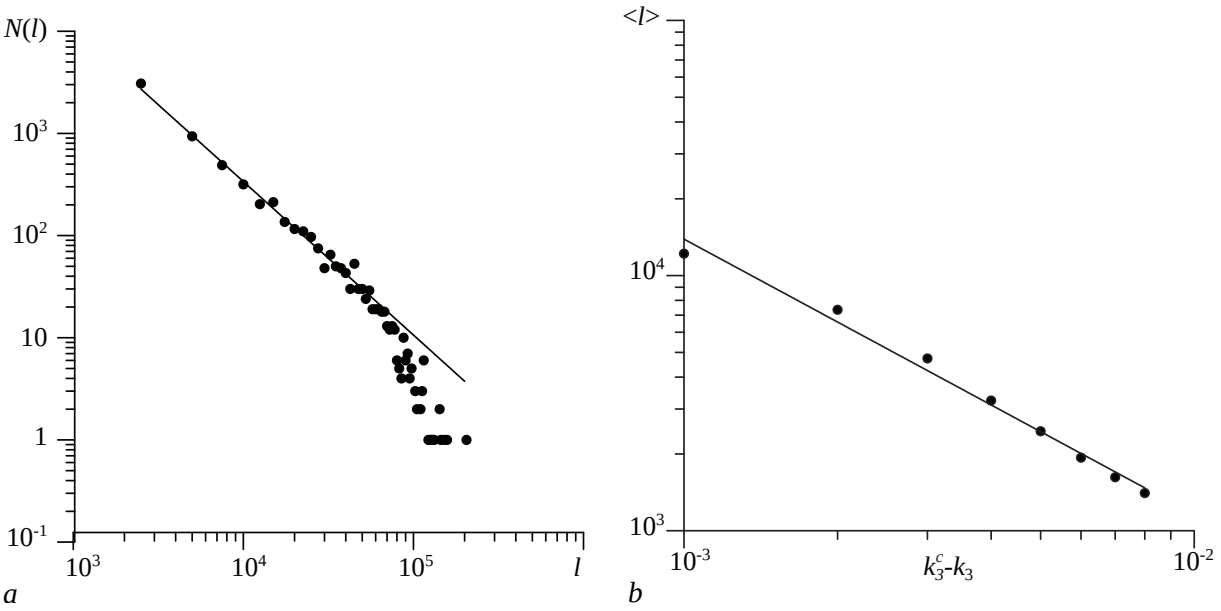


Рис. 4. Распределение длительностей ламинарных фаз $N(l)$ при $k_3 = 0.06$ (a) и зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности $k_3^c - k_3$ (b), полученные для однонаправленно связанных генераторов с запаздыванием (1), находящихся в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации, и их аппроксимации теоретическими законами (2) и (3) соответственно. Данные численного моделирования показаны символами, теоретические аппроксимации — сплошными линиями, $k_3^c = 0.062$ — момент первого перехода старшего условного показателя Ляпунова в область отрицательных значений

Fig. 4. Distribution of the laminar phase lengths $N(l)$ for $k_3 = 0.06$ (a) and dependence of the mean length of the laminar phases $\langle l \rangle$ on the criticality parameter $k_3^c - k_3$ (b) obtained for the unidirectionally coupled time-delayed generators (1) being in the regime of intermittent generalized synchronization and their approximations by theoretical laws (2) and (3), respectively. The numerically obtained data are marked by symbols, theoretical approximations are shown by solid lines, $k_3^c = 0.062$ is the moment of the first transition of highest conditional Lyapunov exponents in the field of the negative values

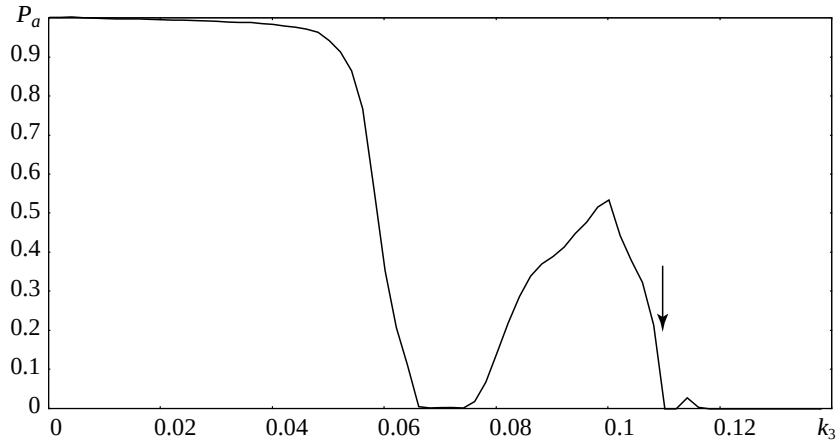


Рис. 5. Зависимость меры мультистабильности P_a от параметра связи k_3, полученная для ансамбля систем с запаздыванием (1)

Fig. 5. Dependence of multistability measure P_a on the coupling parameter k_3 obtained for the ensemble of time-delayed systems (1)

количество систем, состояния которых оказывались идентичными друг другу. Таким образом, мера мультистабильности рассчитывалась по следующей формуле:

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^{M} \frac{m}{M(M-1)}, \tag{4}$$

где m — число пар, для которых состояния ведомых систем совпадают, M — общее число пар осцилляторов в ансамбле. Совпадение состояний ведомых систем, согласно методу вспомогательной системы [17], означает, что система находится в режиме обобщенной синхронизации. Соответственно, $P_a = 0$ является критерием наличия обобщенной синхронизации.

На рис. 5 представлена зависимость меры мультистабильности от управляющего параметра k_3, полученная для системы (1). Данная зависимость представляет собой усреднение по времени вероятности P_a нахождения систем в асинхронном режиме. Видно, что при увеличении параметра связи значения меры плавно уменьшаются от 1 до 0, затем мера снова возрастает (что соответствует выходу старшего условного показателя Ляпунова в положительную область) с последующим уменьшением до нулевых значений. При этом вблизи границы обобщенной синхронизации мера мультистабильности оказывается положительной, что свидетельствует о наличии мультистабильности в данном случае. Когда P_a становится равной нулю, в системе диагностируется режим обобщенной синхронизации.

Из сопоставления рис. 1 и рис. 5 видно, что границы обобщенной синхронизации, полученные при помощи обоих методов, с высокой степенью точности совпадают друг с другом (критические значения параметра связи показаны стрелками на обоих рисунках), что говорит о возможности использования меры мультистабильности для определения границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с запаздыванием.

Таким образом, в настоящей работе обнаружена перемежаемость на границе обобщенной синхронизации в двух однонаправленно связанных генераторах с запаздыванием. Показано, что независимо от выбора значений управляющих параметров взаимодействующих систем, данный тип перемежаемости можно классифицировать как перемежаемость типа on-off. Установлено, что по аналогии с системами с малым числом степеней свободы для данного режима характерна мультистабильность.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

1. *Shen Y., Liu X.* Generalized synchronization of delayed complex-valued dynamical networks via hybrid control // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. Vol. 118. P. 107057. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.107057.
2. *Xing Y., Dong W., Zeng J., Guo P., Zhang J., Ding Q.* Study of generalized chaotic synchronization method incorporating error-feedback coefficients // Entropy. 2023. Vol. 25, no. 5. P. 818. DOI: 10.3390/e25050818.
3. *Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // УФН. 2009. Т. 179, № 12. С. 1281–1310. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200912c.1281.
4. *Стародубов А. В., Короновский А. А., Храмов А. Е., Жарков Ю. Д., Дмитриев Б. С.* Исследование обобщенной синхронизации в системе двух связанных клистронных автогенераторов хаоса // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, № 14. С. 58–65.
5. *Храмов А. Е., Фролов Н. С., Максименко В. А., Куркин С. А., Казанцев В. Б., Писарчик А. Н.* Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции // УФН. 2021. Т. 191, № 6. С. 614–650. DOI: 10.3367/UFNr.2020.06.038807.
6. *Rulkov N. F., Sushchik M. M., Tsimring L. S. and Abarbanel H. D. I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
7. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Hramov A. E., Boccaletti S.* Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86. P. 036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216.
8. *Pyragas K.* Weak and strong synchronization of chaos // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54, no. 5. P. R4508–R4511. DOI: 10.1103/PhysRevE.54.R4508.
9. *Hramov A. E., Koronovskii A. A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // Europhysics Letters. 2005. Vol. 70, no. 2. P. 169-175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
10. *Koronovskii A. A., Moskalenko O. I., Pivovarov A. A., Khanadeev V. A., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization // Phys. Rev. E. 2020. Vol. 102. P. 012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
11. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A. A., Evstifeev E. V.* Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators // Chaos. 2020. Vol. 30, iss. 8. P. 083133. DOI: 10.1063/5.0007156.
12. *Попов П. В.* Перемежающаяся обобщенная синхронизация в распределенных автоколебательных средах на примере комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33, № 18. С. 61–69.
13. *Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Выделение информационной компоненты хаотического сигнала системы с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28, № 16. С. 37–44.
14. *Караваев А. С., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Восстановление моделей скалярных систем с запаздыванием по временным рядам // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27, № 10. С. 43–51.
15. *Колоскова А. Д., Москаленко О. И., Короновский А. А.* Метод расчета спектра показателей Ляпунова для систем с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44, № 9. С. 19–25. DOI: 10.21883/PJTF.2018.09.46061.17167.
16. *Плотникова А. Д., Москаленко О. И.* Особенности обобщенной синхронизации в системах с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, № 11. С. 31–33. DOI: 10.21883/PJTF.2019.11.47821.17779.
17. *Abarbanel H. D. I., Rulkov N. F., Sushchik M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53, № 5 P. 4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.

18. *Ott E., Sommerer J. C.* Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 188, iss. 1. P. 39. DOI: 10.1016/0375-9601(94)90114-7.
19. *Moskalenko O. I., Koronovskii A. A., Selskii A. A., Evstifeev E. V.* On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems // Chaos. 2021. Vol. 31, iss. 8. P. 083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
20. *Москаленко О. И., Евстифеев Е. В.* О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 676–684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013.
21. *Москаленко О. И., Евстифеев Е. В., Короновский А. А.* Метод определения характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации на основе расчета локальных показателей Ляпунова // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, вып. 16. С. 12. DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49846.18359.

References

1. Shen Y, Liu X. Generalized synchronization of delayed complex-valued dynamical networks via hybrid control. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023;118:107057. DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.107057.
2. Xing Y, Dong W, Zeng J, Guo P, Zhang J, Ding Q. Study of generalized chaotic synchronization method incorporating error-feedback coefficients. Entropy. 2023;25(5):818. DOI: 10.3390/e25050818.
3. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Hramov AE. On the use of chaotic synchronization for secure communication. Phys. Usp. 2009;52(12):1213–1238. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200912c.1281.
4. Starodubov AV, Koronovskii AA, Hramov AE, Dmitriev BS. Generalized synchronization in a system of coupled klystron chaotic oscillators. Technical Physics Letters. 2007;33(7):612–615. DOI: 10.1134/S1063785007070218.
5. Hramov AE, Frolov NS, Maksimenko VA, Kurkin SA, Kazantsev VB, Pisarchik AN. Functional networks of the brain: from connectivity restoration to dynamic integration. Phys. Usp. 2021;64(6):584–616. DOI: 10.3367/UFNe.2020.06.038807.
6. Rulkov NF, Sushchik MM, Tsimring LS, Abarbanel HDI. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. Phys. Rev. E. 1995;51:980–994. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980.
7. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Hramov AE, Boccaletti S. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks. Phys. Rev. E. 2012;86:036216. DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216.
8. Pyragas K. Weak and strong synchronization of chaos. Phys. Rev. E. 1996;54(5):R4508-R4511. DOI: 10.1103/PhysRevE.54.R4508.
9. Hramov AE, Koronovskii AA. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. Europhysics Letters. 2005;70(2):169–175. DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6.
10. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Khanadeev VA, Hramov AE, Pisarchik AN. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. Phys. Rev. E. 2020;102:012205. DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205.
11. Koronovskii AA, Moskalenko OI, Pivovarov AA, Evstifeev EV. Intermittent route to generalized synchronization in bidirectionally coupled chaotic oscillators. Chaos. 2020;30(8):083133. DOI: 10.1063/5.0007156.
12. Popov PV. Intermittent generalized synchronization in distributed autooscillatory media described by complex Ginzburg–Landau equations. Technical Physics Letters. 2007;33(9):788–791. DOI: 10.1134/S1063785007090222.
13. Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Separation of the informative component from a chaotic signal of a time-delay system. Technical Physics Letters. 2002;28(8):680–683. DOI: 10.1134/1.1505549.

14. Karavaev AS, Ponomarenko VI, Prohorov MD. Reconstruction of scalar time-delay system models. Technical Physics Letters. 2001;27(5):414–418. DOI: 10.1134/1.1376769.
15. Koloskova AD, Moskalenko OI, Koronovskii AA. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents for delay systems. Technical Physics Letters. 2018;44(5):374–377. DOI: 10.1134/S1063785018050085.
16. Plotnikova AD, Moskalenko OI. Specificities of generalized synchronization in delayed systems. Technical Physics Letters. 2019;45(6):560–562. DOI: 10.1134/S1063785019060142.
17. Abarbanel HDI, Rulkov NF, Sushchik M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. Phys. Rev. E. 1996;53(5):4528–4535. DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528.
18. Ott E, Sommerer JC. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. Phys. Lett. A. 1994;188(1):39. DOI: 10.1016/0375-9601(94)90114-7.
19. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AA, Evstifeev EV. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. Chaos. 2021;31(8):083106. DOI: 10.1063/5.0055302.
20. Moskalenko OI, Evstifeev EV. On existence of multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled systems with complex topology of attractor. Izvestija VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(6):676-684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013.
21. Moskalenko OI, Koronovskii AA, Selskii AO, Evstifeev EV. Method to detect the characteristics of intermittent generalized synchronization based on calculation of the probability the synchronous regime observation. Technical Physics Letters. 2022;48(1):45-48. DOI: 10.21883/TPL.2022.01.52468.18985.

Москаленко Ольга Игоревна — родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006). Доктор физико-математических наук (2017), профессор (2024). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов — исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и в пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5727-5169
AuthorID (eLibrary.Ru): 150252

Ханадеев Владислав Андреевич — родился в Саратове (1995). Окончил бакалавриат (2017) и магистратуру (2019) факультета нелинейных процессов и аспирантуру (2023) Института физики СГУ. Кандидат физико-математических наук (2023), доцент СГМУ, старший научный сотрудник кафедры физики открытых систем СГУ. Область научных интересов — динамический хаос, хаотическая синхронизация, системы с запаздыванием, системы со сложной топологией аттрактора. Автор восьми статей в отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах, участник всероссийских и международных научных конференций.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: v.a.hanadeev@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9669-3934
AuthorID (eLibrary.Ru): 1218591

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Краткое сообщение
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003127
EDN: EXSHPJ

Анизотропия и усиление терагерцевого электромагнитного отклика, вызванные протеканием постоянного электрического тока в графене

И. М. Моисеенко[1,2]✉, *Д. В. Фатеев*[2], *В. В. Попов*[2]

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Россия
[2]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: ✉moiseenkoim@yandex.ru, fateevdv@yandex.ru, glorvv@gmail.com

Поступила в редакцию 4.05.2024, принята к публикации 2.07.2024, опубликована онлайн 27.09.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Цель* настоящей работы — исследовать преобразование поляризации и усиление электромагнитной терагерцевой (ТГц) волны, нормально падающей на графен с постоянным электрическим током, направленным под произвольным углом относительно вектора электрического поля падающей волны. *Методы.* Выражения для элементов тензора динамической проводимости графена получены с использованием гидродинамического приближения. Для расчета электромагнитного отклика были решены уравнения Максвелла со стандартными граничными условиями для тангенциальных компонент электрических и магнитных полей. *Результаты.* Показано, что динамическая проводимость графена зависит от скорости и направления электронного дрейфа даже при отсутствии пространственной дисперсии. Это приводит к преобразованию поляризации электромагнитного излучения на ТГц-частотах. Действительные части элементов тензора динамической проводимости графена с электронным дрейфом могут стать отрицательными, что приводит к усилению ТГц-колебаний. *Заключение.* Показана возможность преобразования поляризации и усиления электромагнитной ТГц-волны, падающей на графен с постоянным электрическим током. Эффективность преобразования поляризации может достигать 97 процентов.

Ключевые слова: гидродинамический графен, терагерцевое излучение, преобразования поляризации, усиление.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания.

Для цитирования: *Моисеенко И. М., Фатеев Д. В., Попов В. В.* Анизотропия и усиление терагерцевого электромагнитного отклика, вызванные протеканием постоянного электрического тока в графене // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 19–26. DOI: 10.18500/0869-6632-003127. EDN: EXSHPJ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Моисеенко И. М., Фатеев Д. В., Попов В. В., 2024*

Short communication DOI: 10.18500/0869-6632-003127

Anisotropy and amplification of terahertz electromagnetic response enabled by direct electric current in graphene

I. M. Moiseenko[1,2]✉, *D. V. Fateev*[2], *V. V. Popov*[2]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Russia
[2]Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia
E-mail: ✉MoiseenkoIm@yandex.ru, fateevdv@yandex.ru, popov_slava@yahoo.co.uk
Received 4.05.2024, accepted 2.07.2024, available online 27.09.2024, published 31.01.2025

Abstract. *The purpose* of this study is to investigate the polarization conversion and amplification of electromagnetic terahertz (THz) wave incident normally upon graphene monolayer with direct electric current flowing at arbitrary angle to the elecric vector of incident wave. *Methods.* The expressions for the elements of the dynamic conductivity tensor of graphene were obtained in hydrodynamic approximation. The electromagnetic response is calculated by solving the Maxwell equations with standard boundary conditions for lateral components of the electric and magnetic fields. *Results.* It is shown that the dynamic conductivity of graphene depends on value and direction of the electron drift velocity even in the absence of the spatial dispersion. This results in the polarization conversion of electromagnetic radiation at THz frequencies. The real parts of elements of graphene dynamic conductivity tensor can become negative which leads to the amplification of THz oscillations. *Conclusion.* The polarization conversion and amplification of electromagnetic THz wave incident upon graphene with direct electric current is demonstrated. Polarization conversion efficiency can be as high as 97 percent.

Keywords: hydrodynamic graphene conductivity, terahertz radiation, polarisation conversion, amplification.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task.

For citation: Moiseenko IM, Fateev DV, Popov VV. Anisotropy and amplification of terahertz electromagnetic response enabled by direct electric current in graphene. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):19–26. DOI: 10.18500/0869-6632-003127

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Детектирование [1,2], усиление [3,4] и преобразование поляризации [5] терагерцевого (ТГц) излучения активно исследуются в структурах на основе графена. Последнее реализуется в структурах с нарушенной симметрией, которая может быть создана за счет анизотропии геометрии структуры [6], с помощью приложения постоянного магнитного поля [7], а также за счет электронного дрейфа в графене [8]. Движение носителей заряда в графене может быть описано в рамках гидродинамического подхода, который справедлив, когда частота межчастичных столкновений носителей заряда в графене является наибольшей частотой в системе [9]. Гидродинамическое поведение носителей заряда в графене подтверждено экспериментально [10, 11]. В данной работе исследуется преобразование поляризации и усиление однородной электромагнитной волны, падающей на гидродинамический графен с постоянным электрическим током, направленным под произвольным углом относительно направления электрического поля падающей волны. Исследуемая структура состоит из монослоя графена, расположенного в плоскости x–z на границе раздела двух полубесконечных диэлектрических сред с разными диэлектрическими проницаемостями (рис. 1). Плоская однородная поперечная электромагнитная волна нормально падает на графен из среды *1*.

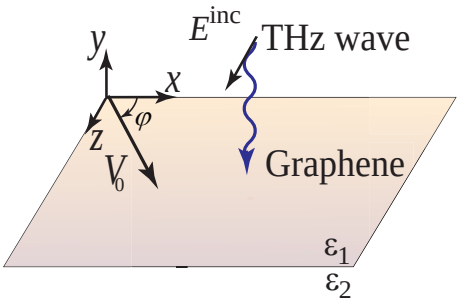


Рис. 1. Схематическое изображение исследуемой структуры
Fig. 1. Schematic representation of the studied structure

1. Методика

1.1. Гидродинамическая проводимость графена. Динамическая (высокочастотная) проводимость графена получена с помощью гидродинамического подхода, путем решения гидродинамических уравнений, которые в случае однородного (стационарного и осциллирующего) электрического поля записываются как

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + e\mathbf{E}N = -\gamma \mathbf{S}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + eN\mathbf{E}\cdot\mathbf{V} = 0, \tag{2}$$

где уравнение (1) представляет собой уравнение баланса импульса носителей заряда, а уравнение (2) — это уравнение баланса энергии двумерного движения носителей заряда в графене. В уравнениях (1)–(2) N — концентрация носителей заряда, $\mathbf{V}$ — гидродинамическая скорость, $\mathbf{S}$ — макроскопическая плотность импульса, W — макроскопическая плотность энергии, e — элементарный заряд ($e > 0$), $\mathbf{E}$ — электрическое поле в плоскости графена, τ — время релаксации импульса носителей заряда в графене. Для определенности полагается, что носители заряда в легированном (при конечной энергии Ферми) графене являются электронами. Соотношения между физическими величинами, входящими в уравнения (1)–(2), записываются как

$$\mathbf{S} = M\mathbf{V}, \quad W = MV_{\mathrm{F}}^2 - P, \quad P = M(V_{\mathrm{F}}^2 - V^2)/3, \tag{3}$$

где M — гидродинамическая плотность массы, P — гидродинамическое давление, $V_F = 10^6$ м/с — скорость Ферми в графене. Уравнения (1)–(3) линеаризуются путем представления всех искомых величин в виде суммы стационарного и малого колеблющегося слагаемых $A = A_0 + A_1\exp(-i\omega t)$, где ω — угловая частота колебаний, а индексы 0 и 1 относятся соответственно к стационарной и осциллирующей величинам. Из уравнения непрерывности (баланса числа частиц) следует, что в случае однородных колебаний концентрация электронов в графене не зависит от времени и равна стационарной концентрации электронов N_0.

Линеаризованное уравнение (1), с учетом (3), дает выражения для компонент осциллирующей гидродинамической скорости:

$$V_{x1} = -\frac{M_1 V_{x0}(\gamma - i\omega) + eE_{x1}N_0}{M_0(\gamma - i\omega)}, \tag{4}$$

$$V_{z1} = -\frac{M_1 V_{z0}(\gamma - i\omega) + eE_{z1}N_0}{M_0(\gamma - i\omega)}, \tag{5}$$

где E_{x1} и E_{z1} — компоненты осциллирующего электрического поля, M_0 и M_1 — соответственно стационарная и осциллирующая гидродинамическая плотность массы, $V_{x0,z0}$ — компоненты стационарной скорости дрейфа, $V_{x1,z1}$ — компоненты осциллирующей гидродинамической скорости, γ — скорость релаксации импульса электронов. Из уравнения (2), с учетом (3), получим выражение для осциллирующей плотности массы носителей заряда в графене:

$$M_1 = \frac{3eN_0(E_{x1}V_{x0} + E_{z1}V_{z0}) + V_{x1}(3eE_{x0}N_0 - 2iM_0V_{x0}\omega) + V_{z1}(3eE_{z0}N_0 - 2iM_0V_{z0}\omega)}{i\omega(2{V_F}^2 + {V_{x0}}^2 + {V_{z0}}^2)}, \tag{6}$$

где $E_{x0,z0}$ — компоненты стационарного тянущего электрического поля, вызывающего дрейф электронов. Переменная гидродинамическая масса является уникальным физическим свойством графена, что, как следует из дальнейшего изложения, определяет анизотропию и усиление

электромагнитного отклика графена при пропускании в нем постоянного электрического тока. Как видно из уравнения (6), плотность массы носителей заряда осциллирует только в присутствии электронного дрейфа в графене. Решая совместно уравнения (4)–(6), получаем выражения вида $V_{x1}(E_{x1}, E_{z1})$ и $V_{z1}(E_{x1}, E_{z1})$ и, подставляя их в выражение для осциллирующей плотности тока,

$$J_{x1,z1} = -eN_0 V_{x1,z1},$$

получаем выражения для элементов тензора высокочастотной гидродинамической проводимости графена:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \Sigma\left[\omega\left(2V_{\mathrm{F}}^2 - 2V_{x0}^2 - V_{z0}^2\right) - 3i\gamma\left(V_{x0}^2 - V_{z0}^2\right)\right], \\
\sigma_{zz} &= \Sigma\left[\omega\left(2V_{\mathrm{F}}^2 - 2V_{z0}^2 - V_{x0}^2\right) + 3i\gamma\left(V_{x0}^2 - V_{z0}^2\right)\right], \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \Sigma(\omega + 6i\gamma)V_{x0}V_{z0},
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\Sigma = \frac{ie^2 N_0\left(V_{\mathrm{F}}^2 - V_{x0}^2 - V_{z0}^2\right)}{(\omega + i\gamma)\left[\omega\left(2V_{\mathrm{F}}^2 - V_{x0}^2 - V_{z0}^2\right) + 3i\left(V_{x0}^2 + V_{z0}^2\right)\gamma\right]\mathcal{E}_{\mathrm{F}}},$$

где $\mathcal{E}_{\mathrm{F}}$ — стационарная энергия Ферми, $V_{x0} = V_0\cos\varphi$ и $V_{z0} = V_0\sin\varphi$. Заметим, что даже в отсутствие пространственной дисперсии динамическая проводимость графена зависит от скорости и направления стационарного дрейфа вследствие нарушения галилеевой инвариантности в системе электронов с нулевой массой индивидуального электрона в графене [12]. Это существенно отличает графен от классических двумерных электронных систем с массовыми электронами.

Анизотропию, созданную за счет пропускания постоянного электрического тока в графене, можно использовать для преобразования поляризации электромагнитного излучения. Физической причиной электрически наведенной анизотропии графена является то, что колебания гидродинамического импульса в поперечном направлении к дрейфу электронов происходят как в обычной гидродинамике массивных частиц при их инерции, определяемой стационарной гидродинамической массой (поскольку концентрация электронов в графене не зависит от времени и координаты в случае однородных колебаний, гидродинамическую массу можно нормировать как на единицу площади, так и в расчете на один электрон). В то же время в направлении дрейфа электронов колебания гидродинамического импульса происходят как за счет стационарной гидродинамической инерции, так и за счет сноса колеблющейся части гидродинамической массы дрейфом. В результате осциллирующий гидродинамический импульс (и, соответственно, осциллирующая гидродинамическая скорость) зависят по-разному от осциллирующего электрического поля.

1.2. Коэффициент преобразования поляризации. Введем коэффициенты отражения и прохождения

$$Y_n^m = \frac{|S_n^m|}{|S^{\mathrm{inc}}|}, \tag{8}$$

где S_n^m — поток энергии отраженной ($m = R$) или прошедшей ($m = T$) волны с ортогональной ($n = \perp$) или исходной ($n = \parallel$) поляризацией электрического поля по отношению к поляризации падающей волны, S^{inc} — поток энергии падающей волны. Введем также коэффициент преобразования поляризации для прошедшей волны:

$$P^T = \frac{|S_\perp^T|}{|S_{\mathrm{tot}}^T|}, \tag{9}$$

где S_{tot}^T — полный (по двум ортогональным поляризациям) поток энергии прошедшей волны.

2. Результаты

Появление в отраженной и прошедшей волнах ортогональной (относительно поляризации падающей волны) компоненты электрического поля связано с наличием ненулевых недиагональных элементов тензора проводимости графена при электронном дрейфе, направленном под углом относительно электрического поля падающей волны (рис. 2, *a*). В результате в отраженной и прошедшей волнах появляются парциальные волны с ортогональной поляризацией по отношению к поляризации падающей волны (рис. 2, *b*). При угле дрейфа $\varphi \approx 30^\circ$ на частоте $\omega/2\pi = 0.1$ ТГц происходит практически полное преобразование поляризации в прошедшей волне ($P^T \approx 0.97$, рис. 3). При некоторых углах дрейфа действительные части элементов тензора проводимости графена становятся отрицательными, что приводит к усилению как волны с исходной поляризацией, так и индуцированной волны с ортогональной к ней поляризацией (см. рис. 2, *b*). При этом усиление волны с ортогональной поляризацией незначительно, и в основном усиливается волна с исходной поляризацией. Усиление можно трактовать как возникновение отрицательной диссипации в графене при пропускании постоянного тока [8].

При углах дрейфа 0 и 90 градусов в отраженной и прошедшей волнах отсутствует компонента электрического поля волны с преобразованной поляризацией, поскольку $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0$. При $\varphi = 90^o$ (дрейф сонаправлен с электрическим полем падающей волны) усиление волны с исходной поляризацией максимально, что связано с достижением максимального отрицательного значения проводимости $\mathrm{Re}\,\sigma_{zz}$. В этом случае можно дать достаточно наглядное объяснение физического механизма усиления. Детальное рассмотрение показывает, что усиление возникает в режиме, когда колебания гидродинамической массы происходят синфазно с колебаниями гидродинамической скорости. В каждый момент времени полная кинетическая энергия гидродинамического движения носителей заряда как в результате их колебаний, так и в результате стационарного дрейфа равна

$$\frac{1}{2}M(t)\{V_0 \pm V_1(t)\}^2 = \frac{1}{2}M(t)\left\{V_0^2 + V_1^2(t) \pm 2V_0V_1(t)\right\}, \tag{10}$$

где знаки «+» и «−» соответствуют попутно направленным и встречно направленным скорости стационарного дрейфа V_0 и гидродинамической скорости колебаний $V_1(t)$. Первые два

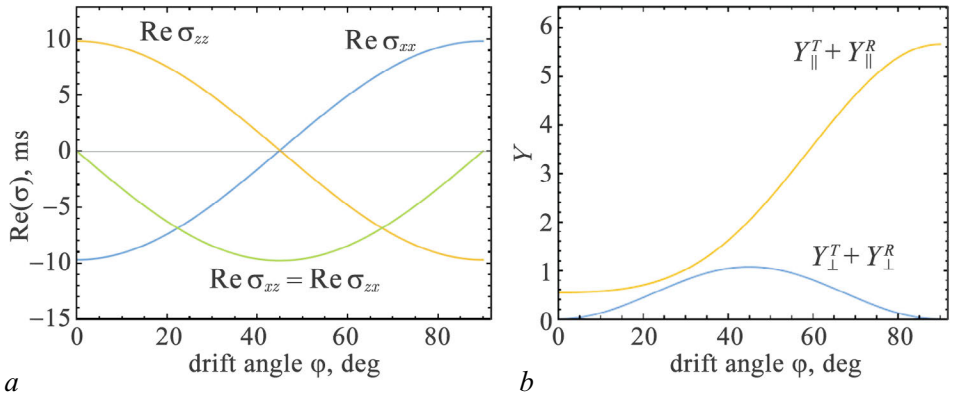


Рис. 2. *a* — Действительные части элементов тензора динамической проводимости графена и *b* — коэффициенты отражения и прохождения для волн с исходной и ортогональной к ней поляризациями в зависимости от угла дрейфа электронов при величине скорости дрейфа $V_0 = 0.7V_F$ на частоте $\omega/2\pi = 0.1$ ТГц. Параметры графена составляют $\tau = 0.1$ пс и $\mathcal{E}_\mathrm{F} = 500$ мэВ (цвет онлайн)

Fig. 2. *a* — The real parts of the elements of graphene dynamic conductivity tensor and *b* — the reflection and transmission coefficients for waves with initial and orthogonal polarizations in dependence on the electron drift angle for drift velocity value $V_0 = 0.7V_F$ at frequency $\omega/2\pi = 0.1$ THz. Graphene parameters are τ = 0.1 ps and $\mathcal{E}_\mathrm{F} = 500$ meV (color online)

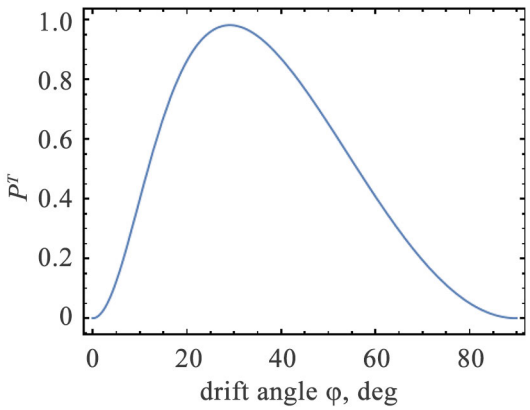


Рис. 3. Коэффициент преобразования поляризации P^T в зависимости от угла дрейфа при величине скорости дрейфа $V_0 = 0.7V_F$ на частоте $\omega/2\pi = 0.1$ ТГц. Параметры графена: $\tau = 0.1$ пс и $\mathcal{E}_F = 500$ мэВ

Fig. 3. The coefficient of polarization conversion P^T in dependence on electrons drift angle for drift velocity $V_0 = 0.7V_F$ at frequency $\omega/2\pi = 0.1$ THz. Graphene parameters are $\tau = 0.1$ ps and $\mathcal{E}_F = 500$ meV

слагаемых в формуле (10) представляют собой соответственно значения кинетической энергии стационарного дрейфа и колебаний. Последнее слагаемое следует интерпретировать как количество кинетической энергии, сообщаемой источником стационарного дрейфа колебаниям (при знаке «+») или отдаваемой колебаниями в источник стационарного дрейфа (при знаке «−»). В положительном полупериоде колебаний гидродинамическая масса становится больше стационарной массы, а осциллирующая скорость направлена вдоль стационарной скорости дрейфа. В этом полупериоде кинетическая энергия передается от источника стационарного дрейфа колебаниям. В следующем (отрицательном) полупериоде гидродинамическая масса становится меньше стационарного значения, а осциллирующая скорость направлена против стационарной скорости дрейфа, и поэтому меньшая кинетическая энергия передается от колебаний стационарному дрейфу по сравнению с кинетической энергией, получаемой колебаниями от источника стационарного дрейфа на предыдущем (положительном) полупериоде колебаний. В результате в среднем по периоду колебаний в колебательную систему поступает кинетическая энергия от источника постоянного дрейфа, которая и раскачивает колебания. Поскольку единственным физическим механизмом обмена энергией между дрейфом и колебаниями в гидродинамической модели являются столкновения электронов с потерей их гидродинамического импульса (что и отвечает за реальную часть проводимости), усиление можно трактовать как следствие отрицательной диссипации.

Заключение

Исследовано преобразование поляризации и усиление нормально падающей электромагнитной волны на графен с постоянным током. Показано, что динамическая проводимость графена зависит от величины и направления скорости дрейфа электронов даже в случае однородного осциллирующего электрического поля, что нехарактерно для классических двумерных электронных систем с массовыми электронами. Тензорный характер динамической проводимости графена приводит к преобразованию поляризации падающей на графен электромагнитной волны с эффективностью до 97 процентов на ТГц-частотах. Действительная часть каждого элемента тензора проводимости графена с дрейфом электронов может быть отрицательной, что приводит к усилению ТГц-волны.

Список литературы

1. *Bandurin D. A., Svintsov D., Gayduchenko I., Xu S. G., Principi A., Moskotin M., Tretyakov I., Yagodkin D., Zhukov S., Taniguchi T., Watanabe K., Grigorieva I. V., Polini M., Goltsman G. N., Geim A. K., Fedorov G.* Resonant terahertz detection using graphene plasmons // Nat. Commun. 2018. Vol. 9. P. 5392. DOI: 10.1038/s41467-018-07848-w.
2. *Abidi E., Khan A., Delgado-Notario J. A., Clericó V., Calvo-Gallego J, Taniguchi T., Watanabe K., Otsuji T., Velázquez J. E., Meziani Y. M.* Terahertz detection by asymmetric dual grating gate bilayer graphene fets with integrated bowtie antenna // Nanomaterials. 2024. Vol. 14, iss. 4. P. 383. DOI: 10.3390/nano14040383.

3. *Boubanga-Tombet S., Knap W., Yadav D., Satou A., But D. B., Popov V. V., Gorbenko I. V., Kachorovskii V., and Otsuji T.* Room-temperature amplification of terahertz radiation by grating-gate graphene structures // Physical Review X. 2020. Vol. 10, iss. 3. P. 031004. DOI: 10.1103/PhysRevX.10.031004.
4. *Cosme P., Terças H.* Terahertz laser combs in graphene field-effect transistors // ACS Photonics. 2020. Vol. 7, iss. 6. P. 1375–1381. DOI: 10.1021/acsphotonics.0c00313.
5. *Xiao Z., Jiang Z., Wang X., Cui Z.* Switchable polarization converter with switching function based on graphene and vanadium dioxide // Journal of Electronic Materials. 2023. Vol. 52, iss. 3. P. 1968–1976. DOI: 10.1007/s11664-022-10149-0.
6. *Polischuk O. V., Melnikova V. S., Popov V. V.* Giant cross-polarization conversion of terahertz radiation by plasmons in an active graphene metasurface // Applied Physics Letters. 2016. Vol. 109, iss. 13. DOI: 10.1063/1.4963276.
7. *Guo T., Argyropoulos C.* Broadband polarizers based on graphene metasurfaces // Optics letters. 2016. Vol. 41, iss. 23. P. 5592–5595. DOI: 10.1364/OL.41.005592.
8. *Moiseenko I. M., Fateev D. V., Popov V. V.* Dissipative drift instability of plasmons in a single-layer graphene // Physical Review B. 2024. Vol. 109, iss. 4. P. L041401. DOI: 10.1103/PhysRevB.109.L041401.
9. *Narozhny B. N.* Electronic hydrodynamics in graphene // Annals of Physics. 2019. Vol. 411. P. 167979. DOI: 10.1016/j.aop.2019.167979.
10. *Bandurin D. A., Torre I., Krishna Kumar R., Ben Shalom M., Tomadin A., Principi A., Auton G. H., Khestanova E., Novoselov K. S., Grigorieva I. V., Ponomarenko L. A., Geim A. K., Polini M.* Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene // Science. 2016. Vol. 351, iss. 6277. P. 1055–1058. DOI: 10.1126/science.aad0201.
11. *Kumar C., Birkbeck J., Sulpizio J. A., Perello D., Taniguchi T., Watanabe K., Reuven O., Scaffidi T., Stern Ady, Geim A. K., Ilani S.* Imaging hydrodynamic electrons flowing without Landauer–Sharvin resistance // Nature. 2022. Vol. 609, iss. 7926. P. 276–281. DOI: 10.1038/s41586-022-05002-7.
12. *Svintsov D., Vyurkov V., Ryzhii V., and Otsuji T.* Hydrodynamic electron transport and nonlinear waves in graphene // Phys. Rev. B. 2013. Vol. 88. P. 245444. DOI: 10.1103/PhysRevB.88.245444.

References

1. Bandurin DA, Svintsov D, Gayduchenko I, Xu SG, Principi A, Moskotin M, Tretyakov I, Yagodkin D, Zhukov S, Taniguchi T, Watanabe K, Grigorieva IV, Polini M., Goltsman GN, Geim AK., Fedorov G. Resonant terahertz detection using graphene plasmons. Nat. Commun. 2018;9:5392. DOI: 10.1038/s41467-018-07848-w
2. Abidi E., Khan A., Delgado-Notario JA, Clericó V, Calvo-Gallego J, Taniguchi T, Watanabe K, Otsuji T, Velázquez JE, Meziani YM. Terahertz detection by asymmetric dual grating gate bilayer graphene fets with integrated bowtie antenna. Nanomaterials. 2024;14(4):383. DOI: 10.3390/nano14040383.
3. Boubanga-Tombet S, Knap W, Yadav D, Satou A, But DB, Popov VV, Gorbenko IV, Kachorovskii V, and Otsuji T. Room-temperature amplification of terahertz radiation by grating-gate graphene structures. Physical Review X. 2020;10(3):031004. DOI: 10.1103/PhysRevX.10.031004.
4. Cosme P, Terças H. Terahertz laser combs in graphene field-effect transistors. ACS Photonics. 2020;7(6):1375–1381. DOI: 10.1021/acsphotonics.0c00313.
5. Xiao Z, Jiang Z, Wang X, Cui Z. Switchable polarization converter with switching function based on graphene and vanadium dioxide. Journal of Electronic Materials. 2023;52(3):1968–1976. DOI: 10.1007/s11664-022-10149-0.
6. Polischuk OV, Melnikova VS, Popov VV. Giant cross-polarization conversion of terahertz radiation by plasmons in an active graphene metasurface. Applied Physics Letters. 2016;109(13):131101. DOI: 10.1063/1.4963276.

7. Guo T., Argyropoulos C. Broadband polarizers based on graphene metasurfaces. Optics letters. 2016;41(23):5592–5595. DOI: 10.1364/OL.41.005592.
8. Moiseenko IM, Fateev DV, Popov VV. Dissipative drift instability of plasmons in a single-layer graphene. Physical Review B. 2024;109(4):L041401. DOI: 10.1103/PhysRevB.109.L041401.
9. Narozhny BN. Electronic hydrodynamics in graphene. Annals of Physics. 2019;411:167979. DOI: 10.1016/j.aop.2019.167979.
10. Bandurin DA, Torre I, Krishna Kumar R, Ben Shalom M, Tomadin A, Principi A, Auton GH, Khestanova E, Novoselov KS, Grigorieva IV, Ponomarenko LA, Geim AK, Polini M. Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene. Science. 2016;351(6277):1055-1058. DOI: 10.1126/science.aad0201.
11. Kumar C, Birkbeck J, Sulpizio JA, Perello D, Taniguchi T, Watanabe K, Reuven O, Scaffidi T, Stern Ady, Geim AK, Ilani S. Imaging hydrodynamic electrons flowing without Landauer–Sharvin resistance. Nature. 2022;609(7926):276–281. DOI: 10.1038/s41586-022-05002-7.
12. Svintsov D, Vyurkov V, Ryzhii V, Otsuji T. Hydrodynamic electron transport and nonlinear waves in graphene. Phys. Rev. B. 2013;88:245444. DOI: 10.1103/PhysRevB.88.245444.

Моисеенко Илья Михайлович — родился в Саратове (1992). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Физика» (2014). Кандидат физико-математических наук (2018, СГУ). Работает в Московском физико-техническом институте (МФТИ) и в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — терагерцевое излучение, математическое моделирование, электромагнитное моделирование. Опубликовал свыше 40 научных работ по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, ул. Зеленая, 38
СФ Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 115184 Долгопрудный, ул. Институтский переулок, 9
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: moiseenkoim@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-8198-0634
AuthorID (eLibrary.Ru): 983333

Фатеев Денис Васильевич — родился в Саратове (1983). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Физика» (2005). Кандидат физико-математических наук (2008, СГУ). Работает на кафедре общей, теоретической и компьютерной физики Саратовского государственного университета в должности доцента. Научные интересы — терагерцевое излучение, математическое моделирование, электромагнитное моделирование. Опубликовал свыше 100 научных работ по указанным направлениям.

Россия, 410054 Саратов, ул. Зеленая, 38
СФ Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: fateevdv@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-1406-5385
AuthorID (eLibrary.Ru): 179002

Попов Вячеслав Валентинович — родился в Саратове (1949). Окончил физический факультет СГУ (1971). Доктор физико-математических наук (1998), профессор (2001). Заведующий лабораторией фотоники в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Специалист в области электродинамики плазмы твердого тела. Автор более 200 научных работ.

Россия, 410054 Саратов, ул. Зеленая, 38
СФ Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: glorvv@gmail.com
ORCID: 0000-0003-1303-6443
AuthorID (eLibrary.Ru): 258

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003131
EDN: HSXIUA

Реконструкция автоколебательных систем с модуляцией времени запаздывания

В. И. Пономаренко✉, *М. Д. Прохоров*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 7.07.2024, принята к публикации 18.07.2024, опубликована онлайн 22.10.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Цель* работы — исследование возможности реконструкции по временным рядам автоколебательных систем с переменным временем запаздывания, демонстрирующих режимы турбулентного и ламинарного хаоса. *Методы*. Объектом исследования в работе являются автоколебательные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием, в которых время задержки модулируется внешним периодическим сигналом. Рассмотрена возможность оценки параметров систем с модуляцией времени запаздывания по их временным рядам с помощью известного метода реконструкции систем с постоянным временем задержки, который основан на статистическом анализе временных интервалов между всеми возможными парами экстремумов временного ряда. Предложен новый метод оценки параметров систем с переменным временем запаздывания, основанный на статистическом анализе временных интервалов между двумя последовательными экстремумами временного ряда. *Результаты*. Показано, что в некоторых случаях известные методы реконструкции систем с постоянным временем запаздывания эффективны и для реконструкции систем с изменяющимся временем задержки. С их помощью можно оценить среднее время запаздывания и восстановить нелинейную функцию системы. Предложенный метод реконструкции, ориентированный на применение к системам с запаздыванием с модуляцией времени задержки, позволяет оценить частоту и амплитуду модуляции времени запаздывания. *Заключение*. Полученные результаты представляют интерес для различных научных дисциплин, исследующих системы с переменным временем запаздывания по их временным рядам.

Ключевые слова: системы с модуляцией запаздывания, ламинарный хаос, реконструкция систем по временным рядам, статистика экстремумов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

Для цитирования: *Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Реконструкция автоколебательных систем с модуляцией времени запаздывания // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 27–37. DOI: 10.18500/0869-6632-003131. EDN: HSXIUA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., 2024*

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003131

Reconstruction of self-oscillating systems with delay time modulation

V. I. Ponomarenko✉, *M. D. Prokhorov*

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia
E-mail: ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru
Received 7.07.2024, accepted 18.07.2024, available online 22.10.2024, published 31.01.2025

Abstract. *The aim* of our research is to study the possibility of reconstruction from time series the self-oscillating systems with variable time delay, demonstrating regimes of turbulent and laminar chaos. *Methods*. The object of study is self-oscillating systems described by delay-differential equations, in which the delay time is modulated by an external periodic signal. The possibility of estimating the parameters of systems with delay time modulation from their time series is considered using the known method for reconstructing systems with constant delay time, which is based on statistical analysis of time intervals between all possible pairs of extrema in time series. A new method for estimating the parameters of systems with variable delay time is proposed, based on statistical analysis of time intervals between two successive extrema in time series. *Results*. It is shown that in some cases the known methods for reconstructing systems with constant delay time are also effective for reconstructing systems with varying delay time. With their help, one can estimate the mean delay time and recove the nonlinear function of the system. The proposed method, aimed at application to time-delay systems with delay time modulation, allows one to estimate the frequency and amplitude of delay time modulation. *Conclusion*. The obtained results are of interest to various scientific disciplines that study systems with variable delay times based on their time series.

Keywords: systems with delay time modulation, laminar chaos, reconstruction of systems from time series, statistics of extrema.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task of Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences.

For citation: Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Reconstruction of self-oscillating systems with delay time modulation. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):27–37. DOI: 10.18500/0869-6632-003131

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Системы с запаздывающей обратной связью могут генерировать хаотические колебания с очень высокой размерностью даже в том случае, если они описываются дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом при постоянном времени запаздывания [1–3]. Модуляция времени запаздывания приводит к появлению новых, как правило, более сложных режимов [4–6]. Сравнительно недавно в системах с модуляцией времени запаздывания было открыто новое явление, названное ламинарным хаосом [7], при котором ламинарные фазы с почти постоянным значением динамической переменной периодически прерываются беспорядочными всплесками, переводящими систему из одной ламинарной фазы в другую, имеющую другое постоянное значение динамической переменной.

Ламинарный хаос наблюдается в некоторых областях плоскости параметров частота – амплитуда внешнего гармонического воздействия, модулирующего время запаздывания системы, в которых период модулирующего сигнала кратен среднему значению времени запаздывания [7, 8]. Вид этих областей напоминает языки синхронизации в автоколебательных системах под внешним воздействием. За пределами этих областей система с запаздыванием демонстрирует так называемый турбулентный хаос, который подробно описан в [9]. Явление ламинарного хаоса было исследовано в различных системах [10] не только теоретически и численно, но было обнаружено также в физическом эксперименте [8, 11–14].

Проблема реконструкции систем с постоянным временем запаздывания по хаотическим временным рядам поднималась многими авторами и представляет интерес не только в чисто теоретическом плане, но и для практических приложений [15–17]. Открытие режимов ламинарного

хаоса в системах с модуляцией времени запаздывания ставит вопрос о возможности оценки их параметров с помощью известных методов восстановления систем с постоянным временем запаздывания и требует развития новых методов реконструкции, ориентированных на класс систем с переменным временем запаздывания.

В данной работе разрабатываются методы реконструкции систем, описываемых дифференциальным уравнением первого порядка с модуляцией времени запаздывания, в области управляющих параметров, в которой может наблюдаться ламинарный хаос. Предложены методы реконструкции для режимов ламинарного и турбулентного хаоса.

1. Исследуемая система и методы

Объектом исследования является система, представляющая собой уравнение первого порядка с запаздыванием, описываемая уравнением (1):

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau(t))), \tag{1}$$

где x — динамическая переменная, ε — параметр инерционности, $\tau(t)$ — переменное время запаздывания, $f(x)$ — нелинейная функция, имеющая вид $f(x) = \lambda - x^2$, где λ — параметр нелинейности. Величина $\tau(t)$ изменяется по периодическому закону $\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin(2\pi\nu t)$, где τ_0 — среднее значение времени запаздывания, τ_1 — амплитуда (глубина) модуляции, а ν — частота модуляции времени τ_0.

Рассмотрим для сравнения две группы качественно различающихся режимов работы генератора. К первой группе относятся режимы, в которых система демонстрирует ламинарный хаос при различных соотношениях периода модуляции времени запаздывания $T_m = 1/\nu$ и среднего времени запаздывания $\tau_0 = 100$. Рассмотрены три качественно различающихся режима с разными частотами модуляции $\nu = 0.011$, $\nu = 0.0185$ и $\nu = 0.0275$ при $\tau_1 = 15$ и $\tau_1 = 10$. Во второй группе режимов — вне областей ламинарного хаоса — рассмотрены два режима при $\nu = 0.013$ и $\nu = 0.024$ при $\tau_1 = 15$. Параметр нелинейности λ во всех случаях равен 1.89, $\varepsilon = 1$.

В режиме ламинарного хаоса будем анализировать уровни x_i горизонтальных полок на временной реализации динамической переменной, которые могут дать информацию о виде нелинейной зависимости динамической переменной от ее задержанной копии. При этом в некоторых случаях мы ожидаем увидеть гладкую зависимость уровня одной полки от уровня другой во временном ряде. Время запаздывания в этом случае определяется приблизительно. Для оценки среднего времени запаздывания будем использовать разработанный нами ранее метод реконструкции систем с постоянным временем задержки, который основан на анализе статистики экстремумов временного ряда [18].

В режиме турбулентного хаоса для оценки среднего времени запаздывания также попробуем процедуру построения статистики экстремумов [18], а для оценки частоты модуляции времени τ_0 в рамках работы предложена новая процедура, основанная на анализе изменения расстояний между экстремумами во времени.

2. Результаты

На рис. 1, *а* представлен временной ряд системы с запаздыванием (сплошная линия), находящейся в режиме ламинарного хаоса при $\nu = 0.011$, и переменная часть запаздывания $\tau_m = \tau_1 \sin(2\pi\nu t)$, где $\tau_1 = 15$. Остальные управляющие параметры фиксированы. На временном ряде видны горизонтальные участки (полки), прерывающиеся «берстами» (резкими изменениями динамической переменной $x(t)$ при переходе от одной полки к другой). Таким образом, можно ввести дискретное время и обозначить как x_i величину динамической переменной на уровне полки, где i — порядковый номер полки. Длины полок одинаковые, они равны периоду колебаний

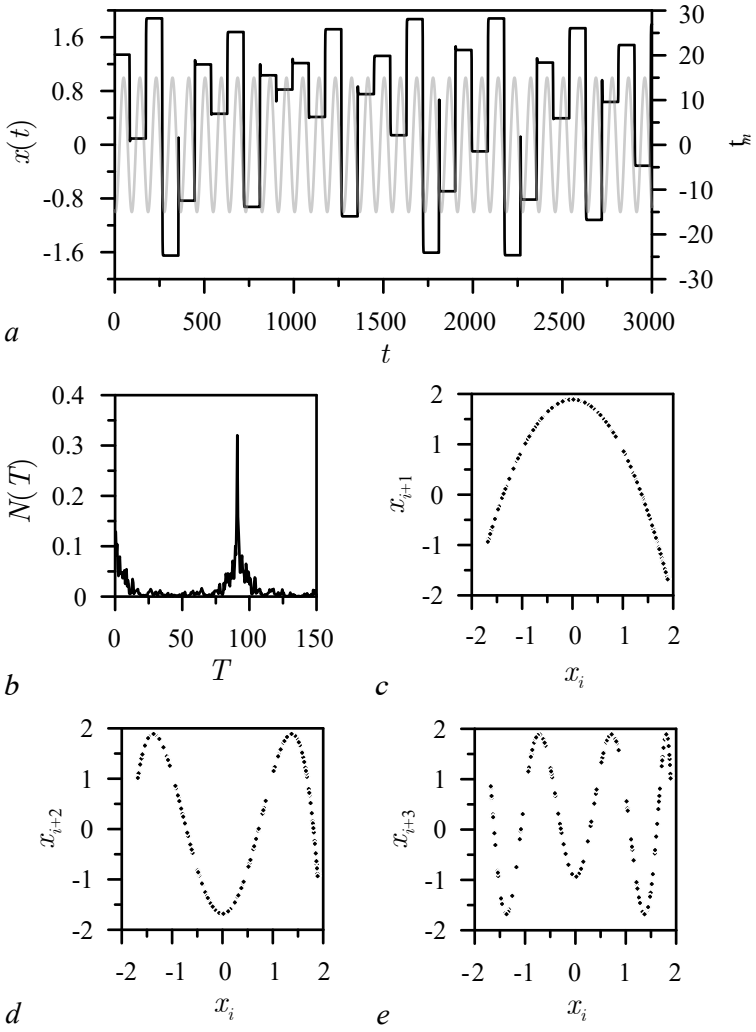


Рис. 1. Временной ряд системы (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) (*a*), статистика экстремумов временного ряда (*b*), зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). Управляющие параметры $\nu = 0.011$, $\tau_1 = 15$, $\tau_0 = 100$

Fig. 1. Time series of the system (black) and variation of the delay time τ_m (gray) (*a*), statistics of extrema of the time series (*b*), dependencies $x_{i+n}(x_i)$ for $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), and $n = 3$ (*e*). Control parameters are as follows: $\nu = 0.011$, $\tau_1 = 15$, and $\tau_0 = 100$

времени запаздывания τ_m (см. рис. 1, *a*), но при этом их длина не равна в точности времени запаздывания τ_0. Если частоту модуляции ν времени запаздывания немного варьировать, длины полок будут изменяться в соответствии с периодом внешнего сигнала. Этот эффект напоминает синхронизацию автоколебательных систем внешним сигналом. При этом полки ограничены слева и справа резкими перепадами, по которым определяется начало и конец полки. Если длина полки примерно равна периоду T_m внешнего сигнала, это можно поставить в соответствие синхронизации на основной гармонике. Если на времени запаздывания умещается две полки, этому соответствует синхронизация на второй гармонике и т. д. При сильном изменении частоты внешнего воздействия (частоты модуляции ν) наблюдается переход к режиму турбулентного хаоса. Экспериментально этот эффект исследован в [8, 19].

На рис. 1, *b* представлена мера статистики экстремумов, которая показывает, сколько во временном ряде переменной x встречается экстремумов с расстоянием T между ними [18].

Отметим, что поскольку значения динамической переменной являются практически постоянными на горизонтальных полках зависимости $x(t)$, мы не учитывали экстремумы на полках (даже если они есть) при построении рис. 1, *b*. Учитываются только экстремумы, наблюдающиеся между полками на участках временного ряда, на которых имеются резкие всплески динамической переменной. Мера $N(T)$ нормирована на общее число экстремумов во временном ряде. Максимум $N(T)$ наблюдается при $T = 91$, что соответствует периоду изменения времени запаздывания, а также дает грубую оценку среднего времени запаздывания $\tau_0 = 100$. На рис. 1, *c–e* представлены зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). На рис. 1, *c* точки временного ряда, построенные на плоскости (x_i, x_{i+1}), ложатся на нелинейную функцию $f(x)$, соответствующую преобразованию в обратной связи. Рис. 1, *d, e* представляют вторую и третью итерации функции $f(x)$.

На рис. 2 представлены результаты исследований при $\nu = 0.0185$ и $\tau_1 = 15$. Этот режим соответствует случаю, в котором горизонтальные полки на временной реализации динамической

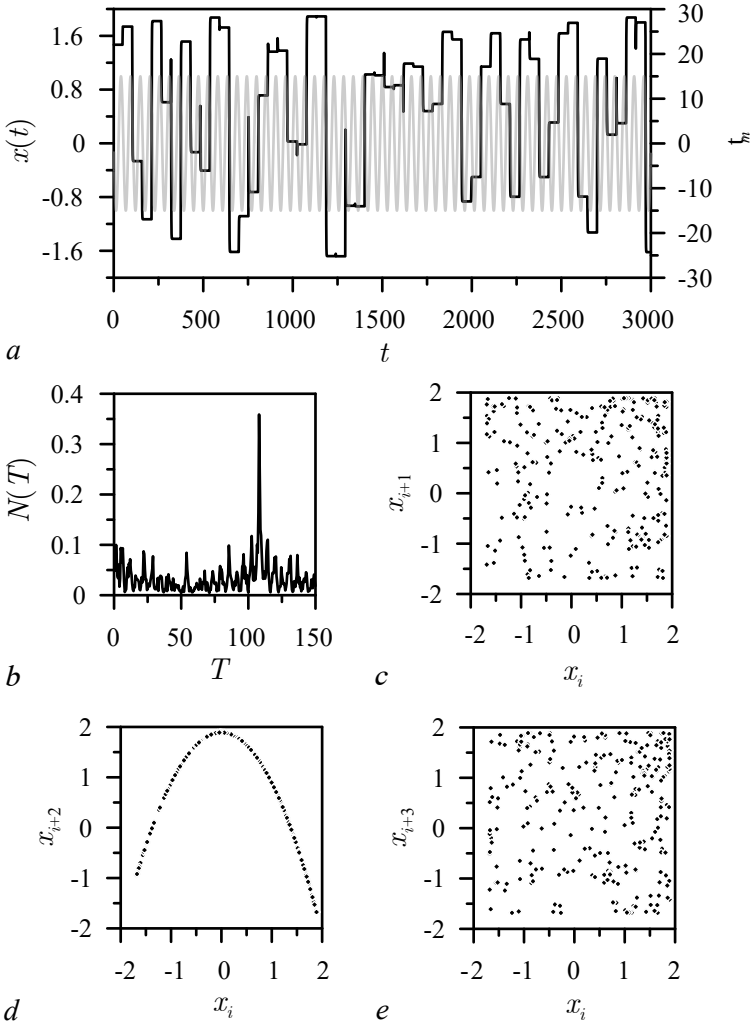


Рис. 2. Временной ряд системы (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) (*a*), статистика экстремумов (*b*), зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). Управляющие параметры $\nu = 0.0185$, $\tau_1 = 15$, $\tau_0 = 100$

Fig. 2. Time series of the system (black) and variation of delay time τ_m (gray) (*a*), statistics of extrema (*b*), dependencies $x_{i+n}(x_i)$ for $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), and $n = 3$ (*e*). Control parameters are as follows: $\nu = 0.0185$, $\tau_1 = 15$, and $\tau_0 = 100$

переменной примерно в 2 раза короче, чем в рассмотренном выше примере. При этом на периоде колебаний времени запаздывания τ_m также умещается одна полка, но на времени, примерно соответствующем времени запаздывания τ_0, их уже умещается две (рис. 2, *a*).

Величина $N(T)$ на рис. 2, *b* имеет глобальный максимум при $T = 108$, что соответствует удвоенному периоду внешнего воздействия $T_m = 1/\nu$ и примерно соответствует среднему времени запаздывания τ_0. Рис. 2, *c*–*e* демонстрирует зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). При их анализе становится очевидным, что среднее время запаздывания τ_0 примерно соответствует длине двух полок временного ряда, поскольку $x_{i+2}(x_i)$ демонстрирует четкую зависимость преобразования $f(x)$ в обратной связи. На рис. 3, *a* представлены временные ряды при $\nu = 0.0275$ и $\tau_1 = 10$. Этот режим соответствует случаю, в котором на времени, примерно соответствующем времени запаздывания τ_0, умещается три горизонтальные полки на графике $x(t)$. Таким образом, длина полок на графике $x(t)$ на рис. 3, *a* примерно в 3 раза меньше, чем на рис. 1, *a*. При этом на периоде колебаний времени запаздывания τ_m по-прежнему умещается только одна полка.

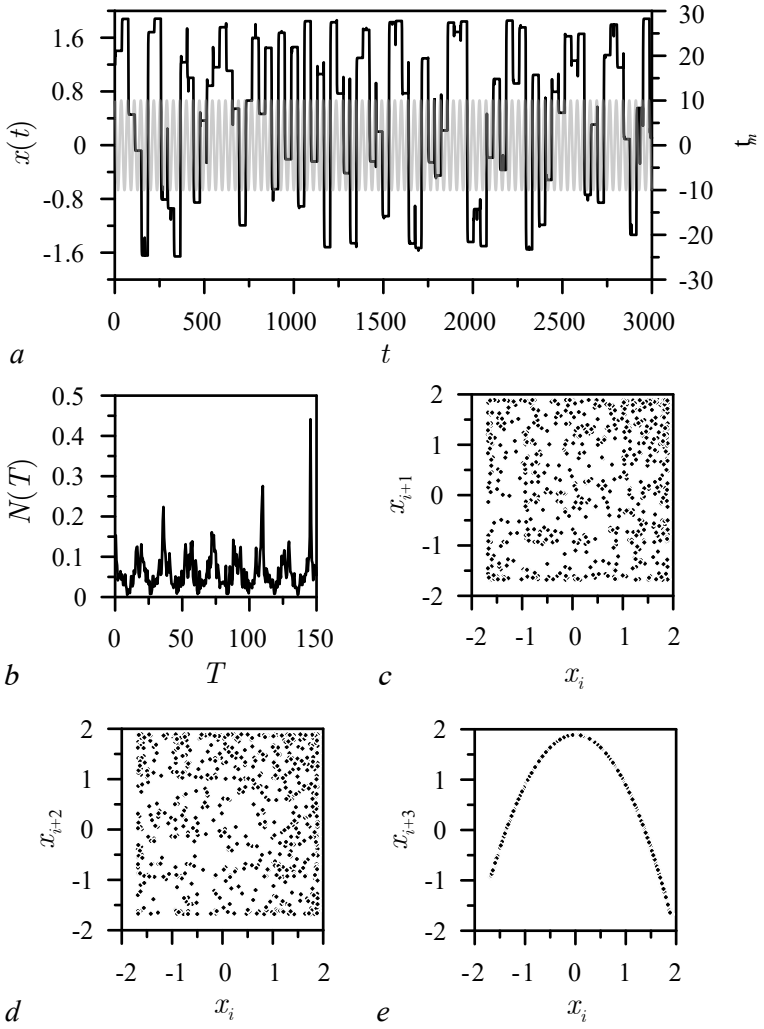


Рис. 3. Временной ряд системы (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) (*a*), статистика экстремумов (*b*), зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). Управляющие параметры $\nu = 0.0275$, $\tau_1 = 10$, $\tau_0 = 100$

Fig. 3. Time series of the system (black) and variation of delay time τ_m (gray) (*a*), statistics of extrema (*b*), dependencies $x_{i+n}(x_i)$ for $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), and $n = 3$ (*e*). Control parameters are as follows: $\nu = 0.0275$, $\tau_1 = 10$, and $\tau_0 = 100$

Величина $N(T)$ на рис. 3, *b* демонстрирует максимум на времени $T = 109$. Это примерно соответствует среднему времени запаздывания τ_0. На рис. 3, *c*–*e* представлены зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). На рис. 3, *c* и *d* отображение демонстрирует хаотический набор точек, а для $n = 3$ на рис. 3, *e* точки реконструируют нелинейную функцию $f(x)$. Это также подтверждает, что среднее время запаздывания τ_0 в системе примерно соответствует суммарной длине трех полок на временной реализации динамической переменной x.

Рассмотрим теперь возможности реконструкции в областях турбулентного хаоса (за пределами областей ламинарного хаоса). Временной ряд переменной x имеет при этом вид неупорядоченного сигнала, в целом похожий на сигнал системы с запаздыванием без модуляции времени задержки (см. рис. 4). На этом рисунке представлен временной ряд при $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$.

Разработанный нами ранее метод реконструкции времени задержки в системах с постоянным временем запаздывания, основанный на статистическом анализе временных интервалов между всеми возможными парами экстремумов временного ряда [18], применим к временным рядам системы (1) с переменным временем запаздывания, находящейся в режиме турбулентного хаоса. На рис. 5, *a*, *b* построены зависимости $N(T)$ для случаев, когда частота модуляции среднего времени запаздывания τ_0 принимает значения $\nu = 0.013$ и $\nu = 0.024$.

По классической статистике экстремумов [18] легко определяется частота модуляции ν среднего времени запаздывания τ_0. Она соответствует самым высоким пикам на графике $N(T)$. Так, на рис. 5, *a* основной максимум $N(T)$ наблюдается при $T = 76$, что близко к $T_m = 1/\nu = 1/0.013 = 77$. На рис. 5, *b* в зависимости $N(T)$ наблюдаются один глобальный максимум при $T = 125$ и два максимума поменьше при $T = 42$ и $T = 83$. Максимум на $T = 42$ соответствует $T_m = 1/\nu = 1/0.024 = 42$. Максимум на $T = 83$ на рис. 5, *b* соответствуют удвоенному периоду модуляции, а максимум на $T = 125$ — утроенному периоду.

Глобальный минимум $N(T)$ на рис. 5, *a*, *b*, соответствующий времени запаздывания τ_0, виден существенно хуже, чем для систем без модуляции времени запаздывания, но некоторые следы его видны на графиках. Если ограничить область поиска времени запаздывания диапазоном 70...130 (как правило, такие оценки делаются из более общих соображений при исследовании), в обоих рассмотренных случаях глобальный минимум зависимости $N(T)$ наблюдается при $T = 100$, соответствующем среднему времени запаздывания $\tau_0 = 100$.

Можно обратить внимание, что на рис. 4 экстремумы во временном ряде переменной x расположены более часто при положительных значениях времени запаздывания τ_m, чем при отрицательных значениях τ_m. Таким образом, расположение экстремумов может дать информацию об амплитуде τ_1 и периоде модуляции $T_m = 1/\nu$ времени запаздывания τ_0. Оценим эти параметры с использованием предложенной нами новой статистики экстремумов, которая строится по

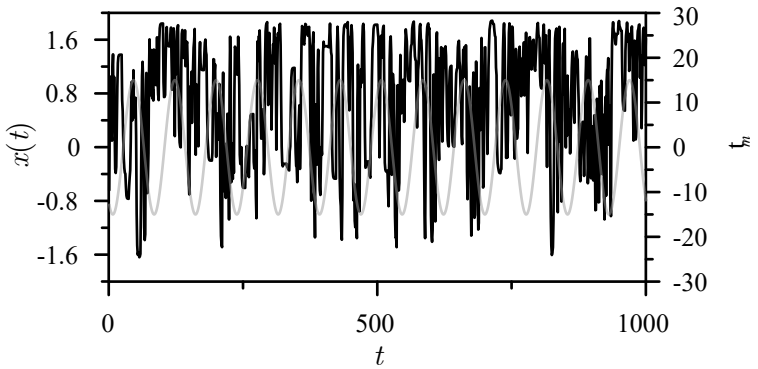


Рис. 4. Временной ряд турбулентного хаоса в системе (1) (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) при $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$

Fig. 4. Time series of turbulent chaos in system (1) (black) and variation of delay time τ_m (gray) at $\nu = 0.013$ and $\tau_1 = 15$

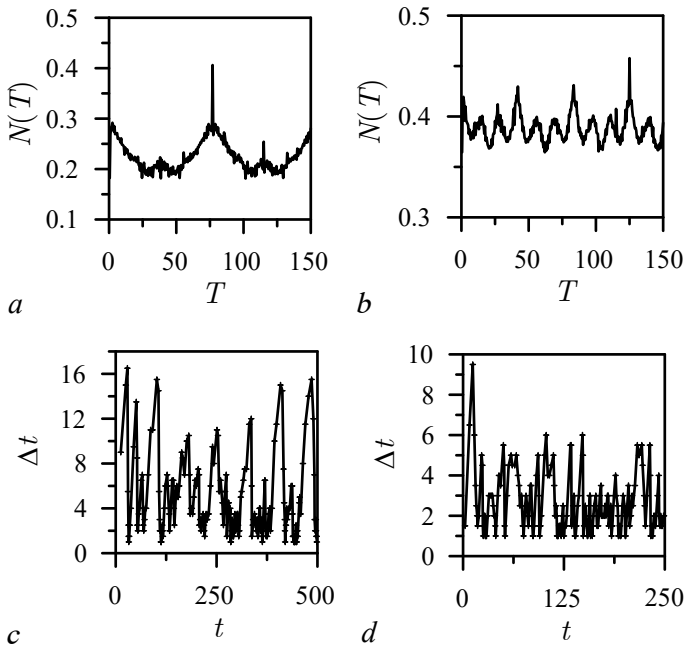


Рис. 5. Классическая статистика экстремумов при $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$ (*a*) и $\nu = 0.024$, $\tau_1 = 10$ (*b*) и новая статистика при $\nu = 0.013$ (*c*) и $\nu = 0.024$ (*d*)

Fig. 5. Classic statistics of extrema at $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$ (*a*) and $\nu = 0.024$, $\tau_1 = 10$ (*b*) and new statistics at $\nu = 0.013$ (*c*) and $\nu = 0.024$ (*d*)

следующему правилу: по оси абсцисс откладываем момент времени t, в который во временном ряде $x(t)$ наблюдается экстремум. По оси ординат откладываем расстояние по времени Δt между текущим экстремумом и предыдущим. В результате получаем маленькие значения Δt в тех местах временного ряда, где экстремумы расположены плотно и большие значения Δt в тех местах, где экстремумы разрежены. Это фактически некоторая частотная модуляция, где в качестве управляющего сигнала выступает модуляция времени запаздывания.

Новая статистика $\Delta t(t)$ приведена на рис. 5, *c*, *d* для тех же значений параметров, что на рис. 5, *a*, *b*. Точки полученной зависимости $\Delta t(t)$ обозначены крестиками, которые соединены между собой прямыми линиями для наглядности. Клювы, направленные вниз, соответствуют более сильному уплотнению экстремумов во временном ряде $x(t)$. По этой характеристике можно оценить период внешнего сигнала T_m, который равен среднему расстоянию между минимумами зависимости $\Delta t(t)$. На рис. 5, *c* за время $t = 500$ можно выделить 6 глубоких минимумов (клювов) на зависимости $\Delta t(t)$ от $t = 30$ до $t = 490$. Следовательно, период модуляции T_m времени запаздывания τ_0 составляет примерно $T_m = 460/6 = 77$. Эта оценка совпадает с истинным периодом модуляции $T_m = 1/\nu = 1/0.013 = 77$. По рис. 5, *d* можно также оценить период модуляции, который составляет примерно $T_m = 500/12 = 42$, что практически совпадает с истинным периодом модуляции. Амплитуда модуляции τ_1 грубо соответствует размаху колебаний $\Delta t(t)$ на рис. 5, *c*, *d*.

Выводы

Таким образом, в данной статье исследована возможность реконструкции автоколебательных систем с переменным временем запаздывания с помощью известного метода реконструкции систем с постоянным временем задержки, который основан на статистическом анализе временных интервалов между всеми возможными парами экстремумов временного ряда. Предложен

новый метод реконструкции в применении к системам с запаздыванием с модуляцией времени запаздывания, в которых могут наблюдаться качественно различающиеся режимы колебаний. Предложенный метод основан на статистическом анализе временных интервалов между двумя последовательными экстремумами временного ряда.

В случае, когда в системе существует ламинарный хаос, можно реконструировать нелинейную функцию. Нелинейная функция строится как зависимость $x_{i+n}(x_i)$ значения динамической переменной на горизонтальном участке (полке) временной реализации $x(t)$ с номером $i+n$ от значения переменной на полке с номером i, где $n = 1$, 2 или 3. Номер n дает информацию о том, в какой области существования ламинарного хаоса находится система. Так, если период модуляции T_m примерно равен среднему времени запаздывания τ_0, то нелинейная функция реконструируется при $n = 1$, а среднее время запаздывания можно оценить как длину полки на временной реализации $x(t)$.

В случае, когда период модуляции времени запаздывания примерно вдвое меньше среднего времени запаздывания, нелинейная функция восстанавливается при $n = 2$, а среднее время запаздывания равно примерно длительности двух полок на временной реализации $x(t)$.

В случае, когда период модуляции времени запаздывания примерно втрое меньше среднего времени запаздывания, нелинейная функция восстанавливается при $n = 3$, а среднее время запаздывания равно примерно длительности трех полок на временной реализации $x(t)$. При этом глубину модуляции определить не удается.

В случае если в системе есть модуляция времени запаздывания, но ламинарного хаоса нет, в некоторых случаях в режимах турбулентного хаоса время запаздывания можно оценить с использованием обычной статистики экстремумов, описанной в [18]. При этом частота и амплитуда модуляции времени запаздывания может быть оценена при помощи новой статистики, показывающей расстояние по времени между текущим и предыдущим экстремумом временного ряда.

Список литературы

1. *Erneux T.* Applied Delay Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 2009. 204 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.
2. *Kuang Y.* Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 398 p.
3. *Farmer J.* Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. Vol. 4, iss. 3. P. 366–393. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90042-2.
4. *Senthilkumar D. V., Lakshmanan M.* Delay time modulation induced oscillating synchronization and intermittent anticipatory/lag and complete synchronizations in time-delay nonlinear dynamical systems // Chaos. 2007. Vol. 17, iss 1. 013112. DOI: 10.1063/1.2437651.
5. *Lazarus L., Davidow M., Rand R.* Dynamics of an oscillator with delay parametric excitation // Int. J. Nonlinear Mech. 2016. Vol. 78. P. 66-71. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.005.
6. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А.* Квазипериодические и хаотические релаксационные колебания в модели лазера с переменным запаздыванием в цепи обратной связи // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 474, № 2. С. 159-163. DOI: 10.7868/S0869565217140043.
7. *Müller D., Otto A., Radons G.* Laminar chaos // Phys. Rev. Lett. 2018. Vol. 120. 084102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.084102.
8. *Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Ламинарный хаос в генераторе с запаздывающей обратной связью // Письма в журнал технической физики. 2020. Т. 46, вып. 9. С. 16-19. DOI: 10.21883/PJTF.2020.09.49366.18218.
9. *Müller-Bender D., Otto A., Radons G.* Resonant Doppler effect in systems with variable delay // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019. Vol. 377, iss. 2153. 20180119. DOI: 10.1098/rsta.2018.0119.
10. *Müller-Bender D., Radons G.* Laminar chaos in systems with quasiperiodic delay // Physical Review E. 2023. Vol. 107, iss. 1. 014205. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.014205.

11. *Hart J. D., Roy R., Müller-Bender D., Otto A., Radons G.* Laminar chaos in experiments: Nonlinear systems with time-varying delays and noise // Physical Review Letters. 2019. Vol. 123, iss. 15. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.154101.
12. *Jüngling T., Stemler T., Small M.* Laminar chaos in nonlinear electronic circuits with delay clock modulation // Phys. Rev. E. 2020. Vol. 101, iss. 1. 012215. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.012215.
13. *Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д.* Ламинарный хаос в связанных системах с запаздыванием // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, № 4. С. 11-14. DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52077.19044.
14. *Пономаренко В. И., Лапшева Е. Е., Курбако А. В., Прохоров М. Д.* Ламинарный хаос в экспериментальной системе с квазипериодической модуляцией времени запаздывания // Письма в ЖТФ. 2024. Т. 50, вып. 11. С. 34-37.
15. *Bünner M. J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A.* Reconstruction of systems with delayed feedback: II. Application // Eur. Phys. J. D. 2000. Vol. 10. P. 177–187. DOI: 10.1007/s100530050539.
16. *Udaltsov V. S., Goedgebuer J.-P., Larger L., Cuenot J.-B., Levy P., Rhodes W. T.* Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations // Phys. Lett. A. 2003. Vol. 308, iss. 1. P. 54–60. DOI: 10.1016/S0375-9601(02)01776-0.
17. *Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Karavaev A. S., Bezruchko B. P.* Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // Physica D. 2005. Vol. 203, no. 3–4. P. 209–223. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.013.
18. *Bezruchko B. P., Karavaev A. S., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // Physical Review E. 2001. Vol. 64, iss. 5. 056216. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056216.
19. *Müller-Bender D., Otto A., Radons G., Hart J. D., Roy R.* Laminar chaos in experiments and nonlinear delayed Langevin equations: A time series analysis toolbox for the detection of laminar chaos // Physical Review E. 2020. Vol. 101, iss. 3. 032213. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.032213.

References

1. Erneux T. Applied Delay Differential Equations. New York: Springer-Verlag; 2009. 204 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.
2. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press; 1993. 398 p.
3. Farmer J. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. Physica D: Nonlinear Phenomena. 19824;4(3):366-393. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90042-2.
4. Senthilkumar DV, Lakshmanan M. Delay time modulation induced oscillating synchronization and intermittent anticipatory/lag and complete synchronizations in time-delay nonlinear dynamical systems. Chaos. 2007;17(1):013112. DOI: 10.1063/1.2437651.
5. Lazarus L, Davidow M, Rand R. Dynamics of an oscillator with delay parametric excitation. Int. J. Nonlinear Mech. 2016;78:66-71. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.005.
6. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Quasi-periodic and chaotic relaxation oscillations in a laser model with variable delayed optoelectronic feedback. Doklady mathematics. 2017;95(3):282-286. DOI: 10.1134/S1064562417030073.
7. Müller D, Otto A, Radons G. Laminar chaos. Phys. Rev. Lett. 2018;120:084102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.084102.
8. Kul'minskii DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Laminar chaos in a delayed-feedback generator. Technical Physics Letters. 2020;46(5):423-426. DOI: 10.1134/S1063785020050090.
9. Müller-Bender D, Otto A, Radons G. Resonant Doppler effect in systems with variable delay. Phil. Trans. R. Soc. A. 2019;377(2153):20180119. DOI: 10.1098/rsta.2018.0119.

10. Müller-Bender D, Radons G. Laminar chaos in systems with quasiperiodic delay. Physical Review E. 2023;107(1):014205. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.014205.
11. Hart JD, Roy R, Müller-Bender D, Otto A, Radons G. Laminar chaos in experiments: Nonlinear systems with time-varying delays and noise. Physical Review Letters. 2019;123(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.154101.
12. Jüngling T, Stemler T, Small M. Laminar chaos in nonlinear electronic circuits with delay clock modulation. Phys. Rev. E. 2020;101(1):012215. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.012215.
13. Kul'minskii DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Laminar chaos in coupled time-delay systems. Technical Physics Letters. 2022;48(2):53-56. DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52077.19044.
14. Ponomarenko VI, Lapsheva EE, Kurbako AV, Prokhorov MD. Laminar chaos in an experimental system with quasiperiodic delay time modulation. Technical Physics Letters. 2024;50(11):34-37 (in Russian).
15. Bünner MJ, Ciofini M, Giaquinta A, Hegger R, Kantz H, Meucci R, Politi A. Reconstruction of systems with delayed feedback: II. Application. Eur. Phys. J. D. 2000;10:177–187. DOI: 10.1007/s100530050539.
16. Udaltsov VS, Goedgebuer J-P, Larger L, Cuenot J-B, Levy P, Rhodes WT. Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations. Phys. Lett. A. 2003;308(1):54–60. DOI: 10.1016/S0375-9601(02)01776-0.
17. Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Karavaev AS, Bezruchko BP. Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series. Physica D. 2005;203(3–4):209–223. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.013.
18. Bezruchko BP, Karavaev AS, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series. Physical Review E. 2001;64(5):056216. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056216.
19. Müller-Bender D, Otto A, Radons G, Hart JD, Roy R. Laminar chaos in experiments and nonlinear delayed Langevin equations: A time series analysis toolbox for the detection of laminar chaos. Physical Review E. 2020;101(3):032213. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.032213.

Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Доктор физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1579-6465
AuthorID (eLibrary.Ru): 39986

Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Доктор физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
ORCID: 0000-0003-4069-9410
AuthorID (eLibrary.Ru): 39985

Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003128
EDN: FDJOOM

Мультистабильность синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой и их устойчивость в целом и в большом

В. А. Храменков[1] ✉, *А. С. Дмитричев*[1], *В. И. Некоркин*[1,2]

[1]Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия
[2]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru, admitry@appl.sci-nnov.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 6.06.2024, принята к публикации 11.07.2024, опубликована онлайн 16.10.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Цель* настоящего исследования — изучение динамики энергосетей из произвольного числа синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. Особая роль отводится выявлению условий существования и устойчивости синхронных режимов, являющихся основными рабочими режимами энергосети. Исследуется возможность существования несинхронных (квазисинхронных и асинхронных) режимов. *Методы.* Для исследования динамики энергосети используется модель эффективной сети в виде ансамбля глобально связанных узлов-генераторов. Состояние каждого из них описывается так называемым уравнением качания («swing equation»). Предложен подход, позволяющий редуцировать эффективную сеть до сети с хаб-топологией (топологией «звезда»). При построении разбиения пространства параметров на области с различными режимами работы энергосети использовались численные методы. *Результаты.* Получены условия существования, устойчивости и мультистабильности синхронных режимов энергосети. Рассмотрены основные характеристики этих режимов, такие как мощности, выдаваемые генераторами в сеть, и распределения токов по линиям электропередачи. Построено разбиение пространства параметров энергосети на области, отвечающие ее различному динамическому поведению. *Заключение.* Изучена энергосеть из произвольного числа синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. Показано наличие двух типов синхронных режимов: однородного и неоднородного. Первый характеризуется равными мощностями и токами, текущими через все пути питания нагрузки, кроме одного. Второй предусматривает еще один дополнительный путь, отличающийся от остальных током и передаваемой мощностью. Причем токи, текущие по одному и тому же пути, но в разных режимах, различаются. Установлено наличие высокой мультистабильности неоднородных синхронных режимов. Показана возможность сосуществования однородного и неоднородных синхронных режимов, а также квазисинхронных и асинхронных режимов. В пространстве параметров энергосети найдены области, отвечающие как существованию только синхронных режимов, так и их сосуществованию с квазисинхронными и/или асинхронными режимами.

Ключевые слова: энергосети, синхронные машины, синхронные режимы, устойчивость в целом и большом, мультистабильность.

© *Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И., 2024*

Благодарности. Построение модели многомашинной энергосети с общей нагрузкой и развитие метода редукции энергосети (раздел 1, Приложение), анализ синхронных режимов (раздел 2) выполнены при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-12-00245. Численное исследование несинхронных режимов энергосети (раздел 3) выполнено при поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» (Соглашение № 075-02-2024-1376).

Для цитирования: *Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И.* Мультистабильность синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой и их устойчивость в целом и в большом // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 38–68. DOI: 10.18500/0869-6632-003128. EDN: FDJOOM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003128

Multistability of synchronous modes in a multimachine power grid with a common load and their global and non-local stability

V. A. Khramenkov[1] ✉, *A. S. Dmitrichev*[1], *V. I. Nekorkin*[1,2]

[1]FRC A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia
[2]National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: ✉hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru, admitry@appl.sci-nnov.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
Received 6.06.2024, accepted 11.07.2024, available online 16.10.2024, published 31.01.2025

Abstract. The *purpose* of this work is studying the dynamics of the power grid consisting of an arbitrary number of synchronous generators supplying a common passive linear load. We focus on searching the conditions for the existence and stability of synchronous modes, i.e. the main operating modes of a power grid. The possibility of the existence of non-synchronous (quasi-synchronous and asynchronous) modes is investigated. *Methods.* To study the dynamics of a power grid we use the effective network model in the form of an ensemble of globally coupled nodes-generators. The state of every node is described by the swing equation. The approach for reducing the effective network to the network with a hub topology (star topology) is proposed. We use numerical methods to construct a partition of the parameter space into areas with different operating modes of the power grid. *Results.* The conditions for the existence, stability and multistability of synchronous modes are obtained. The main characteristics of these modes are considered, such as the power supplied by generators to the grid and the distribution of currents along transmission lines. We constructed the partition of the power gird parameter space into areas with different dynamics. *Conclusion.* The power grid consisting of an arbitrary number of synchronous generators supplying a common passive linear load has been studied. We shown the presence of two types of synchronous modes: homogeneous and inhomogeneous. The first is characterized by equal powers and currents flowing through all load supply paths except one. The second provides another additional path, which differs from the others in current and transmitted power. Moreover, the currents flowing along the same path, but in various modes, differ. The presence of high multistability of inhomogeneous synchronous modes has been established. The possibility of coexistence of homogeneous and inhomogeneous synchronous modes, as well as quasi-synchronous and asynchronous modes, is shown. In the power grid parameters space we found areas corresponding both the existence of only synchronous modes and their coexistence with quasi-synchronous and/or asynchronous modes.

Keywords: power grids, synchronous machines, synchronous modes, global and non-local stability, multistability.

Acknowledgements. The development of a model of a multi-machine power grid with a common load and a method for reduction of the power grid (section 1, Appendix), as well as the analysis of synchronous modes (section 2), were carried out with the support of the Russian Science Foundation, project No. 24-12-00245. The numerical study of non-synchronous modes of the power grid (section 3) was supported by the project No. 075-02-2024-1376 of Program for the Development of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”.

For citation: Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Multistability of synchronous modes in a multimachine power grid with a common load and their global and non-local stability. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):38–68. DOI: 10.18500/0869-6632-003128

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В настоящее время наблюдается непрерывное развитие энергосетей, которое сопровождается созданием крупных энергообъединений, состоящих из большого числа генераторов, узлов нагрузки — потребителей, внутрисистемных и межсистемных связей — линий (электро)передачи. Эксплуатация таких систем — сложная комплексная задача, для решения которой применяются различные по своей сложности и полноте описания подходы и методы [1–9]. Энергосеть должна обеспечивать надежное и бесперебойное энергоснабжение потребителей, которое в идеальном случае характеризуется постоянством напряжения и частоты в узлах нагрузки. С практической точки зрения необходимо, чтобы указанные параметры оставались в определенных, заранее установленных пределах, обеспечивающих нормальное функционирование оборудования потребителей. Эти пределы задают нормальный (рабочий) режим энергосети.

Наиболее распространенными генераторами электрической энергии являются синхронные машины [10, 11]. В настоящее время, несмотря на активное внедрение солнечных и ветровых станций, они все еще обеспечивают большую часть выработки электроэнергии в крупных энергосетях [12]. Поэтому важным условием нормальной работы любой энергосети является установление и поддержание синхронизации таких генераторов, то есть режима, при котором все генераторы сети имеют идентичные частоты выходных напряжений. В процессе работы энергосеть постоянно подвергается различным возмущениям. К ним относятся колебания генерируемой и потребляемой мощности, короткие замыкания, срабатывания устройств релейной защиты и отключения линий передачи и генераторов и т. д. Возмущения способны вызывать изменения характеристик синхронного режима. Возникающие при этом переходные процессы могут сопровождаться значительными колебаниями токов и напряжений. Последние из-за дальнейшего срабатывания устройств релейной защиты способны приводить как к единичным и кратковременным сбоям в энергоснабжении, затрагивающим относительно небольшие части системы, так и к каскадным сбоям [13, 14] с серьезными и масштабными отключениями энергоснабжения [15–19]. Способность энергосети возвращаться к синхронному режиму после окончания действия возмущений характеризует ее устойчивость [20].

Одним из важных факторов, способных негативно влиять на работу энергосети, является мультистабильность, то есть сосуществование нескольких устойчивых (не обязательно синхронных / рабочих) режимов при одних и тех же значениях параметров. Действительно, если синхронный режим является единственным устойчивым режимом энергосети, то его незначительные возмущения затухают за счет структурной устойчивости сети и не приводят к каким-либо нежелательным эффектам. Напротив, при наличии мультистабильности эти же возмущения могут вызывать переключение энергосети в нежелательный или даже аварийный режим работы. Например, синхронный режим может сосуществовать с асинхронным [21–26], и переход в этот режим, безусловно, может инициировать серьезную энергоаварию. С другой стороны, синхронный режим может сосуществовать с другими синхронными режимами. Кажется, что в этом случае переключение между режимами в целом безопасно. Однако дополнительные синхронные режимы могут характеризоваться наличием циркулирующих потоков мощности [27–33], которые уменьшают эффективные пропускные способности соответствующих линий передачи, не доставляя при этом электроэнергию до потребителей и снижая общую пропускную способность сети. Кроме того, синхронные режимы могут характеризоваться существенно различными величинами суммарных активных потерь и распределениями токов по линиям передачи [34–37]. В этом случае переключение может приводить, например, к снижению энергоэффективности работы сети или увеличению токов в некоторых линиях. Последнее, в свою очередь, может инициировать срабатывание релейной токовой защиты и отключения линий, которые, каскадно развиваясь, приводят к энергоаварии. Наконец, синхронные режимы могут характеризоваться существенно различными

распределениями амплитуд узловых напряжений и, в частности, наличием узлов с очень низкими амплитудами [38–40]. Переход в такие режимы приводит к «лавине» напряжения [41], что также может инициировать энергоаварию. Возвращение сети в синхронный режим с нормальными параметрами зачастую является достаточно сложной задачей.

В связи с этим важными как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения задачами являются: изучение условий возникновения мультистабильности в энергосетях, нахождение механизмов установления и поддержания в таких сетях синхронных режимов, исследование нелокальной устойчивости синхронных режимов к разного рода возмущениям, а также разработка методов возвращения сетей в требуемые синхронные режимы после перехода их в нежелательные.

Одним из подходов к моделированию энергосетей и решению указанных выше задач является подход, основанный на методах нелинейной динамики. В его рамках энергосеть рассматривается как ансамбль взаимодействующих динамических агентов, обычно представленных синхронными машинами (см. Приложение). Последние упрощенно описываются уравнениями качания (swing equations), которые определяют поведение фаз напряжений (относительных углов роторов) этих машин [21, 42–44]. Более детальные модели могут учитывать переток реактивной мощности [38, 39], динамику амплитуд напряжений синхронных машин [40], а также включать и инверторно-подключаемые генераторы на основе возобновляемых источников энергии (ветер, солнце, приливы и др.) [45]. Динамический подход активно применялся для исследования влияния параметров генераторов и потребителей, а также влияния топологии энергосетей (или структуры их линий передачи) на набор и характер устойчивости режимов их работы (см. [21, 46–52] об исследовании энергосетей острова Зеландии (Дания), Великобритании, Италии и Европы). Изучались небольшие энергосети и мотивы, представляющие собой часто повторяющиеся участки крупных энергосетей [21, 25, 37, 43, 53–56], которые могут входить в состав крупных энергосетей и влиять на их динамику. Был обнаружен ряд интересных и неожиданных эффектов, таких как эффект Браеса [25, 32, 47, 57–59] и отмеченное ранее наличие мультистабильности (сосуществования) устойчивых синхронных режимов. Кроме того, подход позволил разработать различные аналитические и полуаналитические критерии существования синхронных режимов, а также критерии их нелокальной устойчивости в случае возмущений умеренной и даже произвольной величины [40, 50, 55, 60–64]. Был предложен ряд мер, в том числе вероятностных, применимых для количественной оценки нелокальной устойчивости синхронных режимов энергосетей [22, 52, 65–72].

В нашей предыдущей работе [37] была рассмотрена энергосеть из трех синхронных генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. Мы показали, что в случае, когда один из генераторов находится «ближе» к нагрузке (из-за более короткой линии передачи и/или продольной компенсации индуктивного сопротивления), так называемая модель эффективной сети (см. Приложение), описывающая энергосеть, может быть редуцирована до модели ансамбля с хаб-топологией (топологией «звезда»). Установлено, что в сети могут быть реализованы два разных типа синхронных режимов (однородный и неоднородный), которые отличаются стационарными распределениями токов в разных путях питания нагрузки. Показано, что синхронные режимы разных типов существуют в смежных областях параметров, однако неоднородные режимы всегда существуют парами. Получено разбиение пространства параметров сети на области с различными режимами ее поведения. Установлено, что сеть при определенных условиях является мультистабильной и вместе с синхронными режимами может иметь ряд квазисинхронных и асинхронных режимов. Изучена нелокальная устойчивость неоднородных синхронных режимов и переключения между ними под действием однократных (произвольных, частотных и фазовых) возмущений и шумовых колебаний мощностей турбин генераторов.

В настоящей работе мы обобщаем полученные ранее результаты на энергосеть с произвольным числом генераторов. В разделе 1 приводится модель эффективной сети, описывающая

рассматриваемую энергосеть, и условия, позволяющие редуцировать ее до модели в виде ансамбля с хаб-топологией. В разделе 2 изучаются возможные синхронные режимы энергосети, находятся области существования и устойчивости этих режимов. В разделе 3 изучаются несинхронные режимы энергосети, находятся области глобальной устойчивости синхронных режимов и устойчивости в большом. В заключении представлено краткое обсуждение результатов. В Приложении приведено описание модели эффективной сети.

1. Модель энергосети

Для ясности изложения рассмотрим схему с этапами вывода модели исследуемой энергосети (рис. 1). На первом этапе мы вводим в Приложении модель эффективной сети. На втором этапе рассматриваем принципиальную схему энергосети и схему замещения, необходимую для построения эффективной сети. Выражаем через параметры схемы замещения коэффициенты связи между узлами эффективной сети. На третьем этапе получаем условия редукции эффективной сети с глобальными связями до сети с хаб-топологией. На четвертом этапе записываем уравнения динамики редуцированной эффективной сети, описывающие многомашинную энергосеть с общей нагрузкой.

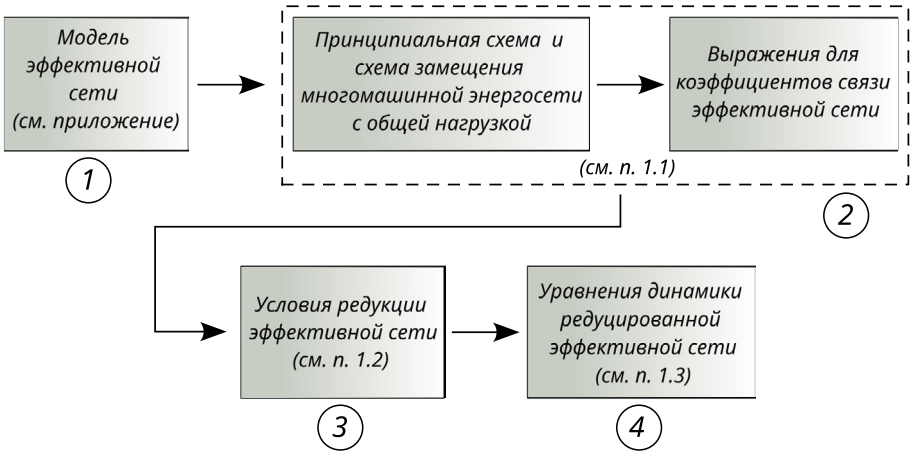


Рис. 1. Этапы вывода модели исследуемой энергосети

Fig. 1. Stages of obtaining the studying model of the power grid

1.1. Многомашинная энергосеть с общей нагрузкой. Рассмотрим многомашинную энергосеть, принципиальная схема которой показана на рис. 2, *a*. В ней группа синхронных генераторов $G_1 - G_n (n \geqslant 3)$ питает одну общую пассивную линейную нагрузку $(load)$. При этом каждый генератор связан с нагрузкой посредством входного трансформатора T_i^{in}, выходного трансформатора T_i^{out} и линии передачи, которые составляют его передающую систему.

В силу характера нагрузки динамику этой энергосети можно описать в рамках так называемой модели эффективной сети (МЭС). Краткое описание МЭС и вывод ее в обобщенном виде (см. систему уравнений (П6)) для произвольной энергосети приведены в Приложении. Для получения модели конкретной энергосети необходимо выразить входящие в (П6) собственные $Y_{i,i}$ и взаимные $Y_{i,j}$ проводимости через параметры соответствующей схемы замещения.

Выразим проводимости $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$, используя схему замещения, участок которой приведен на рис. 2, *b*. Отметим, что эта схема уточняет схему на рис. 7, *a* (см. Приложение) в части пассивной цепи. В ней входные и выходные трансформаторы замещены соответственно последовательными

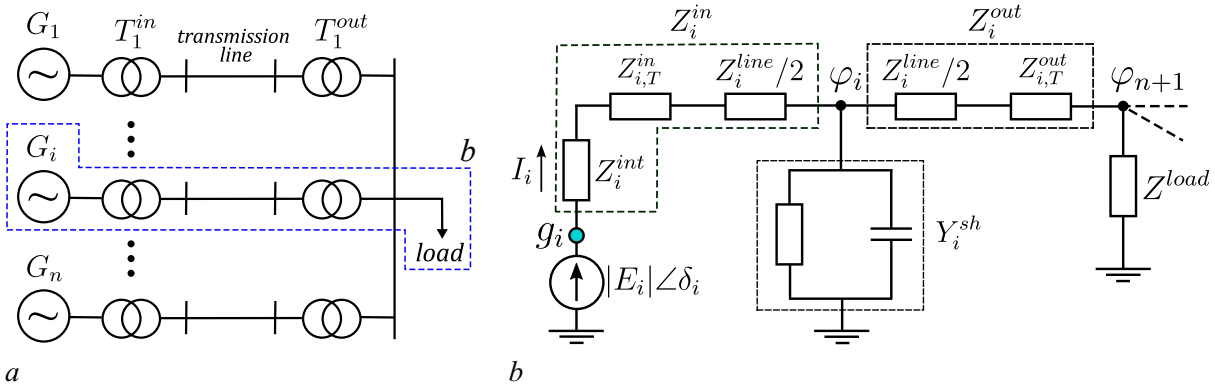


Рис. 2. Архитектура энергосети: *a* — принципиальная схема энергосети; *b* — схема замещения i-го участка сети, содержащего i-й генератор и нагрузку

Fig. 2. Architecture of power grid: *a* — schematic diagram; *b* — equivalent circuit of the i-th grid's part, containing the i-th generator and a load

активно-индуктивными импедансами $Z_{i,T}^{\text{in}} = r_{i,T}^{\text{in}} + \mathrm{i}x_{i,T}^{\text{in}}$ $(x_{i,T} > 0)$ и $Z_{i,T}^{\text{out}} = r_{i,T}^{\text{out}} + \mathrm{i}x_{i,T}^{\text{out}}$ $(x_{i,T} > 0)$, а линии передачи — стандартной T-образной цепью с последовательными активно-индуктивными импедансами $Z_i^{\text{line}}/2$, $Z_i^{\text{line}} = r_i^{\text{line}} + \mathrm{i}x_i^{\text{line}}$ $(x_i^{\text{line}} > 0)$ и шунтирующими активно-емкостными проводимостями $Y_i^{sh} = g_i^{sh} + \mathrm{i}b_i^{sh}$ $(b_i^{sh} > 0)$.

Заметим, что искомые проводимости определяют протекающие в ветвях генераторов токи (см. выражение (П3) в Приложении), найденные при помощи принципа наложения. С другой стороны, эти же токи могут быть найдены через комплексные потенциалы (неустранимых) узлов, φ_i, схемы замещения (см. рис. 2, *b*). Действительно, используя закон Ома для участка цепи, содержащей ЭДС, получим

$$I_i = (E_i - \varphi_i)Y_i^{\text{in}}, i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} Y_i^{\text{in}} &= 1/Z_i^{\text{in}}, \quad Z_i^{\text{in}} = Z_i^{\text{line}}/2 + Z_{i,T}^{\text{in}} + Z_i^{\text{int}}, \\ Y_i^{\text{out}} &= 1/Z_i^{\text{out}}, \quad Z_i^{\text{out}} = Z_i^{\text{line}}/2 + Z_{i,T}^{\text{out}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что значения φ_i заранее также неизвестны, но могут быть определены с помощью метода узловых потенциалов (МУП) [73]. Уравнения МУП в нашем случае имеют вид

$$\widehat{M}\vec{\varphi} = \vec{\Gamma}, \tag{3}$$

где $\vec{\varphi} = [\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}]^T$ — вектор-столбец потенциалов узлов, $\vec{\Gamma} = [E_1 Y_1^{\text{in}}, \ldots, E_n Y_n^{\text{in}}, 0]^T$ — вектор-столбец так называемых узловых токов, а $\widehat{M}$ — симметричная матрица МУП порядка $(n+1)$ со следующими ненулевыми элементами:

$$\begin{cases} M_{i,n+1} = -Y_i^{\text{out}}, M_{n+1,i} = M_{i,n+1}, \\ M_{i,i} = Y_i^{\text{in}} + Y_i^{\text{out}} + Y_i^{sh}, \\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4}$$

$$M_{n+1,n+1} = \frac{1}{Z_{\text{load}}} + \sum_{i=1}^{n} Y_i^{\text{out}}.$$

Разрешая систему (3) относительно потенциалов узлов, получим

$$\begin{cases} \varphi_i &= E_i \dfrac{Y_i^{\text{in}}}{M_{i,i}} \left(1 + \dfrac{M_{i,n+1}^2}{M_{i,i} C_G}\right) + \dfrac{M_{i,n+1}}{M_{i,i} C_G} \displaystyle\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} E_j \dfrac{M_{j,n+1} Y_j^{\text{in}}}{M_{j,j}}, \\ i &= \overline{1,n}, \end{cases} \tag{5}$$
$$\varphi_{n+1} = -\frac{1}{C_G} \sum_{j=1}^{n} E_j \frac{M_{j,n+1} Y_j^{\text{in}}}{M_{j,j}},$$

где $C_G = M_{n+1,n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{M_{j,n+1}^2}{M_{j,j}}$.

Подставляя (5) в (1) и сопоставляя полученное выражение с (П3), находим

$$\begin{aligned} Y_{i,i} &= Y_i^{\text{in}} \left[1 - \frac{Y_i^{\text{in}}}{M_{i,i}} \left(1 + \frac{M_{i,n+1}^2}{M_{i,i} C_G}\right)\right], \\ Y_{i,j} &= Y_i^{\text{in}} Y_j^{\text{in}} \frac{M_{i,n+1} M_{j,n+1}}{M_{ii} M_{jj} C_G}, \\ i,j &= \overline{1,n},\ i \neq j. \end{aligned} \tag{6}$$

Наконец, подставляя выражения (4) для элементов матрицы МУП в (6), находим необходимые зависимости проводимостей $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ от параметров схемы замещения

$$\begin{aligned} Y_{i,i} &= \frac{1}{Z_i^{\text{in}}} \left[1 - \frac{Z_i^{\text{out}}}{R_i} \left(1 + \frac{Z_i^{\text{in}}}{C_R R_i Z_i^{\text{out}}}\right)\right], \\ Y_{i,j} &= \frac{1}{C_R R_i R_j}, \\ i,j &= \overline{1,n}, i \neq j, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$R_k = Z_k^{\text{in}} + Z_k^{\text{out}} + Y_k^{sh} Z_k^{\text{in}} Z_k^{\text{out}} \text{ и } C_R = \frac{1}{Z_{\text{load}}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} (1 + Y_k^{sh} Z_k^{\text{in}}).$$

Напомним, что особенностями МЭС (П6) являются неявная зависимость всех эффективных параметров, в том числе сил межузловых связей, друг от друга и глобальная топология межузловых связей. Таким образом, изменяя один из эффективных параметров МЭС, необходимо изменять и все остальные так, чтобы все они соответствовали одной и той же схеме замещения. Это не позволяет эффективно исследовать влияние на динамику энергосетей изменения как отдельных параметров МЭС, так и параметров схемы замещения. Кроме того, глобальная топология вместе с взаимозависимостью параметров не позволяет эффективно изучать влияние на динамику энергосетей изменения сил как отдельных связей, так и групп связей, в том числе в результате отключения и подключения генераторов.

1.2. Редукция эффективной сети. Покажем далее, что при некоторых условиях модель эффективной сети все же может быть существенно упрощена. Предположим, что в рассматриваемой энергосети имеется такой путь питания нагрузки q (причем единственный), включающий q-й генератор и его передающую систему, что для него наилучшим образом выполняется следующее неравенство:

$$\left|\frac{E_q}{R_q}\right| \gg \frac{E_q^{\max}}{R_q^{\min}}, \tag{8}$$

где

$$E_q^{\max} = \max_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus q} |E_i|, \quad R_q^{\min} = \min_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus q} |R_i|.$$

Оказывается, в этом случае q-й узел модели эффективной сети будет связан со всеми остальными узлами намного сильнее, чем они между собой (рис. 3, *a*). Поэтому вместо исходной модели эффективной сети с глобально связанными узлами можно рассматривать (в некотором приближении) редуцированную модель эффективной сети, в которой отброшены все не включающие q-й узел связи: $K_{i,j} = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \backslash q$. Эта модель представляет собой сеть с хаб-топологией (топологией «звезда»), где роль хаба играет q-й узел (рис. 3, *b*).

Действительно, из определения величин $E_q^{\max}, R_q^{\min}$ следует, что $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \backslash q$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{E_j}{R_j} \right| \leqslant \frac{E_q^{\max}}{R_q^{\min}}.$$

Тогда, очевидно, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \backslash q$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{E_q E_i}{R_q R_i} \right| \gg \left| \frac{E_i E_j}{R_i R_j} \right|.$$

Принимая во внимание выражения для $K_{i,j}$ (П6) и $Y_{i,j}$ (7), устанавливаем, что силы связи между узлами эффективной сети подчиняются неравенствам

$$K_{q,i} \gg K_{i,j}, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \backslash q.$$

Покажем, что условия редукции, вообще говоря, реализуемы на практике. Без ограничения общности будем считать, что амплитуды напряжений всех генераторов величины одного порядка, то есть $|E_i| \approx |E_j|, \forall i \neq j$. Учитывая, что $|R_j| \geqslant R_q^{min}$, нетрудно установить, что неравенство (8) удовлетворяется, если

$$|\mathrm{Re}(R_q)| \ll |\mathrm{Re}(R_j)| \quad \text{и} \quad |\mathrm{Im}(R_q)| \ll |\mathrm{Im}(R_j)|, \quad \forall j \neq q. \tag{9}$$

Заметим, что при типичных параметрах генераторов, трансформаторов и линий передачи (см. например, [3])

$$R_k \approx Z_k^{\mathrm{in}} + Z_k^{\mathrm{out}}. \tag{10}$$

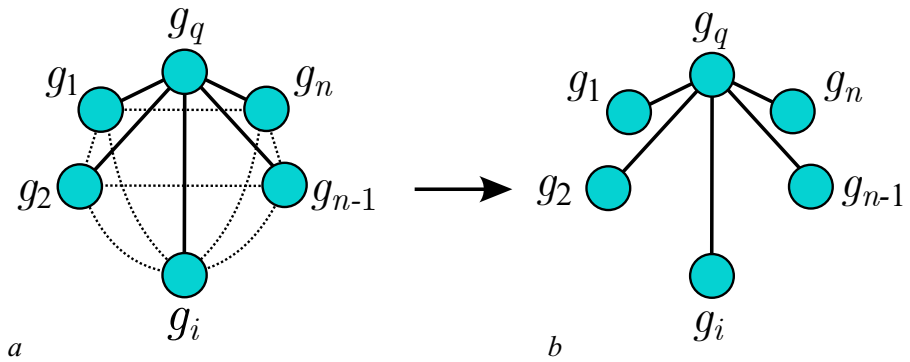


Рис. 3. Редукция эффективной сети с «электрически» более близким к нагрузке q-м генератором: *a* — исходная сеть с «сильными» (сплошные линии) и «слабыми» (пунктирные линии) межгенераторными связями; *b* — редуцированная сеть с хаб-топологией (топологией «звезда»)

Fig. 3. Reduction of an effective network with the q-th generator "electrically" closest to the load: *a* — initial network with "strong" (solid lines) and "weak" (dotted lines) inter-generator couplings; *b* — reduced network with hub (star) topology

Тогда при одинаковых значениях погонных активных (r_0) и индуктивных (x_0) сопротивлений линий электропередачи с учетом (10), (2), а также соотношений $r_k^{\text{line}} = l_k r_0,\ x_k^{\text{line}} = l_k x_0$, неравенства (9) преобразуются в

$$l_q^{\text{line}} r_0 + r_{q,T}^{\text{in}} + r_{q,T}^{\text{out}} + r_q^{\text{int}} \ll l_j^{\text{line}} r_0 + r_{j,T}^{\text{in}} + r_{j,T}^{\text{out}} + r_p^{\text{int}}, \tag{11}$$

$$l_q^{\text{line}} x_0 + x_{q,T}^{\text{in}} + x_{q,T}^{\text{out}} + x_q^{\text{int}} \ll l_j^{\text{line}} x_0 + x_{j,T}^{\text{in}} + x_{j,T}^{\text{out}} + x_j^{\text{int}}, \tag{12}$$

где l_q и l_j — длины линий передачи в передающих системах q-го и j-го генераторов.

Обычно при практических расчетах полагают $r_T^{\text{in}} = r_T^{\text{out}} = r^{\text{int}} = 0$. В этом случае, очевидно, что неравенство (11) будет выполнено, если

$$l_q \ll l_j,$$

то есть когда q-й генератор находится значительно ближе к нагрузке, чем остальные генераторы. При расчетах воздушных линий передачи также полагают $r^{\text{line}} = 0$. В этом случае вообще нет необходимости рассматривать неравенство (11).

Для выполнения неравенства (12) можно применить так называемую продольную компенсацию [1]. Она осуществляется, например, путем последовательного включения в линию конденсаторов, компенсирующих ее индуктивность, что способствует уменьшению падения напряжения на линии. Предположим, что в промежуточную точку линии передачи q-го генератора последовательно включен конденсатор с комплексным сопротивлением $-\mathrm{i}x_C,\ x_C > 0$. Тогда неравенство (12) примет вид

$$|(l_q^{\text{line}} x_0 + x_{q,T}^{\text{in}} + x_{q,T}^{\text{out}} + x_q^{\text{int}}) - x_C| \ll l_j^{\text{line}} x_0 + x_{j,T}^{\text{in}} + x_{j,T}^{\text{out}} + x_j^{\text{int}}, \tag{13}$$

и, очевидно, что при $x_C \approx [x_{q,T}^{\text{in}} + x_{q,T}^{\text{out}} + x_q^{\text{int}}]/x_0$ оно будет выполнено. Отметим, что продольная компенсация выполняется в рамках системы FACTS (flexible alternating current transmission system) [74], которая активно внедряется в современные энергосети с целью управления параметрами электропередачи.

Таким образом, условия редукции (8) могут возникать естественным образом из-за различий длин линий передачи и использования продольной компенсации на одной из них. При этом необходимо учитывать особенности устройства конкретных генераторов и передающих систем, потому как их параметры оказывают непосредственное влияние на значения величин R_k, входящих в неравенство (8).

1.3. Уравнения динамики редуцированной эффективной сети. Получим далее модель энергосети, в которой для определенности генератор G_1 находится значительно ближе к нагрузке, чем остальные генераторы $G_2, G_3, \ldots, G_n$, и/или на линии передачи этого генератора выполнена продольная компенсация. Для определенности предположим, что постоянные инерции и демпферные коэффициенты у всех генераторов одинаковы

$$C_i = C,\ D_i = D. \tag{14}$$

Кроме того, будем считать, что все генераторы, кроме первого, и их передающие системы имеют одинаковые параметры, то есть

$$\begin{cases} P_{T,k} = P_{T,2}, \quad |E_k| = |E_2|, \quad Z_k^{\text{in}} = Z_2^{\text{in}}, \quad Z_k^{\text{out}} = Z_2^{\text{out}}, \quad Y_k^{sh} = Y_2^{sh}, \\ k = \overline{2, n}. \end{cases} \tag{15}$$

Введем новые переменные параметры и время

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{K}{C}}t, \quad \Delta = \frac{A_1 - A_2}{K}, \quad \mu = \frac{D}{\sqrt{CK}}, \\ \alpha &= \pi/2 - \arg(C_R R_1 R_2), \quad K = |E_1 E_2|/|C_R R_1 R_2|, \\ \varphi_i &= \delta_{1,i+1} = \delta_1 - \delta_{i+1}, \quad y_i = \dot{\delta}_{1,i+1} = \dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_{i+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (П6), окончательно находим

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i &= \Delta - \mu y_i - \sin(\varphi_i + \alpha) - \sum\limits_{j=1}^{N} \sin(\varphi_j - \alpha), \\ i &= \overline{1, N}, \end{cases} \tag{17}$$

где $N = n - 1$. Система (17) определена в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^N \times R^N$ и имеет поглощающую область

$$G^+ = \left\{ \phi_i \in S^1,\ y_i \in \left[y^-, y^+ \right],\ i = \overline{1, N} \right\}, \tag{18}$$

где $y^{\pm} = \dfrac{1}{\mu}\left[\Delta \pm (2|\cos(\alpha)| + N - 1)\right]$. Поглощающая область притягивает траектории с начальными условиями вне этой области и содержит все аттракторы системы.

Заметим, что система (17) симметрична относительно перестановки любой пары элементов. Таким образом, если система имеет решение, в котором, например, $\{\varphi_k = \Phi_k(t), y_k = \Psi_k(t)\}$, а $\{\varphi_l = \Phi_l(t), y_l = \Psi_l(t)\}$, то она также будет иметь решение, в котором при прочих равных $\{\varphi_k = \Phi_l(t), y_k = \Psi_l(t)\}$, а $\{\varphi_l = \Phi_k(t), y_l = \Psi_k(t)\}$. Кроме того, очевидно, что получаемые такими всевозможными перестановками решения будут иметь один и тот же тип, то есть если одно решение устойчиво, то и все остальные решения также будут устойчивыми.

Нетрудно показать, что система (17) инвариантна относительно преобразований

$$\{\Delta \to -\Delta,\ \alpha \to -\alpha + \pi m,\ \varphi_i \to -\varphi_i + \pi m,\ y_i \to -y_i,\ i = \overline{1, N}\},\ m = 0, 1.$$

Поэтому далее мы будем рассматривать ее лишь в диапазоне $\alpha \in [0, \pi/2]$.

2. Синхронные режимы

Рассмотрим далее вопросы о существовании, устойчивости и характеристиках синхронных режимов в многомашинной энергосети (см. рис. 2, *b* и рис. 3, *b*).

2.1. Условия существования. Таким режимам соответствуют состояния равновесия системы (17). Нетрудно видеть, что координаты возможных состояний равновесия по переменным y_i имеют нулевые значения, а по переменным φ_i подчиняются следующей системе нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sin(\varphi_i + \alpha) = \Delta - \Sigma, \\ i = \overline{1, N}, \end{cases} \tag{19}$$

где $\Sigma = \sum_{j=1}^{N} \sin(\varphi_j - \alpha)$. Так как правые части уравнений системы (19) равны, то любая пара координат связана уравнением

$$\sin(\varphi_i + \alpha) - \sin(\varphi_j + \alpha) = 0.$$

Отсюда, во-первых, следует, что в системе (17) возможно существование однородных состояний равновесия с координатами

$$\varphi_i = \varphi_j, \quad \forall i \neq j. \tag{20}$$

Во-вторых, это означает, что в системе (17) также возможно существование неоднородных состояний равновесия, координаты которых принимают одно из двух следующих значений:

$$\begin{aligned} \varphi^- &= -\alpha + \Phi, \\ \varphi^+ &= -\alpha + \pi - \Phi, \end{aligned} \tag{21}$$

где Φ — неизвестная, подлежащая определению. При этом очевидно, что значение Φ и, соответственно, свойства неоднородных состояний равновесия не должны зависеть от конкретного распределения координат между значениями φ^- и φ^+, а определяются лишь парой чисел, обозначающих количества координат с тем и другим значением.

Подставляя (20) в (19) и решая полученное уравнение, устанавливаем, что система (17) при параметрах из области

$$S_N^{\text{hom}} = \left\{ \alpha, \Delta, \mu \,\middle|\, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2,\ |\Delta| \leqslant f(N,\alpha), \mu > 0 \right\},$$

где $f(N,\alpha) = \sqrt{N^2 + 2N\cos(2\alpha) + 1}$, имеет два однородных состояния равновесия

$$O_1^{\text{hom}}(\varphi_i = \varphi^{\text{hom}},\ y_i = 0) \ \text{ и } \ O_2^{\text{hom}}(\varphi_i = \pi + 2\beta^{\text{hom}} - \varphi^{\text{hom}},\ y_i = 0), \tag{22}$$

где

$$\varphi^{\text{hom}} = \beta^{\text{hom}} + \arcsin\left(\frac{\Delta}{f(N,\alpha)}\right),\ \sin\beta^{\text{hom}} = \frac{(N-1)\sin\alpha}{f(N,\alpha)},\ \cos\beta^{\text{hom}} = \frac{(N+1)\cos\alpha}{f(N,\alpha)}. \tag{23}$$

В силу отмеченных выше свойств неоднородных состояний равновесия далее без потери общности остановимся на классе таких состояний, у которых J координат имеют значение φ^+, а оставшиеся $N - J$ координат — φ^- (см. (21)), то есть

$$O_i^{\text{inh},J}(\varphi_l = \varphi^+,\ l \in L_i^+,\ \varphi_l = \varphi^-,\ l \in L_i^-;\ y_i = 0),\ i = \overline{1, N^J}, \tag{24}$$

где $L_i^+ = \{l_1^+, \ldots, l_J^+\}$ и $L_i^- = \{l_1^-, \ldots, l_{N-J}^-\}$ — подмножества индексов такие, что $L_i^+ \cap L_i^- = \varnothing$, $L_i^+ \cup L_i^- = \{1, \ldots, N\}$, а $N^J = C_J^N = N!/J!(N-J)!$ — число совместно не совпадающих пар подмножеств L_i^+ и L_i^- и, соответственно, состояний равновесия в классе. Подставляя (21) в (19) с учетом свойств класса, находим, что значение неизвестной Φ для этого класса определятся уравнением

$$\sin(\Phi_J) + J\sin(\Phi_J + 2\alpha) + (N-J)\sin(\Phi_J - 2\alpha) = \Delta.$$

Это уравнение имеет два решения

$$\Phi_J^{(1)} = \beta_J^{\text{inh}} + \pi - \Omega_J^{\text{inh}} \ \text{ и } \ \Phi_J^{(2)} = \beta_J^{\text{inh}} + \Omega_J^{\text{inh}}, \tag{25}$$

где

$$\begin{gathered} \sin\beta_J^{\text{inh}} = \frac{(N-2J)\sin 2\alpha}{g(N,J,\alpha)}, \quad \cos\beta_J^{\text{inh}} = \frac{(N\cos 2\alpha + 1)}{g(N,J,\alpha)}, \\ \Omega_J^{\text{inh}} = \arcsin\left(\frac{\Delta}{g(N,J,\alpha)}\right), \quad g(N,J,\alpha) = \sqrt{(1+N\cos 2\alpha)^2 + (N-2J)^2\sin^2 2\alpha}. \end{gathered} \tag{26}$$

Подстановкой этих решений обратно в (21) можно убедиться, что лишь одно из них, а именно $\Phi_J^{(1)}$, отвечает нашему классу. Решение же $\Phi_J^{(2)}$ задает симметричный к нашему класс состояний равновесия $O_i^{\mathrm{inh},N-J},\ i=\overline{1,NJ}$, то есть $O_i^{\mathrm{inh},J}(\Phi_J^{(2)}) = O_i^{\mathrm{inh},N-J}(\Phi_{N-J}^{(1)})$. При этом заметим, что области существования состояний равновесия этих классов совпадают

$$S_N^{\mathrm{inh},N-J} \equiv S_N^{\mathrm{inh},J} = \left\{\alpha,\Delta,\mu \,\middle|\, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2,\ |\Delta| \leqslant g(N,J,\alpha), \mu > 0\right\}.$$

Суммируя число состояний равновесия в классах (варьируя J от 1 до $N-1$), получаем, что система (17) в общем случае может иметь 2^N-2 неоднородных состояния равновесия.

2.2. Устойчивость в малом. Проанализируем далее устойчивость состояний равновесия системы (17). Для этого линеаризуем ее в окрестности одного из таких состояний. Матрица линеаризованной системы имеет вид

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} \widehat{O}_N & \widehat{E}_N \\ \widehat{Q} & -\mu\widehat{E}_N \end{pmatrix},$$

где $\widehat{O}_N$ и $\widehat{E}_N$ — нулевая и единичная матрицы N-го порядка, $\widehat{Q}$ — матрица N-го порядка с элементами

$$q_{jj} = -2\cos(\alpha)\cos(\phi_j^*), \quad q_{i,j} = -\cos(\phi_j^* - \alpha), \quad i,j = \overline{1,N}, i \neq j,$$

а ϕ_j^* — координаты состояния равновесия. Поведение линеаризованной системы и, соответственно, характер локальной устойчивости состояния равновесия определяются собственными значениями матрицы $\widehat{A}$, которые называются также характеристическими показателями Ляпунова. Спектр собственных значений матрицы $\widehat{A}$, которые обозначим через λ, находится из уравнения

$$\det\left(\widehat{A}_\lambda\right) = 0, \text{ где } \widehat{A}_\lambda = \widehat{A} - \lambda\widehat{E}_{2N} = \begin{pmatrix} -\lambda\widehat{E}_N & \widehat{E}_N \\ \widehat{Q} & -(\lambda+\mu)\widehat{E}_N \end{pmatrix}.$$

Чтобы решить это уравнение, прежде всего заметим, что $\widehat{A}_\lambda$ представляет собой 2×2 блочную матрицу. В соответствии с [75] определитель произвольной 2×2 блочной матрицы

$$\det\begin{pmatrix} \widehat{A}' & \widehat{B}' \\ \widehat{C}' & \widehat{D}' \end{pmatrix} = \begin{cases} |\widehat{A}'||\widehat{D}' - \widehat{C}'\widehat{A}'^{-1}\widehat{B}'|, \text{ при } |\widehat{A}'| \neq 0, \\ |\widehat{D}'||\widehat{A}' - \widehat{B}'\widehat{D}'^{-1}\widehat{C}'|, \text{ при } |\widehat{D}'| \neq 0, \end{cases} \tag{27}$$

при условии, что $\widehat{A}'$ и $\widehat{D}'$ — некоторые квадратные матрицы, а $\widehat{B}'$ и $\widehat{C}'$ — прямоугольные матрицы соответствующего размера. Кроме того, если матрицы $\widehat{B}'$ и $\widehat{C}'$ также квадратные и при этом либо $\widehat{A}'$ и $\widehat{B}'$, либо $\widehat{C}'$ и $\widehat{D}'$ коммутируют, то нахождение определителя упрощается

$$\det\begin{pmatrix} \widehat{A}' & \widehat{B}' \\ \widehat{C}' & \widehat{D}' \end{pmatrix} = \begin{cases} |\widehat{A}'\widehat{D}' - \widehat{C}'\widehat{B}'|, \text{ при } \widehat{A}'\widehat{B}' = \widehat{B}'\widehat{A}', \\ |\widehat{D}'\widehat{A}' - \widehat{B}'\widehat{C}'|, \text{ при } \widehat{C}'\widehat{D}' = \widehat{D}'\widehat{C}'. \end{cases} \tag{28}$$

Таким образом, полагая $\widehat{A}' = -\lambda\widehat{E}_N$, $\widehat{B}' = \widehat{E}_N$, $\widehat{C}' = \widehat{Q}$, $\widehat{D}' = -(\lambda+\mu)\widehat{E}_N$ и принимая во внимание, что $\widehat{A}'\widehat{B}' = \widehat{B}'\widehat{A}'$, из (28) получаем

$$\det\left(\widehat{A}_\lambda\right) = -\det\left(\widehat{Q} - \varkappa\widehat{E}_N\right) = -\det\left(\widehat{Q}_\varkappa\right),$$

где $\varkappa = \lambda(\lambda + \mu)$. Отсюда следует, что собственные значения матрицы $\widehat{A}$ связаны с собственными значениями, $\varkappa_i,\ i = \overline{1, N}$, матрицы $\widehat{Q}$ посредством уравнения

$$\lambda_i^{\mp} = -\frac{\mu}{2} \mp \sqrt{\frac{\mu^2}{4} + \varkappa_i}. \tag{29}$$

Вид полученной зависимости между собственными значениями матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{Q}$ позволяет сделать ряд выводов о характере устойчивости состояния равновесия. Действительно,

- если $\forall \varkappa_i : \operatorname{Im}(\varkappa_i) = 0$, то есть все $\varkappa_i$ вещественные и $\forall \varkappa_i : \varkappa_i < 0$, то $\forall \varkappa_i : \operatorname{Re}(\lambda_i^{\mp}) < 0$ и состояние равновесия является устойчивым узлом или фокусом;
- если $\forall \varkappa_i : \operatorname{Im}(\varkappa_i) = 0$ и $\exists \varkappa_i : \varkappa_i > 0$, то соответствующие $\operatorname{Re}(\lambda_i^{+}) > 0$ (причем $\operatorname{Re}(\lambda_i^{-}) < 0$) и состояние равновесия представляет собой седло или седло-фокус;
- если $\exists \varkappa_i : \operatorname{Im}(\varkappa_i) \neq 0$, то есть хотя бы один из $\varkappa_i$ является комплексным, то состояние равновесия может быть либо седло-фокусом, либо неустойчивым или устойчивым фокусом;
- если внутри области существования состояния равновесия $\exists \varkappa_i : \varkappa_i = 0$, то имеет место транскритическая бифуркация, которая может приводить к смене типа состояния равновесия с устойчивого узла (фокуса) на седловое и наоборот;
- если $\exists \varkappa_i, \varkappa_j : \varkappa_j = \varkappa_i^*$, $\operatorname{Im}(\varkappa_i) \neq 0$ и $\operatorname{Re}(\varkappa_i) < 0$, то состояние равновесия может менять свою устойчивость за счет бифуркации Андронова–Хопфа, что, в свою очередь, может приводить к возникновению колебательного предельного цикла в окрестности этого состояния. Это имеет место при $\mu = \sqrt{-\operatorname{Im}(\varkappa_i)/\operatorname{Re}(\varkappa_i)}$, при котором реальные части соответствующих комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{i,j}^{+}$ обращаются в ноль. Заметим, что эта бифуркация в исходной энергосети отвечает бифуркации Неймарка–Сакера соответствующего синхронного режима. В результате нее в энергосети «рождается» устойчивый инвариантный тор и возникают квазипериодические колебания.

Нетрудно убедится, что в случае однородных состояний равновесия O_1^{hom} и O_2^{hom} матрица $\widehat{Q}$ имеет вид циркулянта. Собственные значения такой матрицы легко находятся по известной формуле [76, 77]

$$\varkappa_1 = -\big(2\cos(\alpha)\cos(\phi^*) + (N-1)\cos(\phi^* - \alpha)\big),$$

$$\begin{cases} \varkappa_i = -\cos(\phi^* + \alpha), \\ i = \overline{2, N}. \end{cases} \tag{30}$$

Заметим, что все $\varkappa_i$ при любых параметрах являются вещественными, то есть однородные состояния равновесия могут менять устойчивость лишь через транскритические бифуркации. Подставляя выражения (30) вместе с координатами состояний равновесия (см. (22), (23)) в (29), устанавливаем, что однородное состояние равновесия O_2^{hom} является седловым во всей области существования. При этом существует область

$$S_N^{\text{hom,st}} = \Big\{\alpha, \Delta, \mu \Big|\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2,\ -f(N, \alpha) < \Delta < f_1(N, \alpha), \mu > 0\Big\}, \tag{31}$$

в которой O_1^{hom} является устойчивым (см. рис. 4), а вне ее — седловым. Здесь кривая

$$f_1(N, \alpha) = 1 + N\cos(2\alpha)$$

отвечает как раз обращению собственного значения $\varkappa_1$ (соответственно λ_1^{+}) в ноль и транскритической бифуркации (см. выше).

Рассмотрим теперь класс неоднородных состояний равновесия $O_i^{\text{inh},J}$. В этом случае матрица $\widehat{Q}$ имеет вид упоминавшейся выше 2×2 блочной матрицы (см. (27) и соответствующий текст), где $\widehat{A}'$ — циркулянтная матрица порядка $(N - J)$ с диагональными элементами

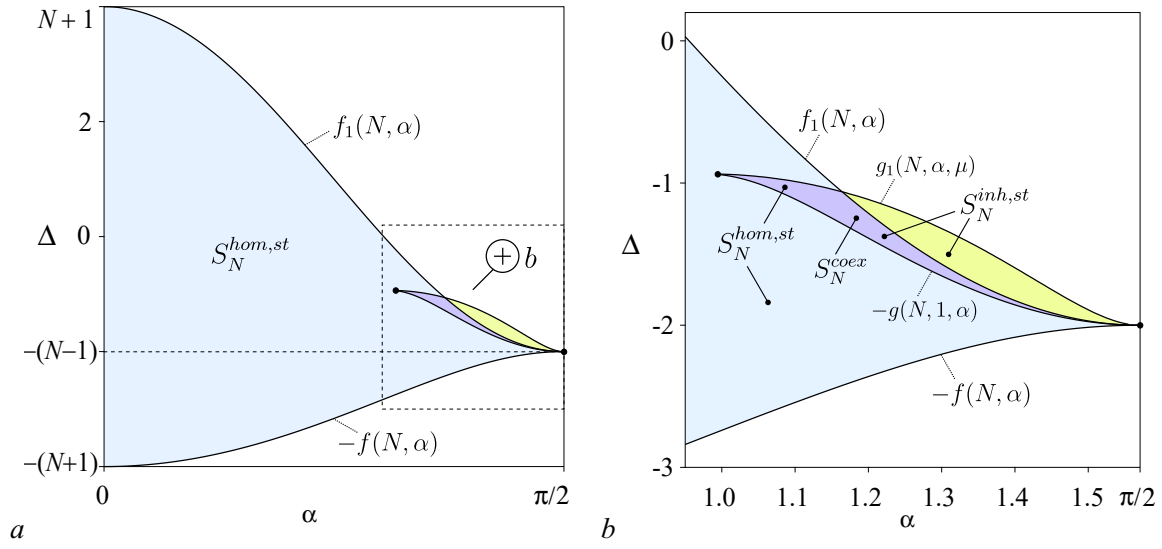


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров (α, Δ) (*a*) и ее увеличенного фрагмента (*b*) на области, отвечающие существованию только устойчивого однородного состояния равновесия $O_1^{\rm hom}$ ($S_N^{\rm hom,st}/S_N^{\rm coex}$, выделена голубым), существованию только устойчивых неоднородных состояний равновесия $O_i^{\rm inh,1}$, $i = 1, 2, 3$ ($S_N^{\rm inh,st}/S_N^{\rm coex}$, выделена желтым), сосуществованию устойчивого однородного и устойчивых неоднородных состояний равновесия ($S_N^{\rm coex}$, выделена фиолетовым). Значения параметров $N = 3,\ \mu = 3$ (цвет онлайн)

Fig. 4. Partition of the (α, Δ)-parameter plane (*a*) and its enlarged fragment (*b*) into the regions, corresponding to existence of only the stable homogeneous steady state $O_1^{\rm hom}$ ($S_N^{\rm hom,st}/S_N^{\rm coex}$, shown in blue), existence of only the stable inhomogeneous steady states $O_i^{\rm inh,1}$, $i = 1, 2, 3$ ($S_N^{\rm inh,st}/S_N^{\rm coex}$, shown in yellow), coexistence of stable homogeneous and stable inhomogeneous steady states ($S_N^{\rm coex}$, shown in purple). The parameter values: $N = 3,\ \mu = 3$ (color online)

$a' = -2\cos(\alpha)\cos(\Phi-\alpha)$ и внедиагональными элементами $c' = -\cos(\Phi-2\alpha)$, $\widehat{D}'$ – циркулянтная матрица порядка J с диагональными элементами $d' = 2\cos(\alpha)\cos(\Phi+\alpha)$ и внедиагональными элементами $b' = \cos(\Phi+2\alpha)$, $\widehat{B}'$ – матрица размера $(N-J)\times J$ с постоянными элементами b', $\widehat{C}'$ – матрица размера $J\times(N-J)$ с постоянными элементами c' и $\Phi = \Phi_J^{(1)}$. Для нахождения собственных значений $\widehat{Q}$ снова решаем уравнение $\det(\widehat{Q} - \varkappa\widehat{E}_N) = \det(\widehat{Q}_\varkappa) = 0$. Заметим, что вспомогательная матрица $Q_\varkappa$ имеет тот же вид, что и $\widehat{Q}$, если в последней сделать замены $a' \rightarrowtail a'_\varkappa = a' - \varkappa$ ($\widehat{A}' \rightarrowtail \widehat{A}'_\varkappa$) и $d' \rightarrowtail d'_\varkappa = d' - \varkappa$ ($\widehat{D}' \rightarrowtail \widehat{D}'_\varkappa$). Принимая во внимание, что

$$\det(\widehat{A}'_\varkappa) = (a'_\varkappa - c')^{N-J-1}\big[a'_\varkappa + (N-J-1)c'\big], \quad \det(\widehat{D}'_\varkappa) = (d'_\varkappa - b')^{J-1}\big[d'_\varkappa + (J-1)b'\big],$$

$$\widehat{C}'(\widehat{A}'_\varkappa)^{-1}\widehat{B}' = \left\{\frac{(N-J)b'c'}{a'_\varkappa + (N-J-1)c'}\right\}_{J\times J}, \quad \widehat{B}'(\widehat{D}'_\varkappa)^{-1}\widehat{C}' = \left\{\frac{Jb'c'}{d'_\varkappa + (J-1)b'}\right\}_{(N-J)\times(N-J)},$$

и используя (27), находим собственные значения матрицы Q

$$\varkappa_{1,2} = \frac{\varkappa_b}{2} \mp \sqrt{\frac{\varkappa_b^2}{4} - \varkappa_c}, \quad \varkappa_{2+i} = a' - c', \quad i = \overline{1, N-J-1}, \qquad \varkappa_{N-J+1+i} = d' - b', \quad i = \overline{1, J-1}, \tag{32}$$

где $\varkappa_b = a' + d' + (N-J-1)c' + (J-1)b'$, $\varkappa_c = a'd' + (N-J-1)c'd' + (J-1)b'a' - -(N-1)c'b'$. Очевидно, что $\varkappa_i, i > 2$, всегда являются вещественными. При этом $\varkappa_{1,2}$ в зависимости от параметров могут быть как вещественными, так и комплексными. Это означает, что для неоднородных состояний равновесия могут наблюдаться также и бифуркации Андронова–Хопфа. Подставляя выражения (32) вместе с координатами состояний равновесия (см. (24), (21), (25) (26))

в (29), устанавливаем, что все неоднородные состояния равновесия с $J \neq 1$ являются седловыми во всей области своего существования. При этом существует область

$$S_N^{\mathrm{inh,st}} = \Big\{\alpha, \Delta, \mu |\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2,\ -g(N,1,\alpha) < \Delta < g_1(N,\alpha,\mu), \mu > 0\Big\}, \tag{33}$$

в которой состояния равновесия $O_i^{\mathrm{inh},1},\ i = \overline{1,N}$, являются устойчивыми (см. рис. 4), а вне ее — седловыми. Здесь кривая

$$g_1(N,\alpha,\mu) = \Big\{\Delta : \varkappa_2 = \varkappa_1^*,\ \mathrm{Im}\,(\varkappa_1) \neq 0,\ \mathrm{Re}\,(\varkappa_1) < 0,\ \mathrm{Im}\,(\varkappa_1) = -\mu^2\,\mathrm{Re}\,(\varkappa_1)\Big\}$$

отвечает обращению реальных частей комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2}^+$ в ноль, то есть бифуркации Андронова–Хопфа (см. выше). При этом отмеченные состояния равновесия теряют устойчивость и в их окрестности возможно возникновение колебательных предельных циклов. Значения $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ отвечают пересечению кривых $-g(N,1,\alpha)$ и $g_1(N,\alpha,\mu)$.

Заметим, что размер области существования устойчивого однородного состояния равновесия $S_N^{\mathrm{hom,st}}$ не зависит от параметра μ, в то время как размер области существования устойчивых неоднородных состояний равновесия $S_N^{\mathrm{inh,st}}$ с ростом μ, напротив, увеличивается. Кроме того, можно показать, что при $N > 2$ и μ больше некоторого критического значения $\mu_{cr} = \mu_{cr}(N)$ существует непустая область параметров $S_N^{\mathrm{coex}} = S_N^{\mathrm{hom,st}} \cap S_N^{\mathrm{inh,st}}$, отвечающая сосуществованию в системе (17) как однородных, так и неоднородных устойчивых состояний равновесия (см. рис. 4). При этом с ростом N критическое значение μ_{cr} также растет.

2.3. Характеристики. Изучим далее характеристики устойчивых синхронных режимов. Для этого, во-первых, вычислим стационарные значения токов $I_i,\ i = \overline{1,n}$, протекающих в ветвях различных генераторов (см. выражение (П3) в Приложении). Заметим, однако, что это требует знания выражений для $\delta_i,\ i = \overline{1,n}$, но координаты соответствующих состояний равновесия системы (17) представляют собой разности $\delta_{1,i+1} = \delta_1 - \delta_{i+1},\ i = \overline{1,n-1}$. Поэтому вместо исходных токов вычислим величины $I_i' = I_i e^{-\mathrm{i}\delta_1}$, причем $I_i'/I_j' = I_i/I_j$. Таким образом, для устойчивого однородного синхронного режима, отвечающего O_1^{hom}, имеем

$$\begin{aligned} &I_1'(O_1^{\mathrm{hom}}) = E_1 Y_{1,1} - (n-1)E_2 Y_{1,2} e^{-\mathrm{i}\varphi^{\mathrm{hom}}}, \\ &\begin{cases} I_i'(O_1^{\mathrm{hom}}) = E_2 Y_{2,2} e^{-\mathrm{i}\varphi^{\mathrm{hom}}} - E_1 Y_{1,2} - (n-2)E_2 Y_{2,3} e^{-\mathrm{i}\varphi^{\mathrm{hom}}}, \\ i = \overline{2,n}. \end{cases} \end{aligned} \tag{34}$$

В свою очередь, для j-го устойчивого неоднородного синхронного режима, отвечающего соответственно $O_j^{\mathrm{inh},1}$, имеем

$$\begin{aligned} &I_1'(O_j^{\mathrm{inh},1}) = E_1 Y_{1,1} + E_2 Y_{1,2} e^{\mathrm{i}\left(\alpha + \Phi_1^{(1)}\right)} - (n-2)E_2 Y_{1,2} e^{\mathrm{i}\left(\alpha - \Phi_1^{(1)}\right)}, \\ &I_{j+1}'(O_j^{\mathrm{inh},1}) = -E_2 Y_{2,2} e^{\mathrm{i}\left(\alpha + \Phi_1^{(1)}\right)} - E_1 Y_{1,2} - (n-2)E_2 Y_{2,3} e^{\mathrm{i}\left(\alpha - \Phi_1^{(1)}\right)}, \\ &\begin{cases} I_i'(O_j^{\mathrm{inh},1}) = E Y_{22} e^{\mathrm{i}\left(\alpha - \Phi_1^{(1)}\right)} - E_1 Y_{1,2} + E_2 Y_{2,3} e^{\mathrm{i}\left(\alpha + \Phi_1^{(1)}\right)} - (n-2)E Y_{2,3} e^{\mathrm{i}\left(\alpha - \Phi_1^{(1)}\right)}, \\ i = \overline{2,n}, i \neq j+1. \end{cases} \end{aligned} \tag{35}$$

Из (34) следует, что

$$\frac{I_k'(O_1^{\mathrm{hom}})}{I_l'(O_1^{\mathrm{hom}})} = 1\ \big(k,l \neq 1\big), \quad \left|\frac{I_1'(O_1^{\mathrm{hom}})}{I_k'(O_1^{\mathrm{hom}})}\right| \neq 1.$$

Аналогично из (35) следует, что

$$\frac{I'_k(O_j^{\text{inh},1})}{I'_l(O_j^{\text{inh},1})} = 1 \ \big(k,l \neq \{1, j+1\}\big), \quad \left|\frac{I'_1(O_j^{\text{inh},1})}{I'_{j+1}(O_j^{\text{inh},1})}\right| \neq \left|\frac{I'_1(O_j^{\text{inh},1})}{I'_k(O_j^{\text{inh},1})}\right| \neq \left|\frac{I'_{j+1}(O_j^{\text{inh},1})}{I'_k(O_j^{\text{inh},1})}\right| \neq 1.$$

Для двух неоднородных режимов также характерно $\left|\frac{I'_{j_1+1}(O_{j_1}^{\text{inh},1})}{I'_{j_2+1}(O_{j_1}^{\text{inh},1})}\right| = \left|\frac{I'_{j_2+1}(O_{j_2}^{\text{inh},1})}{I'_{j_1+1}(O_{j_2}^{\text{inh},1})}\right| \neq 1.$ Следовательно, в однородном синхронном режиме во всех ветвях, кроме первой, текут равные токи. В неоднородных синхронных режимах ток отличается еще в одной ветви, но при этом распределения токов в двух разных неоднородных режимах симметричны друг другу.

Вычислим теперь стационарные мощности генераторов P_i, $i = \overline{1,n}$, используя выражение (П5). Для устойчивого однородного синхронного режима получим

$$\begin{gathered} P_1(O_1^{\text{hom}}) = P_{1,0} + (n-1)K_{1,2}\sin(\varphi^{\text{hom}} - \alpha), \\ \begin{cases} P_i(O_1^{\text{hom}}) = P_{2,0} - K_{1,2}\sin(\varphi^{\text{hom}} + \alpha) - (n-2)K_{2,3}\sin(\alpha_{2,3}), \\ i = \overline{2,n}, \end{cases} \end{gathered} \tag{36}$$

где $P_{1,0} = |E_1|^2|Y_{1,1}|\sin(\alpha_{1,1})$, $P_{2,0} = |E|^2|Y_{2,2}|\sin(\alpha_{2,2})$. В свою очередь, для j-го устойчивого неоднородного синхронного режима получим

$$\begin{gathered} P_1(O_j^{\text{inh},1}) = P_{1,0} + K_{1,2}\sin\left(2\alpha + \Phi_1^{(1)}\right) - (n-2)K_{1,2}\sin\left(2\alpha - \Phi_1^{(1)}\right), \\ P'_{j+1}(O_j^{\text{inh},1}) = P_{2,0} - K_{1,2}\sin\left(\Phi_1^{(1)}\right) + (n-2)K_{2,3}\sin\left(\alpha_{2,3} - 2\Phi_1^{(1)}\right), \\ \begin{cases} P'_i(O_j^{\text{inh},1}) = P_{2,0} - K_{1,2}\sin\left(\Phi_1^{(1)}\right) + \dots \\ \qquad\qquad \dots + K_{2,3}\sin\left(\alpha_{2,3} + 2\Phi_1^{(1)}\right) - (n-3)K_{2,3}\sin\left(\alpha_{2,3}\right), \\ i = \overline{2,n}, i \neq j+1. \end{cases} \end{gathered} \tag{37}$$

Следовательно, в однородном синхронном режиме все генераторы, кроме первого, выдают в сеть одинаковую мощность. В неоднородных синхронных режимах выдаваемая мощность отличается еще у одного генератора. Однако если в выражении (37) пренебречь слагаемыми с $K_{2,3}$, что делается при переходе к редуцированной эффективной сети, то получим равные мощности всех генераторов, кроме первого. В этом случае можно показать, что при параметрах из области S_N^{coex} суммарная мощность, выдаваемая генераторами в неоднородных синхронных режимах, больше таковой в однородном синхронном режиме. Таким образом, неоднородные синхронные режимы являются более оптимальными по величине генерируемой мощности по сравнению с однородным синхронным режимом.

3. Устойчивость в целом и в большом. Существование несинхронных режимов

Численное моделирование показало, что, помимо устойчивых состояний равновесия в фазовом пространстве системы (17), могут существовать и другие аттракторы, а именно колебательные и вращательные предельные циклы и хаотические аттракторы тех же типов. Они соответствуют квазисинхронным и асинхронным (аварийным) режимам работы исходной энергосети. В квазисинхронном режиме частоты генераторов колеблются около опорной (синхронной)

частоты. Мощности генераторов и потоки мощности вдоль линий передачи тоже совершают колебания относительно некоторых, в общем случае разных средних значений. В асинхронном режиме частоты генераторов колеблются относительно разных средних значений, отличных от синхронной частоты, а мощности генераторов и потоки мощности вдоль линий передачи совершают значительные колебания. Поэтому установление квазисинхронного режима может быть относительно безопасно, а перехода в асинхронный режим необходимо избегать.

На рис. 5 приведены разбиения плоскости параметров (α, Δ) на подобласти с различными комбинациями режимов системы (17) (и, соответственно, рассматриваемой энергосети) при $N = 3$ $(n = 4)$ и различных значениях μ. Устойчивые состояния равновесия существуют в области, выделенной цветом. При этом в подобластях a_s^h, a_s^i и $a_s^{h,i}$ единственными аттракторами системы (17) являются состояния равновесия: однородное O_1^{hom} в a_s^h, неоднородные $O_i^{\mathrm{inh},1}$, $i = \overline{1,N}$, в a_s^i и оба типа состояний равновесия в $a_s^{h,i}$. Таким образом, в этих подобластях с любых начальных условий в энергосети устанавливаются синхронные режимы. Однако лишь в подобласти a_s^h синхронный режим является глобально асимптотически устойчивым и, следовательно, работа энергосети здесь безопасна как в смысле статической («в малом»), так и динамической («в целом и в большом») устойчивости [20]. В подобластях a_s^i и $a_s^{h,i}$ наблюдается мультистабильность синхронных режимов, которые характеризуются разными распределения стационарных токов в ветвях генераторов. Поэтому работа энергосети в этих подобластях может быть лишь относительно безопасной, поскольку при непредвиденном переключении между синхронными режимами возможно срабатывание релейной токовой защиты линий электропередачи, что может инициировать энергоаварию. В подобластях a_{as}^h, a_{as}^i и $a_{as}^{h,i}$ в фазовом пространстве системы (17) наряду с устойчивыми состояниями равновесия сосуществуют различные вращательные аттракторы. Таким образом, в этих подобластях при определенных условиях в энергосети могут устанавливаться асинхронные режимы, что может повлечь за собой серьезную энергоаварию. В подобласти a_{qs}^h в фазовом пространстве системы (17) сосуществуют однородное состояние равновесия и различные колебательные аттракторы, а в подобласти $a_{qs,as}^h$ к ним добавляются еще и вращательные аттракторы. Эти подобласти наблюдаются при наличии, соответственно, подобластей $a_s^{h,i}$, $a_{as}^{h,i}$ и имеют с ними общие границы (см. кривую g_1), отвечающую бифуркациям Андронова–Хопфа неоднородных состояний равновесия. В результате этих бифуркаций состояния равновесия теряют свою устойчивость и в фазовом пространстве системы (17) рождается N колебательных предельных циклов. Заметим, что в энергосети этим бифуркациям отвечают бифуркации Неймарка–Сакера неоднородных синхронных режимов, в результате которых рождаются устойчивые инвариантные торы и возникают квазипериодические колебания. Вблизи бифуркационных границ амплитуды этих колебаний достаточно малы. Поэтому работа энергосети при этих параметрах в соответствующих квазисинхронных режимах может быть относительно безопасна, принимая при этом во внимание возможность переключения как между самими квазисинхронными режимами, так и в однородный синхронный режим и тем более в асинхронный режим (подобласть $a_{qs,as}^h$).

Заметим, что в энергосети при малых значениях μ подобласть глобальной устойчивости однородного синхронного режима (a_s^h) и в целом подобласти исключительного существования устойчивых синхронных режимов (a_s) имеют минимальные размеры. Подобласти же асинхронных режимов и, если таковые существуют, подобласти квазисинхронных режимов, напротив, имеют максимальные размеры. При увеличении параметра μ подобласти асинхронных режимов уменьшаются, схлопываясь к границам области существования устойчивых синхронных режимов. В свою очередь, подобласти квазисинхронных режимов деформируются и также уменьшаются за счет подъема границ, отвечающих бифуркациям Неймарка–Сакера неоднородных синхронных режимов. При достаточно больших значениях параметра μ подобласти асинхронных и квазисинхронных режимов полностью исчезают.

Иная картина наблюдается при изменении размера энергосети, то есть числа генераторов. Эволюцию разбиений плоскости параметров (α, Δ) при фиксированном $\mu = 1.3$ можно проследить

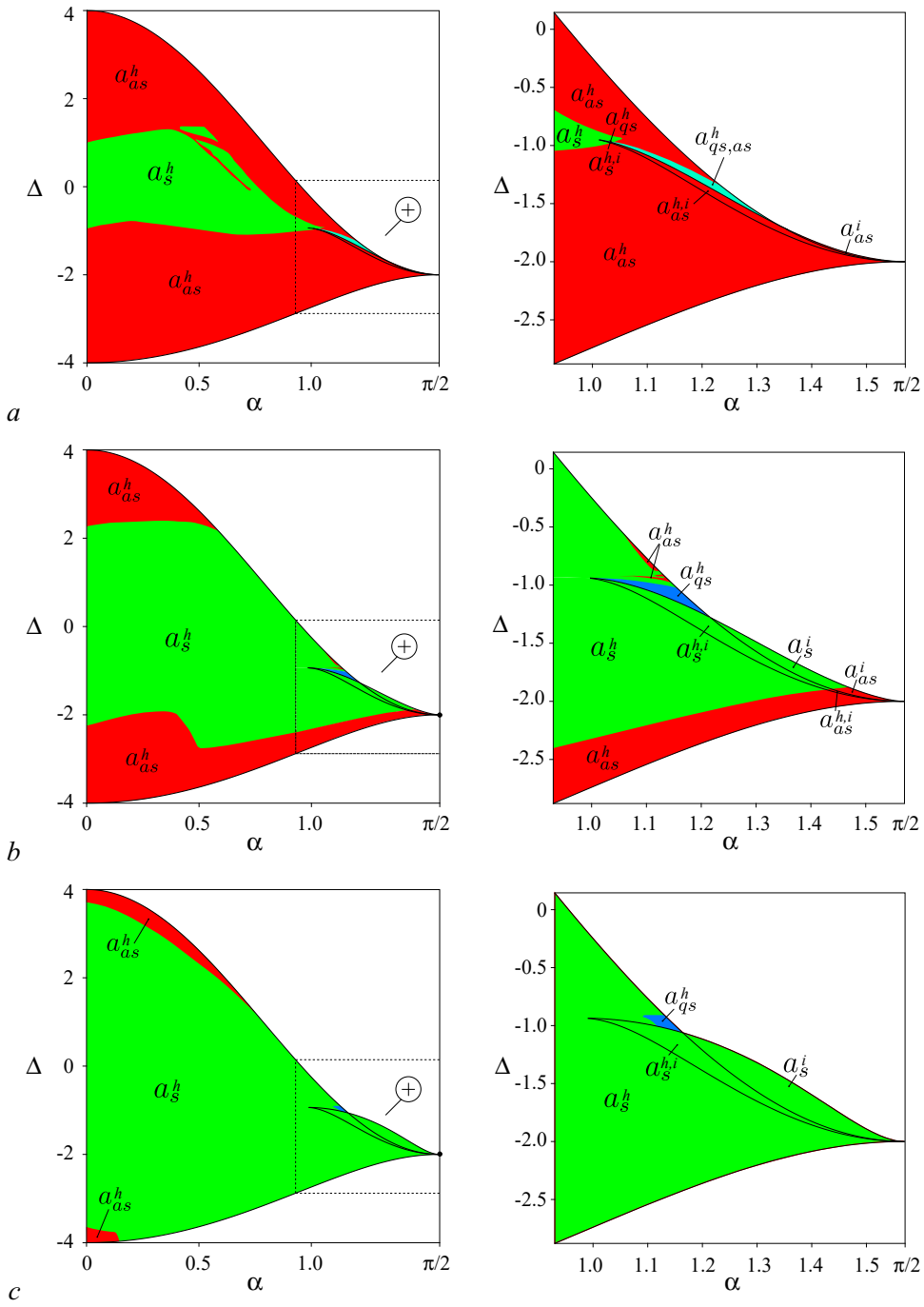


Рис. 5. Разбиение плоскости параметров (α, Δ) (слева) и его увеличенный фрагмент (справа) на подобласти с различным динамическим поведением системы (17) при $N = 3$ и $\mu = 0.5$ (*a*), $\mu = 1.3$ (*b*), $\mu = 3.0$ (*c*). Устойчивые состояния равновесия существуют в области, выделенной цветом. В подобластях a_s (выделены зеленым) состояния равновесия являются единственными аттракторами. Подобласти a_{qs} (выделены голубым), a_{as} (выделены красным) и $a_{qs,as}$ (выделены бирюзовым) отвечают также существованию колебательных аттракторов, вращательных аттракторов и тех и других одновременно (цвет онлайн)

Fig. 5. Partition of the (α, Δ)-parameter plane (left) and its enlarged fragment (right) into the subregions with different dynamical behaviour of system (17) for $N = 3$ and $\mu = 0.5$ (*a*), $\mu = 1.3$ (*b*), $\mu = 3.0$ (*c*). Stable steady states exist in the region shown in color. In subregions a_s (shown in green), the steady states are the only attractors. Subregions a_{qs} (shown in blue), a_{as} (shown in red) and $a_{qs,as}$ (shown in turquoise) correspond additionally to the existence of librational attractors, rotational attractors, and the both simultaneously (color online)

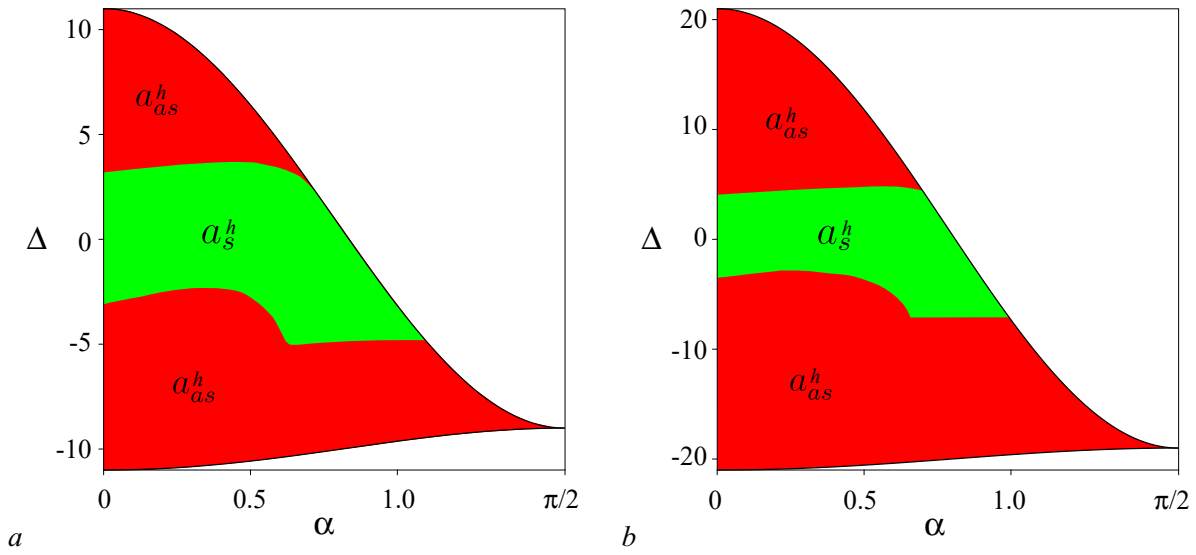


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров (α, Δ) на подобласти с различным динамическим поведением системы (17) при $\mu = 1.3$ и $N = 10$ (*a*), $N = 20$ (*b*). Устойчивые состояния равновесия существуют в области, выделенной цветом. В подобластях a_s (выделены зеленым) состояния равновесия являются единственными аттракторами. Подобласти a_{as} (выделены красным) отвечают также существованию вращательных аттракторов. Другие подобласти достаточно узкие и не выделены отдельно (цвет онлайн)

Fig. 6. Partition of the (α, Δ)-parameter plane into the regions with different dynamical behaviour of system (17) for $\mu = 1.3$ and $N = 10$ (*a*), $N = 20$ (*b*). Stable steady states exist in the region shown in color. In subregions a_s (shown in green), the steady states are the only attractors. Subregions a_{as} (shown in red) correspond additionally to the existence of rotational attractors. The other subregions are quite narrow and are not shown separately (color online)

по рис. 5, *b* и рис. 6, где такие разбиения приведены для энергосетей размером $N = 3, 10, 20$ ($n = 4, 11, 21$). Отметим, что изменение числа генераторов приводит к изменению в целом области существования синхронных режимов. Поэтому для сравнения результатов для энергосетей с разным числом генераторов уместнее использовать относительные размеры соответствующих подобластей a_s, a_{qs}, a_{as}. Нетрудно видеть, что увеличение энергосети приводит к уменьшению относительного размера как подобласти глобальной устойчивости однородного синхронного режима, так и в целом подобластей исключительного существования устойчивых синхронных режимов. Уменьшаются также относительные размеры подобластей квазисинхронных режимов. Отметим, что эти подобласти при больших N достаточно узкие и на соответствующих разбиениях отдельно не приведены. В свою очередь, подобласти асинхронных режимов с увеличением энергосети, напротив, растут.

Анализ полученных параметрических разбиений позволяет обнаружить еще один интересный эффект. Наличие активных сопротивлений у линий передачи или нагрузки ($\alpha \neq 0$) может приводить к существенному увеличению длины диапазона безопасных значений параметра Δ по сравнению со случаем чисто индуктивных сопротивлений ($\alpha = 0$). При этом увеличение это тем сильнее, чем больше размер энергосети. Сравните, например, ширины подобластей глобальной устойчивости однородного синхронного режима (a^h_s) на рис. 5, *b*, рис. 6, *a* и рис. 6, *b* при $\alpha = 0$ и, соответственно, $\alpha \approx 0.5$, $\alpha \in [0.64, 1.08]$ и $\alpha \in [0.67, 0.98]$. Так как Δ характеризует разность мощностей генераторов — хаба и периферийных узлов эффективной сети, то увеличение безопасного диапазона Δ говорит об увеличении суммарной мощности, которую можно безопасно получить в энергосети.

Полученные результаты дают основание полагать, что при неизменном устройстве передающих систем и нагрузки (параметр α) для обеспечения требуемого резерва мощности генераторов (диапазона безопасных значений Δ) демпферный коэффициент μ должен увеличиваться вместе

с размером энергосети. По всей видимости, это происходит из-за того, что нагрузка в виде постоянного сопротивления ($Re(Z^{\text{load}}) > 0$) не может достаточно быстро потреблять вырабатываемую генераторами мощность.

Заключение

В данной работе рассмотрена энергосеть из произвольного числа генераторов, работающих на общую пассивную линейную нагрузку. Для моделирования ее динамики получена эффективная сеть (effective network) с глобально связанными узлами. Установлены условия на параметры схемы замещения энергосети, позволяющие перейти к редуцированной эффективной сети с хаб-топологией (топологией «звезда»). Они обусловлены различиями в длинах линий передачи, соединяющих генераторы с нагрузкой, а также использованием продольной компенсации на одной из линий. Изучена динамика модели редуцированной эффективной сети. Показано наличие двух типов синхронных режимов, а именно однородного и неоднородного режима. Рассмотрены основные характеристики режимов, такие как мощности, выдаваемые генераторами в сеть, и распределения токов по линиям передачи. Показано, что однородный режим характеризуется равными мощностями и токами, текущими через все пути питания нагрузки, кроме первого. Неоднородный режим характеризуется равными мощностями, но разными токами, текущими через разные (наряду с первым) пути питания нагрузки. Показано наличие высокой мультистабильности неоднородных синхронных режимов. Для энергосети из четырех и более генераторов показана возможность сосуществования однородного синхронного режима и неоднородных режимов.

Получено разбиение пространства параметров модели на области, отвечающие ее различным динамическим режимам. Показано, что при некоторых параметрах в энергосети могут существовать квазисинхронные и асинхронные режимы. Квазисинхронные режимы энергосети при некоторых условиях могут быть относительно безопасными для ее работы. В частности, это имеет место вблизи бифуркаций Неймарка–Сакера, при которых неоднородные синхронные режимы теряют устойчивость, а амплитуды возникающих при этом колебаний остаются еще достаточно малыми. Асинхронные режимы отвечают аварийной ситуации, и их следует избегать. Выделены области, где синхронные режимы являются единственными аттракторами в энергосети. С другой стороны, показано, что энергосеть может одновременно с синхронными режимами иметь все отмеченные типы несинхронных режимов.

Показано, что наличие активных сопротивлений у линий передачи или нагрузки может приводить к существенному увеличению суммарной мощности, которую можно безопасно получить в энергосети, по сравнению со случаем чисто индуктивных сопротивлений. При этом увеличение это тем сильнее, чем больше размер энергосети.

Необходимо сделать два важных уточнения, касающихся системы (17) и результатов, полученных с ее помощью. При выводе системы (17) мы пренебрегали слагаемыми с коэффициентами $K_{m,j} \ll K_{1,j},\ m \neq j,\ m,j = 2,3,...,(N+1)$. Если же этого не делать и считать, что $K_{m,j}/K_{1,j} = \varepsilon \ll 1$, то в правые части уравнений (17) для y_i нужно добавить слагаемые, содержащие множители ε перед синусами и представляющие собой малую добавку. Ясно, что при достаточно малом ε полученная система и система (17) должны иметь схожую динамику. Например, установлено, что при $N = 2$ и $\varepsilon = 0.1$ обе системы имеет одинаковое количество однородных и неоднородных состояний равновесия причем с близкими областями существования. Такие же результаты могут быть получены и при больших N, но, очевидно, меньших ε. Кроме того, мы полагали, что передающие системы всех генераторов, кроме первого, имели одинаковые параметры. Это сокращало число контрольных параметров и приводило к появлению в системе (17) симметрии. Однако в силу грубости системы (17) небольшое изменение параметров одной из линий передачи должно сохранять основные результаты о количестве и типе устойчивых состояний равновесия. Мы хотим остановиться на отмеченных вопросах более подробно в следующих статьях.

Модель эффективной сети

В настоящее время при моделировании процессов в энергосетях широко применяется так называемый динамический подход, предполагающий рассмотрение энергосети как ансамбля синхронных машин, работающих в генераторном режиме (генераторов), связанных между собой посредством линий электропередач и работающих на группу нагрузок (потребителей).

В зависимости от вида нагрузок существует несколько основных моделей энергосетей [43]. Если в качестве нагрузок выступают синхронные машины, работающие в двигательном режиме, то используется так называемая модель синхронных двигателей (synchronous motor (SM) model [21,44]). Если для описания нагрузок используется дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее потребляемую узлом нагрузки мощность с мгновенной частотой напряжения в этом узле, то используется модель с сохранением физической структуры (structure-preserving (SP) model [42]). Если предполагается, что в качестве нагрузок в энергосети выступают лишь пассивные линейные цепи, характеризуемые некоторыми постоянными импедансами, то применяется позиционная модель или модель эффективной сети (effective network (EN) model [1,2,6,50]).

В рамках модели эффективной сети (МЭС) энергосеть из n_{gen} синхронных генераторов и n_{load} пассивных линейных нагрузок можно представить в виде эквивалентной схемы замещения, приведенной на рис. 7, *а*. Генераторы в ней представлены эквивалентными источниками электродвижущей силы (ЭДС) $E_i = |E_i|e^{\mathrm{i}\delta_i}$ за неизменными внутренними активно-индуктивными импедансами $Z_i^{\text{int}} = r_i^{\text{int}} + \mathrm{i}x_i^{\text{int}}$ $(x_i^{\text{int}} > 0)$, где $|E_i|$ и δ_i — амплитуда и фаза (угол) ЭДС, r_i^{int} и x_i^{int} — активное и индуктивное сопротивления, $\mathrm{i}^2 = -1$. Генераторы соединены с нагрузками, представленными постоянными импедансами Z_k^{load}, и друг с другом посредством пассивной цепи, замещающей линии передачи, трансформаторы и другие пассивные элементы, кроме нагрузок. Современные синхронные генераторы оснащены системами автоматической регулировки напряжения (возбуждения), поэтому считается, что амплитуда ЭДС $|E_i|$ каждого из генераторов постоянна, а соответствующий угол ЭДС δ_i совпадает с механическим углом ротора генератора, отсчитываемым относительно синхронной оси. Тогда в системе координат, вращающейся с частотой энергосети, уравнение движения ротора i-го генератора можно упрощенно записать в виде [1,6]

$$C_i \frac{d^2\delta_i}{dt^2} = P_{T,i} - P_{D,i} - P_i, \quad i = 1, 2, ..., n_{gen}. \tag{П1}$$

Величины, входящие в уравнение (П1), являются безразмерными и выражены в долях так называемых базисных величин, определяемых используемой системой относительных единиц [2]. Константа C_i определяет постоянную инерции вращающейся части генератора, включая турбину и ротор. Слагаемое $P_{T,i}$ характеризует механическую мощность турбины, приводящей в движение ротор. В общем случае $P_{T,i}$ зависит от частоты вращения турбины, контролируемой регулятором скорости. Однако при расчетах устойчивости действием регулятора пренебрегают в силу его инерционности и полагают мощность турбины постоянной. Слагаемое $P_{D,i} = D_i d\delta_i/dt$ характеризует эквивалентную мощность демпфирования, суммирующую влияние различных факторов демпфирования как механических (трение), так и электрических (появление асинхронной мощности), где D_i — демпферный коэффициент. Наконец, слагаемое P_i представляет собой активную мощность, выдаваемую генератором в сеть.

Комплексная полная мощность, выдаваемая i-м генератором в сеть:

$$S_i = E_i I_i^*, \tag{П2}$$

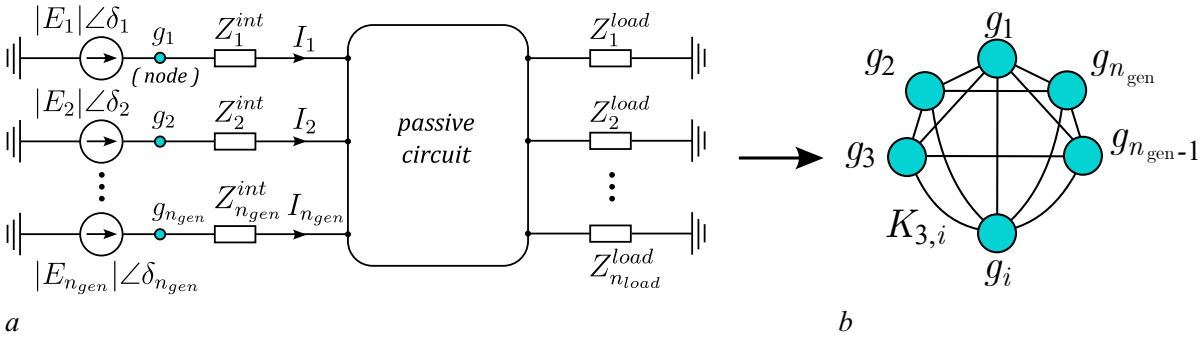


Рис. 7. Эффективная модель многомашинной энергосети из n_{gen} генераторов и n_{load} пассивных линейных нагрузок: *a* — общий вид схемы замещения энергосети; *b* — граф эффективной сети

Fig. 7. Effective network model of multi-machine power grid with n_{gen} generators and n_{load} passive linear loads: *a* — equivalent circuit of the grid; *b* — graph of the effective network

где I_i комплексный ток, протекающий в ветви генератора (обмотка генератора $\to$ узел $g_i \to$ внутренний импеданс $Z_i^{\text{int}} \to$ пассивная цепь), а * обозначает комплексное сопряжение. При этом $P_i = \operatorname{Re}(S_i)$.

Так как эквивалентные источники ЭДС, представляющие генераторы, находятся в отдельных ветвях схемы (см. рис. 7, *a*), то для определения токов в этих ветвях можно воспользоваться принципом наложения [1, 73]. Согласно этому принципу, ток I_i равен алгебраической сумме токов, вызываемых в i-й ветви каждой из ЭДС схемы в отдельности

$$I_i = E_i Y_{i,i} - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n_{gen}} E_j Y_{i,j}, \quad i = \overline{1, n_{gen}}, \tag{П3}$$

Комплексный коэффициент $Y_{i,i}$ определяет собственную эквивалентную проводимость i-й ветви схемы, рассчитанную относительно выводов i-го источника ЭДС при короткозамкнутых других источниках ЭДС. Комплексный коэффициент $Y_{i,j}$ определяет взаимную проводимость i-й ветви схемы, рассчитанную относительно выводов j-го источника ЭДС при короткозамкнутых других источниках ЭДС. Заметим, что из определений $Y_{i,i}$ и $Y_{i,j}$ следует, что они зависят от всех проводимостей и импедансов схемы замещения, и, следовательно, в общем случае $|Y_{i,i}| \neq 0$ и $|Y_{i,j}| \neq 0$ для $\forall i, j$. Кроме того, $Y_{i,j} = Y_{j,i}$.

Используя (П3) и полагая $Y_{k,l} = |Y_{k,l}|e^{-i\Psi_{k,l}}$, находим, что

$$S_i = |E_i|^2 |Y_{i,i}| e^{i\Psi_{i,i}} - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n_{gen}} |E_i E_j Y_{i,j}| e^{i(\delta_i - \delta_j + \Psi_{i,j})}. \tag{П4}$$

Из (П4) тогда следует, что

$$P_i = |E_i|^2 |Y_{i,i}| \sin(\alpha_{i,i}) + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n_{gen}} |E_i E_j Y_{i,j}| \sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{i,j}). \tag{П5}$$

где $\alpha_{k,l} = \pi/2 - \Psi_{k,l}$ так называемые дополняющие углы. Заметим, что выражение (П5) получено для однофазной цепи, однако если под $|E_k|,\ k = 1, 2, ..., n_{gen}$ понимать межфазные значения,

то P_i — мощность всех трех фаз. Но в соответственно подобранной системе относительных единиц нет необходимости делать различие между фазными и межфазными значениями [1, 6].

Учитывая выражения для величин, входящих в правую часть уравнения (П1), последнее может быть переписано в виде

$$C_i\frac{d^2\delta_i}{dt^2} = A_i - D_i\frac{d\delta_i}{dt} - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n_{gen}} K_{i,j}\sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{i,j}),$$
$$A_i = P_{T,i} - |E_i|^2|Y_{i,i}|\sin(\alpha_{i,i}), \quad K_{i,j} = K_{j,i} = |E_iE_jY_{i,j}|,\ i\neq j,\ i,j = \overline{1,n_{gen}}. \tag{П6}$$

Система (П6) представляет собой ансамбль взаимодействующих друг с другом активных узлов, каждый из которых отвечает соответствующему генератору, а наличие потребителей (нагрузок) при этом учитывается посредством эффективных параметров, а именно эффективных мощностей узлов-генераторов A_i и сил межгенераторных связей $K_{i,j}$. Чтобы найти конкретные значения эффективных параметров A_i и $K_{i,j}$, необходимо знать структуру пассивной части. Однако заметим, что каждый из этих параметров зависит от всех проводимостей и импедансов схемы замещения. Следовательно, эффективные параметры неявно зависят друг от друга и, изменяя один из них, мы должны изменить все остальные так, чтобы все они соответствовали одной и той же схеме замещения. Более того, в силу свойств $Y_{i,j}$, очевидно, что параметры $K_{i,j} \neq 0\ \forall i,j$, то есть узлы-генераторы связаны друг с другом глобально (см. рис. 7, *b*). Эти обстоятельства являются основными особенностями эффективных сетевых моделей энергосетей, которые затрудняют исследование их динамики.

Режим работы энергосети определяется взаимным поведением фаз ЭДС (соответственно, углов роторов) генераторов δ_i на соответствующем аттракторе системы (П6). Поэтому в качестве характеристики состояния энергосети часто используется некоторый набор из $(n_{gen}-1)$ линейно независимых относительных углов $\delta_{i,j} = \delta_i - \delta_j,\ i\neq j$. В зависимости от характера изменения $\delta_{i,j}$ выделяют три основных режима работы энергосети.

- Если все $\delta_{i,j} = \mathrm{const}_{i,j}$, то в энергосети имеет место синхронный режим. При этом все генераторы энергосети имеют постоянные и идентичные частоты, а мощности генераторов и распределение потоков мощности по линиям передачи являются стационарными. Это нормальный и безопасный режим работы энергосети.
- Если все $\delta_{i,j}(t)$ совершают колебания во времени такие, что размах колебаний

$$|\max(\delta_{i,j}) - \min(\delta_{i,j})| \leqslant 2\pi,$$

  то в энергосети имеет место квазисинхронный режим. В этом режиме частоты генераторов колеблются около некоторого идентичного значения и, соответственно, мощности генераторов и потоки мощности вдоль линий передачи также совершают колебания относительно некоторых, в общем случае неидентичных значений. Этот режим не является нормальным режимом работы энергосети, но в некоторых случаях может быть относительно безопасным. Действительно, если размах колебаний $\delta_{i,j}$ достаточно мал по сравнению с 2π, то в этом случае частоты и мощности генераторов, потоки мощности вдоль линий передачи будут также изменяться в достаточно узких пределах.
- Если хотя бы один из относительных углов $\delta_{i,j}(t)$ постоянно проворачивается на 2π (или -2π), то в энергосети имеет место асинхронный режим. В этом режиме частоты генераторов колеблются относительно разных средних значений, а мощности некоторых генераторов и потоки мощности вдоль некоторых линий передачи совершают значительные колебания. Поэтому такой режим является аварийным.

Список литературы

1. *Жданов П. С.* Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979. 456 с.
2. *Веников В. А.* Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Высшая школа, 1985. 536 с.
3. *Идельчик В. И.* Электрические системы и сети. М.: Энергоатомиздат, 1989. 592 с.
4. *Kundur P., Balu N. J., Lauby M. G.* Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill Education, 1994. 1176 p.
5. *Sauer P., Pai A.* Power System Dynamics and Stability. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1998. 357 p.
6. *Anderson P. M., Fouad A. A.* Power System Control and Stability. NJ: IEEE, Piscataway, 2003. 672 p.
7. *Horowitz S. H., Phadke A. G., Henville C. F.* Power System Relaying. New York: John Wiley & Sons, 2008. 528 p.
8. *Machowski J., Bialek J., Bumby D.* Power System Dynamics: Stability and Control. New York: John Wiley & Sons, 2008. 629 p.
9. *Grainger J. J., Stevenson W. D.* Power System Analysis. New York: McGraw-Hill Education, 2016. 787 p.
10. *Park R. H.* Two-reaction theory of synchronous machines: Generalized method of analysis // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1929. Vol. 48, no. 3. P. 716–730. DOI: 10.1109/T-AIEE.1929.5055275.
11. *Горев А. А.* Переходные процессы синхронной машины. М.: Госэнергоиздат, 1950. 553 с.
12. *Wiatros-Motyka M.* Global Electricity Review 2023. New York: Ember, 2023. 163 p.
13. *Dobson I., Carreras B. A., Lynch V. E., Newman D. E.* Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization // Chaos. 2007. Vol. 17, no. 2. P. 026103. DOI: 10.1063/1.2737822.
14. *Schäfer B., Witthaut D., Timme M., Latora V.* Dynamically induced cascading failures in power grids // Nat. Commun. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 1975. DOI: 10.1038/s41467-018-04287-5.
15. *Bialek J. W.* Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003 // IEEE Lausanne Power Tech, Lausanne, Switzerland, 2007. P. 51–56. DOI: 10.1109/PCT.2007.4538291.
16. *Li C., Sun Y., Chen X.* Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006 // In 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007), 2007. P. 939–944.
17. *Vleuten E., Lagendijk V.* Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance // Energy Policy. 2010. Vol. 38, no. 4. P. 2053–2062. DOI: 10.1016/j.enpol.2009.11.030.
18. *Veloza O. P., Santamaria F.* Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes // Electr. J. 2016. Vol. 29, no. 7. P. 42–49. DOI: 10.1016/j.tej.2016.08.006.
19. *Shao Y., Tang T., Yi J., Wang A.* Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31 // AEPS. 2016. Vol. 40, no. 23. P. 9–14. DOI: 10.7500/AEPS20160412004.
20. *Gajduk A., Todorovski M., Kocarev L.* Stability of power grids: An overview // The European Physical Journal Special Topics. 2014. Vol. 223, no. 12. P. 2387–2409. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02212-1.
21. *Filatrella G., Nielsen A. H., Pedersen N. F.* Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model // The European Physical Journal B. 2008. Vol. 61, no. 4. P. 485–491. DOI: 10.18500/0869-6632-00312810.1140/epjb/e2008-00098-8.
22. *Nitzbon J., Schultz P., Heitzig J., Kurths J., Hellmann F.* Deciphering the imprint of topology on nonlinear dynamical network stability // New J. Phys. 2017. Vol. 19, no. 3. P. 033029. DOI: 10.1088/1367-2630/aa6321.

23. *Kim H., Lee S. H., Davidsen J., Son S.* Multistability and variations in basin of attraction in power-grid systems // New J. Phys. 2018. Vol. 20, no. 11. P. 113006. DOI: 10.1088/1367-2630/aae8eb.
24. *Hellmann F., Schultz P., Jaros P., Levchenko R., Kapitaniak T., Kurths J., Maistrenko Y.* Network-induced multistability through lossy coupling and exotic solitary states // Nat. Commun. 2020. Vol. 11, no. 1. DOI: 10.1038/s41467-020-14417-7.
25. *Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I.* A new scenario for Braess's paradox in power grids // Chaos. 2022. Vol. 32, no. 11. P 113116. DOI: 10.1063/5.0093980.
26. *Gupta P. C., Singh P. P.* Chaos, multistability and coexisting behaviours in small-scale grid: Impact of electromagnetic power, random wind energy, periodic load and additive white Gaussian noise // Pramana. 2023. Vol. 97, no. 3. DOI: 10.1007/s12043-022-02478-w.
27. *Korsak A. J.* On the Question of uniqueness of stable load-flow solutions // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1972. Vol. 91, no. 3. P. 1093–1100. DOI: 10.1109/TPAS.1972.293463.
28. *Casazza J. A.* Blackouts: Is the risk increasing? // Electrical World. 1998. Vol. 212, no. 4. P. 62–64.
29. *Janssens N., Kamagate A.* Loop flows in a ring AC power system // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2003. Vol. 25, no. 8. P. 591–597. DOI: 10.1016/S0142-0615(03)00017-6.
30. *Coletta T., Delabays R., Adagideli I., Jacquod P.* Topologically protected loop flows in high voltage AC power grids // New Journal of Physics. 2016. Vol. 18, no. 10. P. 103042. DOI: 10.1088/1367-2630/18/10/103042.
31. *Delabays R., Coletta T., Jacquod P.* Multistability of phase-locking and topological winding numbers in locally coupled Kuramoto models on single-loop networks // Journal of Mathematical Physics. 2016. Vol. 57, no. 3. P. 032701. DOI: 10.1063/1.4943296.
32. *Manik D., Timme M., Witthaut D.* Cycle flows and multistability in oscillatory networks // Chaos. 2017. Vol. 27, no. 8. P. 083123. DOI: 10.1063/1.4994177.
33. *Delabays R., Jafarpour S., Bullo F.* Multistability and anomalies in oscillator models of lossy power grids // Nat. Commun. 2022. Vol. 13, no. 1. P. 5238. DOI: 10.1038/s41467-022-32931-8.
34. *Venkatasubramanian V., Schattler H., Zaborszky J.* Voltage dynamics: study of a generator with voltage control, transmission, and matched MW load // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. Vol. 37, no. 11. P. 1717–1733.
35. *Nguyen H. D., Turitsyn K.* Voltage multistability and pulse emergency control for distribution system with power flow reversal // IEEE Transactions on Smart Grid. 2014. Vol. 6, no. 6. P. 2985–2996.
36. *Balestra C., Kaiser F., Manik D., Witthaut D.* Multistability in lossy power grids and oscillator networks // Chaos. 2019. Vol. 29, no. 12. P. 123119. DOI: 10.1063/1.5122739.
37. *Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I.* Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid // Chaos. 2023. Vol. 33, no. 10. P 103129. DOI: 10.1063/5.0165779.
38. *Kwatny H., Pasrija A., Bahar L.* Static bifurcations in electric power networks: Loss of steady-state stability and voltage collapse // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1986. Vol. 33, no. 10. P. 981–991. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085856.
39. *Ayasun S., Nwankpa C. O., Kwatny H. G.* Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2004. Vol. 51, no. 8. P. 1525–1538. DOI: 10.1109/TCSI.2004.832741.
40. *Thümler M., Zhang X., Timme M.* Absence of pure voltage instabilities in the third-order model of power grid dynamics // Chaos. 2022. Vol. 32, no. 4. P. 043105. DOI: 10.1063/5.0080284.
41. *Калентионок Е. В.* Устойчивость электроэнергетических систем. Минск: Технoперспектива, 2008. 375 с.
42. *Bergen A. R., Hill D. J.* A structure preserving model for power system stability analysis //

IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1981. Vol. PAS-100, no. 1. P. 25–35. DOI: 10.1109/TPAS.1981.316883.
43. *Nishikawa T., Motter A. E.* Comparative analysis of existing models for power grid synchronization // New J. Phys. 2015. Vol. 17, no. 1. P. 015012. DOI: 10.1088/1367-2630/17/1/015012.
44. *Grzybowski J. M. V., Macau E. E. N., Yoneyama T.* Power-grids as complex networks: Emerging investigations into robustness and stability // In: Edelman M., Macau E., Sanjuan M. (eds) Chaotic, Fractional, and Complex Dynamics: New Insights and Perspectives. Understanding Complex Systems. Cham: Springer, 2019. P. 287–315. DOI: 10.1007/978-3-319-68109-2_14.
45. *Kogler R., Plietzsch A., Schultz P., Hellmann F.* Normal form for grid-forming power grid actors // PRX Energy. 2022. Vol. 1, no. 1. P. 013008.
46. *Rohden M., Sorge A., Timme M., Witthaut D.* Self-organized synchronization in decentralized power grids // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109, no. 6. P. 064101.
47. *Witthaut D., Timme M.* Braess‘s paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage // New J. Phys. 2012. Vol. 14, no. 8. P. 083036.
48. *Fortuna L., Frasca M., Sarra-Fiore A.* A network of oscillators emulating the Italian high-voltage power grid // International Journal of Modern Physics B. 2012. Vol. 26, no. 25. P. 1246011. DOI: 10.1142/S0217979212460113.
49. *Lozano S., Buzna L., Diaz-Guilera A.* Role of network topology in the synchronization of power systems // The European Physical Journal B. 2012. Vol. 85, no. 7. P. 231. DOI: 10.1140/epjb/e2012-30209-9.
50. *Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T.* Spontaneous synchrony in power-grid networks // Nature Physics. 2013. Vol. 9. P. 191–197.
51. *Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I.* Dynamics and stability of two power grids with hub cluster topologies // Cybernetics and physics. 2019. Vol. 8, no. 1. P. 29–99. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-1-29-33.
52. *Halekotte L., Feudel U.* Minimal fatal shocks in multistable complex networks // Scientific Reports. 2020. Vol. 10, no. 1. P. 11783.
53. *Аринушкин П. А., Анищенко В.С.* Анализ синхронных режимов работы цепочки связанных осцилляторов энергосетей // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 3. С. 62–77. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-62-77.
54. *Аринушкин П. А., Анищенко В.С.* Влияние выходной мощности генераторов на частотные характеристики энергосети в кольцевой топологии // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27, № 6. С. 25–38. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-6-25-38.
55. *Храменков В. А., Дмитричев А. С., Некоркин В. И.* Пороговая устойчивость синхронного режима энергосети с топологией хаб-кластера // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28, № 2. С. 120–139. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139.
56. *Arinushkin, P. A., Vadivasova T. E.* Nonlinear damping effects in a simplified power grid model based on coupled Kuramoto-like oscillators with inertia // Chaos Solitons and Fractals. 2021. Vol. 152, iss. 3. P. 111343. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111343.
57. *Witthaut D., Timme M.* Nonlocal failures in complex supply networks by single link additions // The European Physical Journal B. 2013. Vol. 86, no. 9. P. 377. DOI: 10.1140/epjb/e2013-40469-4.
58. *Schafer B., Pesch T., Manik D., Gollenstede J., Lin G., Beck H.-P., Witthaut D., Timme M.* Understanding Braess’ paradox in power grids // Nat. Commun. 2022. Vol. 13, no. 1. P. 5396. DOI: 10.1038/s41467-022-32917-6.
59. *Witthaut D., Hellmann F., Kurths J., Kettemann S.* Collective nonlinear dynamics and self-organization in decentralized power grids // Rev. Mod. Phys. 2022. Vol. 94, no. 1. P. 015005. DOI: 10.1103/RevModPhys.94.015005.
60. *Dörfler F., Bullo F.* On the critical coupling for Kuramoto oscillators // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2011. Vol. 10, no. 3. P. 1070–1099. DOI: 10.1137/10081530X.

61. *Dörfler F., Bullo F.* Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators // SIAM Journal on Control and Optimization. 2012. Vol. 50, no. 3. P. 1616–1642. DOI: 10.1137/110851584.
62. *Dörfler F., Chertkov M., Bullo F.* Synchronization in complex oscillator networks and smart grids // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2013. Vol. 110, no. 6. P 2005–2010. DOI: 10.1073/pnas.1212134110.
63. *Khramenkov V. A., Dmitrichev A. S., Nekorkin V. I.* Partial stability criterion for a heterogeneous power grid with hub structures // Chaos, Solitons and Fractals. 2021. Vol. 152, iss. 6. P. 111373. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111373.
64. *Molnar F., Nishikawa T., Motter A. E.* Asymmetry underlies stability in power grids // Nat. Commun. 2021. Vol. 12, no. 1. P. 1457. DOI: 10.48550/arXiv.2103.10952.
65. *Menck P. J., Heitzig J., Marwan N., Kurths J.* How basin stability complements the linear-stability paradigm // Nat. Phys. 2013. Vol. 9, no. 2. P 89–92. DOI: 10.1038/nphys2516.
66. *Menck P. J., Heitzig J., Kurths J., Schellnhuber J. H.* How dead ends undermine power grid stability // Nat. Commun. 2014. Vol. 5, no. 1. P. 3969.
67. *Hellmann F., Schultz P., Grabow C., Heitzig J.* Survivability of deterministic dynamical systems // Sci. Rep. 2016. Vol. 6, no. 1. P. 29654. DOI: 10.1038/srep29654.
68. *Klinshov V. V., Nekorkin V. I., Kurths J.* Stability threshold approach for complex dynamical systems // New J. Phys. 2015. Vol. 18, no. 1. P. 013004. DOI: 10.1088/1367-2630/18/1/013004.
69. *Mitra C., Kittel T., Choudhary A., Kurths J., Donner R. V.* Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks // New J. Phys. 2017. Vol. 19, no. 10. P. 103004. DOI: 10.1088/1367-2630/aa7fab.
70. *Kim H., Lee M. J., Lee S. H., Son S.-W.* On structural and dynamical factors determining the integrated basin instability of power-grid nodes // Chaos. 2019. Vol. 29, no. 10. P. 103132. DOI: 10.1063/1.5115532.
71. *Kim H.* How modular structure determines operational resilience of power grids // New J. Phys. 2019. Vol. 23, no. 12. P. 129501. DOI: 10.48550/arXiv.2104.09338.
72. *Klinshov V. V., Kirillov S. Yu., Kurths J., Nekorkin V. I.* Interval stability for complex systems // New J. Phys. 2018. Vol. 20, no. 4. P. 043040. DOI: 10.1088/1367-2630/aab5e6.
73. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1996. 587 с.
74. *Zhang X., Rehtanz C., Pal B. C.* Flexible AC transmission systems: modelling and control. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. 546 p.
75. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
76. *Gray R. M.* Toeplitz and circulant matrices: a review // Foundations and Trends in Communications and Information Theory. 2006. Vol. 2, no. 3. P 155–239. DOI: 10.1561/0100000006.
77. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

References

1. Zhdanov PS. Stability Issues for Electrical Systems. M.: Energy; 1979. 456 p. (in Russian).
2. Venikov VA. Transient electromechanical processes in electrical systems. M.: Vysshaya shkola; 1985. 536 p. (in Russian).
3. Idelchik VI. Electrical systems and networks. M.: Energoatomizdat; 1989. 592 p. (in Russian).
4. Kundur P, Balu NJ, Lauby MG. Power System Stability and Control. New York: McGraw-Hill Education; 1994. 1176 p.
5. Sauer P, Pai A. Power System Dynamics and Stability. Prentice-Hall: Englewood Cliffs; 1998. 357 p.
6. Anderson PM, Fouad AA. Power System Control and Stability. NJ: IEEE, Piscataway; 2003. 672 p.
7. Horowitz SH, Phadke AG, Henville CF. Power System Relaying. New York: John Wiley & Sons; 2008. 528 p.

8. Machowski J, Bialek J, Bumby D. Power System Dynamics: Stability and Control. New York: John Wiley & Sons; 2008. 629 p.
9. Grainger JJ., Stevenson WD. Power System Analysis. New York: McGraw-Hill Education; 2016. 787 p.
10. Park RH. Two-reaction theory of synchronous machines: Generalized method of analysis – part I. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. 1929;48(3):716–730. DOI: 10.1109/T-AIEE.1929.5055275.
11. Gorev AA. Transient processes of a synchronous machine. M.: Gosenergoizdat; 1950. 553 p. (in Russian).
12. Wiatros-Motyka M. Global Electricity Review 2023. New York: Ember; 2023. 163 p.
13. Dobson I, Carreras BA, Lynch VE, Newman DE. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. Chaos. 2007;17(2):026103. DOI: 10.1063/1.2737822.
14. Schafer B, Witthaut D, Timme M, Latora V. Dynamically induced cascading failures in power grids. Nat. Commun. 2018;9(1):1975.
15. Bialek JW. Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003. IEEE Lausanne Power Tech, Lausanne, Switzerland, 2007. P. 51–56. DOI: 10.1109/PCT.2007.4538291.
16. Li C, Sun Y, Chen X. Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006. In 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007). 2007. P. 939–944.
17. Vleuten E, Lagendijk V. Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance. Energy Policy. 2010;38(4):2053–2062. DOI: 10.1016/j.enpol.2009.11.030.
18. Veloza OP, Santamaria F. Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes. Electr. J. 2016;29(7):42–49. DOI: 10.1016/j.tej.2016.08.006.
19. Shao Y, Tang T, Yi J, Wang A. Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31. AEPS. 2016;40(23):9–14. DOI: 10.7500/AEPS20160412004.
20. Gajduk A, Todorovski M, Kocarev L Stability of power grids: An overview. The European Physical Journal Special Topics. 2014;223(12):2387–2409. DOI: 10.1140/epjst/e2014-02212-1.
21. Filatrella G, Nielsen AH, Pedersen NF. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model. The European Physical Journal B. 2008;61(4):485–491. DOI: 10.1140/epjb/e2008-00098-8.
22. Nitzbon J, Schultz P, Heitzig J, Kurths J, Hellmann F. Deciphering the imprint of topology on nonlinear dynamical network stability. New J. Phys. 2017;19(3):033029. DOI: 10.1088/1367-2630/aa6321.
23. Kim H, Lee SH, Davidsen J, Son S. Multistability and variations in basin of attraction in power-grid systems. New J. Phys. 2018;20(11):113006. DOI: 10.1088/1367-2630/aae8eb.
24. Hellmann F, Schultz P, Jaros P, Levchenko R., Kapitaniak T., Kurths J., Maistrenko Y Network-induced multistability through lossy coupling and exotic solitary states. Nat. Commun. 2020;11(1). DOI: 10.1038/s41467-020-14417-7.
25. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. A new scenario for Braess's paradox in power grids. Chaos. 2022;32(11):113116. DOI: 10.1063/5.0093980.
26. Gupta PC, Singh PP. Chaos, multistability and coexisting behaviours in small-scale grid: impact of electromagnetic power, random wind energy, periodic load and additive white Gaussian noise. Pramana. 2022;97(1). DOI: 10.1007/s12043-022-02478-w.
27. Korsak AJ. On the Question of uniqueness of stable load-flow solutions. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1972;91(3):1093–1100. DOI: 10.1109/TPAS.1972.293463.
28. Casazza JA. Blackouts: Is the Risk Increasing? Electrical World. 1998;212(4):62–64.
29. Janssens N, Kamagate A. Loop flows in a ring AC power system. International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2003;25(8):591–597. DOI: 10.1016/S0142-0615(03)00017-6.

30. Coletta T, Delabays R, Adagideli I, Jacquod P. Topologically protected loop flows in high voltage AC power grids. New Journal of Physics. 2016;18(10):103042. DOI: 10.1088/1367-2630/18/10/103042.
31. Delabays R, Coletta T, Jacquod P. Multistability of phase-locking and topological winding numbers in locally coupled Kuramoto models on single-loop networks. Journal of Mathematical Physics. 2016;57(3):032701. DOI: 10.1063/1.4943296.
32. Manik D, Timme M, Witthaut D. Cycle flows and multistability in oscillatory networks. Chaos. 2017;27(8):083123. DOI: 10.1063/1.4994177.
33. Delabays R, Jafarpour S, Bullo F. Multistability and anomalies in oscillator models of lossy power grids. Nat. Commun. 2022;13(1):5238. DOI: 10.1038/s41467-022-32931-8.
34. Venkatasubramanian V, Schattler H, Zaborszky J. Voltage dynamics: study of a generator with voltage control, transmission, and matched MW load. IEEE Transactions on Automatic Control. 1992;37(11):1717–1733.
35. Nguyen HD, Turitsyn K. Voltage multistability and pulse emergency control for distribution system with power flow reversal. IEEE Transactions on Smart Grid. 2014;6(6):2985–2996.
36. Balestra C, Kaiser F, Manik D, Witthaut D. Multistability in lossy power grids and oscillator networks. Chaos. 2019;29(12):123119. DOI: 10.1063/1.5122739.
37. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Bistability of operating modes and their switching in a three-machine power grid. Chaos. 2023;33(10):103129. DOI: 10.1063/5.0165779.
38. Kwatny H, Pasrija A, Bahar L. Static bifurcations in electric power networks: Loss of steady-state stability and voltage collapse. IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1986;33(10):981–991. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085856.
39. Ayasun S, Nwankpa CO, Kwatny HG Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2004;51(8):1525–1538. DOI: 10.1109/TCSI.2004.832741.
40. Thümler M, Zhang X, Timme M. Absence of pure voltage instabilities in the third-order model of power grid dynamics. Chaos. 2022;32(4):043105. DOI: 10.1063/5.0080284.
41. Kalentionok EV. Electric power systems stability. Minsk: Technoperspectiva; 2008. 375 p.
42. Bergen AR, Hill DJ. A structure preserving model for power system stability analysis. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1981;PAS-100(1):25–35. DOI: 10.1109/TPAS.1981.316883.
43. Nishikawa T, Motter AE. Comparative analysis of existing models for power grid synchronization. New J. Phys. 2015;17(1):015012. DOI: 10.1088/1367-2630/17/1/015012.
44. Grzybowski JMV, Macau EEN, Yoneyama T. Power-grids as complex networks: emerging investigations into robustness and stability. In: Edelman M., Macau E., Sanjuan M. (eds) Chaotic, Fractional, and Complex Dynamics: New Insights and Perspectives. Understanding Complex Systems. Cham: Springer, 2019. P. 287-–315. DOI: 10.1007/978-3-319-68109-2_14.
45. Kogler R, Plietzsch A, Schultz P, Hellmann F Normal form for grid-forming power grid actors. PRX Energy. 2022;1(1):013008.
46. Rohden M, Sorge A, Timme M, Witthaut D. Self-organized synchronization in decentralized power grids. Phys. Rev. Lett. 2012;109(6):064101.
47. Witthaut D, Timme M. Braess‘s paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage. New J. Phys. 2012;14(8):083036.
48. Fortuna L, Frasca M, Sarra-Fiore A. A network of oscillators emulating the Italian high-voltage power grid. International Journal of Modern Physics B. 2012;26(25):1246011. DOI: 10.1142/S0217979212460113.
49. Lozano S, Buzna L, Diaz-Guilera A. Role of network topology in the synchronization of power systems. The European Physical Journal B. 2012;85(7):231. DOI: 10.1140/epjb/e2012-30209-9.
50. Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T. Spontaneous synchrony in power-grid networks. Nature Physics. 2013;9:191–197.

51. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Dynamics and stability of two power grids with hub cluster topologies. Cybernetics and physics. 2019;8(1):29–99.
52. Halekotte L, Feudel U. Minimal fatal shocks in multistable complex networks. Scientific Reports. 2020;10(1):11783. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-1-29-33.
53. Arinushkin PA, Anishchenko VS. Analysis of synchronous modes of coupled oscillators in power grids. Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics. 2018:26(3):63–78. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-62-77.
54. Arinushkin PA, Anishchenko VS. The influence of the output power of the generators on the frequency characteristics of the grid in a ring topology. Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(6):25–38. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-6-25-38.
55. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Threshold stability of the synchronous mode in a power grid with hub cluster topology. Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(2):120–139. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-2-120-139.
56. Arinushkin PA, Vadivasova TE. Nonlinear damping effects in a simplified power grid model based on coupled Kuramoto-like oscillators with inertia. Chaos Solitons and Fractals. 2021;152(3):111343. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111343.
57. Witthaut D, Timme M. Nonlocal failures in complex supply networks by single link additions. The European Physical Journal B. 2013;86(9):377. DOI: 10.1140/epjb/e2013-40469-4.
58. Schafer B, Pesch T, Manik D, Gollenstede J., Lin G., Beck H.-P., Witthaut D., Timme M. Understanding Braess' paradox in power grids. Nat. Commun. 2022;13(1):5396. DOI: 10.1038/s41467-022-32917-6.
59. Witthaut D, Hellmann F, Kurths J, Kettemann S. Collective nonlinear dynamics and self-organization in decentralized power grids. Rev. Mod. Phys. 2022;94(1):015005. DOI: 10.1103/RevModPhys.94.015005.
60. Dörfler F, Bullo F. On the critical coupling for Kuramoto oscillators. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2011;10(3):1070–1099. DOI: 10.1137/10081530X.
61. Dörfler F, Bullo F. Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators. SIAM Journal on Control and Optimization. 2012;50(3):1616–1642. DOI: 10.1137/110851584.
62. Dörfler F, Chertkov M, Bullo F. Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2013;110(6):2005–2010. DOI: 10.1073/pnas.1212134110.
63. Khramenkov VA, Dmitrichev AS, Nekorkin VI. Partial stability criterion for a heterogeneous power grid with hub structures. Chaos, Solitons and Fractals. 2021;152(6):111373. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111373.
64. Molnar F, Nishikawa T, Motter AE. Asymmetry underlies stability in power grids. Nat. Commun. 2021;12(1):1457. DOI: 10.48550/arXiv.2103.10952.
65. Menck PJ, Heitzig J, Marwan N, Kurths J. How basin stability complements the linear-stability paradigm. Nat. Phys. 2013;9(2):89–92. DOI: 10.1038/nphys2516.
66. Menck PJ, Heitzig J, Kurths J, Schellnhuber JH. How dead ends undermine power grid stability. Nat. Commun. 2014;5(1):3969. DOI: 10.1038/ncomms4969.
67. Hellmann F, Schultz P, Grabow C, Heitzig J. Survivability of deterministic dynamical systems. Sci. Rep. 2016;6(1):29654. DOI: 10.1038/srep29654.
68. Klinshov VV, Nekorkin VI, Kurths J. Stability threshold approach for complex dynamical systems. New J. Phys. 2015;18(1):013004.
69. Mitra C, Kittel T, Choudhary A, , Kurths J, Donner RV. Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks. New J. Phys. 2017;19(10):103004. DOI: 10.1088/1367-2630/aa7fab.
70. Kim H, Lee MJ, Lee SH, Son SW. On structural and dynamical factors determining the integrated basin instability of power-grid nodes. Chaos. 2019;29(10):103132. DOI: 10.1063/1.5115532.

71. Kim H. How modular structure determines operational resilience of power grids. New J. Phys. 2019;23(12):129501. DOI: 10.48550/arXiv.2104.09338.
72. Klinshov VV, Kirillov SYu, Kurths J, Nekorkin VI. Interval stability for complex systems. New J. Phys. 2018;20(4):043040. DOI: 10.1088/1367-2630/aab5e6.
73. Bessonov LA. Theoretical foundations of electrical engineering. M.: Vysshaya shkola; 1996. 587 p. (in Russian).
74. Zhang X, Rehtanz C, Pal BC. Flexible AC transmission systems: modelling and control. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. 546 p.
75. Gantmacher FR. The theory of matrices. New York: Chelsea Publishing Company; 1959. 374 p.
76. Gray RM. Toeplitz and circulant matrices: a review. Foundations and Trends in Communications and Information Theory. 2006;2(3):155–239. DOI: 10.1561/0100000006.
77. Horn R, Johnson Ch. Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press; 1990. 369 p.

Храменков Владислав Анатольевич — родился в Муроме Владимирской области (1994). Окончил бакалавриат и магистратуру по направлению «Радиофизика» Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2018) и аспирантуру Института прикладной физики РАН по направлению «Физика и астрономия» (2022). Область научных интересов — теория колебаний, синхронные машины, энергосети.

Россия, 603950 Нижний Новгород, БОКС-120, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: hramenkov.vlad@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0001-7165-830X
AuthorID (eLibrary.Ru): 1150615

Дмитричев Алексей Сергеевич — родился в 1980 году в селе Слободское Кстовского района Горьковской области. Окончил радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (2002). Кандидат физико-математических наук (2010, ННГУ). С 2002 года работает в Институте прикладной физики РАН. Область научных интересов — нелинейная динамика, динамические сети, структурообразование, волны и пространственно-временной хаос, синхронизация. Имеет более 50 научных публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: admitry@neuron.appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0002-6142-3555
AuthorID (eLibrary.Ru): 146176

Некоркин Владимир Исаакович — родился в 1948 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1971). Член-корреспондент РАН (2022), профессор (1995), доктор физико-математических наук (1992). Профессор кафедры теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ, заведующий отделом нелинейной динамики Института прикладной физики РАН. Лауреат премии им. А. А. Андронова (2012). Область научных интересов — динамика нелинейных систем, нейродинамика, теория синхронизации, пространственно-временной хаос, структурообразование и нелинейные волны. Имеет более 350 научных публикаций в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе 5 книг.

Россия, 603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46
Институт прикладной физики РАН
E-mail: vnekorkin@appl.sci-nnov.ru
ORCID: 0000-0003-0173-587X
AuthorID (eLibrary.Ru): 2740

Новое в прикладной физике

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 621.396.96

DOI: 10.18500/0869-6632-003130
EDN: GZLVNY

Модель построения двумерных изображений источников радиосвета с использованием корреляционного приёма

М. М. Петросян, А. И. Рыжов ✉

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия
E-mail: chaos@cplire.ru, ✉mef.box@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2024, принята к публикации 17.07.2024, опубликована онлайн 9.10.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Целью* данной работы является создание модели построения двумерных изображений источников радиосвета, где приём основан на корреляционной обработке сигналов, поступающих с разнесённых в пространстве антенн. Здесь под радиосветом понимается сверхширокополосное шумоподобное микроволновое излучение. *Методы.* Для достижения этой цели в работе предлагается способ построения изображения и осуществляется его апробация при помощи компьютерного моделирования системы построения изображений. *Результаты.* Показано, как при помощи методов корреляционной обработки сигнала можно построить двумерные изображения источников радиосвета на примере компьютерного моделирования. Были получены изображения источников радиосвета, где возможно наблюдать на одном изображении два источника с разницей в уровне излучаемого сигнала 12 дБ. *Заключение.* Разработана компьютерная модель корреляционного приёмника радиосвета, позволяющая оценить влияние количества антенн на итоговое изображение, а также получать изображения нескольких источников радиосвета. Результаты проведённого компьютерного моделирования могут быть использованы для создания макета реальной системы построения изображений в радиосвете на основе корреляционной обработки.

Ключевые слова: сверхширокополосный, динамический хаос, радиосвет, корреляционный приём, изображения, моделирование.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00070).

Для цитирования: *Петросян М. М., Рыжов А. И.* Модель построения двумерных изображений источников радиосвета с использованием корреляционного приёма // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 69–81. DOI: 10.18500/0869-6632-003130. EDN: GZLVNY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Петросян М. М., Рыжов А. И., 2024*

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003130

Model of 2D-imaging system using correlation-based reception for image synthesis of radio light sources

M. M. Petrosyan, A. I. Ryzhov✉

Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: chaos@cplire.ru, ✉mef.box@gmail.com
Received 20.06.2024, accepted 17.07.2024, available online 9.10.2024, published 31.01.2025

Abstract. The *purpose* of this work is to create a model of a system for constructing 2D images of radio light sources, where reception is based on correlation processing of signals coming from receiving antennas placed apart in space. In this article radio light refers to ultrawideband noise-like microwave radiation. *Methods.* To achieve this goal, a method for constructing an image is proposed and its implementation is tested using computer modeling of an imaging system. *Results.* It is shown how, using correlation signal processing methods, it is possible to construct 2D images of radio light sources using the example of computer modeling. Images of radio light sources were obtained, where it is possible to observe in one image two sources with a difference in the level of the emitted signal of 12 dB. *Conclusion.* A computer model of a correlation-based radio light receiver has been developed, which makes it possible to evaluate the influence of the number of antennas on the final image, as well as to obtain images of several radio light sources. The results of the computer simulation can be used to create a model of a real imaging system for radio light based on correlation processing.

Keywords: ultrawideband, dynamic chaos, radio light, correlation receiver, image, modeling.

Acknowledgements. The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00070).

For citation: Petrosyan MM, Ryzhov AI. Model of 2D-imaging system using correlation-based reception for image synthesis of radio light sources. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):69–81. DOI: 10.18500/0869-6632-003130

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Различные диапазоны излучения в электромагнитном спектре давно представляют интерес с точки зрения получения изображений, предоставляющих возможность получить информацию об окружающем нас мире, которая при использовании только видимого глазом диапазона (света) была бы просто недоступна. Это справедливо как для частот выше частот видимого диапазона (ультрафиолетовое и рентгеновское излучение), так и для частот более низких (инфракрасный, терагерцевый и микроволновой диапазоны) [1]. В случае источников излучения видимого света (например, солнца) наиболее характерными и важными его чертами является некогерентность и шумоподобность, что позволяет глазу получать изображения без эффектов интерференции, проявляющихся в случае с когерентным излучением. Эти черты также можно наблюдать, например, в радиодиапазоне в радиометрии [2], где используется свет от естественных источников и исследуется космическое пространство при помощи радиотелескопов, при зондировании поверхности Земли с помощью микроволнового излучения [3] или в медицине [4].

Одни из первых исследований, где проводились параллели между микроволновыми шумоподобными колебаниями и светом, представлены в работах [5–7]. Здесь важно отметить, что длительное время подобные исследования осложнялись из-за отсутствия компактных, недорогих и эффективных источников шумоподобного широкополосного излучения в микроволновом диапазоне.

Этот диапазон практически интересен, так как длина волны излучения позволяет проникать через препятствия, непрозрачные для излучения видимого диапазона, при этом имеется возможность работать с относительно малогабаритными устройствами. Важно также отметить фактор

доступности существующих и широко распространённых технологий (например, Wi-Fi), которые могут быть использованы для создания изображений в подсветке микроволнового диапазона [8, 9].

Возвращаясь к вопросу источников шумоподобного широкополосного излучения в микроволновом диапазоне, необходимых для развития направления построения изображений по аналогии со светом, отметим, что такие устройства были разработаны в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН [10] на основе динамического хаоса, и Дмитриевым А. С. было предложено использовать эти источники по аналогии с видимым светом для получения информации об окружающей среде.

В настоящей работе речь пойдёт о способе получения изображений с использованием радиосвета [11]. Радиосвет представляет собой сверхширокополосное (СШП) шумоподобное микроволновое излучение, обладающее по аналогии со светом в видимом диапазоне свойством некогерентности. Это позволяет размещать в интересуемой области несколько источников излучения — ламп радиосвета — и по отражению их излучения от различных объектов получать информацию об окружающем пространстве.

Ранее были проведены исследования, касающиеся генерации [10] радиосвета, создания приёмного элемента [12], получения изображений объектов внутри помещения, освещённого радиосветом [13], а также использования многолучевой системы приёма на основе линзы Ротмана [14]. Эти работы были направлены на поиск решения, которое позволило бы ускорить процесс получения изображений, отойдя от пути механического сканирования, но при этом сохранив по возможности компактность и масштабируемость. Перспективным решением задачи построения изображения с использованием радиоосвещения с точки зрения скорости получения изображения и масштабируемости системы приёма является создание приёмника на основе корреляционной обработки сигнала, что было продемонстрировано для одномерного случая в работе [15].

В работе ставится задача расширить результаты, полученные в [15], и провести моделирование построения двумерных изображений ламп радиосвета при использовании корреляционного приёма с пространственным разрешением с целью оценки перспективности создания реального макета такой системы приёма.

1. Методы построения двумерного изображения

Итак, задача заключается в формировании изображений на основе приёма широкополосных сигналов, полученных от разнесенных в пространстве антенн. Ранее в работе [15] уже было показано, что при использовании корреляционных методов обработки сигналов можно получить одномерные отклики приёмной системы на источники радиосвета. В частности, было продемонстрировано, что ширина основного лепестка отклика в этом случае может быть оценена соотношением $\theta_{-3dB} \approx c/(\Delta f D)$, где c — скорость света, Δf — ширина полосы сигнала и D — расстояние между антеннами. Для ширины полосы 5 ГГц и расстояния 1 м $\theta_{-3dB} \approx 3^\circ$, что можно рассматривать как потенциально достижимое пространственное разрешение подобной системы приёма. Здесь и далее под откликом будем понимать скалярное произведение фрагментов сигналов, принятых от удалённых друг от друга антенн. Пусть две антенны расположены параллельно поверхности. Тогда отклик приёмной системы будет нести информацию о пространстве в азимутальной плоскости. На рис. 1 представлена пара таких приемников радиосвета, расположенных в трехмерном пространстве. Перемещение источника радиосвета в азимутальной плоскости по углу ϕ будет приводить к изменению разницы времени распространения сигнала от него до двух приемных антенн, что будет выражаться в изменении уровня скалярного произведения сигналов, поступающих на приемники A_1 и A_2. Если же перемещать источник по углу места θ относительно оси, соединяющей пару приемных элементов, то разница во времени распространения сигнала не будет зависеть от изменения угла θ.

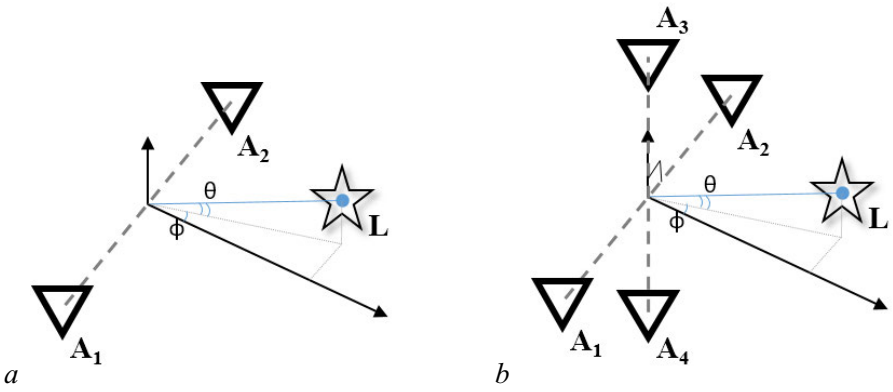


Рис. 1. Расположение приёмных элементов для случая: *a* — двух антенн; *b* — четырёх антенн

Fig. 1. Receiving antennas placement: *a* — 2 antennas; *b* — 4 antennas

Так, для схемы, представленной на рис. 1, *a*, отклик системы (взаимную корреляцию сигналов с выходов антенн) можно представить следующим образом:

$$R(\tau) = \langle s(t), s(t + \tau - (\tau_{A1}(\phi, \theta) - \tau_{A2}(\phi, \theta)))\rangle. \tag{1}$$

Для пары приёмных элементов A_1, A_2 значение $R(\tau)$ отклика будет одинаковым для любых значений θ.

Следовательно, чтобы сформировать двумерное изображение необходимо иметь минимум три антенны, расположенные не на одной линии. Для простоты рассмотрим случай, показанный на рис. 1, *b*. Здесь для пары антенн A_3 и A_4, линия соединения которых перпендикулярна линии соединения антенн A_1 и A_2, перемещение источника излучения по углу места θ будет приводить к изменению относительной задержки, что также будет сказываться и на уровне корреляции.

Следующий вопрос, который необходимо решить для задачи построения двумерного изображения — как именно комбинировать отклики, получаемые от всех пар приемных устройств, чтобы в результате можно было сформировать изображение.

На рис. 2 показаны примеры изображения двумерных откликов. Рассмотрим отклики, полученные для пар приёмных антенн A_1, A_2 и A_3, A_4. В связи с тем, что каждая пара приемников привносит информацию только для одного направления, то, как можно увидеть, при формировании изображения по двум координатам ϕ, θ получается одномерный отклик, растянутый вдоль прямой, перпендикулярной к прямой, соединяющей антенны. Пусть $R_{12}(\tau) = R_{12}(\tau(\phi, \theta)) = R_{12}(\phi, \theta)$ — отклик для антенн A_1 и A_2, а $R_{34}(\tau) = R_{34}(\tau(\phi, \theta)) = R_{34}(\phi, \theta)$ — отклик для антенн A_3 и A_4. Рассмотрим две точки на этих изображениях: одна соответствует положению источника излучения в пространстве ($R_S(\phi_S, \theta_S)$, квадрат на рис. 2), а другая — точке, где такого источника нет ($R_0(\phi_0, \theta_0)$, круг на рис. 2), причём $\theta_0 = \theta_S$. Для упрощения рассмотрим случай, когда боковые лепестки откликов равны нулю. Пусть P — мощность поступающего от источника радиосвета сигнала. Тогда

$$\begin{cases} R_{12}(\phi_S, \theta_S) = P, \\ R_{34}(\phi_S, \theta_S) = P, \\ R_{12}(\phi_0, \theta_0) = 0, \\ R_{34}(\phi_0, \theta_0) = P. \end{cases} \tag{2}$$

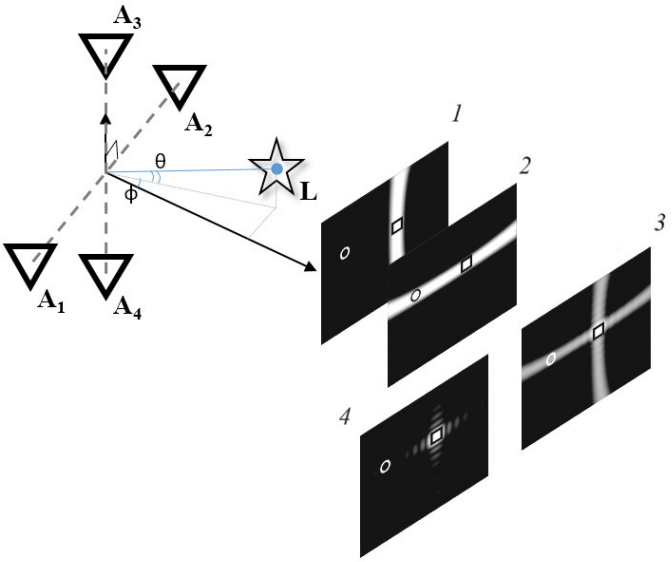


Рис. 2. Пример построения изображения на основе комбинации двумерных откликов. *1* — визуализация отклика R_{12}, *2* — визуализация отклика R_{34}, *3* — визуализация итогового отклика R как среднего арифметического для R_{12} и R_{34}, *4* — визуализация итогового отклика R как среднего геометрического для R_{12} и R_{34}

Fig. 2. An example of image building based upon combination of 2D responses. *1* — visualisation of response R_{12}, *2* — visualisation of response R_{34}, *3* — visualisation of final response R as mean for R_{12} and R_{34}, *4* — visualisation of final response R as geometric mean for R_{12} и R_{34}

Итоговый отклик может быть получен разными способами. Например, можно рассмотреть вычисление среднего значения: $R(\phi,\theta) = 1/2(R_{12}(\phi,\theta) + (R_{34}(\phi,\theta))$, или среднего геометрического: $R(\phi,\theta) = \sqrt{R_{12}(\phi,\theta)R_{34}(\phi,\theta)}$. В каждом из этих вариантов в точке, соответствующей положению источника излучения, яркость будет равняться мощности поступающего излучения $R_S(\phi_S,\theta_S) = P$, и отличие будет проявляться в точке на изображении, где источники излучения отсутствуют. В случае среднего арифметического яркость в этой точке будет $R_0(\phi_0,\theta_0) = P/2$, то есть всего на 3 дБ слабее по сравнению с точкой расположения источника излучения, вследствие чего по соответствующим направлениям динамический диапазон не будет превышать 3 дБ. Во втором случае для точки (ϕ_0,θ_0), где корреляция отсутствует на одном из изображений откликов, в результате перемножения уровень яркости в этих точках будет нулевым: $R_0(\phi_0,\theta_0) = \sqrt{R_{12}(\phi_0,\theta_0)R_{34}(\phi_0,\theta_0)} = 0$, то есть динамический диапазон системы в этом случае устремится в бесконечность. Однако в реальности динамический диапазон будет ограничиваться боковыми лепестками корреляционной функции, уровень которых будет спадать быстрее при увеличении ширины полосы частот сигнала. Стоит отметить, что на практике наличие боковых лепестков хотя и сказывается на динамическом диапазоне системы, но он всё ещё остаётся выше, чем в первом случае расчёта итогового отклика, что будет показано далее в работе.

2. Описание математической модели

Перейдем теперь к описанию модели построения двумерных изображений в радиосвете при использовании корреляционного приёма с пространственным разрешением. Ранее в работе [15] была решена задача получения одномерных откликов приёмной системы, основывающейся на корреляционной обработке сигналов, получаемых от двух слабонаправленных антенн, на источники радиосвета. Эта модель была взята за основу и доработана для моделирования трехмерной

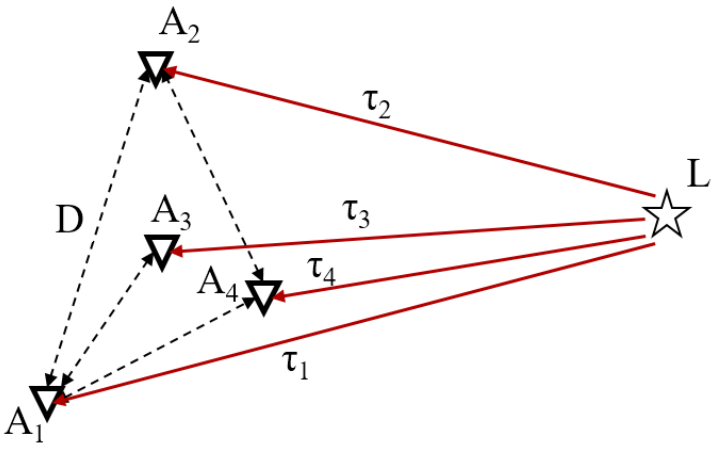


Рис. 3. Схема корреляционного приема радиосвета в трехмерном пространстве для четырёх антенн. A — антенна, L — лампа радиосвета, τ — время распространения электромагнитного излучения от лампы до приемных антенн

Fig. 3. Correlation-based reception scheme depicted in 3D space for 4 antennas. A — antenna, L — radio light lamp, τ — propagation time of electromagnetic radiation from radio light lamp to receiving antennas

конфигурации, приведенной на рис. 3. В качестве приемного устройства для моделирования использовалась преимущественно система, состоящая из четырех антенных элементов (см. рис. 3). С учётом того, как для каждой пары антенн формируется двумерный отклик, антенны необходимо устанавливать таким образом, чтобы увеличивать суммарную информацию, получаемую системой. Для системы с четырьмя антеннами выбрана конфигурация, приведенная на рис. 3: три антенны расставлены на гранях правильного треугольника со стороной, равной D, и четвертая антенна находится в его центре. Все антенны располагаются в одной плоскости.

Для исследования влияния числа приемных антенн на двумерный отклик системы корреляционного приёма в условиях работы, в том числе с несколькими источниками излучения, а также для оценки перспективности создания реального макета такой системы приёма была разработана модель в программной среде MATLAB, которая реализует схему, представленную на рис. 3. Модель работает следующим образом. В программе в качестве входных параметров задаются трехмерные координаты ламп радиосвета и принимающих антенн коррелятора. Осуществляется расчет задержек в распространении сигнала от точек расположения ламп радиосвета до принимающих антенн.

В качестве хаотического сигнала лампы радиосвета используется генератор случайных чисел с нормальным распределением. Мы можем так сделать в модели для упрощения расчётов, так как для использующейся далее обработки сигнала в первую очередь важна непрерывность и равномерность спектра сигнала, а также ширина полосы. Для формирования сигнала в нужной полосе применяется полосовой фильтр, далее сигнал нормируется по мощности (рис. 4). Полоса сигнала выбрана 2 ГГц, так как ранее были разработаны лампы радиосвета с такой полосой на основе сверхширокополосного генератора хаотического сигнала [16], и в дальнейшем они будут использоваться для испытаний будущего макета системы приёма.

Далее таким образом формируются широкополосные сигналы ламп радиосвета (S_{LN}, N — число ламп) в заданной полосе частот для каждой лампы, копии которых суммируются для всех приемных антенн S_{AM} (M — число антенн) с задержками, соответствующими их относительным положениям

$$S_{AM}(t) = \sum_{n=1}^{N} S_{Ln}(t - \tau_{AMLn}). \tag{3}$$

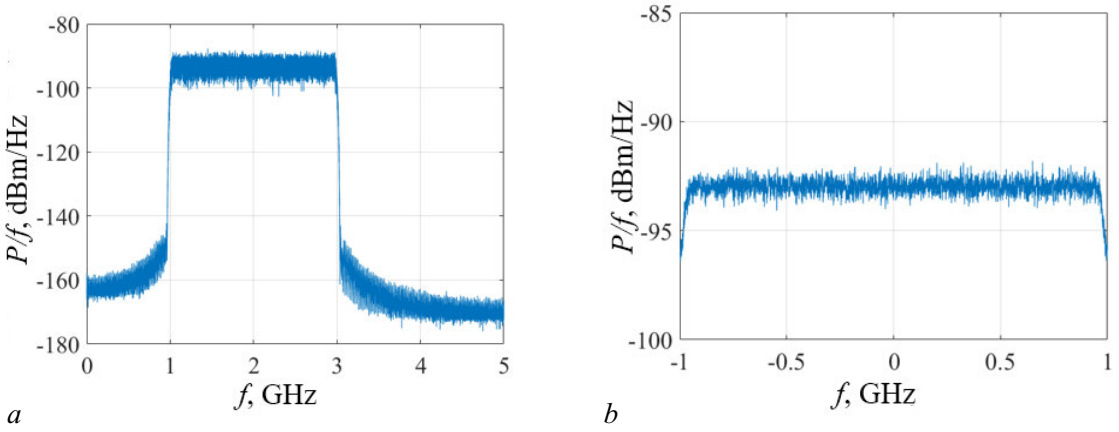


Рис. 4. Спектральная плотность мощности лампы радиосвета с полосой 2 ГГц: *a* — на несущей частоте; *b* — при переносе частоты в область видеочастот

Fig. 4. Power spectrum density of radio light lamp with bandwidth 2 GHz: *a* — passband; *b* — baseband

Для вычисления задержек при распространении сигнала до антенн в точке приёма пространство разбивается на воксели (объёмный пиксель, представляет собой куб). Затем рассчитываются значения времени распространения сигнала от всех центров вокселей заданной области пространства до всех приемных антенн.

Далее производится корреляция сигналов для всех пар антенн для каждого заданного вокселя пространства. Для оптимизации процесса расчёта задержек между сигналами, равных $\tau(\phi, \theta)$, и для осуществления перемножения с усреднением применяется теорема Парсеваля и свойство Фурье-преобразования:

$$s(t + \tau) \leftrightarrow S(\omega)e^{-k\omega\tau}. \tag{4}$$

Для дискретного случая расчёта корреляции сигналов, поступающих от пары антенн i и j, для заданной точки пространства имеем следующее значение отклика:

$$R_{ij}(\phi, \theta) = 1/K \sum_{k=0}^{K-1} S_{Ai}(k)\underline{S_{Ai}(k + \tau_{\phi,\theta})} = 1/K^2 \sum_{n=0}^{K-1} S_{Ai}(n)\underline{S_{Ai}(n)}e^{i2\pi n\tau_{\phi,\theta}/K}, \tag{5}$$

где K — число отсчетов, для которых производится корреляция, или уровень накопления сигнала, n — номер отсчета в Фурье-пространстве. Это действие производится для всех пар антенн. Наконец, мы можем рассчитать итоговую интенсивность точки на изображении, перемножив и возведя в степень, обратно пропорциональную числу уникальных пар антенн H, полученные отклики:

$$I(\phi, \theta) = \Big(\prod_{i,j} R_{ij}(\phi, \theta)\Big)^{1/H}. \tag{6}$$

3. Результаты моделирования

В соответствии с математической моделью, представленной в предыдущем разделе, было проведено моделирование системы построения изображения, где расположение лампы радиосвета и приёмных антенн показано на рис. 3. Основные параметры модели следующие: ширина полосы источника излучения равна 2 ГГц, средняя длина волны излучения 15 см, длина стороны

правильного треугольника при расположении антенн, согласно рис. 3, $D = 1.5$ м, накопление сигнала $K = 10^5$. Расстояние между антенной источника излучения и плоскостью приемной системы равнялось 100 м. Значения углов ϕ, θ менялись в диапазоне $[-50^\circ, 50^\circ]$ для каждого с шагом 0.25°.

Сначала рассмотрим, как выглядят всевозможные изображения при использовании различных пар антенн для схемы, приведённой на рис. 3. На рис. 5 приведены изображения для рассматриваемых пар антенн, сверху рисунка указаны номера антенн, образующих пару, и они соответствуют номерам на схеме, приведённой на рис. 3.

Всего здесь приведено 4 антенны, следовательно, число всевозможных неупорядоченных пар среди них $C_2^4 = 6$. Источник излучения располагался в точке с координатами. Корреляция сигналов, принимаемых антеннами, и интенсивность на изображении рассчитывалась согласно формулам (5) и (6) соответственно, и затем нормировалась, после чего разным значениям ставился в соответствие различный цвет согласно шкале, приведённой на изображениях.

Далее изучим, как влияет различное число антенн в приёмнике на итоговое изображение. Для случая наличия одной или двух приёмных антенн, они располагались напротив источника радиосвета; в случае трёх антенн — они располагались так же, как антенны A_1, A_2 и A_4 на рис. 3, а четыре антенны соответствуют конфигурации на рис. 3. Изображения, полученные в результате проведённого компьютерного моделирования, представлены на рис. 6.

Здесь можно наблюдать, что для случая двух антенн (рис. 6, *а*) не хватает информации для определения местоположения источника излучения. Когда в систему приёма была добавлена ещё одна антенна, то уже стало возможно определять, где находится лампа радиосвета, однако на изображении присутствуют ярко выраженные артефакты, которые могут серьёзно сказаться на результате для случая работы с несколькими источниками излучения. Наконец, для случая

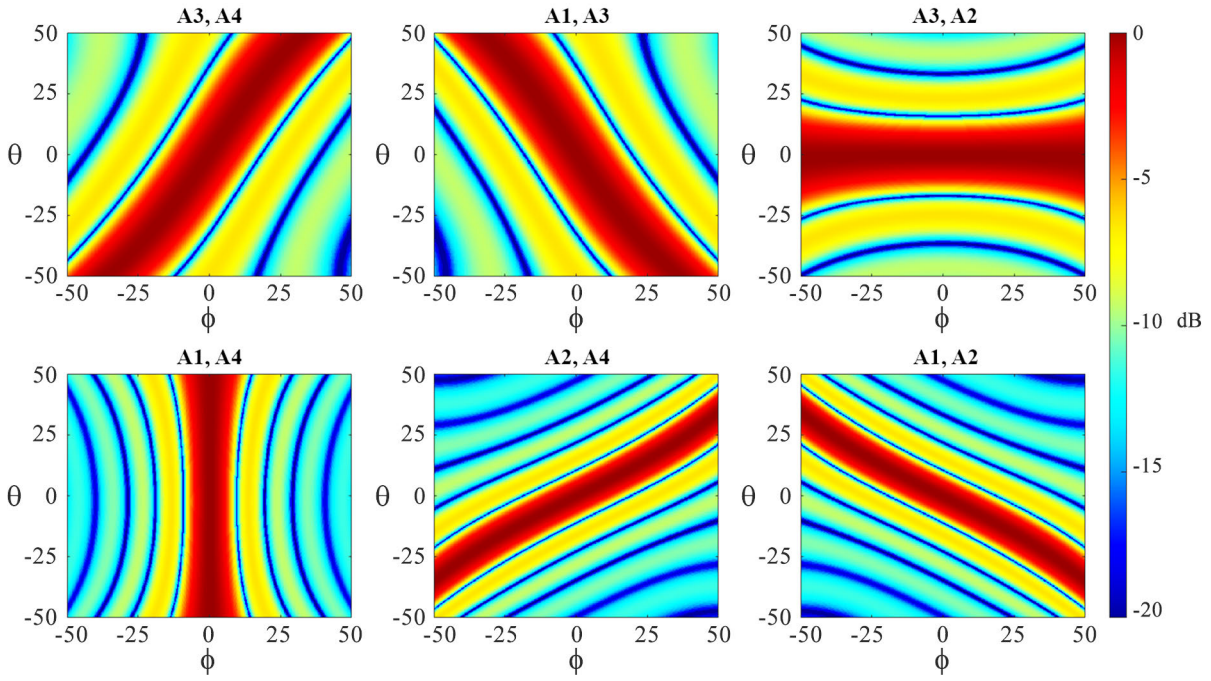


Рис. 5. Изображения, полученные для всевозможных различных пар антенн. Номера антенн соответствуют схеме, приведённой на рис. 3 (цвет онлайн)

Fig. 5. Images that were obtained for all the possible different antenna pairs. Antenna numbers correspond to the numbers shown in fig. 3 (color online)

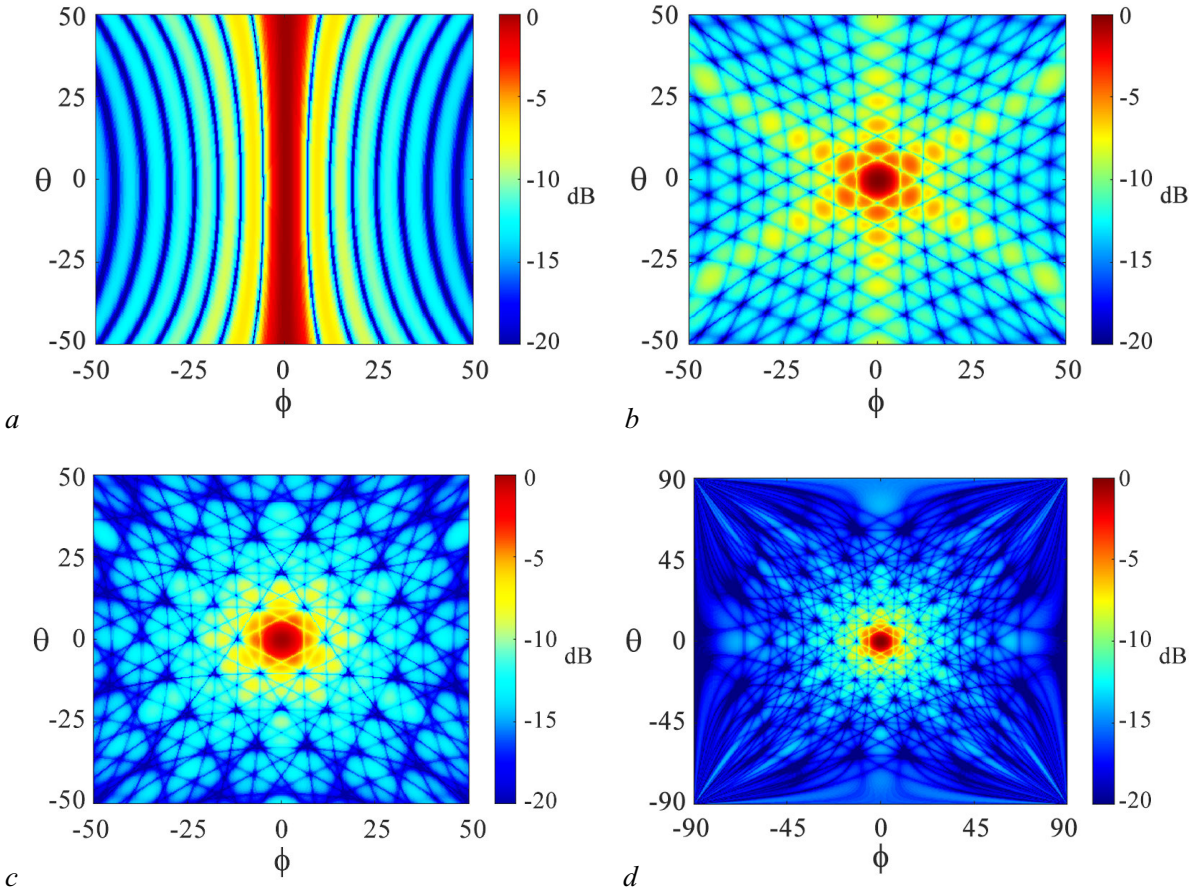


Рис. 6. Отклик корреляционного приемника радиосвета при использовании: *a* — двух антенн; *b* — трех антенн; *c* — четырех антенн; *d* — четырех антенн для расширенной области с углами ϕ, θ в диапазоне $[-90°, 90°]$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Response of correlation-based radio light receiver while using: *a* — 2 antennas; *b* — 3 antennas; *c* — 4 antennas; *b* — 4 antennas and the scanning area for ϕ, θ was increased to $[-90°, 90°]$ (color online)

четырёх антенн мы можем наблюдать значительно более чистое изображение с минимумом эффектов, вызванных наличием боковых лепестков в автокорреляционной функции (рис. 6, *c*). Для наглядности на рис. 6, *d* приведено изображение также для конфигурации с четырьмя антеннами, однако здесь область сканирования для углов ϕ, θ была увеличена до $[-90°, 90°]$ для каждого направления.

Из представленных результатов видно, что увеличение числа приемных антенн уменьшает шумы в системе за счёт понижения уровня боковых лепестков в результирующем отклике. Однако с практической точки зрения важно минимизировать число антенн при создании реальной системы. Поэтому на основе полученных результатов моделирования было принято решение в дальнейшем работать с четырьмя приёмными антеннами.

Следующим шагом была работа с двумя источниками радиосвета, для чего было проведено соответствующее моделирование. Приёмные антенны и лампы радиосвета в модельном эксперименте располагались в соответствии с рис. 3, однако здесь источники излучения расположены в точках с координатами $(-25°, 0°)$ и $(0°, 25°)$. В этом эксперименте ставилась задача определить, при какой максимальной разнице в уровне излучения ламп радиосвета на изображении можно будет наблюдать два источника излучения. Для этого мощность одного из источников радиосвета оставалась постоянной, а мощность другого изменялась. Результаты приведены на рис. 7.

По этим изображениям видно, что второй источник излучения можно наблюдать вплоть до уровня ослабления сигнала на 8 дБ, тогда как при ослаблении на 12 дБ сигнал становится неразличим с «отблесками» соседнего источника излучения.

Понижение уровня боковых лепестков для итогового значения корреляционной функции будет способствовать увеличению эффективного динамического диапазона системы. Этого можно добиться, например, за счёт добавления весовых коэффициентов в частотной области изображения. Согласно теореме Виннера–Хинчина между корреляционной функцией и полосой частот сигнала есть взаимно-однозначное соответствие в виде преобразования Фурье. По этой причине можно добиться изменения корреляционной функции, если менять форму сигнала в частотной области [16].

В качестве примера такой функции была взята оконная функция Кайзера [17] для изменения весовых коэффициентов в частотной области. Её применение позволяет понизить уровень боковых лепестков корреляционной функции за счёт расширения основного лепестка. На рис. 8 приведены изображения, полученные после дополнительной обработки с её применением. В результате произведенного преобразования видно, что основные лепестки стали шире, но при этом боковые лепестки снизились настолько, что вторую лампу радиосвета можно обнаружить даже при понижении её излучаемой мощности на 12 дБ относительно первой (рис. 7, *d* и рис. 8, *d*).

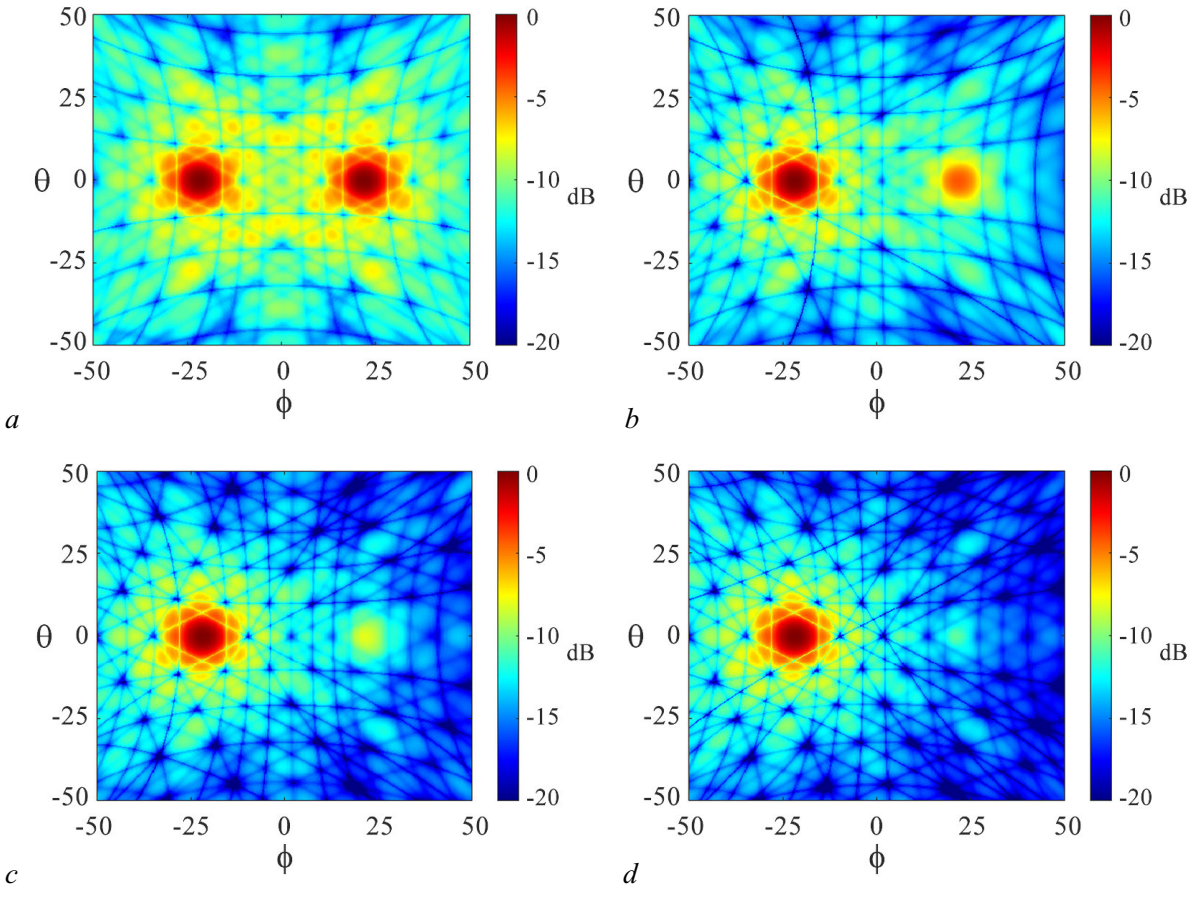


Рис. 7. Отклик приёмной системы на наличие двух ламп радиосвета при ослаблении сигнала правой лампы относительно левой на: *a* — 0 дБ; *b* — 4 дБ; *c* — 8 дБ; *d* — 12 дБ (цвет онлайн)

Fig. 7. Response of correlation-based radio light receiver to the presence of two radio light lamps where one of them was attenuated relatively to the other by: *a* — 2 dB; *b* — 4 dB; *c* — 8 dB; *b* — 12 dB (color online)

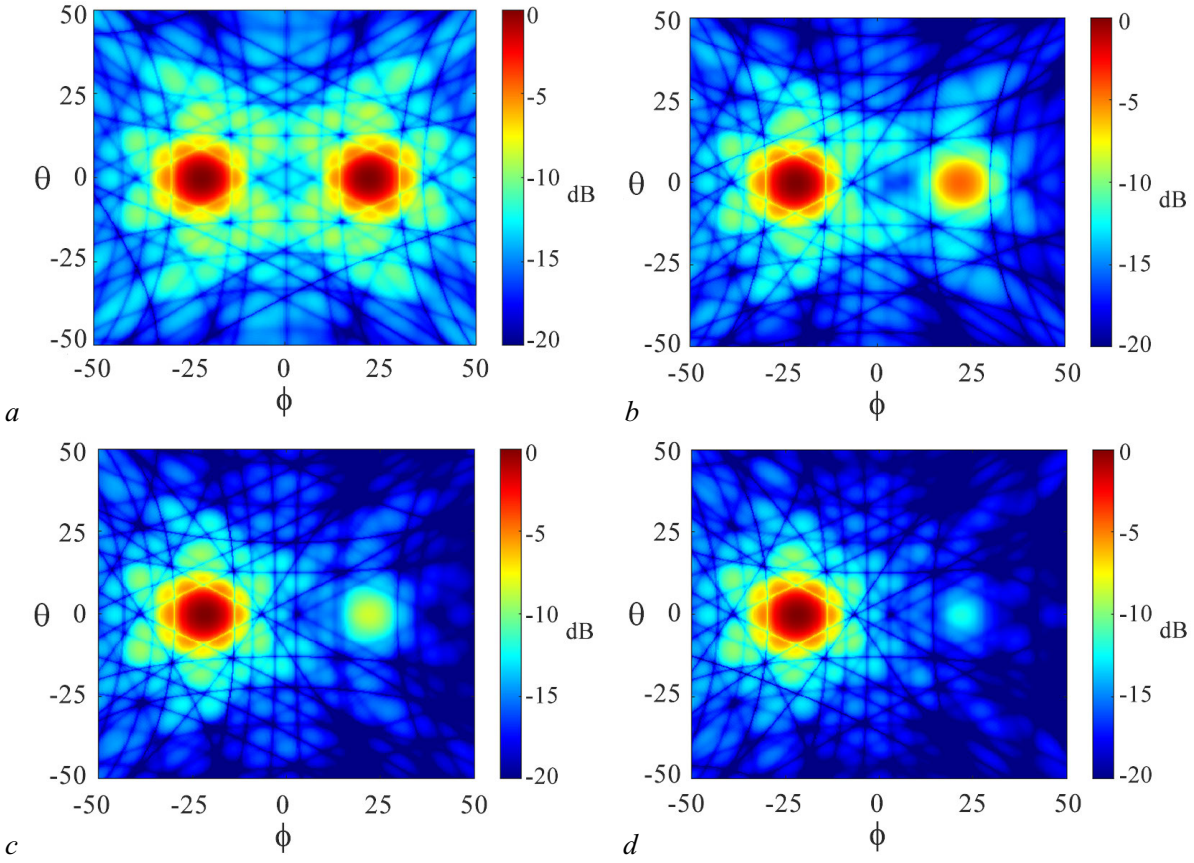


Рис. 8. Отклик приёмной системы после применения оконной функции Кайзера на наличие двух ламп радиосвета при ослаблении одной из ламп относительно другой на: *a* — 0 дБ; *b* — 4 дБ; *c* — 8 дБ; *d* — 12 дБ (цвет онлайн)

Fig. 8. Response of correlation-based radio light receiver after the Kaiser window function was applied to the presence of two radio light lamps where one of them was attenuated relatively to the other by: *a* — 2 dB; *b* — 4 dB; *c* — 8 dB; *b* — 12 dB (color online)

Заключение

Рассмотрена проблема синтеза двумерных изображений источников радиосвета, в основе чего лежит корреляционная обработка сигналов, поступающих с разнесённых в пространстве антенн. В работе представлен метод построения изображений источников сверхширокополосного микроволнового излучения, а также предложена математическая модель для синтеза изображений на основе корреляционной обработки. В результате проведенного моделирования показано, что для работы системы построения изображений достаточно иметь четыре антенны, а также были получены изображения источников радиосвета. Продемонстрирована возможность наблюдения на одном изображении двух источников радиосвета с разницей в уровне излучаемого сигнала 12 дБ. В целом полученные результаты могут быть использованы для создания реального макета такой системы приёма и позволяют сделать вывод о его перспективности.

Список литературы

1. *Спиридонов О. П.* Свет. Физика. Информация. Жизнь. М.: Ленанд, 2014. 218 с.
2. *Шутко А. М.* СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. М.: Наука, 1986. 190 с.
3. *Шарков Е. А.* Радиотепловое дистанционное зондирование Земли: физические основы. Т. 1. М.: ИКИ РАН, 2014. 544 с.

4. *Гуляев Ю. В.* Физические поля и излучения человека: Новые неинвазивные методы медицинской диагностики. М.: РБОФ «Знание» им. Вавилова, 2009. 28 с.
5. *Polivka J., Fiala P., Machac J. Медведева Т. М.* Microwave noise field behaves like white light // Progress in Electromagnetics Research. 2011. Vol. 111. P. 311–330. DOI: 10.2528/PIER10041304.
6. *Polivka J.* Microwave radiometry and applications // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1995. Vol. 16. P. 1593–1672. DOI: 10.1007/BF02274819.
7. *Polivka J.* Microwave noise radiators // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1997. Vol. 18. P. 2403–2410. DOI: 10.1007/BF02678400.
8. *Pallaprolu A., Korany B., Mostofi Y.* Analysis of Keller cones for RF imaging // 2023 IEEE Radar Conference (RadarConf23). San Antonio, TX, USA, 2023. P. 1–6. DOI: 10.1109/RadarConf 2351548.2023.10149785.
9. *Korany B., Karanam C. R., Mostofi Y.* Adaptive near-field imaging with robotic arrays // P2018 IEEE 10th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM). Sheffield, UK, 08-11 July 2018. N.-Y.: IEEE, 2018. P. 134. DOI: 10.1109/SAM.2018.8448565.
10. *Дмитриев А. С., Ефремова Е. В.* Источники радиоосвещения на основе сверхширокополосных микрогенераторов хаотических колебаний // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 24. С. 49–57. DOI: 10.21883/pjtf.2016.24.44078.16439.
11. *Dmitriev A. S., Efremova E. V., Ryzhov A. I., Petrosyan M. M., Itskov V. V.* Artificial radio lighting with sources of microwave dynamic chaos // Chaos. 2021. Vol. 31, № 6. 063135. DOI: 10.1063/5.0053504.
12. *Гуляев Ю. В., Дмитриев А. С., Ицков В. В., Петросян М. М., Рыжов А. И., Уваров А. В.* Ячейка приемника радиосвета // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63, № 9. С. 947–952. DOI: 10.1134/S0033849418090085.
13. *Дмитриев А. С., Ицков В. В., Петросян М. М., Попов М. Г., Рыжов А. И.* Искусственное радиоосвещение в закрытом пространстве // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64, № 9. С. 916–925. DOI: 10.1134/S0033849419080047.
14. *Дмитриев А. С., Петросян М. М., Рыжов А. И.* Экспериментальная модель многолучевого устройства для наблюдения в радиосвете // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47, № 12. С. 38–41. DOI: 10.21883/PJTF.2021.12.51066.18762.
15. *Petrosyan M. M., Ryzhov A. I.* Correlation-based reception method of radio light with spatial resolution and its implementation // Journal of Communications Technology and Electronics. 2023. Vol. 68, № 9. P. 1015–1023. DOI: 10.1134/S106422692309022X.
16. *Романюк Ю. А.* Основы обработки сигналов: Учеб. пособие. М.: МФТИ, 1989. 92 с.
17. *Kaizer J. F.* Nonrecursive digital filter design using the I0-Sinh Window function // Proceedings of the 1974 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'74), San Francisco, Calif, USA, 1974. P. 20–23.

References

1. Spiridonov OP. Light. Physics. Information. Life. M.: Lenand; 2014. 218 p. (in Russian).
2. Shutko AM. UHF-Radiometry of Water and Soil Surfaces. M.: Nauka; 1986. 190 p. (in Russian).
3. Sharkov EA. Radiothermal Remote Sensing of the Earth: Physical Foundations. Vol. 1. M.: IKI RAS; 2014. 544 p. (in Russian).
4. Gulyaev YuV. Physical Fields and Radiation of Human Body: New Non-Invasive Methods of Medical Diagnostics. M.: RBOF "Znanie" Im. Vavilova; 2009. 28 p.
5. Polivka J, Fiala P, Machac J. Microwave noise field behaves like white light. Progress in Electromagnetics Research. 2011;111:311–330. DOI: 10.2528/PIER10041304.
6. Polivka J. Microwave radiometry and applications. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1995;16:1593–1672. DOI: 10.1007/BF02274819.
7. Polivka J. Microwave noise radiators. International Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1997;18:2403–2410. DOI: 10.1007/BF02678400.

8. Pallaprolu A, Korany B, Mostofi Y. Analysis of Keller cones for RF imaging. 2023 IEEE Radar Conference (RadarConf23). San Antonio, TX, USA, 2023. P. 1–6. DOI: 10.1109/RadarConf 2351548.2023.10149785.
9. Korany B, Karanam CR, Mostofi Y. Adaptive near-field imaging with robotic arrays. 2018 IEEE 10th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM). Sheffield, UK, 08-11 July 2018. N.-Y.: IEEE; 2018. P. 134. DOI: 10.1109/SAM.2018.8448565.
10. Dmitriev AS, Efremova EV. Radio-frequency illumination sources based on ultrawideband microgenerators of chaotic oscillations. Tech. Phys. Lett. 2017;43(1):42–45. DOI: 10.1134/S106378501612018X.
11. Dmitriev AS, Efremova EV, Ryzhov AI, Petrosyan MM, Itskov VV. Artificial radio lighting with sources of microwave dynamic chaos. Chaos. 2021;31(6):063135. DOI: 10.1063/5.0053504.
12. Gylyaev YuV, Dmitriev AS, Itskov VV, Petrosyan MM, Ryzhov AI, Uvarov AV. Cell of radio-light receiver. Journal of Communications Technology and Electronics. 2018;63(9):1009–1014. DOI: 10.1134/S1064226918090085.
13. Dmitiev AS, Itskov VV, Petrosyan MM, Popov MG, Ryzhov AI. Artificial radio illumination in a closed space. Journal of Communications Technology and Electronics. 2019;64(9):987-996. DOI: 10.1134/S1064226919080047.
14. Dmitriev AS, Petrosyan MM, Ryzhov AI. Experimental model of a multibeam device for observation in radio light. Tech. Phys. Lett. 2021;47:597–600. DOI: 10.1134/S1063785021060201.
15. Petrosyan MM, Ryzhov AI. Correlation-based reception method of radio light with spatial resolution and its implementation. Journal of Communications Technology and Electronics. 2023;68(9):1015–1023. DOI: 10.1134/S106422692309022X.
16. Romanuk YuA. Signal Processing Foundations: Textbook. M.: MIPT; 1989. 92 p.
17. Kaizer JF. Nonrecursive digital filter design using the I0-Sinh Window function. Proceedings of the 1974 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'74), San Francisco, Calif, USA, 1974. P. 20–23.

Петросян Манвел Мгерович — родился 1993 году в Ванадзоре (Республика Армения). Окончил Ереванский государственный университет (2014). Кандидат физико-математических наук в области радиофизики (2016, МФТИ). Научный сотрудник лаборатории информационных и коммуникационных технологий на основе динамического хаоса в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: chaos@cplire.ru
ORCID: 0000-0003-2502-5987
AuthorID (eLibrary.Ru): 994954

Рыжов Антон Игоревич — родился в Москве (1986). Окончил Московский физико-технический институт (2010). Кандидат физико-математических наук в области радиофизики (2016). Старший научный сотрудник лаборатории информационных и коммуникационных технологий на основе динамического хаоса в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Имеет более 40 научных публикаций.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: mef.box@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6725-7984
AuthorID (eLibrary.Ru): 746678

Нелинейная динамика и нейронаука

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003125
EDN: BIUYWZ

Эффекты динамики шумоиндуцированных кальциевых сигналов в биофизической модели астроцитарного отростка

А. В. Ермолаева[1,2], *И. А. Кастальский*[1] ✉, *В. Б. Казанцев*[1], *С. Ю. Гордлеева*[1,2]

[1]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
[2]Центр нейроморфных вычислений, АНО «Неймарк», Нижний Новгород, Россия
E-mail: anastasia.v.ermolaeva@gmail.com, ✉kastalskiy@neuro.nnov.ru, kazantsev@neuro.nnov.ru, gordleeva@neuro.nnov.ru

Поступила в редакцию 1.03.2024, принята к публикации 21.05.2024, опубликована онлайн 24.09.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Цель* данной работы — исследование эффектов пространственно-временной динамики спонтанной кальциевой сигнализации в морфологической структуре астроцита на субклеточном уровне методами биофизического математического моделирования. *Методы.* В работе предлагается биофизическая многокомпартментная модель шумоиндуцированной кальциевой динамики в отростке астроцита. Модель описывает процесс генерации спонтанных Ca^{2+}-сигналов, индуцированных стохастической работой потенциал-зависимых Ca^{2+}-каналов на плазматической мембране астроцита. Модель позволяет исследовать динамику распространения спонтанных локальных Ca^{2+}-сигналов и механизмов формирования пространственных Ca^{2+}-паттернов в отростке астроцита. *Результаты.* Разработанная модель позволяет исследовать влияние морфологии и внутриклеточных биофизических механизмов на характеристики спонтанной шумоиндуцированной Ca^{2+}-сигнализации в отростке астроцита. Установлены области параметров, при которых модель качественно воспроизводит спонтанную Ca^{2+}-активность на субклеточном уровне, наблюдаемую в эксперименте. Исследованы характеристики шумоиндуцированных Ca^{2+}-паттернов, распространяющихся вдоль отростка, в зависимости от внутренней структуры отростка, его геометрии, равновесной концентрации молекул инозитол 1,4,5-трифосфата.

Ключевые слова: отросток астроцита, компартмент, кальциевый сигнал, инозитол 1,4,5-трифосфат, диффузия.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта № FSWR-2023-0029 (концептуальная модель астроцитарного отростка и динамика модели) и проекта РФФИ № 20-32-90151 (разработка программного обеспечения для численного моделирования и анализа данных).

Для цитирования: *Ермолаева А. В., Кастальский И. А., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю.* Эффекты динамики шумоиндуцированных кальциевых сигналов в биофизической модели астроцитарного отростка // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 82–99. DOI: 10.18500/0869-6632-003125. EDN: BIUYWZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Ермолаева А. В., Кастальский И. А., Казанцев В. Б., Гордлеева С. Ю., 2024*

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003125

Effects of the dynamics of noise-induced calcium signals in a biophysical model of the astrocytic process

A. V. Ermolaeva[1,2], *I. A. Kastalskiy*[1]✉, *V. B. Kazantsev*[1], *S. Yu. Gordleeva*[1,2]

[1]Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
[2]Neuromorphic computing center, ANO "Neymark", Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: anastasia.v.ermolaeva@gmail.com, ✉kastalskiy@neuro.nnov.ru,
kazantsev@neuro.nnov.ru, gordleeva@neuro.nnov.ru
Received 1.03.2024, accepted 21.05.2024, available online 24.09.2024, published 31.01.2025

Abstract. The *purpose* of this work is to study the effects of spatio-temporal dynamics of spontaneous calcium signaling in the morphological structure of an astrocyte at the subcellular level using biophysical mathematical modeling methods. *Methods.* This work proposes a biophysical multicompartmental model of noise-induced calcium dynamics in the astrocytic process. The model describes the process of generation of spontaneous Ca^{2+} signals induced by the stochastic activation of voltage-dependent Ca^{2+} channels on the plasma membrane of the astrocyte. The model allows us to study the dynamics of the propagation of spontaneous local Ca^{2+} signals and the mechanisms of formation of spatial Ca^{2+} patterns in the astrocytic process. *Results.* The developed model enables studying the influence of morphology and intracellular biophysical mechanisms on the characteristics of spontaneous noise-induced Ca^{2+} signaling in the astrocytic process. The parameter ranges at which the model qualitatively reproduces the spontaneous Ca^{2+} activity at the subcellular level observed in experimental studies have been specified. The characteristics of noise-induced Ca^{2+} patterns propagating along the process were investigated, depending on the internal structure of the process, its geometry, and the steady state concentration of inositol 1,4,5-triphosphate molecules.

Keywords: astrocytic process, compartment, calcium signal, inositol 1,4,5-triphosphate, diffusion.

Acknowledgements. This work was supported in part by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation according to research project No. FSWR-2023-0029 (conceptual model of astrocytic process and model dynamics) and in part by RFBR research project No. 20-32-90151 (development of software for numerical simulations and data analysis).

For citation: Ermolaeva AV, Kastalskiy IA, Kazantsev VB, Gordleeva SYu. Effects of the dynamics of noise-induced calcium signals in a biophysical model of the astrocytic process. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):82–99. DOI: 10.18500/0869-6632-003125

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Разработка и исследование биологически обоснованных нелинейных динамических моделей нейронных систем, демонстрирующих сигнализацию, соответствующую нормальному и патологическому функционированию мозга, является актуальной фундаментальной проблемой современной биофизики и нейродинамики. Астроциты, являющиеся электрически невозбудимыми клетками, демонстрируют кальциевую (Ca^{2+}) сигнализацию (кратковременные повышения внутриклеточной концентрации Ca^{2+}) спонтанно или в ответ на внешнюю стимуляцию, например, активность нейронов [1]. Астроцит имеет относительно крупного размера (10–15 мкм) тело, называемое сомой, и многочисленные ветвистые отростки. Отростки астроцита окружают нейроны, контактируя с дендритами, особенно в области синаптических контактов. Во время генерации Ca^{2+}-сигналов астроцит способен воздействовать на сигнальные функции нейронов, регулируя возбудимость нейронной мембраны и эффективность передачи сигналов между нейронами.

В настоящее время существует множество работ, посвящённых разработке и исследованию биофизических процессов генерации Ca^{2+}-сигналов в единичном астроците в рамках точечных

моделей [2–8], процессов распространения Ca^{2+}-волн в сетях астроцитов [9–11], а также механизмов воздействия астроцитов на синаптическую передачу и активность нейронных сетей [12–15]. Однако существует ряд актуальных проблем в данной области исследований. Точечные модели Ca^{2+}-сигнализации в астроците [2, 3] не учитывают процессы пространственно-временной динамики в морфологической структуре клетки, что является грубым приближением.

Недавние экспериментальные исследования Ca^{2+}-активности в астроцитах на субклеточном уровне показывают, что динамика молекулярно-клеточных каскадов Ca^{2+}-сигнализации обладает нетривиальными пространственно-временными характеристиками [16]. Было обнаружено, что Ca^{2+}-сигналы в теле клетки и отростках разной величины отличаются между собой по частоте и длительности импульсов. Спонтанные Ca^{2+}-события внутри астроцита начинаются в большинстве случаев с генерации импульсов на крайних, наиболее удалённых от сомы участках отростка клетки независимо друг от друга и затем распространяются по направлению к соме. Однако биофизические механизмы подобного распространения Ca^{2+}-импульсов в астроците до конца не ясны. В связи с этим исследование механизмов генерации и распространения Ca^{2+}-сигналов в астроците, с учётом сложного морфологического строения клетки методами биологорелевантного математического моделирования, в настоящее время является крайне востребованной задачей [1, 17]. Актуальность модельного подхода следует из возможности дать точное теоретическое обоснование таких важных нелинейных динамических процессов, методы экспериментальной проверки которых либо пока не разработаны, либо принципиально невозможны для реализации.

В новых работах при исследовании принципов сигнализации в астроцитах акцент смещается в сторону моделирования пространственной конфигурации его отростков [18, 19] на основе описания процессов диффузии основных сигнальных молекул в пространственно-распределённых морфофункциональных моделях [20–22].

В представленной работе на основе собранных эмпирических данных была предложена биофизическая компартментная модель, описывающая динамику распространения спонтанных локальных Ca^{2+}-сигналов и механизмов формирования пространственных Ca^{2+}-паттернов в отростке астроцита. Модель описывает процесс генерации спонтанных Ca^{2+}-сигналов, индуцированных стохастической работой потенциал-зависимых Ca^{2+}-каналов (VGCCs), на плазматической мембране астроцита. Исследования последних лет показали, что VGCCs участвуют в генерации кальциевых сигналов в астроцитах [23–26]. Однако существует очень мало моделей, описывающих спонтанную кальциевую динамику с учётом VGCCs, а функциональная роль VGCCs в астроцитах остаётся до конца не изученной. Разработанная модель позволяет исследовать влияние морфологии и внутриклеточных биофизических механизмов на характеристики спонтанной шумоиндуцированной кальциевой сигнализации в отростке астроцита. Установлены области параметров, при которых модель качественно воспроизводит спонтанную Ca^{2+}-активность на субклеточном уровне, наблюдаемую в эксперименте. Исследованы характеристики шумоиндуцированных Ca^{2+}-паттернов, распространяющихся вдоль отростка, в зависимости от внутренней структуры отростка, его геометрии, равновесной концентрации молекул инозитол 1,4,5-трифосфата (ИТФ).

1. Описание модели

Для исследования принципов генерации и распространения спонтанных локальных Ca^{2+}-сигналов по отростку астроцита и поиска механизмов формирования из таких сигналов пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов была рассмотрена биофизическая компартментная модель Ca^{2+}-динамики в отростке клетки. Отросток рассматривается как цепочка из 50 взаимосвязанных элементов (компартментов). Каждый компартмент в общем случае

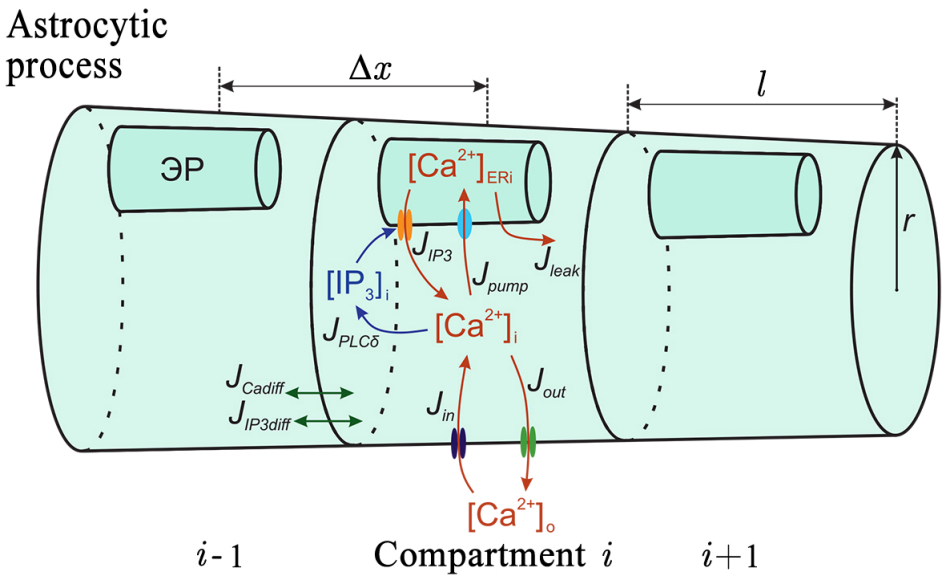


Рис. 1. Схема компартментной модели отростка астроцита и кинетика основных токов Ca^{2+} и ИТФ (цвет онлайн)

Fig. 1. Scheme of the compartmental model of the astrocytic process and the kinetics of the Ca^{2+} and IP_3 general currents (color online)

имеет форму усечённого конуса (в частном случае постоянного радиуса — цилиндрическую форму) и содержит внутриклеточное хранилище кальция, эндоплазматический ретикулум (ЭР). Соседние компартменты взаимодействуют между собой за счёт диффузии ионов Ca^{2+} и молекул ИТФ. В качестве механизма возникновения спонтанной кальциевой сигнализации в модели описывается активация биохимического каскада Ca^{2+}-индуцированного высвобождения Ca^{2+} из внутриклеточных хранилищ за счёт стохастической работы VGCCs на мембране астроцита [23]. Уравнения модели динамики внутриклеточной концентрации Ca^{2+} в астроците представляют собой аналог уравнений Ходжкина–Хаксли [27] для мембраны ЭР астроцита, определённых в терминах изменения концентрации ионов Ca^{2+} во внутриклеточном пространстве. Вход ионов Ca^{2+} индуцирует продукцию ИТФ Ca^{2+}-зависимой фосфолипазой Cδ (PLCδ). Повышение концентрации молекул ИТФ приводит к открытию ИТФ-зависимых Ca^{2+}-каналов на мембране ЭР и выходу ионов Ca^{2+} в цитозоль. Схема модели представлена на рис. 1.

Динамика внутриклеточной концентрации Ca^{2+} в каждом компартменте отростка астроцита описывается нелинейной системой третьего порядка, полученной на основе уравнений кинетики ключевых биохимических преобразований в клетке. Ca^{2+}-динамика во внутриклеточном пространстве каждого компартмента — цитозоли — определяется кальциевым обменом с ЭР, который включает в себя высвобождение кальция из ЭР в цитозольный объём посредством рецепторов ИТФ, J_{IP3}, кальциевый насос «SERCA», J_{pump}, перекачивающий кальций обратно в ЭР, и утечку кальция из ЭР, J_{leak}. Учитываются также два разнонаправленных потока кальция через плазматическую мембрану: J_{in} и J_{out}. Динамика внутриклеточной концентрации кальция в цитозоли компартмента i, $[\text{Ca}^{2+}]_i$ описывается модифицированной моделью Уллаха [3] с учётом стохастической работы кальциевых каналов [18] на мембране астроцита и диффузионной связи между компартментами и представлена следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial[\text{Ca}^{2+}]_i}{\partial t} = D_{Ca}\frac{\partial^2[\text{Ca}^{2+}]_i}{\partial x^2} + J_{IP3} - J_{\text{pump}} + J_{\text{leak}} + J_{\text{in}} - J_{\text{out}} + J_{\text{stoch}}. \qquad (1)$$

Уравнения, описывающие кальциевый обмен между цитозолью и ЭР, имеют вид

$$J_{IP3} = c_1 v_1 m_\infty^3 n_\infty^3 h_i{}^3 \left([\mathrm{Ca}^{2+}]_{ERi} - [\mathrm{Ca}^{2+}]_i \right), \tag{2}$$

$$J_{\mathrm{pump}} = v_3 \frac{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i^2}{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i^2 + k_3^2}, \tag{3}$$

$$J_{\mathrm{leak}} = c_1 v_2 \left([\mathrm{Ca}^{2+}]_{ERi} - [\mathrm{Ca}^{2+}]_i \right), \tag{4}$$

где

$$m_\infty = \frac{[IP_3]_i}{[IP_3]_i + d_1}, \tag{5}$$

$$n_\infty = \frac{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i}{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i + d_5}, \tag{6}$$

$[IP_3]_i$ — внутриклеточная концентрация ИТФ. Значения и биофизические описания параметров модели представлены в Таблице.

Концентрация Ca^{2+} в ЭР описывается следующим уравнением:

$$[\mathrm{Ca}^{2+}]_{ERi} = \frac{c_0 - [\mathrm{Ca}^{2+}]_i}{c_1}. \tag{7}$$

Переменная инактивации h_i соответствует доле рецепторов ИТФ, которые не были инактивированы кальцием, и моделируется следующим образом:

$$\frac{dh_i}{dt} = \frac{h_\infty - h_i}{\tau_h}, \tag{8}$$

где

$$h_\infty = \frac{Q_2}{Q_2 + [\mathrm{Ca}^{2+}]_i}, \tag{9}$$

$$\tau_h = \frac{1}{a_2(Q_2 + [\mathrm{Ca}^{2+}]_i)}, \tag{10}$$

$$Q_2 = d_2 \frac{[IP_3]_i + d_1}{[IP_3]_i + d_3}. \tag{11}$$

Кальциевый ток через плазматическую мембрану из внеклеточного пространства в цитозоль (J_{in}) является суммой двух токов: постоянного тока кальция через пассивные каналы на мембране (J_{pass}) и ёмкостного кальциевого тока (J_{CCE}):

$$J_{\mathrm{in}} = J_{\mathrm{pass}} + J_{CCE}. \tag{12}$$

Ток J_{CCE} зависит от концентрации ИТФ и описывается следующим образом [28]:

$$J_{CCE} = v_6 \frac{[IP_3]_i^2}{[IP_3]_i^2 + k_2^2}. \tag{13}$$

Обратный поток кальция через плазматическую мембрану описывается следующим образом [3]:

$$J_{\mathrm{out}} = k_1 [\mathrm{Ca}^{2+}]_i. \tag{14}$$

Таблица. Параметры модели

Table. Model parameters

Параметр	Определение	Значение
c_0	Общая концентрация Ca^{2+} в клетке, отнесённая к объёму цитозоли	2.0 мкмоль
c_1	Отношение объёма ЭР к объёму цитозоли	0.185
v_1	Максимальная скорость ИТФ-зависимого Ca^{2+}-индуцированного высвобождения Ca^{2+}	6.0 $с^{-1}$
v_2	Максимальная скорость утечки Ca^{2+} из ЭР	0.11 $с^{-1}$
v_3	Максимальная скорость закачки Ca^{2+} в ЭР с помощью SERCA	2.2 мкмоль $с^{-1}$
v_4	Максимальная скорость продукции ИТФ Ca^{2+}-зависимой PLCδ	0.3 мкмоль $с^{-1}$
J_{pass}	Скорость утечки Ca^{2+} через плазматическую мембрану	0.025 мкмоль $с^{-1}$
v_6	Максимальная скорость ёмкостного Ca^{2+}-тока	0.2 мкмоль $с^{-1}$
k_1	Константа скорости высвобождения Ca^{2+}	0.5 $с^{-1}$
k_2	Константа полунасыщения для зависимого от агониста поступления Ca^{2+}	1.0 мкмоль
k_3	Константа активации для SERCA	0.1 мкмоль
k_4	Константа диссоциации для Ca^{2+}-зависимой продукции ИТФ	1.1 мкмоль
d_1	Константа диссоциации для ИТФ	0.13 мкмоль
d_2	Константа диссоциации для ингибирования Ca^{2+}	1.049 мкмоль
d_3	Константа диссоциации рецептора для ИТФ	0.9434 мкмоль
d_5	Константа диссоциации для активации Ca^{2+}	0.082 мкмоль
a_2	Константа ингибирования Ca^{2+}	0.14 $мкмоль^{-1}$ $с^{-1}$
$[IP_3{}^*]$	Равновесная концентрация ИТФ	0.3 мкмоль
$1/\tau_r$	Скорость деградации ИТФ	0.14 $с^{-1}$
α	Коэффициент в интервале от 0 до 1	0.8
g	Плотность проводимости	3.5 пСм $мкм^{-2}$
V_m	Мембранный потенциал	−70 мВ
r	Радиус астроцитарного компартмента	0.05...7 мкм
l	Единичная длина компартмента	1 мкм
R	Универсальная газовая постоянная	8.31 Дж $К^{-1}$ $моль^{-1}$
T	Абсолютная температура	293 К
z_{Ca}	Заряд иона Ca^{2+}	2
F	Постоянная Фарадея	96485 Кл $моль^{-1}$
$[Ca^{2+}]_o$	Внеклеточная концентрация Ca^{2+}	10^{-5}...4 ммоль
d_{Ca}	Коэффициент диффузии ионов Ca^{2+}	0.1 $мкм^2$ $с^{-1}$
d_{IP_3}	Коэффициент диффузии молекул ИТФ	0.1 $мкм^2$ $с^{-1}$

Слагаемое, отвечающее за стохастический поток ионов кальция через потенциал-зависимые кальциевые каналы на плазматической мембране: $J_{\text{stoch}} = \sigma_{m\,\text{stoch}} d\omega_{\text{stoch}}$. Величина потока $\sigma_{m\,\text{stoch}}$ описывается уравнением [23]

$$\sigma_{m\,\text{stoch}} = -\frac{gS(V_m - E_{Ca})}{z_{Ca}FV}, \tag{15}$$

где g — плотность проводимости; S — площадь плазматической мембраны компартмента, которая определяется как площадь поверхности цилиндра с единичной высотой: $S = 2\pi rl = 2\pi r$; V_m — постоянный потенциал астроцитарной мембраны; V — объём компартмента отростка астроцита. Поскольку в рассмотренном случае компартмент представлял собой цилиндр с радиусом r и единичной высотой l, то объём $V = \pi r^2 l = \pi r^2$.

E_{Ca} определяет потенциал Нернста для кальция:

$$E_{Ca} = \frac{RT}{z_{\mathrm{Ca}}F} \ln \frac{[\mathrm{Ca}^{2+}]_o}{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i}, \tag{16}$$

где $[\mathrm{Ca}^{2+}]_o$ — внеклеточная концентрация Ca^{2+}.

Первое слагаемое в уравнении (1) $D_{\mathrm{Ca}} \frac{\partial^2 [\mathrm{Ca}^{2+}]_i}{\partial x^2} = J_{\mathrm{Ca\,diff}}$ описывает внутриклеточную диффузию Ca^{2+}, где D_{Ca} — непрерывный коэффициент диффузии ионов Ca^{2+}, который при переходе к дискретному уравнению методом конечных разностей

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\mathrm{Ca}^{2+}]_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left([\mathrm{Ca}^{2+}]_{i-1} - 2[\mathrm{Ca}^{2+}]_i + [\mathrm{Ca}^{2+}]_{i+1} \right) \tag{17}$$

заменяется на величину, указанную ниже, и принимается постоянным:

$$d_{\mathrm{Ca}} = \frac{D_{\mathrm{Ca}}}{(\Delta x)^2}. \tag{18}$$

Динамика внутриклеточной концентрации ИТФ, $[IP_3]_i$ определяется продукцией ИТФ фосфолипазой Cδ и деградацией ИТФ [3]:

$$\frac{\partial [IP_3]_i}{\partial t} = D_{IP3} \frac{\partial^2 [IP_3]_i}{\partial x^2} + J_{PLC\delta} - \frac{1}{\tau_r} \left([IP_3]_i - [IP_3{}^*] \right), \tag{19}$$

где

$$J_{PLC\delta} = v_4 \frac{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i + (1-\alpha)k_4}{[\mathrm{Ca}^{2+}]_i + k_4}, \tag{20}$$

слагаемое $D_{IP3} \frac{\partial^2 [IP_3]_i}{\partial x^2} = J_{IP3\,\mathrm{diff}}$ описывает диффузию молекул ИТФ. При переходе к дискретной форме уравнения имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[IP_3]_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left([IP_3]_{i-1} - 2[IP_3]_i + [IP_3]_{i+1} \right), \tag{21}$$

$$d_{IP3} = \frac{D_{IP3}}{(\Delta x)^2}. \tag{22}$$

В модели учитываются следующие граничные условия: $[\mathrm{Ca}^{2+}]_0 = [\mathrm{Ca}^{2+}]_1$, $[IP_3]_0 = [IP_3]_1$; $[\mathrm{Ca}^{2+}]_{N+1} = [\mathrm{Ca}^{2+}]_N$, $[IP_3]_{N+1} = [IP_3]_N$.

Для получения Ca^{2+}-динамики в астроцитарном отростке, согласно предложенной модели, приведённые выше дифференциальные уравнения интегрировались методом Рунге–Кутты 4 порядка, оптимизированным для уравнений, содержащих стохастический шум, с шагом интегрирования $\Delta t = 0.01$ с. Пример реализаций $[\mathrm{Ca}^{2+}]_i$ в компартментах отростка астроцита представлен на рис. 2, *а*. Сигналы каждого компартмента характеризуются наличием выраженных событий кратковременного увеличения концентрации $[\mathrm{Ca}^{2+}]_i$ так называемых кальциевых осцилляций. Локальные Ca^{2+}-события детектировались пороговым методом автоматически. Для расчёта порога T использовалась медиана сигнала и медианное отклонение (MAD) согласно формуле

$$T_i = \mathrm{median} \left([\mathrm{Ca}^{2+}]_i \right) + k \cdot MAD \left([\mathrm{Ca}^{2+}]_i \right), \tag{23}$$

где k — множитель, принимающий значение в диапазоне от 3 до 8. Точное время начала каждого локального события определялось по первому значению производной нарастающего сигнала,

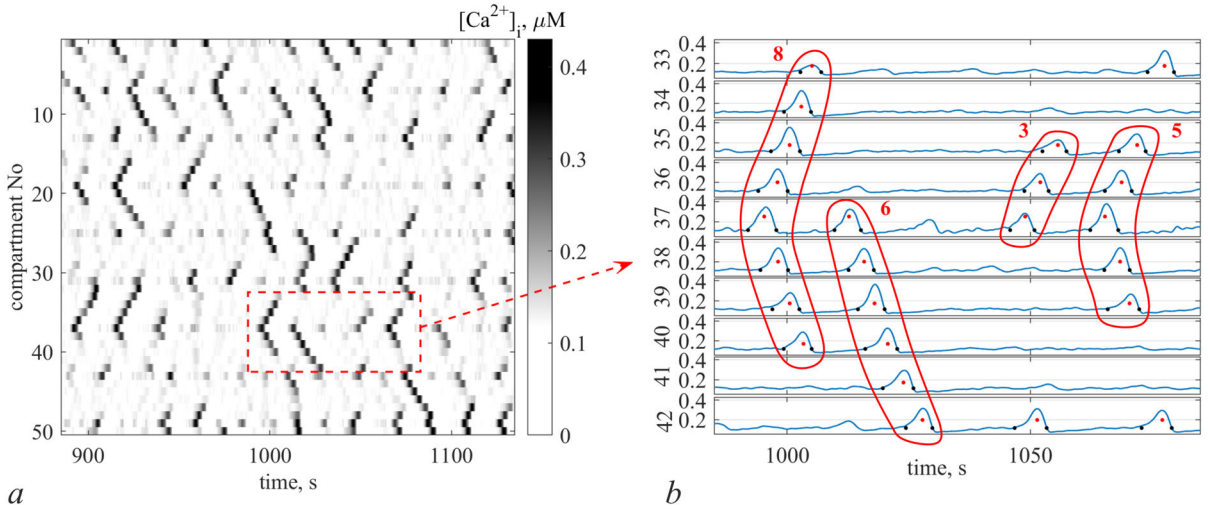


Рис. 2. Пример спонтанной Ca^{2+}-сигнализации в отростке астроцита, индуцированной стохастической работой потенциал-зависимых Ca^{2+}-каналов на плазматической мембране: *a* — реализации внутриклеточной концентрации Ca^{2+} во всех 50 компартментах отростка, *b* — детектирование локальных Ca^{2+}-импульсов и пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов; сигнал от компартмента № 37 может распространяться вдоль отростка как в одну, так и в обе стороны. Синим изображены Ca^{2+}-сигналы, чёрными точками на уровне медианы сигнала отмечены начала и окончания Ca^{2+}-колебаний, красными точками на уровне порога детектирования, рассчитанного по формуле (23), отмечены максимумы детектированных событий. Красными контурами выделены пространственно-распределённые Ca^{2+}-паттерны и число вовлечённых в них компартментов (цвет онлайн)

Fig. 2. An example of spontaneous Ca^{2+} signaling in an astrocytic process induced by the stochastic activation of voltage-dependent Ca^{2+} channels on the plasma membrane: *a* — traces of the intracellular concentration of Ca^{2+} in all 50 compartments of the process, *b* — detection of local Ca^{2+} oscillations and spatially distributed Ca^{2+} patterns; the signal from compartment No. 37 can propagate along the process in one or both directions. Ca^{2+} signals are depicted in blue, black dots at the signal median level mark the beginning and end of Ca^{2+} oscillations, red dots at the threshold level calculated by the formula (23), the peaks of detected events are marked. Red contours indicate spatially distributed Ca^{2+} patterns and the number of compartments involved (color online)

превышающему 75-й перцентиль, во временном окне длительностью 4 секунды до достижения порога. Из-за специфики формы получаемых сигналов окончание каждого события в подавляющем большинстве случаев могло быть установлено по первому после пика события пересечению сигналом собственной медианы (рис. 2, *b*).

Отметим, что локальные Ca^{2+}-сигналы, распространяясь на соседние компартменты по отростку, могут образовывать пространственно-распределённые Ca^{2+}-паттерны. Такая совокупность сигналов, наблюдаемых как непрерывающаяся последовательность локальных событий, возникающих на соседних компартментах с короткой временной задержкой (перекрывающихся во времени и с интервалом не более 4 секунд), автоматически детектировалась как один паттерн. Он может распространяться как в одном, так и в обоих направлениях от места инициирования (см. рис. 2, *b*).

2. Результаты

На основе предложенной компартментной модели спонтанной Ca^{2+}-сигнализации в астроцитарном отростке было проведено исследование влияния морфологии и внутриклеточных биофизических механизмов на характеристики локальных Ca^{2+}-сигналов и выявлены принципы формирования пространственных Ca^{2+}-паттернов.

Одним из основных параметров, влияющих на частоту генерации локальных Ca^{2+}-сигналов в компартментах, является отношение объёма внутриклеточного хранилища кальция, ЭР, к объёму цитозоли. В модели данное отношение задаётся параметром c_1. Были исследованы характеристики спонтанной Ca^{2+}-активности при варьировании параметра c_1 в диапазоне [0.233; 0.24] (рис. 3). А именно были посчитаны частоты возникновения локальных Ca^{2+}-импульсов и Ca^{2+}-паттернов, приведённые к единице длины отростка, и функции плотности вероятности размеров и длительностей Ca^{2+}-паттернов. Было выявлено, что частота как локальных Ca^{2+}-сигналов, так и распространяющихся пространственно-временных Ca^{2+}-паттернов прямо пропорциональна значению параметра c_1 (рис. 3, *c*). Полученные плотность распределения размеров Ca^{2+}-паттернов (рис. 3, *d*) и плотность распределения их длительностей (рис. 3, *e*) показали, что при увеличении параметра c_1 средняя дальность распространения (размер) событий и их длительности также увеличиваются.

Для исследования влияния геометрии отростка астроцита на динамику внутриклеточной концентрации Ca^{2+} были рассмотрены случаи моделирования отростков разного радиуса.

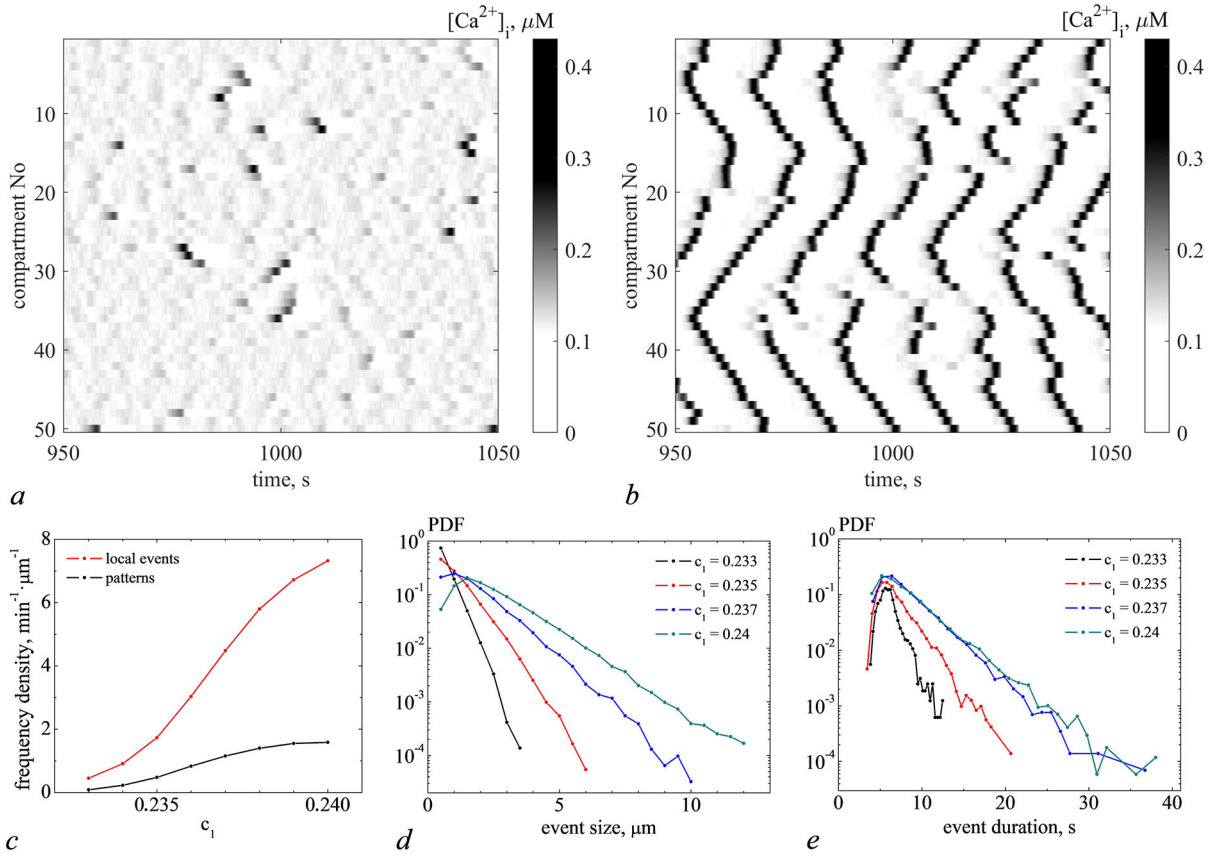


Рис. 3. Примеры кальциевой активности в отростке астроцита для значений c_1, отношения объёмов ЭР и цитозоли, в интервале [0.233; 0.24]: реализации для $c_1 = 0.233$ (*a*) и для $c_1 = 0.24$ (*b*), частоты возникновения локальных Ca^{2+}-импульсов и пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов, приведённые к единице длины отростка, в данном интервале параметра c_1 (*c*), а также плотности распределения размеров (*d*) и длительностей (*e*) Ca^{2+}-паттернов в отростке астроцита (цвет онлайн)

Fig. 3. Examples of calcium activity in the astrocytic process for values of c_1, the ratio of ER and cytosol volumes, in the range [0.233; 0.24]: Ca^{2+} signals for $c_1 = 0.233$ (*a*) and for $c_1 = 0.24$ (*b*), frequency of local Ca^{2+} oscillations and spatially distributed Ca^{2+} patterns, normalized to a unit length of the process, in a given interval of the parameter c_1 (*c*), as well as the probability density functions of sizes (*d*) and durations (*e*) of Ca^{2+} patterns in the astrocytic process (color online)

Увеличение радиуса компартмента, r, приводит к уменьшению отношения площади поверхности компартмента к его объёму пропорционально $\sim 1/r$ в формуле (15). Поэтому увеличение радиуса отростка приводит к уменьшению величины стохастического Ca^{2+}-тока через VGCCs, что соответственно снижает вероятность генерации шумоиндуцированных локальных Ca^{2+}-импульсов. В нашем исследовании радиус компартментов принимал значения в интервале от 1.0 до 2.0 мкм. На рис. 4, *a*, *b* представлена спонтанная Ca^{2+}-активность для крайних значений радиуса компартментов. Анализ характеристик спонтанной Ca^{2+}-сигнализации показал, что частота генерации локальных Ca^{2+}-сигналов, как и частота формирования пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов, уменьшается при увеличении радиуса отростка (рис. 4, *c*). При этом размер (рис. 4, *d*) и продолжительность (рис. 4, *e*) пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов с ростом радиуса отростка плавно увеличиваются.

В модели также была исследована зависимость характеристик Ca^{2+}-активности от равновесной внутриклеточной концентрации ИТФ ($[IP_3^*]$). Как следует из анализа Ca^{2+}-динамики изолированного компартмента [29], изменения концентрации ИТФ могут привести к возникновению

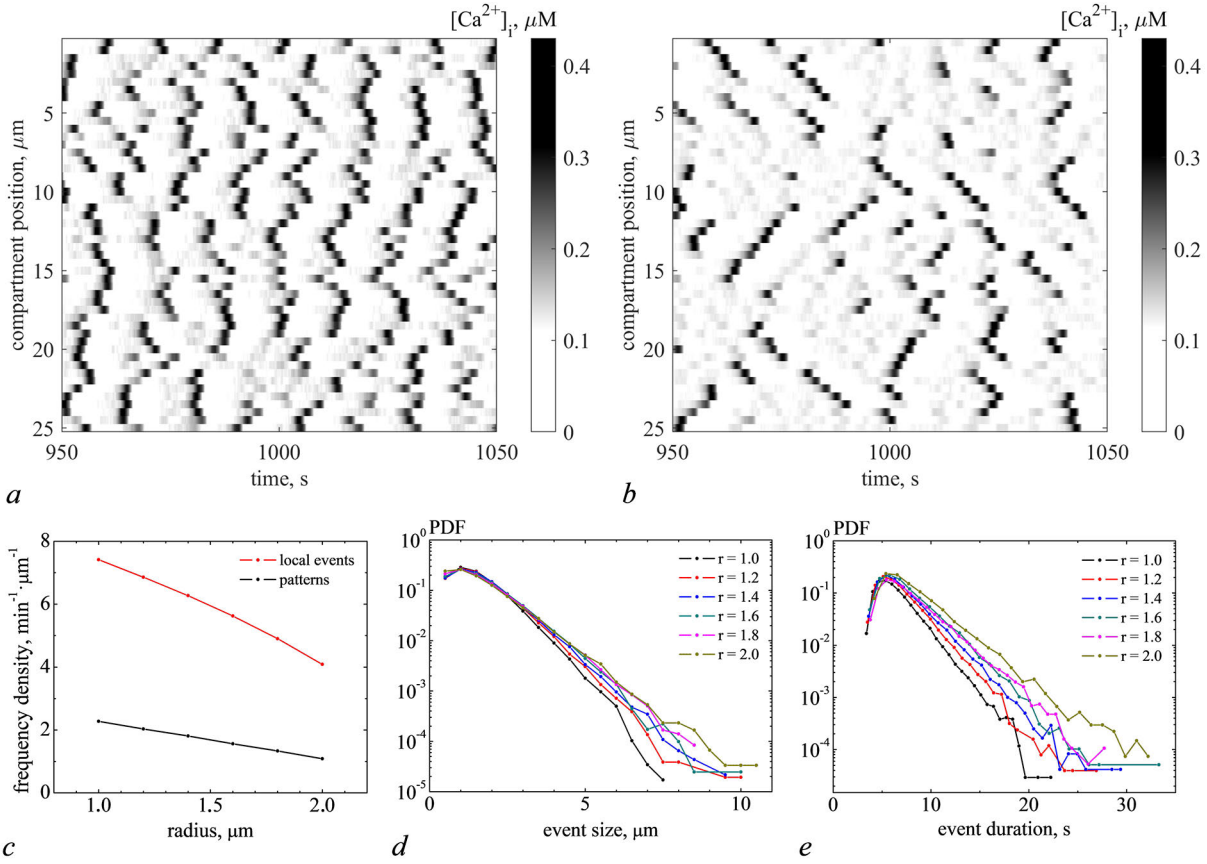


Рис. 4. Спонтанная кальциевая активность в отростке астроцита, индуцированная стохастической работой VGCCs, при вариации радиуса компартментов: реализации $[Ca^{2+}]_i$ при r = 1.0 мкм (*a*) и r = 2.0 мкм (*b*), частоты возникновения локальных Ca^{2+}-импульсов и пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов, приведённые к единице длины отростка, в данном интервале r (*c*). Плотности распределения размеров (*d*) и длительностей (*e*) Ca^{2+}-паттернов в отростке астроцита (цвет онлайн)

Fig. 4. Spontaneous calcium activity in the astrocytic process, induced by the stochastic work of VGCCs, with variation in the radius of compartments: $[Ca^{2+}]_i$ signals for r = 1.0 μm (*a*) and for r = 2.0 μm (*b*), frequency of local Ca^{2+} oscillations and spatially distributed Ca^{2+} patterns, normalized to a unit length of the process, in a given interval of r (*c*). Probability density functions of sizes (*d*) and durations (*e*) of Ca^{2+} patterns in the astrocytic process (color online)

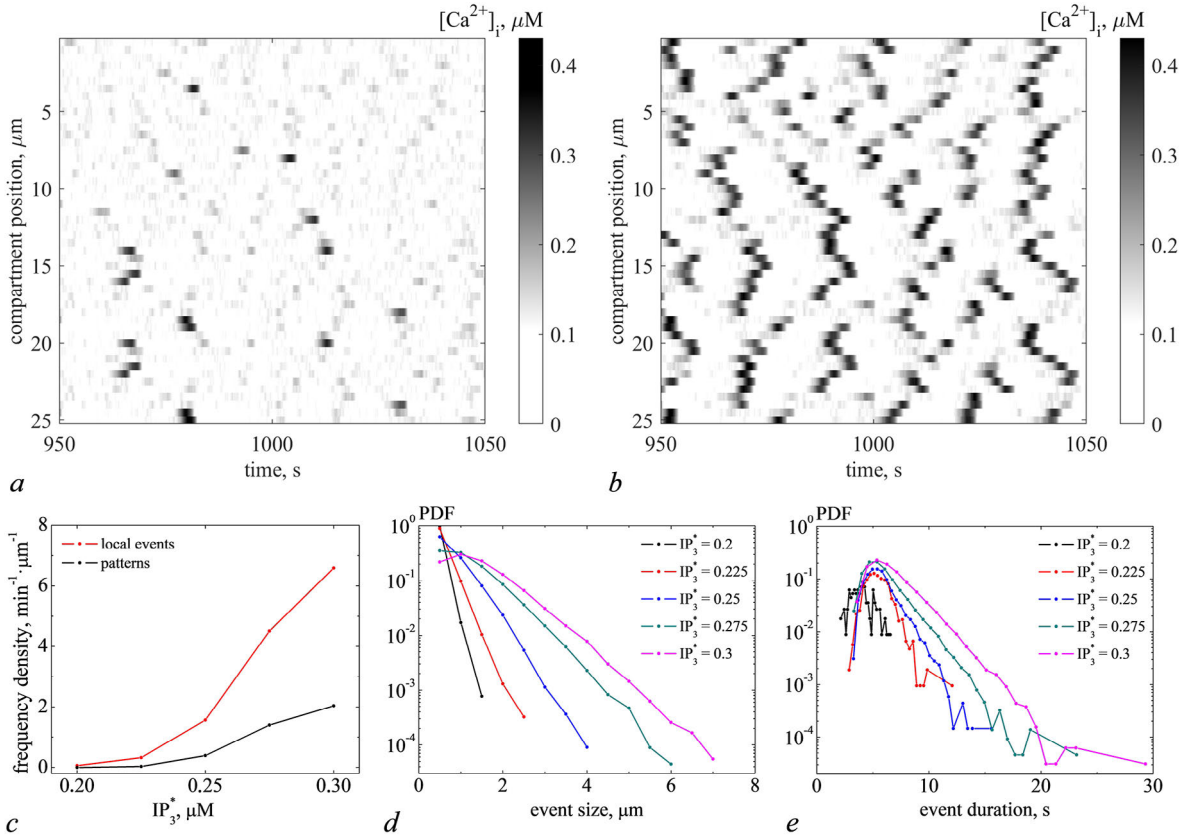


Рис. 5. Спонтанная Ca^{2+}-активность в отростке астроцита для разных значений равновесной внутриклеточной концентрации ИТФ: реализации $[Ca^{2+}]_i$ при $[IP_3{}^*]$ = 0.2 мкмоль (*a*) и $[IP_3{}^*]$ = 0.3 мкмоль (*b*), частоты генерации локальных Ca^{2+}-импульсов и формирования пространственно-временных Ca^{2+}-паттернов, приведённые к единице длины отростка (*c*), а также плотности вероятностей размеров (*d*) и длительностей (*e*) Ca^{2+}-паттернов для пяти равновесных концентраций $[IP_3{}^*]$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Spontaneous Ca^{2+} activity in the astrocytic process for different values of the steady state intracellular IP_3 concentration: signals of $[Ca^{2+}]_i$ for $[IP_3{}^*]$ = 0.2 μM (*a*) and for $[IP_3{}^*]$ = 0.3 μM (*b*), frequency of local Ca^{2+} oscillations and spatio-temporal Ca^{2+} patterns, normalized to a unit length of the process (*c*), and also the probability density functions of sizes (*d*) and durations (*e*) of Ca^{2+} patterns for five steady state concentrations $[IP_3{}^*]$ (color online)

Ca^{2+}-импульсов. Показано, что увеличение равновесного уровня ИТФ приводит к мягкому возникновению колебаний через бифуркацию Андронова–Хопфа [29]. Результаты моделирования показали, что при увеличении уровня $[IP_3{}^*]$ возрастает частота генерации локальных Ca^{2+}-импульсов в каждом компартменте, что ведёт к увеличению частоты формирования пространственно-временных Ca^{2+}-паттернов (рис. 5, *c*). Подобный эффект с точки зрения биофизики можно объяснить тем, что повышение равновесного уровня ИТФ приводит к повышению доли открытых ИТФ-зависимых кальциевых каналов на ЭР, следствием чего является увеличение выхода Ca^{2+} из ЭР и повышению его концентрации. Размеры и длительности Ca^{2+}-паттернов также увеличились (рис. 5, *d*, *e*).

Заключение

Предложена биофизическая многокомпартментная модель спонтанной кальциевой активности в отростке астроцита, описывающая динамику генерации и распространения шумоиндуцированных локальных Ca^{2+}-импульсов и механизмы формирования пространственно-распределённых

Ca^{2+}-паттернов. Спонтанные Ca^{2+}-сигналы индуцированы стохастической работой потенциал-зависимых Ca^{2+}-каналов на плазматической мембране астроцита.

Были исследованы характеристики шумоиндуцированной пространственно-временной динамики внутриклеточной концентрации Ca^{2+} в отростке астроцита в зависимости от его геометрии, размеров внутриклеточных хранилищ кальция и равновесной концентрации молекул инозитол 1,4,5-трифосфата. По полученным реализациям были рассчитаны частоты генерации локальных Ca^{2+}-импульсов в каждом компартменте отростка и частоты формирования пространственно-распределённых Ca^{2+}-паттернов. А также построены функции плотности распределения размеров и длительностей Ca^{2+}-паттернов в отростке астроцита при вариации параметров модели.

Показано, что Ca^{2+}-динамика в отростке астроцита зависит от размера ЭР: с увеличением относительной доли объёма ЭР в объёме всей цитозоли увеличивается частота генерации Ca^{2+}-колебаний, а также дальность распространения паттернов и их продолжительность. Аналогичный эффект наблюдался также при повышении равновесной внутриклеточной концентрации молекул ИТФ. При варьировании толщины отростка была обнаружена обратная зависимость частоты генерации Ca^{2+}-колебаний от радиуса компартментов. При больших размерах компартментов возрастает роль стохастической составляющей тока через плазматическую мембрану. При этом размеры и длительности распространяющихся по отростку Ca^{2+}-сигналов увеличились пропорционально уровню шума.

Представленная модель качественно воспроизводит экспериментально наблюдаемую спонтанную Ca^{2+}-активность в отростке астроцита. В работе [18] авторы исследовали спонтанную Ca^{2+}-активность в срезах гиппокампа и в первичных культурах астроцитов гиппокампа. С использованием двухфотонной кальциевой визуализации была реконструирована морфология одиночных астроцитов и получена их спонтанная Ca^{2+}-динамика. Комбинируя Ca^{2+}-визуализацию и компьютерное моделирование, авторы показали, что более высокое отношение площади поверхности тонких астроцитарных отростков к их объёму определяет более высокую частоту спонтанных Ca^{2+}-событий, что совпадает с результатами нашей модели. Полученная в эксперименте частота возникновения Ca^{2+}-событий в отростках астроцитов принимала значения в интервале от 0 до 8 $мин^{-1}$. Частота генерации Ca^{2+}-сигналов, полученная в нашем исследовании, соответствует данным значениям.

В настоящее время существует несколько работ, посвящённых исследованию спонтанной кальциевой активности в отростках астроцита. Например, в работе [7] исследуется кальциевая сигнализация в различных компартментах астроцитарного отростка в зависимости от отношения объёма ЭР к объёму внутриклеточного пространства. Cresswell-Clay et al. [30] представили модель астроцита, включающую сому и 5 однокомпартментных отростков. Цель их работы заключалась в исследовании нейрон-индуцированной стохастической кальциевой активности и её влияния на формирование импульсов Ca^{2+} в соме и глобальных Ca^{2+}-событий в астроците. Пространственно-распределённая модель астроцита, предложенная в [21], состоит из сомы и 52 компартментов, моделирующих отростки астроцита. На основе данной модели были исследованы процессы генерации и распространения Ca^{2+}-сигналов в астроците, а также влияние пространственно-временных свойств Ca^{2+}-динамики на сигнализацию в нейронной сети. В работе [18] с помощью двухфотонной кальциевой визуализации и компьютерного моделирования авторы проанализировали зависимость частоты генерации кальциевых сигналов от отношения площади поверхности отростков астроцита к их объёму. Ещё одна модель астроцита, учитывающая его строение, представлена в [31]. Авторы реконструировали морфологию астроцита из флуоресцентных 3D-изображений клеток гиппокампа и воспроизвели характерные пространственно-временные паттерны Ca^{2+}-динамики, обусловленные синаптической активностью. Другим модельным подходом является разработка и использование симуляторов, позволяющих реконструировать морфологию астроцитарных клеток и моделировать кальциевую сигнализацию [19]. В нашей модели впервые

была исследована зависимость пространственно-временной Ca^{2+}-динамики в отростке астроцита от равновесной внутриклеточной концентрации ИТФ и показано, что с увеличением уровня равновесной концентрации ИТФ возрастает частота генерации Ca^{2+}-колебаний, а также дальность распространения и длительность Ca^{2+}-паттернов.

Таким образом, биофизическая модель, представленная в работе, может служить инструментом для количественной оценки влияния различных параметров на ключевые характеристики кальциевой динамики в астроцитах, которые, являясь одним из типов глиальных клеток, осуществляют основные механизмы гомеостаза мозга, в том числе вносят вклад в его нарушения при нейродегенерации. Последние десять лет [32] стремительно накапливаются экспериментальные данные о роли астроцитов в патологических процессах. В ходе экспериментов было показано, что патологические изменения в астроцитах, происходящие при нейродегенерации (в частности, при болезни Альцгеймера), включают астроглиальную атрофию, морфологические, функциональные изменения астроцитов и астроглиоз [33, 34]. Понимание механизмов генерации астроцитарной кальциевой активности на субклеточном уровне и опосредованных данной активностью процессов регуляции нейрональной сигнализации при нейродегенеративных заболеваниях открывает целый ряд потенциальных возможностей для терапевтического воздействия на нейронные сети мозга через астроциты. А предложенная модель позволит провести отработку сценариев *in silico* для разработки стратегий наиболее эффективного воздействия.

Список литературы

1. *Semyanov A.* Spatiotemporal pattern of calcium activity in astrocytic network // Cell calcium. 2019. Vol. 78. P. 15–25. DOI: 10.1016/j.ceca.2018.12.007.
2. *Li Y.X, Rinzel J.* Equations for InsP3 receptor-mediated [Ca2+]i oscillations derived from a detailed kinetic model: a Hodgkin-Huxley like formalism // Journal of theoretical Biology. 1994. Vol. 166, no. 4. P. 461–473. DOI: 10.1006/jtbi.1994.1041.
3. *Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A. H.* Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration // Cell calcium. 2006. Vol. 39, no. 3. P. 197–208. DOI: 10.1016/j.ceca.2005.10.009.
4. *Nett W. J., Oloff S. H., Mccarthy K. D.* Hippocampal astrocytes in situ exhibit calcium oscillations that occur independent of neuronal activity // Journal of neurophysiology. 2002. Vol. 87, no. 1. P. 528–537. DOI: 10.1152/jn.00268.2001.
5. *Volterra A., Liaudet N., Savtchouk I.* Astrocyte Ca2+ signalling: an unexpected complexity // Nature Reviews Neuroscience. 2014. Vol. 15, no. 5. P. 327–335. DOI: 10.1038/nrn3725.
6. *Skupin A., Kettenmann H., Falcke M.* Calcium signals driven by single channel noise // PLoS computational biology. 2010. Vol. 6, no. 8. P. e1000870. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1000870.
7. *Oschmann F., Mergenthaler K., Jungnickel E., Obermayer K.* Spatial separation of two different pathways accounting for the generation of calcium signals in astrocytes // PLoS computational biology. 2017. Vol. 13, no. 2. P. e1005377. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1005377.
8. *De Pittà M., Goldberg M., Volman V., Berry H., Ben-Jacob E.* Glutamate regulation of calcium and IP3 oscillating and pulsating dynamics in astrocytes // Journal of biological physics. 2009. Vol. 35. P. 383–411. DOI: 10.1007/s10867-009-9155-y.
9. *Matrosov V. V., Kazantsev V. B.* Bifurcation mechanisms of regular and chaotic network signaling in brain astrocytes // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011. Vol. 21, no. 2. P. 023103. DOI: 10.1063/1.3574031.
10. *Kang M., Othmer H. G.* Spatiotemporal characteristics of calcium dynamics in astrocytes // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2009. Vol. 19, no. 3. DOI: 10.1063/1.3206698.
11. *Kazantsev V. B.* Spontaneous calcium signals induced by gap junctions in a network model of astrocytes // Physical Review E. 2009. Vol. 79, no. 1. P. 010901. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.010901.

12. *Gordleeva S. Y., Stasenko S. V., Semyanov A. V., Dityatev A. E., Kazantsev V. B.* Bi-directional astrocytic regulation of neuronal activity within a network // Frontiers in computational neuroscience. 2012. Vol. 6. P. 92. DOI: 10.3389/fncom.2012.00092.
13. *De Pittà M., Volman V., Berry H., Ben-Jacob E.* A tale of two stories: astrocyte regulation of synaptic depression and facilitation // PLoS computational biology. 2011. Vol. 7, no. 12. P. e1002293. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002293.
14. *Volman V., Ben-Jacob E., Levine H.* The astrocyte as a gatekeeper of synaptic information transfer // Neural computation. 2007. Vol. 19, no. 2. P. 303–326. DOI: 10.1162/neco.2007.19.2.303.
15. *Postnov D. E., Koreshkov R. N., Brazhe N. A., Brazhe A. R., Sosnovtseva O. V.* Dynamical patterns of calcium signaling in a functional model of neuron–astrocyte networks // Journal of biological physics. 2009. Vol. 35. P. 425–445. DOI: 10.1007/s10867-009-9156-x.
16. *Bindocci E., Savtchouk I., Liaudet N., Becker D., Carriero G., Volterra A.* Three-dimensional Ca2+ imaging advances understanding of astrocyte biology // Science. 2017. Vol. 356, no. 6339. P. eaai8185. DOI: 10.1126/science.aai8185.
17. *Brazhe A., Verisokin A., Verveyko D., Postnov D.* Astrocytes: new evidence, new models, new roles // Biophysical Reviews. 2023. Vol. 15. P. 1–31. DOI: 10.1007/s12551-023-01145-7.
18. *Wu Y. W., Gordleeva S., Tang X., Shih P. Y., Dembitskaya Y., Semyanov A.* Morphological profile determines the frequency of spontaneous calcium events in astrocytic processes // Glia. 2019. Vol. 67, no. 2. P. 246–262. DOI: 10.1002/glia.23537.
19. *Savtchenko L. P., Bard L., Jensen T. P., Reynolds J. P., Kraev I., Medvedev N., Stewart M. G., Henneberger C., Rusakov D. A.* Disentangling astroglial physiology with a realistic cell model in silico // Nature communications. 2018. Vol. 9, no. 1. P. 3554. DOI: 10.1038/s41467-018-05896-w.
20. *Gordleeva S. Y., Lebedev S. A., Rumyantseva M. A., Kazantsev V. B.* Astrocyte as a detector of synchronous events of a neural network // JETP Letters. 2018. Vol. 107. P. 440–445. DOI: 10.1134/S0021364018070032.
21. *Gordleeva S. Y., Ermolaeva A. V., Kastalskiy I. A., Kazantsev V. B.* Astrocyte as spatiotemporal integrating detector of neuronal activity // Frontiers in physiology. 2019. Vol. 10. P. 294. DOI: 10.3389/fphys.2019.00294.
22. *Kastalskiy I., Ermolaeva A., Kazantsev V., Gordleeva S.* Impact of the steady state IP3 level on the intracellular Ca2+ signaling in spatially distributed model of astrocyte // 2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). 2020. P. 120–123. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216749.
23. *Zeng S., Li B., Zeng S., Chen S.* Simulation of spontaneous Ca2+ oscillations in astrocytes mediated by voltage-gated calcium channels // Biophysical journal. 2009. Vol. 97, no. 9. P. 2429–2437. DOI: 10.1016/j.bpj.2009.08.030.
24. *Yaguchi T., Nishizaki T.* Extracellular high K+ stimulates vesicular glutamate release from astrocytes by activating voltage-dependent calcium channels // Journal of Cellular Physiology. 2010. Vol. 225, no. 2. P. 512–518. DOI: 10.1002/jcp.22231.
25. *Letellier M., Park Y. K., Chater T. E., Chipman P. H., Gautam S. G., Oshima-Takago T., Goda Y.* Astrocytes regulate heterogeneity of presynaptic strengths in hippocampal networks // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. Vol. 113, no. 19. P. E2685–E2694. DOI: 10.1073/pnas.1523717113.
26. *Zamora N. N., Cheli V. T., Santiago González D. A., Wan R., Paez P. M.* Deletion of Voltage-Gated Calcium Channels in Astrocytes during Demyelination Reduces Brain Inflammation and Promotes Myelin Regeneration in Mice // The Journal of Neuroscience. 2020. Vol. 40, no. 17. P. 3332–3347. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1644-19.2020.

27. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // The Journal of physiology. 1952. Vol. 117, no. 4. P. 500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
28. *Dupont G., Goldbeter A.* One-pool model for Ca2+ oscillations involving Ca2+ and inositol 1,4,5-trisphosphate as co-agonists for Ca2+ release // Cell calcium. 1993. Vol. 14, no. 4. P. 311–322. DOI: 10.1016/0143-4160(93)90052-8.
29. *Гордлеева С. Ю., Матросов В. В., Казанцев В. Б.* Кальциевые колебания в астроцитах. Часть 1. Астроцит как генератор кальциевых колебаний // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Vol. 20, № 3. С. 29–39. DOI: 10.3389/fphys.2019.00294.
30. *Cresswell-Clay E., Crock N., Tabak J. and Erlebacher G.* A Compartmental Model to Investigate Local and Global Ca2+ Dynamics in Astrocytes // Frontiers in Computational Neuroscience. 2018. Vol. 12. P. 94. DOI: 10.3389/fncom.2018.00094.
31. *Verisokin A. Y., Verveyko D. V., Postnov D. E., Brazhe A. R.* Modeling of Astrocyte Networks: Toward Realistic Topology and Dynamics // Frontiers in Cellular Neuroscience. 2021. Vol. 15. P. 645068. DOI: 10.3389/fncel.2021.645068.
32. *Santello M., Toni N., Volterra A.* Astrocyte function from information processing to cognition and cognitive impairment // Nature neuroscience. 2019. Vol. 22, no. 2. P. 154–166. DOI: 10.1038/s41593-018-0325-8.
33. *Popov A., Brazhe A., Denisov P., Sutyagina O., Li L., Lazareva N., Verkhratsky A., Semyanov A.* Astrocyte dystrophy in ageing brain parallels impaired synaptic plasticity // Aging cell. 2021. Vol. 20, no. 3. P. e13334. DOI: 10.1111/acel.13334.
34. *Olabarria M., Noristani H. N., Verkhratsky A., Rodríguez J. J.* Concomitant astroglial atrophy and astrogliosis in a triple transgenic animal model of Alzheimer's disease // Glia. 2010. Vol. 58, no. 7. P. 831–838. DOI: 10.1002/glia.20967.

References

1. Semyanov A. Spatiotemporal pattern of calcium activity in astrocytic network. Cell calcium. 2019;78:15–25. DOI: 10.1016/j.ceca.2018.12.007.
2. Li YX, Rinzel J. Equations for InsP3 receptor-mediated [Ca2+]i oscillations derived from a detailed kinetic model: a Hodgkin-Huxley like formalism. Journal of theoretical Biology. 1994;166(4): 461–473. DOI: 10.1006/jtbi.1994.1041.
3. Ullah G, Jung P, Cornell-Bell AH. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration. Cell calcium. 2006;39(3):197–208. DOI: 10.1016/j.ceca.2005.10.009.
4. Nett WJ, Oloff SH, Mccarthy KD. Hippocampal astrocytes in situ exhibit calcium oscillations that occur independent of neuronal activity. Journal of neurophysiology. 2002;87(1):528–537. DOI: 10.1152/jn.00268.2001.
5. Volterra A, Liaudet N, Savtchouk I. Astrocyte Ca2+ signalling: an unexpected complexity. Nature Reviews Neuroscience. 2014;15(5):327–335. DOI: 10.1038/nrn3725.
6. Skupin A, Kettenmann H, Falcke M. Calcium signals driven by single channel noise. PLoS computational biology. 2010;6(8):e1000870. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1000870.
7. Oschmann F, Mergenthaler K, Jungnickel E, Obermayer K. Spatial separation of two different pathways accounting for the generation of calcium signals in astrocytes. PLoS computational biology. 2017;13(2):e1005377. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1005377.
8. De Pittà M, Goldberg M, Volman V, Berry H, Ben-Jacob E. Glutamate regulation of calcium and IP3 oscillating and pulsating dynamics in astrocytes. Journal of biological physics. 2009;35: 383–411. DOI: 10.1007/s10867-009-9155-y.
9. Matrosov VV, Kazantsev VB. Bifurcation mechanisms of regular and chaotic network signaling

in brain astrocytes. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2011;21(2):023103. DOI: 10.1063/1.3574031.
10. Kang M, Othmer HG. Spatiotemporal characteristics of calcium dynamics in astrocytes. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2009;19(3):037116. DOI: 10.1063/1.3206698.
11. Kazantsev VB. Spontaneous calcium signals induced by gap junctions in a network model of astrocytes. Physical Review E. 2009;79(1):010901. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.010901.
12. Gordleeva SY, Stasenko SV, Semyanov AV, Dityatev AE, Kazantsev VB. Bi-directional astrocytic regulation of neuronal activity within a network. Frontiers in computational neuroscience. 2012;6:92. DOI: 10.3389/fncom.2012.00092.
13. De Pittà M, Volman V, Berry H, Ben-Jacob E. A tale of two stories: astrocyte regulation of synaptic depression and facilitation. PLoS computational biology. 2011;7(12):e1002293. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1002293.
14. Volman V, Ben-Jacob E, Levine H. The astrocyte as a gatekeeper of synaptic information transfer. Neural computation. 2007;19(2):303–326. DOI: 10.1162/neco.2007.19.2.303.
15. Postnov DE, Koreshkov RN, Brazhe NA, Brazhe AR, Sosnovtseva OV. Dynamical patterns of calcium signaling in a functional model of neuron–astrocyte networks. Journal of biological physics. 2009;35:425–45. DOI: 10.1007/s10867-009-9156-x.
16. Bindocci E, Savtchouk I, Liaudet N, Becker D, Carriero G, Volterra A. Three-dimensional Ca2+ imaging advances understanding of astrocyte biology. Science. 2017;356(6339):eaai8185. DOI: 10.1126/science.aai8185.
17. Brazhe A, Verisokin A, Verveyko D, Postnov D. Astrocytes: new evidence, new models, new roles. Biophysical Reviews. 2023;15:1–31. DOI: 10.1007/s12551-023-01145-7.
18. Wu YW, Gordleeva S, Tang X, Shih PY, Dembitskaya Y, Semyanov A. Morphological profile determines the frequency of spontaneous calcium events in astrocytic processes. Glia. 2019;67(2): 246–262. DOI: 10.1002/glia.23537.
19. Savtchenko LP, Bard L, Jensen TP, Reynolds JP, Kraev I, Medvedev N, Stewart MG, Henneberger C, Rusakov DA. Disentangling astroglial physiology with a realistic cell model in silico. Nature communications. 2018;9(1):3554. DOI: 10.1038/s41467-018-05896-w.
20. Gordleeva SY, Lebedev SA, Rumyantseva MA, Kazantsev VB. Astrocyte as a detector of synchronous events of a neural network. JETP Letters. 2018;107:440–445. DOI: 10.1134/S00213640 18070032.
21. Gordleeva SY, Ermolaeva AV, Kastalskiy IA, Kazantsev VB. Astrocyte as spatiotemporal integrating detector of neuronal activity. Frontiers in physiology. 2019;10:294. DOI: 10.3389/ fphys.2019.00294.
22. Kastalskiy I, Ermolaeva A, Kazantsev V, Gordleeva S. Impact of the steady state IP3 level on the intracellular Ca2+ signaling in spatially distributed model of astrocyte. 2020 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR). 2020;120–123. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216749.
23. Zeng S, Li B, Zeng S, Chen S. Simulation of spontaneous Ca2+ oscillations in astrocytes mediated by voltage-gated calcium channels. Biophysical journal. 2009;97(9):2429–2437. DOI: 10.1016/j.bpj. 2009.08.030.
24. Yaguchi T, Nishizaki T. Extracellular high K+ stimulates vesicular glutamate release from astrocytes by activating voltage-dependent calcium channels. Journal of Cellular Physiology. 2010;225(2):512–518. DOI: 10.1002/jcp.22231.
25. Letellier M, Park YK, Chater TE, Chipman PH, Gautam SG, Oshima-Takago T, Goda Y. Astrocytes regulate heterogeneity of presynaptic strengths in hippocampal networks. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016;113(19):E2685–E2694. DOI: 10.1073/pnas.1523717113.
26. Zamora NN, Cheli VT, Santiago González DA, Wan R, Paez PM. Deletion of Voltage-Gated Calcium Channels in Astrocytes during Demyelination Reduces Brain Inflammation and Promotes

Myelin Regeneration in Mice. The Journal of Neuroscience. 2020;40(17):3332–3347. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.1644-19.2020.
27. Hodgkin AL, Huxley AF. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. The Journal of physiology. 1952;117(4):500–544. DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
28. Dupont G, Goldbeter A. One-pool model for Ca2+ oscillations involving Ca2+ and inositol 1,4,5-trisphosphate as co-agonists for Ca2+ release. Cell calcium. 1993;14(4):311–322. DOI: 10.1016/0143-4160(93)90052-8.
29. Gordleeva SY, Matrosov VV, Kazantsev VB. Calcium oscillations in astrocytes. Part 1 Astrocyte as generator of calcium oscillations. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2012;20(3):29–39. DOI: 10.18500/0869-6632-2012-20-3-29-39.
30. Cresswell-Clay E, Crock N, Tabak J and Erlebacher G. A Compartmental Model to Investigate Local and Global Ca2+ Dynamics in Astrocytes. Frontiers in Computational Neuroscience. 2018;12:94. DOI: 10.3389/fncom.2018.00094.
31. Verisokin AY, Verveyko DV, Postnov DE, Brazhe AR. Modeling of Astrocyte Networks: Toward Realistic Topology and Dynamics. Frontiers in Cellular Neuroscience. 2021;15:645068. DOI: 10.3389/fncel.2021.645068.
32. Santello M, Toni N, Volterra A. Astrocyte function from information processing to cognition and cognitive impairment. Nature neuroscience. 2019;22(2):154–166. DOI: 10.1038/s41593-018-0325-8.
33. Popov A, Brazhe A, Denisov P, Sutyagina O, Li L, Lazareva N, Verkhratsky A, Semyanov A. Astrocyte dystrophy in ageing brain parallels impaired synaptic plasticity. Aging cell. 2021;20(3):e13334. DOI: 10.1111/acel.13334.
34. Olabarria M, Noristani HN, Verkhratsky A, Rodríguez JJ. Concomitant astroglial atrophy and astrogliosis in a triple transgenic animal model of Alzheimer's disease. Glia. 2010;58(7):831–838. DOI: 10.1002/glia.20967.

Ермолаева Анастасия Викторовна — родилась в Нижегородской области (1995). Окончила с отличием радиофизический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии» (2018) и аспирантуру ННГУ им. Н.И. Лобачевского по специальности «Радиофизика» (2022). Младший научный сотрудник кафедры прикладной математики Института информационных технологий, математики и механики. Научные интересы: нейронные сети, астроцитарные сети, нейрон-астроцитарное взаимодействие, математическое моделирование.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: anastasia.v.ermolaeva@gmail.com
ORCID: 0000-0002-9513-7434
AuthorID (eLibrary.Ru): 1176069

Кастальский Иннокентий Алексеевич — родился в городе Горьком (1987). Окончил радиофизический факультет ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Кандидат физико-математических наук (2017). Руководитель и исполнитель ряда грантов РНФ, ФЦП, РФФИ, Фонда содействия инновациям, грантов и стипендий Президента РФ. Область научных интересов: нелинейная динамика, математические модели нейронов и нейрон-астроцитарных сетей, моделирование эпидемий, нейроинтерфейсы, биоморфная робототехника. Имеет более 30 научных публикаций, 5 патентов и множество свидетельств на программные коды.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: kastalskiy@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0001-6050-4356
AuthorID (eLibrary.Ru): 675781

Казанцев Виктор Борисович — родился в 1973 году. Окончил радиофизический факультет ННГУ. Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005). Заведующий кафедрой нейротехнологий биологического факультета ННГУ (с 2005), профессор университета Иннополис (Казань), заведующий лабораторией нейромоделирования НИИ нейронаук СамГМУ (Самара). Область научных интересов: нейронаука, математические модели нейронов и нейронных сетей, нейрогибридные и нейроморфные системы, нейроинтерфейсы, нейрон-глиальные взаимодействия, колебания и волны в нейродинамике. Имеет более 150 научных публикаций в российских и зарубежных реферируемых изданиях. Автор нескольких глав в книгах и монографиях, множества патентов и учебно-методических разработок. Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций, научный консультант 2 докторских диссертаций. Руководитель ведущей научной школы «Нелинейная динамика сетевых нейросистем: фундаментальные аспекты и приложения» в рамках гранта Президента РФ 2020–2021.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр-кт Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: kazantsev@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0002-2881-6648
AuthorID (eLibrary.Ru): 29851

Гордлеева Сусанна Юрьевна — родилась в 1987 году. Окончила радиофизический факультет ННГУ им. Н. И. Лобачевского. Доктор физико-математических наук (2022), профессор кафедры нейротехнологий ННГУ им Н. И. Лобачевского. Лауреат премии Президента РФ в области науки и инноваций для молодых ученых за 2023 год. Область научных интересов: нейронаука, биофизика, нелинейная динамика, математические модели нейронов и нейрон-астроцитарных сетей, анализ ЭЭГ, нейроинтерфейсы.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: gordleeva@neuro.nnov.ru
ORCID: 0000-0002-7687-3065
AuthorID (eLibrary.Ru): 677041

Нелинейная динамика и нейронаука

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 004.78

DOI: 10.18500/0869-6632-003126
EDN: BMEUDZ

Сравнительный анализ эффективности трансферного обучения по обобщенным данным ЭЭГ для использования в задаче диагностики депрессии

Н. Н. Шушарина

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия
E-mail: ✉nshusharina@kantiana.ru

Поступила в редакцию 2.02.2024, принята к публикации 26.06.2024, опубликована онлайн 9.10.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Цель* данной работы заключалась в анализе эффективности различных методов глубокого обучения в задаче диагностирования депрессии на основании данных биоэлектрической активности мозга. В частности, изучение потенциала трансферного обучения с использованием искусственной нейронной сети, обученной на значительном объеме обобщенных данных электроэнцефалографии, в целевой задаче диагностики депрессии по сигналам неинвазивной электроэнцефалограммы. *Методы.* В настоящем исследовании использовались такие подходы глубокого обучения, как трансферное и контрастное обучение. Искусственные нейронные сети обучались на открытом наборе данных HBN EO/EC task (The Healthy Brain Network – HBN), содержащем записи сигналов электроэнцефалограммы детей и молодых людей до 21 года с открытыми и закрытыми глазами. В качестве предобученных искусственных нейронных сетей для трансферного обучении использовались архитектуры 1D CNN и EEGNet. С целью проверки качества контрастного обучения набор данных был расширен с помощью аугментации и были отобраны предобученные сети со следующей архитектурой: SimCLR, MoCo, NNCLR, BarlowTwins, DINO. *Результаты.* Было установлено, что архитектура EEGNet, используемая в качестве предобученной сети, в силу своих малых размеров не даёт раскрыть полный потенциал алгоритмов контрастного обучения. EEGNet была заменена на архитектуру 1D CNN с большим числом параметров, что привело к росту показателей качества работы моделей. *Заключение.* Хотя рассмотренный метод трансферного обучения выглядит перспективным, специфичность сигналов электроэнцефалограммы и решаемых на их основе задач требует масштабной адаптации алгоритмов целевой задаче. В случае применения техник контрастной оптимизации для обучения целевой сети это также справедливо. Следует также отметить решающую роль представительности набора данных для обучения предобученной сети, поскольку именно полнота реальных наблюдений увеличивает эффективность аугментации, что приводит к увеличению числа «полезных» признаков в латентном пространстве сети и наилучшим условиям для трансферного обучения в целевой задаче. Если говорить о диагностике депрессии, то в данных должны быть максимально широко представлены примеры электроэнцефалограммы именно пациентов с выраженной депрессией.

Ключевые слова: диагностика, депрессия, электроэнцефалография, искусственная нейронная сеть, трансферное обучение, контрастное обучение.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-30010).

Для цитирования: *Шушарина Н. Н.* Сравнительный анализ эффективности трансферного обучения по обобщенным данным ЭЭГ для использования в задаче диагностики депрессии // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 100–122. DOI: 10.18500/0869-6632-003126. EDN: BMEUDZ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Шушарина Н. Н., 2024*

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003126

Comparative analysis of transfer learning performance on generalised EEG data for use in a depression diagnosis task

N. N. Shusharina

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia
E-mail: ✉nshusharina@kantiana.ru

Received 2.02.2024, accepted 26.06.2024, available online 9.10.2024, published 31.01.2025

Abstract. The *purpose* of this work was to analyse the performance of different deep learning methods in the task of depression diagnosis based on bioelectrical brain activity data. In particular, to study the potential of transfer learning using an artificial neural network trained on a significant amount of "generalised" electroencephalography data in the task of diagnosing depression from non-invasive electroencephalogram signals. *Methods.* Deep learning approaches such as transfer learning and contrastive learning were used in the present study. Artificial neural networks were trained on the public HBN EO/EC task dataset containing recordings of electroencephalogram signals. The 1D CNN and EEGNet architectures were used as auxiliary artificial networks for transfer learning. In order to test the quality of contrastive learning, the dataset was augmented and the following algorithms were selected as the donor network: SimCLR, MoCo, NNCLR, BarlowTwins, DINO. *Results.* It was found that the EEGNet architecture used as a auxiliary network, due to its small size, does not give the full potential of contrastive learning algorithms. Therefore, EEGNet was replaced by a 1D CNN architecture with a larger number of parameters, which led to an increase in the quality performance of the models. *Conclusion.* Although the considered method of transient learning looks promising, the specificity of electroencephalogram signals and problems solved on their basis requires large-scale adaptation of algorithms and contrastive optimisation techniques for effective training of the target task. It is also worth noting the crucial role of the representativeness of the data set for training the donor network, since it is the completeness of real observations that increases the effectiveness of augmentation, which leads to an increase in the number of "useful" features in the latent space of the network and the best conditions for transfer learning in the target task. If we talk about the diagnosis of depression, the data should maximally represent examples of electroencephalograms of depressed patients.

Keywords: diagnosis, depression, electroencephalography, artificial neural network, transfer learning, contrastive learning.

Acknowledgements. This work was supported by grant RSF (project No. 23-71-30010).

For citation: Shusharina NN. Comparative analysis of transfer learning performance on generalised EEG data for use in a depression diagnosis task. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):100–122. DOI: 10.18500/0869-6632-003126

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Важной научной задачей, стоящей перед современной биофизикой, цифровой медициной и нейронаукой, является проблема диагностики заболеваний центральной нервной системы по различным модальностям нейровизуализаций с использованием методов искусственного интеллекта и машинного обучения [1, 2]. В настоящее время значительные успехи достигнуты в диагностике эпилепсии [3–5], большого депрессивного расстройства [6–8], аутизма [9, 10], синдрома Ретта [11] и т. д. Наиболее часто в задачах применения методов машинного обучения для медицинской диагностики используются данные функциональной магнитно-резонансной томографии (МРТ) пациентов в состоянии покоя, с использованием которых были достигнуты значительные успехи по применению методов машинного обучения. На основании данных МРТ и алгоритмов глубокого обучения были выявлены цифровые биомаркеры большого депрессивного расстройства [12, 13], болезни Альцгеймера [14, 15] и т. д. Однако для применения в клинической практике особый интерес вызывает использование электроэнцефалографии (ЭЭГ), которая является более простым, дешевым и доступным методом нейровизуализации активности головного мозга пациентов. Сигналы ЭЭГ представляют собой результат измерения электрических потенциалов на коже головы,

поверхности или в глубоких слоях головного мозга. Поскольку потенциал электрода представляет собой лишь обобщенный физический параметр, характеризующий сложные нестационарные электрические процессы в нейронном ансамбле головного мозга, то и полученные данные обладают свойствами нестационарности, нелинейности и негауссовости [16], а индивидуальные различия между людьми, особенности их психофизического состояния в момент измерения, специфика применяемого оборудования и постановки электродов приводят к сильным различиям ЭЭГ-сигналов даже для одного и того же события [17]. Дополнительной трудностью, возникающей при анализе ЭЭГ-сигнала с целью извлечения информации, связанной с конкретной задачей, является сильная зашумленность [18].

Трансферное обучение позволяет сохранить и использовать информацию, полученную моделью в аналогичной области, в процессе дообучения на целевой задаче. Эффективность такого дообучения в значительной степени зависит от множества факторов: количества и качества данных для предобученной модели, схожести архитектуры предобученной модели с целевой моделью, структуры и характеристик данных целевой задачи [19, 20].

При использовании трансферного обучения для анализа сигналов ЭЭГ возможно повысить гибкость и адаптивность дообученной модели для разных людей, нивелировать индивидуальные различия респондентов и уменьшить потребность модели в новых данных [21, 22].

Целью данной работы является изучение возможности повторного использования весов искусственной нейронной сети (ИНС), обученной на значительном объеме обобщенных данных электроэнцефалографии в целевой, более узкой задаче диагностики депрессии по сигналам неинвазивной ЭЭГ.

1. Обзор основных методов

1.1. Трансферное обучение. Концепция трансферного обучения заключается, как следует из названия, в переносе («трансфере») информации об обучении, зафиксированной в сети в процессе обучения, в другую сеть. Во всех разновидностях трансферного обучения для этого используется двухэтапная схема, в которой веса сети-классификатора предварительно инициализируют из заранее обученной на большом объеме данных сети, схожей с ней по устройству, а затем дополнительно обучают уже целевой задаче на отдельном наборе данных. Это оказывается возможным только при схожей структуре данных и архитектуре обеих сетей, поскольку чаще всего сохраняют слои, расположенные ближе ко входу сети. Сохранение весов начальных слоев целесообразно, если предобученная сеть обучалась на значительно большем по размеру наборе данных, поскольку сверточные нейронные сети обладают свойством выделять более общие признаки в первых (входных) слоях, а частные, необходимые для итоговой классификации — в последних (выходных). Полученные общие наборы признаков в виде отдельных экземпляров предварительно обученных сетей достаточно универсальны и часто включаются в стандартные открытые модели, подходящие для широкого круга задач [19]. На момент проведения исследования в открытом доступе отсутствовала предобученная на сигналах ЭЭГ сеть, пригодная для использования, поэтому в ходе работы была смоделирована и обучена на достаточно большом наборе данных HBN сверточная сеть с типичной архитектурой.

Для оценки зависимости эффективности обучения от размера базовой сети в качестве архитектуры предобученных сетей были выбраны компактная сверточная нейронная сеть EEGNet, хорошо зарекомендовавшая себя в задачах классификации ЭЭГ, и сеть 1D CNN с большим количеством параметров.

В выбранном для обучения базовой сети наборе данных HBN разметка представлена в общем виде, но объем данных позволяет преобразовать пространство признаков на втором этапе. Поэтому на вход модели подавался срез ЭЭГ-сигнала, а на выходе был построен классификатор по признакам пола, возраста, закрытые/открытые глаза. Ни один из перечисленных признаков

никак не связан с уровнем депрессии, и пригодность такой обученной сети для использования в целевой задаче заранее неизвестна.

На втором этапе исследования выполняется так называемая «подстройка» (fine tuning) весов сети на отдельном, специфичном для конечной задачи наборе данных, способном представить сети необходимый набор признаков для обучения. При этом дообучение сети затрагивает не все узлы, а лишь дополнительные выходные слои, для которых может применяться отдельная функция ошибки и архитектура. При отсутствии существенной разницы в исходном и целевом доменах метод трансферного обучения глубоких нейронных сетей для анализа сигналов ЭЭГ может заключаться, например, в надстраивании над предобученной сетью нового классификатора или же точной настройке части слоев предварительно обученной модели [19]. В этом случае трансферное обучение модели состоит из предварительного обучения модели связанной задаче, что должно способствовать установке априорных весов модели с последующей адаптацией архитектуры каким-либо способом и обучением целевой задаче с настройкой фиксации уже полученных весов в отдельных слоях [23, 24].

Применительно к сверточным сетям процедура дополнительного обучения целевой задаче может выполняться как для всей сети целиком, так и для части последних слоев, которые в основном ответственны за итоговую классификацию. В данном случае параметры начальных сверточных слоев нейронной сети, выполняющие выделение общих признаков, остаются неизменными («замороженными») во время дополнительного обучения. В литературе описано применение данного метода в прикладных задачах увеличения эффективности интерфейсов «мозг-компьютер» и классификации характерных признаков судорожной активности, а также обнаружение артефактов при анализе инвазивной ЭЭГ [24–27]. Кроме описания прямого переноса весов предобученной сети, встречаются работы, где для обучения используются специальные структуры метрик (представления) [28].

1.2. Контрастное обучение. В случае отсутствия предварительной разметки данных или сложности получения качественных данных ЭЭГ применяется другой метод. Он состоит в предварительной подготовке пространства признаков нейронной сети только за счет использования самих данных и называется контрастным обучением, которое может выполняться как с учителем, так и без учителя.

Контрастное обучение без учителя тренирует модель различать схожесть или различие входной пары данных, фиксируя соответствующие признаки в структуре слоев, и успешно применяется для обработки ЭЭГ-сигналов, где предварительно обученная на больших наборах данных модель лучше справляется с шумами, обнаруживает субъектно-независимые признаки и временные зависимости данных [20]. После формирования заранее подготовленного пространства признаков модель лучше выделяет признаки уже в целевой задаче. Метод контрастного обучения демонстрирует хорошие результаты также в задачах компьютерного зрения [29] и обработки естественного языка [30]. Вдобавок предварительное контрастное обучение снижает риск использования артефактов сигнала в качестве признаков и переобучения модели на небольших наборах данных [31]. Важным компонентом, определяющим эффективность базовой сети после применения контрастного обучения, является выбор алгоритма оптимизации сети, включая определение метрик схожести латентных представлений сигналов и особенности конструирования негативных пар. Последнее особенно важно, так как ограничение обучения только позитивными парами приводит к коллапсу латентного пространства (mode collapse), при котором сеть представляет все сигналы как одинаковые. Насколько сигналы отличны, заранее неизвестно, и некорректное назначение негативных пар, составленных из схожих между собой сигналов, дестабилизирует процесс обучения.

Для задачи сравнения эффективности были подобраны алгоритмы контрастного обучения, хорошо зарекомендовавшие себя в задаче классификации изображений и адаптированные для работы с модифицированной архитектурой сверточных сетей.

В литературе описано несколько реализаций алгоритмов контрастного обучения, каждый со своими преимуществами и недостатками. Из-за специфики решаемой задачи выбор наилучшего алгоритма затруднен и необходимо сравнительное тестирование.

Фреймворк контрастного обучения SimCLR [32] часто используется в качестве базового при разработке новых контрастных алгоритмов, поскольку на практике негативные пары обычно конструируются по каждому отдельному батчу (пакету данных для обучения, подаваемому на вход модели за итерацию, после которой выполняется обновление параметров модели). При этом допускается, что каждый пример данных в отдельном батче считается отличным от других. В SimCLR устанавливается ряд эвристик, полезных для обучения.

- Для выделения латентных представлений используется модуль энкодера в виде нескольких полносвязных слоёв с ReLU-активацией, который применяется только при обучении и служит для связи между базовой сетью и контрастной целевой функцией.
- В качестве оптимальной целевой функции применяется категориальная перекрёстная энтропия при условии предварительной нормализации латентных векторов и использовании температурного масштабирования (temperature scaling) для выходного распределения весов сети.
- Размер батча должен быть максимально большим для генерации максимального числа негативных пар.
- Косинусный коэффициент, рассчитываемый для пар в качестве метрики «схожести» сигналов, должен стремиться к нулю для негативных и к единице для позитивных пар сигналов.
- Многопараметрические сети лучше приспособлены для контрастного обучения, при этом эффективнее не добавление новых слоев, а увеличение количества нейронов в слое.

В алгоритме MoCo [33] для снижения зависимости от размеров батча и общего повышения стабильности при конструировании контрастных пар использован принцип динамического словаря, в котором запросом считается отдельный сигнал, а ключами — остальные примеры для представления позитивных и негативных пар. При таком подходе размер батча определяется только количеством запросов, а ключи выбираются из очереди. Запросы генерируются сетью самого фреймворка, а ключи — ее копией с медленно обновляемыми параметрами. Алгоритм, таким образом, больше не зависит от размера батча и количества негативных пар и может применяться для относительно небольших наборов обучающих данных. Вдобавок появляется своеобразное смещение обучения в сторону плавного обновления весов, что увеличивает стабильность. Резкие изменения не отражаются в кодирующей ключи копии, что приводит к повышению сложности и штрафуется в процессе оптимизации.

В алгоритме NNCLR [34] принцип динамического словаря конструирования пар с помощью ключей применяется для позитивных пар. Для каждого сигнала-запроса батч доукомплектуется «схожими» парами из динамического словаря, определяемыми с использованием алгоритма ближайших соседей. Контрастирование осуществляется на более высоком семантическом уровне, а эффективность обучения в меньшей степени зависит от качества процедуры аугментации при достаточно стабильном процессе оптимизации.

BarlowTwins [35] представляет собой модернизированный алгоритм SimCLR с использованием взаимной корреляции вместо косинусного коэффициента и добавлением собственной двухкомпонентной целевой функции вместо категориальной перекрёстной энтропии для уменьшения зависимости от размеров батча и эффективного использования латентного пространства признаков. Первый компонент функции приблизительно соответствует обычному контрасту, оптимизируя «близость» позитивных пар по метрике корреляции, а второй служит для уменьшения избыточности в элементах латентных векторов и уменьшения количества повторений.

В алгоритме контрастного обучения DINO [36] используются только позитивные пары. Выполняется оптимизация между обучаемой сетью (учеником) и её медленно обновляемой копией (учителем). Обе эти сети обучаются по аналогии с алгоритмом MoCo, а целевая функция

представлена перекрёстной энтропией между учеником и учителем. Таким образом, в DINO сравнивается схожесть латентных представлений примеров данных в двух сетях. Из-за отсутствия негативных пар ухудшается стабильность обучения, и авторы рекомендовали выполнять декоррелирующее преобразование латентных векторов.

В данной работе были использованы реализации описанных выше алгоритмов из публичного репозитория фрейморка контрастного обучения для классификации изображений с использованием Keras [37]. В целях сохранения возможности сравнения полученных результатов работа с данными и вспомогательные функции оптимизации полностью идентичны в обоих вариантах трансферного обучения, а последовательное обучение моделей выполнялось с одинаковой базовой сетью на всех основных алгоритмах.

2. Наборы данных

2.1. Вспомогательный набор данных для обучения базовой сети. В качестве набора данных для предобученной сети был выбран самый большой из доступных, близких к задаче диагностики депрессии открытый набор данных HBN EO/EC task [38] в силу большого количества участников и значительного размера (2952 записи ЭЭГ детей от 5 лет до 21 года с открытыми и закрытыми глазами), а также схожести структуры данных с целевой задачей. Данные каждого участника представлены в виде 5 отрезков, состоящих из записи длиной 20 секунд с открытыми глазами и 40 секунд с закрытыми глазами. В описательном файле набора данных для каждого участника содержится следующая информация: пол (булевая переменная — мужчина / женщина), возраст (число с плавающей запятой — количество лет), ведущая рука (число с плавающей запятой — на шкале левша / правша). Данные о ведущей руке в работе не использовались.

Подробные данные о наборе данных HBN EO/EC task приведены в табл. 1.

Таблица 1. Описание набора данных ЭЭГ HBN EO/EC task

Table 1. HBN EO/EC task EEG dataset description

Название	HBN EO/EC task
URL	https://openneuro.org/datasets/ds004186/ versions/2.0.0
Место получения	Институт нейронных вычислений, Университет Калифорнии, Сан-Диего, США
Общее число участников	2952
Число мужчин/женщин	1046/1906
Средний возраст, лет	10.3 ± 3.5
Используемые каналы ЭЭГ	HydroCel Geodesic Sensor Net. Каналы, соответствующие системе 10–10: C3, C4, Cz, F3, F4, F7, F8, FP1, FP2, FPz, Fz, O1, O2, P3, Oz, P4, P7, P8, T7, T8, AF3, AF4, AF7, AF8, AFz, C1, C2, C5, Pz, C6, CP1, CP2, CP3, CP4, Cp5, CP6, CPz, F1, F2, F5, F6, F9, F10, FC1, FC2, FC3, FC4, FC5, FC6, FCz, FT10, FT7, FT8, FT9, P1, P2, P5, P6, P9, P10, PO3, PO4, PO7, PO8, POz, T9, T10, T11, T12, TP7, TP8, TP9, TP10
Референс	Cz
Частота дискретизации, Гц	500
Параметры фильтрации (ФВЧ/ ФНЧ/режекция), Гц	нет данных
Формат файлов данных	.set, .fdt (EEGLAB)

Для дальнейшей работы данные ЭЭГ были предварительно обработаны согласно ранее разработанной процедуре с использованием библиотеки MNE-Python [39]:

1) снижение частоты дискретизации до 200 Гц;
2) цифровая фильтрация сигнала ФВЧ (1 Гц), ФНЧ (40 Гц), режекторный фильтр (60 Гц);
3) выбор 19 отведений: Fp1, Fp2, F7, F3, Fz, F4, F8, T7, C3, Cz, C4, T8, P7, P3, Pz, P4, P8, O1, O2, соответствующий стандартной ЭЭГ-системе 10–20;
4) приведение к единому названию и порядку каналов, сохранение полученных данных в файлах формата CSV и HDF5.

2.2. Основной набор данных для классификации депрессии. На момент проведения исследования были найдены следующие доступные наборы данных, содержащие данные ЭЭГ пациентов с диагностированным депрессивным расстройством и полученные в расслабленном состоянии с закрытыми глазами:

1) MDD Patients and Healthy Controls EEG Data (New) [40];
2) EEG: Depression rest [41];
3) MODMA Dataset: a Multi-modal Open Dataset for Mental-disorder Analysis [42].

Первый и второй наборы данных доступны для скачивания в сети Интернет. Для получения доступа к третьему набору данных необходимо было заполнить и отправить авторам Лицензионное соглашение конечного пользователя.

Для дополнения открытых наборов данных для классификации депрессии и увеличения общего количества наблюдений и пациентов было проведено исследование ЭЭГ у 37 пациентов (9 мужчин, 28 женщин, средний возраст — 39.8±15.2) с подтвержденным диагнозом депрессивного расстройства на базе Клинико-диагностического центра БФУ им. И. Канта.

В ходе сессии проводилась регистрация ЭЭГ бодрствующих пациентов в расслабленном состоянии с закрытыми и открытыми глазами.

Как видно из табл. 2, общие свойства наборов данных значительно различаются, но для создания итоговой базы данных ЭЭГ данные необходимо объединить.

Таблица 2. Параметры наборов данных ЭЭГ, связанных с депрессией

Table 2. Parameters of EEG datasets associated with depression

	Наборы данных				
Источник	[40]	[41]	[42]	Данная работа	TDBRAIN
Источник данных	Малайзия	США	Китай	Россия	Нидерланды
Общее число участников	64	121	53	37	1274
Число участников с БДР	34	46	24	27	320
Диагностика БДР	Диагноз	Диагноз, шкала Бека	Диагноз	Диагноз, шкала Бека	Диагноз, шкала Бека
Число мужчин / женщин	38/26	47/74	33/20	9/28	654/620
Средний возраст, лет	39.4±14.1	18.9±1.2	31.2±9.6	39.8±15.2	38.7±19.2
Число каналов	19	66	129	19	33 (26)
Частота дискретизации, Гц	256	500	250	500	500
Параметры фильтрации (ФВЧ/ФНЧ /режекция), Гц	0.1/70/50	нет данных	нет данных	0.5/70/50	/100/
Референс	Linked ear (LE)	Между Cz и CPz	Cz	A1	Между A1 и A2

Для согласования данных использовалась следующая процедура с использованием библиотеки MNE-Python:

- согласование частоты дискретизации с понижением до 200 Гц;
- применение цифровых фильтров согласно принятой практике ФВЧ (1 Гц), ФНЧ (40 Гц) [9];
- согласование числа используемых каналов до 19 отведений, используемых в нашей настройке сбора данных: Fp1, Fp2, F7, F3, Fz, F4, F8, T7, C3, Cz, C4, T8, P7, P3, Pz, P4, P8, O1, O2;
- изменение референсного электрода на Cz во всех наборах данных;
- приведение к единому виду и формату размерности данных, названий и порядка каналов, преобразование файла для сохранения результатов в формат CSV.

Каждый полученный файл данных был размечен меткой наличия или отсутствия БДР (большого депрессивного расстройства). В случае отсутствия данных о наличии диагноза метка наличия БДР назначалась для пациентов с результатом теста по шкале Бека выше 13 баллов. Для контроля качества полученных данных каждый файл был визуально исследован с отбором наибольшего непрерывного участка данных без существенных артефактов и отбрасыванием зашумленных сегментов.

Промежуточный объединённый набор данных ЭЭГ пациентов в расслабленном состоянии с закрытыми глазами, размеченный в соответствии с наличием или отсутствием БДР, содержит данные 122 пациентов с диагнозом БДР и 123 файла контрольной группы суммарной продолжительностью 13927 и 13841 секунд соответственно.

Позднее созданная объединенная база данных ЭЭГ, размеченная в соответствии с наличием или отсутствием БДР, была дополнительно расширена за счет большого открытого набора данных TDBRAIN [43]. Сводные данные об основных характеристиках наборов данных приведена в табл. 2.

Число пациентов с меткой диагноза БДР в наборе данных TDBRAIN составляет 320 человек, с меткой «Здоров» — всего 47 человек, что потребовало дополнительного отбора пациентов с метками «Синдром дефицита внимания и гиперактивности», «Обсессивно-компульсивное расстройство» и «Тиннитус» в количестве 200, 40 и 31 человек соответственно для балансировки классов и назначения им метки депрессии, поскольку данные расстройства часто являются сопутствующими при депрессии и приводят к схожему нарушению психофизиологического состояния.

Таким образом, итоговый размер объединенной базы данных ЭЭГ пациентов в расслабленном состоянии с закрытыми глазами: 441 файлов пациентов с диагнозом БДР и 443 файлов пациентов контрольной группы. Суммарная продолжительность сырых сигналов ЭЭГ составила 52144 и 51968 секунд соответственно.

2.2.1. Выбор частот фильтрации. При использовании стандартных методов клинической интерпретации данных ЭЭГ рассматриваются сигналы, находящиеся в диапазоне частот 0.1...70 Гц. В случае исследований диагностики депрессии по данным ЭЭГ наиболее распространенный диапазон частот уже и составляет 1...40 Гц. Именно этот диапазон и применялся при цифровой фильтрации сигналов в объединенном наборе данных после понижения частоты дискретизации до 200 Гц.

Дополнительных методов удаления артефактов, кроме проведения визуальной инспекции, не применялось, так как у людей, находящихся в расслабленном состоянии и с закрытыми глазами, предполагается минимизация мышечной активности и отсутствие артефактов моргания и движения глаз.

2.2.2. Анализ эффективности гармонизации. Очевидно, сырой ЭЭГ-сигнал в чистом виде не подходит для анализа структуры полученного набора данных в силу большого числа переменных (порядка нескольких тысяч) и необходимо воспользоваться теорией представлений.

С использованием представлений выполняется преобразование исходных данных для снижения числа независимых переменных до двух или трех, что удобно для визуализации и анализа человеком. В качестве примера таких преобразований можно привести метод случайных проекций и метод главных компонент (PCA), но для визуализации данных ЭЭГ целесообразно использовать метод стохастического вложения соседей с t-распределением (t-SNE) [44], широко распространенный в области низкоразмерной визуализации многомерных данных. В отличие от PCA, который стремится сохранить глобальную структуру данных, t-SNE сохраняет только локальную структуру (смежность ближайших соседей точек выборки). Это означает, что при интерпретации полученных данных ни размер, ни глобальное расположение отдельных кластеров не несут полезной информации, а интерпретируемым признаком является равномерность распределения по классам.

Для обработки данные нарезались скользящим окном с шагом 0.5 секунд на сегменты длиной 3 секунды, затем для каждого окна с помощью преобразования Фурье рассчитывался спектр мощностей и производилась нормализация данных таким образом, чтобы среднее по окну равнялось нулю, а дисперсия — единице. Подготовленные данные подавались на вход t-SNE (реализация sklearn) при различных значениях параметра перплексии в диапазоне от 5 до 50. Результаты дополнительно размечались цветом в соответствии с источником данных и поставленным диагнозом. Полученная низкоразмерная проекция набора данных представлена на рис. 1 и 2.

При варьировании перплексии в выбранном диапазоне существенных структурных преобразований полученного представления не наблюдалось, что позволяет предположить адекватность

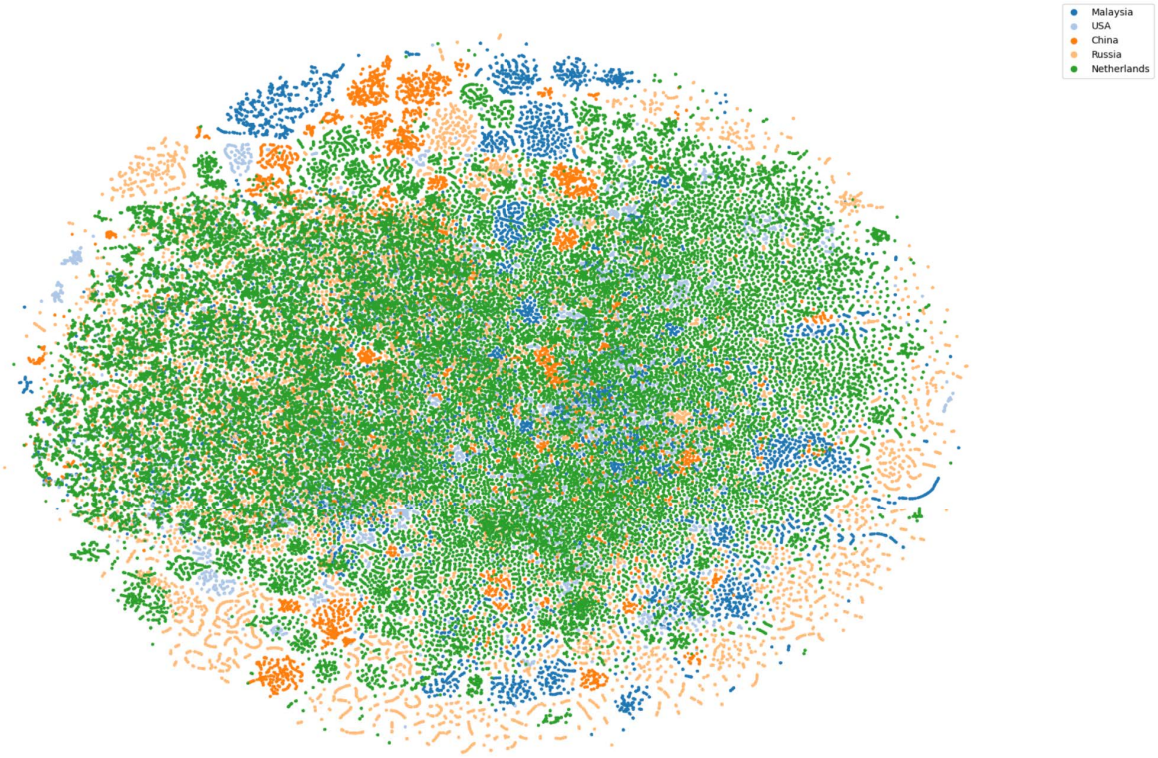


Рис. 1. Результаты t-SNE (перплексия 25), цветовая индикация согласно источнику данных (цвет онлайн)

Fig. 1. Results of t-SNE clusterisation (perplexion 25), color code means data source (color online)

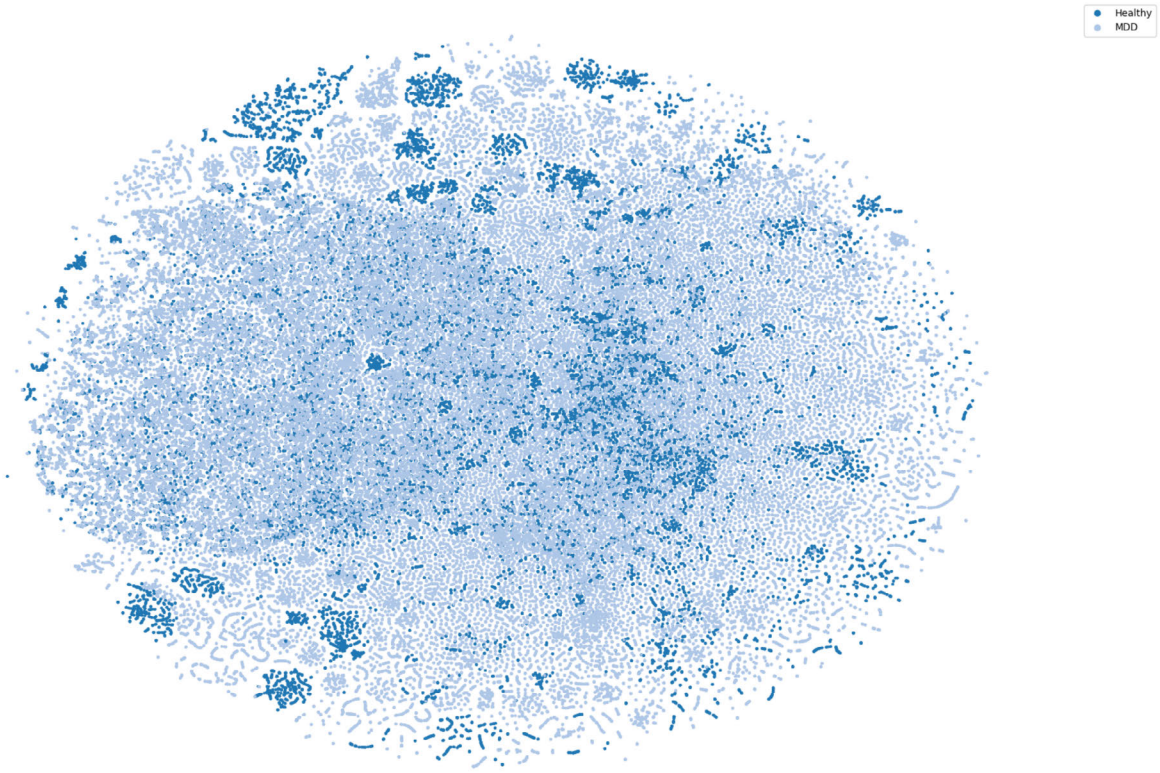


Рис. 2. Результаты t-SNE (перплексия 25), цветовая индикация согласно поставленному диагнозу (цвет онлайн)

Fig. 2. Results of t-SNE clusterisation (perplexion 25), color code means diagnosis labeling (color online)

построенной проекции и свидетельствует в том числе, что полученные кластеры не являются фиктивными.

Рассмотрение полученного распределения по источникам данных позволяет сделать вывод об успешности выбранной процедуры гармонизации выборок. Данные не распадаются естественным образом на крупные кластеры, значительная часть сосредоточена в центральном скоплении, состоящем из данных всех начальных наборов. На периферии можно наблюдать несколько малых кластеров, отличающихся как по источнику данных, так и по диагнозу. Длинные цепочки точек — предположительно восстановленные алгоритмом целиком сессии записи данных отдельных пациентов. Распределение по диагнозу также не показывает очевидного разделения. Резюмируя, можно сделать вывод о том, что созданный набор данный соответствует задаче исследования и подходит для обучения на нем основной нейронной сети.

2.3. Аугментация. Для увеличения объема данных обучения и внесения наблюдений, незначительно различающихся между собой, используется аугментация, то есть преобразование отдельных характеристик сигнала по определенным шаблонам. За счёт многообразия вариантов аугментаций возникает индуктивное смещение, расширяющее охват потенциальных признаков полезного сигнала. Хотя отдельные признаки могут быть инвариантны к некоторым типам аугментации и являться индикаторами схожести для контрастных пар, не существует признака, инвариантного к любым изменениям сигнала (при условии надлежащим образом заданной процедуры аугментации) [20, 22]. Данный эффект приводит к тому, что сеть обучается различать множество различных признаков, никак не ограниченных рамками конкретной задачи и зависящих только от полноты набора применяемых аугментаций и наличия паттернов в обучающей выборке.

В данном исследовании используется работа [31], посвященная анализу ЭЭГ-сигналов, связанных с нейрофизиологическими процессами внимания и кратковременной памяти. Влияние кратковременной памяти на когнитивные функции пациентов хорошо известно, поэтому можно предположить, что приведённый в статье набор аугментаций позволит получить эффективный набор синтетических данных. Список рекомендованных авторами аугментаций следующий:

- добавление Гауссова шума,
- зануление сигнала по всем каналам на случайном отрезке произвольной длины,
- сдвиг среднего значения на произвольном канале,
- зануление сигнала для нескольких произвольных каналов,
- изменение знака сигнала на противоположный на произвольных каналах,
- полосно-заграждающая фильтрация на случайной полосе частот в сигнале,
- масштабирование амплитуды сигнала,
- масштабирование амплитуды сигнала с использованием кубического сплайна.

Все вышеуказанные пункты, за исключением последнего, для которого не были приведены детали реализации, вошли в финальную процедуру аугментации. В ней пример данных дважды проходит через конвейер аугментаций, каждая из которых применяется с вероятностью 75%. Полученный сигнал образует позитивную пару наблюдений, внутренние представления которых должны размещаться вблизи друг друга в латентном пространстве обученной сети. Данный алгоритм был внедрен в конвейер обучения базовой сети на первом этапе.

3. Методика обучения и обработки данных

3.1. Методика обучения предобученной сети. В качестве базовых архитектур предобученных сетей применялись сверточная нейронная сеть EEGNet, хорошо зарекомендовавшая себя в задачах классификации ЭЭГ, и сеть архитектуры 1D CNN с большим количеством параметров. Для обучения был подобран следующий алгоритм переноса части обученных слоев:

- от исходной сети отделялись все полносвязные слои, прилегающие к выходному слою;
- для каждого из целевых признаков создавался полносвязный перцептрон с двумя скрытыми слоями (с двумя выходными нейронами в случае булевой целевой переменной и одним в противном случае);
- вход каждого перцептрона соединялся с новым выходным слоем исходной сети.

Таким образом, для предобученной сети использовались 3 выхода (пол, возраст, закрытые/открытые глаза), соответствующие разметке базового набора данных, напрямую не связанного с депрессией. Это позволило оценить эффективность обучения сети в целом перед дополнительным обучением на целевом наборе данных.

Основные параметры вспомогательных сетей приведены в табл. 3.

Таблица 3. Основные параметры вспомогательных сетей

Table 3. Pre-trained CNN parameters

Сеть	Количество слоев	Количество нейронов в скрытых слоях	Количество ядер	Функция активации	Количество параметров
CNN 1D	5	100/5	128	RELU	12170105
EEGNet	11	10/10	16	Линейная	3685

При обучении использовалась специально построенная функция потерь, представляющая собой взвешенную сумму функций потерь для каждого отдельного выхода (среднеквадратичная ошибка для возраста и бинарная перекрестная энтропия для остальных). При обучении модели веса подбирались таким образом, чтобы функция потерь была минимальна.

После обучения с использованием алгоритма Adam с шагом 10^{-5} для проверки качества обучения на тренировочной выборке вычислялись точности по каждому классу (пол, закрытые/открытые глаза) и среднеквадратичная ошибка (возраст) соответственно.

Данные для обучения подготавливались следующим образом:

- нарезка скользящим окном длиной 4 секунды с шагом 2 секунды,
- фильтрация режекторным фильтром 60 Гц и полосовым 0.5...100 Гц,
- нормализация данных на 0 среднего и 1 дисперсии.

После подготовки данные были разделены на обучающую и тестовую выборки в соотношении $9:1$, при этом ни один субъект не попадал в обе выборки одновременно для предотвращения утечки данных. Для обучения на латентном пространстве признаком применялась аугментация данных в виде позитивным пар.

Результаты обучения на базовом наборе данных показали достаточно хорошие результаты. Так, обе архитектуры сети показали точность более 0.8 (1D CNN — 0.82, EEGNet — 0.81) в задаче определения пола, более 0.7 (1D CNN — 0.81, EEGNet — 0.74) в задаче определения открытых или закрытых глаз. Задача определения возраста показала существенное различие в результатах обучения. Так, среднеквадратичная ошибка для EEGNet составила 15.69, а для 1D CNN — 6.07. Несмотря на некоторую разницу результатов, обе сети пригодны для дальнейшего обучения на целевом наборе данных для классификации депрессии.

3.2. Методика обучения основной сети. Используя полученные базы данных ЭЭГ-сигналов, были выполнены процедуры обучения двух рассмотренных выше нейронных сетей и урезанной сверточной сети, схожей с EEGNet.

1. Одномерная сверточная нейронная сеть из 5 слоев (CNN 1D) [45].
2. Компактная двумерная сверточная нейронная сеть из 11 слоев (EEGNet) [46].
3. Двумерная сверточная нейронная сеть из 8 слоев (CNN 2D), созданная по принципу EEGNet, но состоящая только из сверточных слоев.

Перед обучением выполнялась следующая подготовка данных:

1) загрузка данных из CSV-файла;
2) нарезка данных на отрезки по 600 отсчетов без перекрытия (соответствует продолжительности сигнала в 3 секунды);
3) нормализация данных путем сдвига несущей таким образом, чтобы среднее значение входной переменной было близко к нулю, а ковариация данных — приблизительно одинакова по всей обучающей выборке для увеличения скорости сходимости при обучении [47–51].

С целью получения достоверных результатов разбиение данных осуществлялось с учетом их принадлежности конкретному пациенту, а само обучение велось с использованием процедуры перекрестной проверки, которая состоит в разбиении данных на 10 непересекающихся частей с последовательной проверкой эффективности обучения на разных распределениях обучающей и тестовой выборок со стратифицированным разбиением. По результатам обучения для каждого разбиения вычислялись значения точности классификации и F1-меры.

В качестве обучающего алгоритма использовался метод адаптивной инерции (Adam) с параметрами скорости обучения 0.0001 и размером минибатча 64. Используемая функция потерь — стандартная категориальная перекрестная энтропия. Обучение сети происходило с отслеживанием динамики изменения функции ошибки на тестовой выборке (с использованием функции EarlyStopping из библиотеки TensorFlow) и останавливалось при отсутствии улучшения функции ошибки в течении 4 эпох.

Итоговое обучение нейронных сетей, предварительно обученных на наборе данных HBN EO/EC task, выполнялось по следующей процедуре:

1. Загрузка предварительно обученной нейронной сети.
2. Отбрасывание последних полносвязных слоев, отвечающих за классификацию или регрессию на целевые данные вспомогательной задачи.
3. Добавление новых полносвязных слоев, предназначенных для решения задачи классификации депрессивного расстройства.
4. Обучение сети на данных ЭЭГ пациентов с депрессией с пониженной скоростью обучения (0.00001).

В случае контрастного предварительного обучения этапы были аналогичны, но веса предварительно обученной нейронной сети были фиксированы и не менялись в процессе обучения.

Результаты усредненных данных перекрестных проверок точности классификации и F1-меры представлены в табл. 4.

Полученные результаты демонстрируют, что ни изменение частот фильтрации, ни трансферное обучение с аугментацией не способствовали существенному повышению точности классификации депрессии в целевой задаче. Использование архитектуры EEGNet в 2D-представлении из одних лишь сверточных слоев также оказалось безуспешным. При этом существенной разницы в точности не удалось достичь также для контрастного обучения на обеих архитектурах сетей. Несколько более высокие результаты для сети 1D CNN объясняются скорее большим количеством настраиваемых параметров, нежели успешным выделением признаков депрессии. Так как набор данных для контрастного обучения был составлен из записей ЭЭГ детей без диагностированной депрессии, никакой первичной информации о конечной задаче диагностики в нем не содержалось. Увеличение размеров предобученной сети позволило получить в достаточной степени качественное латентное пространство в контексте решаемой задачи при сохранении структуры и числа обучаемых весов блока классификации, но полученные результаты сопоставимы с показателями EEGNet, напрямую обученной на задачу диагностики депрессии. Это позволяет предположить успешное выделение широкого спектра релевантных паттернов ЭЭГ обеими сетями, но без привязки к каким-либо узконаправленным задачам. При этом их латентные представления сырых сигналов являются достаточно эффективными, чтобы выступать в качестве признаков, позволяющих более компактной по размерам сети достичь для рассматриваемой задачи результатов, сопоставимых с результатами оригинальной EEGNet при прямом обучении без трансфера. Необходимо отметить, что из-за особенностей конструкции трансферных моделей дальнейшие изменения в модуле классификации ситуацию изменить не могут, поскольку достигнутые показатели точности практически полностью зависят от качества выделяемых паттернов ЭЭГ.

Таблица 4. Точность классификации депрессивного расстройства по данным ЭЭГ нейронными сетями на разных версиях базы данных ЭЭГ и использованием трансферного обучения

Table 4. Depression classification accuracy based on transfer learning models using different EEG datasets

Фильтрация ЭЭГ от 1 до 40 Гц					
Обучение	Предобученная		Без предобучения		
Сеть	CNN 1D	EEGNet	CNN 1D	EEGNet	CNN 2D
Точность	0.64 ± 0.04	0.66 ± 0.05	0.65 ± 0.05	0.66 ± 0.05	0.65 ± 0.04

Фильтрация ЭЭГ от 0.5 до 100 Гц							
Обучение	Предобученная				Без предобучения		
Сеть	CNN 1D	EEGNet	CNN 1D (MoCo)	CNN 1D (SimCLR)	CNN 1D	EEGNet	CNN 2D
Точность	0.66 ± 0.04	0.65 ± 0.05	0.66 ± 0.04	0.66 ± 0.04	0.66 ± 0.05	0.66 ± 0.06	0.65 ± 0.05

Для проведения сравнительного анализа влияния размера моделей было выполнено дополнительное обучение на целевом наборе данных двух архитектур сетей с заявленными высокими показателями в целевой задаче диагностики депресиии: DeprNet и DepHNN.

- Сеть DeprNet [53] — глубокая (18 слоев) одномерная сверточная сеть с заявленной точностью классификации депрессии 99.37%. Содержит сверточные слои (320 ядер 1x5) и классификатор в виде 3 полносвязных слоев (16, 8 и 2 нейрона).
- Сеть DepHNN [54] — гибридная (6 слоев) сеть из одного одномерного сверточного слоя и слоев LSTM с заявленной точностью классификации депрессии 99.10%. Содержит 64 ядра 1x5 в одном сверточном слое, два слоя LSTM (64 и 32) и аналогичный сети DeprNet классификатор из трех полносвязных слоев в 16, 8 и 2 нейрона.

Результат обучения на полученном целевом наборе данных показал:

- DeprNet: 0.65 ± 0.04;
- DepHNN: 0.65 ± 0.03.

Полученные результаты резко отличаются от приведенных в работах [53, 54] и в целом аналогичны полученным при трансферном обучении на сетях с предыдущими вариантами архитектуры. Это позволяет утверждать, что причина кроется не в архитектуре сетей как таковой, а скорее в методе обучения и структуре обучающих данных в целом. Учитывая разнородность источников получения данных, объединенных в одну выборку, и сравнительно небольшое количество информации о каждом конкретном пациенте, представленной в ней, можно предположить наличие множества различных признаков депрессии, отличающихся у разных пациентов. Это также приводит к гипотетической возможности достижения высокой точности классификации за счет некорректного разбиения данных (без учета разделения данных по пациентам) на существенно меньших выборках (менее 50 участников с диагнозом депрессия). Продемонстрированные показатели обнаружения депрессии по данным ЭЭГ (табл. 4) не позволяют с уверенностью заявить о возможной генерализации результатов для больших наборов данных, что подтверждается аналогичными работами [55].

Хотя сам метод трансферного обучения, реализованный на полученной паре базовых сетей на базе 1D CNN, выглядит перспективным, специфичность ЭЭГ-сигналов и решаемых на их основе задач требует масштабной адаптации алгоритмов и техник контрастной оптимизации для эффективного обучения целевой задаче. Например, важным условием успешности контрастного обучения является корректная процедура аугментации, определяющая индуктивное смещение в поиске повторяющихся паттернов весов сети. Нахождение наиболее эффективных преобразований характеристики отдельных наблюдений для сигналов ЭЭГ представляет собой отдельную сложную задачу и сильно зависит от экспертного представления о природе признаков депрессии. Это особенно актуально для наборов данных с большим количеством испытуемых, значительно различающихся между собой, одной из задач, для которой заявлено эффективное использование трансферного обучения [52].

Активно исследуются в последние несколько лет новые, потенциально более подходящие для контрастного обучения архитектуры базовых сетей и алгоритмов обучения [41, 42]. Так, показана эффективность трансферного обучения единой модели классификации депрессии для разнородных мультимодальных данных, в том числе значительно различающихся по своей природе, например, содержащих аудио и текст [55]. Хотя в общем случае (например, для графических изображений) никаких специальных модификаций сети не требуется, существует вероятность того, что для эффективного выделения всех полезных паттернов из сигнала ЭЭГ в рамках контрастного обучения необходимы специфические архитектуры сетей, отличные от стандартных свёрточных и полносвязных слоёв или комбинации нескольких сетей меньшего размера [55, 56]. Одним из модифицированных вариантов контрастного обучения является применение меток классов для конструирования позитивных/негативных пар и сохранение контрастной целевой функции в ходе трансфера в качестве своеобразной регуляризации [57].

Заключение

Полученные результаты проведенного экспериментального сравнения точности классификации нескольких алгоритмов трансферного обучения выделяют решающую роль представительности набора данных для обучения базовой сети. Полнота реальных наблюдений повышает эффективность аугментации, обеспечивая увеличение числа «полезных» признаков в латентном пространстве сети, и создает лучшие условия для трансферного обучения в целевой задаче [58]. Полученные результаты точности классификации 64–66% в целом коррелируют с результатами определения эмоционального состояния пользователей по данным ЭЭГ. Для классификации эмоционального состояния с учетом разбиения обучающих и тестовых данных по отдельным участникам (Inter-Subject) точность составляет 45–68%, что существенно меньше показателя 74–95% для классификации на данных одного и того же участника (Intra-Subject) [59]. Продемонстрированные результаты могут свидетельствовать об уникальности индивидуальных наборов пространственно-спектральных характеристик ЭЭГ, отражающих гетерогенную природу депрессии [60].

Список литературы

1. *Карпов О. Э., Храмов А. Е.* Информационные технологии, вычислительные системы и искусственный интеллект в медицине. М.: ДПК Пресс, 2022. 479 с.
2. *Karpov O. E., Pitsik E. N., Kurkin S. A., Maksimenko V. A., Gusev A. V., Shusharina N. N., Hramov A. E.* Analysis of publication activity and research trends in the field of aI medical applications: Network approach // International Journal of Environmental Research and Public Health. 2023. Vol. 20, iss. 7. C. 5335. DOI: 10.3390/ijerph20075335.
3. *Yuan J., Ran X., Liu K., Yao C., Yao Y., Wu H., Liu Q.* Machine learning applications on neuroimaging for diagnosis and prognosis of epilepsy: A review // Journal of Neuroscience Methods. 2022. Vol. 15, iss. 368. P. 109441. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2021.109441.
4. *Karpov O. E., Grubov V. V., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Smirnov N. M., Utyashev N. P., Andrikov D. A., Shusharina N. N., Hramov A. E.* Extreme value theory inspires explainable machine learning approach for seizure detection // Scientific Reports. 2022. Vol. 12. P. 11474. DOI: 10.1038/s41598-022-15675-9.
5. *Karpov O. E., Afinogenov S., Grubov V. V., Maksimenko V., Korchagin S., Utyashev N., Hramov A. E.* Detecting epileptic seizures using machine learning and interpretable features of human EEG // The European Physical Journal Special Topics. 2023. Vol. 232, no. 5. P. 673–682. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00714-3.
6. *Erguzel T. T., Sayar G. H., Tarhan N.* Artificial intelligence approach to classify unipolar and bipolar depressive disorders // Neural Computing and Applications. 2016. Vol. 27, iss. 6. P. 1607-1616. DOI: 10.1007/s00521-015-1959-z.
7. *Andreev A. V., Kurkin S. A., Stoyanov D., Badarin A. A., Paunova R., Hramov A. E.* Toward interpretability of machine learning methods for the classification of patients with major depressive disorder based on functional network measures // Chaos. 2023. Vol. 33, iss. 6. P. 063140. DOI: 10.1063/5.0155567.
8. *Stoyanov D., Khorev V., Paunova R., Kandilarova S., Simeonova D., Badarin A., Hramov A., Kurkin S.* Resting-state functional connectivity impairment in patients with major depressive episode // International Journal of Environmental Research and Public Health. 2022. Vol. 19, iss. 21. P. 14045. DOI: 10.3390/ijerph192114045.
9. *Chaddad A., Li J., Lu Q., Li Y., Okuwobi I. P., Tanougast C., Desrosiers C., Niazi T.* Can autism Be diagnosed with artificial intelligence? A narrative review // Diagnostics. 2021. Vol. 11, iss. 11. P. 2032. DOI: 10.3390/diagnostics11112032.
10. *Song D. Y., Kim S. Y., Bong G., Kim J. M., Yoo H. J.* The use of artificial intelligence in screening

and diagnosis of autism spectrum disorder: a literature review // Journal of the Korean Academy of Child and Adolescent Psychiatry. 2019. Vol. 30. iss. 4. P. 145-152. DOI: 10.5765/jkacap.190027.
11. *Sysoeva O., Maximenko V., Kuc A., Voinova V., Martynova O., Hramov A.* Abnormal spectral and scale-free properties of resting-state EEG in girls with Rett syndrome // Scientific Reports. 2023. Vlo. 13. P. 12932. DOI: 10.1038/s41598-023-39398-7.
12. *Zhang Z., Li G., Xu Y., Tang X.* Application of artificial intelligence in the MRI classification task of human brain neurological and psychiatric diseases: A scoping review // Diagnostics. 2021. Vol. 11, iss. 8. P. 1402. DOI: 10.3390/diagnostics11081402.
13. *Pitsik E. N., Maximenko V. A., Kurkin S. A., Sergeev A. P., Stoyanov D., Paunova R., Kandilarova S., Simeonova D., Hramov A. E.* The topology of fMRI-based networks defines the performance of a graph neural network for the classification of patients with major depressive disorder // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. Vol. 167. P. 113041. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113041.
14. *Ramzan F., Khan M. U., Rehmat A., Iqbal S., Saba T., Rehman A., Mehmood Z.* A deep learning approach for automated diagnosis and multi-class classification of Alzheimer's disease stages using resting-state fMRI and residual neural networks // Journal of Medical Systems. 2020. Vol. 44. P. 1-6. DOI: 10.1007/s10916-019-1475-2.
15. *Alorf A., Khan M. U.* Multi-label classification of Alzheimer's disease stages from resting-state fMRI-based correlation connectivity data and deep learning // Computers in Biology and Medicine. 2022. Vol. 151, iss. 6. P. 106240. DOI: 10.1016/j.compbiomed.2022.106240.
16. *Subha D. P., Joseph P. K., Acharya U. R., Lim C. M.* EEG signal analysis: a survey // Journal of Medical Systems. 2010. Vol. 34, iss. 2. P. 195-212. DOI: 10.1007/s10916-008-9231-z.
17. *Lotte F., Congedo M., Lécuyer A., Fabrice L., Arnaldi B.* A review of classification algorithms for EEG-based brain–computer interfaces // Journal of Neural Engineering. 2007. Vol. 4, iss. 2. P. R1. DOI: 10.1088/1741-2560/4/2/R01.
18. *Kang H., Nam Y., Choi S.* Composite common spatial pattern for subject-to-subject transfer // IEEE Signal Processing Letters. 2009. Vol. 16, iss. 8. P. 683-686. DOI: 10.1109/LSP.2009.2022557.
19. *Wan Z., Yang R., Huang M., Zeng N., Liu X.* A review on transfer learning in EEG signal analysis // Neurocomputing. 2021. Vol. 421. P. 1-14. DOI: 10.1016/j.neucom.2020.09.017.
20. *Wu D., Xu Y., Lu B.-L.* Transfer Learning for EEG-Based Brain-Computer Interfaces: A Review of Progress Made Since 2016 // IEEE Trans. on Cognitive and Developmental Systems. 2022. Vol. 14, iss. 1. P. 4-19. DOI: 10.1109/TCDS.2020.3007453.
21. *Kuc A., Korchagin S., Maksimenko V. A., Shusharina N., Hramov A. E.* Combining statistical analysis and machine learning for EEG scalp topograms classification // Frontiers in Systems Neuroscience. 2021. Vol. 15. DOI: 10.3389/fnsys.2021.716897.
22. *Luo Y., Lu B.-L.* EEG data augmentation for emotion recognition using a conditional Wasserstein GAN // 2018 40th annual international conference of the IEEE engineering in medicine and biology society (EMBC). IEEE, 2018. P. 2535-2538. DOI: 10.1109/EMBC.2018.8512865.
23. *Weiss K., Khoshgoftaar T. M., Wang D. D.* A survey of transfer learning // Journal of Big data. 2016. Vol. 3, iss. 1. P. 1-40. DOI: 10.1186/s40537-016-0043-6.
24. *Azab A. M., Ahmadi H., Mihaylova L., Arvaneh M.* Dynamic time warping-based transfer learning for improving common spatial patterns in brain–computer interface // Journal of Neural Engineering. 2020. Vol. 17, iss. 1. P. 016061. DOI: 10.1088/1741-2552/ab64a0.
25. *Raghu S., Natarajan S., Temel Y., Rao S. V., Kubben P.* EEG based multi-class seizure type classification using convolutional neural network and transfer learning // Neural Networks. 2020. Vol. 124. P. 202-212. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.01.017.
26. *Nejedly P., Cimbalnik J., Klimeš P., Plesinger F., Halamek J., Křemen V., Viscor I., Brinkmann B. H., Pail M., Brazdil M., Worrell G., Jurak P.* Intracerebral EEG artifact identification using convolu-

tional neural networks // Neuroinformatics. 2019. Vol. 17, iss. 3. P. 225-234. DOI: 10.1007/s12021-018-9397-6.
27. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // Physics Reports. 2021. Vol. 918. P. 1-133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
28. *Shen X., Liu X., Hu X., Zhang D., Song S.,* Contrastive learning of subject-invariant EEG representations for cross-subject emotion recognition // IEEE Transactions on Affective Computing. 2023. Vol. 14, no. 3. P. 2496-2511. DOI: 10.1109/TAFFC.2022.3164516.
29. *Chen T., Kornblith S., Norouzi M., Hinton G.* A simple framework for contrastive learning of visual representations // International conference on machine learning (PMLR). 2020. P. 1597-1607. arXiv:2002.05709. DOI: 10.48550/arXiv.2002.05709.
30. *Jaiswal A., Babu A. R., Zadeh M. Z., Banerjee D., Makedon F.* A survey on contrastive self-supervised learning // Technologies. 2020. Vol. 9, iss. 1. P. 2. DOI: 10.3390/technologies9010002.
31. *Żygierewicz J., Janik R. A., Podolak I. T., Drozd A., Malinowska U., Poziomska M., Wojciechowski J., Ogniewski P., Niedbalski P., Terczynska I., Rogala J.* Decoding working memory-related information from repeated psychophysiological EEG experiments using convolutional and contrastive neural networks // Journal of Neural Engineering. 2022. Vol. 19, iss. 4. P. 046053. DOI: 10.1088/1741-2552/ac8b38.
32. *Hadsell R., Chopra S., LeCun Y.* Dimensionality reduction by learning an invariant mapping // 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Vol. 2 (CVPR'06). IEEE, 2006. P. 1735-1742. DOI: 10.1109/CVPR.2006.100.
33. *He K., Fan H., Wu Y., Xie S., Girshick R.* Momentum contrast for unsupervised visual representation learning // Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. 2020. P. 9729-9738. DOI: 10.1109/CVPR42600.2020.00975.
34. *Dwibedi D., Aytar Y., Tompson J., Sermanet P., Zisserman A.* With a little help from my friends: Nearest-neighbor contrastive learning of visual representations // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision, Montreal, QC, Canada, 2021. P. 9588-9597. DOI: 10.1109/ICCV48922.2021.00945.
35. *Zbontar J., Jing L., Misra I., LeCun Y., Deny S.* Barlow twins: Self-supervised learning via redundancy reduction // International Conference on Machine Learning (PMLR), 2021. P. 12310-12320. arXiv:2103.03230. DOI: 10.48550/arXiv.2103.03230.
36. *Caron M., Touvron H., Misra I., Jégou H., Mairal J., Bojanowski P., Joulin A.* Emerging properties in self-supervised vision transformers // Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2021. C. 9650-9660. arXiv:2104.14294. DOI: 10.48550/arXiv.2104.14294
37. Self-supervised Contrastive Learning for Image Classification with Keras [Электронный ресурс]. Дата обращения: 16.01.2024. https://github.com/beresandras/contrastive-classification-keras.
38. *Alexander L. M., Escalera J., Ai L., Andreotti C., Febre K., Mangone A., Vega-Potler N., Langer N., Alexander A., Kovacs M., Litke S., O'Hagan B., Andersen J., Bronstein B., Bui A., Bushey M., Butler H., Castagna V., Camacho N., Chan E., Citera D., Clucas J., Cohen S., Dufek S., Eaves M., Fradera B., Gardner J., Grant-Villegas N., Green G., Gregory C., Hart E., Harris S., Horton M., Kahn D., Kabotyanski K., Karmel B., Kelly S. P., Kleinman K., Koo B., Kramer E., Lennon E., Lord C., Mantello G., Margolis A., Merikangas K. R., Milham J., Minniti G., Neuhaus R., Levine A., Osman Y., Parra L. C., Pugh K. R., Racanello A., Restrepo A., Saltzman T., Septimus B., Tobe R., Waltz R., Williams A., Yeo A., Castellanos F. X., Klein A., Paus T., Leventhal B. L., Craddock R. C., Koplewicz H. S., Milham M. P.* HBN EO/EC task. OpenNeuro Accession Number ds004186. DOI: doi:10.18112/openneuro.ds004186.v2.0.0.
39. *Gramfort A., Luessi M., Larson E., Engemann D. A., Strohmeier D., Brodbeck C., Goj R., Jas M., Brooks T., Parkkonen L., Hämäläinen M.* MEG and EEG data analysis with MNE-Python // Frontiers in Neuroscience. 2013. Vol. 7. P. 267. DOI: 10.3389/fnins.2013.00267.

40. *Mumtaz W.* MDD Patients and Healthy Controls EEG Data (New). Dataset. 2016. DOI: 10.6084/m9.figshare.4244171.v2
41. *Cavanagh J. F.* EEG: Depression rest. Dataset. 2021. DOI: 10.18112/openneuro.ds003478.v1.1.0.
42. *Cai H., Gao Y., Sun S., Li N., Tian F., Xiao H., Hu B.* MODMA dataset: a Multi-modal Open Dataset for Mental-disorder Analysis. arXiv:2002.09283. 2020. http://modma.lzu.edu.cn/data/application/.
43. *van Dijk H., van Wingen G. A., Denys D., Olbrich S., van Ruth R., Arns M.* The two decades brainclinics research archive for insights in neurophysiology (TDBRAIN) database // Scientific Data. 2022. Vol. 9, iss. 1. P. 1-10. DOI: 10.1038/s41597-022-01409-z.
44. *Maaten L., Hinton G.* Visualizing data using t-sne // Journal of Machine Learning Research. 2008. Vol. 9. P. 2579-2605.
45. *Sandheep P., Vineeth S., Poulose M., Subha D. P.* Performance analysis of deep learning CNN in classification of depression EEG signals // TENCON 2019 - 2019 IEEE Region 10 Conference (TENCON), Kochi, India. IEEE, 2019. P. 1339-1344. DOI: 10.1109/TENCON.2019.8929254.
46. *Lawhern V. J., Solon A. J., Waytowich N., Gordon S. M., Hung C. P., Lance B. J.* EEGNet: a compact convolutional neural network for EEG-based brain–computer interfaces // Journal of neural engineering. 2018. Vol. 15, iss. 5. P. 056013. DOI: 10.1088/1741-2552/aace8c.
47. *LeCun Y. A., Bottou L., Orr G. B., Müller K.-R.* Efficient BackProp // In: Montavon G., Orr G. B., Müller K. R. (eds) Neural Networks: Tricks of the Trade. Lecture Notes in Computer Science, vol. 7700. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. P. 9-48.
48. *van Dijk H., Koppenberg M., Arns M.* Towards robust, reproducible, and clinically actionable EEG biomarkers: Large open access EEG Database for discovery and out-of-sample validation // Clinical EEG and Neuroscience. 2022. Vol. 54, iss. 2. DOI: 10.1177/15500594221120516.
49. *Darvishi-Bayazi M.-J., Ghaemi M. S., Lesort T., Arefin Md R., Faubert J., Rish I.* Amplifying pathological detection in EEG signaling pathways through cross-dataset transfer learning. arXiv:2309.10910. DOI: 10.48550/arXiv.2309.10910
50. *Zeng H., Li X., Borghini G., Zhao Y., Aricò P., Di Flumeri G., Sciaraffa N., Zakaria W., Kong W., Babiloni F.* An EEG-based transfer learning method for cross-subject fatigue mental state prediction // Sensors. 2021. Vol. 21, iss. 7. P. 2369. DOI: 10.3390/s21072369.
51. *Zhang K., Xu G., Zheng X., Li H., Zhang S., Yu Y., Liang R.* Application of transfer learning in EEG decoding based on brain-computer interfaces: A review // Sensors. 2020. Vol. 20, iss. 21. P. 1-25. DOI: 10.3390/s20216321.
52. Deep Learning Applications. Vol. 4 / M. Arif Wani, Vasile Palade (eds.). Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 1434. Singapore: Springer, 2023. 384 p. DOI: 10.1007/978-981-19-6153-3
53. *Seal A., Bajpai R., Agnihotri J., Yazidi A., Herrera-Viedma E., Krejcar O.* DeprNet: A deep convolution neural network framework for detecting depression using EEG // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2021. Vol. 70. P. 1-13. 2505413. DOI: 10.1109/TIM.2021.3053999.
54. *Sharma G., Parashar A., Joshi A. M.* DepHNN: A novel hybrid neural network for electroencephalogram (EEG)-based screening of depression // Biomedical Signal Processing and Control. 2021. Vol. 66. P. 102393. DOI: 10.1016/j.bspc.2020.102393.
55. *Uran A., van Gemeren C., van Diepen R., Chavarriaga R., del R. Millán J.* Applying transfer learning to deep learned models for EEG analysis. arXiv:1907.01332. DOI: 10.48550/arXiv.1907.01332.
56. *Osman Berke Guney, Huseyin Ozkan* Transfer Learning of an Ensemble of DNNs for SSVEP BCI Spellers without User-Specific Training. arXiv:2209.01511. DOI: 10.48550/arXiv.2209.01511.
57. *Ju C., Gao D., Mane R., Tan B., Liu Y., Guan C.* Federated Transfer Learning for EEG Signal Classification // 42nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine &

Biology Society (EMBC), Montreal, QC, Canada, 2020. P. 3040-3045. DOI: 10.1109/EMBC44109.2020.9175344.
58. *Khosla P., Teterwak P., Wang C., Sarna A., Tian Y., Isola Ph., Maschinot A., Liu C., Krishnan D.* Supervised contrastive learning // Advances in Neural Information Processing Systems. 2020. Vol. 33. P. 18661-18673. ArXiv:abs/2004.11362. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:216080787.
59. *Lv Z., Zhang J., Epota Oma E.* A novel method of emotion recognition from multi-band EEG topology maps based on ERENet // Appl. Sci. 2022. Vol. 12. 10273. DOI: https://doi.org/10.3390/app122010273.
60. *Xiao J., Provenzaa N. R., Asfouric J., Myersa J., Mathuraa R. K., Metzgera B., Adkinsona J. A., Allawalad A.B., Pirtlea V., Oswalta D., Shoftya B., Robinsona M.E., Mathewe S.J., Goodmane W.K., Pouratianf N., Schraterg P. R., Patel A. B., Tolias A. S., Bijankia K. R., Pitkowb X., Sheth S. A.* Decoding depression severity from intracranial neural activity // Biological Psychiatry. 2023. Vol. 94, iss. 6. P. 445-453. DOI: 10.1016/j.biopsych.2023.01.020.

References

1. Karpov OE, Khramov AE. Information technologies, computing systems and artificial intelligence in medicine. Moscow: DPK Press; 2022. 479 p.
2. Karpov OE, Pitsik EN, Kurkin SA, Maksimenko VA, Gusev AV, Shusharina NN, Hramov AE. Analysis of Publication Activity and Research Trends in the Field of AI Medical Applications: Network Approach. International Journal of Environmental Research and Public Health. 2023;20:5335. DOI: 10.3390/ijerph20075335.
3. Yuan J, Ran X, Liu K, Yao C, Yao Y, Wu H, Liu Q. Machine learning applications on neuroimaging for diagnosis and prognosis of epilepsy: A review. Journal of Neuroscience Methods. 2022;368:109441. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2021.109441.
4. Karpov OE, Grubov VV, Maksimenko VA, Kurkin SA, Smirnov NM, Utyashev NP, Andrikov DA, Shusharina NN, Hramov AE. Extreme value theory inspires explainable machine learning approach for seizure detection. Scientific Reports. 2022;12:11474. DOI: 10.1038/s41598-022-15675-9.
5. Karpov OE, Afinogenov S, Grubov VV, Maksimenko V, Korchagin S, Utyashev N, Hramov AE. Detecting epileptic seizures using machine learning and interpretable features of human EEG. The European Physical Journal Special Topics. 2023;232(5):673-682. DOI: 10.1140/epjs/s11734-022-00714-3.
6. Erguzel TT, Sayar GH, Tarhan N. Artificial intelligence approach to classify unipolar and bipolar depressive disorders. Neural Computing and Applications. 2016;27(6):1607-1616. DOI: 10.1007/s00521-015-1959-z.
7. Andreev AV, Kurkin SA, Stoyanov D, Badarin AA, Paunova R, Hramov AE. Toward interpretability of machine learning methods for the classification of patients with major depressive disorder based on functional network measures. Chaos. 2023;33(6):063140. DOI: 10.1063/5.0155567.
8. Stoyanov D, Khorev V, Paunova R, Kandilarova S, Simeonova D, Badarin A, Hramov A, Kurkin S. Resting-state functional connectivity impairment in patients with major depressive episode. International Journal of Environmental Research and Public Health. 2022;19(21):14045. DOI: 10.3390/ijerph192114045.
9. Chaddad A, Li J, Lu Q, Li Y, Okuwobi IP, Tanougast C, Desrosiers C, Niazi T. Can autism Be diagnosed with artificial intelligence? A narrative review. Diagnostics. 2021;11(11):2032. DOI: 10.3390/diagnostics11112032.
10. Song DY, Kim SY, Bong G, Kim JM, Yoo HJ. The use of artificial intelligence in screening and diagnosis of autism spectrum disorder: a literature review. Journal of the Korean Academy of Child and Adolescent Psychiatry. 2019;30(4):145-152. DOI: 10.5765/jkacap.190027.

11. Sysoeva O, Maximenko V, Kuc A, Voinova V, Martynova O, Hramov A. Abnormal spectral and scale-free properties of resting-state EEG in girls with Rett syndrome. Scientific Reports. 2023;13:12932. DOI: 10.1038/s41598-023-39398-7.
12. Zhang Z, Li G, Xu Y, Tang X. Application of artificial intelligence in the MRI classification task of human brain neurological and psychiatric diseases: A scoping review. Diagnostics. 2021;11(8):1402. DOI: 10.3390/diagnostics11081402.
13. Pitsik EN, Maximenko VA, Kurkin SA, Sergeev AP, Stoyanov D, Paunova R, Kandilarova S, Simeonova D, Hramov AE. The topology of fMRI-based networks defines the performance of a graph neural network for the classification of patients with major depressive disorder. Chaos, Solitons & Fractals. 2023;167:113041. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.113041.
14. Ramzan F, Khan MU, Rehmat A, Iqbal S, Saba T, Rehman A, Mehmood Z. A deep learning approach for automated diagnosis and multi-class classification of Alzheimer's disease stages using resting-state fMRI and residual neural networks. Journal of medical systems. 2020;44:1-6. DOI: 10.1007/s10916-019-1475-2.
15. Alorf A, Khan MU. Multi-label classification of Alzheimer's disease stages from resting-state fMRI-based correlation connectivity data and deep learning. Computers in Biology and Medicine. 2022;151(6):106240. DOI: 10.1016/j.compbiomed.2022.106240.
16. Subha DP, Joseph PK, Acharya UR, Lim CM. EEG signal analysis: a survey. Journal of medical systems. 2010;34(2):195-212. DOI: 10.1007/s10916-008-9231-z.
17. Lotte F, Congedo M, Lécuyer A, Fabrice L, Arnaldi B. A review of classification algorithms for EEG-based brain–computer interfaces. Journal of Neural Engineering. 2007;4(2):R1. DOI: 10.1088/1741-2560/4/2/R01.
18. Kang H, Nam Y, Choi S. Composite common spatial pattern for subject-to-subject transfer. IEEE Signal Processing Letters. 2009;16(8):683-686. DOI: 10.1109/LSP.2009.2022557.
19. Wan Z, Yang R, Huang M, Zeng N, Liu X. A review on transfer learning in EEG signal analysis. Neurocomputing. 2021;421:1-14. DOI: 10.1016/j.neucom.2020.09.017.
20. Wu D, Xu Y, Lu B-L. Transfer Learning for EEG-Based Brain-Computer Interfaces: A Review of Progress Made Since 2016. IEEE Trans. on Cognitive and Developmental Systems. 2022;14(1):4-19. DOI: 10.1109/TCDS.2020.3007453.
21. Kuc A, Korchagin S, Maksimenko VA, Shusharina N, Hramov AE. Combining Statistical Analysis and Machine Learning for EEG Scalp Topograms Classification. Frontiers in Systems Neuroscience. 2021;15. DOI: 10.3389/fnsys.2021.716897.
22. Luo Y, Lu B-L. EEG data augmentation for emotion recognition using a conditional Wasserstein GAN. 2018 40th annual international conference of the IEEE engineering in medicine and biology society (EMBC). IEEE, 2018. P. 2535-2538. DOI: 10.1109/EMBC.2018.8512865.
23. Weiss K, Khoshgoftaar TM, Wang DD. A survey of transfer learning. Journal of Big data. 2016;3(1):1-40. DOI: 10.1186/s40537-016-0043-6.
24. Azab AM, Ahmadi H, Mihaylova L, Arvaneh M. Dynamic time warping-based transfer learning for improving common spatial patterns in brain–computer interface. Journal of Neural Engineering. 2020;17(1):016061. DOI: 10.1088/1741-2552/ab64a0.
25. Raghu S, Natarajan S, Temel Y, Rao SV, Kubben P. EEG based multi-class seizure type classification using convolutional neural network and transfer learning. Neural Networks. 2020;124:202-212. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.01.017.
26. Nejedly P, Cimbalnik J, Klimeš P, Plesinger F, Halamek J, Křemen V, Viscor I, Brinkmann BH, Pail M, Brazdil M, Worrell G, Jurak P. Intracerebral EEG artifact identification using convolutional neural networks. Neuroinformatics. 2019;17(3):225-234. DOI: 10.1007/s12021-018-9397-6.
27. Hramov AE, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. Physics Reports. 2021;918:1-133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.

28. Shen X, Liu X, Hu X, Zhang D, Song S. Contrastive learning of subject-invariant EEG representations for cross-subject emotion recognition. IEEE Transactions on Affective Computing. 2023;14(3):2496-2511. DOI: 10.1109/TAFFC.2022.3164516.
29. Chen T, Kornblith S, Norouzi M, Hinton G. A simple framework for contrastive learning of visual representations. International conference on machine learning (PMLR). arXiv:2002.05709. 2020. P. 1597-1607. DOI: 10.48550/arXiv.2002.05709.
30. Jaiswal A, Babu AR, Zadeh MZ, Banerjee D, Makedon F. A survey on contrastive self-supervised learning. Technologies. 2020;9(1):2. DOI: 10.3390/technologies9010002.
31. Żygierewicz J, Janik RA, Podolak IT, Drozd A, Malinowska U, Poziomska M, Wojciechowski J, Ogniewski P, Niedbalski P, Terczynska I, Rogala J. Decoding working memory-related information from repeated psychophysiological EEG experiments using convolutional and contrastive neural networks. Journal of Neural Engineering. 2022;19(4):046053. DOI: 10.1088/1741-2552/ac8b38.
32. Hadsell R, Chopra S, LeCun Y. Dimensionality reduction by learning an invariant mapping. 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Vol. 2 (CVPR'06). IEEE, 2006. P. 1735-1742. DOI: 10.1109/CVPR.2006.100.
33. He K, Fan H, Wu Y, Xie S, Girshick R. Momentum contrast for unsupervised visual representation learning. Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. 2020. P. 9729-9738. DOI: 10.1109/CVPR42600.2020.00975.
34. Dwibedi D, Aytar Y, Tompson J, Sermanet P, Zisserman A. With a little help from my friends: Nearest-neighbor contrastive learning of visual representations. Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision, Montreal, QC, Canada, 2021. P. 9588-9597. DOI: 10.1109/ICCV48922.2021.00945.
35. Zbontar J, Jing L, Misra I, LeCun Y, Deny S. Barlow twins: Self-supervised learning via redundancy reduction. International Conference on Machine Learning (PMLR). arXiv:2103.03230. 2021. P. 12310-12320. DOI: 10.48550/arXiv.2103.03230.
36. Caron M, Touvron H, Misra I, Jégou H, Mairal J, Bojanowski P, Joulin A. Emerging properties in self-supervised vision transformers. Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision. 2021. P. 9650-9660.
37. Self-supervised Contrastive Learning for Image Classification with Keras [Electronic resource]. https://github.com/beresandras/contrastive-classification-keras (Date of reference: 16.01.2024).
38. Alexander LM, Escalera J, Ai L, Andreotti C, Febre K, Mangone A, Vega-Potler N, Langer N, Alexander A, Kovacs M, Litke S, O'Hagan B, Andersen J, Bronstein B, Bui A, Bushey M, Butler H, Castagna V, Camacho N, Chan E, Citera D, Clucas J, Cohen S, Dufek S, Eaves M, Fradera B, Gardner J, Grant-Villegas N, Green G, Gregory C, Hart E, Harris S, Horton M, Kahn D, Kabotyanski K, Karmel B, Kelly SP, Kleinman K, Koo B, Kramer E, Lennon E, Lord C, Mantello G, Margolis A, Merikangas KR, Milham J, Minniti G, Neuhaus R, Levine A, Osman Y, Parra LC, Pugh KR, Racanello A, Restrepo A, Saltzman T, Septimus B, Tobe R, Waltz R, Williams A, Yeo A, Castellanos FX, Klein A, Paus T, Leventhal BL, Craddock RC, Koplewicz HS, Milham MP. HBN EO/EC task. OpenNeuro Accession Number ds004186. DOI: doi:10.18112/openneuro.ds004186.v2.0.0.
39. Gramfort A, Luessi M, Larson E, Engemann DA, Strohmeier D, Brodbeck C, Goj R, Jas M, Brooks T, Parkkonen L, Hämäläinen M. MEG and EEG data analysis with MNE-Python. Frontiers in Neuroscience. 2013;7:267. DOI: 10.3389/fnins.2013.00267.
40. Mumtaz W. MDD Patients and Healthy Controls EEG Data (New). Dataset. 2016. DOI: 10.6084/m9.figshare.4244171.v2
41. Cavanagh JF. EEG: Depression rest. Dataset. 2021. DOI: 10.18112/openneuro.ds003478.v1.1.0.
42. Cai H, Gao Y, Sun S, Li N, Tian F, Xiao H, Hu B. MODMA dataset: a Multi-modal Open Dataset for Mental-disorder Analysis. arXiv:2002.09283. 2020. http://modma.lzu.edu.cn/data/application/.
43. van Dijk H, van Wingen GA, Denys D, Olbrich S, van Ruth R, Arns M. The two decades

brainclinics research archive for insights in neurophysiology (TDBRAIN) database. Scientific Data. 2022;9(1):1-10. DOI: 10.1038/s41597-022-01409-z.
44. Maaten L, Hinton G. Visualizing data using t-sne. Journal of Machine Learning Research. 2008;9:2579-2605.
45. Sandheep P, Vineeth S, Poulose M, Subha DP. Performance analysis of deep learning CNN in classification of depression EEG signals. TENCON 2019 - 2019 IEEE Region 10 Conference (TENCON), Kochi, India. IEEE, 2019. P. 1339-1344. DOI: 10.1109/TENCON.2019.8929254.
46. Lawhern VJ, Solon AJ, Waytowich N, Gordon SM, Hung CP, Lance BJ. EEGNet: a compact convolutional neural network for EEG-based brain–computer interfaces. Journal of neural engineering. 2018;15(5):056013. DOI: 10.1088/1741-2552/aace8c.
47. LeCun YA, Bottou L, Orr GB, Müller K-R. In: Efficient backprop Montavon G., Orr G. B., Müller K. R. (eds) Neural Networks: Tricks of the Trade. Lecture Notes in Computer Science, vol. 7700. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. P. 9-48.
48. van Dijk H, Koppenberg M, Arns M. Towards robust, reproducible, and clinically actionable EEG biomarkers: Large open access EEG Database for discovery and out-of-sample validation. Clinical EEG and Neuroscience. 2023;54(2):103-105. DOI: http://dx.doi.org/10.1177/15500594221120516
49. Darvishi-Bayazi M-J, Ghaemi MS, Lesort T, Md Arefin R, Faubert J, Rish I. Amplifying pathological detection in EEG signaling pathways through cross-dataset transfer learning. arXiv: 2309.10910. DOI: 10.48550/arXiv.2309.10910
50. Zeng H, Li X, Borghini G, Zhao Y, Aricò P, Di Flumeri G, Sciaraffa N, Zakaria W, Kong W, Babiloni F. An EEG-based transfer learning method for cross-subject fatigue mental state prediction. Sensors (Basel). 2021;21(7):2369. DOI: 10.3390/s21072369.
51. Zhang K, Xu G, Zheng X, Li H, Zhang S, Yu Y, Liang R. Application of transfer learning in EEG decoding based on brain-computer interfaces: A review. Sensors. 2020;20(21):1-25. DOI: 10.3390/s20216321.
52. Deep Learning Applications. Vol. 4 / M. Arif Wani, Vasile Palade (eds) Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 1434. Singapore: Springer; 2023. 384 p. DOI: 10.1007/978-981-19-6153-3.
53. Seal A, Bajpai R, Agnihotri J, Yazidi A, Herrera-Viedma E, Krejcar O. DeprNet: A deep convolution neural network framework for detecting depression using EEG. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 2021;70:2505413. DOI: 10.1109/TIM.2021.3053999.
54. Sharma G, Parashar A, Joshi AM. DepHNN: A novel hybrid neural network for electroencephalogram (EEG)-based screening of depression. Biomedical Signal Processing and Control. 2021;66:102393. DOI: 10.1016/j.bspc.2020.102393.
55. Uran A, van Gemeren C, van Diepen R, Chavarriaga R, del R. Millán J. Applying transfer learning to deep learned models for EEG analysis. arXiv:1907.01332. DOI: 10.48550/arXiv.1907.01332
56. Osman Berke Guney, Huseyin Ozkan Transfer Learning of an Ensemble of DNNs for SSVEP BCI Spellers without User-Specific Training. arXiv:2209.01511. DOI: 10.48550/arXiv.2209.01511.
57. Ju C, Gao D, Mane R, Tan B, Liu Y, Guan C. Federated Transfer Learning for EEG Signal Classification. 42nd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine & Biology Society (EMBC), Montreal, QC, Canada, 2020. P. 3040-3045. DOI: 10.1109/EMBC44109.2020.9175344.
58. Khosla P, Teterwak P, Wang C, Sarna A, Tian Y, Isola Ph, Maschinot A, Liu C, Krishnan D. Supervised contrastive learning. Advances in Neural Information Processing Systems. ArXiv: abs/2004.11362. 2020;33:18661-18673. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:216080787.
59. Lv Z, Zhang J, Epota Oma E. A novel method of emotion recognition from multi-band EEG

topology maps based on ERENet. Appl. Sci. 2022;12:10273. DOI: 10.3390/app 122010273.

60. Xiao J, Provenzaa NR, Asfouric J, Myersa J, Mathuraa RK, Metzgera B, Adkinsona JA, Allawalad AB, Pirtlea V, Oswalta D, Shoftya B, Robinsona ME, Mathewe SJ, Goodmane WK, Pouratianf N, Schraterg PR, Patel AB, Tolias AS, Bijankia KR, Pitkowb X, Sheth SA. Decoding depression severity from intracranial neural activity. Biological Psychiatry. 2023;94(6):445-453. DOI: 10.1016/j.biopsych.2023.01.020.

Шушарина Наталья Николаевна — заведующая кафедрой управления исследованиями и разработками и руководитель научной группы технологий человек-машинного взаимодействия Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта. Кандидат педагогических наук (2013, Российский государственный педагогический университет имени А. И. Герцена). С 2014 года получает гранты и ведет исследования в области нейротехнологий и машинного обучения. Специализируется в области физики и информатики, на разработке автономных портативных телеметрических модульных устройств на основе регистрации комплекса физиологических параметров для диагностики, контроля и коррекции психофизиологических состояний нервной системы человека с использованием технологий нейробиоуправления, интерфейсов «мозг–компьютер» и искусственных нейронных сетей. Область научных интересов: создание и применение методов машинного обучения для решения задач, связанных с повышением эффективности взаимодействия человека и электронных устройств в системах «человек–машина–человек», составляющих основу современных технологий. Автор более 50 статей, опубликованных в рецензируемых научных журналах, имеет более 20 патентов.

Россия, 236041 Калининград, ул. А. Невского, 14
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта
E-mail: nshusharina@kantiana.ru
ORCID: 0000-0002-8848-6134
AuthorID (eLibrary.Ru): 687638

Нелинейная динамика и нейронаука

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003132
EDN: KDPIAK

Метод ортогональной декомпозиции Карунена–Лоэва для задач оценок ЭЭГ пациентов с мигренью

Е. Н. Егоров[1,2]✉, *М. О. Журавлёв*[1,2,3], *А. Е. Руннова*[2,1,3], *М. А. Евстропов*[1], *А. С. Реджепова*[1]

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
[2]Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского, Россия
[3]Национальный медицинский исследовательский центр терапии и профилактической медицины, Москва, Россия
E-mail: ✉evgeniy.n.egorov@gmail.com, zhuravlevmo@gmail.com, anefila@gmail.com, jamp400@mail.ru, redzepovaalena@gmail.com

Поступила в редакцию 7.06.2024, принята к публикации 15.07.2024, опубликована онлайн 7.12.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. *Цель* данной работы — выявление закономерностей в записях электроэнцефалограмм пациентов с мигренью с помощью метода ортогональной декомпозиции по Карунену–Лоэву. В работе исследуются основные закономерности в динамике электроэнцефалографических реализаций, а также влияние на эти закономерности характера протекания мигрени. *Методы.* Для сбора экспериментальных данных использовался метод регистрации электроэнцефалограмм в ходе модифицированного теста множественной латентности сна. В ходе эксперимента проводились исследования реакции испытуемых на предъявляемый визуальный стимул. Полученные данные обрабатывались с помощью преобразования Карунена–Лоэва, которое позволяет интерпретировать сложную динамику системы с точки зрения сосуществования и взаимодействия в ней когерентных ортогональных пространственно-временных структур. *Результаты.* Исследования показали, что распределение мод по энергиям в состоянии активности испытуемых и в состоянии сна может существенно различаться. Характер этого распределения зависит от зоны мозга, в которой снимался сигнал, от длительности эксперимента и от того, в какой момент эксперимента были зарегистрированы те или иные стадии реакции испытуемого. Показано, что наибольший отклик в виде вызванных потенциалов у людей с мигренью локализуется чаще всего в затылочной доле мозга, при этом существует корреляция этого эффекта с частотой приступов мигрени. Для некоторых групп пациентов прослеживается связь между выраженностью вызванных потенциалов в мозге и энергией первой, обладающей максимальной энергией моды Карунена–Лоэва. *Заключение.* Показано, что существует взаимосвязь количества значимых мод с мощностью альфа-ритма в сигналах электроэнцефалографии, а также прослеживается пространственная локализация этого эффекта в затылочном отделе мозга. Для лобной доли мозга продемонстрировано существование достоверных различий в распределении первой моды, оцениваемых для групп пациентов с редкими и частыми приступами мигрени.

Ключевые слова: тест множественной латентности сна, вызванные потенциалы, электроэнцефалограмма, метод ортогональной декомпозиции, метод Карунена–Лоэва, пространственно–временные структуры, мигрень.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-72-10061, https://rscf.ru/project/22-72-10061/.

Для цитирования: *Егоров Е. Н., Журавлёв М. О., Руннова А. Е., Евстропов М. А., Реджепова А. С.* Метод ортогональной декомпозиции Карунена–Лоэва для задач оценок ЭЭГ пациентов с мигренью // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 123–139. DOI: 10.18500/0869-6632-003132. EDN: KDPIAK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

© *Егоров Е. Н., Журавлёв М. О., Руннова А. Е., Евстропов М. А., Реджепова А. С., 2024*

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003132

Karhunen–Loeve orthogonal decomposition method for problems of EEG assessment of patients with migraine

E. N. Egorov[1,2]✉, *M. O. Zhuravlev*[1,2,3], *A. E. Runnova*[2,1,3], *M. A. Evstropov*[1], *A. S. Redzhepova*[1]

[1]Saratov State University, Russia
[2]Saratov State Medical University, Russia
[2]National Medical Research Center for Therapy and Preventive Medicine, Moscow, Russia
E-mail: ✉evgeniy.n.egorov@gmail.com, zhuravlevmo@gmail.com, anefila@gmail.com, jamp400@mail.ru, redzepovaalena@gmail.com

Received 7.06.2024, accepted 15.07.2024, available online 7.12.2024, published 31.01.2025

Abstract. The *purpose* of this work is to identify patterns in the recordings of electroencephalograms of patients with migraine using the Karhunen–Loeve orthogonal decomposition method. The work examines the main features of electroencephalographic dynamics, and the impact on these features of chronic migraine severity. *Methods.* To collect experimental data, the method of recording electroencephalograms during the modified multiple sleep latency test was used. During the experiment, studies were conducted of the subjects´reaction to the presented visual stimulus. The obtained data were processed using the Karhunen–Loeve transformation, which allows one to interpret the complex dynamics of the system from the point of view of the coexistence and interaction of coherent orthogonal space-time structures. *Results.* Studies have shown that the energy distribution of modes in active and sleep states can differ significantly. The character of this distribution depends on the brain zone of signal recordings, on the duration of the experiment, and on at what time point in the experiment certain stages of the subject's reaction were recorded. It has been shown that the greatest response in the form of evoked potentials in people with migraine is most often localized in the occipital lobe of the brain, and there is a correlation of this effect with the frequency of migraine attacks. For some groups of patients, there is a connection between the severity of evoked potentials in the brain and the energy of the first, most energetic, Karhunen–Loeve mode. *Conclusion.* It has been shown that there is a relationship between the number of significant modes and the power of the alpha rhythm in electroencephalography signals, and the spatial localization of this effect in the occipital region of the brain can be traced. For the frontal lobe of the brain, significant differences in the distribution of the first mode were demonstrated, assessed for groups of patients with rare and frequent migraine attacks.

Keywords: multiple sleep latency test, evoked potentials, electroencephalogram, orthogonal decomposition method, Karhunen–Loeve method, space-time structures, migraine.

Acknowledgements. This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 22-72-10061, https://rscf.ru/project/22-72-10061/.

For citation: Egorov EN, Zhuravlev MO, Runnova AE, Evstropov MA, Redzhepova AS. Karhunen–Loeve orthogonal decomposition method for problems of EEG assessment of patients with migraine. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):123–139. DOI: 10.18500/0869-6632-003132

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одним из самых распространённых и информативных методов экспериментального исследования активности головного мозга является метод электроэнцефалографии (ЭЭГ), который позволяет получать информацию о нейропсихологической и физической активности человека [1]. Для теоретического анализа особенностей динамики сигналов ЭЭГ применяются различные методы, разработанные в рамках радиофизических подходов к анализу временных и пространственно-временных зависимостей, такие как спектральный анализ с помощью фурье- и вейвлет-преобразований [2, 3], корреляционный анализ, рекуррентный анализ, метод комбинированных эмпирических мод [4] и др. Одним из менее распространённых, но весьма перспективных методов анализа представляется подход к оценке пространственно-временных характеристик данных и, в частности, данных ЭЭГ-исследований, является метод ортогональной декомпозиции по Карунену–Лоэву.

В основе разложения Карунена–Лоэва (КЛ) лежит разработанный в середине прошлого века метод представления случайных процессов в виде бесконечной линейной комбинации ортогональных функций [5–7]. В литературе можно встретить различные названия этого метода и его модификаций: разложение Карунена–Лоэва, метод главных компонент (Principle Component Analysis (PCA) [8], преобразование Хотеллинга [9, 10] — его дискретный вариант, собственное ортогональное разложение, эмпирическое разложение на собственные функции.

Метод линейной КЛ-декомпозиции представляет собой разложение сигнала (в том числе случайного) по базисным ортогональным (собственным) функциям с некоторыми коэффициентами (собственными числами), при этом значения коэффициентов разложения показывают долю энергии сигнала, сосредоточенной в данной собственной функции. Это свойство, в частности, позволяет для сжатия информации (сигнала) ограничиваться конечным числом собственных функций, обладающих наибольшей суммарной энергией, отбрасывая остальные. Полученный таким образом сигнал будет отличаться от исходного. Мерой этого отличия служит ошибка среднеквадратичного отклонения восстановленного сигнала, построенного на основе ограниченного числа мод, и исходного. Особенность КЛ-преобразования состоит в том, что из всех линейных преобразований именно оно обеспечивает минимальную величину такого отклонения.

Это свойство широко используется при сжатии сигналов и изображений [8, 11]. Кроме того, разработана обширная теоретическая база для использования метода КЛ-декомпозиции для распознавания образов [8, 12, 13], а также в методах классификации объектов [8]. Недостатком данного метода является отсутствие быстрых алгоритмов вычисления, поэтому этот метод нашёл своё применение на практике в случаях, не критичных к затратам времени вычислений и вычислительных мощностей.

Помимо указанных сфер применения, КЛ-преобразование стало привычным инструментом при анализе биомедицинских сигналов и, в частности, сигналов активности поверхностных структур головного мозга, ЭЭГ, которые позволяют получить информацию о биоэлектрической активности мозга, сопровождающей нейропсихологические процессы [14].

Известно, например, что соседние каналы многоканальной ЭЭГ демонстрируют высокую степень коррелированности вследствие синхронности локальных потенциалов полей от отдельных корковых доменов [15]. В этом случае сильные корреляции, наблюдаемые между записями ЭЭГ на близлежащих электродах, можно объяснить влиянием на сигналы отдельных каналов разных участков головного мозга за счёт объёмной проводимости. Используя этот факт, в работе [16] авторы предлагают метод реконструкции сигналов ЭЭГ отдельных каналов на основе анализа сигналов соседних каналов с помощью метода ортогональной КЛ-декомпозиции. Авторы [16] предполагают, что подобный подход позволит сэкономить на количестве записываемых каналов, если бы можно было восстановить пропущенные каналы с точностью, необходимой для проведения предварительной диагностики. В работах [17, 18] предлагается метод сжатия многоканальных сигналов ЭЭГ без потерь. Метод сжатия также основан на свойстве ортогональной КЛ-декомпозиции минимизировать среднеквадратичную ошибку при использовании ограниченного числа собственных мод для описания исходных сигналов [7].

Другое применение КЛ-метода в биомедицинских исследованиях связано с возможностью анализа сигналов живых систем на предмет выявления особенностей временных реализаций и пространственных распределений. Так, в работах [19, 20] предлагается метод автоматического обнаружения сна и его анализ, например, в известном практическом приложении автоматического обнаружения усталости водителя. Метод направлен на обнаружение сонных веретён, которые являются отличительными чертами начальной стадии сна, на основе анализа величины коэффициентов КЛ-преобразования. В работе [21] предложен метод выделения стадий сна в сигнале ЭЭГ с помощью метода классификации на основе КЛ-разложения. Метод основан на свойстве КЛ-разложения уменьшать размерность пространства признаков сигнала практически без потери

качества. Авторы предлагают на общедоступных данных ЭЭГ сформировать ковариационную матрицу признаков, рассчитать для неё собственные векторы и собственные числа, а затем, используя два вектора, соответствующих максимальным значениям собственных чисел, провести классификацию участков записи ЭЭГ для автоматического выделения в ней различных стадий сна.

В работе [22,23] предложено использовать КЛ-разложение для анализа сигналов ЭЭГ фронтальной и затылочной областей для измерения степени сложности ЭЭГ с точки зрения сосуществования различных КЛ-структур в исходных временных сигналах. В ряде работ также применяется КЛ-разложение для определения меры сложности колебаний ЭЭГ и МЭГ (магнитоэнцефалограммы), определения различных режимов колебаний пространственно-временных сигналов (паттернов) [24–26], а также для фильтрации сигналов ЭЭГ для удаления двигательных артефактов [27].

В данной работе проводится исследование записей ЭЭГ, измеренных на пациентах с мигренью, с помощью метода КЛ-разложения. В работе описываются основные закономерности в динамике ЭЭГ-реализаций, экспериментально записанных в ходе монотонной активности для различных зон головного мозга добровольцев, а также влияние на эти закономерности характера протекания мигрени.

1. Методика получения данных и методы анализа пространственно-временных зависимостей

В работе для сбора экспериментальных данных использовался удобный практический инструмент для клинических и научных исследований — регистрация ЭЭГ в ходе модифицированного теста множественной латентности сна (Multiple Sleep Latency Test (MSLT)) [28–30]. В ходе эксперимента проводились исследования реакции испытуемых на предъявляемый визуальный стимул [31]. В ходе эксперимента записывались ЭЭГ пациентов, а также время реакции на стимул. Эксперименты проводились в вечерние часы в специально оборудованной сомнологической лаборатории с минимизацией всех факторов внешних раздражителей. Каждый испытуемый находился в удобном полулежачем положении. Схема эксперимента представлена на рис. 1.

В начале эксперимента на протяжении 5 минут регистрируется комплекс биомедицинских сигналов у испытуемого в состоянии пассивного бодрствования с закрытыми глазами (CY-стадия эксперимента). После этого начинается активная стадия экспериментальной работы, в ходе которой испытуемому предъявляется стимульное изображение группы плоских экспериментальных объектов — прямоугольников, число которых варьируется от 4 до 8. Все стимулы подразделяются на 5 типов по количеству объектов в группе. Каждый из типов стимулов разделяется на 2 вида — «простой», когда объекты расположены рядами друг под другом, и «сложный», когда объекты пересекаются границами и расположены стохастично (см. рис. 1, *а*). Стимулы и ход эксперимента аналогичны выбранным в работе [32].

Длительность стимула составляет от 1.2 до 3 с. Пауза между стимулами выбирается случайной длительности из интервала $\Delta t_p \sim 6.2...14.0$ с. По предъявлению стимула испытуемый оценивает количество объектов в группе и в зависимости от этого должен нажать на кнопку «1» (нечётное количество объектов) или «2» (чётное). Оценка стимула может быть проведена испытуемым как во время предъявления стимула, так и во время паузы между стимулами за время τ (см. рис. 1, *а*). Длительность активной стадии составляет 55 минут, за время которой испытуемому предъявляется 750–800 стимулов. В конце эксперимента на протяжении 5 минут повторно регистрируется комплекс биомедицинских сигналов у испытуемого в состоянии пассивного бодрствования с закрытыми глазами (RCY-стадия эксперимента). В экспериментальной работе приняли участие 7 добровольцев с жалобами на хроническую мигрень без ауры с различной частотой повторяемости приступов (от 1 до 10 приступов в месяц за последний год).

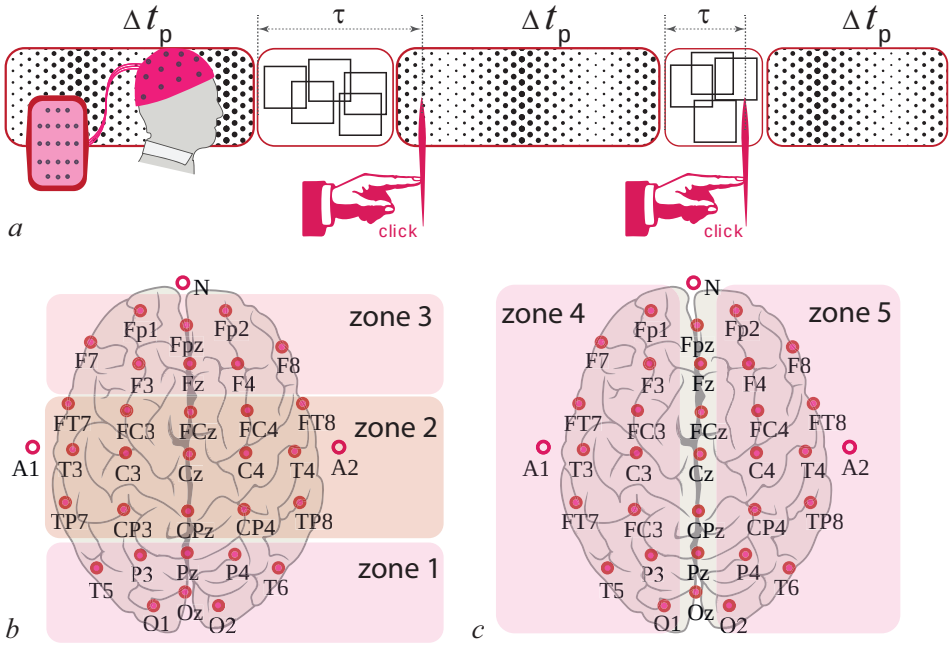


Рис. 1. Схема эксперимента со стандартным расположением электродов ЭЭГ «10–10»: *a* — временная схема подачи визуальных стимулов и регистрации реакции испытуемого: Δt_p — длительность времени между стимулами, τ — время реакции испытуемого на стимул; *b, c* — зоны регистрации ЭЭГ: зона 1 — затылочный отдел, зона 2 — центральная зона, зона 3 — лобный отдел, зона 4 — левое полушарие, зона 5 — правое полушарие (цвет онлайн)

Fig. 1. Scheme of the experiment with a standard arrangement of EEG electrodes “10–10”: *a* — time scheme for delivering visual stimuli and recording the subject’s reaction: Δt_p is the duration of time between stimuli, τ is the subject’s reaction time to the stimulus; *b, c* — EEG recording zones: zone 1 — occipital region, zone 2 — central zone, zone 3 — frontal region, zone 4 — left hemisphere, zone 5 — right hemisphere (color online)

Для анализа выбиралась разность сигналов ЭЭГ отдельных датчиков, сгруппированных по пяти зонам: зона 1 (затылочный отдел) соответствует каналам O2-A2, O1-A1, P4-A2, P3-A1, T6-A2, T5-A1, Oz-A2, Pz-A1; зона 2 (центральная зона) соответствует каналам C4-A2, C3-A1, T4-A2, T3-A1, Cz-A2, FT7-A1, FC3-A1, Fcz-A1, FC4-A2, FT8-A2, TP7-A1, CP3-A1, Cpz-A1, CP4-A2, TP8-A2; зона 3 (лобный отдел) соответствует каналам F4-A2, F3-A1, Fp2-A2, Fp1-A1, F8-A2, F7-A1, Fz-A1, Fpz-A2; зона 4 (левое полушарие) соответствует нечётным каналам; зона 5 (правое полушарие) соответствует чётным каналам, как это продемонстрировано на рис. 1, *b, c*.

Во всех экспериментах данные многоканальной ЭЭГ получали с помощью электроэнцефалографического регистратора Энцефалан-ЭЭГР-19/26 (Медиком МТД, Россия). Данные были записаны с частотой дискретизации 250 Гц обычным методом монополярной регистрации, как показано на рис. 1, *b*. Разница сигналов различных каналов с каналами A1 и A2 бралась для устранения артефактов мышечной и двигательной природы в сигналах ЭЭГ. Сигналы ЭЭГ фильтровались полосовым фильтром 0.5...45 Гц, предварительно применялся режекторный фильтр 50 Гц. Все участники являлись добровольцами, подписали информированное добровольное согласие на участие в экспериментальной работе и получили все необходимые объяснения касательно процесса проведения исследования, также все участники дали свое согласие на дальнейшую публикацию результатов. Полученные экспериментальные данные обрабатывались с соблюдением конфиденциальности и анонимности респондентов исследования. Исследование было выполнено в соответствии с принципами Хельсинкской декларации, его проведение одобрено локальным этическим комитетом Саратовского государственного медицинского университета им. В. И. Разумовского.

2. Модель

Анализ сигналов ЭЭГ проводился с помощью метода анализа сложной динамики систем, имеющих как пространственные, так и временную степени свободы — методом ортогональной декомпозиции пространственно-временных данных с помощью разложения Карунена–Лоэва (КЛ) [5–7, 33]. Как отмечалось во Введении, КЛ-разложение оказывается весьма полезным при анализе процессов различных распределённых систем, в том числе для анализа ЭЭГ коры головного мозга [34–37]. Использование этого метода позволяет интерпретировать сложную динамику системы с точки зрения сосуществования и взаимодействия в ней когерентных ортогональных пространственно-временных структур. Можно ожидать, что этот метод в нашем случае позволит описать различные закономерности в динамике сигналов активности головного мозга.

Указанные когерентные структуры находятся как собственные вектора следующего интегрального уравнения:

$$\int K(x, x^*)\Psi(x^*)dx^* = \lambda\Psi(x), \tag{1}$$

где $K(x, x^*)$ — ядро уравнения, которое формируется следующим образом:

$$K(x, x^*) = \langle \varphi(x, t)\varphi(x^*, t)\rangle_t. \tag{2}$$

Здесь $\langle \dots \rangle_t$ означает усреднение по времени. В качестве функций $\varphi(x, t)$ выбирались сигналы различных каналов ЭЭГ, снимаемых в различных зонах коры головного мозга. При формировании ядра $K(x, x^*)$ необходимо величину $\varphi(x, t)$ привести к нулевому среднему.

На практике, как правило, применяется дискретная модификация метода. В этом случае исходное уравнение можно представить в виде

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} K(x_p, x_q)\Psi^k(x_q) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_k \Psi^k(x^p), \quad k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где

$$K(x_p, x_q) = \frac{1}{T}\sum_{m=0}^{T} \left(\varphi(x^p, t_m)\varphi(x^q, t_m)\right). \tag{4}$$

Здесь координаты x_p и x_q соответствуют отдельным электродам, с которых снимают сигнал ЭЭГ, t_m — моменты времени, соответствующие оцифрованному дискретизированному сигналу ЭЭГ.

В результате решения уравнений (3)–(4) мы получаем набор собственных чисел $\{\lambda_k\}$ и соответствующих им собственных векторов $\{\Psi_k\}$ корреляционной матрицы $K(x_p, x_q)$. Каждое собственное число и собственный вектор определяют соответствующую КЛ-моду колебательного процесса. Величина λ_k пропорциональна энергии соответствующей моды, которую удобно рассматривать в нормированном виде:

$$W_k = \frac{\lambda_k}{\sum_i \lambda_i} \times 100\%. \tag{5}$$

Моды ранжируют таким образом, что низшие моды (с малым числом k) имеют максимальную энергию, тогда как высшие моды с малыми собственными значениями представляют собой искажения или шум.

Отметим, что КЛ-разложение является оптимальным в том смысле, что собственные функции задачи (1)–(2) составляют ортонормированный базис, так что минимизируется среднеквадратичная ошибка, что предполагает минимизацию ошибки аппроксимации $\varepsilon = \min\langle\|\varphi(x, t) - -\sum_l \sum_k \varphi(x_k, t)\Psi^l(x_k)\|\rangle$, где φ — исходный сигнал, а второе слагаемое представляет аппроксимацию исходного сигнала на основе l первых КЛ-мод. При этом можно выбрать $l < n$, ограничиваясь модами с максимальной энергией [7, 8, 33]. Точность такой аппроксимации можно задавать путём определения порога энергии, ниже которого высшие моды отбрасывают.

3. Результаты и дискуссия

Обсудим полученные результаты анализа особенностей реакции испытуемых на визуальные стимулы.

В работе рассматривалась сглаженная зависимость времени реакции T_{resp} испытуемых от продолжительности эксперимента. Сглаживание зависимости T_{resp} проводилось путём оценки среднего времени отклика для каждого набора из пяти последовательных стимулов, объединённых вместе. В начале и в конце эксперимента испытуемый отдыхал, не предпринимая никаких действий. В некоторые моменты время отклика падало до нуля, что означало отсутствие реакции на раздражитель со стороны испытуемого. Эти стадии интерпретируются как эпизодический сон субъекта. Все записи ЭЭГ в ходе эксперимента были разделены на отдельные временные отрезки $\triangle t_m$, чередующиеся по длине записи и соответствующие стадиям активности испытуемых (активная стадия и стадия сна). Число таких временных отрезков в записи могло доходить до 90 в зависимости от испытуемого, при этом их длительность неодинакова.

Каждая стадия (активной реакции испытуемых и стадий сна) анализировалась методом КЛ-разложения отдельно для каждой из 5 условных зон мозга, расположение которых оговорено в первом разделе. Количество собственных КЛ-мод, вычисленных согласно уравнениям (3)–(5), соответствует числу анализируемых каналов ЭЭГ в каждой условной зоне. В зависимости от зоны общее число КЛ-мод может быть от 8 до 15, что соответствует числу ЭЭГ-каналов в каждой зоне. В ходе анализа рассматривались не более 5 высших мод, суммарная энергия которых превышала в основном 98%. На рис. 2 представлены гистограммы, отражающие распределение КЛ-мод по энергиям. Каждый столбец соответствует отдельному временному отрезку $\triangle t_m$ (активность или сон) в зависимости $T_{\mathrm{resp}}(t)$. Высота столбца гистограммы соответствует величине энергии соответствующей моды, цвет — номеру моды.

Предыдущие исследования показали, что распределение КЛ-мод по энергиям в состоянии активности и состоянии сна испытуемого может существенно различаться. При этом характер этого распределения зависит от зоны, в которой снимался сигнал ЭЭГ, от длительности эксперимента и от того, в какой момент эксперимента были зарегистрированы те или иные стадии реакции [37]. На рис. 2 изображены гистограммы распределений энергии КЛ-мод от номера стадии $\triangle t_m$ активности испытуемого для зоны 1 и 3 для испытуемого № 1. Так, на рис. 2, *a*

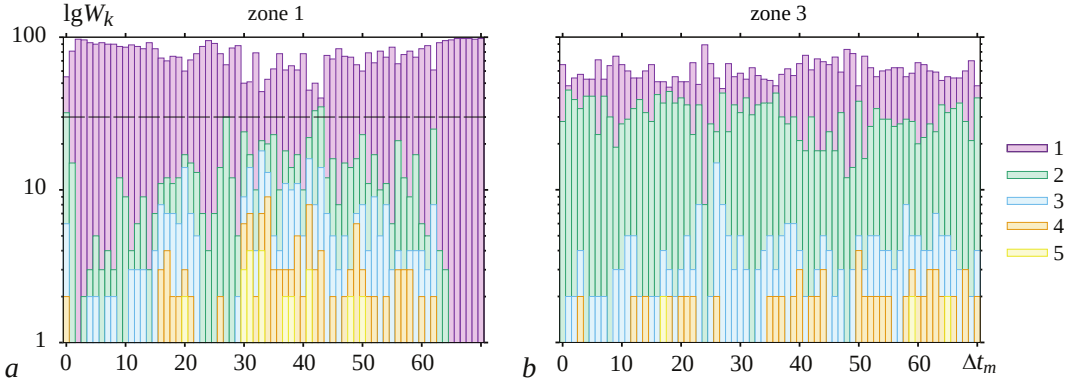


Рис. 2. Гистограммы и линии уровня распределения энергии первых пяти КЛ-мод для каждой стадии $\triangle t_m$ (активность, сон) зависимости $T_{\mathrm{resp}}(t)$ для зоны 1 (затылочный отдел) (*a*) и зоны 3 (лобный отдел) (*b*), пунктирной линией указан уровень в 30%. Высота столбца гистограммы соответствует величине энергии W_k соответствующей КЛ-моды, цвет — номеру моды (цвет онлайн)

Fig. 2. Histograms and lines of the energy distribution level of the first 5 KL-modes for each stage $\triangle t_m$ (activity, sleep) of the $T_{\mathrm{resp}}(t)$ dependence for zone 1 (occipital region) (*a*) and zone 3 (frontal region) (*b*), the dotted line indicates a level of 30%. The height of the histogram column corresponds to the energy value W_k of the corresponding KL-mode, the color corresponds to the mode number (color online)

видно, что в сигнале зоны 1 в начале и конце эксперимента превалирует одна мода с энергией, близкой к 100%, и только в середине эксперимента существенную роль начинают играть моды более высоких порядков. Из рисунка видно, что вторая КЛ-мода не превышает по величине 30% энергии, за исключением трёх временных отрезков около $\triangle t_m = 0$, $\triangle t_m = 42$ и $\triangle t_m = 43$.

Другая картина характерна для зоны 3 испытуемого № 1 (рис. 2, *b*). Видно, что распределение КЛ-мод по энергиям в течение всего эксперимента более равномерное, чем в случае зоны 1, при этом энергия второй моды составляет величину порядка 25–35%. Здесь можно отметить, что наиболее характерной картиной будет ситуация, когда для всех испытуемых и для всех зон мозга в различные этапы эксперимента в распределениях будут присутствовать как превалирование мод с энергией порядка 90%, так и распределение энергии по 2–3 модам высшего порядка. Однако сложно судить о какой-то наиболее характерной картине, опираясь только на вид гистограмм. Поэтому более информативной будет оценка некоторых статистических характеристик полученных распределений.

В ходе работы были рассмотрены характерные распределения значений собственных чисел КЛ-мод на начальном этапе, в середине и в конце эксперимента, чтобы отследить характер изменения распределения КЛ-мод по энергиям по мере того, как мозг и психика испытуемого адаптируются к созданным условиям длительного монотонного восприятия. Для этого изучались временные отрезки по $10\triangle t_m$ в начале, в середине и в конце временной зависимости ЭЭГ. На рис. 3, *a*, *b*, *c* приведены диаграммы статистического анализа распределения энергий первой КЛ-моды для каждой из зон головного мозга испытуемого № 1 для трёх этапов эксперимента,

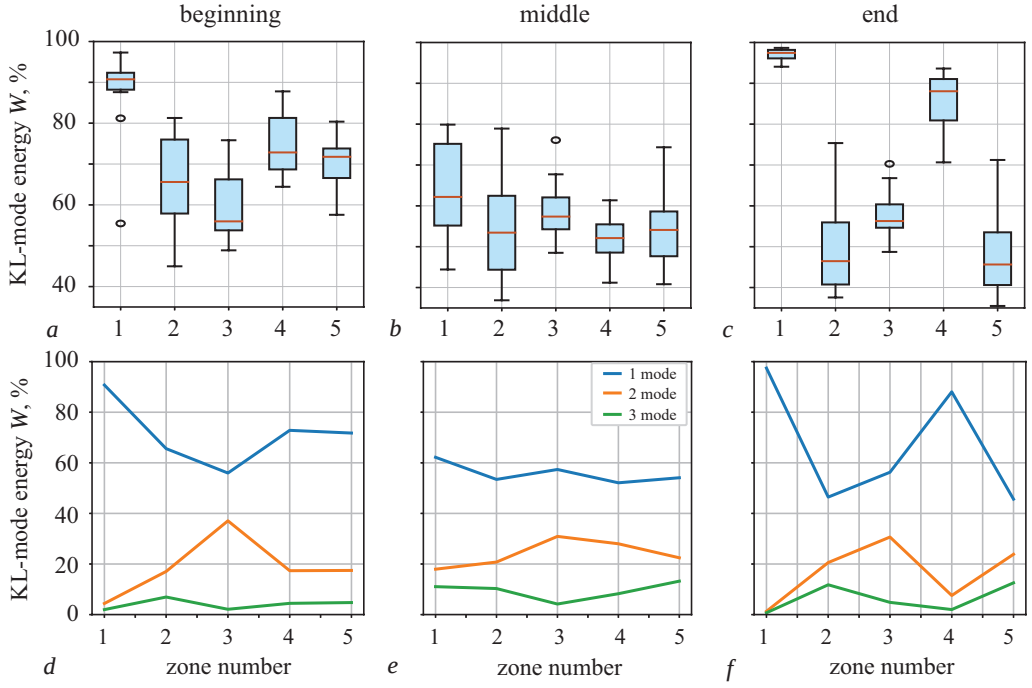


Рис. 3. *a*, *b*, *c* — диаграммы распределения энергии первой КЛ-моды, рассчитанной для пациента № 1 в зависимости от номера зоны, для трёх этапов эксперимента: в начале, в середине и в конце соответственно. Желтой линией обозначено медианное значение выборки, выбросы обозначены кружками за пределами «усов» диаграммы; *d*, *e*, *f* — графики распределения медианных значений энергии 3-х первых КЛ-мод от номера зоны для трёх этапов эксперимента (цвет онлайн)

Fig. 3. *a*, *b*, *c* — diagrams of the energy distribution of the first KL-mode, calculated for patient No. 1 depending on the zone number, for three stages of the experiment: at the beginning, in the middle and at the end, respectively. The yellow line indicates the sample median, outliers are indicated by circles outside the “whiskers”; *d*, *e*, *f* — graphs of the distribution of median energy values of the first 3 KL-modes depending on the zone number for three stages of the experiment (color online)

на рис. 3, *d*, *e*, *f* соответствующие им графики распределения медианных значений энергии 3-х первых КЛ-мод от номера зоны. Видно, что в зависимости от зоны, в которой снимался сигнал, распределения КЛ-мод по энергиям может существенно отличаться. Так, например, в начале и в конце эксперимента для зоны 1 (затылочная зона) над всеми остальными модами существенно превалирует первая КЛ-мода (медианное значение энергии 90–98%). В середине эксперимента распределение 1-ой моды по зонам достаточно равномерное в диапазоне 50–65% по медианным значениям. На финальной стадии эксперимента разброс медианного значения энергии первой КЛ-моды по зонам может достигать величин 45–98%.

На рис. 4 приведены графики распределения медианных значений энергии трёх первых КЛ-мод для трёх стадий эксперимента для различных зон головного мозга. Видно, что описанная выше картина характерна для 1-ой и 4-ой зоны испытуемого №1, в то время как для остальных зон характерно примерное равенство (зона 3) или уменьшение энергии, сконцентрированной в первой КЛ-моде в ходе эксперимента. Согласно свойствам, заложенным в метод ортогональной декомпозиции по Карунену–Лоэву (минимизации функции энтропии и дисперсии), распределение энергии колебаний по нескольким модам с большой энергией соответствует усложнению динамики сигнала. Тогда в случаях, когда в 1 и 4 зонах активности головного мозга в ходе эксперимента первая КЛ-мода принимает значения 98% и 88%, динамика соответствующей зоны мозга становится более регулярной.

Кроме того, известно [38, 39], что процесс адаптации мозга испытуемого к выполнению длительной монотонной умственной деятельности сопровождается увеличением мощности альфа-ритма. В нашем случае значительное увеличение энергии, сконцентрированной в первой КЛ-моде в 1-й и 4-й зонах мозга, можно трактовать как связь распределения мод по энергиям с нарастанием в активности биоэлектрических ЭЭГ-сигналов мощности когерентной динамики альфа-ритма. При этом наблюдается выраженная пространственная локализация этого эффекта в некоторых зонах мозга. В данном случае обычно такая динамика особенно выражена в затылочном отделе мозга (1-я зона). Это подтверждается тем, что увеличение мощности альфа-ритма наблюдается в состоянии покоя, как и существенное повышение энергии первой КЛ-моды в начале эксперимента, когда запись делалась в состоянии пассивного бодрствования испытуемого.

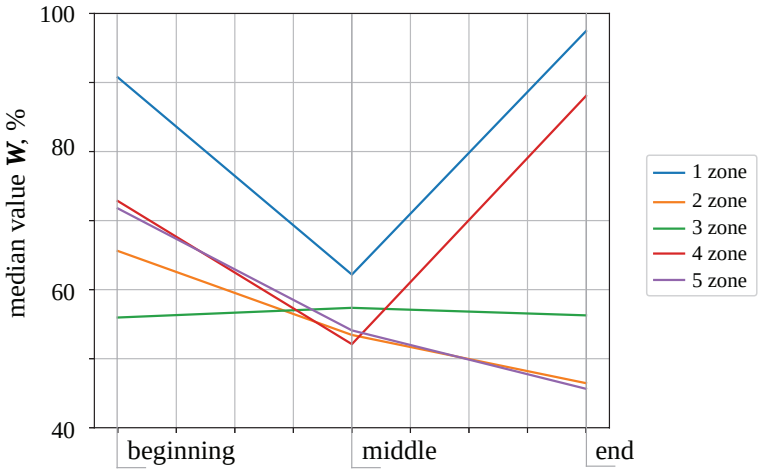


Рис. 4. Графики распределения медианных значений энергии первой КЛ-моды, оцениваемых для участника № 1 эксперимента, для трёх этапов эксперимента (начало, середина, конец) для различных зон головного мозга (цвет онлайн)

Fig. 4. Graphs of the distribution of median energy values of the first KL–mode, estimated for participant No. 1 of the experiment, for three stages of the experiment (beginning, middle, end) for different areas of the brain (color online)

Отметим, что и превалирование альфа-ритма связывают в первую очередь с динамикой зрительных анализаторов коры головного мозга, ассоциированных с затылочной областью.

Исследования показали, что для других испытуемых характер изменения распределения энергии мод по длительности эксперимента может варьироваться. Однако удаётся выделить определённые тренды зависимостей для некоторых зон коры головного мозга. Для этого анализировались распределения энергии КЛ-мод в зависимости от номера скальповой зоны регистрации сигналов в группах пациентов.

Следуя работе [40], всех участников нашего исследования можно разделить на две группы. К первой группе (I) относятся пациенты с частотой повторения приступов мигрени 1–3 приступа в месяц (четверо испытуемых); ко второй группе (II) — 6–8 приступов в месяц (трое испытуемых). Назовём их условно группами с редкими проявлениями мигрени (I) и с частыми проявлениями (II).

На рис. 5 приведено распределение энергии первой КЛ-моды для различных зон головного мозга для всех испытуемых, разбитых на две группы (I и II). Из рисунка видно, что для 1, 2 и 4-й зон распределение первой КЛ-моды для группы пациентов (I) превалирует по медианным значениям над аналогичным распределением для группы (II). Для 3-й и 5-й зон наоборот распределение для группы испытуемых первой КЛ-моды для группы пациентов (I) по медианным значениям меньше, чем у группы (II). Зона 3 демонстрирует статистически достоверные отличия в распределении первой КЛ-моды между I и II группами пациентов согласно критерию Манна–Уитни.

Как показали предыдущие исследования, наибольший отклик в виде вызванных потенциалов у людей с мигренью локализуется чаще всего в затылочной и лобной долях мозга [40]. Этот эффект при этом зависит от частоты приступов мигрени: для пациентов «с частыми приступами» (менее 14 приступов в месяц) наиболее интенсивно вызванные потенциалы проявляются вблизи лобной доли, для испытуемых «с хронизацией мигрени» (более 15 приступов в месяц) вызванные потенциалы проявляются вблизи затылочной зоны. Как видно из приведённых выше данных, для II-й группы испытуемых в лобной зоне (зона 3) наблюдается повышенная величина энергии

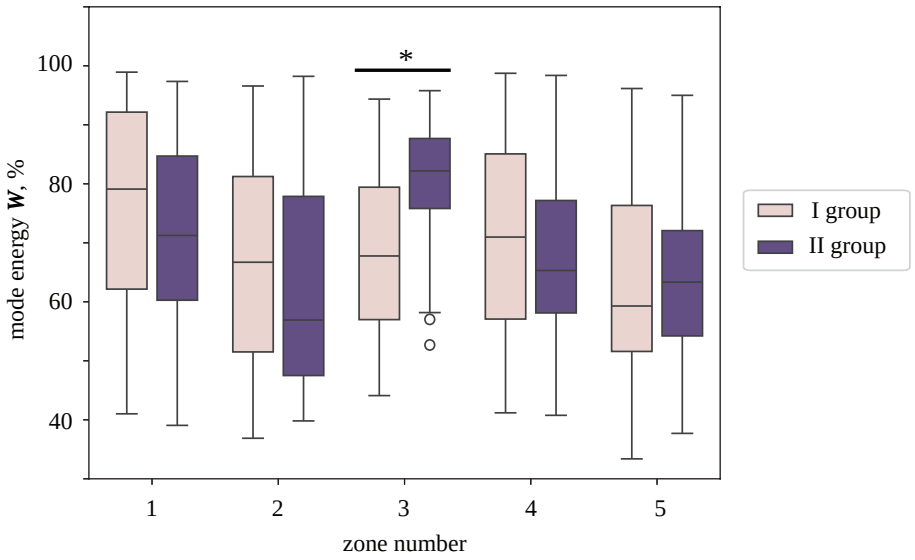


Рис. 5. Распределение энергии первой КЛ-моды для различных зон головного мозга для всех испытуемых, разбитых на две группы (I и II). Величины, достоверно различающиеся согласно критерию Манна–Уитни ($p < 0.005$), выделены $\overline{*}$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Distribution of the energy of the first CL mode for different areas of the brain for all subjects divided into two groups (I and II). Values that differ significantly according to the Mann–Whitney test ($p < 0.005$) are highlighted by $\overline{*}$ (color online)

первой КЛ-моды по сравнению с группой I. При этом II группу можно соотнести с группой пациентов «с частыми приступами». Таким образом, для этой группы испытуемых прослеживается связь между выраженностью вызванных потенциалов в мозгу больных мигренью и энергией первой КЛ-моды. Что касается I группы испытуемых, то их можно отнести к группе людей с эпизодическими приступами мигрени (1–3 в месяц), а следовательно, можно ожидать, что характерные зависимости вызванных потенциалов и КЛ-мод логичнее сравнивать со здоровыми исследуемыми, что требует проведения дополнительных экспериментальных и теоретических исследований.

Заключение

Таким образом, в работе проводился анализ записей ЭЭГ, измеренных у пациентов с мигренью, с помощью метода ортогональной декомпозиции по Карунену–Лоэву. В работе проведена попытка выявить основные закономерности в динамике ЭЭГ-реализаций, полученных для различных зон головного мозга в период длительного монотонного восприятия зрительных стимулов. Показано, что распределение КЛ-мод по энергиям имеют индивидуальный характер для различных испытуемых. Существенные различия также наблюдаются в распределениях мод по энергиям для различных зон мозга. Кроме того, на эти характеристики влияет этап эксперимента, для которого определялась энергия КЛ-мод.

Результаты, приведённые в данной работе, а также анализ предыдущих исследований показывают, что количество мод, которыми без потери качества можно описать сигнал ЭЭГ, ограничивается первыми 2–4 модами по величине энергии в зависимости от условий эксперимента, для которых снимались сигналы. По современным представлениям количество КЛ-мод определяет сложность динамики сигнала во времени и пространстве. При этом удаётся выделить взаимосвязь количества значимых мод с мощностью альфа-ритма в сигналах ЭЭГ, а также прослеживается пространственная локализация этого эффекта. В нашем случае такая взаимосвязь особенно выражена в затылочном отделе мозга (1-я зона) и в состоянии пассивного бодрствования, которые характеризуются высокими значениями энергии первой КЛ-моды (до 98% в отдельных случаях).

Для лобной области регистрации ЭЭГ продемонстрировано существование достоверных различий в распределении первой КЛ-моды, оцениваемых для групп пациентов с редкими и частыми приступами мигрени.

Список литературы

1. *Feyissa A. M., Tatum W. O.* Adult EEG // Handbook of clinical neurology. 2019. Vol. 160. P. 103–124. DOI: 10.1016/B978-0-444-64032-1.00007-2.
2. *Lin Z., Zhang Ch., Wu W., Gao X.* Frequency recognition based on canonical correlation analysis for SSVEP-based BCIs // IEEE transactions on biomedical engineering. 2006. Vol. 53, iss. 12. P. 2610–2614. DOI: 10.1109/TBME.2006.886577.
3. *Adeli H., Zhou Z., Dadmehr N.* Analysis of EEG records in an epileptic patient using wavelet transform // Journal of neuroscience methods. 2003. Vol. 123, iss. 1. P. 69–87. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00340-0.
4. *Hansen S. T., Hemakom A., Safeldt M. G., Krohne L. K., Madsen K. H., Siebner H. R., Mandic D. P., Hansen L. K.* Unmixing oscillatory brain activity by eeg source localization and empirical mode decomposition // Computational intelligence and neuroscience. 2019. Vol. 2019, iss. 4. P. 1-15. DOI: 10.1155/2019/5618303.
5. *Karhunen K.* Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Helsinki: Universitat Helsinki, 1947. 79 p.
6. *Loeve M.* Functions Aleatories de Seconde Ordre. Paris: Hermann, 1948.

7. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978. 414 с.
8. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. Москва: Техносфера, 2012. 1104 с.
9. *Hotelling H.* Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components // J. Educ. Psychol. 1933. Vol. 24. P. 498–520.
10. *Kramer H. P., Mathews M. V.* A Linear coding for transmitting a set of correlated signals // IRE Trans. Info. Theory. 1956. Vol. 2, no. 3. P. 41–46. DOI: 10.1109/TIT.1956.1056808.
11. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. В 2-х т. М.: Мир, 1982.
12. *Duda R. O., Hart P. E.* Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures // Comm. ACM. 1972. Vol. 15, no. 1. P. 11–15. DOI: 10.1145/361237.361242.
13. *Duda R. O, Hart P. E., Stork D. G.* Pattern Classification. New York: John Wiley and Sons, 2001. 654 p. DOI: 10.1007/s00357-007-0015-9.
14. *Jonak K., Syta A., Karakula-Juchnowicz H., Krukow P.* The clinical application of EEG-signals recurrence analysis as a measure of functional connectivity: Comparative case study of patients with various neuropsychiatric disorders // Brain sciences. 2020. Vol. 10, no. 6. P. 380. DOI: 10.3390/brainsci10060380.
15. *Onton J., Westerfield M., Makeig S., Townsend J.* Imaging human EEG dynamics using independent component analysis // Neuroscience and biobehavioral reviews. 2006. Vol. 30, no. 6. P. 808–822. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2006.06.007.
16. *Ramakrishnan A. G., Satyanarayana J. V.* Reconstruction of EEG from limited channel acquisition using estimated signal correlation // Biomedical Signal Processing and Control. 2016. Vol. 27. P. 164–173. DOI: doi.org/10.1016/j.bspc.2016.02.004.
17. *Wongsawat Y., Oraintara S., Rao K. R.* Integer sub-optimal Karhunen-Loeve transform for multi-channel lossless EEG compression // 2006 14th European Signal Processing Conference, Florence, Italy, 2006. P. 1–5.
18. *Wongsawat Y. Oraintara S., Tanaka T., Rao K. R.* Lossless multi-channel EEG compression // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. IEEE, 2006. DOI: 10.1109/ISCAS.2006.1692909.
19. *Babadi B., McKinney S. M., Tarokh V., Ellenbogen J. M.* DiBa: A Data-Driven Bayesian Algorithm for Sleep Spindle Detection // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2012. Vol. 59, no. 2, P. 483–493. DOI: 10.1109/TBME.2011.2175225.
20. *Kuriakose S., Titus G.* Karhunen-loeve transform for sleep spindle detection // 2016 3rd International Conference on Devices, Circuits and Systems (ICDCS), Coimbatore, India, 2016. P. 249–253. DOI: 10.1109/ICDCSyst.2016.7570602.
21. *Vural C., Murat Y.* Determination of sleep stage separation ability of features extracted from EEG signals using principle component analysis // Journal of medical systems. 2010. Vol. 34, no. 1. P. 83. DOI: 10.1007/s10916-008-9218-9.
22. *Klonowski W., Jernajczyk W., Niedzielska K., Ritz A.* Quantitative measure of complexity of EEG signal dynamics // Acta neurobiologiae experimentalis. 1999. Vol. 59, no. 4. P. 315–321. DOI: 10.55782/ane-1999-1316.
23. *Fuchs A., Kelso S., Haken H.* Phase transitions in the human brain: Spatial mode dynamics // International Journal of Bifurcation and Chaos - IJBC. 1992. Vol. 2, no. 4. P. 917–939. DOI: 10.1142/S0218127492000537.
24. *Jirsa V. K., Friedrich R., Haken H.* Reconstruction of the spatio-temporal dynamics of a human magnetoencephalogram // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1995. Vol. 89, iss. 1–2. P. 100–122. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00226-x.
25. *Anderson C. W., Devulapalli S. V., Stolz E.* Determining Mental State from EEG Signals Using Parallel Implementations of Neural Networks // Sci. Program. 1995. Vol. 4, no. 3. P. 171–183. DOI: 10.1155/1995/603414.

26. *Lamothe R. Stroink G.* Orthogonal expansions: Their applicability to signal extraction in electrophysiological mapping data // Medical and biological engineering and computing. 1991. Vol. 29. P. 522–528. DOI: 10.1007/BF02442325.
27. *Broomhead D. S., King G. P.* Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica D Nonlinear Phenomena. 1986. Vol. 20, no. 2–3. P. 217–236. DOI: 10.1016/0167-2789(86)90031-X.
28. *Rahman M. A., Haque M. M., Anjum A., Mollah M. N., Ahmad M.* Classification of motor imagery events from prefrontal hemodynamics for BCI application // In: Uddin M. S., Bansal J. C. (eds) Proceedings of International Joint Conference on Computational Intelligence. Algorithms for Intelligent Systems. Singapore: Springer, 2020. P. 11–23. DOI: 10.1007/978-981-13-7564-4_2.
29. *Littner M. R., Kushida C., Wise M., Davila D. G., Morgenthaler T., Lee-Chiong T., Hirshkowitz M., Loube D. L., Bailey D., Berry R. B., Kapen S., Kramer M.* Practice parameters for clinical use of the multiple sleep latency test and the maintenance of wakefulness test // Sleep. 2005. Vol. 28, no. 1. P. 113–121. DOI: 10.1093/sleep/28.1.113.
30. *Schubring D., Kraus M., Stolz C., Weiler N., Keim D. A., Schupp H.* Virtual reality potentiates emotion and task effects of Alpha/Beta brain oscillations // Brain Sciences. 2020. Vol. 10, no. 8. P. 537. DOI: 10.3390/brainsci10080537.
31. *Iscan Z., Nikulin V. V.* Steady state visual evoked potential (SSVEP) based brain-computer interface (BCI) performance under different perturbations // PloS one. 2018. Vol. 13, no. 1. e0191673. DOI: 10.1371/journal.pone.0191673.
32. *Парсамян Р. Р., Посненкова О. М., Журавлев М. О., Сельский А. О., Киселев А. Р., Фисун А. В., Руннова А. Е.* Хронизация головной боли: анализ вызванных потенциалов на стимул // Российский журнал боли. 2024. Vol. 22, no. 1. P. 18–26. DOI: 10.17116/pain20242201118.
33. *Ватанабе С.* Разложение Карунена–Лоэва и факторный анализ. Теория и приложения / Под ред. Бравермана Э. М. Автоматический анализ сложных изображений. М.: Мир, 1969. С. 310.
34. *Trubetskov D. I., Hramov A. E., Egorov E. N., Filatov R. A., Kalinin Y. A., Koronovskii A. A.* Experimental and Theoretical Study of Chaotic Microwave Oscillations and Pattern Formation in Non-relativistic Electron Beam with Virtual Cathode // 2006 IEEE International Vacuum Electronics Conference held Jointly with 2006 IEEE International Vacuum Electron Sources. Monterey: IEEE, 2006. P. 527–528. DOI: 10.1109/IVELEC.2006.1666415.
35. *Egorov E. N., Makarov V. V., Hramov A. E.* Analyzing the formation of coherent structures in a helical electron flow with a virtual cathode // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2014. Vol. 78. P. 1246–1249. DOI: 10.3103/S1062873814120041.
36. *Egorov E. N., Hramov A. E.* Formation of coherent structures in helical electron beam with a virtual cathode // 24th International Crimean Conference Microwave and Telecommunication Technology, Sevastopol, Russia, 2014. P. 845–846.
37. *Runnova A., Zhuravlev M., Shamionov R., Parsamyan R., Egorov E., Kiselev A., Selskii A., Akimova O., Karavaev A., Kurths J.* Spatial patterns in EEG activity during monotonous sound perception test // Eur. Phys. J. Plus. 2021. Vol. 136. P. 735. DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01716-1.
38. *Bazanova O. M., Vernon D.* Interpreting EEG alpha activity // Neuroscience and Biobehavioral Reviews. 2014. Vol. 44. P. 94–110. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2013.05.007.
39. *Симонян М. С., Новиков М. Ю.* Изменение пространственной структуры активности головного мозга при длительной монотонной зрительной нагрузке // Труды VII Всероссийской конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях - 2021». С. 144–146.
40. *Zhuravlev M., Novikov M., Parsamyan R., Selskii A., Runnova A.* The Objective Assessment of Event-Related Potentials: An Influence of Chronic Pain on ERP Parameters // Neuroscience bulletin. 2023. Vol. 39, no. 7. P. 1105–1116. DOI: 10.1007/s12264-023-01035-8.

References

1. Feyissa AM, Tatum WO. Adult EEG. Handbook of clinical neurology. 2019;160:103–124. DOI: 10.1016/B978-0-444-64032-1.00007-2.
2. Lin Z, Zhang Ch, Wu W, Gao X. Frequency recognition based on canonical correlation analysis for SSVEP-based BCIs. IEEE transactions on biomedical engineering. 2006;53(12):2610–2614. DOI: 10.1109/TBME.2006.886577.
3. Adeli H, Zhou Z, Dadmehr N. Analysis of EEG records in an epileptic patient using wavelet transform. Journal of neuroscience methods. 2003;123(1):69–87. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00340-0.
4. Hansen ST, Hemakom A, Safeldt MG, Krohne LK, Madsen KH, Siebner HR, Mandic DP, Hansen LK. Unmixing oscillatory brain activity by EEG source localization and empirical mode decomposition. Computational intelligence and neuroscience. 2019;2019(4):1–15. DOI: 10.1155/2019/5618303.
5. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Helsinki: Universitat Helsinki, 1947. V. 37.
6. Loeve M. Functions Aleatories de Seconde Ordre. Paris: Hermann; 1948.
7. Tou J. T., Gonzalez R. C. Pattern Recognition Principles. Addison-Wesley, Read-ing, Mass; 1974.
8. Gonzalez RC, Woods RE. Digital Image Processing: International Version. 3rd ed. Pearson Education Inc.; 2008.
9. Hotelling H. Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components. J. Educ. Psychol. 1933;24:498–520.
10. Kramer HP, Mathews MV. A Linear Coding for Transmitting a Set of Correlated Signals. IRE Trans. Info. Theory. 1956;2(3):41–46. DOI: 10.1109/TIT.1956.1056808.
11. Pratt WK. Digital image processing. John Wiley and Sons, New York. 1982.
12. Duda RO, Hart PE. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures. Comm. ACM. 1972;15(1):11–15. DOI: 10.1145/361237.361242.
13. Duda RO, Hart PE, Stork DG. Pattern Classification. New York: John Wiley and Sons; 2001. 654 p. DOI: 10.1007/s00357-007-0015-9.
14. Jonak K, Syta A, Karakula-Juchnowicz H, Krukow P. The clinical application of EEG-signals recurrence analysis as a measure of functional connectivity: Comparative case study of patients with various neuropsychiatric disorders. Brain sciences. 2020;10(6):380. DOI: 10.3390/brainsci10060380.
15. Onton J, Westerfield M, Makeig S, Townsend J. Imaging human EEG dynamics using independent component analysis. Neuroscience and biobehavioral reviews. 2006;30(6):808–822. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2006.06.007.
16. Ramakrishnan AG, Satyanarayana JV. Reconstruction of EEG from limited channel acquisition using estimated signal correlation. Biomedical Signal Processing and Control. 2016;27:164–173. DOI: doi.org/10.1016/j.bspc.2016.02.004.
17. Wongsawat Y, Oraintara S, Rao KR. Integer sub-optimal Karhunen-Loeve transform for multi-channel lossless EEG compression. 2006 14th European Signal Processing Conference, Florence, Italy, 2006. P. 1–5.
18. Wongsawat Y, Oraintara S, Tanaka T, Rao KR. Lossless multi-channel EEG compression. IEEE International Symposium on Circuits and Systems. IEEE, 2006. DOI: 10.1109/ISCAS.2006.1692909.
19. Babadi B, McKinney SM, Tarokh V, Ellenbogen JM. DiBa: A Data-Driven Bayesian Algorithm for Sleep Spindle Detection. IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2012;59(2):483–493.
20. Kuriakose S, Titus G. Karhunen-loeve transform for sleep spindle detection. 2016 3rd International Conference on Devices, Circuits and Systems (ICDCS), Coimbatore, India, 2016. P. 249–253.

21. Vural C, Murat Y. Determination of sleep stage separation ability of features extracted from EEG signals using principle component analysis. Journal of medical systems. 2010;34(1):83. DOI: 10.1007/s10916-008-9218-9.
22. Klonowski W, Jernajczyk W, Niedzielska K, Ritz A. Quantitative measure of complexity of EEG signal dynamics. Acta neurobiologiae experimentalis. 2010;59(4):315–321. DOI: 10.55782/ane-1999-1316.
23. Fuchs A, Kelso S, Haken H. Phase transitions in the human brain: Spatial mode dynamics. International Journal of Bifurcation and Chaos - IJBC. 1992;2(4):917–939. DOI: 10.1142/S0218127492000537.
24. Jirsa VK, Friedrich R, Haken H. Reconstruction of the spatio-temporal dynamics of a human magnetoencephalogram. Physica D: Nonlinear Phenomena. 1995;89(1–2):100–122. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00226-x.
25. Anderson CW, Devulapalli SV, Stolz E. Determining Mental State from EEG Signals Using Parallel Implementations of Neural Networks. Sci. Program. 1995;4(3):171–183. DOI: 10.1155/1995/603414.
26. Lamothe R, Stroink G. Orthogonal expansions: Their applicability to signal extraction in electrophysiological mapping data. Medical and biological engineering and computing. 1991;29:522–528. DOI: 10.1007/BF02442325.
27. Broomhead DS, King GP. Extracting qualitative dynamics from experimental data. Physica D Nonlinear Phenomena. 1986;20(2):217–236. DOI: 10.1016/0167-2789(86)90031-X.
28. Rahman MA, Haque MM, Anjum A, Mollah MN, Ahmad M. Classification of motor imagery events from prefrontal hemodynamics for BCI application. In: Uddin M. S., Bansal J. C. (eds) Proceedings of International Joint Conference on Computational Intelligence. Algorithms for Intelligent Systems. Singapore: Springer; 2020. P. 11–23. DOI: 10.1007/978-981-13-7564-4_2.
29. Littner MR, Kushida C, Wise M, Davila DG, Morgenthaler T, Lee-Chiong T, Hirshkowitz M, Loube DL, Bailey D, Berry RB, Kapen S, Kramer M. Practice parameters for clinical use of the multiple sleep latency test and the maintenance of wakefulness test. Sleep. 2005;28(1):113–121. DOI: 10.1093/sleep/28.1.113.
30. Schubring D, Kraus M, Stolz C, Weiler N, Keim DA, Schupp H. Virtual reality potentiates emotion and task effects of Alpha/Beta brain oscillations. 2020;10(8):537. DOI: 10.3390/brainsci10080537.
31. Iscan Z, Nikulin VV. Steady state visual evoked potential (SSVEP) based brain-computer interface (BCI) performance under different perturbations. PloS one. 2018;13(1):e0191673. DOI: 10.1371/journal.pone.0191673.
32. Parsamyan RR, Posnenkova OM, Zhuravlev MO, Selskii AO, Kiselev AR, Fisun AV, Runnova AE. Headache chronification: analysis of evoked potentials for stimulus. Russian Journal of Pain. Russian Journal of Pain. 2024;22(1):18–26. DOI: 10.17116/pain20242201118.
33. Watanabe S. Karhunen–Loéve decomposition and factor analysis. Theory and applications. In: Braverman EM. (ed) Automatic analysis of complex images. Moscow: Mir; 1969. P. 310.
34. Trubetskov DI, Hramov AE, Egorov EN, Filatov RA, Kalinin YA, Koronovskii AA. Experimental and Theoretical Study of Chaotic Microwave Oscillations and Pattern Formation in Non-relativistic Electron Beam with Virtual Cathode. 2006 IEEE International Vacuum Electronics Conference held Jointly with 2006 IEEE International Vacuum Electron Sources. Monterey: IEEE, 2006. P. 527–528. DOI: 10.1109/IVELEC.2006.1666415.
35. Egorov EN, Makarov VV, Hramov AE. Analyzing the formation of coherent structures in a helical electron flow with a virtual cathode. Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2014;78:1246–1249. DOI: 10.3103/S1062873814120041.

36. Egorov EN, Hramov AE. Formation of coherent structures in helical electron beam with a virtual cathode. 24th International Crimean Conference Microwave and Telecommunication Technology, Sevastopol, Russia, 2014. P. 845–846.
37. Runnova A, Zhuravlev M, Shamionov R, Parsamyan R, Egorov E, Kiselev A, Selskii A, Akimova O, Karavaev A, Kurths J. Spatial patterns in EEG activity during monotonous sound perception test. Eur. Phys. J. Plus. 2021;136:735. DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01716-1.
38. Bazanova OM, Vernon D. Interpreting EEG alpha activity. Neuroscience and Biobehavioral Reviews. 2014;44:94-110. DOI: 10.1016/j.neubiorev.2013.05.007.
39. Simonian MS, Novikov MIu. Changes in the spatial structure of brain activity during prolonged monotonous visual load. Proceedings of the VII All-Russian Conference “Nonlinear dynamics in cognitive research-2021”, 2021. P. 144–146.
40. Zhuravlev M, Novikov M, Parsamyan R, Selskii A, Runnova A. The Objective Assessment of Event-Related Potentials: An Influence of Chronic Pain on ERP Parameters. Neuroscience bulletin. 2023;39(7):1105–1116. DOI: 10.1007/s12264-023-01035-8.

Егоров Евгений Николаевич — родился в Саратове (1980). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета (2002). Кандидат физико-математических наук (2007), доцент (2010). Доцент кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов — нелинейная динамика, СВЧ-электроника, численный анализ данных. Опубликовал более 50 статей в отечественных и зарубежных журналах по данной тематике.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: evgeniy.n.egorov@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8581-1077
AuthorID (eLibrary.Ru): 112572

Журавлев Максим Олегович — окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2011). Кандидат физико-математических наук (2014). С 2016 года работает на кафедре физики открытых систем СГУ в должности доцента. Область научных интересов — междисциплинарное направление нейронауки, включающее в себя анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ZhuravlevMO@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8620-1609
AuthorID (eLibrary.Ru): 672581

Руннова Анастасия Евгеньевна — окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2005). Доктор физико-математических наук (2019). Заведующий кафедрой биофизики и цифровых технологий СГМУ имени В. И. Разумовского. Автор ряда статей в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: anefila@gmail.com
ORCID: 0000-0002-2102-164X
AuthorID (eLibrary.Ru): 133292

Евстропов Максим Аркадьевич — родился в Хабаровске (2003). Студент Института физики Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, направление «Радиофизика». Научные интересы — вакуумная СВЧ электроника, численное моделирование.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: jamp400@mail.ru

Реджепова Алена Садуллаевна — родилась в Саратове (2004). Окончила с отличием Лицей-интернат № 64 (2022). В настоящее время обучается на 2 курсе факультета фундаментальной медицины и медицинских технологий Саратовского государственного университета по направлению «Медицинская биохимия». Научные интересы — нейробиология.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: redzepovaalena@gmail.com

Подписка на печатную версию

Подписной индекс издания 73498
Оформить подписку на печатную версию можно
в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru)
Журнал выходит 6 раз в год
Цена свободная

Электронная версия журнала находится
в открытом доступе (andjournal.sgu.ru)
Все статьи журнала публикуются на условиях лицензии
CC-BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International
License)

Адрес редакции (редакционно-издательский отдел):

410012 Саратов, ул. Большая Казачья, 112А, ауд. 301
Тел.: +7(927)-625-9020 (зав. редакцией)
E-mail: andjournal@sgu.ru
Website: andjournal.sgu.ru

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. *Gulyaev*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. *Sysoev*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)
A. N. *Chumachenko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

MANAGING EDITOR

M. V. *Sysoeva*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. *Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)
B. P. *Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)
S. *Boccaletti*, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)
A. M. *Bykov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)
N. S. *Ginzburg*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)
S. V. *Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)
A. S. *Dmitriev*, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)
O. I. *Kanakov*, Ph.D., Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)
S. A. *Kashchenko*, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)
A. V. *Kraskov*, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)
N. V. *Kuznetsov*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)
G. *van Luijtelaar*, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)
A. *Lüttjohann*, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)
G. G. *Malinetskii*, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)
V. V. *Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)
I. I. *Mokhov*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)
A. B. *Neiman*, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)
V. I. *Nekorkin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)
A. N. *Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)
A. V. *Porubov*, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)
V. V. *Tuchin*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)
A. M. *Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)
E. Ya. *Frisman*, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute for Complex Analysis of Regional Problems of the RAS (Birobidzhan, Russia)
V. A. *Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)
V. A. *Cherepenin*, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)
M. V. *Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)
V. G. *Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

При оформлении обложки использована фотография М. Фейгенбаума с сайта Рокфеллерского университета (https://www.rockefeller.edu/news/26289-mitchell-feigenbaum-physicist-pioneered-chaos-theory-died)

ISSN 0869-6632