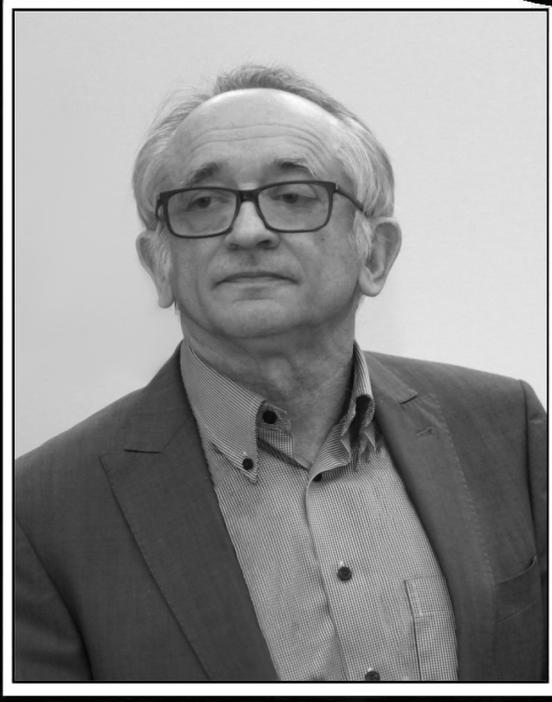


ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

# Трикладная Инженерная Динамика



1  
2022

*70 лет Науму Самуиловичу Гинзбургу  
(11 февраля 1952 года)*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

*Ю. В. Гуляев*, д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва

## ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

*И. В. Сысоев*, д.ф.-м.н., профессор СГУ имени Н. Г. Чернышевского

*А. Н. Чумаченко*, д. геогр. н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

## ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

*В. М. Аникин*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

*Б. П. Безручко*, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского

*С. В. Гонченко*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н. И. Лобачевского

*Н. С. Гинзбург*, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,  
Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

*А. С. Дмитриев*, д.ф.-м.н., профессор, Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Москва

*С. А. Кащенко*, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ имени П. Г. Демидова

*П. С. Ланда*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова

*Г. Г. Малинецкий*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

*В. В. Матросов*, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ имени Н. И. Лобачевского

*В. И. Некоркин*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,  
Нижний Новгород

*А. В. Порубов*, д.ф.-м.н., Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург

*Ю. М. Романовский*, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М. В. Ломоносова

*В. В. Тучин*, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН,  
СГУ имени Н. Г. Чернышевского

*А. М. Фейгин*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,  
Нижний Новгород

*В. А. Царёв*, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А., Саратов

*М. В. Шитикова*, д.ф.-м.н., профессор, Воронежский государственный  
технический университет

*В. Г. Яхно*, д.ф.-м.н., профессор, Институт прикладной физики РАН,  
Нижний Новгород

*S. Boccaletti*, Ph.D. in Physics, Senior Researcher of Institute for Complex  
Systems of the National Research Council, Sesto Fiorentino, Italy

*A. V. Kraskov*, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,  
Sobell Department, London, UK

*N. V. Kuznetsov*, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland

*G. van Luijtelaar*, Ph.D., Professor emeritus, Donders Centre for Cognition,  
Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands

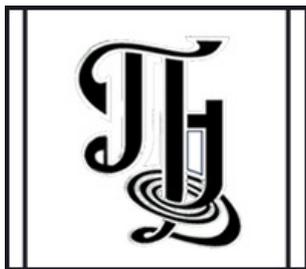
*A. K. Lüttjohann*, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I,  
Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Germany

*A. B. Neiman*, Dr. of Science, Physics and Mathematics, Associate professor  
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA

*A. S. Pikovsky*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany

*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid, Centre for  
Biomedical Technology, Spain

*V. A. Vakorin*, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics Lead,  
ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



**Известия высших учебных заведений  
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

*Научно-технический журнал*

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

**Учредитель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

**Издатель** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»  
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index.

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание.

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 01.02.01 – Теоретическая механика; 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела; 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры; 01.04.02 – Теоретическая физика; 01.04.03 – Радиофизика; 01.04.04 – Физическая электроника; 01.04.05 – Оптика; 01.04.08 – Физика плазмы; 01.04.10 – Физика полупроводников; 01.04.21 – Лазерная физика; 03.01.02 – Биофизика.

Подписка осуществляется по Объединенному Каталогу «Пресса России» Раздел 30. «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов» (подписной индекс 73498) и по Интернет-Каталогу Агентства «Книга-Сервис». Цена свободная.

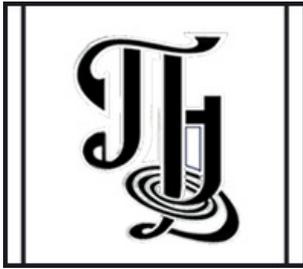
Электронная версия журнала находится в открытом доступе.

Зав. редакцией М. В. Сысоева  
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова  
Оформление А. А. Токмачевой  
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,  
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,  
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 17.01.2022  
Вышел в свет 31.01.2022  
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 14,41 (14,8)  
Тираж 70 экз. Заказ № 2-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского  
университета. Адрес типографии: Россия,  
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8  
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



**Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy**  
**APPLIED NONLINEAR DYNAMICS**

*Scientific-technical journal*

Published since 1993, 6 issues per year

**The journal was founded by** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

**The publisher of the journal is** Saratov State University  
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: [rector@sgu.ru](mailto:rector@sgu.ru)

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform.

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538).

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 01.02.01 – Theoretical mechanics; 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids; 01.02.06 – Dynamics, Strength of Machines, Devices and Equipment; 01.04.02 – Theoretical Physics; 01.04.03 – Radiophysics; 01.04.04 – Physical Electronics; 01.04.05 – Optics; 01.04.08 – Physics of Plasmas; 01.04.10 – Physics of Semiconductors; 01.04.21 – Laser Physics; 03.01.02 – Biophysics.

The journal subscription index is 73498 in the United Catalogue «Pressa Rossii», «The Russian Press», section 30 «Scientific and Technical Journals. Bulletins of the Russian Academy of Sciences. Bulletins of Higher Educational Institutions (Izvestiya VUZ)».

The journal is Open Access.

Head of Editorial office M. V. Sysoeva  
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova  
Design of A. A. Tokmacheva  
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,  
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (8452) 523864,  
+7 (909) 3367208, e-mail: [andjournal@sgu.ru](mailto:andjournal@sgu.ru),  
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 17.01.2022. Published 31.01.2022  
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 14,41 (14,8)  
Edition of 70 copies. Order No. 2-T

Printed by Printing House of Saratov State  
University. Address of Printing House:  
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,  
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: [sguprint@bk.ru](mailto:sguprint@bk.ru)

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

ОТ РЕДАКТОРА

*Рыскин Н. М.* 70 лет Науму Самуиловичу Гинзбургу..... 5

БИФУРКАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ  
ХАОС. КВАНТОВЫЙ ХАОС

*Кузнецов С. П.*, *Тюрюкина Л. В.* Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта:  
уравнения и динамика ..... 7

*Сизых Г. Б.* Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных  
течениях жидкости и газа ..... 30

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

*Заковоротный В. Л.*, *Гвинджилия В. Е.* Связь притягивающих множеств деформаций  
инструмента с пространственной ориентацией упругости и регенерацией сил  
резания при точении ..... 37

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

*Куц А. К.*, *Максименко В. А.*, *Храмов А. Е.* Влияние «сенсорной предыстории» на  
обработку головным мозгом неоднозначных визуальных стимулов ..... 57

*Chholak P.*, *Tabari F.*, *Pisarchik A. N.* Revealing the neural network underlying covert  
picture-naming paradigm using magnetoencephalography [*Чхолак П.*, *Табари Ф.*,  
*Писарчик А. Н.* Выявление нейронной сети, лежащей в основе парадигмы скрытого  
наименования изображений, с помощью магнитоэнцефалографии] ..... 76

*Бадарин А. А.*, *Грубов В. В.*, *Андреев А. В.*, *Антипов В. М.*, *Куркин С. А.* Гемодинами-  
ческий ответ в моторной коре на выполнение различных типов движения ..... 96

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

*Шабунин А. В.* Селекция пространственных мод в ансамбле хаотических отображе-  
ний с дальнедействующими связями ..... 109

C O N T E N T S

EDITORIAL

*Ryskin N. M.* 70 years of Naum S. Ginzburg ..... 5

BIFURCATION IN DYNAMICAL SYSTEMS. DETERMINISTIC CHAOS.  
QUANTUM CHAOS

*Kuznetsov S. P.*, *Turukina L. V.* Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics ..... 7

*Sizykh G. B.* New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas ..... 30

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

*Zakovorotny V. L.*, *Gvindjiliya V. E.* Correlation of attracting sets of tool deformations with spatial orientation of tool elasticity and regeneration of cutting forces in turning .... 37

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

*Kuc A. K.*, *Maksimenko V. A.*, *Hramov A. E.* Influence of «sensory prehistory» on the ambiguous stimuli processing in the human brain ..... 57

*Chholak P.*, *Tabari F.*, *Pisarchik A. N.* Revealing the neural network underlying covert picture-naming paradigm using magnetoencephalography ..... 76

*Badarin A. A.*, *Grubov V. V.*, *Andreev A. V.*, *Antipov V. M.*, *Kurkin S. A.* Hemodynamic response in the motor cortex to execution of different types of movements ..... 96

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

*Shabunin A. V.* Selection of spatial modes in an ensemble of non-locally coupled chaotic maps ..... 109



Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-5-6

## 70 лет Науму Самуиловичу Гинзбургу

*Н. М. Рыскин*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН, Россия  
Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: RyskinNM@gmail.com  
*Поступила в редакцию 14.01.2022, опубликована 31.01.2022*

*Для цитирования: Рыскин Н. М. 70 лет Науму Самуиловичу Гинзбургу // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 5–6.  
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-5-6.*

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

11 февраля 2022 года исполняется 70 лет Науму Самуиловичу Гинзбургу — крупному ученому в области радиофизики и физической электроники, заведующему отделом высокочастотной релятивистской электроники ФГБНУ «Федерального исследовательского центра Институт прикладной физики Российской академии наук» (Нижний Новгород).

Наум Самуилович Гинзбург родился в городе Горьком в 1952 году. В 1974 году окончил с отличием радиофизический факультет Горьковского государственного университета. После окончания университета Н. С. Гинзбург становится сотрудником Института прикладной физики АН СССР (в настоящее время — ФИЦ ИПФ РАН). В его работах, выполненных совместно с М. И. Петелиным, В. Л. Братманом, Г. С. Нусиновичем, Г. Г. Денисовым, развивалась нелинейная теория сверхвысокочастотных генераторов: лазеров на свободных электронах, гиротронов, мазеров на циклотронном авторезонансе. В эти годы началось плодотворное сотрудничество Н. С. Гинзбурга с саратовской радиофизической школой, которое не прекращается и по сей день. Так, в 1978 году Н. С. Гинзбург и С. П. Кузнецов опубликовали ставшую классической работу, в которой были заложены основы нестационарной нелинейной теории лампы обратной волны О-типа и впервые показана возможность возникновения сложной динамики в данном классе систем.

В 1970–80-х годах Н. С. Гинзбург выполнил большой цикл теоретических исследований нелинейной динамики лазеров и мазеров на свободных электронах. Впоследствии эти исследования составили основу его докторской диссертации, защищенной в 1993 году.

В начале 1990-х годов внимание Наума Самуиловича привлекает аналогия между процессами генерации импульсов в квантовой электронике и в классических электронно-волновых системах, прежде всего — эффект кооперативного излучения или сверхизлучения Дике. Н. С. Гинзбург совместно с И. В. Зотовой провел основополагающие работы по теории сверхизлучения протяженных электронных сгустков, которые в сотрудничестве с ведущими физиками-экспериментаторами М. И. Яландиным (ИЭФ УрО РАН), В. В. Ростовым (ИСЭ СО РАН, Томск) и др. позволили реализовать новый класс импульсных источников электромагнитного излучения с экстремально высокой мультигигаваттной пиковой мощностью и уникальной короткой субнаносекундной длительностью.

Также в начале 1990-х годов Н. С. Гинзбург выдвинул идею использования двумерной распределенной обратной связи (РОС) для генерации когерентного излучения пространственно-развитыми активными средами, в качестве которых могут выступать как мощные сильноточные релятивистские пучки, так и полупроводниковые лазерные среды. На основе двумерной РОС, реализуемой с помощью двумерных брэгговских структур, в сотрудничестве с А. В. Аржанниковым, Н. Ю. Песковым и А. Д. Р. Фелпсом в ИЯФ СО РАН (Новосибирск) и Стратклайдском университете (Глазго, Великобритания) были созданы мазеры на свободных электронах планарной и цилиндрической геометрии с рекордным для коротковолновой части миллиметрового диапазона уровнем мощности.

Большой вклад внес Н. С. Гинзбург в развитие квазиоптического подхода к описанию процессов электронно-волнового взаимодействия. В 1980-х годах Н. С. Гинзбургом совместно с Г. С. Нусиновичем, А. С. Сергеевым и Н. А. Завольским была развита нестационарная теория гиротрона с нефиксированной структурой высокочастотного поля и сформулированы граничные условия излучения в генераторах с дифракционным выводом энергии. Впоследствии Наум Самуилович и его ученик А. М. Малкин развили квазиоптическую теорию релятивистских черенковских генераторов поверхностной волны.

В 1980 году в составе авторского коллектива Н. С. Гинзбург был удостоен премии Ленинского комсомола за цикл работ по теоретическому и экспериментальному исследованию индуцированного излучения сильноточных релятивистских электронных пучков и создание на этой основе мощных источников электромагнитных колебаний. В 2003 году Науму Самуиловичу и его коллегам из ИПФ РАН, МГУ имени М. В. Ломоносова и Института сильноточной электроники СО РАН была присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники за исследование стимулированного излучения сильноточных релятивистских электронных пучков и создание сверхмощных вакуумных микроволновых генераторов.

В 2019 году Н. С. Гинзбург был избран членом-корреспондентом РАН по Отделению физических наук (секция общей физики и астрономии).

Наум Самуилович — постоянный автор журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», с 2021 года входит в состав его редколлегии. В области нелинейной физики значительным достижением являются его работы по солитонам самоиндуцированной прозрачности и диссипативным солитонам в электронных системах.

В течение многих лет Н. С. Гинзбург ведет преподавательскую работу на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского. Под его руководством защищено 9 кандидатских диссертаций. Большую работу Наум Самуилович ведет в экспертном совете ВАК по физике.

*Коллеги и друзья от всей души поздравляют Наума Самуиловича с юбилеем,  
желают новых свершений, открытий и крепкого здоровья!*



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья

УДК 517.9:621.373.7

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29

## Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика

С. П. Кузнецов<sup>✉</sup>, Л. В. Тюрюкина<sup>✉</sup>

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
имени В. А. Котельникова РАН, Россия

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.06.2021, принята к публикации 10.08.2021,  
опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель настоящей работы — численное исследование обобщенной модели Рабиновича–Фабриканта, полученной с использованием формализма Лагранжа и описывающей трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности общего вида. Указанная модель демонстрирует богатую динамику, обусловленную наличием в уравнениях нелинейности третьего порядка. **Методы.** Исследование основано на численном решении полученных аналитически дифференциальных уравнений, а также их численном бифуркационном анализе с помощью программы MatCont. **Результаты.** Для полученной модели построены карты динамических режимов на плоскости управляющих параметров, зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. На плоскости управляющих параметров численно найдены и построены бифуркационные линии для положений равновесия и предельного цикла периода один. Показано, что динамика обобщенной модели зависит от сигнатуры характерных выражений, присутствующих в уравнениях. Проведено сопоставление с динамикой модели Рабиновича–Фабриканта и указаны области, где имеет место полное или частичное совпадение динамики. **Заключение.** Полученная модель является новой и описывает взаимодействие трех мод в случае, когда кубическая нелинейность, определяющая их взаимодействие, задана в общем виде. Кроме того, так как рассматриваемая модель представляет собой некоторое естественное расширение известной модели Рабиновича–Фабриканта, то так же, как и модель Рабиновича–Фабриканта, она является универсальной и может моделировать системы различной физической природы (в том числе радиотехнические), в которых имеет место трехмодовое взаимодействие и присутствует кубическая нелинейность общего вида.

**Ключевые слова:** модель Рабиновича–Фабриканта, хаотические аттракторы, формализм Лагранжа, бифуркационный анализ, мультистабильность.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121, <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

**Для цитирования:** Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Обобщенная система Рабиновича–Фабриканта: уравнения и динамика // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics

S. P. Kuznetsov, Turukina L. V. 

Saratov State University, Russia  
Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering  
and Electronics of RAS, Russia  
E-mail: turukinalv@yandex.ru  
Received 25.06.2021, accepted 10.08.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** The purpose of this work is to numerically study of the generalized Rabinovich–Fabrikant model. This model is obtained using the Lagrange formalism and describing the three-mode interaction in the presence of a general cubic nonlinearity. The model demonstrates very rich dynamics due to the presence of third-order nonlinearity in the equations. **Methods.** The study is based on the numerical solution of the obtained analytically differential equations, and their numerical bifurcation analysis using the MatCont program. **Results.** For the generalized model we present a charts of dynamic regimes in the control parameter plane, Lyapunov exponents depending on parameters, portraits of attractors and their basins. On the plane of control parameters, bifurcation lines and points are numerically found. They are plotted for equilibrium point and period one limit cycle. It is shown that the dynamics of the generalized model depends on the signature of the characteristic expressions presented in the equations. A comparison with the dynamics of the Rabinovich–Fabrikant model is carried out. We indicated a region in the parameter plane in which there is a complete or partial coincidence of dynamics. **Conclusion.** The generalized model is new and describes the interaction of three modes, in the case when the cubic nonlinearity that determines their interaction is given in a general form. In addition, since the considered model is a certain natural extension of the well-known Rabinovich–Fabrikant model, then it is universal. And it can simulate systems of various physical nature (including radio engineering), in which there is a three-mode interaction and there is a general cubic nonlinearity.

**Keywords:** Rabinovich–Fabrikant model, chaotic attractors, Lagrange formalism, bifurcation analysis, multistability.

**Acknowledgements.** Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project no. 21-12-00121), <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

**For citation:** Kuznetsov SP, Turukina LV. Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):7–29. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-7-29

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Исследование сложной динамики нелинейных систем, в том числе динамического хаоса, составляет одну из фундаментальных междисциплинарных проблем. К настоящему времени накоплен обширный материал, включающий множество теоретических результатов, методик и алгоритмов анализа, многообразие примеров модельных систем со сложной динамикой, экспериментальные данные и пр. [1–10]. Продуктивный подход в рамках этого направления состоит в выработке обобщенных моделей, охватывающих тот или иной круг феноменов и применимых, по крайней мере, для качественного описания систем различной природы. Одна из таких моделей предложена в 1979 г. Рабиновичем и Фабрикантом [11] для описания модуляционной неустойчивости и возникновения хаоса при параметрическом взаимодействии мод в неравновесной диссипативной среде с кубической нелинейностью со спектрально узким усилением. Считается, что возбуждаются три моды — основная мода, попадающая в область неустойчивости, и два симметрично расположенных сателлита за пределами этой области. Задача сводится

при ряде упрощающих предположений к конечномерной системе дифференциальных уравнений относительно трех действительных переменных

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \dot{y} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + xy),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y, z$  — динамические переменные, а  $\nu$  и  $\gamma$  — параметры.

Известно, что модель Рабиновича–Фабриканта демонстрирует богатую феноменологию динамического поведения, включая различные регулярные и хаотические режимы и мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют аттракторы разных типов [12–20]. Модель носит универсальный характер в том смысле, что она охватывает множество систем различной физической природы, таких, например, как волны Толлмина–Шлихтинга в гидродинамических течениях [21], ветровые волны на воде [22], волны в химических средах с диффузией [23], а также параметрические колебания, реализуемые в радиотехническом устройстве [18].

В настоящей работе мы предлагаем некоторое естественное расширение модели Рабиновича–Фабриканта, в рамках которого кубическая нелинейность, определяющая взаимодействие трех мод, задана в более общем виде. Можно полагать, что использование обобщенной модели расширит область применения подхода, предложенного в работе Рабиновича–Фабриканта, и феноменологию наблюдаемого динамического поведения.

## 1. Вывод уравнений обобщенной модели

Заметим, что модель Рабиновича–Фабриканта можно трактовать как результат применения метода медленных амплитуд к системе трех осцилляторов, описываемой функцией Лагранжа

$$L(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^2 (m_n \dot{x}_n^2 - k_n x_n^2) - U(x_0, x_1, x_2),\tag{2}$$

где потенциал взаимодействия  $U(x_0, x_1, x_2)$  задан полиномом четвертой степени по трем своим аргументам и добавлена диссипация, определяемая функцией Рэлея с коэффициентами, положительными для спутников и отрицательными для основной моды:

$$R = \frac{1}{2} (-\gamma_0 \dot{x}_0^2 + \gamma_1 \dot{x}_1^2 + \gamma_2 \dot{x}_2^2).\tag{3}$$

В отношении нелинейного взаимодействия сделаем предположение, что оно полностью симметрично по отношению к перестановке осцилляторов, то есть функция  $U(x_0, x_1, x_2)$  представляется в виде суммы всевозможных комбинаций четвертой степени обобщенных координат. Благодаря симметрии, потенциальная функция естественным образом строится как сумма четырех групп однотипных членов, каждая из которых может иметь свой постоянный коэффициент:

$$\begin{aligned}U(x_0, x_1, x_2) &= \left[ \frac{1}{4} (x_0^4 + x_1^4 + x_2^4) + 3\beta (x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2) + \right. \\ &\quad + 3\mu (x_0^2 x_1 x_2 + x_1^2 x_0 x_2 + x_2^2 x_0 x_1) + \\ &\quad \left. + \eta (x_0^3 x_1 + x_0^3 x_2 + x_1^3 x_0 + x_1^3 x_2 + x_2^3 x_0 + x_2^3 x_1) \right].\end{aligned}\tag{4}$$

Константы  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  выступают как безразмерные параметры, характеризующие нелинейность. Как мы увидим далее, параметр  $\eta$  при переходе к описанию в рамках метода медленных амплитуд оказывается несущественным. Традиционная модель Рабиновича–Фабриканта получается в предположении  $\mu = \beta = 1$ .

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \quad j = 0, 1, 2 \quad (5)$$

в явной форме записываются как

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x}_0 + k_0 x_0 + \alpha [x_0^3 + 3\beta x_0 (x_1^2 + x_2^2) + 3\mu x_1 x_2 (2x_0 + x_1 + x_2) + \\ + \eta (3x_0^2 x_1 + 3x_0^2 x_2 + x_1^3 + x_2^3)] = \gamma_0 \dot{x}_0, \\ m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \alpha [x_1^3 + 3\beta x_1 (x_2^2 + x_0^2) + 3\mu x_2 x_0 (2x_1 + x_2 + x_0) + \\ + \eta (3x_1^2 x_0 + 3x_1^2 x_2 + x_0^3 + x_2^3)] = -\gamma_1 \dot{x}_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \alpha [x_2^3 + 3\beta x_2 (x_0^2 + x_1^2) + 3\mu x_0 x_1 (2x_2 + x_0 + x_1) + \\ + \eta (3x_2^2 x_0 + 3x_2^2 x_1 + x_0^3 + x_1^3)] = -\gamma_2 \dot{x}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь основной моде отвечает осциллятор с индексом 0, а спутникам — соответственно, 1 и 2.

Имея в виду наложенное резонансное условие  $2\omega_0 \approx \omega_1 + \omega_2$ , где  $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$ , в предположении малой нелинейности и диссипации, можно полагать, что амплитуды мод за характерный интервал времени меняются незначительно, и применить к системе (6) метод медленных амплитуд. Для этого представим обобщенные координаты осцилляторов в виде

$$x_n = a_n \exp(i\omega_n t) + a_n^* \exp(-i\omega_n t), \quad n = 0, 1, 2, \quad (7)$$

где  $a_n$  — комплексные амплитуды. Поскольку полное количество величин (действительные и мнимые части  $a_n$ ) при этом становится избыточным, мы вправе наложить на каждую комплексную амплитуду  $a_n$  дополнительное условие

$$\dot{a}_n \exp(i\omega_n t) + \dot{a}_n^* \exp(-i\omega_n t) = 0, \quad n = 0, 1, 2. \quad (8)$$

После подстановки выражений (7), (8) в уравнения (6), усреднения по времени и приведения подобных слагаемых, с учетом возможного отклонения по частоте от резонанса  $\Delta\omega = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2 \neq 0$  в показателе экспоненты, получаем следующие амплитудные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= \frac{1}{2} \gamma_0 a_0 + i \frac{1}{\omega_0 m_0} \left[ \mu a_0^* a_1 a_2 \exp(-i\Delta\omega t) + \frac{3}{2} (|a_0|^2 + 2\beta |a_1|^2 + 2\beta |a_2|^2) a_0 \right], \\ \dot{a}_1 &= -\frac{1}{2} \gamma_1 a_1 + i \frac{1}{\omega_1 m_1} \left[ \mu a_0^2 a_2^* \exp(i\Delta\omega t) + \frac{3}{2} (|a_1|^2 + 2\beta |a_0|^2 + 2\beta |a_2|^2) a_1 \right], \\ \dot{a}_2 &= -\frac{1}{2} \gamma_2 a_2 + i \frac{1}{\omega_2 m_2} \left[ \mu a_0^2 a_1^* \exp(i\Delta\omega t) + \frac{3}{2} (|a_2|^2 + 2\beta |a_0|^2 + 2\beta |a_1|^2) a_2 \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее следуя подходу работы [11], считаем, что амплитуда основной компоненты  $a_0$  существенно больше амплитуд спутников  $a_{1,2}$  и что комплексные амплитуды спутников одинаковы, так как из-за близости частот коэффициенты в амплитудных уравнениях для спутников 1 и 2 практически совпадают.

Введем действительные амплитуды  $A_{0,1}$  и фазы  $\varphi_{0,1}$ , используя соотношения  $a_0 = A_0 \exp(i\varphi_0)$  и  $a_1 = a_2 = A_1 \exp(i\varphi_1)$ , подставим эти соотношения в уравнения (9) и, отделяя действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned}\dot{B}_0 &= \mu B_0 B_1 \sin \varphi + 2 \frac{\gamma_0}{\Delta \omega} B_0, \\ \dot{B}_1 &= -\mu B_0 B_1 \sin \varphi - \frac{\gamma_1}{\Delta \omega} B_1, \\ \dot{\varphi} &= 1 + (2\beta - 1)(B_1 - B_0) + \mu(2B_1 - B_0) \cos \varphi.\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь  $B_n = 3/(m_n \omega_n \Delta \omega) A_n^2$ ,  $n = 0, 1$  — нормированные действительные амплитуды,  $\varphi = 2(\varphi_0 - \varphi_1) + \Delta \omega t$  — текущая фазовая расстройка,  $\tau = \Delta \omega t$  — безразмерное время.

Наконец, введем новые переменные  $x = \sqrt{2B_0} \cos(\varphi/2)$ ,  $y = \sqrt{2B_0} \sin(\varphi/2)$ ,  $z = B_1$  и время  $t = \tau/2$ . Положим также  $p = ((1/2)\mu + \beta - 1/2)$ ,  $q = ((1/2)\mu - \beta + 1/2)$ ,  $\gamma = \gamma_0/(\Delta \omega)$ ,  $\nu = \gamma_1/(\Delta \omega)$ . Тогда из системы (10) получим:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= [p(x^2 + z) + q(-y^2 + 3z) - 1] y + \gamma x, \\ \dot{y} &= [p(-x^2 + 3z) + q(y^2 + z) + 1] x + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + (p + q)xy).\end{aligned}\tag{11}$$

Система (11) совпадает с моделью Рабиновича–Фабриканта (1), если в уравнениях положить  $p = 1$ ,  $q = 0$ , и, таким образом, представляет обобщение на случай кубической нелинейности более общего вида, нежели в исходной модели [11]. Заметим, что, как и модель Рабиновича–Фабриканта, система (11) обладает свойством симметрии относительно замены переменных  $x \rightarrow -x$  и  $y \rightarrow -y$ .

В системе (11) присутствуют две группы параметров. Первая представлена параметрами  $\gamma$  и  $\nu$ , которые идентичны параметрам модели Рабиновича–Фабриканта и имеют смысл коэффициентов диссипации — положительной для спутников и отрицательной для основной моды. Вторая группа представлена параметрами  $p$  и  $q$ . Это новые параметры, характеризующие нелинейное взаимодействие между осцилляторами в системе.

## 2. Динамика обобщенной модели на плоскости параметров нелинейного взаимодействия

Рассмотрим динамику системы (11). Для начала построим для нее карту динамических режимов на плоскости параметров нелинейного взаимодействия  $(p, q)$  для значений параметров  $\gamma = 0.96$  и  $\nu = 1.5$  (рис. 1, а). Такая карта строится при сканировании плоскости параметров, когда в каждой ее точке численно определяется тип наблюдаемого режима, который обозначается соответствующим цветом. На карте, на рис. 1, а, наблюдаются следующие режимы: темно-синий цвет отвечает состоянию равновесия, голубой — предельному циклу периода 1, желтый — циклу периода 2, красный — циклу периода 4, и т. д., черный цвет отвечает хаотическому режиму, а белым цветом обозначена область убегания траекторий на бесконечность. Указанные периоды циклов определяются стандартным образом с помощью сечений Пуанкаре. Также система (11) демонстрирует новый тип динамики, не наблюдавшийся в модели Рабиновича–Фабриканта (1), который состоит в том, что в фазовом пространстве существует инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$ . Соответствующая область отмечена на карте динамических режимов серым цветом. Однако этот режим не представляет интереса для исследования, так как в терминах исходной системы дифференциальных уравнений (6),

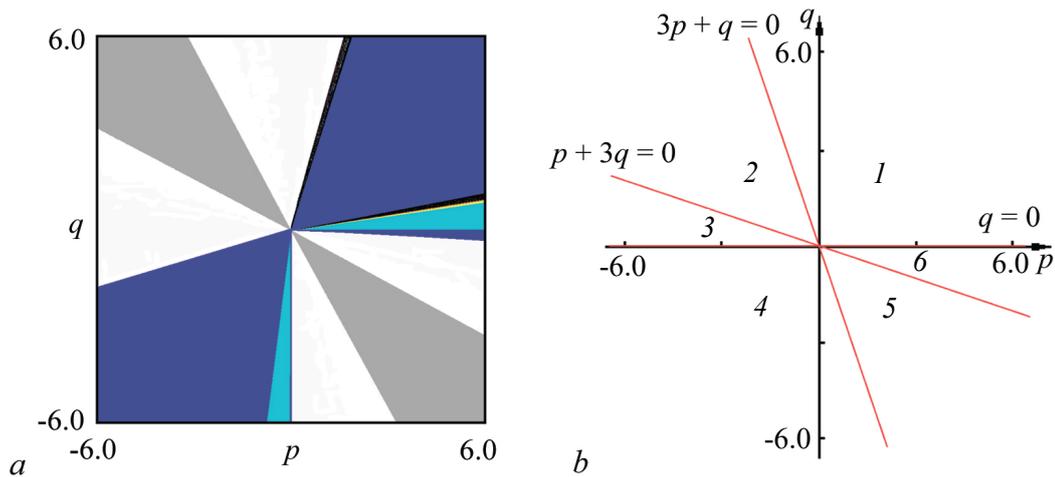


Рис. 1. *a* – Карта динамических режимов системы (11) на плоскости параметров  $(p, q)$ , построенная для  $\gamma = 0.96$  и  $\nu = 1.5$ . *b* – Разбиение плоскости параметров  $(p, q)$  на области, отвечающие разной сигнатуре выражений  $p + 3q$ ,  $3p + q$  и  $q$  (цвет online)

Fig. 1. *a* – Chart of dynamical regimes of the model (11) at  $(p, q)$  parameter plane at  $\gamma = 0.96$  and  $\nu = 1.5$ . *b* – Division of the  $(p, q)$  parameter plane into regions corresponding to different signature of expressions  $p + 3q$ ,  $3p + q$  and  $q$  (color online)

как следует из тех замен переменных, что сделаны при выводе системы (11) (см. раздел 1), он отвечает тому, что амплитуда колебаний осциллятора с индексом 0 (основная мода)  $A_0 = \text{const}$ , а амплитуды осцилляторов с индексами 1, 2 (сателлиты)  $A_1 = A_2 = 0$ .

Из рис. 1, *a* видно, что области различных периодических режимов, хаоса и область убегания траекторий на бесконечность имеют вид расходящихся из начала координат лучей. При этом качественное устройство карты динамических режимов системы (11) не зависит от выбора параметров  $\gamma$  и  $\nu$ .

На рис. 1, *b* представлено разбиение плоскости  $(p, q)$  на области, отвечающие разной сигнатуре выражений  $p + 3q$ ,  $3p + q$  и  $q$ . Для того чтобы объяснить, откуда взялись эти выражения, перепишем систему (11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \left[ (p + 3q)z - 1 + (p + q)x^2 - q \frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \gamma x, \\ \dot{y} &= x \left[ (3p + q)z + 1 - (p + q)x^2 + q \frac{x^2 + y^2}{2} \right] + \gamma y, \\ \dot{z} &= -2z(\nu + (p + q)xy). \end{aligned} \quad (12)$$

В этом случае уравнения выглядят более громоздкими, однако их структура аналогична структуре уравнений модели Рабиновича–Фабриканта (1). А именно, в первом и втором уравнениях системы (12) в квадратных скобках будет четыре слагаемых вида:  $\text{const}_1 z$ , 1,  $\text{const}_2 x^2$  и новое слагаемое, которого не было в модели (1),  $\text{const}_3(x^2 + y^2)$ . При этом всего в системе (12) три значимых комбинации параметров,  $(p + 3q)$ ,  $(3p + q)$  и  $q$ , то есть коэффициенты перед слагаемыми  $z$  в первом и втором уравнениях системы (12) и коэффициент перед слагаемым  $(x^2 + y^2)$ , одинаковый для обоих уравнений<sup>1</sup>. Указанные условия задают на плоскости  $(p, q)$  линии:

$$p + 3q = 0, \quad 3p + q = 0, \quad q = 0, \quad (13)$$

<sup>1</sup>Четвертая комбинация параметров  $p + q$  задает на плоскости  $(p, q)$  линию  $p = -q$ , которая является линией симметрии карты динамических режимов, но не влияет на ее структуру.

каждая из которых делит плоскость  $(p, q)$  на две области, в одной соответствующая комбинация параметров будет больше нуля, а в другой — меньше. Полное разделение плоскости  $(p, q)$  на области представлено на рис. 1, *b* и оно, так же, как и карта динамических режимов, не зависит от параметров  $\gamma$  и  $\nu$ . Из рисунка видно, что плоскость  $(p, q)$  разбита на шесть областей с разной сигнатурой выражений  $p + 3q$ ,  $3p + q$  и  $q$ . При этом состояние равновесия, предельные циклы различных периодов и хаос будут наблюдаться лишь в областях 1 ( $p + 3q > 0$ ,  $3p + q > 0$ ,  $q > 0$ ), 4 ( $p + 3q < 0$ ,  $3p + q < 0$ ,  $q < 0$ ) и 6 ( $p + 3q > 0$ ,  $3p + q > 0$ ,  $q < 0$ ). Именно из этих областей и будут выбираться значения параметров  $p$  и  $q$  для дальнейшего исследования системы (11). Новый тип динамики, инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$ , находится в областях 2 ( $p + 3q > 0$ ,  $3p + q < 0$ ,  $q > 0$ ) и 5 ( $p + 3q < 0$ ,  $3p + q > 0$ ,  $q < 0$ ), а убегание траекторий на бесконечность — во всех шести областях.

### 3. Динамика обобщенной модели на плоскости параметров диссипации

Теперь построим для системы (11) карты динамических режимов на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$ . Параметры  $p$  и  $q$  выберем из тех областей на плоскости  $(p, q)$  (рис. 1, *b*), в которых система (11) демонстрирует периодические и хаотические режимы, то есть из областей 1, 4 и 6, а также на линии  $p = 0$ . Соответствующие карты представлены на рис. 2. При их построении использовалась та же цветовая палитра, что и в случае рис. 1, *a*. Кроме этого на рис. 2, *a* представлена карта динамических режимов для модели Рабиновича–Фабриканта (1), взятая из работы [20]. Это позволит сопоставить динамику системы (11) с динамикой, характерной для модели Рабиновича–Фабриканта.

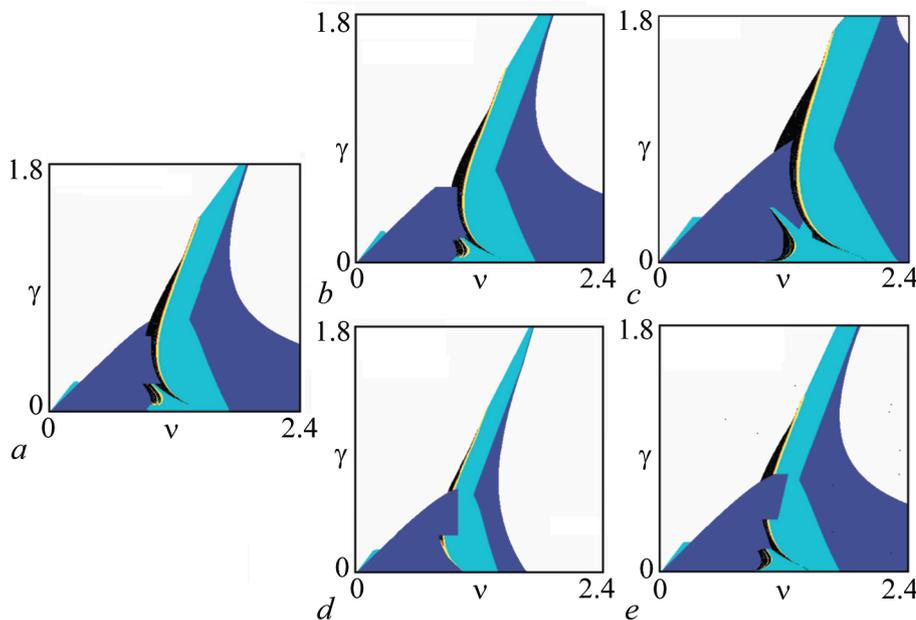


Рис. 2. *a* — Карта динамических режимов модели Рабиновича–Фабриканта (1) на плоскости  $(\nu, \gamma)$ . *b–e* — Карты динамических режимов системы (11) на плоскости  $(\nu, \gamma)$  для  $p = 0.8$ ,  $q = 0.0$  (*b*);  $p = 0.9$ ,  $q = 0.1$  (*c*);  $p = 1.3$ ,  $q = -0.1$  (*d*);  $p = -0.05$ ,  $q = -0.85$  (*e*) (цвет online)

Fig. 2. *a* — Chart of dynamical regimes of the Rabinovich–Fabrikant model (1) at  $(\nu, \gamma)$  parameter plane. *b–e* — Chart of dynamical regimes of the model (11) at  $(\nu, \gamma)$  parameter plane at  $p = 0.8$ ,  $q = 0.0$  (*b*);  $p = 0.9$ ,  $q = 0.1$  (*c*);  $p = 1.3$ ,  $q = -0.1$  (*d*);  $p = -0.05$ ,  $q = -0.85$  (*e*) (color online)

Пусть сначала  $p = 0.8$ , а  $q = 0.0$ . Это отвечает тому, что точка на плоскости  $(p, q)$  лежит на линии  $q = 0$  на рис. 1, *b*. В этом случае в системе (12) коэффициент перед слагаемым  $(x^2 + y^2)$  равен нулю и от модели Рабиновича–Фабриканта (1) она будет отличаться лишь другими коэффициентами перед слагаемыми  $z$  и  $x^2$ , а структура уравнений будет та же самая. Соответствующая карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  представлена на рис. 2, *b*. Из ее сопоставления с рис. 2, *a* видно, что карты как качественно, так и количественно идентичны друг другу. А значит, и динамика системы (11) будет идентична динамике системы (1). Также отметим, что для других значений параметров  $p$  и  $q$ , лежащих на линии  $q = 0$  в области  $p > 0$ , карта динамических режимов системы (11) меняться не будет. В случае же когда  $p < 0$ , в системе (11) будет иметь место убегание траекторий на бесконечность.

Пусть теперь  $p = 0.9$ , а  $q = 0.1$ . В этом случае точка на плоскости  $(p, q)$  попадает в область *I* (см. рис. 1, *b*). Соответствующая карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  представлена на рис. 2, *c*, из которого видно, что теперь динамика системы (11) количественно отличается от той, что демонстрирует модель Рабиновича–Фабриканта (1) (см. рис. 2, *a*). Так, области периодических и хаотических режимов становятся шире и сдвигаются вправо; и как мы покажем далее, мультистабильность будет наблюдаться при больших значениях параметра  $\gamma$ , чем в случае модели Рабиновича–Фабриканта (1).

Теперь положим  $p = 1.3$ , а  $q = -0.1$ , а точка на плоскости  $(p, q)$  попадает в область *b* (см. рис. 1, *b*). Карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  для этого случая представлена на рис. 2, *d*. Видно, что в данном случае карта динамических режимов системы (11) существенно отличается от карты, построенной для модели Рабиновича–Фабриканта (1) (рис. 2, *a*): области периодических и хаотических режимов стали меньше, а область убегания траекторий на бесконечность — больше. Также исчезла вторая структура, демонстрирующая переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, наблюдавшаяся при небольших значениях параметра  $\gamma$ , слева от основной структуры, а область мультистабильности стала уже.

И, наконец, пусть  $p = -0.05$ , а  $q = -0.85$ . Это отвечает тому, что точка на плоскости  $(p, q)$  попадает в область *4* (см. рис. 1, *b*). Соответствующая карта динамических режимов системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  представлена на рис. 2, *e*. Из рисунка видно, что в данном случае карта динамических режимов системы (11) качественно идентична карте для модели Рабиновича–Фабриканта (1) (см. рис. 2, *a*), хотя и имеются незначительные количественные отличия.

Во всех остальных областях плоскости  $(p, q)$  в системе (11) будет иметь место либо убегание траекторий на бесконечность, либо новый тип режима — инвариантное (устойчивое) множество в виде окружности, целиком лежащее в плоскости  $z = 0$ .

#### 4. Динамика обобщенной модели в случае $p = 0.9, q = 0.1$

Теперь рассмотрим динамику системы (11) в случае, когда параметры нелинейности принимают значения  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$ , более подробно. Этот случай интересен тем, что с одной стороны карта динамических режимов системы (11) (см. рис. 2, *c*) похожа на карту для модели Рабиновича–Фабриканта (см. рис. 2, *a*), а с другой стороны на ней присутствует ряд отличий. Как и в работе [20], построим для системы (11) графики зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра  $v$ , аттракторы и бассейны их притяжения для нескольких фиксированных значений параметра  $\gamma$ . А также численно построим бифуркационные линии на плоскости  $(v, \gamma)$ .

**4.1. Случай  $\gamma = 0.96$ .** Для того чтобы было удобно сопоставлять динамику системы (11) с динамикой модели Рабиновича–Фабриканта (1) выберем те же значения параметра  $\gamma$ . Итак, пусть  $\gamma = 0.96$ . На рис. 3, *a* представлен график зависимости трех показателей Ляпунова от параметра  $v$  для системы (11). Из рисунка видно, что в области  $v > 1.75$  все показатели Ляпунова

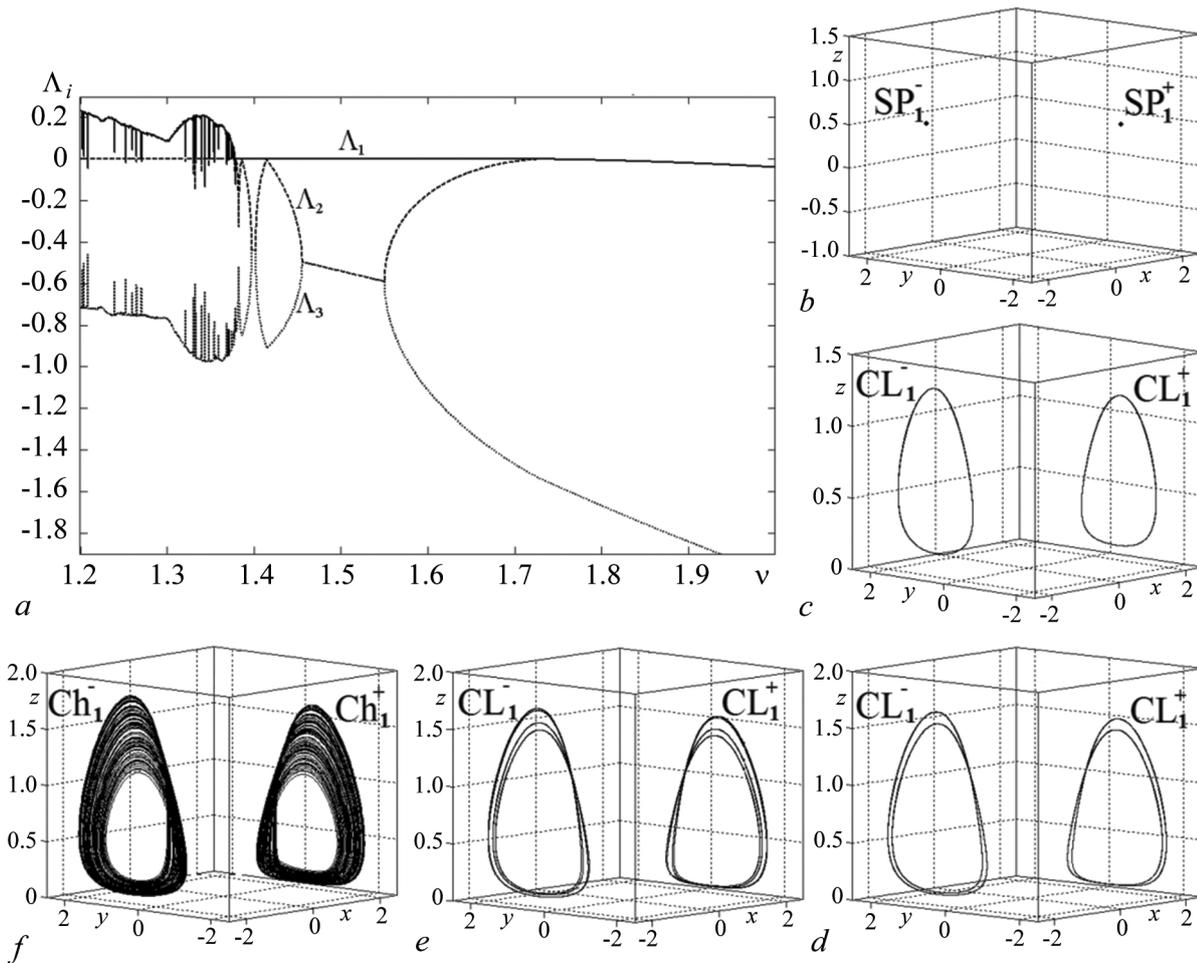


Рис. 3. *a* – Зависимость показателей Ляпунова системы (11) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = 0.96$ . *b-f* – Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.96$  при  $\nu = 1.9$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.38 (*e*); 1.35 (*f*)

Fig. 3. *a* – Graphs of Lyapunov exponents of the model (11) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = 0.96$ . *b-f* – Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.96$ :  $\nu = 1.9$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.38 (*e*); 1.35 (*f*)

отрицательные, то есть в системе существует устойчивое положение равновесия. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 3, *b*. На нем наблюдаются два сосуществующих положения равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ , расположенных симметрично и переходящих друг в друга при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ , то есть в системе (11) имеет место бистабильность. При уменьшении параметра  $\nu$  устойчивые положения равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  исчезают, и на их месте возникают устойчивые предельные циклы  $CL_1^-$  и  $CL_1^+$  (рис. 3, *c*), а старший показатель Ляпунова становится равным нулю (см. рис. 3, *a*). При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  период предельных циклов удваивается (рис. 3, *d, e*), пока в результате каскада бифуркаций удвоения периода не возникнут хаотические аттракторы  $Ch_1^-$  и  $Ch_1^+$  (рис. 3, *f*), при этом старший показатель Ляпунова станет положительным.

Для анализа бистабильности были построены бассейны притяжения аттракторов. На рис. 4 представлены бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ , обозначенных на рисунке синим и зеленым цветом, соответственно. Отметим, что на этом рисунке (и на всех последующих аналогичных рисунках) представлены проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$ , а сами бассейны притяжения окрашены в тот же цвет, что и его аттрактор. При небольших значениях  $z_0 = 0.1$  бассейны

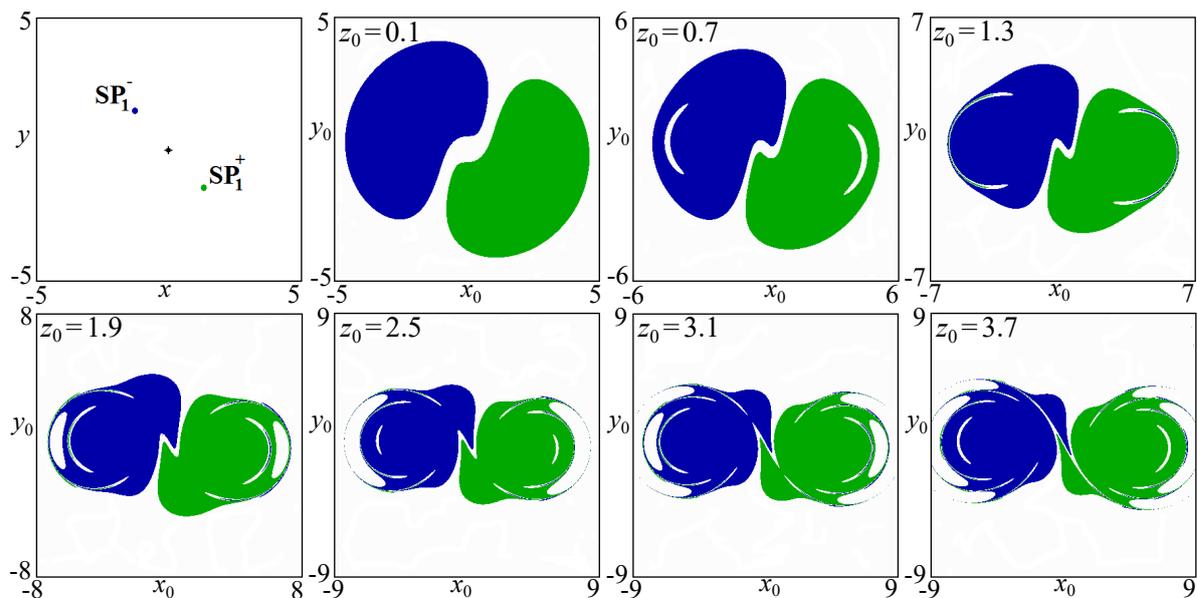


Рис. 4. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$  системы (11).  $\gamma = 0.96$  и  $\nu = 1.9$ . Бассейн притяжения положения равновесия  $SP_1^-$  окрашен в синий цвет, положения равновесия  $SP_1^+$  — в зеленый (цвет online)

Fig. 4. Projection of the attractors on a  $(x, y)$  plane and sections of their basins by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11).  $\gamma = 0.96$  and  $\nu = 1.9$ . The basin of attraction of the equilibrium position  $SP_1^-$  is colored blue, and the basin of  $SP_1^+$  is colored green (color online)

притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  представляют собой симметрично расположенные относительно начала координат овальные области. С ростом  $z_0$  бассейны увеличиваются в размере, а внутри них появляются «острова», отвечающие разбеганию траекторий на бесконечность. Далее эти «острова» увеличиваются в размере, а ограничивающие их справа и слева полосы становятся все уже и уже, пока совсем не разрываются, и у бассейнов появляются своеобразные «хвосты». Если и далее увеличивать  $z_0$ , то появляются новые «острова», отвечающие разбеганию траекторий на бесконечность, и новые «хвосты», а также от основного бассейна отделяются области меньшего размера. Кроме того, с ростом  $z_0$  внутри бассейнов притяжения положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  появляются узкие полосы, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. (Внутри области зеленого цвета появляются полосы синего цвета, а внутри синей — зеленого.) Отметим, что для всех остальных аттракторов (предельных циклов различных периодов, хаотических аттракторов), наблюдаемых в данном случае, бассейны притяжения качественно будут такими же, как для положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ . С тем лишь отличием, что их трансформации будут происходить при меньших значениях  $z_0$ , а сами бассейны станут чуть меньше.

Таким образом, можно утверждать, что при данных значениях параметра  $\gamma$  динамика системы (11) в целом идентична, по крайней мере качественно, динамике модели Рабиновича–Фабриканта (1) [20]. Имеют место лишь количественные отличия, которые состоят в том, что бассейны притяжения аттракторов становятся больше, а одни и те же трансформации в системе (11) по сравнению с моделью Рабиновича–Фабриканта (1) происходят при больших значениях  $z_0$ . Хотя есть и одно качественное отличие, состоящее в том, что в системе (11) с ростом  $z_0$  внутри бассейнов притяжения появляются узкие полосы, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. В модели Рабиновича–Фабриканта (1) подобные изменения не наблюдались.

**4.2. Случай  $\gamma = 0.78$ .** Теперь уменьшим значение параметра  $\gamma$ . Пусть  $\gamma = 0.78$ . Отметим, что динамика модели Рабиновича–Фабриканта в этом случае не изменится [20]. А вот динамика системы (11), как показано далее, будет существенно отличаться. На рис. 5 представлен график зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  и аттракторы системы (11), построенные для данного случая. Из рис. 5, *a* видно, что в области  $\nu > 1.75$  все показатели Ляпунова отрицательные, то есть в системе существует устойчивое положение равновесия. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 5, *b*. На нем, как и в предыдущем случае, наблюдаются два сосуществующих аттрактора  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$ ,<sup>2</sup> расположенные симметрично и переходящие друг в друга при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ <sup>3</sup>. При уменьшении параметра  $\nu$  устойчивые положения равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$  исчезают, и на их месте возникают устойчивые предельные циклы  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  (рис. 5, *c*), а старший показатель Ляпунова становится равен нулю (см. рис. 5, *a*). При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  в системе (11) возникает мультистабильность, когда в фазовом пространстве помимо устойчивых предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  наблюдаются расположенные внутри них устойчивые положения равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  (рис. 5, *d*). Отметим, что это новые положения равновесия, не совпадающие с рассмотренными ранее и возникающие, как мы покажем далее, в результате другой бифуркации. Далее период предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  удваивается (рис. 5, *e, f*), пока, в результате каскада бифуркаций удвоения периода, не возникнут хаотические аттракторы  $Ch_2^-$  и  $Ch_2^+$  (рис. 5, *g*), а старший показатель Ляпунова станет положительным (см. рис. 5, *a*). При этом устойчивые положения равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  продолжают сосуществовать вместе с предельными циклами и хаотическими аттракторами, пока не останутся единственными аттракторами (рис. 5, *h*) после того как хаотические аттракторы исчезнут при  $\nu \approx 1.27$ . Таким образом, в отличие от модели Рабиновича–Фабриканта (1) в системе (11) при значении параметра  $\gamma = 0.78$  в определенном диапазоне изменения параметра  $\nu$  имеет место мультистабильность. Что подтверждает сделанный ранее вывод о том, что в системе (11) мультистабильность наблюдается в большем диапазоне изменения параметров.

На рис. 6, *a* представлены бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$  (см. рис. 5, *b*), обозначенные на рисунке синим и зеленым цветом, соответственно. Из рис. 6, *a* видно, что при небольших значениях  $z_0 = 0.1$  бассейны притяжения представляют собой окружность довольно большого радиуса, разделенную на две части многообразиями неустойчивого положения равновесия, расположенного в начале координат. При этом правая часть окружности — бассейн  $SP_2^+$ , а левая — бассейн  $SP_2^-$ . С ростом  $z_0$  как снаружи, так и внутри окружности появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора (см. рис. 6, *a*). Причем, чем больше  $z_0$ , тем больше чередующихся областей наблюдается.

На рис. 6, *b* представлены бассейны для случая  $\nu = 1.5$ , когда в фазовом пространстве сосуществуют симметрично расположенные пары, состоящие из предельного цикла  $CL_2^-$  (или  $CL_2^+$ ) и находящегося внутри него устойчивого положения равновесия  $SP_3^-$  (или  $SP_3^+$ ) (рис. 5, *d*). В этом случае при значениях  $z_0$  близких к нулю, на плоскости начальных условий  $(x_0, y_0)$  наблюдаются лишь бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$ , которые представляют собой симметрично расположенные относительно начала координат овальные области. С ростом  $z_0$  внутри появляются бассейны притяжения парных им предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ , которые также представляют собой овальные области. Потом внутри этих областей появляются овальные области, представляющие собой бассейны притяжения парных им устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  и т. д. Таким образом, при  $z_0 \approx 0.1$  на плоскости начальных условий  $(x_0, y_0)$

<sup>2</sup>Строго говоря, это те же самые положения равновесия, что и  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$ . Однако для удобства изложения материала аттракторы (даже если это один и тот же аттрактор), построенные для разных значений параметра  $\gamma$ , будут обозначаться своим индексом.

<sup>3</sup>Отметим, что в силу симметрии системы (11) все аттракторы, если не оговаривается иное, будут возникать симметрично расположенной парой объектов, переходящих друг в друга при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ . Поэтому данный момент при дальнейшем изложении материала будет подразумеваться по умолчанию.

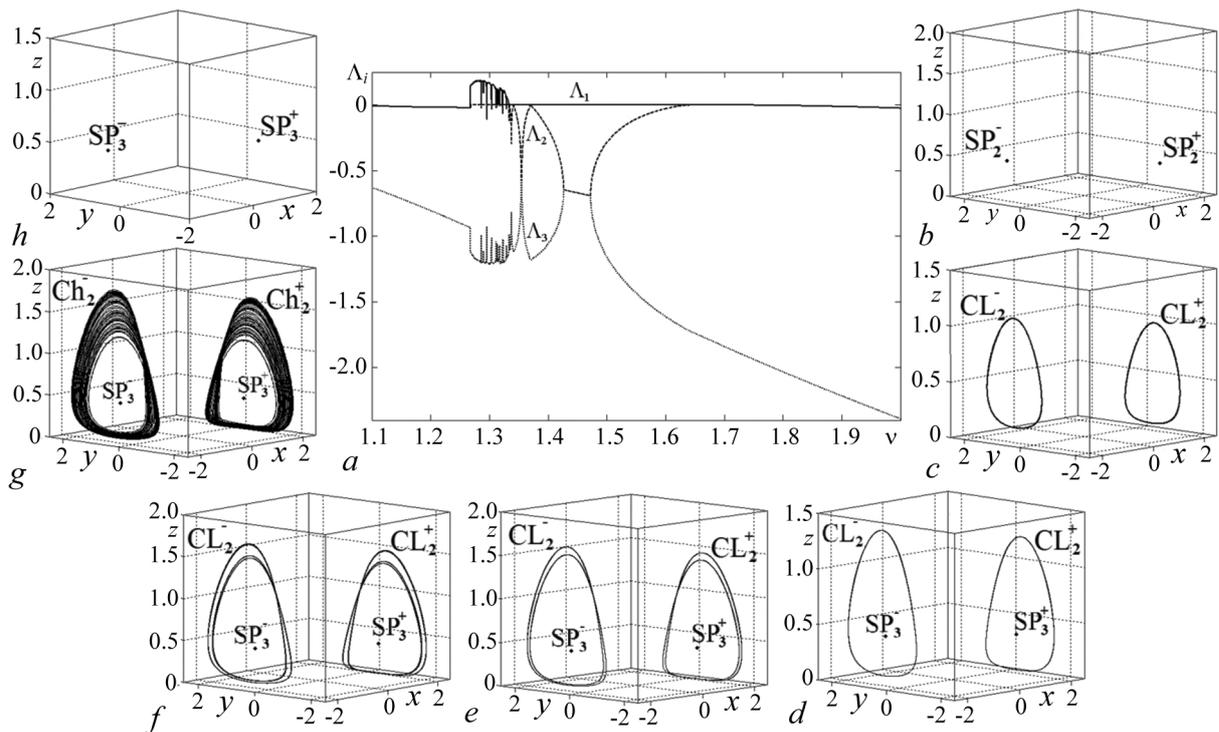


Рис. 5. *a* – Зависимость показателей Ляпунова системы (11) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = 0.78$ . *b-h* – Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.78$ :  $\nu = 2.0$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.5 (*d*); 1.36 (*e*); 1.34 (*f*); 1.3 (*g*); 1.2 (*h*)

Fig. 5. *a* – Graphs of the Lyapunov exponents of the model (11) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = 0.78$ . *b-h* – Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.78$ :  $\nu = 2.0$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.5 (*d*); 1.36 (*e*); 1.34 (*f*); 1.3 (*g*); 1.2 (*h*)

наблюдаются структура в виде овальных областей (бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$ ), внутри которых расположены меньшие овальные области (бассейны притяжения парных им предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ ), которые окружены узкими кольцами, представляющими собой чередующиеся бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  и парных им предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ . При дальнейшем увеличении  $z_0$  внутри бассейнов притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  появляются «острова», отвечающие убеганию траекторий на бесконечность, внутри которых в свою очередь появляются узкие полосы, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора. Далее эти «острова» увеличиваются в размере, а ограничивающие их полосы становятся все уже и уже, пока совсем не разрываются и у бассейнов не появляются своеобразные «хвосты». Таким образом, дальнейшая трансформация бассейнов становится такой же, как и в случае  $\gamma = 0.96$ .

Отметим, что бассейны притяжения предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$ , наблюдаемых при тех значениях параметра  $\nu$ , когда в системе (11) нет мультистабильности, например при  $\nu = 1.6$  (см. рис. 5, *c*), идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 6, *a*. А бассейны притяжения для всех остальных режимов, в случаях когда мультистабильность есть (см. рис. 5, *d-g*), будут идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 6, *b*. А вот бассейны притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_3^-$  и  $SP_3^+$  качественно будут идентичны тем, что наблюдались в системе (11) для случая  $\gamma = 0.96$  для устойчивых положений равновесия  $SP_1^-$  и  $SP_1^+$  (см. рис. 4). С тем лишь отличием, что в данном случае трансформация бассейнов происходит быстрее, а их размер растет чуть медленнее.

Таким образом, система (11) при  $\gamma=0.78$  демонстрирует динамику, существенно отличную от той, что имеет место в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при том же значении параметра  $\gamma$  [20]. Основным отличием является наличие в системе (11) мультистабильности, которая

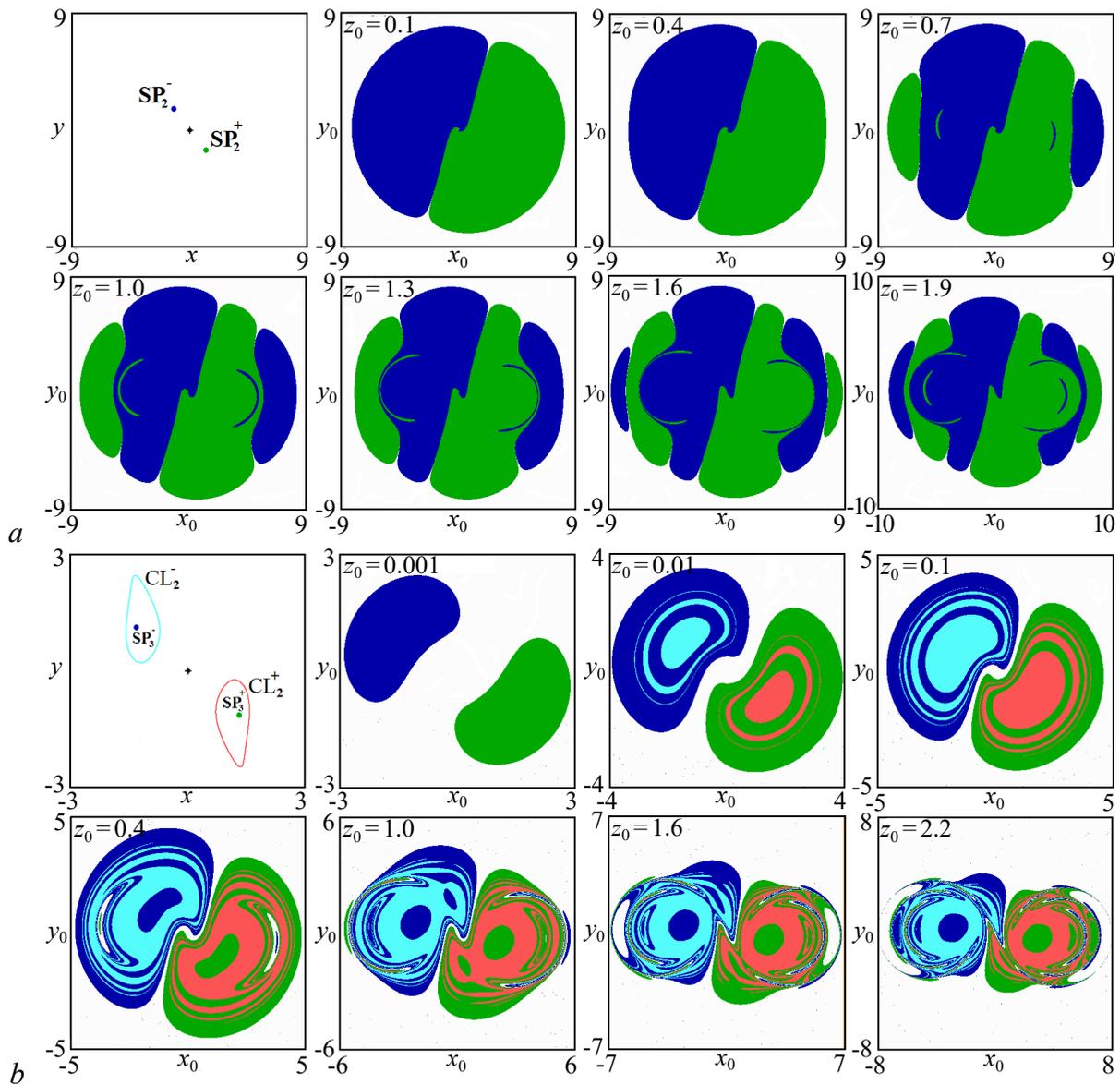


Рис. 6. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$  системы (11).  $\gamma = 0.78, \nu = 2.0$  (a), 1.5 (b). Бассейн притяжения положения равновесия  $SP_2^-$  окрашен в синий цвет, а положения равновесия  $SP_2^+$  – в зеленый, предельного цикла  $CL_2^-$  – в голубой и  $CL_2^+$  – в красный (цвет online)

Fig. 6. Projection of the attractors on a  $(x, y)$  plane and sections of their basins of attraction by  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11).  $\gamma = 0.78, a - \nu = 2.0, b - \nu = 1.5$ . The basin of attraction of the equilibrium position  $SP_2^-$  is colored blue, the basin of  $SP_2^+$  is colored green, the basin of  $CL_2^-$  is colored light blue, the basin of  $CL_2^+$  is colored red (color online)

наблюдается в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при меньших значениях параметра  $\gamma$  ( $\gamma \approx 0.5$ ). При этом, отметим, что если устройство бассейнов притяжения в случае, когда в системе (11) есть мультистабильность, аналогично тому, что наблюдалось в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при  $\gamma = 0.5$ , то устройство бассейнов притяжения в случае, когда в системе (11) мультистабильности нет, существенно иное и аналогично тому, что наблюдалось в модели Рабиновича–Фабриканта (1) при  $\gamma = 0.2$ .

**4.3. Случай  $\gamma = 0.5$ .** Пусть теперь  $\gamma = 0.5$ . Отметим, что динамика модели Рабиновича–Фабриканта (1) для данного значения параметра  $\gamma$  демонстрирует мультистабильность,

когда в фазовом пространстве сосуществуют две симметрично расположенные пары, состоящие из предельного цикла и находящегося внутри него устойчивого положения равновесия [20]. Теперь рассмотрим динамику системы (11). На рис. 7, *a* представлен график зависимости показателей Ляпунова от параметра  $\nu$  и аттракторы системы (11), построенные для данного случая. Из рисунка видно, что динамика системы (11) в этом случае полностью идентична той, что наблюдалась в системе (11) для  $\gamma = 0.78$ . Так, при  $\nu > 2.0$  и  $\nu < 1.28$  в фазовом пространстве наблюдаются устойчивые положения равновесия  $SP_4^-, SP_4^+$  и  $SP_5^-, SP_5^+$  соответственно (рис. 7, *b* и рис. 7, *h*); в области  $1.28 < \nu < 2.0$  – предельные циклы  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$ , демонстрирующие переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 7, *c-g*). При этом при  $\nu < 1.5$  в системе (11) имеет место мультистабильность.

А вот устройство бассейнов притяжения существенно отличается от того, что наблюдалось для случая  $\gamma = 0.78$ . На рис. 8, *a* представлены бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  (см. рис. 7, *b*), обозначенных синим и зеленым цветом, соответственно. Из рис. 8, *a* видно, что в данном случае внешние границы бассейнов притяжения представляют собой сложно устроенные кривые. С ростом  $z_0$  внутри бассейнов появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора, сначала у внешней границы, а потом в окрестности начала координат. При этом сам размер бассейнов не меняется. Отметим, что бассейны притяжения, построенные для предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$  (см. рис. 7, *c*), полностью идентичны бассейнам для положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  на рис. 8, *a*. Заметим также, что подобное устройство бассейнов притяжения не наблюдалось ни в модели Рабиновича–Фабриканта (1), ни в системе (11) для рассмотренных ранее значений параметров.

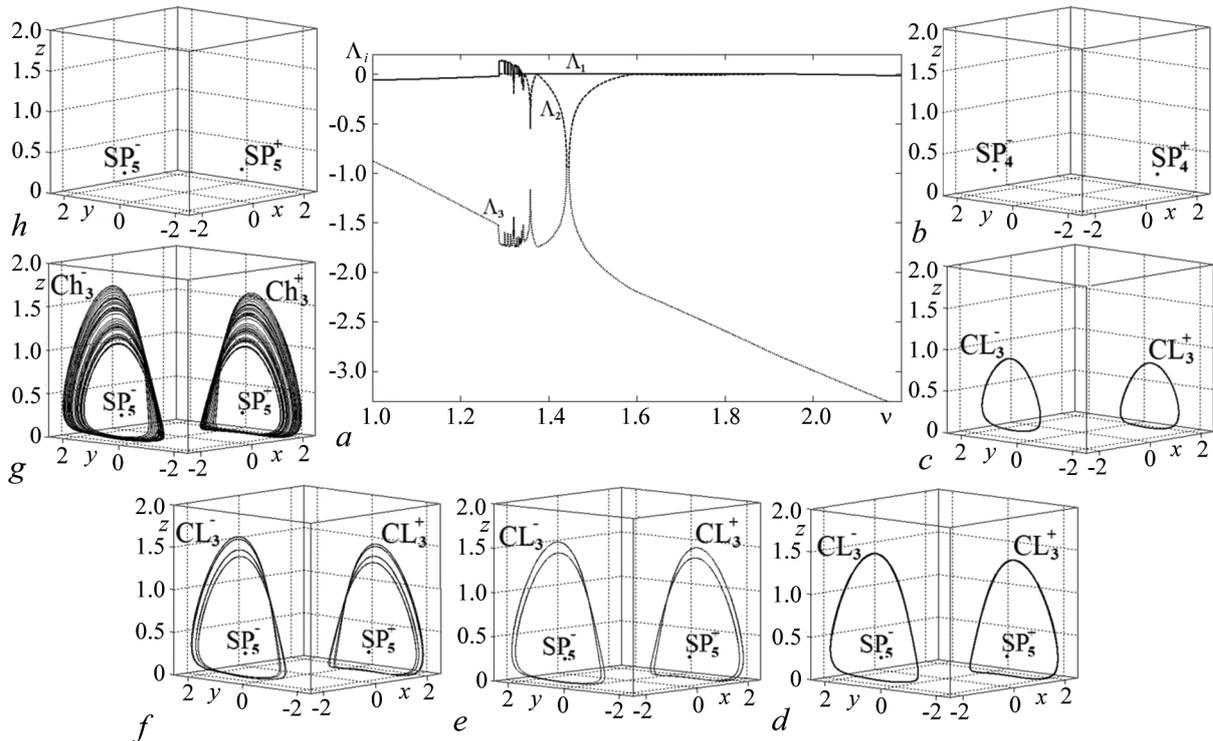


Рис. 7. *a* – Зависимость показателей Ляпунова системы (11) от параметра  $\nu$  для  $\gamma = 0.5$ . *b-h* – Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.36 (*e*); 1.34 (*f*); 1.3 (*g*); 1.2 (*h*)

Fig. 7. *a* – Graphs of Lyapunov exponents of the model (11) on the parameter  $\nu$  at  $\gamma = 0.5$ . *b-h* – Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (*b*); 1.6 (*c*); 1.4 (*d*); 1.36 (*e*); 1.34 (*f*); 1.3 (*g*); 1.2 (*h*)

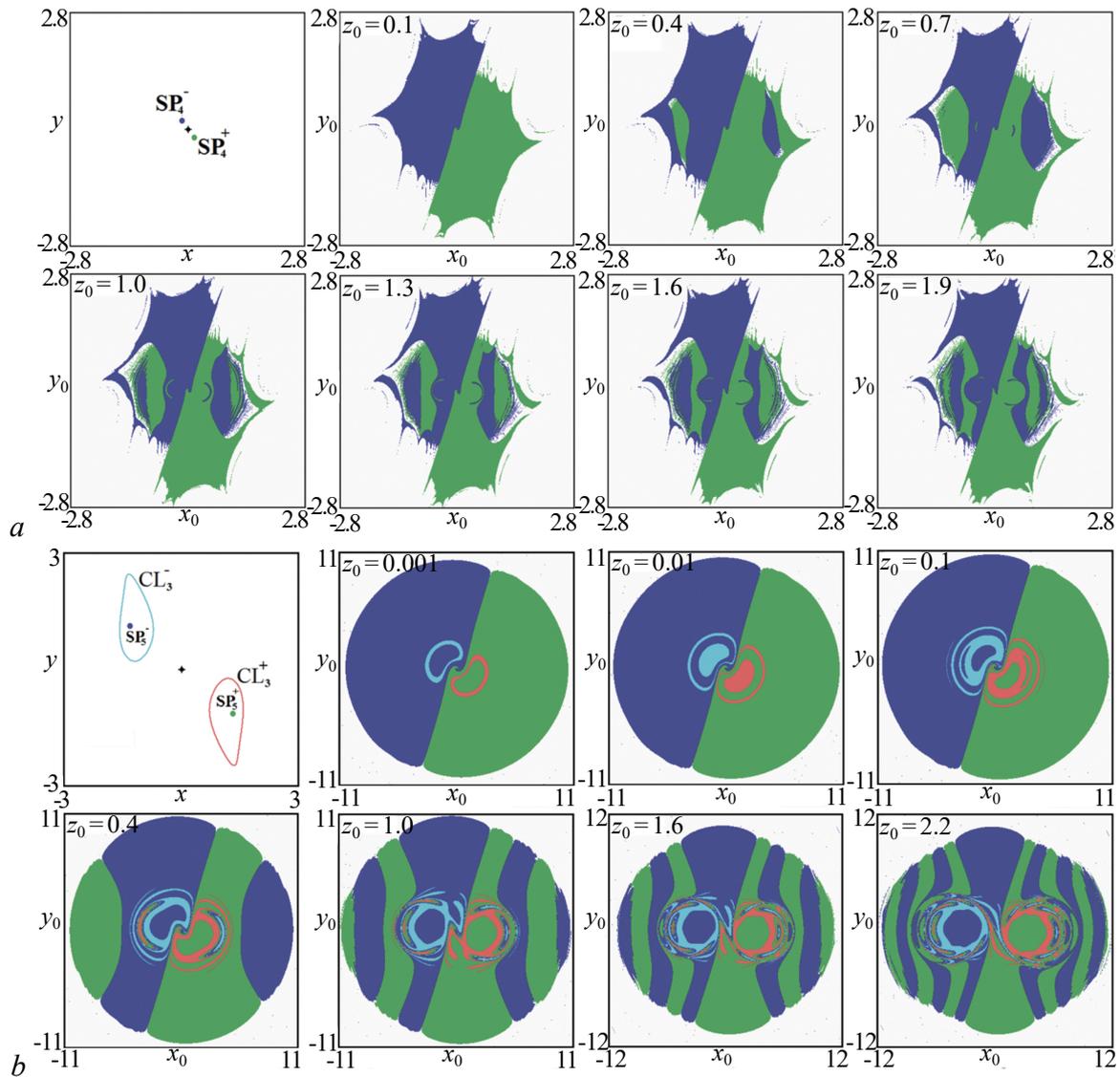


Рис. 8. Проекция аттракторов на плоскость  $(x, y)$  и сечения их бассейнов притяжения плоскостью  $z_0 = \text{const}$  системы (11),  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (a),  $\nu = 1.4$  (b). Бассейны притяжения положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_5^-$  окрашены в синий цвет, а положений равновесия  $SP_4^+$  и  $SP_5^+$  — в зеленый, предельного цикла  $CL_3^-$  — в голубой, а  $CL_3^+$  — в красный (цвет online)

Fig. 8. Projection of the attractors on a  $(x, y)$  plane and sections of their basins of attraction by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11),  $\gamma = 0.5$ :  $\nu = 2.2$  (a),  $\nu = 1.4$  (b). The basins of  $SP_4^-$  and  $SP_5^-$  are colored blue, the basins of  $SP_4^+$  and  $SP_5^+$  are colored green, the basin of  $CL_3^-$  is colored light blue and the basin of  $CL_3^+$  is colored red (color online)

На рис. 8, b представлены бассейны для случая  $\nu = 1.5$ , когда в фазовом пространстве сосуществуют симметрично расположенные пары, состоящие из предельного цикла  $CL_3^-$  (или  $CL_3^+$ ) и находящегося внутри него устойчивого положения равновесия  $SP_5^-$  (или  $SP_5^+$ ) (рис. 7, d). Из рис. 8, b видно, что бассейны притяжения положений равновесия  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$  представляют собой, как и в случае положений равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$ , наблюдаемых при  $\gamma = 0.78$  (см. рис. 6, a), окружность довольно большого радиуса, разделенную на две части многообразиями неустойчивого положения равновесия, расположенного в начале координат. С ростом  $z_0$  как снаружи, так и внутри окружности появляются новые области, представляющие собой бассейны притяжения симметричного аттрактора (положения равновесия).

Теперь рассмотрим бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$ . Их устройство и трансформация идентичны тем, что наблюдались для предельных циклов  $CL_2^-$  и  $CL_2^+$  для  $\gamma = 0.78$  (см. рис. 6, *b*). Однако, в отличие от указанного случая бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$  существуют при сколь угодно малых значениях  $z_0$ , а их трансформация происходит быстрее. Также бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$  всегда расположены внутри центральных бассейнов притяжения положений равновесия  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$ .

Отметим, что, как и в предыдущем случае ( $\gamma = 0.78$ ), бассейны притяжения предельных циклов  $CL_3^-$  и  $CL_3^+$ , наблюдаемых при тех значениях параметра  $\nu$ , когда в системе (11) нет мультистабильности, например при  $\nu = 1.6$  (см. рис. 7, *c*), идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 8, *a*. Бассейны притяжения для всех остальных режимов, в случаях когда мультистабильность есть (см. рис. 7, *d-g*), идентичны бассейнам притяжения, представленным на рис. 8, *b*. А бассейны притяжения для устойчивых положений равновесия  $SP_5^-$  и  $SP_5^+$  (см. рис. 7, *h*) качественно идентичны тем, что наблюдались для устойчивых положений равновесия  $SP_2^-$  и  $SP_2^+$ , системы (11) для  $\gamma = 0.78$  (см. рис. 6, *a*) с тем лишь отличием, что в данном случае трансформация бассейнов происходит быстрее, а их размер растет медленнее.

Таким образом, система (11) при  $\gamma = 0.5$  демонстрирует динамику, идентичную той, что наблюдалась в ней же для  $\gamma = 0.78$ , с тем лишь отличием, что бассейны притяжения устойчивых положений равновесия имеют другое устройство. При этом динамика системы (11) при  $\gamma = 0.5$  аналогична динамике модели Рабиновича–Фабриканта (1) за исключением устройства бассейнов притяжения аттракторов [20].

**4.4. Случай небольших значений параметра  $\gamma$ .** И, наконец, рассмотрим случай небольших значений параметра  $\gamma$ :  $\gamma = 0.2$  и  $\gamma = 0.1$ . Отметим, что так же, как в модели Рабиновича–Фабриканта (1), в системе (11) на карте динамических режимов в этой области будут наблюдаться две структуры, отвечающие существованию разных типов предельных циклов (сравним рис. 2, *a* и рис. 2, *c*). Правая структура отвечает тому, что существующие при больших значениях параметра  $\nu$  устойчивые положения равновесия  $SP_6^-$  и  $SP_6^+$  (рис. 9, *a*) при его уменьшении в результате, как покажем далее, бифуркации Андронова–Хопфа становятся неустойчивыми и в системе рождаются предельные циклы  $CL_4^-$  и  $CL_4^+$  (рис. 9, *b*). При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  происходит переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 9, *c-e*). При этом бассейны притяжения наблюдаемых аттракторов полностью идентичны тем, что наблюдались в системе (11) для положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  (рис. 8, *a*) для  $\gamma = 0.5$ .

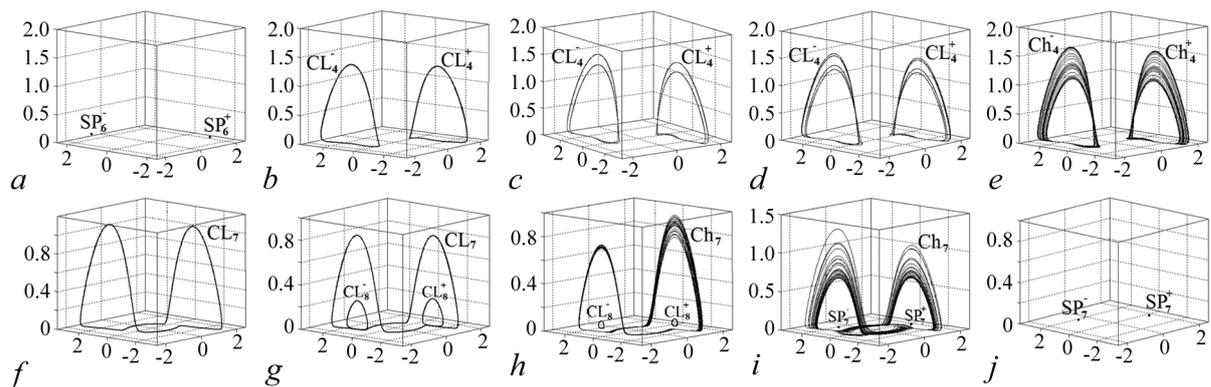


Рис. 9. Аттракторы системы (11) для  $\gamma = 0.2$ :  $\nu = 2.3$  (*a*); 1.6 (*b*); 1.55 (*c*); 1.543 (*d*); 1.53 (*e*) и для  $\gamma = 0.1$ :  $\nu = 1.6$  (*f*); 1.4 (*g*); 1.31 (*h*); 1.29 (*i*); 1.2 (*j*)

Fig. 9. Attractors of the model (11) at  $\gamma = 0.2$ : 2.3 *a*; 1.6 (*b*); 1.55 (*c*); 1.543 (*d*); 1.53 (*e*) and at  $\gamma = 0.1$ :  $\nu = 1.6$  (*f*); 1.4 (*g*); 1.31 (*h*); 1.29 (*i*); 1.2 (*j*)

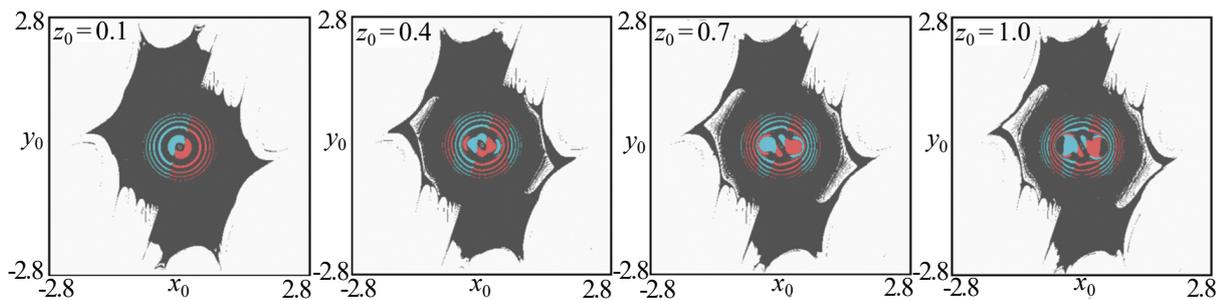


Рис. 10. Сечения бассейнов притяжения системы (11) плоскостью  $z_0 = \text{const}$ .  $\gamma = 0.1$  и  $\nu = 1.4$ . Бассейн притяжения предельного цикла  $CL_7$  окрашен в серый цвет, а предельных циклов  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$  – в голубой и красный, соответственно (цвет online)

Fig. 10. Sections of the basins of the attractors by the  $z_0 = \text{const}$  plane plotted for the model (11),  $\gamma = 0.1$  and  $\nu = 1.4$ . The basin of  $CL_7$  is colored grey, the basin of  $CL_8^-$  is colored light blue and the basin of  $CL_8^+$  is colored red (color online)

Вторая (левая) структура отвечает тому, что сначала в фазовом пространстве системы (11) наблюдается не пара симметрично расположенных предельных циклов, а один симметричный предельный цикл  $CL_7$ , который при замене переменных  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$  переходит сам в себя (рис. 9, *f*). При уменьшении параметра  $\nu$  внутри этого цикла возникает пара симметрично расположенных предельных циклов  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$ , сосуществующих с циклом  $CL_7$  (рис. 9, *g*). При этом цикл  $CL_7$  сохраняет свою симметрию. При дальнейшем уменьшении параметра  $\nu$  предельный цикл  $CL_7$  теряет симметрию и демонстрирует переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 9, *h*). Одновременно с этим сосуществующие с ним предельные циклы  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$  уменьшаются в размере и исчезают, а вместо них рождается пара симметрично расположенных устойчивых положений равновесия  $SP_7^-$  и  $SP_7^+$  (рис. 9, *i*). И наконец, хаотический аттрактор исчезает и в фазовом пространстве системы (11) наблюдаются лишь устойчивые положения равновесия  $SP_7^-$  и  $SP_7^+$  (см. рис. 9, *j*).

Таким образом, динамика системы (11) при небольших значениях параметра  $\gamma$  идентична динамике модели Рабиновича–Фабриканта (1) для тех же значений параметра. А вот бассейны притяжения аттракторов будут существенно отличаться. В случае когда в системе (11) нет мультистабильности (см. рис. 9, *a–f, j*) бассейны притяжения идентичны (как качественно, так и количественно) бассейнам притяжения устойчивых положений равновесия  $SP_4^-$  и  $SP_4^+$  для  $\gamma = 0.5$  (см. рис. 8, *a*). А когда в системе (11) мультистабильность присутствует (см. рис. 9, *g–i*) бассейны притяжения будут иметь вид, представленный на рис. 10. Здесь бассейн притяжения предельного цикла  $CL_7$  окрашен в серый цвет и идентичен тому, что наблюдался в случае отсутствия мультистабильности. А бассейны притяжения предельных циклов  $CL_8^-$  и  $CL_8^+$  представляют собой окружности и «острова», расположенные внутри бассейна притяжения предельного цикла  $CL_7$ .

**4.5. Бифуркационный анализ обобщенной системы.** В заключение для системы (11) был проведен численный поиск бифуркационных линий для положений равновесия и предельных циклов периода один с помощью программы MatCont. Соответствующая бифуркационная диаграмма представлена на рис. 11. Она хорошо согласуется с картой динамических режимов, представленной на рис. 2, *c*, подтверждая ее структуру и более подробно описывая наблюдаемые в системе варианты мультистабильности. Также с ее помощью можно определить общее количество устойчивых положений равновесия и предельных циклов периода один, возникающих в рассматриваемой системе.

Отметим, что во многом бифуркационная картина системы (11) на плоскости  $(\nu, \gamma)$  похожа на ту, что имела место для модели Рабиновича–Фабриканта (1) [20]. Так, во-первых,

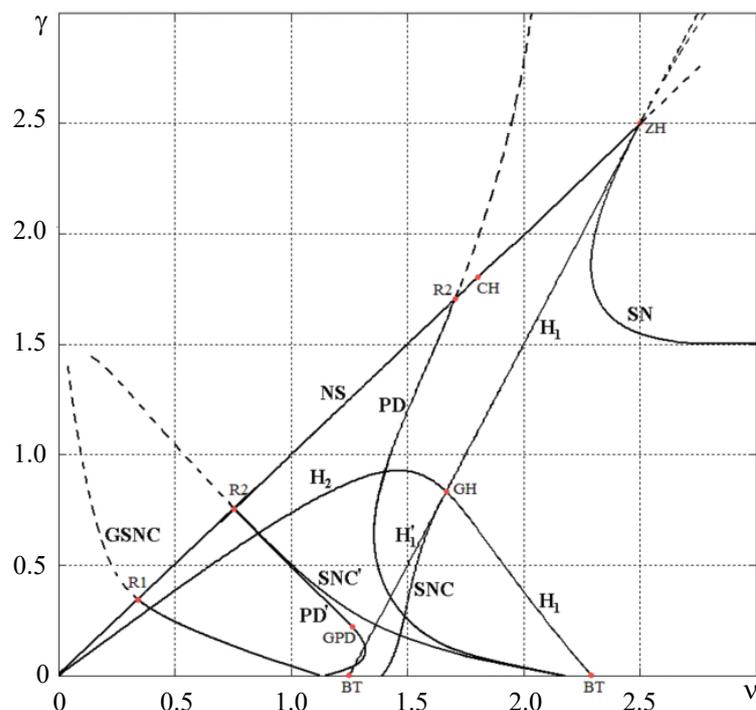


Рис. 11. Бифуркационные линии и точки системы (11) на плоскости  $(v, \gamma)$  для  $p = 0.9$  и  $q = 0.1$ . SN – седло-узловая бифуркация неподвижной точки, SNC – седло-узловая бифуркация предельных циклов,  $H_1$  – прямая бифуркация Андронова–Хопфа,  $H_2$  – обратная бифуркация Андронова–Хопфа, PD – бифуркация удвоения периода предельных циклов, GSNC – жесткая касательная бифуркация предельных циклов, NS – обратная бифуркация Неймарка–Сакера, GH – обобщенная точка бифуркации Андронова–Хопфа, GPD – обобщенная точка бифуркации удвоения периода, ZH – точка пересечения линии касательной бифуркации неподвижной точки и линии бифуркации Андронова–Хопфа (точка бифуркации Zero–Hopf), R1 – резонанс 1:1, R2 – резонанс 1:2, BT – точка бифуркации Богданова–Такенса. Пунктиром обозначены бифуркационные линии, отвечающие неустойчивым режимам

Fig. 11. Bifurcations lines and points of the general model (11) on the  $(v, \gamma)$  parameter plane,  $p = 0.9$  and  $q = 0.1$ . SN is saddle-node bifurcation of the stable point, SNC is saddle-node bifurcation of the limit cycle,  $H_1$  is direct Hopf bifurcation,  $H_2$  is inverse Hopf bifurcation, PD is period doubling bifurcation of the limit cycle, GSNC is hard saddle-node bifurcation of the limit cycle, NS is inverse Neimark–Sacker bifurcation, GH is generalized Hopf bifurcation point, GPD is generalized period doubling bifurcation point, ZH is Zero–Hopf bifurcation point, R1 is resonance 1:1, R2 is resonance 1:2, BT is Bogdanov–Takens bifurcation point. The bifurcation lines corresponded unstable regimes are indicated by dotted lines

при движении по плоскости справа налево сначала на линии SN в результате седло-узловой бифуркации рождаются устойчивое и неустойчивое положение равновесия<sup>4</sup>. Далее устойчивое положение равновесия становится неустойчивым на линии  $H_1$ , в результате бифуркации Андронова–Хопфа. При этом в системе рождается устойчивый предельный цикл, период которого удваивается на линии бифуркации удвоения периода PD (рис. 11). Как следует из вида карты динамических режимов (см. рис. 2, *c*), далее будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (11) возникает хаотический аттрактор. Это совпадает с тем, что наблюдалось в модели Рабиновича–Фабриканта (1) в той же области пространства параметров.

Во-вторых, при движении по плоскости параметров  $(v, \gamma)$  слева направо в области  $\gamma < 0.94$  на линии  $H_2$  в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа рождаются устойчивое положение равновесия и неустойчивый предельный цикл. Потом это устойчивое положение

<sup>4</sup>Напоминаем, что все положения равновесия и циклы в системе (11) рождаются симметричными парами.

равновесия станет неустойчивым на линии  $H'_1$  в результате прямой бифуркации Андронова–Хопфа, а в системе возникнет устойчивый предельный цикл, который исчезнет в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов на линии SNC, слившись с неустойчивым предельным циклом, родившимся в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа на линии  $H_2$  (рис. 11). При этом, так как линии  $H'_1$  и SNC, в определенной области пространства параметров находятся между линиями PD и  $H_1$ , то в системе (11) возможно несколько типов мультистабильности, когда устойчивый предельный цикл с разными периодами или хаос сосуществует с устойчивым положением равновесия или с устойчивым предельным циклом периода один.

В-третьих, при движении по плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$  справа налево в области  $\gamma < 0.3$  и  $\nu < 2.0$  на линии  $SNC'$  в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов рождаются устойчивый и неустойчивый предельные циклы, переходящие в себя при замене переменных  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$  (см. рис. 9, *f*). Далее на линии  $PD'$  период устойчивого цикла удвоится (см. рис. 11) и в дальнейшем, как следует из вида карты динамических режимов (рис. 2, *c*) будет иметь место каскад бифуркаций удвоения периода, в результате которого в системе (11) возникает хаос. При этом, так как линии  $H'_1$  и SNC пересекают область существования указанного цикла, то в рассматриваемой системе возможна мультистабильность, когда в фазовом пространстве сосуществуют устойчивый предельный цикл, переходящий в себя при замене переменных, и симметричная пара устойчивых предельных циклов периода один (см. рис. 9, *g*).

Таким образом, в системе (11) наблюдаются следующие аттракторы: две пары устойчивых положений равновесия и две пары устойчивых предельных циклов, возникающих в результате разных бифуркаций, и симметричный предельный цикл. А представленное на рис. 11 довольно сложное расположение бифуркационных линий приводит к большому числу комбинаций их взаимного сосуществования.

Однако в бифуркационной картине системы (11) есть и ряд отличий от системы (1). Так, в системе (11) наблюдаются две новые бифуркационные линии, которых не было в модели Рабиновича–Фабриканта (1) [20]. Это линия GSNC, на которой имеет место жесткая касательная бифуркация предельных циклов, и линия NS, на которой имеет место обратная бифуркация Неймарка–Сакера, которая ограничивает на плоскости параметров  $(\nu, \gamma)$  область существования периодических режимов и хаоса слева. Также в системе (11) появилось несколько бифуркационных точек коразмерности два. Это точки GPD представляющая собой обобщенную точку бифуркации удвоения периода, ZH — точка пересечения линии касательной бифуркации неподвижной точки и линии бифуркации Андронова–Хопфа (точка бифуркации Zero–Hopf), R1 и R2 отвечающие резонансам 1 : 1 и 1 : 2, соответственно.

Еще одно отличие бифуркационной картины системы (11) от той, что имела место в модели Рабиновича–Фабриканта (1), состоит в том, что в модели Рабиновича–Фабриканта (1) было две точки GH (обобщенная точка бифуркации Андронова–Хопфа). В первой сходились линии прямой бифуркации Андронова–Хопфа, обратной бифуркации Андронова–Хопфа и седло-узловой бифуркации предельных циклов, а во второй — две линии прямой бифуркации Андронова–Хопфа и две линии обратной бифуркации Андронова–Хопфа [20]. В системе (11) эти две точки слились, и наблюдается лишь одна точка GH, к которой сходятся пять линий: две линии  $H_1$ , линия  $H'_1$  (все отвечают прямой бифуркации Андронова–Хопфа), линия  $H_2$  (обратная бифуркация Андронова–Хопфа) и линия SNC (седло-узловая бифуркация предельных циклов) (см. рис. 11).

### Заключение

В работе в рамках формализма Лагранжа рассмотрено трехмодовое взаимодействие в присутствии кубической нелинейности общего вида. Была записана исходная система, состоящая из трех осцилляторов, для которой аналитически, используя метод медленно меняющихся амплитуд,

была получена трехмерная система, представляющая собой обобщение модели Рабиновича–Фабриканта на рассматриваемый случай.

Динамика полученной системы исследована численно с помощью методов теории динамического хаоса. Для нее построены карты динамических режимов как на плоскости параметров, представляющих собой коэффициенты диссипации, так и на плоскости параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами в системе; зависимости показателей Ляпунова от параметра, аттракторы и их бассейны притяжения. Найдены основные бифуркации положений равновесия и предельных циклов периода один. Было проведено сопоставление с моделью Рабиновича–Фабриканта: указаны значения параметров нелинейного взаимодействия, при которых уравнения полученной системы полностью совпадают с уравнениями для модели Рабиновича–Фабриканта; а также, в случае когда уравнения не совпадают, указаны области в пространстве параметров, для которых динамика полученной модели полностью или частично идентична динамике модели Рабиновича–Фабриканта.

Исследование показало, что устройство плоскости параметров, характеризующих нелинейное взаимодействие между осцилляторами, не зависит от параметров, представляющих собой коэффициенты диссипации, а определяется соотношением между самими параметрами нелинейности. А вот устройство плоскости параметров, представляющих собой коэффициенты диссипации, существенным образом зависит от параметров нелинейного взаимодействия. Так, если параметр  $q = 0$ , то динамика рассматриваемой системы идентична динамике модели Рабиновича–Фабриканта, хотя их уравнения и не совпадают. При этом рассматриваемая модель превращается в модель Рабиновича–Фабриканта при  $p = 1$  и  $q = 0$ .

В области  $p + 3q > 0$ ,  $3p + q > 0$  и  $q > 0$  динамика рассматриваемой системы качественно максимально похожа на динамику модели Рабиновича–Фабриканта, хотя и демонстрирует ряд отличий: увеличение области мультистабильности, появление новых бифуркационных линий и точек коразмерности два, и т. д. Во всех остальных областях динамика рассматриваемой системы существенно отличается от динамики модели Рабиновича–Фабриканта вплоть до исчезновения некоторых структур или появления новых.

## Список литературы

1. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
2. Ott E. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 385 p.
3. Гукенхеймер Дж., Холмс П. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 561 с.
4. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. 367 с.
5. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
6. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
7. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
8. Lorenz E. N. The Essence of Chaos. Seattle, WA, USA: University of Washington Press, 1995. 240 p.
9. Alligood K. T., Sauer T., Yorke J. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag, 1996. 603 p. DOI: 10.1007/b97589.
10. Hilborn R. C. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford: Oxford University Press, 2001. 672 p.

11. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1979. Т. 77, № 2. С. 617–629.
12. Danca M.-F., Feckan M., Kuznetsov N., Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 2. P. 1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
13. Liu Y., Yang Q., Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, no. 1. P. 101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
14. Agrawal S. K., Srivastava M., Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 69, no. 4. P. 2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
15. Srivastava M., Agrawal S. K., Vishal K., Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system // Applied Mathematical Modelling. 2014. Vol. 38, no. 13. P. 3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
16. Danca M.-F. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2016. Vol. 86, no. 2. P. 1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
17. Danca M.-F., Kuznetsov N., Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system // Nonlinear Dynamics. 2017. Vol. 88, no. 1. P. 791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
18. Danca M.-F., Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, no. 10. P. 3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
19. Luo X., Small M., Danca M.-F., Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, no. 9. P. 3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
20. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Тюрюкина Л. В. Сложная динамика и хаос в модельной системе Рабиновича–Фабриканта // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2019. Т. 19, № 1. С. 4–18. DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
21. Hocking L. M., Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance // Proc. R. Soc. Lond. A. 1972. Vol. 326, no. 1566. P. 289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
22. Андронов А. А., Фабрикант А. Л. Затухание Ландау, ветровые волны и свисток // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 68–104.
23. Kuramoto Y., Yamada T. Turbulent state in chemical reactions // Progress of Theoretical Physics. 1976. Vol. 56, no. 2. P. 679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.

## References

1. Kuznetsov SP. Dynamical Chaos. Moscow: Fizmatlit; 2006. 356 p. (in Russian).
2. Ott E. Chaos in Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press; 1993. 385 p.
3. Guckenheimer J, Holmes PJ. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag; 1983. 462 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2.
4. Anishchenko VS, Vadivasova TE, Astahov VV. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Saratov: Saratov University Publishing; 1999. 367 p. (in Russian).

5. Schuster HG, Just W. Deterministic Chaos: An Introduction. Weinheim: Wiley; 2005. 287 p. DOI: 10.1002/3527604804.
6. Kuznetsov SP. Dynamical Chaos and Hyperbolic Attractors: From Mathematics to Physics. Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research; 2013. 488 p. (In Russian).
7. Neimark JI, Landa PS. Stochastic and Chaotic Oscillations. Dordrecht: Springer; 1992. 500 p. DOI: 10.1007/978-94-011-2596-3.
8. Lorenz EN. The Essence of Chaos. Seattle, WA, USA: University of Washington Press; 1995. 240 p.
9. Alligood KT, Sauer T, Yorke J. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. New York: Springer-Verlag; 1996. 603 p. DOI: 10.1007/b97589.
10. Hilborn RC. Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford: Oxford University Press; 2001. 672 p.
11. Rabinovich MI, Fabrikant AL. Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media. Sov. Phys. JETP. 1979;77(2):617–629 (in Russian).
12. Danca MF, Feckan M, Kuznetsov N, Chen G. Looking more closely to the Rabinovich–Fabrikant system. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016;26(2):1650038. DOI: 10.1142/S0218127416500383.
13. Liu Y, Yang Q, Pang G. A hyperchaotic system from the Rabinovich system. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010;234(1):101–113. DOI: 10.1016/j.cam.2009.12.008.
14. Agrawal SK, Srivastava M, Das S. Synchronization between fractional-order Rabinovich–Fabrikant and Lotka–Volterra systems. Nonlinear Dynamics. 2012;69(4):2277–2288. DOI: 10.1007/s11071-012-0426-y.
15. Srivastava M, Agrawal SK, Vishal K, Das S. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. Applied Mathematical Modelling. 2014;38(13):3361–3372. DOI: 10.1016/j.apm.2013.11.054.
16. Danca MF. Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system. Nonlinear Dynamics. 2016;86(2):1263–1270. DOI: 10.1007/s11071-016-2962-3.
17. Danca MF, Kuznetsov N, Chen G. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich–Fabrikant system. Nonlinear Dynamics. 2017;88(1):791–805. DOI: 10.1007/s11071-016-3276-1.
18. Danca MF, Chen G. Bifurcation and chaos in a complex model of dissipative medium. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004;14(10):3409–3447. DOI: 10.1142/S0218127404011430.
19. Luo X, Small M, Danca MF, Chen G. On a dynamical system with multiple chaotic attractors. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007;17(9):3235–3251. DOI: 10.1142/S0218127407018993.
20. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Turukina LV. Complex Dynamics and Chaos in the Rabinovich–Fabrikant Model. Izvestiya of Saratov University. Physics. 2019;19(1):4–18 (in Russian). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-1-4-18.
21. Hocking LM, Stewartson K. On the nonlinear response of a marginally unstable plane parallel flow to a two-dimensional disturbance. Proc. R. Soc. Lond. A. 1972;326(1566):289–313. DOI: 10.1098/rspa.1972.0010.
22. Andronov AA, Fabrikant AL. Landau damping, wind waves and whistle. In: Nonlinear Waves. Moscow: Nauka; 1979. P. 68–104 (in Russian).
23. Kuramoto Y, Yamada T. Turbulent state in chemical reactions. Progress of Theoretical Physics. 1976;56(2):679–681. DOI: 10.1143/PTP.56.679.

*Кузнецов Сергей Петрович* (1951–2020) — родился в Москве. Окончил Саратовский государственный университет (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 1977) и доктора наук (СГУ, 1987) по специальности радиофизика. Работал в СГУ и в Саратовском филиале ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН: главным научным сотрудником СФ ИРЭ РАН, профессором базовой кафедры динамических систем СГУ, руководил лабораторией теоретической нелинейной динамики. А также являлся главным научным сотрудником лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения Удмуртского государственного университета. Автор монографий «Динамический хаос и гиперболические аттракторы: От математики к физике», «Hyperbolic Chaos. A Physicist's View», «Strange Nonchaotic Attractors» (совместно с А. Пиковским и У. Фойдель), а также учебно-научных монографий «Динамический хаос» и «Нелинейные колебания» (в соавторстве с А. П. Кузнецовым и Н. М. Рыскиным). Опубликовал свыше 200 научных статей по нелинейной динамике, радиофизике и электронике. Под его руководством защищены двенадцать кандидатских диссертаций. Лауреат Государственной научной стипендии для ученых России (1994–1996), Соросовский доцент (1998), Соросовский профессор (2000, 2001). Член редакционной коллегии журналов «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», «Regular and Chaotic Dynamics», «Нелинейная динамика», «Известия Саратовского университета — Новая серия. Серия Физика».

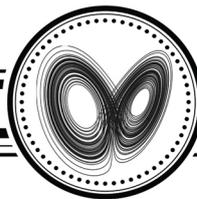


410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В.А. Котельникова РАН  
410012, Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
ORCID: 0000-0003-4506-9864  
AuthorID: 22592

*Тюрюкина Людмила Владимировна* родилась в Саратове (1977). Окончила Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского (2000). Обучалась в очной аспирантуре Саратовского государственного университета (2000–2003), по окончании которой защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика», имеет звание доцента по специальности «Радиофизика» (2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН. По совместительству работает доцентом на кафедре динамических систем ФНП на базе СФ ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН. Опубликовала более 50 статей по направлениям, указанным выше.



410019 Саратов, ул. Зеленая, 38  
Саратовский филиал ИРЭ имени В. А. Котельникова РАН  
410012, Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
E-mail: turukinalv@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-4221-8900  
AuthorID: 39405



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Краткое сообщение

УДК 532.511

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

## Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт, Россия

E-mail: o1o2o3@yandex.ru

Поступила в редакцию 1.10.2021, принята к публикации 26.12.2021,

опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель исследования состоит в получении формул для такой скорости воображаемых частиц, что циркуляция скорости (реальной) жидкости по любому контуру, состоящему из этих воображаемых частиц, изменяется (в процессе движения воображаемых частиц) по заданному временному закону. (До настоящего времени были известны только такие скорости воображаемых частиц, при которых упомянутая циркуляция в процессе движения оставалась неизменной). **Метод.** Без использования асимптотических, численных и других приближенных методов проводится строгий анализ динамического уравнения движения (течения) любой непрерывной текучей среды, от идеальной жидкости до вязкого газа. Рассмотрены плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения. Используется представление о движении воображаемых частиц, основанное на критерии К. Зоравского (который также называется теоремой А. А. Фридмана). **Результаты.** Предложены формулы для скорости воображаемых частиц. В эти формулы входят параметры (реального) течения, их пространственные производные и функция времени, определяющая закон изменения во времени циркуляции скорости (реальной) жидкости по контурам, движущимся вместе с воображаемыми частицами. Кроме того оказалось, что при заданной функции времени (и, как следствие, при заданном законе изменения циркуляции по времени) скорость воображаемых частиц определяется неоднозначно. В результате предложен способ менять скорость и направление движения воображаемых частиц в некотором диапазоне при сохранении выбранного закона изменения циркуляции во времени. Для вязкой несжимаемой жидкости предложены формулы, в которые не входят давление и его производные. **Заключение.** Предложена новая лагранжева точка зрения на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкостей всех типов. Получены формулы для скорости такого перемещения контуров, при котором циркуляция скорости (реальной) жидкости по любому контуру изменяется по заданному временному закону. Этот теоретический результат можно использовать в вычислительной гидродинамике для ограничения количества доменов при использовании бессеточного метода расчета течений вязкой несжимаемой жидкости (метода вязких вихревых доменов).

**Ключевые слова:** скорость движения контуров, циркуляция скорости, скорость воображаемых частиц, критерий Зоравского, теорема Фридмана, метод вязких вихревых доменов.

**Для цитирования:** Сизых Г. Б. Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 30–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

E-mail: o1o2o3@yandex.ru

Received 1.10.2021, accepted 26.12.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** Purpose of the study is to obtain formulas for such a speed of imaginary particles that the circulation of the speed of a (real) fluid along any circuit consisting of these imaginary particles changes (in the process of motion of imaginary particles) according to a given time law. (Until now, only those speeds of imaginary particles were known, at which the mentioned circulation during the motion remained unchanged). *Method.* Without implementation of asymptotic, numerical and other approximate methods, a rigorous analysis of the dynamic equation of motion (flow) of any continuous fluid medium, from an ideal liquid to a viscous gas, is carried out. Plane-parallel and nonswirling axisymmetric flows are considered. The concept of motion of imaginary particles is used, based on the K. Zoravsky criterion (which is also called A. A. Fridman's theorem). *Results.* Formulas for the speed of imaginary particles are proposed. These formulas include the parameters of the (real) flow, their spatial derivatives and the function of time, which determines the law of the change in time of the (real fluid) velocity circulation along the contours moving together with the imaginary particles. In addition, it turned out that for a given function of time (and, as a consequence, for a given law of change in circulation with respect to time), the speed of imaginary particles is determined ambiguously. As a result, a method is proposed to change the speed and direction of motion of imaginary particles in a certain range (while maintaining the selected law of changes in circulation in time). For a viscous incompressible fluid, formulas are proposed that do not include pressure and its derivatives. *Conclusion.* A new Lagrangian point of view on the vorticity evolution in two-dimensional flows of fluids of all types is proposed. Formulas are obtained for the velocity of such movement of contours, at which the real fluid velocity circulation along any contour changes according to a given time law. This theoretical result can be used in computational fluid dynamics to limit the number of domains when using a gridless method for calculating flows of a viscous incompressible fluid (the method of viscous vortex domains).

**Keywords:** velocity of contours motion, circulation of velocity, velocity of imaginary particles, Zoravsky criterion, Friedmann's theorem, method of viscous vortex domains.

**For citation:** Sizykh GB. New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(1):30–36. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Бессеточный метод дискретных вихрей (применяемый для расчета вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости [1–3]) был распространен на двухмерные течения вязкой несжимаемой жидкости после появления для таких течений аналогов теорем Гельмгольца о вихрях [4, 5]. В статьях [4, 5] были найдены скорости (вообще говоря, не совпадающие со скоростью жидкости) такого движения контуров, при котором циркуляция скорости жидкости по контурам остается постоянной. Для двухмерных, то есть для плоскопараллельных и незакрученных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости выражения для скорости переноса контуров можно представить одной общей формулой:  $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu[\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot}\boldsymbol{\Omega}]/\Omega^2$ , где  $\mathbf{V}$  — скорость жидкости,  $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot}\mathbf{V}$  — завихренность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  $\times$  — знак векторного произведения. С использованием этих скоростей был разработан так называемый метод вязких вихревых доменов (ВВД) для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости [6]. В научно-популярной форме суть метода ВВД кратко изложена, например, во введении к статье [7], в которой доказано существование скорости  $\mathbf{U}$  для пространственных течений жидкости любого

типа. Одна из трудностей, которая возникает при реализации метода ВВД, состоит в «зарождении» на каждом шаге по времени новых вихревых доменов, что приводит к необходимости применять различные подходы для перераспределения доменов и их интенсивности с целью ограничения общего количества доменов, находящихся в области течения [8–10]. Несложно заметить, что сохранение циркуляции скорости жидкости по контуру (сохранение интенсивности вихревого домена), движущемуся со скоростью  $\mathbf{U}$ , не обязательно для метода ВВД. Достаточно, чтобы был известен закон изменения этой циркуляции во времени. Поэтому если найти такую скорость  $\mathbf{U}$ , при которой интенсивность домена достаточно быстро стремится к нулю с ростом времени, наличием каждого домена можно будет пренебречь после некоторого конечного числа шагов по времени. В итоге количество учитываемых доменов будет ограничено «естественным образом».

Таким образом, вычислительная гидродинамика поставила перед теоретической гидродинамикой задачу: найти такую скорость  $\mathbf{U}$ , чтобы интенсивность домена менялась по заранее заданному временному закону. Цель данной статьи состоит в поиске выражения для такой скорости через параметры течения, их производные и (произвольно заданный) закон изменения интенсивности доменов во времени.

Поскольку не исключена возможность распространения метода дискретных вихрей и на другие типы течений, поиск скорости  $\mathbf{U}$  проводится для всех типов жидкостей (от идеальной жидкости до вязкого газа). При этом рассматриваются только такие области вихревого ( $\Omega \neq 0$ ) течения жидкости, в которых все гидродинамические параметры и скорость  $\mathbf{U}$  дважды непрерывно дифференцируемы по пространственным координатам и времени.

## 1. Критерий Зоравского

Следуя [11–17], для формулировки утверждений будем пользоваться представлением о движении внутри жидкости воображаемых частиц, предложенным в [11].

Пусть пространственная область  $G$  расположена внутри жидкости с полем скорости  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$  и в ней это поле является вихревым ( $\Omega = \mathbf{rot} \mathbf{V} \neq 0$ ) в течение некоторого открытого промежутка времени. В области  $G$  рассмотрим также течение воображаемой жидкости, частицы которой движутся со скоростью  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ . Частицы воображаемой жидкости не взаимодействуют с частицами реальной жидкости и не влияют на ее движение. Пусть в области  $G$  в течение интервала времени  $(t_1, t_2)$  завихренность реальной жидкости  $\Omega$  и скорость воображаемой жидкости  $\mathbf{U}$  связаны уравнением

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathbf{rot} (\Omega \times \mathbf{U}) = 0. \quad (1)$$

В этом случае из критерия Зоравского [18, 19], который также называется теоремой Фридмана [20], следует, что в интервале  $(t_1, t_2)$  отрезки вихревых линий и вихревых трубок перемещаются вместе с частицами воображаемой среды, движущимися со скоростью  $\mathbf{U}$ , а интенсивность вихревых трубок (циркуляция  $\Gamma$  скорости  $\mathbf{V}$  по контуру, один раз опоясывающего трубку) сохраняется (до тех пор, пока эти частицы находятся внутри области  $G$ ).

Это следствие критерия Зоравского будет использовано ниже.

## 2. Общий случай непрерывной текучей среды

Динамическое уравнение движения непрерывной текучей среды всегда можно представить в виде  $\partial \mathbf{V} / \partial t + \Omega \times \mathbf{V} = \mathbf{F}_0 - \nabla (\mathbf{V}^2 / 2)$ , где  $\mathbf{F}_0$  — плотность распределения равнодействующей всех сил, приложенных к жидкости или газу, отнесенная к плотности жидкости или газа. Далее, под жидкостью будем понимать как жидкость, так и газ, имея в виду, что жидкость может

быть сжимаемой. Иногда удобно выделить потенциальную составляющую  $\mathbf{F}_0$  и представить динамическое уравнение в виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \nabla f, \quad (2)$$

где  $f$  — некоторое скалярное поле (градиент  $\nabla f$  включает в себя  $\nabla(\mathbf{V}^2/2)$ ). Так, например, динамическое уравнение Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости представляется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \nabla \left[ \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right], \quad \mathbf{F} = -\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}, \quad (3)$$

где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\Pi$  — потенциал массовых сил.

Перейдем к рассмотрению двумерных течений. Пусть  $\alpha(t)$  — любая гладкая функция времени  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $\nabla g$  — градиент любой дважды непрерывно дифференцируемой по времени и пространству функции  $g$ . При плоскопараллельном течении векторы  $\nabla g$ ,  $\nabla f$  и  $\mathbf{F}$  лежат в плоскости течения, а при осесимметричном — имеют нулевую окружную составляющую.

Воспользуемся свойством ортогональности векторов скорости  $\mathbf{V}$  и завихренности  $\boldsymbol{\Omega}$  в двумерных течениях. Раскрывая три двойных векторных произведения (с учетом  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla g) = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}) = 0$ ) получаем, что уравнение

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = -\alpha(t) \mathbf{V} - \nabla(f + g), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{F}] / \Omega^2 + \alpha[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}] / \Omega^2 + [\boldsymbol{\Omega} \times \nabla g] / \Omega^2, \quad (5)$$

равносильно уравнению (2).

Наряду со скоростью  $\mathbf{U}$  рассмотрим скорость еще одной воображаемой жидкости  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \exp\{\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\}$ . Завихренность  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$  скорости  $\tilde{\mathbf{V}}$  равна  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega} \exp\{\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\}$ . Подставим выражения  $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} \exp\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\}$  и  $\boldsymbol{\Omega} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \exp\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\}$  в уравнение (4). После сокращений и умножения на  $\exp\{\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\}$  получим

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{U} = -\exp\left\{\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\} \nabla(f + g). \quad (6)$$

Ротация уравнения (6) приводит к уравнению вида (1). Последнее означает (см. текст после формулы (1)), что циркуляция  $\tilde{\Gamma}$  скорости  $\tilde{\mathbf{V}}$  по контурам, перемещающимся вместе с частицами воображаемой жидкости со скоростью (5), сохраняется с течением времени. Поскольку скорость  $\mathbf{V}$  связана со скоростью  $\tilde{\mathbf{V}}$  соотношением  $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} \exp\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\}$ , то циркуляция  $\Gamma$  скорости (реальной) жидкости  $\mathbf{V}$  по каждому контуру, перемещающемуся со скоростью (5), меняется с течением времени по закону

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\left\{-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right\}. \quad (7)$$

Формулы (5) и (7) есть основной результат данной статьи. Надлежащий выбор функции  $\alpha(t)$  позволяет задавать закон изменения циркуляции по времени, а выбор функции  $g$  — изменять величину и направление скорости воображаемых частиц  $\mathbf{U}$ . При этом, как замечено в [7], различным  $\alpha(t)$  и  $g$  будут соответствовать различные равноправные точки зрения на эволюцию завихренности.

### 3. Вязкая несжимаемая жидкость

Для вязкой несжимаемой жидкости уравнение движения имеет вид (3). Поэтому  $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu[\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega}]/\Omega^2 + \alpha[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}]/\Omega^2 + [\boldsymbol{\Omega} \times \nabla g]/\Omega^2$ . При движении контуров (доменов) с такой скоростью их интенсивность  $\Gamma$  будет меняться согласно (7). При применении этой скорости в методе ВВД функции  $\alpha(t)$  и  $g$  в течение каждого шага должны обладать гладкостью, описанной после формулы (3). Однако они могут быть разрывными при переходе от одного шага по времени к следующему. Такие разрывы допускаются потому, что они соответствуют переходам от одной лагранжевой точки зрения на эволюцию завихренности к другой. Так, например, функцию  $\alpha(t)$  можно считать константой на каждом шаге по времени, при этом величина константы может быть различной на разных шагах. Чтобы воспользоваться величинами, которые в любом случае вычисляются при реализации метода ВВД, можно положить  $\nabla g = \beta \nabla |\boldsymbol{\Omega}|$  или  $\nabla g = \beta \nabla \ln |\boldsymbol{\Omega}|$ , где  $\beta(t)$  — любая ступенчатая функция времени, постоянная на каждом расчетном шаге (например,  $\beta(t) \equiv 0$ ).

### Заключение

Предложена новая лагранжева точка зрения на эволюцию завихренности в плоскопараллельных и незакрученных течениях жидкостей всех типов. Получены формулы для скорости такого перемещения контуров, при котором циркуляция скорости жидкости по любому движущемуся контуру изменяется по заданному временному закону. Этот теоретический результат можно использовать в вычислительной гидродинамике для ограничения количества доменов при использовании бессеточного метода расчета течений вязкой несжимаемой жидкости (метода вязких вихревых доменов).

### Список литературы

1. *Rosenhead L.* The formation of vortices from a surface of discontinuity // Proc. R. Soc. Lond. A. 1931. Vol. 134, no. 823. P. 170–192. DOI: 10.1098/rspa.1931.0189.
2. *Белоцерковский С. М., Ништ М. И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P. D.* Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 320 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526442.
4. *Голубкин В. Н., Сизых Г. Б.* О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 176–178.
5. *Брутян М. А., Голубкин В. Н., Крапивский П. Л.* Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 1988. Т. 19, № 2. С. 98–100.
6. *Дынникова Г. Я.* Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.
7. *Марков В. В., Сизых Г. Б.* Эволюция завихренности в жидкости и газе // Известия РАН. МЖГ. 2015. № 2. С. 8–15.
8. *Dynnikova G. Y., Dynnikov Y. A., Guvernuyuk S. V., Malakhova T. V.* Stability of a reverse Karman vortex street // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 2. P. 024102. DOI: 10.1063/5.0035575.
9. *Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y.* On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing // Entropy. 2021. Vol. 23, no. 1. P. 118. DOI: 10.3390/e23010118.
10. *Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E.* Fast methods for vortex influence computation in meshless

Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. Vol. 126. P. 255–267. DOI: 10.2495/BE420231.

11. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. DOI: 10.1134/S0032823519030135.
12. Сизых Г. Б. Замкнутые вихревые линии в жидкости и газе // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2019. Т. 23, № 3. С. 407–416. DOI: 10.14498/vsgtu1723.
13. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. DOI: 10.14498/vsgtu1815.
14. Коцур О. С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.
15. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176. DOI: 10.53815/20726759\_2020\_12\_4\_171.
16. Сизых Г. Б. О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 3. С. 144–147. DOI: 10.53815/20726759\_2021\_13\_3\_144.
17. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. DOI: 10.14498/vsgtu1861.
18. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1. P. 32–34.
19. Truesdell C. The Kinematics of Vorticity. Bloomington: Indiana University Press, 1954. 232 p.
20. Фридман А. А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.: ОНТИ, 1934. 370 с.

## References

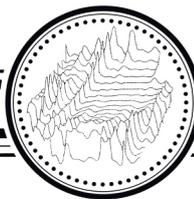
1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity. Proc. R. Soc. Lond. A. 1931;134(823):170–192. DOI: 10.1098/rspa.1931.0189.
2. Belotserkovskii SM, Nisht MI. Separated and Unseparated Ideal Liquid Flow around Thin Wings. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. (in Russian).
3. Cottet GH, Koumoutsakos PD. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. 320 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526442.
4. Golubkin VN, Sizykh GB. Some general properties of plane-parallel viscous flows. Fluid Dynamics. 1987;22(3):479–481. DOI: 10.1007/BF01051932.
5. Brutyan MA, Golubkin VN, Krapivskii PL. On the Bernoulli equation for axisymmetric viscous fluid flows. TsAGI Science Journal. 1988;19(2):98–100 (in Russian).
6. Dynnikova GY. Lagrange method for Navier–Stokes equations solving. Proceedings of the Academy of Sciences. 2004;399(1):42–46 (in Russian).
7. Markov VV, Sizykh GB. Vorticity evolution in liquids and gases. Fluid Dynamics. 2015;50(2): 186–192. DOI: 10.1134/S0015462815020027.
8. Dynnikova GY, Dynnikov YA, Guvernyuk SV, Malakhova TV. Stability of a reverse Karman vortex street. Physics of Fluids. 2021;33(2):024102. DOI: 10.1063/5.0035575.
9. Kuzmina K, Marchevsky I, Soldatova I, Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing. Entropy. 2021;23(1):118. DOI: 10.3390/e23010118.

10. Leonova D, Marchevsky I, Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless Lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation. *WIT Transactions on Engineering Sciences*. 2019;126:255–267. DOI: 10.2495/BE420231.
11. Sizykh GB. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow. *Fluid Dynamics*. 2019;54(7):907–911. DOI: 10.1134/S0015462819070139.
12. Sizykh GB. Closed vortex lines in fluid and gas. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2019;23(3):407–416 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1723.
13. Mironyuk IY, Usov LA. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020;24(4):780–789 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1815.
14. Kotsur OS. On the existence of local formulae of the transfer velocity of local tubes that conserve their strengths. *Proceedings of MIPT*. 2019;11(1):76–85 (in Russian).
15. Mironyuk IY, Usov LA. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas. *Proceedings of MIPT*. 2020;12(4):171–176 (in Russian). DOI: 10.53815/20726759\_2020\_12\_4\_171.
16. Sizykh GB. On the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock. *Proceedings of MIPT*. 2021;13(3):144–147 (in Russian). DOI: 10.53815/20726759\_2021\_13\_3\_144.
17. Sizykh GB. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2021;25(3):588–595 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1861.
18. Prim R, Truesdell C. A derivation of Zorawski’s criterion for permanent vector-lines. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1950;1:32–34.
19. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington: Indiana University Press; 1954. 232 p.
20. Friedman AA. *Experience in the Hydromechanics of Compressible Fluid*. Moscow: ONTI; 1934. 370 p. (in Russian).



*Сизых Григорий Борисович* — родился в Ангарске (1961). Окончил факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (1985). В 1992 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области исследования движения и горения пылегазовых смесей. Ведет научно-исследовательскую работу в теории движения жидкости, газа и пылегазовых смесей. За последние пять лет (2017–2021) опубликовал по этой тематике 28 научных работ и доложил свои результаты на двух международных конференциях. Работает доцентом на кафедре высшей математики Московского физико-технического института.

Россия, 141700 Долгопрудный, Институтский пер., 9  
 Московский физико-технический институт  
 E-mail: o1o2o3@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0001-5821-8596  
 AuthorID: 1131068



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья  
УДК 621.9:531.3  
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-37-56

## Связь притягивающих множеств деформаций инструмента с пространственной ориентацией упругости и регенерацией сил резания при точении

В. Л. Заковоротный, В. Е. Гвинджилия✉

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru), [sinedden@yandex.ru](mailto:sinedden@yandex.ru)

Поступила в редакцию 14.10.2021, принята к публикации 05.12.2021,

опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** В настоящее время динамическая система резания представляется в виде двух подсистем — инструмента и заготовки, взаимодействующих через нелинейную связь, формируемую процессом резания. Подобное представление определяет важность изучения динамики процесса резания как основного фактора, влияющего на эффективность станков, траектории исполнительных элементов которых задаются ЧПУ и обеспечиваются с высокой точностью. Однако для повышения эффективности резания необходимо согласовать траектории исполнительных элементов, заданных ЧПУ, с изменяющейся динамикой резания, которая вносит отклонения в заданные программой траектории. Цель настоящей статьи — рассмотреть зависимость динамики процесса резания от пространственной ориентации упругости режущего инструмента и от регенеративного эффекта и выяснить влияние предложенной зависимости на эффективность процесса резания. Все вопросы, рассмотренные в статье, проанализированы на примере наружного точения вала. Методы. В основу изучения положены методы математического моделирования и экспериментальной динамики. В отличие от известных исследований учитывается зависимость времени обратного запаздывания от колебательных смещений в направлении скорости резания, а также влияние формируемой при этом положительной обратной связи. Кроме этого принимаются во внимание изменения знака внутренней обратной связи от направления деформаций, а также влияние регенеративного эффекта на формируемые притягивающие множества деформаций. Результаты. Раскрыта зависимость эволюции системы от элементов матрицы жесткости при различных частотах вращения шпинделя. Изучены свойства эволюции системы в зависимости от соотношения частот вращения шпинделя и собственных частот подсистемы инструмента, а также пространственного распределения податливости. Заключение. Обсуждаются частотные и временные характеристики системы. Делается заключение о возможности повышения эффективности процесса резания на основе согласования программы ЧПУ с динамическими свойствами системы.

**Ключевые слова:** эффект регенерации сил резания, устойчивость и притягивающие множества деформаций, эффективность резания.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ, № 19-08-00022 и № 20-38-90074.

**Для цитирования:** Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Связь притягивающих множеств деформаций инструмента с пространственной ориентацией упругости и регенерацией сил резания при точении // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 37–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-37-56

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Correlation of attracting sets of tool deformations with spatial orientation of tool elasticity and regeneration of cutting forces in turning

D. V. Zakovorotny, V. Gvindjiliya

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru), [sinedden@yandex.ru](mailto:sinedden@yandex.ru)

Received 14.10.2021, accepted 05.12.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** Nowadays, the dynamic cutting system is represented in the form of two subsystems – tool and workpiece, interacting through a nonlinear relationship formed by the cutting process. Such a representation determines the importance of studying the dynamics of the cutting process as the main factor influencing the efficiency of machines, the trajectories of the executive elements of which are set by CNC and are provided with high accuracy. However, in order to improve the efficiency of cutting, it is necessary to align the trajectories of the executive elements are defined by CNC with the changing dynamics of cutting, which introduces deviations in the program-defined trajectories. *Purpose* of this article is to consider the dependence of the dynamics of the cutting process on the spatial orientation of the cutting tool elasticity and the regenerative effect, and to find out the effect of the proposed dependence on the efficiency of the cutting process. All the issues discussed in the article are analyzed using the example of external shaft turning. *Methods.* The study is based on the methods of mathematical modeling and experimental dynamics. In contrast to the known studies, the dependence of the turnover lag time on the oscillatory displacements in the direction of the cutting speed, as well as the influence of the positive feedback formed in this case, is taken into account. In addition, changes in the sign of the internal feedback from the direction of deformations, as well as the influence of the regenerative effect on the generated attracting sets of deformations are taken into account. *Results.* Dependence of the system evolution on the elements of the stiffness matrix at different spindle speeds is disclosed. The properties of the system evolution depending on the ratio of the spindle rotation frequency and the eigenfrequencies of the tool subsystem, as well as the spatial distribution of the stiffness are studied. *Conclusion.* The frequency and time characteristics of the system are discussed. Conclusion is made about the possibility of efficiency increasing of the cutting process based on the coordination of the CNC program with the dynamic properties of the system.

**Keywords:** effect of regeneration of cutting forces, stability and attracting sets of deformations, cutting process efficiency.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grants No 19-08-00022 and No 20-38-90074.

**For citation:** Zakovorotny VL, Gvindjiliya VE. Correlation of attracting sets of tool deformations with spatial orientation of tool elasticity and regeneration of cutting forces in turning. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(1):37–56. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-37-56

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Динамическая система резания (ДСР), в которой главное внимание уделяется устойчивости движения и формируемым притягивающим множествам деформаций, привлекает внимание исследователей с середины прошлого века [1–9]. Это связано с тем, что свойства ДСР влияют на эффективность обработки [10–16]. Они зависят от динамической связи, которая моделируется силами  $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$ , представленными в виде их зависимости от деформаций  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$  и  $\mathbf{dX}/dt = \mathbf{v}_X = \{v_{X,1}, v_{X,2}, v_{X,3}\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$ , траекторий исполнительных элементов станка (ТИЭС) и неуправляемых возмущений. ТИЭС, как правило, задаются системой ЧПУ ЭВМ и при токарной обработке представляют совокупность траекторий перемещений  $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$  и скоростей  $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$  продольного, поперечного суппортов и вращения шпинделя. Таким образом, траектории движения вершины инструмента относительно заготовки, названные нами траекториями формообразующих движений, определяются суммой  $\mathbf{L}^{(\Phi)} = \mathbf{L} - \mathbf{X}$  и  $\mathbf{V}^{(\Phi)} = \mathbf{V} - \mathbf{dX}/dt$ . Деформации рассматриваются в подвижной системе

координат, движение которой определяется ТИЭС. При этом используется принцип разделения движений [16] на «медленные» (ТИЭС) и «быстрые» (деформации инструмента) [17, 18]. Рассматриваются следующие факторы, вызывающие потерю устойчивости. Силы варьируются при изменении  $S(t)$  — площади пересечения передней грани инструмента заготовкой. Изменение сил запаздывает по отношению к вариациям  $S(t)$  [1, 2, 7, 19–25]. Рассматриваются эффекты регенерации сил, обусловленные следом от колебаний инструмента на предыдущем обороте. Исследования выполнены в предположении, что время оборота  $T = \text{const}$  [26–35], и не принимались во внимание  $v_{X,3}$ . Заметим, что сама кинематика формирования подачи  $S(t)$  приводит к необходимости использования соотношения, учитывающего эффект регенерации сил

$$S(t) = \int_{t-T}^t \{V_2(\xi) - v_{X,2}(\xi)\} d\xi. \quad (1)$$

Наконец, учитываются нелинейные характеристики изменения сил от скорости. Используются модифицированные уравнения Рэлея, ван дер Поля и модели реверсивного трения, для объяснения потери устойчивости и образования притягивающих множеств [36–43]. Учитывается параметрическое самовозбуждение [44, 45], которое формируется, начиная с некоторой критической скорости. Рассматривалось также влияние периодических возмущений [46–48], которые формируют такие эффекты как синхронизация, асинхронное взаимодействие, вибрационная стабилизация в низкочастотной области и пр.

Анализ показывает, что силы, зависящие от деформаций и ТИЭС, образуют внутрисистемную обратную связь, свойства которой влияют на формируемые при резании притягивающие множества деформаций. Изучение устойчивости и притягивающих множеств с учетом отмеченных особенностей дополняет знания о нелинейной динамике резания, позволяющие улучшить выходные свойства обработки, что определяет содержание статьи.

## 1. Математическое моделирование

Свойства системы можно раскрыть на основе использования следующей модели (рис. 1) [10, 22, 44, 49]:

$$\mathbf{m} \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + \mathbf{h} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{c}\mathbf{X} = \mathbf{F}_\Sigma. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{c}$  — симметричные, положительно определенные матрицы инерционных, скоростных и упругих коэффициентов, соответственно:  $\mathbf{m} = [m_s]$  в  $[\text{кгс}^2/\text{мм}]$ ,  $m_s = m$ ,  $s = 1, 2, 3$ ;  $\mathbf{h} = [h_{s,l}]$  в  $[\text{кгс}/\text{мм}]$ ;  $\mathbf{c} = [c_{s,l}]$  в  $[\text{кг}/\text{мм}]$ ,  $s, l = 1, 2, 3$ ;  $\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^1$ ;  $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$  — сила, формируемая в области передней грани;  $\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Phi}^1$  — силы, действующие на задние грани.

Проекция  $\mathbf{F}$  определяется коэффициентами  $\chi_i$ , удовлетворяющими условию  $\sum_{i=1}^3 (\chi_i)^2 = 1$ , то есть  $\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \{F_1, F_2, F_3\}^T$ . Для дальнейшего необходимо, кроме (1), связать ТИЭС с технологическими режимами: глубиной  $t_p(t)$  и скоростью  $V_p(t)$  резания

$$V_p(t) = V_3(t) - v_{X,3}, \quad t_p(t) = d/2 - \int_0^t \{V_1(\xi) - v_{X,1}(\xi)\} d\xi, \quad (3)$$

где  $V_3(t) = \pi D \Omega$ ,  $\Omega$  — частота вращения заготовки в  $[\text{с}^{-1}]$ . Если в (1) и (3)  $D X_i / dt = 0$  и  $V_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то будем обозначать:  $S_p^{(0)} = V_2 T$ ,  $t_p^{(0)} = d/2 - L_1(0)$ ,  $V_p^{(0)} = V_3$ .

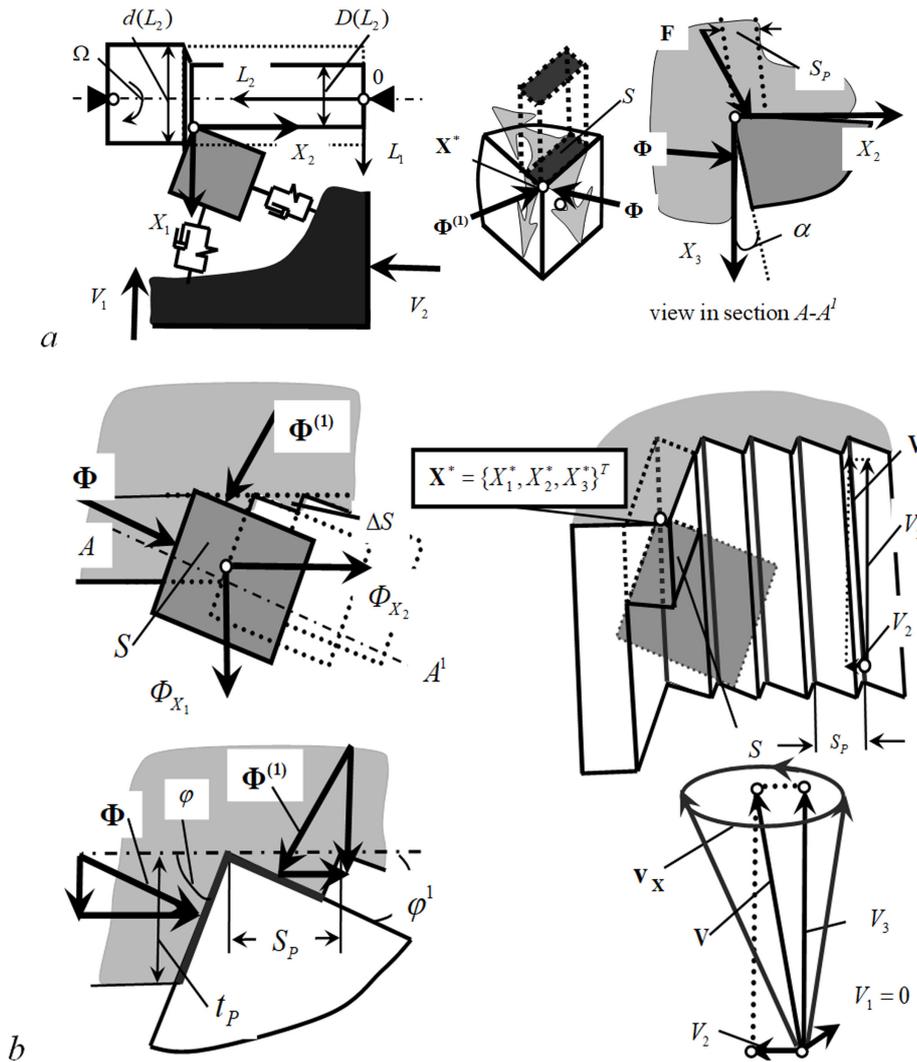


Рис. 1. Схема преобразования траекторий формообразующих движений в силы резания: *a* – схема взаимосвязи сил и деформационных смещений; *b* – силы в области задних граней

Fig. 1. Scheme of transformation of trajectories of the shape-generating movements into cutting forces: *a* – scheme of the interrelation of forces and deformation displacements; *b* – forces in the area of the rear edges

Раскроем зависимость  $F^{(0)}(t)$  от деформаций и ТИЭС

$$T^{(0)} dF^{(0)}/dt + F^{(0)} = \rho \{1 + \mu \exp[-\zeta(V_3 - v_{X_3})]\} [t_p^{(0)} - X_1] \int_{t-T}^t \{V_2(\xi) - v_{X_2}(\xi)\} d(\xi), \quad (4)$$

где  $\rho$  – давление в [кг/мм<sup>2</sup>];  $\zeta$  – параметр крутизны в [с/мм];  $\mu$  – безразмерный коэффициент;  $T^{(0)}$  – параметр, определяющий запаздывание сил. Если равновесие  $\mathbf{X}^* = \{X_1^*, X_2^*, X_3^*\}^T$  (рис. 1, *b*) является асимптотически устойчивым, то после переходных процессов в заготовке формируется стационарное направление движения и соответствующая ему траектория следа от инструмента. Тогда вариации положения инструмента относительно следа вызывают образование сил  $\Phi(t)$  и  $\Phi(t)^{(1)}$ , действующих на главную и вспомогательную задние грани. Рассмотрим точеч-

ние четырехгранными пластинками из твердого сплава. Тогда очевидна связь между главным  $\varphi$  и вспомогательным  $\varphi^1$  углами  $\varphi^1 = \pi/2 - \varphi$ . Так как рассматривается продольное точение, то скорость  $V_1 = 0$  (см. рис. 1, b). Вначале вычислим углы ориентации вектора скорости по отношению к передней и задней граням. Здесь положительное направление определяется по направлению сближения передней  $\alpha_\Sigma$  и задней  $\alpha_\Sigma^1$  граней. Из геометрических соотношений определяем

$$\begin{cases} \alpha_\Sigma(t) = \alpha + \Delta\alpha(t) = \alpha + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{v_{X,1}(t) \cos \varphi + [V_2 - v_{X,2}(t)] \sin \varphi}{V_3 - v_{X,3}(t)} \right\}, \\ \alpha_\Sigma^1(t) = \alpha^1 + \Delta\alpha^1(t) = \alpha^1 + \operatorname{arctg} \left\{ \frac{v_{X,1}(t) \sin \varphi + [V_2 - v_{X,2}(t)] \cos \varphi}{V_3 - v_{X,3}(t)} \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

Модули  $\Phi, \Phi^{(1)}$  можно аппроксимировать законом экспоненты, возрастающей при уменьшении  $\alpha_\Sigma(t), \alpha_\Sigma^1(t)$ . Причем углы определяются в сечениях  $(A - A^1)$ , нормальных к режущим лезвиям (рис. 1, a). Так как задние углы есть величины малые, то имеем выражения для дополнительных сил  $\Phi_X = \{\Phi_{X_1}, \Phi_{X_2}, \Phi_{X_3}\}^T \in \mathfrak{R}^{(3)}$  в функции ТИЭС и X

$$\begin{cases} \Phi_{X_1}(t) = \rho_0 \{ (t_p^{(0)} - X_1) \operatorname{ctg} \varphi \exp(-\alpha\alpha_\Sigma) + \exp(-\alpha\alpha_\Sigma^1) \int_{t-T}^t [V_2(\xi) - v_{X_2}(\xi)] d\xi \}, \\ \Phi_{X_2}(t) = \rho_0 \{ (t_p^{(0)} - X_1) \exp(-\alpha\alpha_\Sigma) - \exp(-\alpha\alpha_\Sigma^1) \int_{t-T}^t [V_2(\xi) - v_{X_2}(\xi)] d\xi \operatorname{ctg} \varphi \}, \\ \Phi_{X_3}(t) = k_{\text{fr}} \{ \Phi_{X_1}(t) + \Phi_{X_2}(t) \}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\alpha$  – коэффициент крутизны;  $\rho_0$  – параметр, имеющий смысл жесткости;  $k_{\text{fr}}$  – коэффициент трения. Силы  $\Phi_X$  ограничивают развитие деформаций. Системы (2), (4), (6) позволяют исследовать траектории  $X, F, \Phi, \Phi^{(1)}$ , а также анализировать притягивающие множества деформаций и их эволюцию при переходе от одного стационарного состояния к другому. Эти свойства эволюции отличаются от рассмотренных в работах [48, 50].

## 2. Устойчивость равновесия

Взаимодействие зависит от траекторий  $L^{(\Phi)}$  и  $V^{(\Phi)}$ . Систему будем считать устойчивой, если устойчива точка равновесия  $X^*$  в подвижной системе координат. Ограничимся рассмотрением невозмущенной системы на постоянных режимах. Для анализа устойчивости необходимо определить линеаризованное уравнение в вариациях [51]. Для точки  $X^*$  справедливо:  $v_{X_i} = 0, i = 1, 2, 3, dF^{(0)} = 0$ . На заготовке формируется направление, в котором  $\Phi \Rightarrow 0, \Phi_{(1)} \Rightarrow 0$ . Тогда  $X^*$ :

$$c_\Sigma X^* = \rho^{(0)} S_p^{(0)} t_p^{(0)} \{ \chi_1, \chi_2, \chi_3 \}^T, \quad (7)$$

где

$$c_\Sigma = \begin{bmatrix} c_{1,1} + \chi_1 \rho^{(0)} S_p^{(0)} & c_{2,1} & c_{3,1} \\ c_{1,2} + \chi_2 \rho^{(0)} S_p^{(0)} & c_{2,2} & c_{3,2} \\ c_{1,3} + \chi_3 \rho^{(0)} S_p^{(0)} & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \rho^{(0)} = \rho \{ 1 + \mu \exp[-\zeta V_3] \}.$$

Решение (7) является единственным и  $X^* = \text{const}$ . Тогда линеаризованное уравнение в вариациях имеет постоянные параметры, а систему можно рассматривать как подсистему инструмента

с обратной связью. Поэтому для анализа устойчивости можно использовать частотный критерий Найквиста [52], а амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) системы в разомкнутом состоянии  $W_{\Sigma}(j\omega)$  представить в виде

$$W_{\Sigma}(j\omega) = \frac{\rho}{(1 + T^{(0)}\omega j)} \left\{ g_1 S_p^{(0)} W_1(j\omega) + g_2 t_p^{(*)} [1 - \exp(-T\omega j)] \times \right. \\ \left. \times W_2(j\omega) - g_3 S_p^{(0)} t_p^{(*)} \mu(\zeta)^{(-1)} W_3(j\omega) j\omega \right\}, \quad (8)$$

где

$$t_p^{(*)} = t_p^{(0)} - X_1^*; \quad g_1 = \Delta_{g_1}/\Delta_g; \quad g_2 = \Delta_{g_2}/\Delta_g; \quad g_3 = \Delta_{g_3}/\Delta_g; \quad \Delta_g = [c_{i,s}], \quad i, s = 1, 2, 3; \\ W_{0,i}(p)_{p=j\omega} = \Delta_i(p)/\Delta(p); \quad W_i(p)_{p=j\omega} = g_i W_{0,i}(p)_{p=j\omega}; \quad i = 1, 2, 3; \\ \Delta_{g_1} = \begin{bmatrix} \chi_1 & c_{2,1} & c_{3,1} \\ \chi_2 & c_{2,2} & c_{3,2} \\ \chi_3 & c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{g_2} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \chi_1 & c_{3,1} \\ c_{1,2} & \chi_2 & c_{3,2} \\ c_{1,3} & \chi_3 & c_{3,3} \end{bmatrix}; \quad \Delta_{g_3} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \chi_1 \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \chi_2 \\ c_{1,3} & c_{2,3} & \chi_3 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \chi_1 & h_{2,1}p + c_{2,1} & c_{3,1} \\ \chi_2 & mp^2 + h_{2,2}p + c_{2,2} & c_{3,2} \\ \chi_3 & mp^2 + h_{2,3}p + c_{2,3} & c_{3,3} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} mp^2 + h_{1,1}p + c_{1,1} & \chi_1 & h_{3,1}p + c_{3,1} \\ h_{1,2}p + c_{1,2} & \chi_2 & h_{3,2}p + c_{3,2} \\ h_{1,3}p + c_{1,3} & \chi_3 & mp^2 + h_{3,3}p + c_{3,3} \end{bmatrix};$$

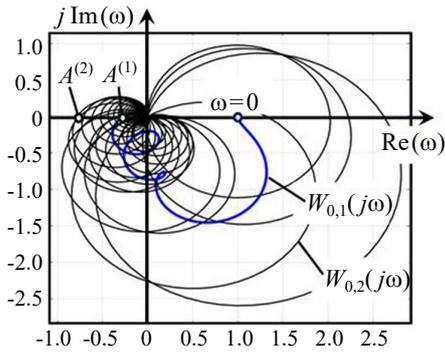
$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} mp^2 + h_{1,1}p + c_{1,1} & h_{2,1}p + c_{2,1} & \chi_1 \\ h_{1,2}p + c_{1,2} & mp^2 + h_{2,2}p + c_{2,2} & \chi_2 \\ h_{1,3}p + c_{1,3} & mp^2 + h_{2,3}p + c_{2,3} & \chi_3 \end{bmatrix};$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} mp^2 + h_{1,1}p + c_{1,1} & h_{2,1}p + c_{2,1} & h_{3,1}p + c_{3,1} \\ h_{1,2}p + c_{1,2} & mp^2 + h_{2,2}p + c_{2,2} & h_{3,2}p + c_{3,2} \\ h_{1,3}p + c_{1,3} & mp^2 + h_{2,3}p + c_{2,3} & mp^2 + h_{3,3}p + c_{3,3} \end{bmatrix}.$$

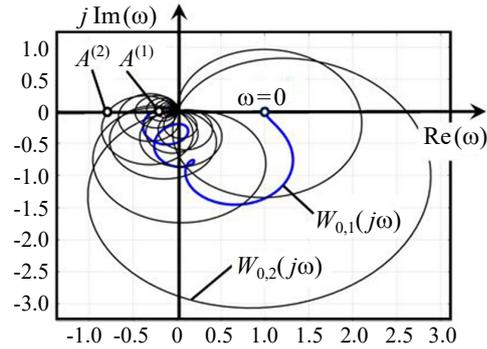
Передаточные функции  $W_i(p)$  можно представить как

$$W_i(p) = \frac{(1 + 2\xi_1^{(i)} T_1^{(i)} p + (T_1^{(i)})^2 p^2)(1 + 2\xi_2^{(i)} T_2^{(i)} p + (T_2^{(i)})^2 p^2)}{(1 + 2\xi_1 T_1 p + (T_1)^2 p^2)(1 + 2\xi_2 T_2 p + (T_2)^2 p^2)(1 + 2\xi_3 T_3 p + (T_3)^2 p^2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

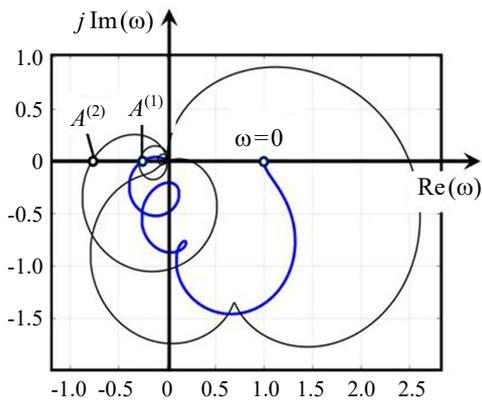
Причем  $\Omega_i = (T_i)^{(-1)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – резонансы, а  $\Omega_i^{(s)} = (T_i^{(s)})^{(-1)}$ ,  $i, s = 1, 2, 3$ , – антирезонансы. В традиционных станках токарной группы выполняется условие  $\Omega = T^{(-1)} \ll \Omega_i$ . Поэтому имеет смысл рассмотреть два режима:  $t < T$  и  $t > T$ . Обычно  $S_p^{(0)} \ll t_p$ ,  $\mu(\zeta)^{(-1)} \rightarrow 0$ . Тогда  $W_{\Sigma}(j\omega) \approx \frac{\rho}{(1+T^{(0)}\omega j)} \left\{ g_2 t_p^{(*)} [1 - \exp(-T\omega j)] \right\}$ . Для этого случая на рис. 2 приведен пример АФЧХ  $W_{0,1} = \frac{\rho}{(1+T^{(0)}\omega j)} \left\{ g_2 t_p^{(*)} W_2(j\omega) \right\}$  и  $W_{0,2} = W_{\Sigma}(j\omega)$ . Иллюстрации на рис. 2, *a, b* относятся к случаю  $\Omega \ll \Omega_i$ , на рис. 2, *c, d* – к случаю  $\Omega > \Omega_i$ . Если  $\Omega \ll \Omega_i$ , то в АФЧХ можно выделить частоты  $\omega_i = 2\pi(T_i)^{(-1)}$ , на которых  $\{1 - \exp(-T\omega j)\} = 0$ . В окрестностях точек  $\omega_i$  формируются кривые типа циклоид. За счет быстрого вращения фазы в окрестности  $\omega_i$  вариации  $\Omega$  практически не изменяют склонность к самовозбуждению. Если  $\Omega > \Omega_i$ , то уменьшение  $T$  может повышать запас устойчивости (сравните рис. 2, *a, b, c, d*). Даже малые вариации  $T$  могут влиять на устойчивость. Однако увеличение  $\Omega$  ограничено параметрическим самовозбуждением [44].



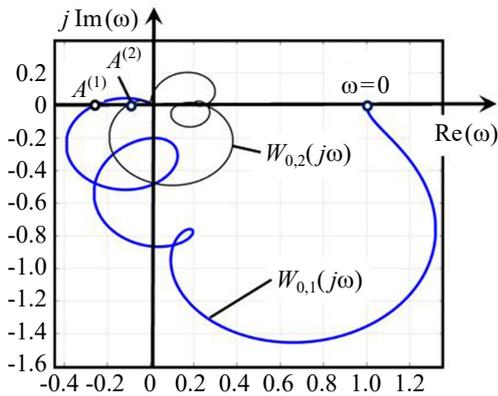
a



b



c



d

Рис. 2. АФЧХ  $W_{(0,1)}(j\omega)$  и  $W_{(0,2)}(j\omega)$  при параметрах  $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 5, T_{(1)}^{(2)} = 2, T_{(2)}^{(2)} = 4, \xi_i = 0.08, i = 1, 2, 3; \xi_s = 0.08, s = 1, 2; T = 100$  (a); 50 (b); 1 (c); 0.5 (b)

Fig. 2. Nyquist plot  $W_{(0,1)}(j\omega)$  и  $W_{(0,2)}(j\omega)$  with parameters  $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 5, T_{(1)}^{(2)} = 2, T_{(2)}^{(2)} = 4, \xi_i = 0.08, i = 1, 2, 3; \xi_s = 0.08, s = 1, 2; T = 100$  (a); 50 (b); 1 (c); 0.5 (b)

Проанализируем факторы, влияющие на устойчивость. Обычно время импульсной реакции подсистемы инструмента существенно меньше  $T$ . Для этого случая можно рассмотреть два варианта. *Первый* вариант связан с поведением системы без учета регенеративного эффекта, то есть на участке  $t \in (0, T)$ . При обработке деталей большого диаметра можно считать, что  $T \rightarrow \infty$ . Здесь потеря устойчивости обусловлена фазовыми сдвигами между вариациями площади  $S(t)$  и силами  $F$ . Независимо от способа моделирования фазового сдвига (введением апериодического звена, «падающей» характеристики изменения сил при увеличении скорости и пр.) реакция со стороны резания приводит к преобразованию симметричных матриц  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{h}$  в несимметричные. Тогда, во-первых, формируемые кососимметричные составляющие матрицы образуют циркуляционные силы, приводящие к прецессионным колебаниям, что всегда наблюдается на практике. Во-вторых, симметричные составляющие  $\mathbf{h}$  могут стать отрицательно определенными, то есть ускоряющими. Тогда равновесие становится неустойчивым, и стабилизировать его гироскопическими силами, формируемыми кососимметричной составляющей матрицы  $\mathbf{h}$ , не представляется возможным. Всегда для повышения устойчивости необходимо увеличить элементы матриц  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{h}$ . *Второй* вариант: дополнительно рассматривается регенеративный эффект и анализируется устойчивость при  $t \rightarrow \infty$ . Здесь регенеративный эффект зависит от частоты  $\Omega$ . Он способствует самовозбуждению в низкочастотной области. Однако его влияние изменяется по мере приближения  $\Omega$  к одной из частот подсистемы инструмента. При их близости устойчивость становится чувствительной к вариациям  $\Omega$ , а в области  $\Omega > \Omega_i$  регенеративный эффект стабилизирует равновесие.

### 3. Эволюция притягивающих множеств

Для практики имеют значение свойства не при  $t \rightarrow \infty$ , а в ходе эволюции, обусловленной переходом от одного стационарного состояния к другому, например, при врезании инструмента, при обработке с изменяющимися режимами [44, 51] и др. За счет суммирования траекторий со сдвигом на  $T$  возможны синхронные и асинхронные взаимодействия. Циркуляционные силы вызывают изменения направления деформации, которые в совокупности с суммированием  $(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - T))$  образуют притягивающие множества, которые «медленно» перестраиваются во времени. На формирование притягивающих множеств оказывают влияние не только нелинейные связи (5) и (6), но и изменение знака силовой обратной связи. Наконец, время  $T$  зависит не только от частоты  $\Omega$ , но и от скорости  $v_{x,3}/\pi D$ , то есть  $T = (\Omega - v_{x,3}/\pi D)^{-1}$ . Изменение  $T$  вызывает смещение во времени траекторий, что вносит дополнительную неопределенность в сумму  $\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t - T)$ . Это приводит к необходимости использования методов цифрового моделирования для анализа притягивающих множеств деформаций. Поэтому исследование выполнено методами прямого цифрового моделирования на примере продольного течения недеформируемого вала из стали 45 диаметром  $D = 40$  мм с постоянной подачей  $S_p^{(0)} = 0.1$  мм. Параметры системы приведены в табл. 1 и табл. 2 [45, 48]. Обобщенная масса равна  $m = 0.5 \cdot 10^{-3}$  кг·с<sup>2</sup>/мм. При варьировании частоты  $\Omega$  выполнялось ее согласование с  $V_2$ .

Приведем примеры  $X_i(t)$  (рис. 3, рис. 4) при врезании инструмента ( $T = \text{const}$ ). При прочих неизменных условиях на устойчивость влияет коэффициент усиления  $k = \rho g_2 t_p^{(*)}$ , то есть влияет и глубина резания  $t_p^{(0)}$ . Система, устойчивая при  $t_p^{(0)} = 1.0$  мм, становится неустойчивой при  $t_p^{(0)} = 2.0$  мм, и тогда в окрестности равновесия формируется притягивающее множество типа двумерного инвариантного тора.

Более наглядную картину преобразования дает фазовый портрет (рис. 4). Обнаружено, что время установления стационарного состояния может существенно увеличиваться при увеличении  $g_2$  за счет функциональной связанности сил и деформаций. Ситуация меняется, если учитывать зависимость  $T$  не только от  $\Omega$ , но и от  $v_{x,3}$  (рис. 5). В этом случае по мере увеличения  $k = \rho g_2 t_p^{(*)}$  вначале система теряет устойчивость, затем образуются притягивающие множества деформаций сложной структуры, периодически повторяющиеся на супернизкой частоте (рис. 5, а, вставка «А»).

Таблица 1. Параметры динамической связи

Table 1. Parameters of the dynamic link

$\rho$ , кг/мм <sup>2</sup>	$\rho_0$ , кг/мм	$\zeta$ , м/с	$\alpha_1 = \alpha_2$ , рад <sup>-1</sup>	$T^{(0)}$ , с	$\mu$	$k_{fr}$
50–1200	50	0.1	120	0.0008	0.5	0.2

Таблица 2. Матрицы скоростных коэффициентов и упругости

Table 2. Matrices of velocity and elasticity coefficients

$h_{1,1}$ , кг·с/мм	$h_{2,2}$ , кг·с/мм	$h_{3,3}$ , кг·с/мм	$h_{1,2} = h_{2,1}$ , кг·с/мм	$h_{1,3} = h_{3,1}$ , кг·с/мм	$h_{2,3} = h_{3,2}$ , кг·с/мм
1.3	1.1	0.8	0.6	0.5	0.4
$c_{1,1}$ , кг/мм	$c_{2,2}$ , кг/мм	$c_{3,3}$ , кг/мм	$c_{1,2} = c_{2,1}$ , кг/мм	$c_{1,3} = c_{3,1}$ , кг/мм	$c_{2,3} = c_{3,2}$ , кг/мм
2000	1500	200–1500	200	150	80

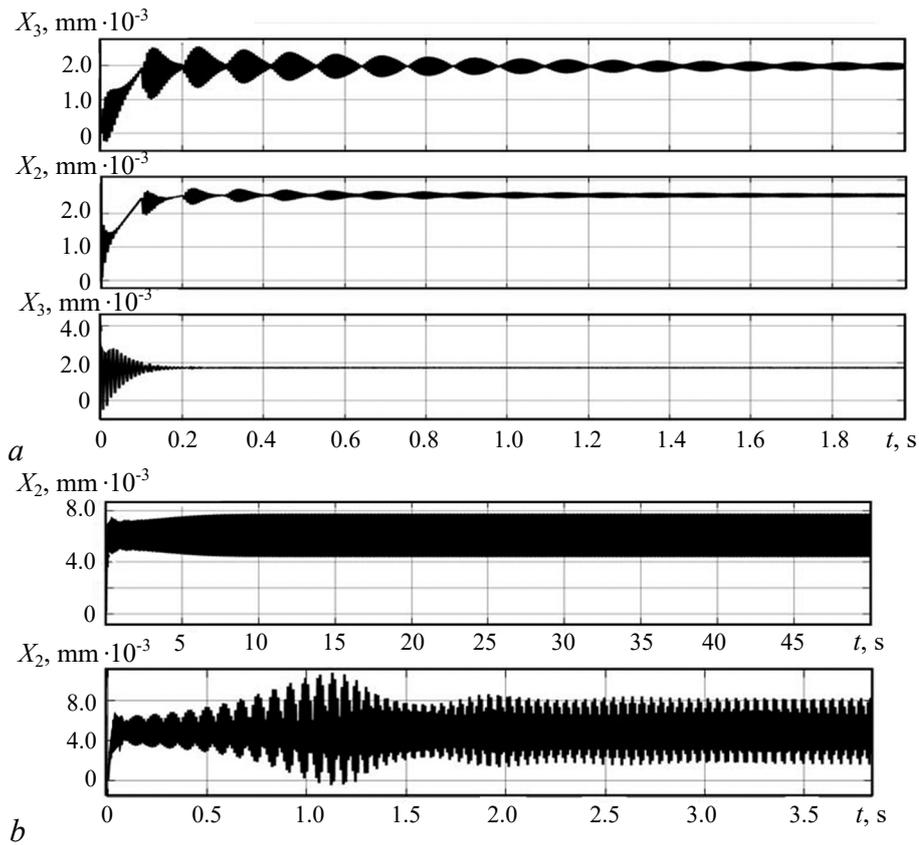


Рис. 3. Примеры переходных процессов деформационных смещений при врезании инструмента в заготовку ( $\rho = 400 \text{ кг/мм}^2$ ):  $t_p^{(0)} = 1.0 \text{ мм}$ ;  $T = 1$  (a), 0.5 (b)

Fig. 3. Examples of transient deformation displacements when tools are plunged into the workpiece ( $\rho = 400 \text{ kg/mm}^2$ ):  $t_p^{(0)} = 1.0 \text{ mm}$ ;  $T = 1$  (a), 0.5 (b)

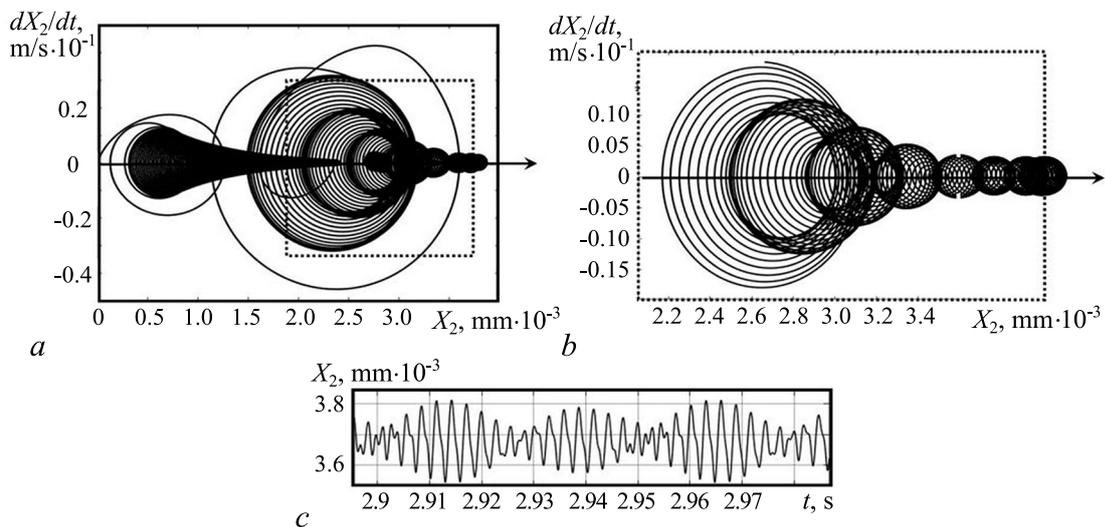


Рис. 4. Пример фазового портрета формирования установившихся притягивающих множеств деформаций (a, b) и фрагмента временной траектории для деформаций  $X_2(t)$  (c)

Fig. 4. Example of the phase portrait of the formation of the steady-state attracting sets of deformations (a, b) and fragment of the time trajectory for deformations  $X_2(t)$  (c)

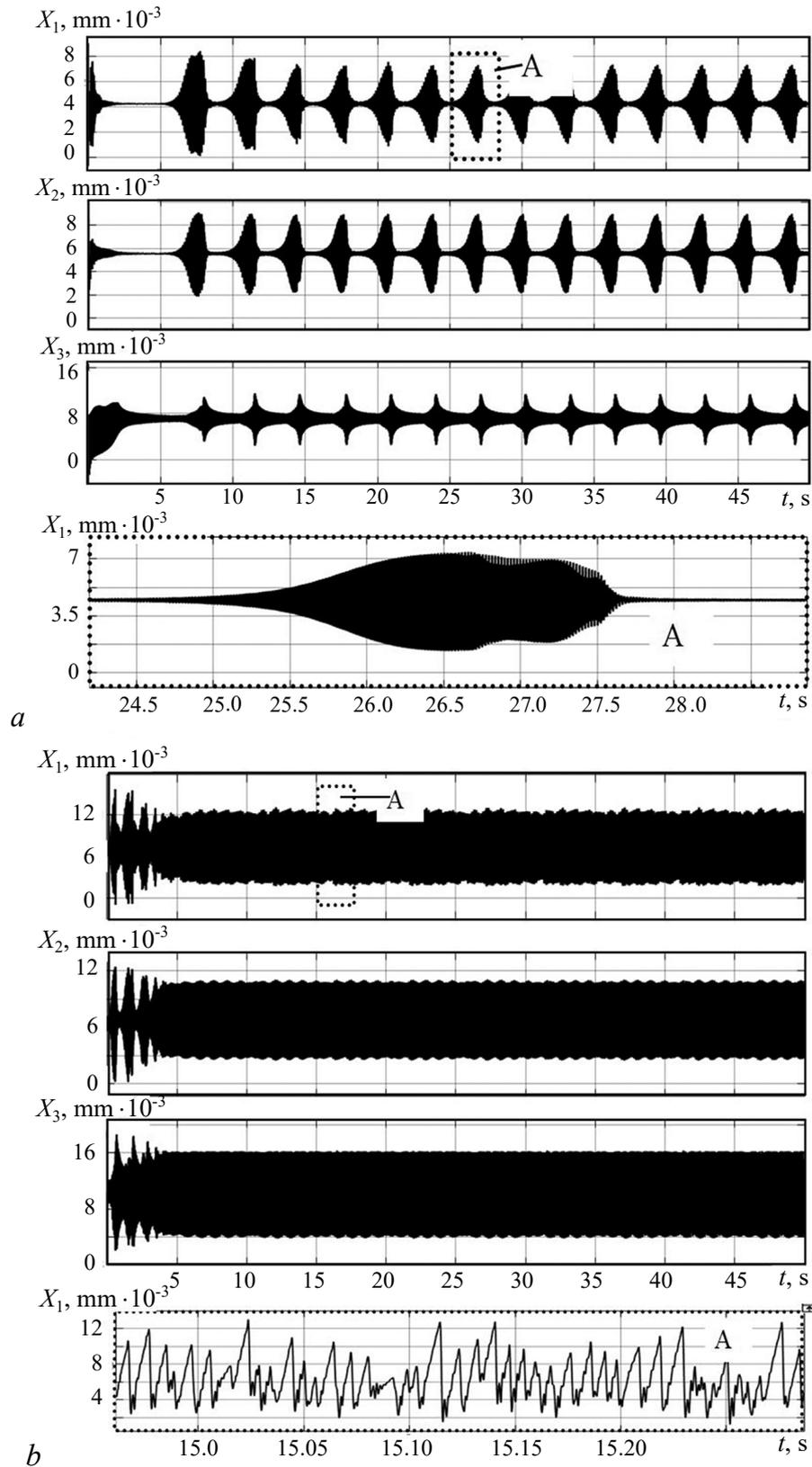


Рис. 5. Примеры переходных процессов деформационных смещений в случае  $T = T(\Omega, v_{X,3})$ :  $k = 1.0$  (a); 2.0 (b)  
 Fig. 5. Examples of transient deformation displacements in the case of  $T = T(\Omega, v_{X,3})$ :  $k = 1.0$  (a); 2.0 (b)

Структура каждого фрагмента этих периодических деформаций представляет набор предельных циклов с перестраиваемыми параметрами и двумерных торов. Перестройка наблюдается, как во времени, так и в пространстве. Поэтому вариации модуля деформаций не столь заметны, как периодически повторяющиеся их изменения, например, в направлении  $X_1$ . При дальнейшем увеличении  $k = 2$  в системе супернизкочастотные притягивающие множества исчезают и формируются хаотические деформации (рис. 5, *b*). В формировании притягивающих множеств участие принимают силы  $\Phi$  и  $\Phi^{(1)}$ . На рис. 6 дан пример диаграммы бифуркаций притягивающих множеств деформаций, наглядно показывающий изменения их свойств. Точкам «а» и «б» на рис. 6 соответствуют траектории на рис. 5, *a*, *b*.

Исследования показывают, что область «3» на рис. 6 может нивелироваться, если уменьшается  $g_3$ . Таким образом, изменение ориентации деформаций в пространстве влияет не только на устойчивость, но и на притягивающие множества. В том случае, если при моделировании динамики не учитывать зависимость  $T$  от скорости  $v_{X,3}$ , то область «3» на рис. 6 не образуется.

В связи с разработкой износостойких инструментальных материалов [53] и совершенствованием шпиндельных узлов [54], появилась возможность рассмотрения режимов, при которых выполняются условия  $\Omega \geq (T_i)^{-1}$ . Они выполняются при растачивании отверстий маложесткими борштангами и пр. При потере устойчивости здесь сразу формируется предельный цикл (рис. 7, *a*) или после некоторого каскада удвоения периода образуется хаотическая динамика (рис. 7, *b*), на формирование которой оказывает влияние, как соотношение  $g_2$  и  $g_3$ , так и параметры уравнений (6). Образование супернизкочастотных притягивающих множеств и их медленная эволюция в этом случае не наблюдается.

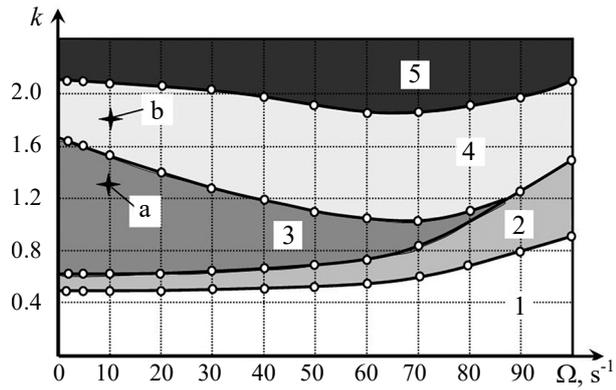


Рис. 6. Диаграмма бифуркаций притягивающих множеств деформационных смещений вершины инструмента: 1 — точка равновесия асимптотически устойчива; 2 — область формирования предельного цикла; 3 — область супернизкочастотных притягивающих множеств; 4 — область хаотической динамики; 5 — область неустойчивой системы в целом

Fig. 6. Bifurcation diagram of the attracting sets of deformation displacements of the tool tip: 1 — asymptotically stable equilibrium point; 2 — region of limit cycle formation; 3 — region of super low-frequency attracting sets; 4 — region of chaotic dynamics; 5 — region of unstable system as a whole

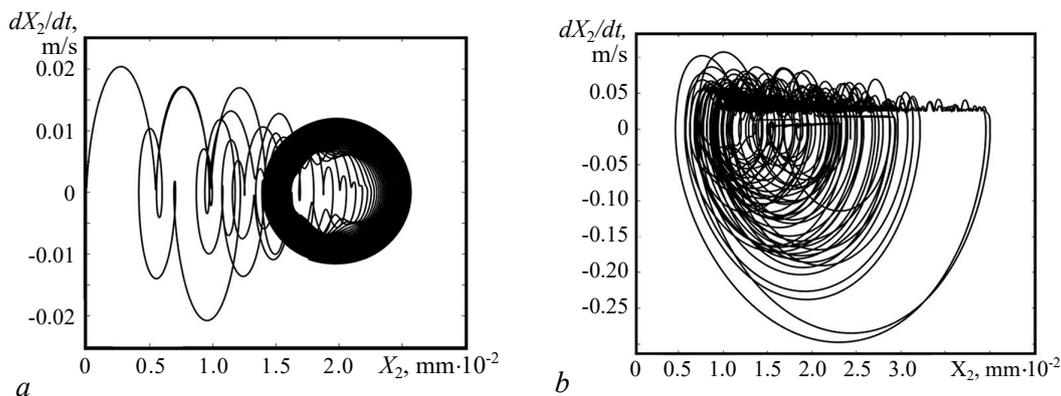


Рис. 7. Примеры изменения фазовых траекторий при вариации соотношения: *a* —  $g_2$  и *b* —  $g_3$

Fig. 7. Examples of changes in phase trajectories when the ratio: *a* —  $g_2$  and *b* —  $g_3$

#### 4. Анализ результатов

Представление сил резания в координатах упругих деформаций вершины инструмента относительно заготовки, а также при технологических режимах, определяемых ТИЭС, принципиально изменяют парадигму анализа процесса резания. Он рассматривается как единая динамическая система, координаты состояния в которой и силы являются функционально связанными, а математическое моделирование сил раскрывает внутреннюю обратную связь в динамической системе резания. В зависимости от направления деформаций изменяется знак формируемой резанием обратной связи. Она может способствовать самовозбуждению системы, а также стабилизировать равновесие. Показано, что увеличение динамической податливости в направлении скорости резания, приводящее к возрастанию колебаний  $v_{X,3}$  в этом же направлении, вызывает изменение направления суммарной скорости (см. рис. 7, *a, b*). Если на определенном отрезке формируется скорость  $v_{X,3}$  в направлении  $V_3$ , то после ее интегрирования по времени возрастает площадь срезаемого слоя, что приводит к образованию положительной обратной связи. Однако необходимо учитывать, что скорость  $v_{X,3}$  в стационарном режиме не может иметь один знак. Если время обработки  $t_\Sigma$ , то очевидно условие  $\int_0^{t_\Sigma} v_{X,3}(\xi) d\xi \rightarrow 0$ . В рассматриваемом классе систем функция  $v_{X,3}$  является периодической. Поэтому временные участки самовозбуждения должны сменяться участками стабилизации. Исследования показали, что отмеченный фактор самовозбуждения вызывает дополнительные нелинейные взаимодействия, приводящие к образованию супернизкочастотных притягивающих множеств сложной временной структуры. Увеличение коэффициента возбуждения приводит к формированию предельных циклов, а при увеличении коэффициентов возбуждения — к формированию хаотической динамики. Она образуется, как правило, после каскадов удвоения периода колебаний.

Уменьшение податливости  $g_1$  и  $g_2$  приводит к формированию иных эффектов. Во-первых, деформации в этих направлениях уменьшают площадь срезаемого слоя, то есть образуют отрицательную обратную связь, которая потенциально может стабилизировать равновесие. Во-вторых, уменьшение суммарной жесткости в направлении  $X_2$  приводит к затягиванию переходного процесса установления стационарного состояния. При врезании инструмента в заготовку имеет место функциональная связанность сил и деформаций. Поэтому при увеличении  $g_2$  время переходного процесса возрастает, что ограничивает возможности управления упругими деформациями.

Изменение суммарной скорости деформационных смещений и вращения шпинделя изменяет временное окно, то есть  $T = (\Omega - v_{X,3}/\pi D)^{-1}$  в интегральных операторах систем (3), (4) и (6), которое во всех ранее выполненных исследованиях считалось постоянным [1–7, 10–13, 20–32, 44, 49]. Его изменение не только способствует потере устойчивости, но и во многом определяет топологию фазового пространства системы в установившемся состоянии, внося нерегулярность в  $T$ . Изменение направления суммарной скорости приводит к проявлению дополнительных сил  $\Phi$ ,  $\Phi^{(1)}$ . Они обеспечивают нелинейное демпфирование колебаний и способствуют образованию различных притягивающих множеств в установившемся состоянии, в том числе образованию хаотических аттракторов (см. рис. 7). Притягивающие множества деформаций рассматриваются в подвижной системе координат ТИЭС, которые задаются и обеспечиваются системами ЧПУ станка. Анализ взаимосвязи ТИЭС и деформаций базируется на методе разделения движений, основанном на асимптотических свойствах решений нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих малые параметры при старших производных [17, 18]. В [16] показано, что ТИЭС характеризуют «медленные» движения. Именно эти движения с высокой точностью обеспечиваются в современных станках с ЧПУ. «Быстрые» движения, рассматриваемые в вариациях относительно «медленных», в металлорежущих станках характеризуют упругие деформационные смещения. Они, наряду с ТИЭС, определяют геометрическую топологию формируемой резанием поверхности.

Если аналитически задана геометрическая топология, то из нее на основе использования различных статистических функционалов можно оценить большинство используемых в инженерной практике показателей точности линейных размеров, продольной и поперечной волнистости и в некоторых случаях шероховатости [17, 54]. Выполненные исследования позволяют связать геометрические оценки формируемой резанием детали с притягивающими множествами деформационных смещений. В частности, показано, что изменение диаметра заготовки определяется не только смещением точки равновесия системы, но и формируемыми притягивающими множествами, так как нелинейные функции (6) не обладают свойством центральной симметрии относительно точки равновесия. Поэтому наблюдаются эффекты динамического, зависящего от колебаний, смещения точки равновесия, влияющие на диаметр заготовки. При рассмотрении влияния колебаний на геометрическую топологию необходимо отметить, что далеко не все колебания оставляют след на обработанной поверхности. Колебания в направлениях  $X_2$  и  $X_3$  являются коллинеарными к формируемой резанием поверхности и непосредственно практически не влияют на ее формирование. Однако они могут стабилизировать деформации в ортогональном направлении. Более того, высокочастотные колебания в направлении скорости резания вызывают эффект вибрационной стабилизации равновесия в низкочастотной области [13, 45]. Вопросы отображений притягивающих множеств деформационных смещений в геометрической топологии формируемой резанием поверхности подробно изложены нами ранее в работе [16].

Формируемые притягивающие множества деформационных смещений влияют на мощность необратимых преобразований энергии в областях сопряжения задних граней инструмента и заготовки, что изменяет физические явления в контактной области, влияя на интенсивность изнашивания инструмента. По мере увеличения мощности необратимых преобразований имеет место смена превалирующих физических взаимодействий: процесс механического взаимодействия заменяется на молекулярно-адгезионное и, наконец, молекулярно-диффузионное. Например, в [52] показано, что минимальная интенсивность изнашивания наблюдается при переходе от адгезионного к диффузионному взаимодействию. Формируемые при резании притягивающие множества деформационных смещений, изменяя наряду с технологическими режимами превалирующие механизмы взаимодействий, влияют на оптимальные параметры технологических режимов, прежде всего на скорость резания. Другими словами, характеристики изнашивания становятся также зависящими от фазовой траектории мощности необратимых преобразований в областях сопряжения задних граней инструмента и заготовки, на которую влияют притягивающие множества. Они могут моделироваться интегральными операторами Вольтерры второго рода относительно фазовых траекторий мощности необратимых преобразований по произведенной работе [55, 56]. Поэтому в зависимости от притягивающих множеств требуется коррекция скорости резания, при которой интенсивность изнашивания минимальна.

В последнее десятилетие в мировых научных центрах получили развитие исследования по созданию математического и программного инструментария в направлении виртуального исследования процессов обработки на станках [57, 58]. Они включают в себя алгоритмы и программы для динамического анализа, в том числе исследования притягивающих множеств деформационных смещений и сил в областях сопряжения граней инструмента и заготовки. Использование этого инструментария направлено на отработку алгоритмов согласования программы ЧПУ и динамики резания. Методы коррекции программы ЧПУ включают следующие этапы. На первом этапе определяется траектория скорости резания, при которой вдоль траектории обеспечивается минимизация интенсивности изнашивания. На втором этапе вдоль траектории обеспечиваются деформационные смещения, при которых геометрическая топология формируемой резанием детали удовлетворяет техническим требованиям. При этом полагается обмен информацией и корректировка, как программы ЧПУ, так и алгоритмов управления и идентификации параметров динамической связи. Целью корректировки (согласования) является изготовление партии деталей при минимизации приведенных затрат и обеспечении требуемого качества деталей.

Приведенные в статье новые знания по динамике резания, законах формирования притягивающих множеств деформаций, их эволюции и бифуркациях являются составной частью решения этой общей задачи.

### Выводы

Математическим моделированием и экспериментально доказано, что вариации пространственной динамической податливости изменяют превалирующие источники самовозбуждения системы резания и могут изменять топологию притягивающих множеств деформаций инструмента относительно заготовки, влияющую на выходные характеристики процесса резания. Неожиданным является доказательство склонности системы к потере устойчивости за счет деформаций в направлении скорости резания, а также образование в этом случае супернизкочастотных притягивающих множеств деформаций сложной временной структуры. Доказано также повышение устойчивости равновесия, если частота вращения шпинделя превышает собственные частоты колебательных контуров, формируемых подсистемой инструмента. Полученные результаты открывают новое направление увеличения эффективности резания на основе конструктивного изменения упругих свойств подсистемы инструмента, его геометрии и согласования программы ЧПУ с динамическими свойствами системы.

### Список литературы

1. Кудинов В. А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
2. Hahn R. S. On the theory of regenerative chatter in precision-grinding operations // Transactions of American Society of Mechanical Engineers. 1954. Vol. 76. P. 593–597.
3. Tobias S. A., Fishwick W. Theory of regenerative machine tool chatter // The Engineer. 1958. Vol. 205, no. 7. P. 199–203.
4. Tobias S. A. Machine Tool Vibrations. London: Blackie, 1965. 351 p.
5. Tlustý J., Poláček M., Daněk O., Špaček L. Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Berlin: Verlag Technik, 1962. 431 s.
6. Tlustý J., Ismail F. Basic non-linearity in machining chatter // CIRP Annals. 1981. Vol. 30, no. 1. P. 299–304. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)60946-9.
7. Merritt H. E. Theory of self-excited machine-tool chatter: Contribution to machine-tool chatter research // ASME Journal of Engineering. 1965. Vol. 87, no. 4. P. 447–454. DOI: 10.1115/1.3670861.
8. Altintas Y., Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling // CIRP Annals. 1995. Vol. 44, no. 1. P. 357–362. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)62342-7.
9. Эльясберг М. Е. Автоколебания металлорежущих станков: Теория и практика. СПб.: Особое КБ станкостроения, 1993. 180 с.
10. Заковоротный В. Л., Фам Д. Т., Быкадор В. С. Самоорганизация и бифуркации динамической системы обработки металлов резанием // Известия вузов. ПНД. 2014. Т. 22, № 3. С. 26–39. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-3-26-39.
11. Заковоротный В. Л., Губанова А. А., Лукьянов А. Д. Использование синергетической концепции для изучения устойчивости формообразующих траекторий попутного фрезерования // СТИН. 2016. № 4. С. 32–40.
12. Заковоротный В. Л., Губанова А. А., Лукьянов А. Д. Условия параметрического самовозбуждения динамической системы фрезерования концевыми фрезами // СТИН. 2016. № 6. С. 10–16.
13. Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Анализ влияния биений шпиндельной группы токарного станка на траектории деформационных смещений инструмента // СТИН. 2018. № 2. С. 11–20.
14. Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Связь самоорганизации динамической системы

- резания с изнашиванием инструмента // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 1. С. 46–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-46-61.
15. *Вейц В. Л., Васильков Д. В.* Задачи динамики, моделирования и обеспечения качества при механической обработке маложестких заготовок // СТИН. 1999. № 6. С. 9–13.
  16. *Заковоротный В. Л., Флек М. Б.* Динамика процесса резания. Синергетический подход. Ростов-на-Дону: Терра, 2006. 876 с.
  17. *Понтрягин Л. С.* Избранные труды Л.С. Понтрягина. М.: МАКС Пресс, 2004. 551 с.
  18. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.
  19. *Lipski J., Litak G., Rusinek R., Szabelski K., Teter A., Warminski J., Zaleski K.* Surface quality of a work material influence on vibrations in a cutting process // Journal of Sound and Vibration. 2002. Vol. 252. P. 729–737. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3943.
  20. *Городецкий Ю. И.* Теория нелинейных колебаний и динамика станков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 69–88.
  21. *Balachandran B.* Nonlinear dynamics of milling processes // Phil. Trans. R. Soc. A. 2001. Vol. 359, no. 1781. P. 793–819. DOI: 10.1098/rsta.2000.0755.
  22. *Litak G., Rusinek R.* Dynamics of a stainless steel turning process by statistical and recurrence analyses // Meccanica. 2012. Vol. 47, no. 6. P. 1517–1526. DOI: 10.1007/s11012-011-9534-x.
  23. *Gousskov A. M., Voronov S. A., Paris H., Batzer S. A.* Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2002. Vol. 7, no. 4. P. 207–221. DOI: 10.1016/S1007-5704(02)00014-X.
  24. *Воронов С. А., Иванов И. И., Киселев И. А.* Исследование процесса фрезерования на основе редуцированной динамической модели инструмента // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 62–71.
  25. *Zakovorotnyi V. L., Lukyanov A. D., Gubanova A. A., Khristoforova V. V.* Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting // Journal of Sound and Vibration. 2016. Vol. 368. P. 174–190. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.01.020.
  26. *Litak G.* Chaotic vibrations in a regenerative cutting process // Chaos, Solitons & Fractals. 2002. Vol. 13, no. 7. P. 1531–1535. DOI: 10.1016/S0960-0779(01)00176-X.
  27. *Namachchivaya N. S., Beddini R.* Spindle speed variation for the suppression of regenerative chatter // Journal of Nonlinear Science. 2003. Vol. 13, no. 3. P. 265–288. DOI: 10.1007/s00332-003-0518-4.
  28. *Wahi P., Chatterjee A.* Self-interrupted regenerative metal cutting in turning // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2008. Vol. 43, no. 2. P. 111–123. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.10.010.
  29. *Warmiński J., Litak G., Lipski J., Wiercigroch M., Cartmell M.* Vibrations in regenerative cutting process synthesis of nonlinear dynamical systems // Solid Mechanics and its Applications. 2000. Vol. 73. P. 275–283.
  30. *Stépán G., Szalai R., Insperger T.* Nonlinear dynamics of high-speed milling subjected to regenerative effect // In: Radons G., Neugebauer R. (eds) Nonlinear Dynamics of Production Systems. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2004. P. 111–128. DOI: 10.1002/3527602585.ch7.
  31. *Stépán G., Insperger T., Szalai R.* Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005. Vol. 15, no. 9. P. 2783–2798. DOI: 10.1142/S0218127405013642.
  32. *Stépán G.* Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting // Phil. Trans. R. Soc. A. 2001. Vol. 359, no. 1781. P. 739–757. DOI: 10.1098/rsta.2000.0753.
  33. *Moradi H., Bakhtiari-Nejad F., Movahhedy M. R., Ahmadian M. T.* Nonlinear behaviour of the regenerative chatter in turning process with a worn tool: Forced oscillation and stability analysis // Mechanism and Machine Theory. 2010. Vol. 45, no. 8. P. 1050–1066. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.03.014.

34. Гуськов М., Динь Д. Т., Пановко Г., Гуськов А. Г. Моделирование и исследование устойчивости процесса многолезцового резания «по следу» // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 4. С. 19–27. DOI: 10.31857/S023571190000533-7.
35. Лапшин В. П. Влияние скорости резания металлов на регенерацию вибрационных колебаний инструмента в станках токарной группы // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2020. Т. 22, № 1. С. 65–79. DOI: 10.17212/1994-6309-2020-22.1-65-79.
36. Reith M. J., Bachrathy M., Stépán G. Improving the stability of multi-cutter turning with detuned dynamics // Machining Science and Technology. 2016. Vol. 20, no. 3. P. 440–459. DOI: 10.1080/10910344.2016.1191029.
37. Brissaud D., Gousskov A., Guibert N., Rech J. Influence of the ploughing effect on the dynamic behaviour of the self-vibratory drilling head // CIRP Annals. 2008. Vol. 57, no. 1. P. 385–388. DOI: 10.1016/j.cirp.2008.03.101.
38. Gousskov A., Gousskov M., Lorong P., Panovko G. Influence of flank face on the condition of chatter self-excitation during turning // International Journal of Machining and Machinability of Materials. 2017. Vol. 19, no. 1. P. 17–40. DOI: 10.1504/IJMMM.2017.081186.
39. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Influence of tool flank forces on complex dynamics of cutting process // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 9. P. 1450115. DOI: 10.1142/S0218127414501156.
40. Rusinek R., Wiercigroch M., Wahi P. Modelling of frictional chatter in metal cutting // International Journal of Mechanical Sciences. 2014. Vol. 89. P. 167–176. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.08.020.
41. Grabec I. Chaos generated by the cutting process // Phys. Lett. A. 1986. Vol. 117, no. 8. P. 384–386. DOI: 10.1016/0375-9601(86)90003-4.
42. Wiercigroch M., Budak E. Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting // Phil. Trans. R. Soc. A. 2001. Vol. 359, no. 1781. P. 663–693. DOI: 10.1098/rsta.2000.0750.
43. Wiercigroch M., Krivtsov A. M. Frictional chatter in orthogonal metal cutting // Phil. Trans. R. Soc. A. 2001. Vol. 359, no. 1781. P. 713–738. DOI: 10.1098/rsta.2000.0752.
44. Masoumi F., Pellicano F., Samani F. S., Barbieri M. Symmetry breaking and chaos-induced imbalance in planetary gears // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 80, no. 1–2. P. 561–582. DOI: 10.1007/s11071-014-1890-3.
45. Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Влияние флуктуаций на устойчивость формообразующих траекторий при точении // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2017. № 2(194). С. 52–61. DOI: 10.17213/0321-2653-2017-2-52-61.
46. Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Влияние вибраций на траектории формообразующих движений инструмента при точении // Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты). 2019. Т. 21, № 3. С. 42–58. DOI: 10.17212/1994-6309-2019-21.3-42-58.
47. Заковоротный В. Л., Гвинджилия В. Е. Синергетическая концепция при программном управлении процессами обработки на металлорежущих станках // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2021. № 5(734). С. 24–36. DOI: 10.18698/0536-1044-2021-5-24-36.
48. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
49. Заковоротный В. Л., Фам Т. Х. Параметрическое самовозбуждение динамической системы резания // Вестник Донского государственного технического университета. 2013. Т. 13, № 5–6 (74). С. 97–103. DOI: 10.12737/1286.
50. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. 768 с.
51. Заковоротный В. Л., Фам Д. Т., Нгуен С. Т. Моделирование деформационных смещений инструмента относительно заготовки при точении // Вестник Донского государственного технического университета. 2010. Т. 10, № 7(50). С. 1005–1015.

52. Рыжкин А. А. Синергетика изнашивания инструментальных материалов при лезвийной обработке. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2019. 289 с.
53. Пуш А. В. Шпиндельные узлы: Качество и надежность. М.: Машиностроение, 1992. 288 с.
54. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей. Теоретико-вероятностный подход. М.: Наука, 1975. 344 с.
55. Заковоротный В. Л., Флек М. Б., Лукьянов А. Д., Волошин Д. А. Моделирование процесса изнашивания инструмента с помощью интегральных операторов // СТИН. 2004. № 3. С. 9–14.
56. Zakovorotny V.L., Gvindjiliya V.E. Self-organization and evolution in dynamic friction systems // Journal of Vibroengineering. 2021. Vol. 23, no. 6. P. 1418–1432. DOI: 10.21595/jve.2021.22033.
57. Altintas Y., Kersting P., Biermann D., Budak E., Denkena B., Lazoglu I. Virtual process systems for part machining operations // CIRP Annals. 2014. Vol. 63, no. 2. P. 585–605. DOI: 10.1016/j.cirp.2014.05.007.
58. Kilic Z. M., Altintas Y. Generalized mechanics and dynamics of metal cutting operations for unified simulations // International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2016. Vol. 104. P. 1–13. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2016.01.006.

## References

1. Kudinov VA. Dynamics of Machines. Moscow: Mashinostroenie; 1967. 359 p. (in Russian).
2. Hahn RS. On the theory of regenerative chatter in precision-grinding operations. Transactions of American Society of Mechanical Engineers. 1954;76:593–597.
3. Tobias SA, Fishwick W. Theory of regenerative machine tool chatter. The Engineer. 1958;205(7): 199–203.
4. Tobias SA. Machine Tool Vibrations. London: Blackie; 1965. 351 p.
5. Tlustý J, Poláček M, Daněk O, Špaček L. Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Berlin: Verlag Technik; 1962. 431 s. (in German).
6. Tlustý J, Ismail F. Basic non-linearity in machining chatter. CIRP Annals. 1981;30(1):299–304. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)60946-9.
7. Merritt HE. Theory of self-excited machine-tool chatter: Contribution to machine-tool chatter research. ASME Journal of Engineering. 1965;87(4):447–454. DOI: 10.1115/1.3670861.
8. Altintas Y, Budak E. Analytical prediction of stability lobes in milling. CIRP Annals. 1995;44(1): 357–362. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)62342-7.
9. Eliasberg ME. Self-Oscillation of Machine Tools: Theory and Practice. Saint Petersburg: Osoboe KB Stankostroeniya; 1993. 180 p. (in Russian).
10. Zakovorotny VL, Fam DT, Bykador VS. Self-organization and bifurcations of dynamical metal cutting system. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2014;22(3):26–39 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-3-26-39.
11. Zakovorotny VL, Gubanov AA, Lukyanov AD. Stability of shaping trajectories in milling: Synergetic concepts. Russian Engineering Research. 2016;36(11):956–964. DOI: 10.3103/S1068798X16110216.
12. Zakovorotnyi VL, Gubanov AA, Luk'yanov AD. Parametric self-excitation of a dynamic end-milling machine. Russian Engineering Research. 2016;36(12):1033–1039. DOI: 10.3103/S1068798X16120194.
13. Zakovorotny VL, Gvindzhiliya VE. Influence of spindle wobble in a lathe on the tool's deformational-displacement trajectory. Russian Engineering Research. 2018;38(8):623–631. DOI: 10.3103/S1068798X1808018X.
14. Zakovorotny VL, Gvindjiliya VE. Link between the self-organization of dynamic cutting system and tool wear. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(1):46–61 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-1-46-61.

15. Veits VL, Vasilkov DV. Dynamics, modeling and quality assurance tasks in the machining of low-rigidity workpieces. Russian Engineering Research. 1999;(6):9–13 (in Russian).
16. Zakovorotny VL, Fleck MB. The Dynamics of the Cutting Process. Synergetic Approach. Rostov-on-Don: Terra; 2006. 876 p. (in Russian).
17. Pontryagin LS. Selected Works of L.S. Pontryagin. Moscow: MAKS Press; 2004. 551 p. (in Russian).
18. Tikhonov AN. Systems of differential equations with small parameters in senior derivatives. Mathematics of the USSR — Sbornik. 1952;31(3):575–586 (in Russian).
19. Lipski J, Litak G, Rusinek R, Szabelski K, Teter A, Warminski J, Zaleski K. Surface quality of a work material influence on vibrations in a cutting process. Journal of Sound and Vibration. 2002;252:729–737. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3943.
20. Gorodetsky YI. Theory of nonlinear oscillations and machine tool dynamics. Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control. 2001;(2): 69–88 (in Russian).
21. Balachandran B. Nonlinear dynamics of milling processes. Phil. Trans. R. Soc. A. 2001;359(1781): 793–819. DOI: 10.1098/rsta.2000.0755.
22. Litak G, Rusinek R. Dynamics of a stainless steel turning process by statistical and recurrence analyses. Meccanica. 2012;47(6):1517–1526. DOI: 10.1007/s11012-011-9534-x.
23. Gousskov AM, Voronov SA, Paris H, Batzer SA. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2002;7(4):207–221. DOI: 10.1016/S1007-5704(02)00014-X.
24. Voronov SA, Ivanov II, Kiselev IA. Investigation of the milling process based on a reduced dynamic model of cutting tool. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015;44(1): 70–78. DOI: 10.3103/S1052618815010100.
25. Zakovorotnyi VL, Lukyanov AD, Gubanov AA, Khristoforova VV. Bifurcation of stationary manifolds formed in the neighborhood of the equilibrium in a dynamic system of cutting. Journal of Sound and Vibration. 2016;368:174–190. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.01.020.
26. Litak G. Chaotic vibrations in a regenerative cutting process. Chaos, Solitons & Fractals. 2002;13(7):1531–1535. DOI: 10.1016/S0960-0779(01)00176-X.
27. Namachchivaya NS, Beddini R. Spindle speed variation for the suppression of regenerative chatter. Journal of Nonlinear Science. 2003;13(3):265–288. DOI: 10.1007/s00332-003-0518-4.
28. Wahi P, Chatterjee A. Self-interrupted regenerative metal cutting in turning. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2008;43(2):111–123. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.10.010.
29. Warmiński J, Litak G, Lipski J, Wiercigroch M, Cartmell M. Vibrations in regenerative cutting process synthesis of nonlinear dynamical systems. Solid Mechanics and its Applications. 2000;73: 275–283.
30. Stépán G, Szalai R, Insperger T. Nonlinear dynamics of high-speed milling subjected to regenerative effect. In: Radons G, Neugebauer R, editors. Nonlinear Dynamics of Production Systems. Hoboken, New Jersey: Wiley; 2004. P. 111–128. DOI: 10.1002/3527602585.ch7.
31. Stépán G, Insperger T, Szalai R. Delay, parametric excitation, and the nonlinear dynamics of cutting processes. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2005;15(9):2783–2798. DOI: 10.1142/S0218127405013642.
32. Stépán G. Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting. Phil. Trans. R. Soc. A. 2001;359(1781):739–757. DOI: 10.1098/rsta.2000.0753.
33. Moradi H, Bakhtiari-Nejad F, Movahhedy MR, Ahmadian MT. Nonlinear behaviour of the regenerative chatter in turning process with a worn tool: Forced oscillation and stability analysis. Mechanism and Machine Theory. 2010;45(8):1050–1066. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.03.014.
34. Gousskov AM, Gousskov MA, Tung DD, Panovko GY. Modeling and investigation of the stability

- of a multicutter turning process by a trace. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018;47(4):317–323. DOI: 10.3103/S1052618818040052.
35. Lapshin VP. The influence of the cutting speed of metals on the regeneration of the vibratory oscillations of the tool in machines of the turning group. *Metal Working and Material Science*. 2020;22(1):65–79 (in Russian). DOI: 10.17212/1994-6309-2020-22.1-65-79.
  36. Reith MJ, Bachrathy M, Stépán G. Improving the stability of multi-cutter turning with detuned dynamics. *Machining Science and Technology*. 2016;20(3):440–459. DOI: 10.1080/10910344.2016.1191029.
  37. Brissaud D, Gousskov A, Guibert N, Rech J. Influence of the ploughing effect on the dynamic behaviour of the self-vibratory drilling head. *CIRP Annals*. 2008;57(1):385–388. DOI: 10.1016/j.cirp.2008.03.101.
  38. Gousskov A, Gousskov M, Lorong P, Panovko G. Influence of flank face on the condition of chatter self-excitation during turning. *International Journal of Machining and Machinability of Materials*. 2017;19(1):17–40. DOI: 10.1504/IJMMM.2017.081186.
  39. Rusinek R, Wiercigroch M, Wahi P. Influence of tool flank forces on complex dynamics of cutting process. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014;24(9):1450115. DOI: 10.1142/S0218127414501156.
  40. Rusinek R, Wiercigroch M, Wahi P. Modelling of frictional chatter in metal cutting. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014;89:167–176. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.08.020.
  41. Grabec I. Chaos generated by the cutting process. *Phys. Lett. A*. 1986;117(8):384–386. DOI: 10.1016/0375-9601(86)90003-4.
  42. Wiercigroch M, Budak E. Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2001;359(1781):663–693. DOI: 10.1098/rsta.2000.0750.
  43. Wiercigroch M, Krivtsov AM. Frictional chatter in orthogonal metal cutting. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2001;359(1781):713–738. DOI: 10.1098/rsta.2000.0752.
  44. Masoumi F, Pellicano F, Samani FS, Barbieri M. Symmetry breaking and chaos-induced imbalance in planetary gears. *Nonlinear Dynamics*. 2015;80(1–2):561–582. DOI: 10.1007/s11071-014-1890-3.
  45. Zakovorotny VL, Gvindjiliya VE. The influence of fluctuation on the shape-generating trajectories stability with a turning. *University News. North-Caucasian Region. Technical Sciences Series*. 2017;(2(194)):52–61 (in Russian). DOI: 10.17213/0321-2653-2017-2-52-61.
  46. Zakovorotny VL, Gvindjiliya VE. The influence of the vibration on the tool shape-generating trajectories when turning. *Metal Working and Material Science*. 2019;21(3):42–58 (in Russian). DOI: 10.17212/1994-6309-2019-21.3-42-58.
  47. Zakovorotny VL, Gvindzhiliya VE. Synergetic concept of software control of machining processes on metal-cutting machines. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2021;(5(734)):24–36 (in Russian). DOI: 10.18698/0536-1044-2021-5-24-36.
  48. Lyapunov AM. *The General Problem of the Stability of Motion*. Moscow: Gostekhizdat; 1950. 472 p. (in Russian).
  49. Zakovorotniy VL, Pham TH. Parametric self-excitation of cutting dynamic system. *Advanced Engineering Research*. 2013;13(5–6):97–103 (in Russian). DOI: 10.12737/1286.
  50. Besekersky VA, Popov EP. *Theory of Automatic Control Systems*. Moscow: Nauka; 1975. 768 p. (in Russian).
  51. Zakovorotniy V, Pham D, Nguyen X. Modeling of tool deformation offsetting to workpiece in turning. *Advanced Engineering Research*. 2010;10(7):1005–1015 (in Russian).
  52. Ryzhkin AA. *Synergetics of Wear of Tool Materials During Blade Processing*. Rostov-on-Don: Don State Technical University Publishing; 2019. 289 p. (in Russian).
  53. Push AV. *Spindle Units: Quality and Reliability*. Moscow: Mashinostroenie; 1992. 288 p. (in Russian).

54. Khusu AP, Vitenberg YR, Palmov VA. Roughness of Surfaces. Probabilistic Approach. Moscow: Nauka; 1975. 344 p. (in Russian).
55. Zakovorotny VL, Flek MB, Lukyanov AD, Voloshin DA. Tool wear modeling using integral operators. Russian Engineering Research. 2004;(3):9–14 (in Russian).
56. Zakovorotny VL, Gvindjiliya VE. Self-organization and evolution in dynamic friction systems. Journal of Vibroengineering. 2021;23(6):1418–1432. DOI: 10.21595/jve.2021.22033.
57. Altintas Y, Kersting P, Biermann D, Budak E, Denkena B, Lazoglu I. Virtual process systems for part machining operations. CIRP Annals. 2014;63(2):585–605. DOI: 10.1016/j.cirp.2014.05.007.
58. Kilic ZM, Altintas Y. Generalized mechanics and dynamics of metal cutting operations for unified simulations. International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2016;104:1–13. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2016.01.006.

*Заковоротный Вилор Лаврентьевич* — родился в Красноярске (1940). Окончил (1962) Ростовский институт сельскохозяйственного машиностроения (ныне Донской государственный технический университет, ДГТУ). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (1966) в Новочеркасском политехническом институте (ныне Южно-Российский государственный политехнический университет) и доктора технических наук (1983) в Киевском политехническом институте. Основал научную школу, исследующую синергетические принципы управления и диагностики процессов резания и трения. Более 40 лет работает в области исследования устойчивости и эволюции динамических нелинейных систем, взаимодействующих со средами. С 1981 по 2015 год являлся заведующим кафедрой «Автоматизация производственных процессов» ДГТУ, а с 1991 года по 2008 год был проректором по научной работе ДГТУ. Автор более чем 400 научных статей как в российских, так и зарубежных научных журналах, а также ряда авторских свидетельств и патентов. Опубликовал 10 научных монографий. Под его руководством защищено 7 докторских и 43 кандидатских диссертаций. Является лауреатом Государственной премии Украинской ССР, заслуженным деятелем науки РФ. Входит в редакционную коллегию трех журналов, включенных в перечень ВАК РФ. Член трех диссертационных советов.



Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
 Донской государственный технический университет  
 E-mail: [vzakovorotny@dstu.edu.ru](mailto:vzakovorotny@dstu.edu.ru)  
 ORCID: 0000-0003-2187-9897  
 AuthorID: 160272

*Гвинджилия Валерия Енвериевна* — родилась в Ростове-на-Дону (1994). Окончила магистратуру Донского государственного технического университета (2018, ДГТУ) по специальности «Управление в технических системах». Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук (2021, ДГТУ). В настоящий момент является старшим преподавателем на кафедре «Автоматизация производственных процессов». Область научных интересов — фундаментальные основы инженерных наук, нелинейная динамика процессов обработки на металлорежущих станках, проблемы самоорганизации и эволюции. Опубликовала 20 научных статей в российских и зарубежных научных журналах.



Россия, 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1  
 Донской государственный технический университет  
 E-mail: [sinedden@yandex.ru](mailto:sinedden@yandex.ru)  
 ORCID: 0000-0003-1066-4604  
 AuthorID: 1032574



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья  
УДК 530.182  
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-57-75

## Влияние «сенсорной предыстории» на обработку головным мозгом неоднозначных визуальных стимулов

А. К. Куц<sup>1,2</sup>, В. А. Максименко<sup>1,2,3</sup>, А. Е. Храмов<sup>1,2,3</sup>✉

<sup>1</sup>Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия

<sup>2</sup>Университет Иннополис, Республика Татарстан, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
имени Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

E-mail: kuc1995@mail.ru, maximenkov1@gmail.com, ✉hramovae@gmail.com

Поступила в редакцию 27.06.2021, принята к публикации 07.10.2021, опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель исследования — изучить влияние особенностей сенсорной информации, предшествующей целевому визуальному стимулу, на его обработку нейронной сетью коры головного мозга. В качестве визуальных стимулов используются неоднозначные изображения — кубы Неккера с высокой и низкой степенью неоднозначности. **Методы.** Используются методы частотно-временного анализа исходных сигналов электрической активности головного мозга на основе вейвлет-преобразования. Для сравнения поведенческих характеристик визуального восприятия используется многофакторный дисперсионный анализ. Спектральная мощность сигналов активности мозга в различных условиях сравнивается при помощи статистического теста с кластерной коррекцией множественных сравнений. **Результаты.** Показано, что, когда неоднозначные стимулы следуют за однозначными стимулами, активность нейронов в сенсорных областях ослабевает на ранней стадии обработки, но усиливается на поздних стадиях. Это подтверждает иерархическую организацию обработки сенсорной информации, где низкие уровни обрабатывают детали стимула, а высокие уровни представляют его интерпретацию. Анализ также подтвердил, что обработка неоднозначных и однозначных стимулов совпадает на низких уровнях из-за их схожей морфологии. Поэтому мозг может использовать сенсорный шаблон однозначного стимула на низких уровнях, чтобы снизить затраты на обработку деталей неоднозначного стимула. Когда однозначный стимул следует за неоднозначным стимулом, наблюдается усиление нейронной активности в лобной коре. Это отражает активацию нисходящих процессов, обнаруживающих несоответствие между текущим однозначным стимулом и шаблоном, сформировавшимся на основе предшествующего неоднозначного стимула. **Заключение.** Полученные результаты расширяют имеющиеся знания об особенностях активности мозга, связанной с обработкой зрительной информации в условиях неоднозначности сенсорных данных.

**Ключевые слова:** неоднозначные стимулы, шаблон стимула, иерархия обработки, электроэнцефалография, теория прогностического кодирования.

**Благодарности.** Александр Храмов поддержан грантом Президента РФ (НШ-2594.2020.2) в формулировании научной гипотезы исследования. Владимир Максименко поддержан грантом РФФИ (19-32-60042) в разработке экспериментальной парадигмы и анализе поведенческих данных. Александр Куц поддержан грантом Президента РФ (МК-1760.2020.2) в анализе сигналов ЭЭГ.

**Для цитирования:** Куц А. К., Максименко В. А., Храмов А. Е. Влияние «сенсорной предыстории» на обработку головным мозгом неоднозначных визуальных стимулов // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 57–75.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-57-75

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Influence of «sensory prehistory» on the ambiguous stimuli processing in the human brain

A. K. Kuc<sup>1,2</sup>, V. A. Maksimenko<sup>1,2,3</sup>, A. E. Hramov<sup>1,2,3</sup>✉

<sup>1</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

<sup>2</sup>Innopolis University, Republic of Tatarstan, Russia

<sup>3</sup>Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: kuc1995@mail.ru, maximenkovl@gmail.com, ✉hramovae@gmail.com

Received 27.06.2021, accepted 07.10.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** Purpose of this work is to study the effect of previous sensory information on the brain's processing of current visual stimuli. Bistable images (Necker cubes) with a high degree of ambiguity (HA) and a low degree of ambiguity (LA) were used as visual stimuli. *Methods.* In this paper, we used wavelets to identify features of the brain activity signals. A multivariate analysis of variance was used to compare behavioral characteristics. Spectral power and event-related spectral perturbations were compared via a cluster-based permutation test using the FieldTrip package for Matlab. *Results.* We found that when the HA stimuli followed the LA stimuli, the activity of neurons in the sensory areas decreased in the early processing stage but increased in the later stages. This result confirmed the hierarchical organization of processing, where the low levels processed the details of the stimulus, and the high levels represented its interpretation. We supposed that processing of HA and LA stimuli was similar at low levels due to their similar morphology. Therefore, the brain might use the LA stimulus template at low levels to reduce the demands when processing the details of the HA stimulus. When the LA stimulus followed the HA stimulus, a weakened response in the sensory regions accompanied a high response in the frontal cortex. It reflected activation of the top-down cognitive functions, detecting a mismatch between the LA stimulus and the HA stimulus template. *Conclusion.* These results expanded the existing knowledge about the sensory processing mechanisms.

**Keywords:** ambiguous stimuli, stimulus template, processing hierarchy, EEG, predictive coding theory.

**Acknowledgements.** Alexander Hramov was supported by the Council for Grants of the President of the Russian Federation (NSh-2594.2020.2) in formulating the hypothesis. Vladimir Maksimenko received support from the Russian Foundation for Basic Research (19-32-60042) in the development of an experimental paradigm and analysis of behavioral data. Alexander Kuc was supported by the Council for Grants of the President of the Russian Federation (MK-1760.2020.2) in the EEG data analysis.

**For citation:** Kuc AK, Maksimenko VA, Hramov AE. Influence of «sensory prehistory» on the ambiguous stimuli processing in the human brain. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(1):57–75.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-57-75

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Мозг использует сенсорную информацию для создания представления о внешней среде. Опубликованные результаты свидетельствуют о том, что обработка мозгом сенсорной информации организована иерархически: на низких уровнях осуществляется обработка отдельных деталей, в то время как высокие уровни интерпретируют полученную информацию как целое. Существует мнение, что мозг использует априорные знания (прогнозы) наряду с сенсорными данными для создания точного представления о внешней среде [1, 2].

Широко распространена тенденция рассматривать прогнозы как процессы высокого уровня, действующие сверху вниз на механизмы более низкого уровня иерархии. Например, большая часть литературы предполагает, что прогнозы приводят к формированию шаблонов стимулов [3–5]. Мозг сопоставляет эти шаблоны с внешней сенсорной информацией [6]: шаблоны передаются

с высоких уровней на низкие, в то время как сигналы, идущие в противоположном направлении — от низких к высоким уровням иерархии, кодируют ошибки такого сопоставления [7]. Таким образом, прогностическая передача сигналов отражает нисходящие процессы, а передача сигналов о прогностических ошибках представляет собой восходящую обработку. Эти процессы взаимозависимы и всегда взаимодействуют между собой [1]. Таким образом, на сегодняшний день существует достаточно доказательств того, что прогнозы формируются на разных уровнях обработки и взаимодействуют друг с другом через нисходящие и восходящие потоки информации в мозге [2, 8]. В то же время вопрос о точном механизме, лежащем в основе сравнения прогнозов и сенсорных данных, остается открытым.

В данной работе мы рассматриваем обработку многократно предъявляемых неоднозначных визуальных стимулов (кубов Неккера) с низкой степенью неоднозначности (low ambiguity, LA) и высокой степенью неоднозначности (high ambiguity, HA). Во время поступления сообщений от испытуемого об интерпретации каждого визуального стимула регистрировались ЭЭГ-сигналы и времена интерпретации куба (так называемое время реакции, reaction time, RT). Из литературы известно, что повторное воздействие идентичного или схожего сенсорного стимула вызывает адаптацию нейронного ансамбля. Этот эффект подразумевает снижение нейронного отклика на повторяющиеся стимулы [9] и относится как к низкоуровневым [10, 11], так и к высокоуровневым [12, 13] процессам.

Согласно нашим предыдущим работам [14–16], интерпретация стимулов с высокой степенью неоднозначности занимает больше времени, чем интерпретация стимулов с низкой степенью неоднозначности. Кубы LA и HA имеют почти одинаковую морфологию, поэтому можно предположить, что они имеют аналогичный процесс обработки на низких уровнях. Мы также предполагаем, что интерпретация стимула HA задействует процессы на более высоких уровнях; следовательно, на этих уровнях его обработка задействует большую нейронную популяцию, увеличивая общее время обработки. Наконец, мы предполагаем, что шаблон стимула HA появляется на иерархически более высоких уровнях обработки, чем шаблон LA. В результате шаблоны HA и LA могут по-разному влиять на обработку текущих стимулов.

## 1. Методы

**1.1. Испытуемые.** В экспериментах приняли участие двадцать здоровых испытуемых (16 мужчин и 4 женщины) в возрасте от 20 до 36 лет с нормальной или скорректированной до нормы остротой зрения. Все они заранее давали письменное информированное согласие об участии в эксперименте. Все участники были знакомы с экспериментальным заданием и не участвовали в подобных экспериментах в течение последних 6 месяцев. Экспериментальные исследования проводились в соответствии с Хельсинкской декларацией и одобрены комитетом по этике исследований.

**1.2. Экспериментальная процедура.** В качестве неоднозначного визуального стимула использовался куб Неккера [17, 18]. Испытуемый без каких-либо нарушений зрительного восприятия интерпретирует 2D изображение куба Неккера как 3D-объект из-за специфического положения ребер куба. В зависимости от контраста внутренних ребер куб Неккера может быть воспринят как ориентированный либо влево, либо вправо (рис. 1, *a*). Контраст трех средних линий, центрированных в левом углу, использовался в качестве контрольного параметра  $a \in [0, 1]$  ( $a$  — уровень неоднозначности). Значения  $a = 1$  и  $a = 0$  соответствуют 0 (черным) и 255 (белым) пикселям яркости внутренних линий с использованием 8-битной палитры серой шкалы. Поэтому управляющий параметр можно определить как  $a = g/255$ , где  $g$  — яркость внутренних линий. В нашем эксперименте мы используем изображения куба Неккера с 8 различными уровнями неоднозначности

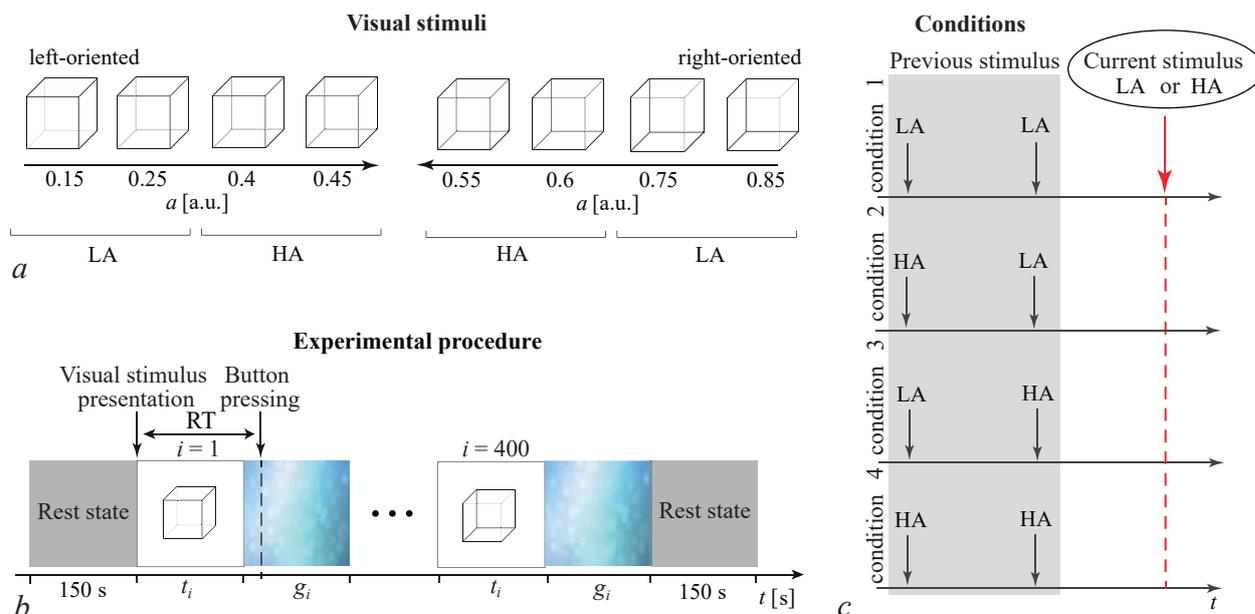


Рис. 1. *a* – Набор визуальных стимулов (кубов Неккера с различной степенью неоднозначности); *b* – схематическая иллюстрация экспериментальной процедуры, отражающая демонстрацию 400 кубов Неккера, чередующихся с демонстрацией абстрактных изображений. RT – время реакции испытуемого; *c* – экспериментальные условия

Fig. 1. *a* – Set of visual stimuli (Necker cubes with varying degrees of ambiguity); *b* – schematic illustration of an experimental procedure that reflects a demonstration of 400 Necker cubes alternating with a demonstration of abstract images. RT – subject's reaction time; *c* – experimental conditions

(см. рис. 1, *a*). Половина из них ( $a \in \{0.15, 0.25, 0.4, 0.45\}$ ) считаются левоориентированными, другая половина ( $a \in \{0.55, 0.6, 0.75, 0.85\}$ ) правоориентированными. В то время как для  $a \approx 0$  и  $a \approx 1$  (изображения с низким уровнем неоднозначности (LA)) кубы легко интерпретируются как ориентированные влево и вправо, для  $a \approx 0.5$  идентификация ориентации куба является более сложной задачей, поскольку мы имеем дело с изображениями с высоким уровнем неоднозначности (HA).

Каждое изображение куба Неккера было выведено в центр экрана компьютера с использованием черных и серых линий на белом фоне. Изображения кубиков Неккера (142-миллиметровые) демонстрировались на 24-дюймовом ЖК-мониторе BenQ с пространственным разрешением  $1920 \times 1080$  пикселей и частотой обновления 60 Гц. Испытуемые располагались на расстоянии 70...80 см от монитора с углом обзора примерно 0.25 рад.

Весь эксперимент длился около 40 минут для каждого участника, включая короткие записи ЭЭГ в состоянии покоя (порядка 150 с) до и после основной части эксперимента. Во время экспериментальных сеансов кубики с заранее заданными значениями  $a$  (выбранными из набора на рис. 1, *a*) были случайным образом продемонстрированы 400 раз, каждый куб с определённой неоднозначностью был представлен около 50 раз. Схема экспериментального сеанса показана на рис. 1, *b*. Каждый  $i$ -й стимул был представлен в течение временного интервала  $\tau_i$ , а следующий  $(i+1)$ -й стимул демонстрировался после временного интервала  $\gamma_i$ . Продолжительность демонстрации стимула варьировалась в диапазоне  $\tau \in [1, 1, 5]$  с.

Для каждого стимула мы оценивали поведенческую реакцию, измеряя время RT, которое соответствовало времени, прошедшему от предъявления стимула до нажатия кнопки (см. рис. 1, *b*).

**1.3. Запись и обработка сигналов ЭЭГ.** ЭЭГ-сигналы регистрировались с использованием метода монополярной регистрации и классической расширенной схемы размещения электродов 10–10. Мы записали 31 сигнал с двумя референтами, A1 и A2, расположенными на мочках ушей,

и заземляющим электродом N, расположенным чуть выше лба. Сигналы были получены с помощью чашечковых адгезивных электродов Ag/AgCl, помещённых на пасту «Tien-20» (Weaver and Company, Колорадо, США). Непосредственно перед началом экспериментов мы провели все необходимые процедуры для повышения проводимости кожи и снижения ее сопротивления с помощью абразивного геля «NuPrep» (Weaver and Company, Колорадо, США). После установки электродов сопротивление контролировалось на протяжении всего эксперимента. Обычно значения сопротивления изменялись в интервале 2...5 кОм. Для усиления и аналого-цифрового преобразования сигналов ЭЭГ использовался электроэнцефалограф «Энцефалан-ЭЭГ-19/26» (компания «Медиком МТД», Таганрог, Российская Федерация) с несколькими каналами ЭЭГ и двухкнопочным устройством ввода (клавиатурой). Необработанные ЭЭГ-сигналы фильтровались полосовым фильтром с конечной импульсной характеристикой с точками отсечки 1 Гц и 100 Гц и режекторным фильтром на 50 Гц с помощью встроенного аппаратно-программного комплекса. Удаление артефактов моргания глаз и сердцебиения проводилось методом анализа независимых компонент (ICA) с использованием программного обеспечения EEGLAB [19]. После процедуры предварительной обработки ЭЭГ мы исключили некоторые испытания из-за высокоамплитудных артефактов и рассмотрели 320 испытаний из первоначальных 400.

Записанные ЭЭГ-сигналы были сегментированы на 4-секундные записи, где каждая запись была связана с одной демонстрацией куба Неккера, включая 2-секундный интервал до и 2-секундный интервал после момента демонстрации куба Неккера. Мы рассчитали спектральную мощность для каждого испытания в диапазоне частот 4...40 Гц с использованием вейвлет-преобразования с вейвлетом Морле [20]. Число циклов ( $n$ ) было определено как  $n = f$ , где  $f$  — частота сигнала [21]. Вейвлет-анализ проводился в среде Matlab с использованием инструментария Fieldtrip. Интервалы 0.5 с с каждой стороны записи были зарезервированы для расчёта мощности вейвлета. В результате мы рассмотрели мощность вейвлета на интервале 3 с, включая престаимпульное состояние (от  $-1.5$  с до 0) и связанную со стимулом активность (от 0 до 1.5 с). Для полученной вейвлет-мощности мы рассмотрели спектральные возмущения ERSP (Event-Related Spectral Power), связанные с событием (предъявление визуального стимула), используя нормировку [активность, связанная со стимулом — престаимпульное состояние]/престаимпульное состояние.

**1.4. Экспериментальные условия.** Два типа стимулов LA и HA были сгруппированы и разделены по условиям в соответствии с неоднозначностью предыдущего стимула. Была введена в рассмотрение не только неоднозначность предыдущего стимула (первый предыдущий), но и неоднозначность стимула, представленного двумя кубами ранее (второй предыдущий). В результате для кубов LA и HA мы рассмотрели четыре условия (см. рис. 1, с):

- условие 1 — оба предыдущих кубика имеют низкий уровень неоднозначности (LA–LA);
- условие 2 — первый предыдущий куб имеет низкий уровень неоднозначности, а второй предыдущий куб имеет высокий уровень неоднозначности (HA–LA);
- условие 3 — первый предыдущий куб имеет высокий уровень неоднозначности, а второй предыдущий куб имеет низкий уровень неоднозначности (LA–HA);
- условие 4 — оба предыдущих кубика имеют высокий уровень неоднозначности (HA–HA).

Чтобы сохранить количество ЭЭГ-записей постоянным в зависимости от условий и испытываемых, мы выбрали 16 событий для каждого условия.

**1.5. Статистический анализ.** Статистический анализ на групповом уровне проводился для значений медианы времени реакции, медианы времени предъявления визуального стимула и соотношения между левосторонними и правосторонними стимулами, а также соотношения между стимулами LA и HA. Основные эффекты оценивались с помощью многофакторного

дисперсионного анализа с коррекцией Гринхауса–Гейсера. Мы проводили *post hoc* анализ либо с помощью *t*-критерия Стьюдента для зависимых выборок, либо с помощью критерия Уилкоксона, в зависимости от нормальности выборок. Нормальность была проверена с помощью теста Шапиро–Уилка. Мы провели статистический анализ с использованием программного обеспечения SPSS. Используемые тесты, а также их параметры указаны в разделе «Результаты».

Спектральная мощность и спектральные возмущения сравнивались для различных условий эксперимента во временной, пространственной и частотной областях с помощью *t*-теста для зависимых выборок. Коррекция множественных сравнений была основана на кластерном пермутационном тесте и методе рандомизации Монте-Карло. Критический  $\alpha$ -уровень для парного сравнения был установлен равным 0.05. Критический  $\alpha$ -уровень для кластерного теста был установлен равным 0.025. Минимальное число элементов в кластере было установлено равным 2, а число перестановок было равно 2000. Анализ осуществлялся с помощью пакета Fieldtrip для Matlab.

## 2. Результаты

**2.1. Время реакции.** Мы проанализировали влияние неоднозначности предыдущего стимула отдельно для текущих стимулов LA и HA. Мы сравнили RT испытуемых в четырех условиях (подробнее см. Методы и рис. 1, *c*). Рис. 2 демонстрирует, как RT отличается в этих условиях для стимулов HA и LA. Многофакторный дисперсионный анализ выявил значимый эффект экспериментального условия для обоих стимулов. Для HA:  $F(3, 57) = 10.787, p < 0.001$ ; для LA:  $F(3, 57) = 6.067, p = 0.001$ .

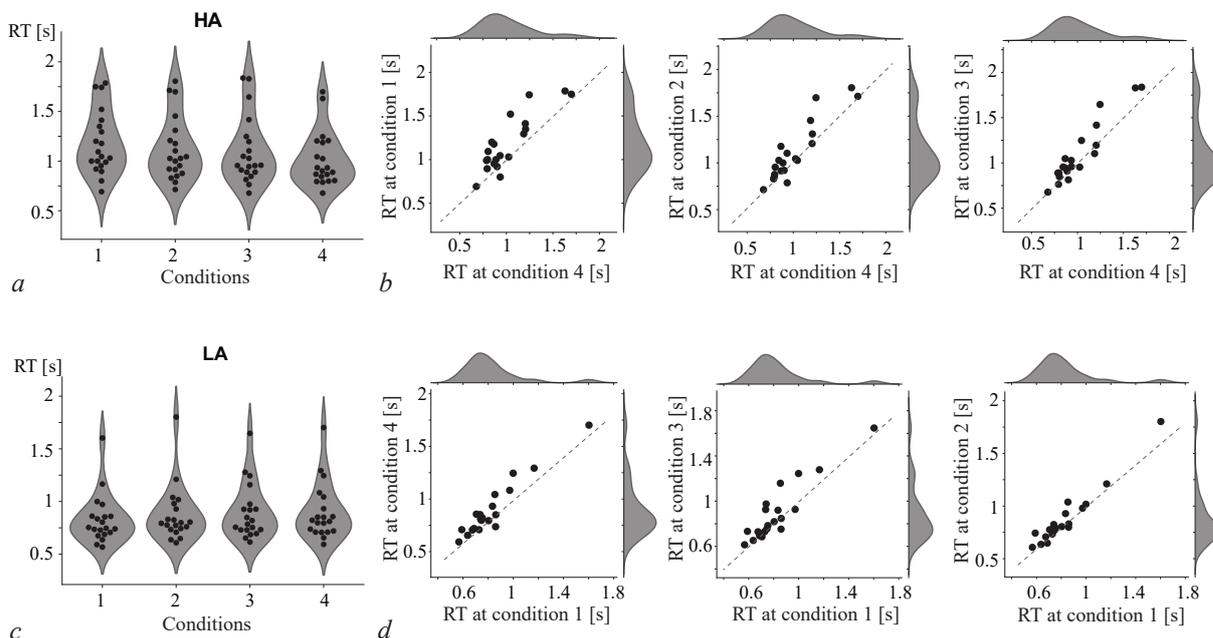


Рис. 2. *a* — Время реакции RT в четырех условиях для текущего стимула HA; *b* — парные различия между RT в различных условиях для текущего стимула HA; *c* — время реакции (RT) в четырех условиях для текущего стимула LA; *d* — парные различия между RT в различных условиях для текущего стимула LA

Fig. 2. *a* — Response time (RT) under four conditions for the current stimulus HA; *b* — paired differences between RT under different conditions for the current stimulus HA; *c* — response time (RT) under four conditions for the current stimulus LA; *d* — paired differences between RT under different conditions for the current stimulus LA

Для стимулов НА мы наблюдали минимальное время реакции в условии 4, где два предыдущих стимула также имели высокий уровень неоднозначности. Напротив, испытуемые демонстрировали максимальное время реакции в условии 1, где два предыдущих куба имели низкий уровень неоднозначности. Post hoc анализ с помощью критерия Уилкоксона показал, что время реакции в условии 4 ( $M = 1.01$  с,  $SD = 0.27$  с) было значительно ниже по сравнению с условием 1 ( $M = 1.18$  с,  $SD = 0.32$  с):  $Z = 3.547$ ,  $p < 0.001$ . Анализ парных различий (рис. 2, b) показал, что 19/20 испытуемых демонстрировали эффект в том же направлении, что и группа, и только один испытуемый имел эффект в противоположном направлении. Время реакции в условии 4 также было ниже, чем в условии 2 ( $M = 1.12$  с,  $SD = 0.32$  с):  $Z = 3.323$ ,  $p = 0.001$ . В этом случае 2/20 испытуемых продемонстрировали эффект в противоположном направлении, а один испытуемый не показал никакого эффекта. Наконец, время реакции в условии 4 было ниже, чем в условии 3 ( $M = 1.09$  с,  $SD = 0.33$  с):  $Z = 2.696$ ,  $p = 0.007$ . Анализ парных различий показал, что 15/20 испытуемых демонстрировали эффект в том же направлении, что и группа, 4/20 испытуемых демонстрировали эффект в противоположном направлении, а один испытуемый не демонстрировал никакого эффекта.

Для стимулов LA мы наблюдали минимальное время реакции в условии 1, где два предыдущих стимула также имели низкий уровень неоднозначности, и максимальное время реакции — в условии 4, где два предыдущих стимула имели высокий уровень неоднозначности. Тест Уилкоксона показал, что время реакции в условии 1 ( $M = 0.82$  с,  $SD = 0.23$  с) было значительно ниже по сравнению с условием 4 ( $M = 0.89$  с,  $SD = 0.26$  с):  $Z = 3.061$ ,  $p = 0.002$ . Анализ парных различий показал, что 18/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа. Один испытуемый продемонстрировал эффект в противоположном направлении, а другой — никакого. Время реакции в условии 1 также было ниже, чем время реакции в условии 3 ( $M = 0.89$  с,  $SD = 0.25$  с):  $Z = 2.13$ ,  $p = 0.009$ . В этом случае 4/20 испытуемых показали эффект в противоположном направлении. Наконец, время реакции в условии 1 было ниже, чем время реакции в условии 2 ( $M = 0.87$  с,  $SD = 0.26$  с):  $Z = 2.67$ ,  $p = 0.008$ . Анализ парных различий показал, что у 4/20 испытуемых наблюдался эффект в противоположном направлении.

Наконец, многофакторный дисперсионный анализ с поправкой Гринхауса–Гейсера показал, что медиана времени презентации куба Неккера существенно не изменилась в зависимости от условий как для стимулов LA:  $F(1.3, 24.9) = 2.883$ ,  $p = 0.093$ , так и для стимулов НА:  $F(1.38, 26.3) = 1.646$ ,  $p = 0.214$ . Соотношение между количеством лево- и правоориентированных текущих стимулов также не изменилось в условиях как для стимулов LA:  $F(1.26, 29) = 3.604$ ,  $p = 0.059$ , так и для стимулов НА:  $F(1.9, 45.5) = 1.159$ ,  $p = 0.323$ . Эти результаты свидетельствуют о том, что ни моменты времени, в которые испытуемым демонстрировались визуальные стимулы, ни ориентация куба не влияют на время реакции в рассматриваемых условиях 1–4. На данный параметр оказывает влияние только неоднозначность предыдущих визуальных стимулов.

Чтобы проанализировать, как предыдущая ориентация стимула повлияла на время реакции, мы ввели коэффициент  $\Theta$ , характеризующий соответствие между ориентацией текущего и предыдущего стимулов. Для каждого испытания  $\Theta = 1$  указывало, что текущий стимул имеет ту же ориентацию, что и предыдущий стимул,  $\Theta = 2$  отражало соответствие между ориентацией текущего стимула и двумя предыдущими стимулами. Напротив,  $\Theta = 0$  означает, что текущая ориентация стимула отличается от предыдущей ориентации стимула. Значения  $\Theta$  были усреднены по всем испытаниям и сопоставлены между четырьмя условиями. В результате дисперсионного анализа выявлены основные факторы как для НА стимулов:  $F(3, 57) = 11.702$ ,  $p < 0.001$ , так и для LA стимулов:  $F(3, 57) = 2.913$ ,  $p = 0.042$ . Затем мы использовали многофакторный корреляционный анализ, чтобы проверить, коррелирует ли  $\Theta$  в этих условиях со временем реакции [22]. В результате слабая корреляция наблюдалась как для стимулов НА:  $r(59) = 0.29$ , 95% CI [0.042 0.51],  $p = 0.02$ , так и для стимулов LA:  $r(59) = -0.25$ , 95% CI [-0.48 – 0.0004],  $p = 0.045$ . Наконец, мы получили, что частота ошибок не изменяется в зависимости от условий

как для стимулов HA ( $M = 9.2\%$ ,  $SD = 10.4\%$ ):  $F(3, 57) = 0.288$ ,  $p = 0.844$ , так и для стимулов LA ( $M = 1.7\%$ ,  $SD = 3.5\%$ ):  $F(3, 57) = 0.497$ ,  $p = 0.686$ .

**2.2. Нейронная активность во время престоимого состояния.** Согласно результатам, описанным выше, неоднозначность предыдущего стимула повлияла на время, которое испытуемый затрачивал на идентификацию текущих стимулов. RT было ниже, если уровень неоднозначности предыдущего визуального стимула совпал с уровнем неоднозначности текущего стимула. Этот эффект был сильнее, если два ранее представленных стимула имели одинаковый уровень неоднозначности (оба LA или оба HA). Мы предположили, что обработка головным мозгом предыдущих стимулов влияет на престоимое состояние текущего стимула. Так, после обработки стимулов LA (условие 1) оно было более благоприятным для обработки текущего стимула LA. Напротив, престоимое состояние после обработки стимулов HA было более благоприятным для обработки текущего стимула HA. В соответствии с этим мы сравнили спектральную мощность престоимого состояния между условием 1 и условием 4 (рис. 3, а).

Сравнивая престоимые состояния, сформированные после обработки HA и LA стимулов, мы обнаружили значимый негативный кластер ( $p = 0.0475$ ) в частотном диапазоне 16...18.75 Гц, локализованный в затылочной (Oz) и теменной (Pz и CPz) областях головного мозга (рис. 3, б). Спектральная мощность этого кластера в условии 4 ( $M = 1.7 \times 10^4$ ,  $SD = 7.2 \times 10^4$ ) была выше, чем в условии 1 ( $M = 1.5 \times 10^4$ ,  $SD = 6.2 \times 10^4$ ). Анализ парных различий показал, что 17/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа (рис. 3, в).

Заметим, что медианное время предъявления текущего стимула не имело значимых различий для этих условий ( $Z = 1.307$ ,  $p = 0.191$ , тест Уилкоксона). Также значимых различий не наблюдалось для соотношения между левой и правой ориентациями текущего стимула ( $Z = 0.105$ ,  $p = 0.917$ , тест Уилкоксона). Таким образом, мы приходим к выводу, что наблюдаемое изменение спектральной мощности было вызвано только неоднозначностью предыдущего стимула, но не длительностью эксперимента или текущей ориентацией стимула.

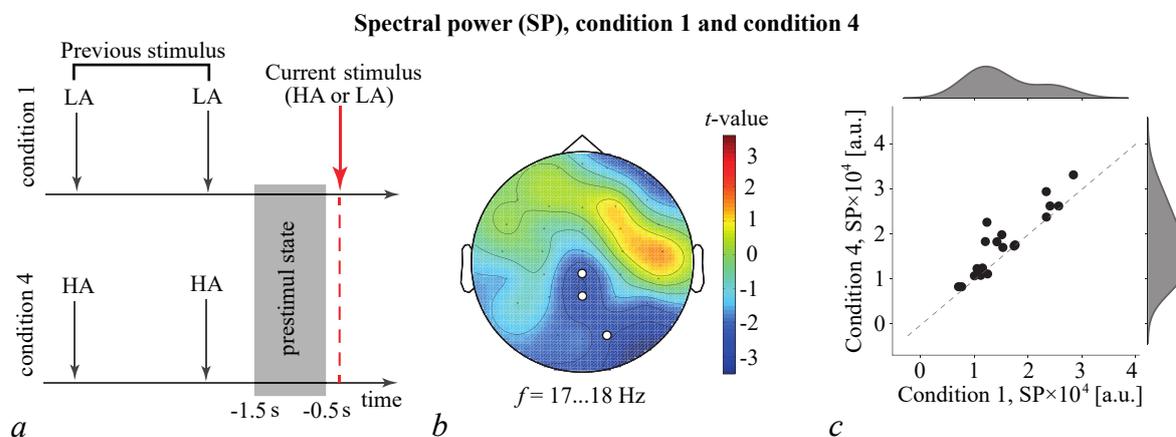


Рис. 3. Сопоставление престоимой спектральной мощности (SP) в условии 1 и условии 4: а — схематическое представление условий эксперимента; б — значение  $t$  отражает результат сравнения SP между условием 1 и условием 4 с использованием  $t$ -критерия. Кружочки показывают значимый кластер ( $p < 0.05$  с помощью  $t$ -критерия для парных выборок с кластерной поправкой для множественных сравнений); в — распределение парных различий отражает изменение SP между условием 1 и условием 4 у всех участников (цвет online)

Fig. 3. Comparison of the prestimulus spectral power (SP) in *condition 1* and *condition 4*: а — schematic representation of the experimental conditions; б — the value of  $t$  reflects the result of the comparison between SP in *condition 1* and *condition 4*. The circles show a significant cluster ( $p < 0.05$  using the  $t$ -test for paired samples with cluster correction for multiple comparisons); в — the distribution of pairwise differences reflects the change in SP between *condition 1* and *condition 4* for all participants (color online)

**2.3. Нейронная активность во время обработки головным мозгом НА стимулов.** Как описано выше, после обработки двух следующих друг за другом стимулов НА кортикальная активность проявляла повышенную мощность  $\beta$ -диапазона в затылочно-теменной области головного мозга. В этом случае обработка головным мозгом текущего стимула НА занимала меньше времени (меньшее значение RT) (см. рис. 2, *a*). Чтобы проанализировать кортикальную активность, лежащую в основе снижения времени реакции в этом состоянии, мы сравнили спектральные возмущения, вызванные обработкой визуального стимула, между условием 1 и условием 4 в течение 0.35 с после начала предъявления стимула. В результате был обнаружен значимый положительный кластер с  $p = 0.045$ . Этот кластер расположился во временном диапазоне от 0.15 до 0.162 с после начала стимула в диапазоне частот 17.5...17.75 Гц и локализовался в правой затылочной (O2), теменной (P4, P8) и височной (Tr8) областях головного мозга (рис. 4, *a*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = 0.17$ ,  $SD = 0.45$ ) был выше, чем в условии 4 ( $M = -0.09$ ,  $SD = 0.31$ ). Анализ парных различий показал, что 15/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа (рис. 4, *b*).

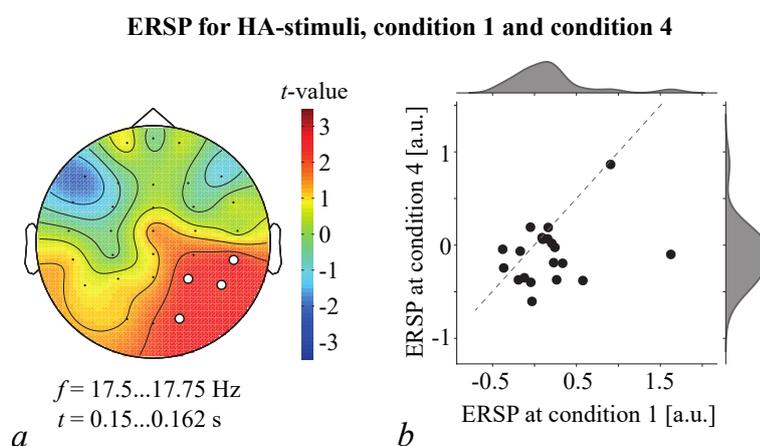


Рис. 4. Сопоставление спектральных возмущений, вызванных стимулом (ERSP), во время обработки НА стимула в условии 1 и условии 4: *a* – значение  $t$  отражает результат сравнения ERSP между условием 1 и условием 4. Кружочки показывают значимый кластер ( $p < 0.05$  с помощью  $t$ -критерия парных выборок с кластерной поправкой для множественных сравнений); *b* – распределение парных различий показывает изменение ERSP между условием 1 и условием 4 в группе участников (цвет online)

Fig. 4. Comparison of spectral perturbations caused by the stimulus (ERSP) during the processing of the HA stimulus in *condition 1* and *condition 4*: *a* –  $t$ -value reflects the result of the comparison between the ERSP in *condition 1* and *condition 4*. The circles show a significant cluster ( $p < 0.05$  using the  $t$ -test of paired samples with cluster correction for multiple comparisons); *b* – the distribution of paired differences shows the change in ERSP between *condition 1* and *condition 4* in the group of participants (color online)

**2.4. Нейронная активность во время обработки головным мозгом LA стимулов.** Сравнивая спектральные возмущения, вызванные обработкой головным мозгом стимула LA между условием 1 и условием 4, мы обнаружили четыре отрицательных и два положительных кластера. Первый положительный кластер с  $p = 0.0105$  расположился во временном диапазоне 0.26...0.35 с после начала стимула в диапазоне частот 19...23.75 Гц и локализовался в правой затылочной (Oz, O2), теменной (P4, P8) и височной (Tr8) областях головного мозга (рис. 5, *a*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = 0.18$ ,  $SD = 0.44$ ) был выше, чем в условии 4 ( $M = -0.12$ ,  $SD = 0.25$ ). Анализ парных различий показал, что 17/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа. Второй положительный кластер с  $p = 0.0105$  расположился во временном диапазоне 0.3...0.35 с в диапазоне частот 25.75...28 Гц и локализовался в правой затылочной (O2) и теменной

### ERSP for LA-stimuli, condition 1 and condition 4

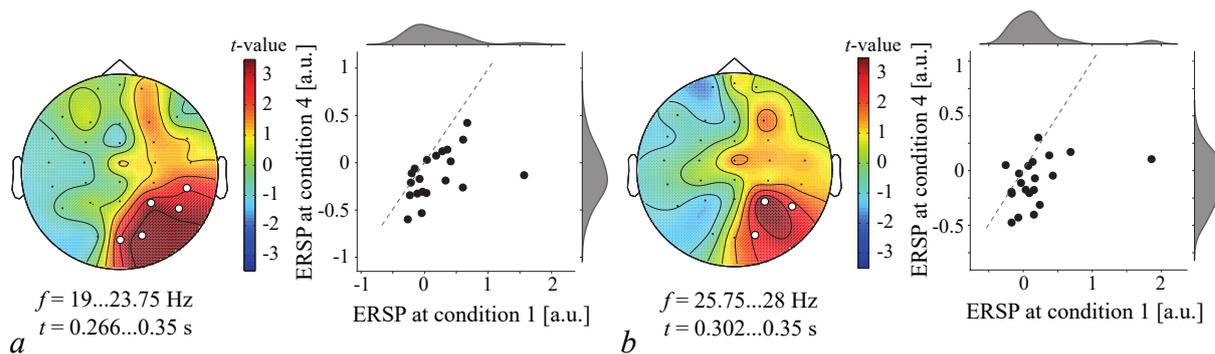


Рис. 5. Два положительных кластера (*a*, *b*) отражают результат сопоставления ERSP во время обработки LA стимула в условии 1 и условии 4: *a* — значение *t* отражает результат сравнения ERSP между условием 1 и условием 4. Кружочки показывают значимый кластер ( $p < 0.05$  с помощью *t*-критерия для парных выборок с кластерной поправкой для множественных сравнений); *b* — распределение парных различий показывает изменение ERSP между условием 1 и условием 4 в группе участников (цвет online)

Fig. 5. Two positive clusters (*a*, *b*) reflect the result of ERSP matching during LA stimulus processing in *condition 1* and *condition 4*: *a* — *t*-value reflects the result of the comparison between the ERSP in *condition 1* and *condition 4*. The circles show a significant cluster ( $p < 0.05$  using the *t*-test of paired samples with cluster correction for multiple comparisons); *b* — the distribution of paired differences shows the change in ERSP between *condition 1* and *condition 4* in the group of participants (color online)

(P4 и P8) области головного мозга (рис. 5, *b*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = 0.18$ ,  $SD = 0.45$ ) был выше, чем в условии 4 ( $M = -0.09$ ,  $SD = 0.21$ ). Анализ парных различий показал, что 18/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа.

Отрицательные кластеры наблюдались в течение 0.15 с после начала стимула в  $\beta$ - и  $\theta$ -диапазонах частот (рис. 6). Первый кластер с  $p = 0.031$  проявлялся от начала стимула до 0.098 с в диапазоне частот 17.25...19 Гц и включал в себя датчики ЭЭГ в правой лобной (F4, F8), лобно-центральной (FC4) и правой височной (T4) областях головного мозга (рис. 6, *a*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = -0.11$ ,  $SD = 0.25$ ) был ниже, чем в условии 4 ( $M = 0.17$ ,  $SD = 0.28$ ). Анализ парных различий показал, что 16/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа.

Второй кластер с  $p = 0.036$  расположился от начала стимула до 0.018 с в диапазоне частот 5.25...5.75 Гц и включал в себя левосторонние теменные (P3), центрально-теменные (CPz, CP3), левосторонние височные (T3) и левосторонние лобные (F3) датчики ЭЭГ (рис. 6, *b*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = -0.12$ ,  $SD = 0.17$ ) был ниже, чем в условии 4 ( $M = 0.14$ ,  $SD = 0.44$ ). Анализ парных различий показал, что 16/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа. Третий кластер с  $p = 0.045$  расположился во временном диапазоне от 0.094 с до 0.142 с после начала стимула на частоте 6.25 Гц и локализовался в средней фронтальной (Fz) и фронтально-центральной (FCz), а также в левой височной (T3) и фронтально-височной (FT7) областях головного мозга (рис. 6, *c*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = -0.11$ ,  $SD = 0.15$ ) был ниже, чем в условии 4 ( $M = 0.13$ ,  $SD = 0.36$ ). Анализ парных различий показал, что 17/20 испытуемых показали эффект в том же направлении, что и группа.

Четвертый кластер с  $p = 0.046$  расположился во временном диапазоне 0.066...0.074 с после начала стимула на частоте 5.25 Гц и включал в себя средние фронтальные (Fz) и фронтально-центральные (FCz) датчики, а также левые височные (T3) и центрально-теменные (CPz) датчики (рис. 6, *d*). ERSP в этом кластере в условии 1 ( $M = -0.09$ ,  $SD = 0.14$ ) был ниже, чем в условии 4 ( $M = 0.14$ ,  $SD = 0.36$ ). Анализ парных различий показал, что 16/20 испытуемых показали тот же эффект, что и группа.

### ERSP for LA-stimuli, condition 1 and condition 4

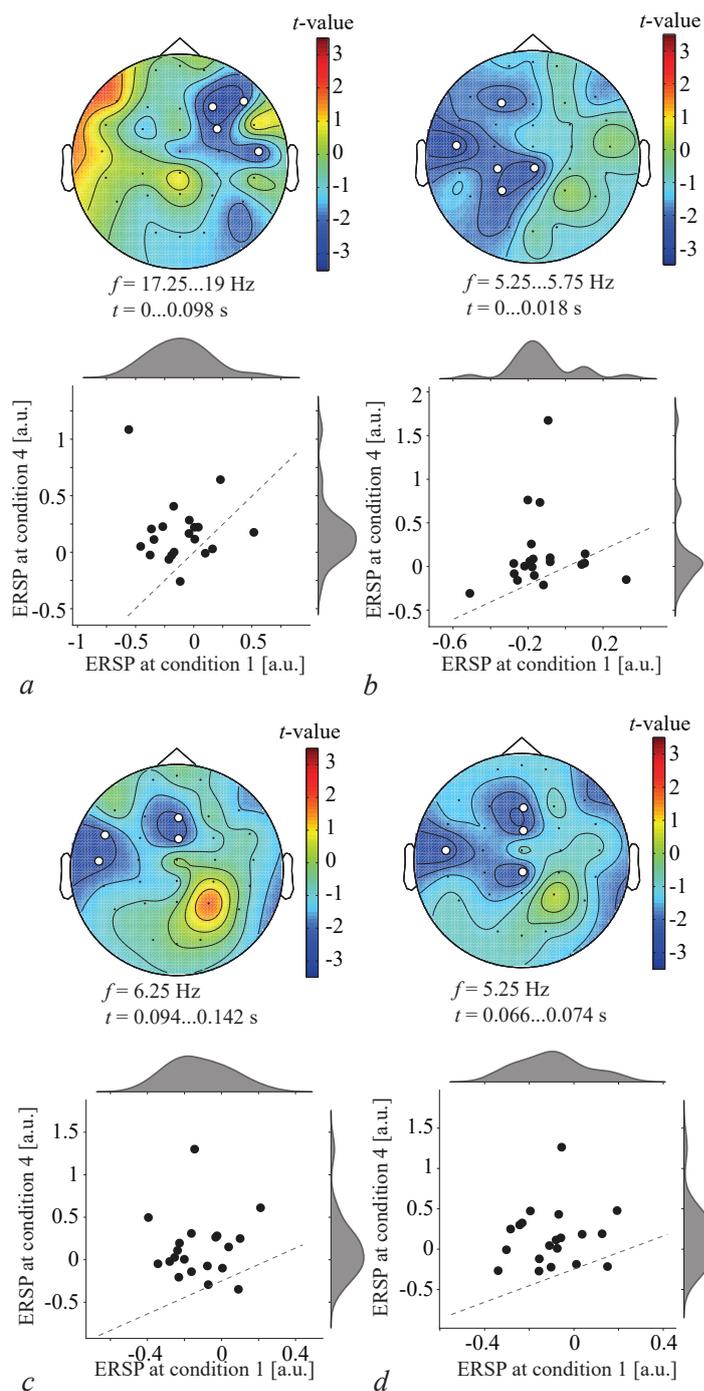


Рис. 6. Отрицательные кластеры (a–d), отражающие результат сопоставления ERSP во время обработки стимула LA между условием 1 и условием 4. Значение  $t$  отражает результат сравнения ERSP между условием 1 и условием 4 для всех датчиков ЭЭГ. Кружочки показывают значимый кластер ( $p < 0.05$  с помощью  $t$ -критерия для парных выборок с кластерной коррекцией для множественных сравнений). Распределение парных различий показывает изменение ERSP между условием 1 и условием 4 у всех участников (цвет online)

Fig. 6. Negative clusters (a–d) reflecting the result of ERSP comparison during LA stimulus processing between *condition 1* and *condition 4*. The value of  $t$  reflects the result of comparing the ERSP between *condition 1* and *condition 4* for all EEG sensors. The circles show a significant cluster ( $p < 0.05$  using the  $t$ -criterion for paired samples with cluster correction for multiple comparisons). The distribution of paired differences shows the change in ERSP between *condition 1* and *condition 4* for all participants (color online)

## Обсуждение результатов

При восприятии последовательно представленных неоднозначных стимулов — кубов Неккера — неоднозначность предыдущего стимула влияет на обработку головным мозгом текущего визуального стимула. Было показано, что испытуемый быстрее обрабатывает стимул, если его неоднозначность совпадает с неоднозначностью ранее представленных стимулов. Можно предположить, что популяции нейронов, вовлечённые в обработку предыдущих стимулов, остаются активными в течение последующего престаимпульного периода. Для подтверждения этого мы сравнили престаимпульный период после обработки стимулов НА и LA и обнаружили увеличение мощности  $\beta$ -диапазона в затылочно-теменной области коры головного мозга в первом случае. Активация популяций нейронов перед обработкой стимула может быть связана с возникновением престаимпульного шаблона [3, 4].

Согласно работе [23], шаблон стимула появляется как результат ожиданий. Если это так, то для более быстрой реакции испытуемые ожидают стимул с высоким уровнем неоднозначности (НА) после двух стимулов НА. Однако мы предъявляем стимулы случайным образом, и вероятность увидеть стимул НА после двух кубиков НА невелика. Испытуемые с большей вероятностью ожидают стимул LA после двух НА. Наконец, испытуемые должны определять ориентацию куба Неккера (то есть левая/правая ориентация), но не уровень его неоднозначности (то есть LA или НА). Поэтому ожидание и полученный шаблон должны включать в себя ориентацию стимула. Учитывая вышесказанное, испытуемые должны быстрее реагировать на стимул с той же ориентацией, что и предыдущий. Однако наши результаты показывают, что сходная ориентация текущего и предыдущего визуального стимула не вызывает более быстрой реакции.

Согласно обзору [1], шаблоны стимулов появляются на разных уровнях иерархии сенсорной обработки. Мы предполагаем, что ориентация стимула характеризует шаблон высокого уровня, тогда как шаблон на более низких уровнях отражает морфологию стимула. Нейронная реакция во время обработки стимула НА увеличивается по двум возможным причинам. Во-первых, стимул НА имеет неопределённую ориентацию, поэтому для его определения необходимо задействовать более крупные популяции нейронов на высоких уровнях иерархии обработки. Во-вторых, морфология стимулов НА более сложна. Наряду с аналогичными характеристиками (внешние грани куба), куб Неккера с высоким уровнем неоднозначности имеет более высокий контраст внутренних граней. Таким образом, для обработки стимула НА необходимо получить больше сенсорных данных, что приводит к более высокой активации нейронов на низких уровнях иерархии сенсорной обработки. Поскольку ориентация предыдущего стимула не влияет на обработку головным мозгом текущего визуального стимула, мы не рассматриваем шаблон высокого уровня. Наоборот, мы ориентируемся на низкоуровневые шаблоны.

Мы провели сравнительный анализ активности головного мозга, связанной с обработкой визуального стимула с высоким уровнем неоднозначности в двух случаях: предыдущим стимулом являлся стимул с низким уровнем неоднозначности (LA) и предыдущим стимулом являлся стимул с высоким уровнем неоднозначности (НА). Мы наблюдали более высокую мощность в  $\beta$ - и  $\theta$ -диапазонах в затылочной и теменной областях головного мозга в первом случае для  $t < 0.15$  с. Повышенная мощность  $\theta$ -диапазона в теменной области свидетельствует о возросших требованиях к обработке информации, приводящих к привлечению дополнительных когнитивных ресурсов [24, 25]. Высокая мощность  $\beta$ -диапазона в затылочной и теменной областях характеризует задачи, связанные с эндогенными нисходящими процессами, включая обработку неоднозначных визуальных стимулов [26]. В частности, в работе [27] бистабильные визуальные стимулы (лицо — саксофон) были представлены испытуемым после изображений, которые были четкими представлениями лица или саксофона. Аналогично нашим результатам, увеличение мощности в  $\beta$ -диапазоне наблюдалось в затылочной и теменной областях при обработке неоднозначного

стимула после однозначного. Авторы сообщили, что испытуемые в основном интерпретировали неоднозначную картину как лицо. Мощность  $\beta$ -диапазона была выше, если неоднозначная фигура следовала за саксофоном, а не за изображением лица. Поскольку однозначный стимул был частью неоднозначного, предполагалось, что их морфология сходна. Таким образом, авторы предположили, что усиленный нейронный ответ был связан с процессами высокого уровня, связанными с интерпретацией стимула в целом, а не с низкоуровневой обработкой отдельных признаков стимула. Как уже говорилось выше, мы не рассматриваем влияние ориентации визуальных стимулов. Поэтому из анализа были исключены более высокие стадии обработки, ответственные за интерпретацию стимула в целом. Мы пришли к выводу, что более высокая мощность  $\theta$ - и  $\beta$ -диапазона может быть связана с обработкой признаков стимулов НА, которые не похожи на стимулы LA (например, внутренние грани). Тот факт, что мы наблюдаем более высокую реакцию для  $t > 0.15$  с после предъявления стимула, подтверждает это предположение. Действительно,  $t < 0.15$  с можно связать с низкими уровнями, на которых обрабатываются внешние контуры куба Неккера. Эти особенности стимула сходны для кубов с низким и высоким уровнями неоднозначности, и поэтому мы предполагаем сходную активность нейронов на этих уровнях обработки для стимула LA и НА.

Был проведен сравнительный анализ активности головного мозга, связанной с обработкой визуального стимула с низким уровнем неоднозначности в двух случаях: предыдущим стимулом являлся стимул с низким уровнем неоднозначности (LA) и предыдущим стимулом являлся стимул с высоким уровнем неоднозначности (НА). Аналогично, нейронная реакция в затылочной и теменной областях головного мозга остается неизменной в течение  $t < 0.15$  с. Для  $t > 0.15$  с мы наблюдаем увеличение мощности  $\beta$ -диапазона в теменной области для предыдущего стимула LA. Это подтверждает наше предположение о том, что стимулы LA и НА обрабатываются аналогично на более ранних стадиях, тогда как более высокие стадии обработки стимулов НА требуют дополнительных ресурсов. Неожиданным эффектом является более высокая мощность  $\beta$ - и  $\theta$ -диапазона, наблюдаемая для  $t < 0.15$  с для предыдущего стимула НА. Мощность  $\theta$ -диапазона в медиальной фронтальной области увеличивается, когда стимул LA следует за стимулом НА. Известно, что фронтально-медиальная амплитуда ERP (Event-Related Potential) растет в ситуациях, требующих большого когнитивного контроля. Недавний обзор [28] связывает фронтально-медиальную амплитуду ERP с двумя компонентами когнитивного контроля — обнаружением несоответствия с перцептивным шаблоном и замедлением реакции. Наконец, в обзоре [29] показано, что  $\theta$ -мощность во фронтально-медиальной области увеличивается при выполнении задач в рамках классических интерференционных парадигм. Мощность  $\beta$ -диапазона в правой лобной коре обычно ассоциируется с нисходящим контролем реакции [30]. Эта когнитивная функция активируется в задачах, требующих быстрого прекращения действия.

Отсутствие различий в затылочной и теменной коре на более ранних стадиях ( $t < 0.15$  с) может свидетельствовать о том, что мозг сформировал соответствующие шаблоны на низких уровнях обработки независимо от неоднозначности предыдущего стимула. Это может быть результатом сходной морфологии внешних граней кубов НА и LA. В то же время активация когнитивного контроля может отражать значительное начальное несоответствие между шаблоном куба НА и полученными сенсорными данными на более ранних стадиях обработки. Чтобы объяснить это явление, мы предполагаем, что стимул НА обрабатывается на более высоких уровнях по сравнению со стимулом LA. Таким образом, шаблон НА появляется на более высоких уровнях, чем шаблон LA. Мозг сопоставляет поступающую сенсорную информацию с шаблоном стимулов высокого уровня, чтобы минимизировать затраты на обработку. Сенсорные данные на низких уровнях недостаточны, чтобы соответствовать этому шаблону, и мозг пытается построить шаблоны низкого уровня из шаблонов высокого уровня. Этот механизм проходит через взаимодействие между нисходящими процессами, связанными с адаптацией шаблона, и восходящими процессами,

связанными с выявлением ошибок сопоставления. Таким образом, когда стимул LA следует за НА-стимулом, требуется нисходящий контроль для перевода шаблона НА высокого уровня на низкие уровни обработки. Эта гипотеза совпадает с точкой зрения, предложенной в обзоре [1]. Авторы предположили, что более высокие уровни иерархии обработки извлекают особенности стимулов высокого порядка и используют их для создания набора прогнозов, которые могут быть быстро адаптированы. Они также предполагают, что эти прогнозы передаются на низкие уровни обработки через прямые связи. Согласно этим предположениям, авторы связывают эти прямые связи с нисходящими процессами, что позволяет передавать информацию между высоким и низким уровнями и пропускать промежуточные уровни. Наши результаты показывают, что эти нисходящие процессы включают в себя контроль конфликта и контроль реакции, реализуемые через нейронную активность во фронтально-медиальной коре, передней поясной коре и правой нижней лобной коре.

### Заключение

В данной работе было проанализировано влияние неоднозначности предыдущего стимула на обработку текущего. На поведенческом уровне было обнаружено, что испытуемые быстрее реагируют на стимулы НА, следующие за стимулами НА. В то же время более быстрая реакция на LA стимулы следует за LA стимулами. Анализ ЭЭГ показывает, что, когда стимул НА следует за стимулом LA, нейронная активность в сенсорных (затылочно-теменных) областях ослабевает на ранней стадии обработки, но усиливается на последних стадиях. Это свидетельствует об иерархической организации обработки, где низкие уровни обрабатывают детали стимула, а высокие уровни представляют его интерпретацию. Это также подтверждает тот факт, что на низких уровнях обработка стимулов НА и LA сходна из-за схожей морфологии. Поэтому мозг использует шаблон стимула LA на низких уровнях, чтобы уменьшить затраты на обработку деталей стимула НА. Когда стимул LA следует за стимулом НА, ослабленная нейронная реакция в сенсорных областях сопровождается высокой реакцией в лобной коре. А именно мы наблюдаем высокую мощность  $\theta$ -диапазона в медиальной лобной коре и высокую мощность  $\beta$ -диапазона в правой лобной коре. Мы считаем, что это является электроэнцефалографическими маркерами нисходящих процессов, связанных с обнаружением несоответствия между стимулом LA и шаблоном стимула НА. Обнаруженные маркеры могут быть в дальнейшем использованы для создания интерфейсов мозг-компьютер для анализа внимания и контроля ошибок оператора, выполняющего рутинные операции, связанные с обработкой визуальной информации [31–34].

### Список литературы

1. *Rauss K., Pourtois G.* What is bottom-up and what is top-down in predictive coding? // *Frontiers in Psychology*. 2013. Vol. 4. P. 276. DOI: 10.3389/fpsyg.2013.00276.
2. *Teufel C., Fletcher P. C.* Forms of prediction in the nervous system // *Nature Reviews Neuroscience*. 2020. Vol. 21, no. 4. P. 231–242. DOI: 10.1038/s41583-020-0275-5.
3. *Kok P., Failing M. F., de Lange F. P.* Prior expectations evoke stimulus templates in the primary visual cortex // *Journal of Cognitive Neuroscience*. 2014. Vol. 26, no. 7. P. 1546–1554. DOI: 10.1162/jocn\_a\_00562.
4. *Kok P., Mostert P., de Lange F. P.* Prior expectations induce prestimulus sensory templates // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2017. Vol. 114, no. 39. P. 10473–10478. DOI: 10.1073/pnas.1705652114.
5. *Teufel C., Dakin S. C., Fletcher P. C.* Prior object-knowledge sharpens properties of early visual

- feature-detectors // *Scientific Reports*. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 10853. DOI: 10.1038/s41598-018-28845-5.
6. *Heekeren H. R., Marrett S., Ungerleider L. G.* The neural systems that mediate human perceptual decision making // *Nature Reviews Neuroscience*. 2008. Vol. 9, no. 6. P. 467–479. DOI: 10.1038/nrn2374.
  7. *Friston K.* The free-energy principle: a rough guide to the brain? // *Trends in Cognitive Sciences*. 2009. Vol. 13, no. 7. P. 293–301. DOI: 10.1016/j.tics.2009.04.005.
  8. *Wacongne C., Labyt E., van Wassenhove V., Bekinschtein T., Naccache L., Dehaene S.* Evidence for a hierarchy of predictions and prediction errors in human cortex // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2011. Vol. 108, no. 51. P. 20754–20759. DOI: 10.1073/pnas.1117807108.
  9. *Henson R. N. A., Rugg M. D.* Neural response suppression, haemodynamic repetition effects, and behavioural priming // *Neuropsychologia*. 2003. Vol. 41, no. 3. P. 263–270. DOI: 10.1016/S0028-3932(02)00159-8.
  10. *Vogels R.* Sources of adaptation of inferior temporal cortical responses // *Cortex*. 2016. Vol. 80. P. 185–195. DOI: 10.1016/j.cortex.2015.08.024.
  11. *Vinken K., Op de Beeck H. P., Vogels R.* Face repetition probability does not affect repetition suppression in macaque inferotemporal cortex // *Journal of Neuroscience*. 2018. Vol. 38, no. 34. P. 7492–7504. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0462-18.2018.
  12. *Gilbert C. D., Li W.* Top-down influences on visual processing // *Nature Reviews Neuroscience*. 2013. Vol. 14, no. 5. P. 350–363. DOI: 10.1038/nrn3476.
  13. *Schwiedrzik C. M., Freiwald W. A.* High-level prediction signals in a low-level area of the macaque face-processing hierarchy // *Neuron*. 2017. Vol. 96, no. 1. P. 89–97. DOI: 10.1016/j.neuron.2017.09.007.
  14. *Maksimenko V., Kuc A., Frolov N., Kurkin S., Hramov A.* Effect of repetition on the behavioral and neuronal responses to ambiguous Necker cube images // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 3454. DOI: 10.1038/s41598-021-82688-1.
  15. *Maksimenko V. A., Frolov N. S., Hramov A. E., Runnova A. E., Grubov V. V., Kurths J., Pisarchik A. N.* Neural interactions in a spatially-distributed cortical network during perceptual decision-making // *Frontiers in Behavioral Neuroscience*. 2019. Vol. 13. P. 220. DOI: 10.3389/fnbeh.2019.00220.
  16. *Maksimenko V. A., Runnova A. E., Zhuravlev M. O., Makarov V. V., Nedayvozov V., Grubov V. V., Pchelintseva S. V., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface // *PLoS ONE*. 2017. Vol. 12, no. 12. P. e0188700. DOI: 10.1371/journal.pone.0188700.
  17. *Kornmeier J., Friedel E., Wittmann M., Atmanspacher H.* EEG correlates of cognitive time scales in the Necker-Zeno model for bistable perception // *Consciousness and Cognition*. 2017. Vol. 53. P. 136–150. DOI: 10.1016/j.concog.2017.04.011.
  18. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pchelintseva S. V., Runnova A. E., Grubov V. V., Musatov V. Y., Zhuravlev M. O., Koronovskii A. A., Pisarchik A. N.* Classifying the perceptual interpretations of a bistable image using EEG and artificial neural networks // *Frontiers in Neuroscience*. 2017. Vol. 11. P. 674. DOI: 10.3389/fnins.2017.00674.
  19. *Delorme A., Makeig S.* EEGLAB: an open source toolbox for analysis of single-trial EEG dynamics including independent component analysis // *Journal of Neuroscience Methods*. 2004. Vol. 134, no. 1. P. 9–21. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2003.10.009.
  20. *Павлов А. Н., Храмов А. Е., Короновский А. А., Ситникова Е. Ю., Макаров В. А., Овчинников А. А.* Вейвлет-анализ в нейродинамике // *УФН*. 2012. Т. 182, № 9. С. 905–939. DOI: 10.3367/UFNr.0182.201209a.0905.

21. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Makarov V. A., Maksimenko V. A., Pavlov A. N., Sitnikova E.* Wavelets in Neuroscience. Cham: Springer, 2021. 384 p. DOI: 10.1007/978-3-030-75992-6.
22. *Bakdash J. Z., Marusich L. R.* Repeated measures correlation // *Frontiers in Psychology*. 2017. Vol. 8. P. 456. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.00456.
23. *Summerfield C., de Lange F. P.* Expectation in perceptual decision making: neural and computational mechanisms // *Nature Reviews Neuroscience*. 2014. Vol. 15, no. 11. P. 745–756. DOI: 10.1038/nrn3838.
24. *Tseng P., Iu K.-C., Juan C.-H.* The critical role of phase difference in theta oscillation between bilateral parietal cortices for visuospatial working memory // *Scientific Reports*. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 349. DOI: 10.1038/s41598-017-18449-w.
25. *Berger B., Griesmayr B., Minarik T., Biel A. L., Pinal D., Sterr A., Sauseng P.* Dynamic regulation of interregional cortical communication by slow brain oscillations during working memory // *Nature Communications*. 2019. Vol. 10, no. 1. P. 4242. DOI: 10.1038/s41467-019-12057-0.
26. *Engel A. K., Fries P.* Beta-band oscillations – signalling the status quo? // *Current Opinion in Neurobiology*. 2010. Vol. 20, no. 2. P. 156–165. DOI: 10.1016/j.conb.2010.02.015.
27. *Okazaki M., Kaneko Y., Yumoto M., Arima K.* Perceptual change in response to a bistable picture increases neuromagnetic beta-band activities // *Neuroscience Research*. 2008. Vol. 61, no. 3. P. 319–328. DOI: 10.1016/j.neures.2008.03.010.
28. *Folstein J. R., Van Petten C.* Influence of cognitive control and mismatch on the N2 component of the ERP: A review // *Psychophysiology*. 2008. Vol. 45, no. 1. P. 152–170. DOI: 10.1111/j.1469-8986.2007.00602.x.
29. *Nigbur R., Ivanova G., Stürmer B.* Theta power as a marker for cognitive interference // *Clinical Neurophysiology*. 2011. Vol. 122, no. 11. P. 2185–2194. DOI: 10.1016/j.clinph.2011.03.030.
30. *Wagner J., Wessel J. R., Ghahremani A., Aron A. R.* Establishing a right frontal beta signature for stopping action in scalp EEG: Implications for testing inhibitory control in other task contexts // *Journal of Cognitive Neuroscience*. 2018. Vol. 30, no. 1. P. 107–118. DOI: 10.1162/jocn\_a\_01183.
31. *Dehais F., Dupres A., Di Flumeri G., Verdiere K., Borghini G., Babiloni F., Roy R.* Monitoring pilot’s cognitive fatigue with engagement features in simulated and actual flight conditions using an hybrid fNIRS-EEG passive BCI // 2018 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC) / IEEE. New York, 2019. P. 544–549. DOI: 10.1109/SMC.2018.00102.
32. *Gateau T., Ayaz H., Dehais F.* In silico vs. over the clouds: On-the-fly mental state estimation of aircraft pilots, using a functional near infrared spectroscopy based passive-BCI // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2018. Vol. 12. P. 187. DOI: 10.3389/fnhum.2018.00187.
33. *Maksimenko V. A., Hramov A. E., Grubov V. V., Nedaivozov V. O., Makarov V. V., Pisarchik A. N.* Nonlinear effect of biological feedback on brain attentional state // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 95, no. 3. P. 1923–1939. DOI: 10.1007/s11071-018-4668-1.
34. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Physics Reports*. 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.

## References

1. Rauss K, Pourtois G. What is bottom-up and what is top-down in predictive coding? *Frontiers in Psychology*. 2013;4:276. DOI:10.3389/fpsyg.2013.00276.
2. Teufel C, Fletcher P. Forms of prediction in the nervous system. *Nature Reviews Neuroscience*. 2020;21(4):231–242. DOI:10.1038/s41583-020-0275-5.
3. Kok P, Failing M, de Lange F. Prior expectations evoke stimulus templates in the primary visual cortex. *Journal of Cognitive Neuroscience*. 2014;26(7):1546–1554. DOI:10.1162/jocn\_a\_00562.

4. Kok P, Mostert P, de Lange F. Prior expectations induce prestimulus sensory templates. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2017;114(39):10473–10478. DOI:10.1073/pnas.1705652114.
5. Teufel C, Dakin S, Fletcher P. Prior object-knowledge sharpens properties of early visual feature-detectors. *Scientific Reports*. 2018;8(1):10853. DOI:10.1038/s41598-018-28845-5.
6. Heekeren H, Marrett S, Ungerleider L. The neural systems that mediate human perceptual decision making. *Nature Reviews Neuroscience*. 2008;9(6):467–479. DOI:10.1038/nrn2374.
7. Friston K. The free-energy principle: a rough guide to the brain? *Trends in Cognitive Sciences*. 2009;13(7):293–301. DOI:10.1016/j.tics.2009.04.005.
8. Wacongne C, Labyt E, van Wassenhove V, Bekinschtein T, Naccache L, Dehaene S. Evidence for a hierarchy of predictions and prediction errors in human cortex. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2011;108(51):20754–20759. DOI:10.1073/pnas.1117807108.
9. Henson R, Rugg M. Neural response suppression, haemodynamic repetition effects, and behavioural priming. *Neuropsychologia*. 2003;41(3):263–270. DOI:10.1016/S0028-3932(02)00159-8.
10. Vogels R. Sources of adaptation of inferior temporal cortical responses. *Cortex*. 2016;80:185–195. DOI:10.1016/j.cortex.2015.08.024.
11. Vinken K, Op de Beeck H, Vogels R. Face repetition probability does not affect repetition suppression in macaque inferotemporal cortex. *Journal of Neuroscience*. 2018;38(34):7492–7504. DOI:10.1523/JNEUROSCI.0462-18.2018.
12. Gilbert C, Li W. Top-down influences on visual processing. *Nature Reviews Neuroscience*. 2013;14(5):350–363. DOI:10.1038/nrn3476.
13. Schwiedrzik C, Freiwald W. High-level prediction signals in a low-level area of the macaque face-processing hierarchy. *Neuron*. 2017;96(1):89–97. DOI:10.1016/j.neuron.2017.09.007.
14. Maksimenko V, Kuc A, Frolov N, Kurkin S, Hramov A. Effect of repetition on the behavioral and neuronal responses to ambiguous Necker cube images. *Scientific Reports*. 2021;11(1):3454. DOI:10.1038/s41598-021-82688-1.
15. Maksimenko V, Frolov N, Hramov A, Runnova A, Grubov V, Kurths J, Pisarchik A. Neural interactions in a spatially-distributed cortical network during perceptual decision-making. *Frontiers in Behavioral Neuroscience*. 2019;13:220. DOI:10.3389/fnbeh.2019.00220.
16. Maksimenko V, Runnova A, Zhuravlev M, Makarov V, Nedayvozov V, Grubov V, Pchelintseva S, Hramov A, Pisarchik A. Visual perception affected by motivation and alertness controlled by a noninvasive brain-computer interface. *PLoS ONE*. 2017;12(12):e0188700. DOI:10.1371/journal.pone.0188700.
17. Kornmeier J, Friedel E, Wittmann M, Atmanspacher H. EEG correlates of cognitive time scales in the Necker-Zeno model for bistable perception. *Consciousness and Cognition*. 2017;53:136–150. DOI:10.1016/j.concog.2017.04.011.
18. Hramov A, Maksimenko V, Pchelintseva S, Runnova A, Grubov V, Musatov V, Zhuravlev M, Koronovskii A, Pisarchik A. Classifying the perceptual interpretations of a bistable image using EEG and artificial neural networks. *Frontiers in Neuroscience*. 2017;11:674. DOI:10.3389/fnins.2017.00674.
19. Delorme A, Makeig S. EEGLAB: an open source toolbox for analysis of single-trial EEG dynamics including independent component analysis. *Journal of Neuroscience Methods*. 2004;134(1):9–21. DOI:10.1016/j.jneumeth.2003.10.009.
20. Pavlov A, Hramov A, Koronovskii A, Sitnikova E, Makarov V, Ovchinnikov A. Wavelet analysis in neurodynamics. *Physics-Uspekhi*. 2012;55(9):845–875. DOI:10.3367/UFNe.0182.201209a.0905.
21. Hramov A, Koronovskii A, Makarov V, Maksimenko V, Pavlov A, Sitnikova E. *Wavelets in Neuroscience*. Cham: Springer; 2021. 384 p. DOI:10.1007/978-3-030-75992-6.
22. Bakdash J, Marusich L. Repeated measures correlation. *Frontiers in Psychology*. 2017;8:456. DOI:10.3389/fpsyg.2017.00456.

23. Summerfield C, de Lange F. Expectation in perceptual decision making: neural and computational mechanisms. *Nature Reviews Neuroscience*. 2014;15(11):745–756. DOI:10.1038/nrn3838.
24. Tseng P, Iu K, Juan C. The critical role of phase difference in theta oscillation between bilateral parietal cortices for visuospatial working memory. *Scientific Reports*. 2018;8(1):349. DOI:10.1038/s41598-017-18449-w.
25. Berger B, Griesmayr B, Minarik T, Biel A, Pinal D, Sterr A, Sauseng P. Dynamic regulation of interregional cortical communication by slow brain oscillations during working memory. *Nature Communications*. 2019;10(1):4242. DOI:10.1038/s41467-019-12057-0.
26. Engel A, Fries P. Beta-band oscillations – signalling the status quo? *Current Opinion in Neurobiology*. 2010;20(2):156–165. DOI:10.1016/j.conb.2010.02.015.
27. Okazaki M, Kaneko Y, Yumoto M, Arima K. Perceptual change in response to a bistable picture increases neuromagnetic beta-band activities. *Neuroscience Research*. 2008;61(3):319–328. DOI:10.1016/j.neures.2008.03.010.
28. Folstein J, Van Petten C. Influence of cognitive control and mismatch on the N2 component of the ERP: A review. *Psychophysiology*. 2008;45(1):152–170. DOI:10.1111/j.1469-8986.2007.00602.x.
29. Nigbur R, Ivanova G, Stürmer B. Theta power as a marker for cognitive interference. *Clinical Neurophysiology*. 2011;122(11):2185–2194. DOI:10.1016/j.clinph.2011.03.030.
30. Wagner J, Wessel J, Ghahremani A, Aron A. Establishing a right frontal beta signature for stopping action in scalp EEG: Implications for testing inhibitory control in other task contexts. *Journal of Cognitive Neuroscience*. 2018;30(1):107–118. DOI:10.1162/jocn\_a\_01183.
31. Dehais F, Dupres A, Di Flumeri G, Verdieri K, Borghini G, Babiloni F, Roy R. Monitoring pilot's cognitive fatigue with engagement features in simulated and actual flight conditions using an hybrid fNIRS-EEG passive BCI. In: 2018 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). New York: IEEE; 2019. P. 544–549. DOI:10.1109/SMC.2018.00102.
32. Gateau T, Ayaz H, Dehais F. In silico vs. over the clouds: On-the-fly mental state estimation of aircraft pilots, using a functional near infrared spectroscopy based passive-BCI. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2018;12:187. DOI:10.3389/fnhum.2018.00187.
33. Maksimenko V, Hramov A, Grubov V, Nedaivozov V, Makarov V, Pisarchik A. Nonlinear effect of biological feedback on brain attentional state. *Nonlinear Dynamics*. 2019;95(3):1923–1939. DOI:10.1007/s11071-018-4668-1.
34. Hramov A, Maksimenko V, Pisarchik A. Physical principles of brain-computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Physics Reports*. 2021;918:1–133. DOI:10.1016/j.physrep.2021.03.002.



*Кущ Александр Константинович.* Окончил бакалавриат Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А. по специальности «Мехатроника и робототехника» (СГТУ, 2017) и магистратуру СГТУ по специальности «Мехатроника и робототехника» (2019). В настоящее время — аспирант кафедры «Информационная безопасность автоматизированных систем» СГТУ. Работает в Балтийском центре нейротехнологий и искусственного интеллекта Балтийского федерального университета имени И. Канта в должности младшего научного сотрудника. Область научных интересов — методы анализа нейрофизиологических сигналов. Автор 14 научных публикаций и 5 программ для ЭВМ.

Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
 Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
 Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
 Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
 E-mail: kuc1995@mail.ru  
 ORCID: 0000-0001-6233-2594  
 AuthorID: 1042114

*Максименко Владимир Александрович* — родился в городе Аткарске Саратовской области (1989), окончил Саратовский государственный университет (2012). Защитил диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (СГУ, 2015) и доктора физико-математических наук (СГТУ, 2020). Старший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис, профессор (с 2021 года). Лауреат Премии Президента Российской Федерации в области науки и инноваций для молодых учёных (2020). Научные интересы: выявление новых фундаментальных механизмов динамики нейронной сети головного мозга основываясь на результатах анализа нейрофизиологических сигналов и результатах математического моделирования процессов нейронного взаимодействия с использованием сетей искусственных нейроноподобных элементов; разработка эффективных методик детектирования характерных форм нейронной активности на основе анализа сигналов электрической активности с целью разработки интерфейсов «мозг – компьютер» для реабилитации, робототехники и контроля состояния человека.



Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: maximenkovl@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-4632-6896  
AuthorID: 742773

*Храмов Александр Евгеньевич* — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (кафедра электронных и волновых процессов, 1996). Кандидат физико-математических наук (1999), доктор физико-математических наук (2005), профессор. В настоящее время руководитель лаборатории нейронауки и когнитивных технологий Университета Иннополис и главный научный сотрудник Центра нейротехнологий и машинного обучения Балтийского федерального университета имени И. Канта. Научные интересы — нейронаука, теория сложных сетей, математическое моделирование нейронных сетей, искусственный интеллект, нелинейная динамика.



Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского  
E-mail: hramovae@gmail.com  
ORCID: 0000-0003-2787-2530  
AuthorID: 34834



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-76-95

## Revealing the neural network underlying covert picture-naming paradigm using magnetoencephalography

*P. Chholak*<sup>1\*</sup>, *F. Tabari*<sup>2\*</sup>, *A. N. Pisarchik*<sup>1,3</sup>✉

<sup>1</sup>Universidad Politécnica de Madrid, Spain

<sup>2</sup>Universidad Autónoma de Madrid, Spain

<sup>3</sup>Innopolis University, Russia

E-mail: parth.chholak@ctb.upm.es, fatemeh.tabari@estudiante.uam.es,

✉alexander.pisarchik@ctb.upm.es

Received 10.07.2021, accepted 01.08.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** The ability to name trivial everyday objects is a key cognitive function that is tested after head injuries or brain surgeries. Although quite a lot of long-standing knowledge on this topic has accumulated over the past few decades and many theoretical models have been created, the underlying neural substrate and brain functioning are still not fully aligned. As far as we know, there have been no studies on this topic using magnetoencephalography (MEG), which allows recording electrophysiological activity with a high temporal resolution. Therefore, to study the underlying spatio-temporal brain activations during the sensory and semantic processing of object naming, we conducted MEG experiments with 15 subjects grouped into three equal-sized groups with different types of language training and skills. Using boundary element methods for modelling cortical surfaces and dynamic statistical parametric mapping to solve the inverse problem, we reconstructed the cortical source activity from the recorded MEG data. The reconstructed cortical maps showed a homogeneous brain response in all three groups at the sensory processing stage, while the responses between the three groups at the semantic processing stage were different. In addition, average time courses were constructed for key brain regions such as the lateral occipital cortex (LO), fusiform gyrus (FG), Broca's area (BA), and Wernicke's area (WA). The obtained results assume unimodal forms for LO and WA time series, and bimodal forms for FG and BA. The only LO curve peak and the first FG peak resided in the time interval for the sensory processing stage, whereas, the only WA peak, the second FG peak and the second BA peak resided in the semantic processing stage. The first BA peak was located at the boundary separating the two stages. In addition to segregating regions involved in sensory and semantic processing, this study confirmed the involvement of FG in object naming (for the first time using MEG) that is at risk of resection during mesial temporal lobe epilepsy interventions. However, the results from this work are preliminary due to the limited sample size, and future research with a larger cohort of subjects are needed to verify/strengthen the findings of this study.

**Keywords:** magnetoencephalography, picture naming, object recognition, cognitive neuroscience, visual perception.

**Acknowledgements.** This study was supported by the Portuguese Foundation for Science and Technology and the Portuguese Ministry of Science, Technology and Higher Education (UID/PSI/01662/2019), through the national funds (PIDDAC). The data analysis was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 19-12-00050. The authors acknowledge Dr. Adriana Sampaio and Elena Garayzábal Heinze for their role in administering the experiments, fruitful suggestions, and financial support. We would also like to thank Eduardo López-Caneda and Alberto J. González-Villar for their help and support in data collection. Lastly, we thank the participating children and their parents along with the King's College La Moraleja, Hastings School Madrid and C.E.I.P. Principe de Asturias who helped with the data collection and their invaluable input and support.

\*These authors contributed equally to this work.

**For citation:** Chholak P, Tabari F, Pisarchik AN. Revealing the neural network underlying covert picture-naming paradigm using magnetoencephalography. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):76–95. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-76-95

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

Научная статья  
УДК 530.182, 612.821.1  
DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-76-95

## Выявление нейронной сети, лежащей в основе парадигмы скрытого наименования изображений, с помощью магнитоэнцефалографии

П. Чхолак<sup>1\*</sup>, Ф. Табари<sup>2\*</sup>, А. Н. Писарчик<sup>1,3</sup>✉

<sup>1</sup>Мадридский технический университет, Испания

<sup>2</sup>Мадридский автономный университет, Испания

<sup>3</sup>Университет Иннополис, Россия

E-mail: parth.chholak@ctb.upm.es, fatemeh.tabari@estudiante.uam.es,

✉alexander.pisarchik@ctb.upm.es

Поступила в редакцию 10.07.2021, принята к публикации 01.08.2021,  
опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель работы — исследовать пространственно-временную активность мозга, вызываемую сенсорными и семантическими процессами во время именования объектов. Для этого были проведены эксперименты по магнитоэнцефалографии (МЭГ) с пятнадцатью субъектами, которые были поделены на три равные по размеру группы с разными типами языковой подготовки и навыков. *Методы и результаты.* Анализ записанных МЭГ-данных с применением метода граничных элементов для моделирования корковых поверхностей, а также использование динамического статистического параметрического отображения для решения обратной задачи, позволили реконструировать активность кортикального источника. Восстановленные корковые карты показали однородный ответ мозга во всех трех группах на стадии сенсорной обработки, в то время как ответы между тремя группами на стадии семантической обработки были разными. Кроме того, были построены средние временные курсы для ключевых областей мозга, таких как латеральная затылочная кора (ЛО), веретенообразная извилина (FG), область Брока (ВА) и область Вернике (ВА). Полученные результаты принимают унимодальные формы для временных рядов ЛО и ВА и бимодальные формы для FG и ВА. Единственный пик кривой ЛО и первый пик FG находятся во временном интервале стадии сенсорной обработки, тогда как единственный пик ВА, второй пик FG и второй пик ВА — на стадии семантической обработки. Первый пик ВА расположен на границе, разделяющей две стадии. В дополнение к разделению областей, участвующих в сенсорной и семантической обработке, наше исследование подтвердило участие FG в именовании объектов (впервые с использованием МЭГ), которые подвержены риску резекции во время вмешательств при мезиальной височной эпилепсии. *Заключение.* Способность называть тривиальные повседневные предметы является ключевой когнитивной функцией, которая тестируется после травм головы или операций на головном мозге. Получено новое понимание механизмов скрытого наименования картинок и их нейронального субстрата. Результаты работы подчеркивают важность веретенообразной извилины, которая подвержена риску резекции при мезиальной височной эпилепсии. Однако полный механизм этапа семантической обработки является более сложным и требует доработки. По-видимому, существуют двунаправленные связи между трехфокальной сетью, образованной веретенообразной извилиной, областью Брока и областью Вернике, и их причинно-следственные связи необходимо исследовать в будущем, как и связи этой сети с внутрипаритетальной бороздой. Следует также разработать надежный метод определения пиков вызванных откликов.

**Ключевые слова:** магнитоэнцефалография (МЭГ), наименование изображений, распознавание объектов, когнитивная нейробиология, визуальное восприятие.

**Благодарности.** Это исследование было поддержано Португальским фондом науки и техники и Португальским Министерством науки, технологий и высшего образования (UID/PSI/01662/2019), через национальные фонды (PIDDAC). Анализ данных был проведен при поддержке Российского научного фонда, грант № 19-12-00050. Авторы выражают признательность доктору Адриане Сампайо и Елене Гарайзабал Хайнце за их роль в проведении экспериментов, плодотворные предложения и финансовую поддержку. Мы также хотели бы поблагодарить Эдуардо Лопеса-Канеду и Альберто Дж. Гонсалеса-Вильяра за их помощь и поддержку в сборе данных. Наконец, мы благодарим участвующих детей и их родителей, а также Королевский колледж Ла Моралеа, Гастингс Школа Мадрида и С.Е.И.Р. Принципи де Астурия, которые помогли со сбором данных и оказали неоценимую помощь и поддержку.

\*Эти авторы внесли равный вклад в эту работу.

## Introduction

Accessing *semantic memory* can be defined as recollecting the meaning of a noun, generalisable to any context [1, 2]. Numerous neuropsychological studies support the role of ventral temporal cortex in semantic memory [3, 4], including ones based on electrical cortical stimulation [5, 6], positron emission tomography (PET) [7–11], magnetoencephalography (MEG) [12] and intracranial event-related potential (ERP) [13, 14]. These studies span the entire ventral temporal cortex, from the temporal pole and through the fusiform gyrus (FG). It is noteworthy that in a number of reviews, these brain areas are completely ignored, and the semantic function is assigned exclusively to the lateral temporal regions [15–18]. However, a recent study by Forseth et al. [19] convincingly argues that semantic memory is located in the FG, which previously has also been referred to as the basal temporal language area [5, 6].

A popular paradigm for studying semantic memory is *picture-naming*, which includes an auditory or visual description of an object, followed by the naming of that object by the participant [19, 20]. The naming can either be overt when the subject speaks the name out loud, or it can be covert, which means that the subject mentally rehearses saying the name but does not actually say it.

Cognition in the picture-naming task can be divided into three stages, gradually progressing with a clear functional specialization [21]: (1) sensory processing, (2) semantic processing, and (3) articulation. These stages were distinguished in a recent electrocorticography (ECoG) study using spatiotemporal broadband gamma activity (BGA) patterns [19]. The researchers found that the place and timing of sensory processing depends on the sensory modality used to describe the object to be named. In the case of visual picture-naming, it was localized in the lateral occipital (LO) cortex. Activation spreads forward along two hierarchical visual processing streams from the early visual cortex [22, 23]: (I) Ventral stream – caudal to rostral FG and (II) Dorsal stream – occipital pole to the intraparietal sulcus (IPS).

After the sensory processing stage, both auditory and visual naming experiments demonstrate concurrent activity in FG, IPS, inferior frontal gyrus (IFG), and supplementary motor area (SMA) in contrast to the presentation of nonsensical stimuli [19]. The activity in the SMA is accompanied by sensorimotor activations corresponding to the articulation unlike other three regions that precede any such sensorimotor activity. Therefore, the neural substrate of semantic processing can be reduced to a three-locus brain network comprising of FG, IPS and IFG.

It is generally accepted that IFG is involved in semantic selection and phonological processing [24–26] segregated along an anterior-posterior axis [27, 28]. The anterior pars triangularis (Brodmann region 45) performs top-down control of the semantic network, possibly with feed-forward and feedback information encoded in distinct frequency bands [29, 30]. At the same time, the posterior pars opercularis (Brodmann area 44) controls the language production aspects. These two areas together form the Broca's area (BA), widely recognised as a critical component for speech production [31, 32]. Although the exact nature of speech production is not yet known, there is some evidence that BA coordinates the activity of the cerebral cortex to convert information into motor codes of the cortex to produce words [33]. In fact, BA acts as an interface between the lexical-semantic and articulatory networks. Direct cortical stimulation of this area results in a modality-independent naming deficit, i.e. inability to name the object described either visually or auditorily [19].

It should be noted that FG and IPS are critical for semantic encoding. The study by Forseth et al. [19] showed lesser overlap of the heteromodal semantic network in IPS than in FG, probably

because the task was focused on common object-naming rather than action-naming, which can involve more parietal regions [34–36]. Whereas, direct cortical stimulation of the FG leads to speech arrest [6]. Atrophy and hypometabolism in the anterior FG has also been documented in patients with semantic dementia [37, 38].

Another brain region relevant here is the Wernicke's area that has been designated diverse roles in different language studies. In particular, it has been considered a secondary region engaged with IFG in semantic control [28, 39], a central site for semantic representation [18], or a lexical interface [26]. In the recent review of the area by Binder [40], he discussed the variability in its localisation across subjects and studies, and generalised its location to Brodmann areas 22 (posterior superior temporal gyrus or pSTG) and 40 (supramarginal gyrus) that surround the left posterior sylvian fissure. However, the functional definition of the area can lead to its localisation virtually anywhere in the temporal cortex. For instance, it was localised to the posterior middle temporal gyrus (pMTG) in the work of Forseth et al. [19]. Therefore, for the purposes of our research that closely matches the study of Forseth et al. [19], we will use Brodmann area 22 which is adjacent to the pMTG as the Wernicke's area.

As mentioned above, the involvement of the ventral temporal lobe is disputed, and further investigation is needed to confirm and characterize its role. This region is especially at risk during surgical resections for mesial temporal lobe epilepsy [19]. Curiously, minimally invasive approaches such as laser interstitial thermal ablation, which generally spare the FG, show a reduction in post-operational deficits such as object naming, further highlighting the role of FG in semantic processing [41, 42]. Further, the individual roles of each of the studied areas and their coordinated activity are not completely understood and require further investigation. Therefore, the goal of this study is to reveal the spatio-temporal activation patterns from the lenses of MEG in performing the covert picture-naming of common objects and thus, to understand the likely roles of the involved language processing areas such as IFG (Broca's area), FG, pSTG (Wernicke's area), and LO. In the process, we also validate the involvement of ventral temporal regions such as FG.

In order to segregate the stages of sensory processing and semantic processing, we designed the experiment in a foreign language with subjects divided in different groups of equal sizes based on their language proficiencies and mode of language schooling. We expected sensory processing stage to be homogeneous among the three groups and the semantic processing stage to be heterogeneous.

## 1. Materials and methods

Our study involved fifteen children who speak English as a second language. All participants were right-handed with no history of neurological or cognitive impairment. Right-handedness or left-hemispheric language dominance was validated using Edinburgh Handedness Inventory [43]. Their English proficiency scores were tested using the Oxford Quick Placement Test which can have a maximum score of 60.

The participants were divided into three groups ( $N = 5$  subjects in each group) based on their mode of language schooling. Group-1 is formed by children who were taught English as a Foreign Language (EFL) for at least 5 hours/week. These students have the lowest proficiencies, but not so low as to lose comparability (score  $41.00 \pm 2.07$ ). Group-2 includes children belonging to Content and Language Integrated Learning (CLIL) system with intermediate levels of English proficiency (score  $46.40 \pm 2.59$ ). Essentially, CLIL involves teaching certain subjects such as natural sciences, social sciences, and arts and crafts in a foreign language such as English. These students receive a weekly English training of at least 11 hours/week including EFL and the other aforementioned subjects. Finally, Group-3 is formed by highly-proficient children (score  $55.00 \pm 1.46$ ) that belong to the *immersion*

teaching program [44] taught in two British schools of Madrid, Spain. Herein, all courses are taught in English, except social studies and Spanish language, for at least 25 hours/week. No significant differences in non-verbal intelligence were found between the groups as per the Raven's SPM 60-item test. One of the subjects from Group-3 (Subject-7) was later excluded from analysis due to highly noisy data.

All participants resided in Madrid, Spain. The mean ages of children in Groups-1 and 2 were 11.4 years and was 12.0 years in Group-3. The age difference is due to the heterogeneous classification of grades in different schools, i.e., the 5th grade of one school is equivalent to the 6th grade of another school. The gender distribution in each group was roughly balanced (3, 2, and 3 females out of 5 subjects in Groups-1, 2, and 3, respectively).

The experiments were carried out between 2015 and 2018, and approved by the local Ethics Committee. Written informed consents were obtained from the parents of all children who voluntarily participated in this study. All analyses were carried out using MNE-Python 0.22.0 [45], except for the statistical analysis which was carried out in MATLAB R2019a.

**1.1. Stimuli and task.** During the data acquisition, the participants completed a covert visual picture-naming task to avoid muscle contamination artifacts. The task consisted of 120 trials divided into two blocks of 60 images each, presented in a pseudo-random order in which the participants were asked to mentally rehearse naming the object shown in a picture, e.g., “bat” or “tree”. The stimulus images were presented for 3000 ms, followed by a blank screen for a variable duration of 1700–2300 ms. Therefore, each trial lasted for approximately 5 seconds and the total experiment duration was close to 12 minutes. The stimuli were selected from a set of pre-normalised description naming cues, MultiPic databank (<https://www.bcbl.eu/databases/multipic>), and presented using Psychopy software [46].

**1.2. MEG recording and preprocessing.** Brain activity was recorded with the Elekta Neuromag® (Elekta AB, Stockholm, Sweden) magnetoencephalography (MEG) whole-head scanner (102 magnetometers and 204 planar gradiometers) inside a magnetically shielded room (VacuumSchmelze GmbH, Hanau, Germany) at the Center for Biomedical Technology, Universidad Politécnica de Madrid, Spain. The participants sat comfortably 135 cm from a translucent screen onto which the stimuli were projected. Their legs were extended, and their hands were either on their knees or on an armrest in front of them. Digital models of the head shape of each subject were determined prior to the MEG recording using a digitizer (3D Space Fast-Track, Polhemus, Colchester, VT, USA) that were co-registered with three anatomical reference points (nasion, left and right preauricular). Channels with poor signal quality were manually removed from consideration after visual inspection for artifacts, and a temporal Signal-Space Separation (tSSS) filter was applied for artifact removal using MaxFilter software (v2.2). The length of raw data buffer was changed from the default value of 4 to 10 seconds for more efficient suppression of internal interference, while the subspace correlation limit was set as 0.98. The signals from the removed noisy channels were replaced with the weighted average signals of the neighbouring channels depending on their respective distances. The head position relative to the MEG scanner was continuously monitored using four head position indicator (HPI) coils placed around the head.

Vertical electrooculogram and electrocardiogram activity were also recorded using dedicated channels for subsequent correction of artifacts from eye blinking and cardiac activity. The sampling rate was 1000 Hz, and an online anti-aliasing bandpass filter was implemented in the range 0.1–330 Hz. The recorded data were converted and stored in the Brain Imaging Data Structure (BIDS) format [47].

While analysing the raw data, we identified the time instants of stimulus presentation from the events log generated using a parallel port channel connecting the stimulus presenting computer to the MEG recording computer. Due to an inherent 56-ms average delay of the graphic card, the actual

stimulus appeared on the screen after this specified delay for logged events. Therefore, we adjusted this delay in all subsequent analysis.

Due to technical errors, it was impossible to record electrocardiographic (ECG) activity of Subjects 7–15. In addition, both ECG and electrooculography (EOG) were not recorded for Subject 5. As a result, we applied subspace-projection (SSP) correction only for eye blinks in all subjects except Subject 5 for whom no artefact removal was performed. After artifact removal, the raw data were processed using a 1–20 Hz bandpass filter with zero-lag finite impulse response (FIR) and Hamming windowing.

$N = 120$  trials (–500 to 1000 ms) corresponding to the total number of presented images were generated for each subject. Then, the baseline was adjusted using data from –500 ms to 0 ms in each trial. Due to technical problems, the total number of trials were less than 120 for some subjects. The number of images shown to each subject are presented in Table 1.

Table 1. Total number of pictures shown

Subject	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Group	2	3	1	1	1	2	3	3	3	2	2	3	1	1	2
Pictures	120	120	120	120	120	120	111	98	82	89	85	87	87	89	83

The time series of  $N$  trials were time locked to the image presentation moment and they were averaged for each subject to produce event-related fields (ERF).

**1.3. Source reconstruction.** The standard default anatomy from FreeSurfer [48] was warped to match the digitized head points recorded with the Polhemus Fastrak device. The surface-based source space was tuned using recursively subdivided octahedron spacing, and then a geometric brain model was created using the boundary element method (BEM). The surface was downsampled to 5120 points, and a single layer model with a conductivity of 0.33 S/m was used. Finally, the BEM solution was created using a linear collocation approach. Using the BEM model and source space, a direct solution was generated, which was essentially a transformation of the source space activity to the recorded channel space activity based on the head geometry and conductivity, also known as *forward model*. The source orientations were based on the brain surface. Additionally, the elements of the forward model matrix were scaled using predetermined factors to account for the differences in magnetometer and gradiometer recordings of the same cortical activity.

To compute the inverse solution, we needed, in addition to the forward model, a noise covariance matrix, which was obtained by calculating the sample coherence from the baseline period of each epoch, i.e., from –500 to 0 ms. Thus, noise covariance matrix was calculated from individual epochs without averaging. The inverse operator was then assembled with a strong emphasis on radial activity. The source variances of tangential dipole components were weighted by a factor of 0.2 to ensure the indicated emphasis to radial activity. Additionally, since deeper brain sources have significantly less influence on recorded data than cortical activity that is closer to the surface, the forward model was normalised using exponential depth-weighting with an exponent of 0.8.

The inverse problem is an ill-posed problem in that it has infinite solutions as the degrees of freedom (number of modelled brain sources) far exceed the number of constraints (number of channels). Thus, the excessive degrees of freedom are handled using regularisers based on some assumed priors regarding the solution. Three widely popular approaches to solve the inverse problem respectively aim for solutions with minimum norm, minimum variance, or fitting a small number of equivalent current dipoles in the brain. Here, we used the dynamic statistical parametric mapping (dSPM) technique [49] which is a minimum variance method with the regularisation parameter set to the default value of

$(1/3)^2 = 0.111$ . At each source location, the source activity was estimated as the vector norm of all tangential and radial source activities.

Thus, we obtained an inverse solution showing the estimated average brain source activity underlying the recorded MEG data upon stimuli presentation. The activity of cerebral cortex could then be observed in an interactive figure, showing different images at different times.

**1.4. Evoked responses in regions of interest.** From the ERFs in the channel space, we estimated the evoked response in the source space using the inverse operator and smoothed the time courses using the Savitzky–Golay filter with 251-ms window size and polynomial order 3 as in the work done by Forseth et al. [19].

To find a representative time course of the brain sources located in regions such as LO, FG, BA and WA, we used the first right singular vectors after applying singular value decomposition to all the time courses in the regions of interest. These signals were then scaled to match the average per-vertex power in the corresponding region of interest. First, the dominant source orientations in each region were determined, and then a sign flip was applied to all sources, the directions of whom were opposite to the dominant one.

In addition, we averaged the ERF for subjects belonging to the three groups, and a global average ERF for all subjects was also calculated. A weighted average was used considering the total number of trials for each subject according to Table 1 in order to account for the inter-subject variability in total number of trials. We used Desikan–Killany atlas to mark the LO and the FG, and Brodmann atlas to mark the BA and the WA.

**1.4.1. Statistical analysis.** The most prominent local peaks in the evoked responses were evaluated after setting a minimum prominence level of 5% peak-to-peak amplitude for a peak to be identified. The average amplitudes and latencies of these peaks were then independently studied. The number of samples in each group were 5 except in Group-3 which had 4 samples after dropping Subject-7. The significance level  $\alpha$  was kept to be 0.05. The differences between the average peak amplitudes and latencies of all the groups in pairs of two were checked for statistical significance via a post-hoc power analysis. The standard deviation was estimated using the pooled standard deviation ( $\sigma_p$ ) approach over any two groups, Group- $i$  and Group- $j$ , such that

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{(n_i - 1)\sigma_i^2 + (n_j - 1)\sigma_j^2}{n_i + n_j - 2}}.$$

The sample size was kept to be 5 for comparisons between Group-1 and 2, whereas it was conservatively kept as 4 in the other two cases involving Group-3.

## 2. Results

**2.1. Cortical activation maps.** Cortical activation maps obtained from source localisation were time-averaged in the intervals: 0–250 and 250–750 ms post-stimulus onset to capture the prominently active regions in the sensory and semantic processing stages, respectively. The respective average cortical maps for all the three groups are shown in Figs. 1, 2, and 3.

During the first 250 ms or the sensory processing stage, the cortical maps are similar for all three groups; visual inspection shows activations in lateral occipital cortex (LO), intraparietal sulcus (IPS), fusiform gyrus (FG), precuneus, and lingual gyrus. Over the next period from 250–750 ms or the semantic processing stage, the activation maps intensify and spread forward. All groups show activations in LO, Wernicke’s area (WA), Broca’s area (BA), FG, IPS, superior temporal sulcus (STS), hippocampal gyrus, and precuneus. Simple eyeballing suggests that in contrast to Group-2, BA is more strongly activated in Group-1, while in Group-3 the activity is partial.

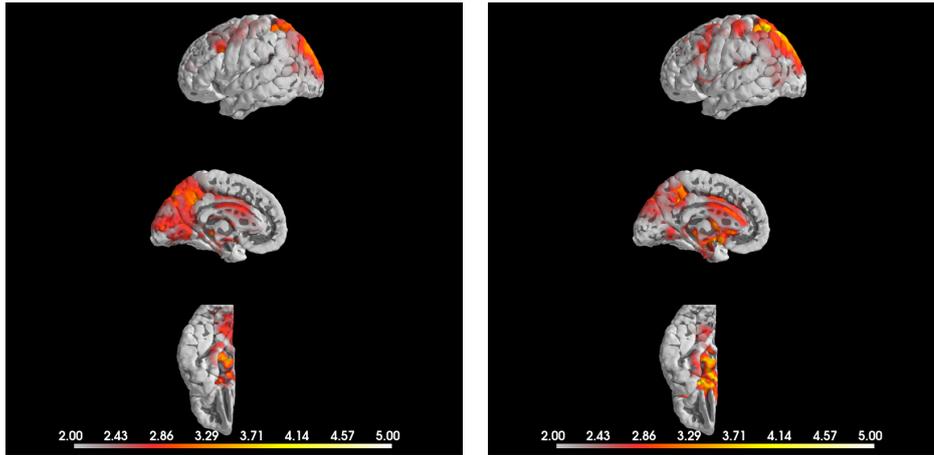


Fig. 1. dSPM cortical maps for Group-1 averaged over 0–250 ms (LEFT) and 250–750 ms (RIGHT) (color online)

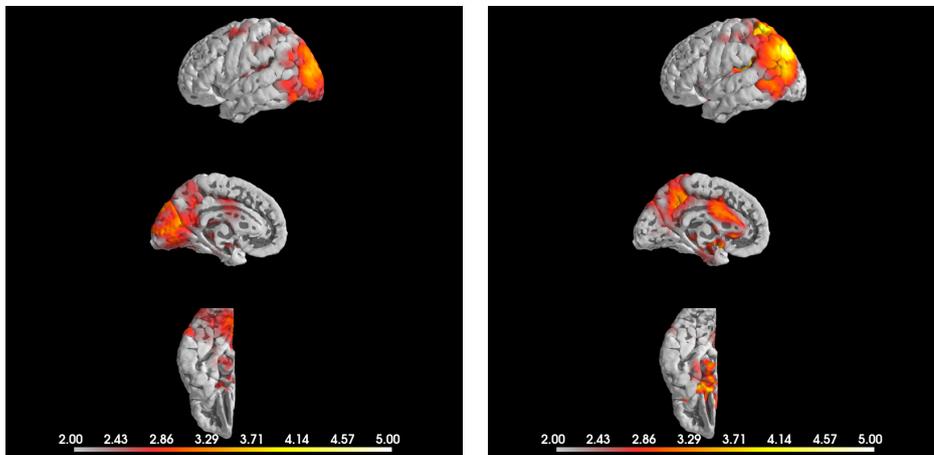


Fig. 2. dSPM cortical maps for Group-2 averaged over 0–250 ms (LEFT) and 250–750 ms (RIGHT) (color online)

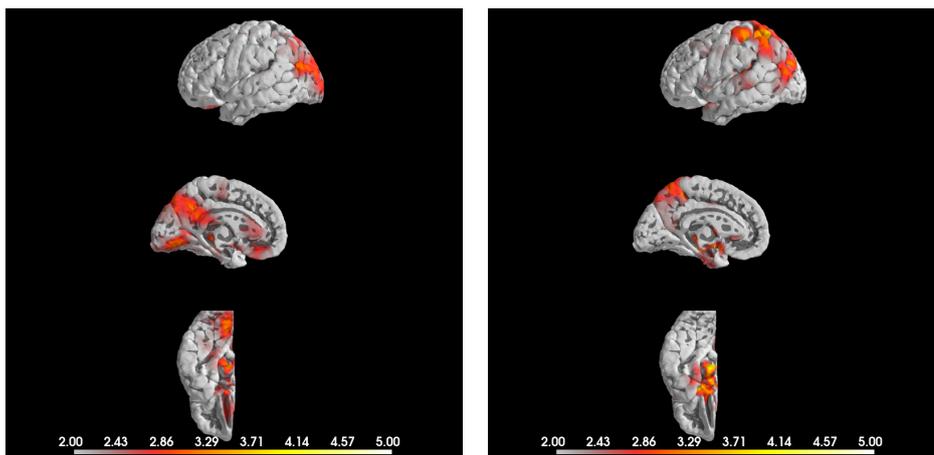


Fig. 3. dSPM cortical maps for Group-3 averaged over 0–250 ms (LEFT) and 250–750 ms (RIGHT) (color online)

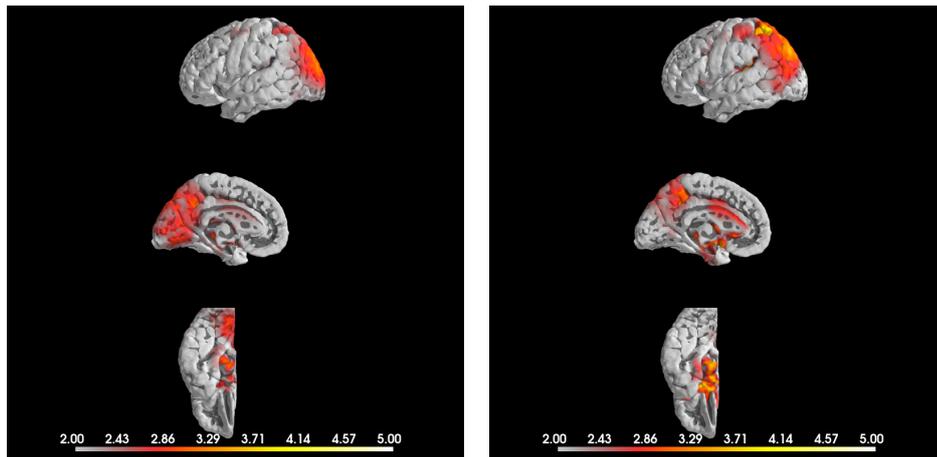


Fig. 4. dSPM cortical maps for all subjects averaged over 0–250 ms (LEFT) and 250–750 ms (RIGHT) (color online)

The cortical maps of the two stages averaged over all participants are shown in Fig. 4. An interesting observation is that activity from the early visual cortex is seen spreading forward ventrally from caudal to rostral FG, and dorsally from the occipital pole to the IPS, as was expected from the discussion in Introduction. Additionally, we also see a migration of activity from the cuneus and lingual gyrus towards the anterior cingulate and hippocampal gyrus.

**2.2. Average source time-courses in regions of interest.** We then estimated the intra-group average of the source time-courses corresponding to the four regions of interest. The evoked responses in LO, BA, WA, and FG for Groups 1, 2, and 3 are shown in Figs. 5, *a*, *b* and *c*, respectively. The vertical

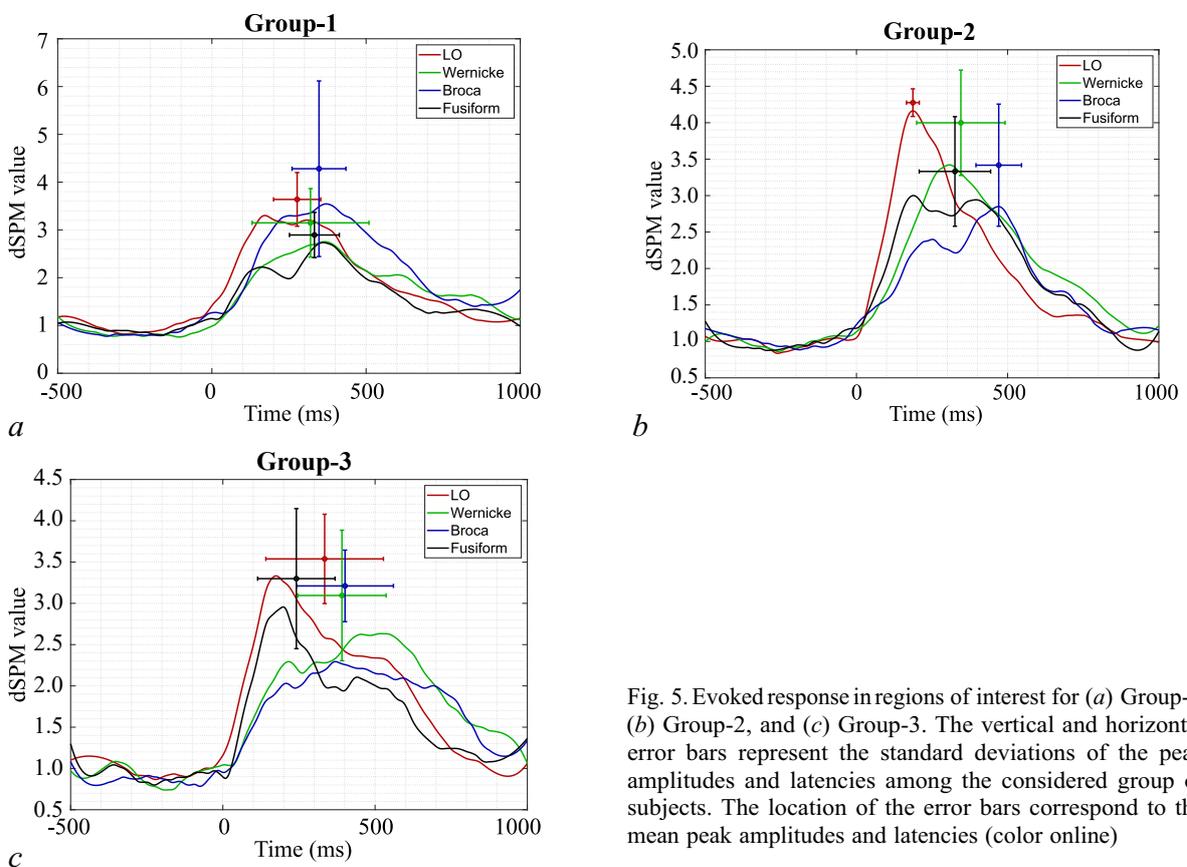


Fig. 5. Evoked response in regions of interest for (a) Group-1, (b) Group-2, and (c) Group-3. The vertical and horizontal error bars represent the standard deviations of the peak amplitudes and latencies among the considered group of subjects. The location of the error bars correspond to the mean peak amplitudes and latencies (color online)

and horizontal error bar magnitudes are double the standard deviations of the peak amplitudes and latencies, respectively. Each error bar is located at the coordinates corresponding to the mean amplitude and latency of the most prominent peak of the evoked response curve it corresponds to.

**2.2.1. Power analysis of region-wise peak latencies.** A common feature for all three groups is that the LO and FG are activated first, followed by WA and BA. Particularly, the region-wise mean latencies in all three groups are as shown in Table 2. However, this promptness of LO wasn't found to be statistically significant in most subjects. As shown in Table 3, only Group-2 showed significant promptness of LO in comparison to the other 3 brain areas. Further, we note from both Fig. 5 (eyeballing) and Table 3 (power analysis) that the responses from the four regions were most distinctive in Group-2, followed by Group-3 and then by Group-1. Due to high inter-subject variability and lack of a sharp unimodal LO response in individual subjects, the prominent LO peak is not correctly identified and hence, the LO promptness is not statistically significant.

Table 2. Region-wise mean latencies (ms)

ROI	LO	WA	BA	FG
Group-1	276	320	347	332
Group-2	187	345	470	326
Group-3	334	391	401	241
All subjects	261	348	405	305

Table 3. **Power analysis of region-wise mean latency differences.** Percentage power denoting statistical significance of differences in mean latencies of each region

Group-1					Group-2				
%	LO	WA	BA	FG	%	LO	WA	BA	FG
LO	—	14.02	48.24	37.41	LO	—	<b>86.92</b>	<b>100.00</b>	<b>90.86</b>
WA	—	—	9.79	6.92	WA	—	—	63.21	8.62
BA	—	—	—	9.50	BA	—	—	—	<b>84.72</b>
FG	—	—	—	—	FG	—	—	—	—

Group-3				
%	LO	WA	BA	FG
LO	—	13.24	14.83	22.65
WA	—	—	6.20	51.86
BA	—	—	—	52.61
FG	—	—	—	—

One can see that the delay in WA and BA peaks was most pronounced, although insignificantly, in Group-2 ( $P = 63.21\%$ ) as opposed to the delays in Group-1 ( $P = 9.79\%$ ) and Group 3 ( $P = 6.20\%$ ). In both Group-1 and 2, we see that BA has a bimodal response and the second peak is consistently identified as the prominent peak, whereas WA seemingly has a unimodal response and the prominent peak is identified in the vicinity of its peak. On the other hand, the definition of the peaks is less clearer in Group-3. Although, manual inspection of Fig. 5 suggests that the WA and BA responses of Group-3 have drifted to the right in comparison to Group-2, the prominent peaks still remain in the centre. Thus, even though we observe WA and BA responses to be occurring later than the first FG peak in Group-3, the differences were not significant (WA:  $P = 51.86\%$ ; BA:  $P = 52.61\%$ ). Whereas in Group-2, significant promptness of FG was only observed versus BA ( $P = 84.72\%$ ). All three groups showed bimodal FG responses. It is interesting to see that the identified prominent peaks are different in the three groups. In Group-1, the second FG peak has a higher amplitude more commonly and therefore,

the identified prominent peak is the second FG peak which belongs to the semantic processing stage. Whereas in Group-3, the amplitudes of the first peak are generally higher and therefore, the first peak is identified as the prominent peak which belongs to the sensory processing stage. Since the amplitudes of the two FG peaks are much closer in Group-2, the prominent peak is localised somewhere in the middle of the two peaks. Nonetheless, we still see significant delay between the BA response and the intermediate FG peak in Group-2 ( $P = 84.72\%$ ). Group-1 showed no such significant delay between the FG response, and the WA ( $P = 6.92\%$ ) and the BA ( $P = 9.50\%$ ) response as the second FG peak is supposed to concur WA and BA peaks during the semantic processing stage.

**2.2.2. Power analysis of region-wise peak amplitudes.** The region-wise mean amplitudes of the most prominent peaks in each group are tabulated in Table 4. Their differences too were inspected for statistical significance and the results of the corresponding power analysis are shown in Table 5. The amplitudes were more distinguishable in Group-1 and 2 than in Group-3. The LO responses were generally the highest except in Group-1 where the BA response was insignificantly higher ( $P = 22.35\%$ ). In both Group-1 and 2, the FG response was the lowest and there was significant difference between the FG and the LO peaks for both (Group-1:  $P = 83.51\%$ ; Group-2:  $P = 93.02\%$ ). Taking FG as a datum in both, we notice some interesting behaviour in the two groups. In Group-1, BA response was higher than the lowest response among all regions, i.e. the FG response, although the difference in amplitudes was not significant ( $P = 60.31\%$ ). On the other hand, in the same group, the WA response was even closer to the FG response leading to an even more insignificant difference ( $P = 19.46\%$ ). Whereas in Group-2, we see such an amplified-but-insignificantly-higher response for WA ( $P = 51.27\%$ ) which is greater than the BA response ( $P = 7.49\%$ ). In fact, the BA response in Group-2 is that low so as to be significantly lower than the highest region-wise response, i.e., the LO response ( $P = 82.50\%$ ). This trend of downplayed BA response was also seen in Group-3, although insignificantly ( $P = 27.49\%$ ).

Table 4. Region-wise mean peak amplitudes (dSPM)

ROI	LO	WA	BA	FG
Group-1	3.6386	3.1479	4.2803	2.8939
Group-2	4.2751	3.9990	3.4174	3.3312
Group-3	3.5382	3.0951	3.2109	3.2990
All subjects	3.8340	3.4314	3.6868	3.1573

Table 5. **Power analysis of region-wise mean peak amplitude differences.**  
Percentage power denoting statistical significance of differences in mean peak amplitudes of each region

Group-1					Group-2				
%	LO	WA	BA	FG	%	LO	WA	BA	FG
LO	—	40.93	22.35	<b>83.51</b>	LO	—	25.23	<b>82.50</b>	<b>93.02</b>
WA	—	—	44.49	19.46	WA	—	—	39.64	51.27
BA	—	—	—	60.31	BA	—	—	—	7.49
FG	—	—	—	—	FG	—	—	—	—

Group-3				
%	LO	WA	BA	FG
LO	—	26.81	27.49	13.34
WA	—	—	8.78	10.60
BA	—	—	—	7.56
FG	—	—	—	—

Figure 6 shows the evoked responses in the regions of interest averaged over all subjects. For LO and WA, there are single distinguishable peaks. Whereas for BA and FG, there are two peaks. Even though the prominent LO peak is placed slightly to the right of the peak in the LO curve, the latency analysis showed that the LO response was earlier than the second peak of the BA response ( $P = 99.69\%$ ). Whereas, the difference between the latencies of the LO peak and the WA peak was high but not significant ( $P = 73.86\%$ ). The prominent FG peak was localised in the middle of the two FG peaks was not significantly far in time from either the LO peak ( $P = 40.66\%$ ) or the WA peak ( $P = 31.59\%$ ). However, the intermediate FG prominent peak was still much earlier than the second BA peak ( $P = 93.92\%$ ).

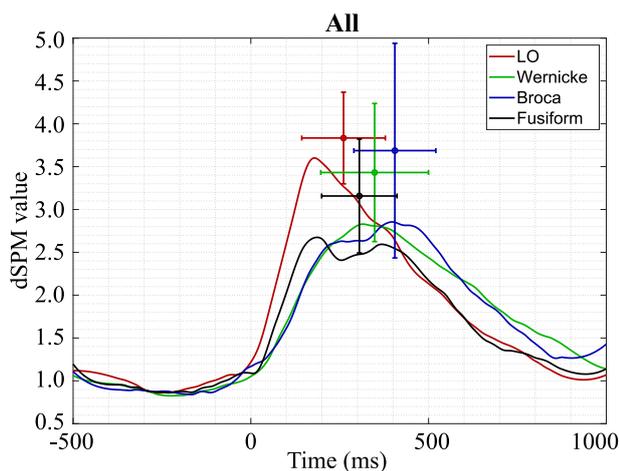


Fig. 6. Evoked response in regions of interest for all subjects (color online)

In sum, we saw the only LO peak concurring with the first FG peak roughly near 200 ms (sensory processing stage), wherein the LO peak was higher than the FG peak. This was followed by two BA peaks, the second FG peak and the only WA peak. The second peaks of FG and BA, and the WA peak concurred roughly near 350 ms (semantic processing stage) with insignificant delays between them. Although, lacking statistical backing, the followed order of peaks was: 1) WA peak, 2) second FG peak, and 3) second BA peak. The prominent peak in BA was never the first BA peak in any group and hence, it was never selected by our peak characterising algorithm. Therefore, it is difficult to comment whether the first BA peak fell in the sensory or semantic processing stage. All notable activity in all regions of interest lasted roughly between 0–750 ms. BA response was unusually high in Group-1 and WA response was unusually high in Group-2.

Table 6. Region-wise power analysis of mean differences of latencies and peak amplitudes over all subjects

Peak latencies					Peak amplitudes				
%	LO	WA	BA	FG	%	LO	WA	BA	FG
LO	–	73.86	<b>99.69</b>	40.66	LO	–	67.05	13.52	<b>98.99</b>
WA	–	–	44.21	31.59	WA	–	–	21.65	37.12
BA	–	–	–	<b>93.92</b>	BA	–	–	–	58.99
FG	–	–	–	–	FG	–	–	–	–

**2.3. Average source time-courses in subject groups.** Figure 7 shows the evoked responses of each region of interest separately averaged over all subjects of a selected group.

**2.3.1. Power analysis of group-wise peak latencies and amplitudes in LO.** In Fig. 7, a we notice that all three groups exhibit nearly unimodal LO activity. In particular, the average latencies for Group-1, 2 and 3 were 276, 187 and 334 ms, respectively. The LO response in Group-2 was significantly earlier than in Group-1 ( $P = 89.67\%$ ), whereas this difference did not reach significance in case of Group-3 ( $P = 55.36\%$ ). However, it is easier to notice the failure of the prominent peak identification again. The identified prominent LO peaks are shifted to the right in both Group-1 and 3 and correctly positioned only in Group-2. One may notice from simple eyeballing that the first LO peaks in both Group-1 and 3 are actually concurring with the correctly identified LO peak of Group-2. Moreover,

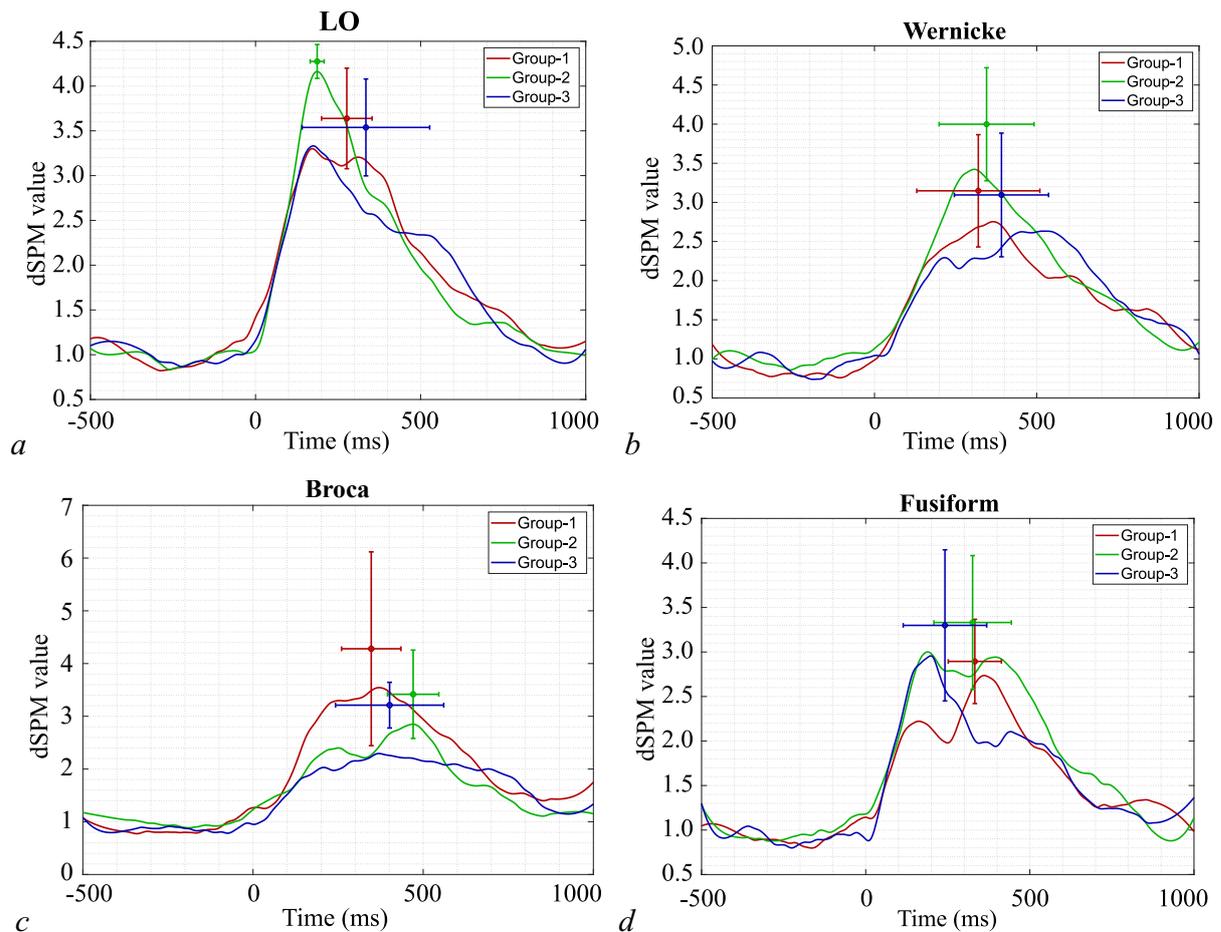


Fig. 7. Evoked response in regions of interest for all three groups of subjects (color online)

Group-2 displayed a relatively higher LO peak than Group-1 ( $P = 86.92\%$ ) and 3 ( $P = 89.11\%$ ). The mean amplitude of the LO response in Group-2 is very high because the response is well defined and aligned which is evident from the narrow error bars in comparison to Group-1 and 3.

**2.3.2. Power analysis of group-wise peak latencies and amplitudes in WA.** Further, we see higher-but-insignificant activation of WA (Fig. 7, b) in Group-2 than in Group-1 ( $P = 70.12\%$ ) and Group-3 ( $P = 57.86\%$ ). Therefore, we again see an amplified WA response in Group-2. All groups presented a unimodal waveform. All three groups had very similar mean latencies. Particularly, Group-1, 2 and 3 had mean latencies of 320, 345 and 391 ms, respectively. The largest possible power of difference in mean latencies among the three groups was between Group-1 and Group-3 and it was found insignificant ( $P = 16.17\%$ ).

**2.3.3. Power analysis of group-wise peak latencies and amplitudes in BA.** From Fig. 7, c, one can see that at least Group-1 and 2 show two prominent BA peaks. The first peak occurs at the border of the sensory and semantic processing stage, while the second peak certainly appears in the semantic processing stage, i.e., between 250–750 ms. The prominent peak latencies were again compared for the three groups in BA and we found that the second BA peak in Group-1 was quite earlier than in Group-2 ( $P = 89.66\%$ ). Group-3 response lacked a clear prominent peak and had an intermediate mean latency of 388 ms which did not differ significantly from both Group-1 ( $P = 17.07\%$ ) and 2 ( $P = 23.35\%$ ). The Group-3 response was plateau-like and receded the last.

**2.3.4. Power analysis of group-wise peak latencies and amplitudes in FG.** The evoked response in FG (Fig. 7, *d*) has two prominent peaks in all three groups. As noted earlier, the second peak is more prominent in Group-1, whereas the first peak is more prominent in Group-3. The highest peaks of all three groups had similar amplitudes with a maximum difference between Group-1 and Group-2 having  $P = 36.36\%$ . From Fig. 7, *d*, one can see that the difference lies in both the first and the second FG peaks of Group-1 and 2 when taken together. Instead, the prominent peak analysis only allows us to compare the second FG peak of Group-1 with the first FG peak of Group-3. Both FG peaks of Group-2 had similar amplitudes that did not differ much from the highest peaks in Group-1 and 3, as noted.

Table 7. **Power analysis of group-wise mean latency differences.** Percentage power denoting statistical significance of differences in mean latencies of each group

LO				WA			
%	Group-1	Group-2	Group-3	%	Group-1	Group-2	Group-3
Group-1	–	<b>89.67</b>	16.22	Group-1	–	8.69	16.17
Group-2	–	–	55.36	Group-2	–	–	12.62
Group-3	–	–	–	Group-3	–	–	–

BA				FG			
%	Group-1	Group-2	Group-3	%	Group-1	Group-2	Group-3
Group-1	–	<b>86.60</b>	17.07	Group-1	–	6.45	39.16
Group-2	–	–	23.35	Group-2	–	–	28.66
Group-3	–	–	–	Group-3	–	–	–

Table 8. **Power analysis of group-wise mean peak amplitude differences.** Percentage power denoting statistical significance of differences in mean peak amplitudes of each group

LO				WA			
%	Group-1	Group-2	Group-3	%	Group-1	Group-2	Group-3
Group-1	–	<b>86.92</b>	8.78	Group-1	–	70.12	6.28
Group-2	–	–	<b>89.11</b>	Group-2	–	–	57.86
Group-3	–	–	–	Group-3	–	–	–

BA				FG			
%	Group-1	Group-2	Group-3	%	Group-1	Group-2	Group-3
Group-1	–	30.24	32.05	Group-1	–	36.36	24.79
Group-2	–	–	12.07	Group-2	–	–	5.71
Group-3	–	–	–	Group-3	–	–	–

### 3. Discussion

ERF underlying covert naming of common objects presented in visual images were estimated for three groups of subjects with different kinds of language schooling. The observed activity demonstrated a serial response separated into different stages with distinguishable spatiotemporal activation patterns and cognitive functions [21]. The first stage of sensory processing (0–250 ms post-stimulus onset) occurred homogeneously over all groups in the same regions such as LO and FG and showed a similar temporal activation in those regions. Our results are consistent with those of the heteromodal study by Forseth et al. [19] in the 0–250 ms interval which also motivated the choice of the particular time window to study sensory processing stage in our study.

The brain region extending anteriorly and ventrally from the lateral occipital cortex to the posterior temporal cortex responds strongly to visual stimuli containing objects that can be better identified than to fuzzy shapes [50–54]. Studies based on event-related potentials on these regions of cerebral cortex showed greater activation when observing identifiable objects compared to scrambled images [55–58]. The activated areas include parts of the LO, the ventral occipito-temporal area, the posterior and mid FG, and the occipito-temporal sulcus and are collectively referred to as the lateral occipital complex in an extensive review of functional magnetic resonance imaging (fMRI) research demonstrating the leading role of this substrate in object recognition [20].

Therefore, we expect LO and FG to be equally active for all the three groups of subjects, regardless of their language proficiency, at least at the moment corresponding to object recognition. At later stages, corresponding to the object naming, we can see inconsistency between the groups.

The subsequently investigated response was in the range 250–750 ms after the stimulus first appeared that corresponded to the semantic processing stage. As noted earlier, salient evoked responses in all groups and regions of interest were only seen until 750 ms. Thus, we chose the leftover time window after sensory processing stage to represent the semantic processing stage. Widespread activity was observed in regions such as LO, BA (IFG), WA (pSTG), and FG. We found amplified response of WA in Group-2 as compared to the other groups (Fig. 7, b), although it failed to reach acceptable statistical power of 80%. Whereas in Group-1, BA response instead was unusually amplified (Fig. 1). Thus, the stage of semantic processing was different for all three groups, since they differed in their language training and proficiencies. We infer that the techniques employed by the brains of these differently abled subjects were unique and depended upon their schooling. Other areas of noteworthy cognitive activity were IPS, STS, precuneus, lingual and hippocampal gyrus.

It would be helpful to compare our results with the work by Forseth et al. [19], but unfortunately, they did not define the semantic processing stage using the time axis corresponding to stimulus onset. Instead, they defined the semantic processing stage ranging from –2000 to –1000 ms to articulation onset. Since our experiments used covert naming instead of overt naming, we do not have the time markers of articulation onset. In other words, a disadvantage of using the covert naming paradigm was that we did not see a clearer definition of the state of "silent" articulation that would underlie the mental speech of the selected word. Since there were virtually no words, we did not observe any activity in the sensorimotor cortex or the SMA. Nevertheless, we did observe the cortical activations migrating from the early visual cortex along the ventral and dorsal hierarchical streams [22, 23] between the sensory and semantic processing stages.

We then examined the temporal response of LO, FG, BA and WA in all three groups of subjects (Fig. 5) and the global average across all subjects (Fig. 6). From the global average, we can see that at the stage of sensory processing (0–250 ms), activation in the visual cortex should be expected, corresponding to object recognition. The LO peak was the earliest to occur. The first FG peak during this period hypothetically corresponds to the semantic memory access required to recognise the shown object. These functions attributed to LO and FG should not be affected by their knowledge of the articulation language but only of the language in which they can implicitly name an object. Between the two BA peaks, we saw one WA peak and a second FG peak. The peak latencies for the identified second BA peaks were significantly later than for LO. Although, the difference between the LO and WA peak latencies was also nearly significant. Especially, if we consider that the estimated LO peak is shifted to the right of the LO peak in curve (Fig. 6). Since they occur in the time interval suggested for semantic processing, we propose continuous coordinated activity between BA, WA, and FG aimed to finding the correct word of the articulation language to name the displayed object. Based on the evoked responses within the group, we observed that the LO and FG peak latencies in the early stage of sensory

processing were the same for all three groups, while the peaks in BA, WA, and FG that belonged to the later stage of semantic processing were delayed as proficiency improved (Fig. 5). Even in the inter-group responses (Fig. 7), the peaks of the second stage were more lagging for groups with higher proficiency. Furthermore, Group-1 had the earliest BA response among the three groups (Fig. 7, c). Perhaps this is an indicator of how intermediate proficiency subjects spend their time choosing and pronouncing words in contrast to low and high proficiency subjects that either can't choose or don't require longer to choose, respectively.

Interestingly, the second FG peak was lower than first FG peak in Group 3, as opposed to Groups 1 and 2. If we suppose that FG does represent lexical access once in the subject's native language during the sensory processing stage, then in the articulation language at the stage of semantic processing, the appearance of lower second peak for Group 3 is reasonable, since the proficiency in the articulation language is native-like. However, for Groups 1 and 2, the two peaks corresponding to naming the object in the native and articulation languages, respectively, are either equally high or the second peak is higher than the first, demonstrating more effort to name an object in a foreign language. Moreover, the occurrence of semantic memory access during sensory processing also supports the idea that the memories of the past guide the perception of the present.

Finally, activations of language-related areas such as BA (Fig. 7, c) and WA (Fig. 7, b) in Group-1 and 2 were higher than in Group-3. Phonological processing and word formation in a foreign language will require additional effort, and this may be the reason why we see the highest BA response in Group 1 with the lowest proficiency and why it decreases as the proficiency increases. Group-2 may have a better understanding of the phonological aspects, but struggles with word selection. Therefore, we see the WA response in Group-2 is higher than in Group-1 and 3.

**3.1. Limitations of the study and future directions.** This study was admittedly limited in its sample size and further work is needed to statistically back up the likely trends and mechanisms proposed in this paper. The role of IPS was not explored in the same manner as the other studied areas and can turn out to be the missing piece in describing how the FG, BA, and WA are communicating during the semantic processing stage. Lastly, the method for identifying prominent peaks needs to be developed in the future. The method works well for homogeneous unimodal responses or in cases of multimodal responses where the peak of interest is always at a particular prominence ranking with the other peaks. The method easily fails in cases where multiple peaks of similar prominence concur and the resulting peak is located at the centre of those peaks. A possible direction could be to look at projecting the individual evoked responses to a common average evoked response and extracting the evoked response features from that projection.

The study was planned to have roughly the same number of male and female participants. However, due to odd numbers of total participants and participants per group, it was not possible to have an exactly balanced gender ratio. Moreover, due to the later exclusion of subject 7, the ratio was further skewed. The used methods and analysis pipelines are publicly available at <https://github.com/pchholak/picname> and can be readily used in other studies to ensure conformity of analysis methods.

## Conclusions

We have conducted a series of MEG experiments based on the covert picture-naming task with fourteen non-native English speakers, who made up three groups with different kinds of language training and proficiencies. We found two stages of brain response, corresponding to sensory and semantic processing, which differed in spatio-temporal cortical activation. The active regions found in our two-stage response are consistent with the active regions found in other studies based on techniques such as

fMRI, ECoG, and direct electrical stimulation. The sensory processing stage remained uniform across the three differently proficient groups, whereas the semantic processing stage showed inconsistencies. A new understanding of the mechanisms of covertly naming pictures and their neuronal substrate has been obtained. The complete mechanism of the semantic processing stage seems to be much more complex and requires further work. It seems that there are bidirectional connections between the three-focal network formed by fusiform gyrus, Broca's area, and Wernicke's area, and their causal relationships need to be investigated in the future. The connections of this network with the intraparietal sulcus also need to be investigated. In addition, a robust method to identify evoked response peaks needs to be developed in future. Finally, this work highlights the importance of fusiform gyrus, which is at risk of resection in mesial temporal lobe epilepsies.

## References

1. Quillian M. Semantic memory. In: Minsky M, editor. *Semantic Information Processing*. Cambridge, MA: MIT Press; 1968. P. 216–270.
2. Tulving E. Episodic and semantic memory. In: Tulving E, Donaldson W, editors. *Organization of Memory*. New York: Academic Press; 1972. P. 381–403.
3. Warrington EK. The selective impairment of semantic memory. *Q. J. Exp. Psychol.* 1975;27(4):635–657. DOI: 10.1080/14640747508400525.
4. Nestor PJ, Fryer TD, Hodges JR. Declarative memory impairments in Alzheimer's disease and semantic dementia. *NeuroImage*. 2006;30(3):1010–1020. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2005.10.008.
5. Burnstine TH, Lesser RP, Hart J, Uematsu S, Zinreich SJ, Krauss GL, Fisher RS, Vining EPG, Gordon B. Characterization of the basal temporal language area in patients with left temporal lobe epilepsy. *Neurology*. 1990;40(6):966–970. DOI: 10.1212/WNL.40.6.966.
6. Lüders H, Lesser RP, Hahn J, Dinner DS, Morris HH, Wyllie E, Godoy J. Basal temporal language area. *Brain*. 1991;114(2):743–754. DOI: 10.1093/brain/114.2.743.
7. Damasio H, Grabowski TJ, Tranel D, Hichwa RD, Damasio AR. A neural basis for lexical retrieval. *Nature*. 1996;380(6574):499–505. DOI: 10.1038/380499a0.
8. Noppeney U, Price CJ. A PET study of stimulus- and task-induced semantic processing. *NeuroImage*. 2002;15(4):927–935. DOI: 10.1006/nimg.2001.1015.
9. Bright P, Moss H, Tyler LK. Unitary vs multiple semantics: PET studies of word and picture processing. *Brain Lang*. 2004;89(3):417–432. DOI: 10.1016/j.bandl.2004.01.010.
10. Sharp DJ, Scott SK, Wise RJS. Retrieving meaning after temporal lobe infarction: The role of the basal language area. *Ann. Neurol.* 2004;56(6):836–846. DOI: 10.1002/ana.20294.
11. Spitsyna G, Warren JE, Scott SK, Turkheimer FE, Wise RJS. Converging language streams in the human temporal lobe. *J. Neurosci.* 2006;26(28):7328–7336. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.0559-06.2006.
12. Marinkovic K, Dhond RP, Dale AM, Glessner M, Carr V, Halgren E. Spatiotemporal dynamics of modality-specific and supramodal word processing. *Neuron*. 2003;38(3):487–497. DOI: 10.1016/S0896-6273(03)00197-1.
13. Nobre AC, Allison T, McCarthy G. Word recognition in the human inferior temporal lobe. *Nature*. 1994;372(6503):260–263. DOI: 10.1038/372260a0.
14. Liu H, Agam Y, Madsen JR, Kreiman G. Timing, timing, timing: Fast decoding of object information from intracranial field potentials in human visual cortex. *Neuron*. 2009;62(2):281–290. DOI: 10.1016/j.neuron.2009.02.025.
15. Mesulam MM. From sensation to cognition. *Brain*. 1998;121(6):1013–1052. DOI: 10.1093/brain/121.6.1013.
16. Thompson-Schill SL. Neuroimaging studies of semantic memory: inferring «how» from «where». *Neuropsychologia*. 2003;41(3):280–292. DOI: 10.1016/S0028-3932(02)00161-6.

17. Catani M, Ffytche DH. The rises and falls of disconnection syndromes. *Brain*. 2005;128(10): 2224–2239. DOI: 10.1093/brain/awh622.
18. Martin A. The representation of object concepts in the brain. *Annu. Rev. Psychol.* 2007;58:25–45. DOI: 10.1146/annurev.psych.57.102904.190143.
19. Forseth KJ, Kadipasaoglu CM, Conner CR, Hickok G, Knight RT, Tandon N. A lexical semantic hub for heteromodal naming in middle fusiform gyrus. *Brain*. 2018;141(7):2112–2126. DOI: 10.1093/brain/awy120.
20. Grill-Spector K, Kourtzi Z, Kanwisher N. The lateral occipital complex and its role in object recognition. *Vis. Res.* 2001;41(10–11):1409–1422. DOI: 10.1016/S0042-6989(01)00073-6.
21. Indefrey P, Levelt WJM. The spatial and temporal signatures of word production components. *Cognition*. 2004;92(1–2):101–144. DOI: 10.1016/j.cognition.2002.06.001.
22. Ungerleider LG, Mishkin M. Two cortical visual systems. In: Ingle DJ, Goodale MA, Mansfield RJW, editors. *Analysis of Visual Behavior*. Cambridge: MIT Press; 1982. P. 549–586.
23. Felleman DJ, Van Essen DC. Distributed hierarchical processing in the primate cerebral cortex. *Cereb. Cortex*. 1991;1(1):1–47. DOI: 10.1093/cercor/1.1.1-a.
24. Thompson-Shill SL, D’Esposito M, Aguirre GK, Farah MJ. Role of left inferior prefrontal cortex in retrieval of semantic knowledge: A reevaluation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 1997;94(26): 14792–14797. DOI: 10.1073/pnas.94.26.14792.
25. Wagner AD, Paré-Blagoev EJ, Clark J, Poldrack RA. Recovering meaning: Left prefrontal cortex guides controlled semantic retrieval. *Neuron*. 2001;31(2):329–338. DOI: 10.1016/S0896-6273(01)00359-2.
26. Hickok G, Poeppel D. The cortical organization of speech processing. *Nat. Rev. Neurosci.* 2007;8(5):393–402. DOI: 10.1038/nrn2113.
27. Poldrack RA, Wagner AD, Prull MW, Desmond JE, Glover GH, Gabrieli JDE. Functional specialization for semantic and phonological processing in the left inferior prefrontal cortex. *NeuroImage*. 1999;10(1):15–35. DOI: 10.1006/nimg.1999.0441.
28. Badre D, Poldrack RA, Paré-Blagoev EJ, Insler RZ, Wagner AD. Dissociable controlled retrieval and generalized selection mechanisms in ventrolateral prefrontal cortex. *Neuron*. 2005;47(6):907–918. DOI: 10.1016/j.neuron.2005.07.023.
29. Bastos AM, Vezoli J, Bosman CA, Schoffelen JM, Oostenveld R, Dowdall JR, De Weerd P, Kennedy H, Fries P. Visual areas exert feedforward and feedback influences through distinct frequency channels. *Neuron*. 2015;85(2):390–401. DOI: 10.1016/j.neuron.2014.12.018.
30. Michalareas G, Vezoli J, van Pelt S, Schoffelen JM, Kennedy H, Fries P. Alpha-beta and gamma rhythms subserve feedback and feedforward influences among human visual cortical areas. *Neuron*. 2016;89(2):384–397. DOI: 10.1016/j.neuron.2015.12.018.
31. Lazar RM, Mohr JP. Revisiting the contributions of Paul Broca to the study of aphasia. *Neuropsychol. Rev.* 2011;21(3):236–239. DOI: 10.1007/s11065-011-9176-8.
32. Trupe LA, Varma DD, Gomez Y, Race D, Leigh R, Hillis AE, Gottesman RF. Chronic apraxia of speech and Broca’s area. *Stroke*. 2013;44(3):740–744. DOI: 10.1161/STROKEAHA.112.678508.
33. Flinker A, Korzeniewska A, Shestyuk AY, Franszczuk PJ, Dronkers NF, Knight RT, Crone NE. Redefining the role of Broca’s area in speech. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2015;112(9): 2871–2875. DOI: 10.1073/pnas.1414491112.
34. Chao LL, Martin A. Representation of manipulable man-made objects in the dorsal stream. *NeuroImage*. 2000;12(4):478–484. DOI: 10.1006/nimg.2000.0635.
35. Binder JR, Desai RH. The neurobiology of semantic memory. *Trends Cogn. Sci.* 2011;15(11): 527–536. DOI: 10.1016/j.tics.2011.10.001.
36. Conner CR, Chen G, Pieters TA, Tandon N. Category specific spatial dissociations of parallel processes underlying visual naming. *Cereb. Cortex*. 2014;24(10):2741–2750. DOI: 10.1093/cercor/bht130.

37. Binney RJ, Embleton KV, Jefferies E, Parker GJ, Lambon Ralph MA. The ventral and inferolateral aspects of the anterior temporal lobe are crucial in semantic memory: Evidence from a novel direct comparison of distortion-corrected fMRI, rTMS, and semantic dementia. *Cereb. Cortex.* 2010;20(11):2728–2738. DOI: 10.1093/cercor/bhq019.
38. Mion M, Patterson K, Acosta-Cabronero J, Pengas G, Izquierdo-Garcia D, Hong YT, Fryer TD, Williams GB, Hodges JR, Nestor PJ. What the left and right anterior fusiform gyri tell us about semantic memory. *Brain.* 2010;133(11):3256–3268. DOI: 10.1093/brain/awq272.
39. Noppeney U, Phillips J, Price C. The neural areas that control the retrieval and selection of semantics. *Neuropsychologia.* 2004;42(9):1269–1280. DOI: 10.1016/j.neuropsychologia.2003.12.014.
40. Binder JR. The Wernicke area: Modern evidence and a reinterpretation. *Neurology.* 2015;85(24):2170–2175. DOI: 10.1212/WNL.0000000000002219.
41. Drane DL, Loring DW, Voets NL, Price M, Ojemann JG, Willie JT, Saindane AM, Phatak V, Ivanisevic M, Millis S, Helmers SL, Miller JM, Meador KJ, Gross RE. Better object recognition and naming outcome with MRI-guided stereotactic laser amygdalohippocampotomy for temporal lobe epilepsy. *Epilepsia.* 2015;56(1):101–113. DOI: 10.1111/epi.12860.
42. Hoppe C, Witt JA, Helmstaedter C, Gasser T, Vatter H, Elger CE. Laser interstitial thermotherapy (LiTT) in epilepsy surgery. *Seizure.* 2017;48:45–52. DOI: 10.1016/j.seizure.2017.04.002.
43. Oldfield RC. The assessment and analysis of handedness: The Edinburgh inventory. *Neuropsychologia.* 1971;9(1):97–113. DOI: 10.1016/0028-3932(71)90067-4.
44. Genesee F. Second language learning through immersion: A review of U.S. programs. *Rev. Educ. Res.* 1985;55(4):541–561. DOI: 10.2307/1170246.
45. Gramfort A, Luessi M, Larson E, Engemann DA, Strohmeier D, Brodbeck C, Parkkonen L, Hämäläinen MS. MNE software for processing MEG and EEG data. *NeuroImage.* 2014;86:446–460. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.10.027.
46. Peirce JW. PsychoPy—Psychophysics software in Python. *J. Neurosci. Methods.* 2007;162(1–2):8–13. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2006.11.017.
47. Niso G, Gorgolewski KJ, Bock E, Brooks TL, Flandin G, Gramfort A, Henson RN, Jas M, Litvak V, Moreau JT, Oostenveld R, Schoffelen JM, Tadel F, Wexler J, Baillet S. MEG-BIDS, the brain imaging data structure extended to magnetoencephalography. *Sci. Data.* 2018;5(1):180110. DOI: 10.1038/sdata.2018.110.
48. Fischl B. FreeSurfer. *NeuroImage.* 2012;62(2):774–781. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2012.01.021.
49. Dale AM, Liu AK, Fischl BR, Buckner RL, Belliveau JW, Lewine JD, Halgren E. Dynamic statistical parametric mapping: Combining fMRI and MEG for high-resolution imaging of cortical activity. *Neuron.* 2000;26(1):55–67. DOI: 10.1016/S0896-6273(00)81138-1.
50. Grill-Spector K, Kushnir T, Hendler T, Edelman S, Itzhak Y, Malach R. A sequence of object-processing stages revealed by fMRI in the human occipital lobe. *Hum. Brain Mapp.* 1998;6(4):316–328. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0193(1998)6:4<316::AID-HBM9>3.0.CO;2-6.
51. Grill-Spector K, Kushnir T, Edelman S, Itzhak Y, Malach R. Cue-invariant activation in object-related areas of the human occipital lobe. *Neuron.* 1998;21(1):191–202. DOI: 10.1016/S0896-6273(00)80526-7.
52. Murtha S, Chertkow H, Beauregard M, Evans A. The neural substrate of picture naming. *J. Cogn. Neurosci.* 1999;11(4):399–423. DOI: 10.1162/089892999563508.
53. Kourtzi Z, Kanwisher N. Cortical regions involved in perceiving object shape. *J. Neurosci.* 2000;20(9):3310–3318. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.20-09-03310.2000.
54. Doniger GM, Foxe JJ, Murray MM, Higgins BA, Snodgrass JG, Schroeder CE, Javitt DC. Activation timecourse of ventral visual stream object-recognition areas: High density electrical mapping of perceptual closure processes. *J. Cogn. Neurosci.* 2000;12(4):615–621. DOI: 10.1162/089892900562372.

55. Allison T, Ginter H, McCarthy G, Nobre AC, Puce A, Luby M, Spencer DD. Face recognition in human extrastriate cortex. *J. Neurophysiol.* 1994;71(2):821–825. DOI: 10.1152/jn.1994.71.2.821.
56. Allison T, Puce A, Spencer DD, McCarthy G. Electrophysiological studies of human face perception. I: Potentials generated in occipitotemporal cortex by face and non-face stimuli. *Cereb. Cortex.* 1999;9(5):415–430. DOI: 10.1093/cercor/9.5.415.
57. McCarthy G, Puce A, Belger A, Allison T. Electrophysiological studies of human face perception. II: Response properties of face-specific potentials generated in occipitotemporal cortex. *Cereb. Cortex.* 1999;9(5):431–444. DOI: 10.1093/cercor/9.5.431.
58. Puce A, Allison T, McCarthy G. Electrophysiological studies of human face perception. III: Effects of top-down processing on face-specific potentials. *Cereb. Cortex.* 1999;9(5):445–458. DOI: 10.1093/cercor/9.5.445.



*Парт Чхолок* — родился в Джайпуре, Индия (1995). Окончил Индийский технологический институт Бомбея (2017) по специальности инженер-механик. Получил степень магистра (2018) биомедицинской инженерии в Мадридском политехническом университете, Испания. Научные интересы: нейробиология, нелинейная теория. Является автором 20 публикаций, поддержанных грантами промышленности и Российского научного фонда. Активный член Международного общества физики и управления в России и Сети ALBA в Бельгии.

Испания, Мадрид  
Мадридский политехнический университет  
E-mail: parth.chholak@ctb.upm.es  
ORCID: 0000-0002-6437-7750



*Фатеме Табари* — родилась в Ширазе, Иран (1984). Окончила Университет Ясудж по специальности «английский язык и литература» (2007). Защитила диссертацию на тему «Нейронная сигнатура двуязычия» (2020, Мадридский автономный университет). Научные интересы: нейронные основы и связи, которые контролируют понимание, выработку и усвоение языка у здорового и патологического населения с помощью применения электрофизиологических методов. Автор нескольких научных статей и главы в книге. Является научным рецензентом журнала «Литература и языкознание». Получила грант Женевского университета (2017–2018) и работала в качестве приглашенного исследователя в Лаборатории мозга и языка, кампус биотехнологии. Активный член испанского общества *Española de Psicofisiología y Neurociencia Cognitiva y Afectiva (SEPNECA)*.

Испания, Мадрид  
Мадридский автономный университет  
E-mail: fatemeh.tabari@estudiante.uam.es  
ORCID: 0000-0002-4572-3283



*Писарчик Александр Николаевич* – кандидат физико-математических наук, профессор. Ведущий научный сотрудник Центра биомедицинских технологий Политехнического университета Мадрида и Университета Иннополис. Научные интересы – теория хаоса, синхронизация, мультистабильность, стохастические процессы и прерывистость, с приложениями к электронным, оптическим и биомедицинским системам. Автор 5 монографий, 17 глав книг, 10 патентов и более 280 статей в рецензируемых научных журналах. Под его руководством успешно защищено 10 диссертаций (Ph.D.) и завершено 30 научно-исследовательских проектов, в том числе Российского научного фонда. Является членом правления Международного общества физики и контроля (IPACS), Консорциума биомедицинских исследований в сети (CYBER) (Испания), а также Европейского, Итальянского и Мексиканского физических обществ.

Испания, Мадрид  
Мадридский политехнический университет  
Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Университет Иннополис  
E-mail: alexander.pisarchik@ctb.upm.es  
ORCID: 0000-0003-2471-2507



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья

УДК 57.024; 53.047

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-96-108

### Гемодинамический ответ в моторной коре на выполнение различных типов движения

А. А. Бадарин<sup>1,2</sup>✉, В. В. Грубов<sup>1,2</sup>, А. В. Андреев<sup>1,2</sup>, В. М. Антипов<sup>1</sup>, С. А. Куркин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Университет Иннополис, Россия

<sup>2</sup>Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, Калининград, Россия

E-mail: ✉Badarin.a.a@mail.ru, v.grubov@innopolis.ru, andreevandrei1993@gmail.com,  
vantipovm@gmail.com, kurkinsa@gmail.com

Поступила в редакцию 20.07.2021, принята к публикации 28.09.2021,  
опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — изучение особенностей гемодинамического ответа на выполнение различных типов движения (одиночное движение, серия движений, «тэппинг») правой рукой. **Методы.** В данной работе регистрация гемодинамического ответа осуществлялась с помощью функциональной ближней инфракрасной спектроскопии (прибор NIRScout от NIRx, Германия). Система NIRScout использует 16 оптодов (8 источников и 8 детекторов) для регистрации гемодинамического ответа в коре головного мозга с частотой дискретизации 7.8125 Гц. Оптоды неинвазивно размещаются на коже головы пациента путем установки в гнезда специальной шапочки EASYCAP. **Результаты.** Показано, что суммарный гемодинамический ответ в моторной коре левого полушария слабо различается между всеми рассматриваемыми видами движения, при этом выраженность контралатеральности демонстрирует существенные различия между типами движений. Сильнее всего контралатеральность выражена при выполнении серии движений, в то время как одиночное сжатие кисти вызывает наименьшую контралатеральность. **Заключение.** Полученные в работе результаты демонстрируют высокую чувствительность технологии функциональной ближней инфракрасной спектроскопии к выполнению различных типов движений. Здесь особо следует отметить короткие одиночные сжатия кисти, которые хорошо видны на характеристиках оксигенированного и дезоксигенированного гемоглобина, что может быть использовано при разработке и проектировании различных интерфейсов мозг – компьютер, в том числе и мультимодальных.

**Ключевые слова:** гемодинамический ответ, функциональная ближняя инфракрасная спектроскопия, тэппинг, движение руки, активность головного мозга.

**Благодарности.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2021-1748) в части разработки методов анализа данных. Экспериментальные работы поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант 19-52-55001). Куркин С. А. поддержан Советом по грантам Президента Российской Федерации (грант МД-1921.2020.9).

**Для цитирования:** Бадарин А. А., Грубов В. В., Андреев А. В., Антипов В. М., Куркин С. А. Гемодинамический ответ в моторной коре на выполнение различных типов движения // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 96–108.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-96-108

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Hemodynamic response in the motor cortex to execution of different types of movements

A. A. Badarin<sup>1,2</sup>✉, V. V. Grubov<sup>1,2</sup>, A. V. Andreev<sup>1,2</sup>, V. M. Antipov<sup>1</sup>, S. A. Kurkin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Innopolis University, Russia

<sup>2</sup>Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia

E-mail: ✉Badarin.a.a@mail.ru, v.grubov@innopolis.ru,  
andreevandrei1993@gmail.com, vantipovm@gmail.com, kurkinsa@gmail.com

Received 20.07.2021, accepted 28.09.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** Purpose of this work is the analysis of the hemodynamic response to the execution of various types of movements (single movement, series of movements, “tapping”) by the right hand. **Methods.** In this paper, the hemodynamic response was recorded using functional near infrared spectroscopy (NIRScout instrument from NIRx, Germany). The NIRScout system uses 16 optodes (8 sources and 8 detectors) to record the hemodynamic response in the cerebral cortex with a sampling rate of 7.8125 Hz. Optodes are non-invasively placed on the patient’s scalp by inserting into the sockets of a special cap “EASYCAP”. **Results.** We show that the total hemodynamic response in the motor cortex of the left hemisphere slightly differs between all the considered types of movement, while the severity of contralaterality demonstrates significant differences between the types of movements. Contralaterality is most pronounced when performing a series of movements, while a single squeeze of the hand causes the least contralaterality. **Conclusion.** The results obtained in this paper demonstrate the high sensitivity of functional near-infrared spectroscopy technology to the performance of various types of movements. It should be especially noted here short single hand squeezes, which are clearly visible on the characteristics of HbO and HbR, which can be used in the development and design of various brain – computer interfaces, including multimodal ones.

**Keywords:** hemodynamic response, functional NIRS, tapping, hand movement, brain activity.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2021-1748) in the development of data analysis methods. Experimental works were supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 19-52-55001). Kurkin S. A. was supported by the Council for Grants of the President of the Russian Federation (grant MD-1921.2020.9).

**For citation:** Badarin AA, Grubov VV, Andreev AV, Antipov VM, Kurkin SA. Hemodynamic response in the motor cortex to execution of different types of movements. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(1):96–108. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-96-108

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Изучение принципов и физических закономерностей работы головного мозга является одной из наиболее важных и активно исследуемых задач современной науки [1–7]. Одним из наиболее перспективных и мощных инструментов неинвазивной нейровизуализации для регистрации активности головного мозга является функциональная ближняя инфракрасная спектроскопия (фБИКС, fNIRS) [8, 9]. Данная технология использует свет в ближнем инфракрасном диапазоне для детектирования изменений уровня оксигенированного (HbO) и дезоксигенированного (HbR) гемоглобина вследствие гемодинамической активности мозга и быстрой доставки оксигенированной крови к активным кортикальным областям через нейроваскулярное соединение. Здесь следует отметить, что имеет место взаимосвязь между электрической активностью головного мозга и гемодинамическим ответом. Так, в работе [10] обнаружена высокая и значимая корреляция концентраций HbO и HbR с амплитудами электрической активности в альфа- и бета-диапазонах (8...13 Гц и 13...30 Гц, соответственно). При этом показано, что концентрация HbO отрицательно скоррелирована с десинхронизацией альфа- и бета-ритмов, а концентрация HbR характеризуется положительной корреляцией со снижением амплитуд обоих ритмов.

Заметим, что фБИКС регистрирует сигналы той же физиологической основы, что и функциональная магнитно-резонансная томография (фМРТ), поэтому обе технологии предоставляют

взаимосвязанные данные. В то же время фБИКС имеет ряд преимуществ: портативность, простота использования, возможность мониторинга в реальном времени, низкая чувствительность к двигательным артефактам, более высокое временное разрешение, возможность отдельной регистрации изменений как дезоксигемоглобина, так и оксигемоглобина [10, 11].

В настоящее время с помощью фБИКС активно проводятся исследования, направленные на изучение нейронной активности головного мозга [12]. Много работ направлено на оценку умственной нагрузки, то есть количества затраченных умственных усилий для выполнения той или иной задачи. В частности, в работе [13] авторы обнаружили, что изменение разницы между оксигенированным и дезоксигенированным гемоглобином значительно увеличивается с ростом уровня сложности задачи. Было показано, что изменения в гемодинамическом ответе чувствительны к большим различиям в сложности задания, в то время как чувствительность к меньшим различиям отсутствует и требует дополнительных исследований.

Другое применение фБИКС находит в различных гибридных мультимодальных интерфейсах мозг–компьютер [14–16], например, для оценки уровня внимания [17], в исследованиях по диагностике различных когнитивных нарушений [18] и других приложениях. Из-за наличия временной задержки между активацией определенного участка коры головного мозга и появлением в нем гемодинамического ответа, в большинстве экспериментальных парадигм испытуемым дается длительная нагрузка с продолжительными паузами между заданиями. В частности, при анализе двигательной активности с помощью фБИКС обычно выполняется серия одинаковых движений в рамках одного задания [10]. Здесь важно изучение и сравнение гемодинамического ответа на выполнение различных типов движения путем анализа изменений в концентрациях дезоксигемоглобина и оксигемоглобина [19]. В настоящее время эти вопросы мало изучены.

В данной работе представлены результаты анализа гемодинамического отклика головного мозга при выполнении различных типов движений. В качестве анализируемых сигналов была рассмотрена динамика оксигемоглобина и дезоксигемоглобина.

## 1. Методы

Сигналы фБИКС регистрировались при помощи прибора NIRScout (NIRx, Германия). Система NIRScout использует 16 оптодов (8 источников и 8 детекторов) для регистрации гемодинамического ответа в коре головного мозга с частотой дискретизации 7.8125 Гц. Оптоды неинвазивно размещаются на коже головы пациента путем установки в гнезда специальной шапочки EASYCAP. Каждый канал фБИКС образован парой «источник–детектор», которые расположены достаточно близко друг к другу. Оптимальное расстояние между источником и детектором составляет около 3 см из-за специфической формы траектории ближнего инфракрасного излучения: свет рассеивается в тканях коры головного мозга и на глубине примерно 3 см отражается в сторону детектора.

Расстановка оптодов была аналогична приведенной в работе [12] и покрывала моторную кору. На рис. 1, с приведен используемый монтаж с 23 каналами фБИКС. Кроме того, для лучшего понимания размещения оптодов на рис. 1, с показано расположение каналов ЭЭГ по международной схеме «10–10».

В эксперименте принимали участие двенадцать здоровых добровольцев: возраст — 22...38 лет, соотношение мужчин и женщин — 7/5, правши, не занимающиеся профессионально спортом, некурящие. Ни у одного из испытуемых не были диагностированы заболевания опорно-двигательного аппарата или центральной нервной системы. Каждого участника просили придерживаться здорового образа жизни в течение 48 часов перед экспериментом, что включало в себя 8-часовой сон, отказ от употребления алкоголя, ограниченное потребление кофеинсодержащих продуктов, умеренные физические нагрузки. Каждый участник предоставил информированное письменное согласие перед участием в эксперименте. Экспериментальная процедура была проведена

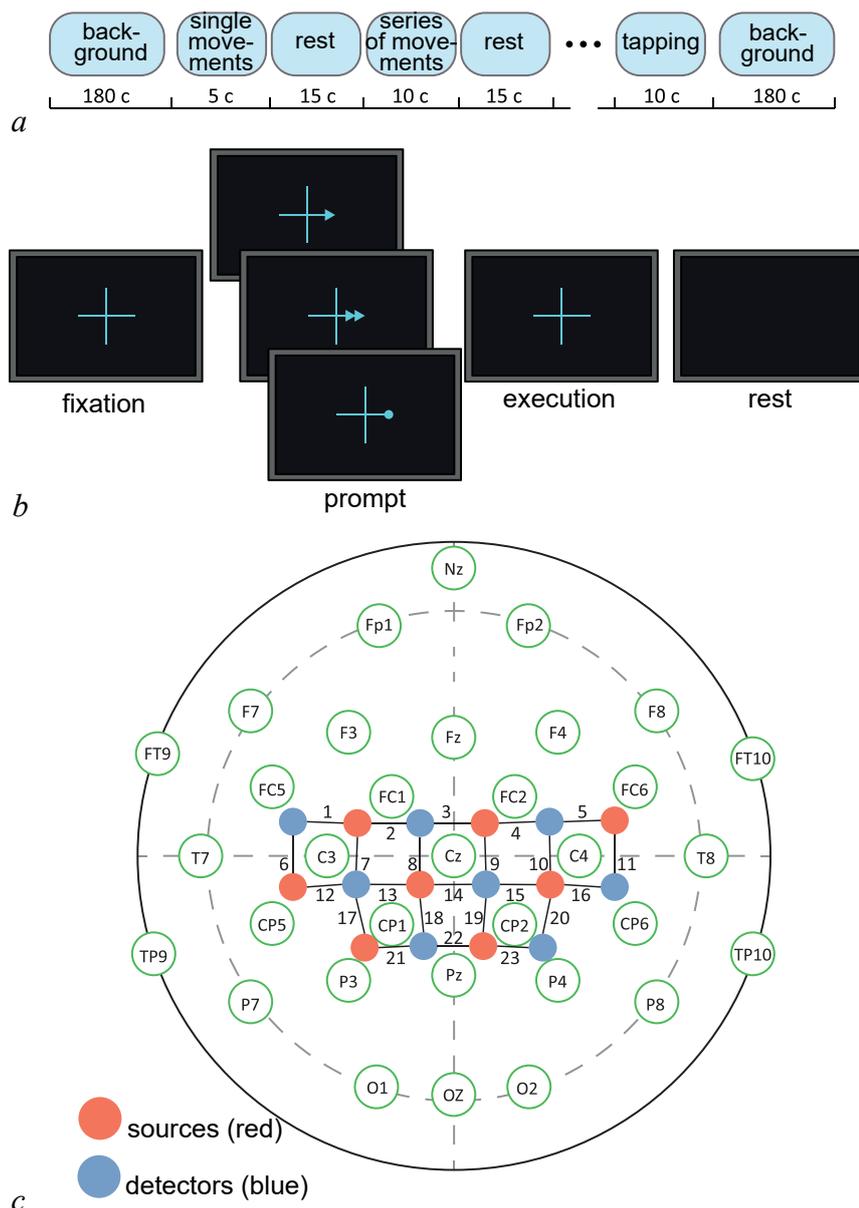


Рис. 1. *a* – Общий дизайн эксперимента; *b* – демонстрация предъявляемых испытуемому команд; *c* – используемая расстановка оптодов (цвет online)

Fig. 1. *a* – General design of the experiment; *b* – demonstration of commands presented to the subject; *c* – arrangement of optodes used (color online)

в соответствии с Хельсинкской декларацией и утверждена комиссией по этике Университета Иннополис.

Эксперименты проводились в первой половине дня. Перед началом эксперимента участники были проинформированы о его целях и методах, а также о возможных неудобствах. Испытуемые имели возможность задать любые интересующие вопросы и получить подробные ответы.

Эксперимент проводился следующим образом. Испытуемый сидел в удобном кресле и выполнял движения различных типов правой рукой согласно указаниям на мониторе, размещенном перед глазами испытуемого на расстоянии 70...80 см. Дизайн эксперимента включает в себя три типа движений: одиночное движение – испытуемый четко сжимает и разжимает кисть один раз, на выполнение отводится 5 секунд; серия движений – испытуемый несколько раз четко сжимает

и разжимает кисть в удобном для себя темпе в течение 10 секунд; «тэппинг» — поочерёдное постукивание большим пальцем по остальным пальцам кисти в удобном для себя темпе в течение 10 секунд.

Общий дизайн эксперимента схематично показан на рис. 1, *a*. Каждый эксперимент начинался и заканчивался 3-минутной записью фоновой активности, в течение которой испытуемому предлагалось расслабиться и не шевелить руками. Основная часть эксперимента состояла из 60 триалов, общая схема одного триала приведена на рис. 1, *b*. Каждый триал фБИКС начинался с фиксации внимания — на черном экране в центре появлялся светлый крест на 2 секунды. Затем поверх креста на 1.5 секунды появлялась подсказка, сообщающая испытуемому, какой тип движения необходимо выполнить: стрелка — одиночное движение, двойная стрелка — серия движений, точка — тэппинг пальцами. После этого подсказка исчезала и испытуемому давалось время выполнить требуемое движение. В конце триала демонстрировался черный экран в течение 15 секунд, и давалось время на отдых. Для каждого типа движений было выполнено 20 триалов, триалы для всех типов движений были перемешаны и предъявлялись в случайном порядке.

В экспериментах с фБИКС использовалось излучение с двумя длинами волн:  $\lambda_1 = 785$  нм и  $\lambda_2 = 850$  нм, которые проходят через кожу, костную ткань и воду, но хорошо поглощаются оксигемоглобином и дезоксигемоглобином, соответственно.

Экспериментальные данные фБИКС необходимо предварительно обрабатывать, чтобы их можно было использовать в качестве индикатора изменения оксигенации тканей. Поскольку оксигемоглобин и дезоксигемоглобин по-разному поглощают свет в ближнем инфракрасном диапазоне, мы рассчитали изменения в отраженном двухволновом свете с использованием модифицированного закона Бера–Ламберта [20]. В результате были получены две характеристические меры  $HbO$  и  $HbR$ , которые отражают скорость относительных изменений в уровнях концентрации оксигемоглобина и дезоксигемоглобина, соответственно.

Сбор данных фБИКС и процедура предварительной обработки выполнялись с помощью программного обеспечения NIRScout. Хорошо известно, что на экспериментальные данные фБИКС часто влияют побочные физиологические шумы и артефакты, характерные частоты которых находятся в диапазоне частот фБИКС, включая волны Майера (с типичной частотой, близкой к 0.1 Гц), дыхание (близкое к 0.25 Гц) и сердцебиение (около 1 Гц). Как упоминалось в обзорной статье [18], во многих случаях полосовой фильтрации достаточно для удаления низкочастотного физиологического шума в данных фБИКС. В связи с этим также был применён полосовой фильтр 0.01...0.1 Гц к сигналам фБИКС с помощью NIRScout, чтобы предотвратить эффект побочных физиологических воздействий.

## 2. Результаты

Прежде всего, были получены зависимости изменения окси- и дезоксигемоглобина для трёх рассматриваемых типов движения. Для это использовался 5-секундный фрагмент перед каждым двигательным актом, взятый из фазы отдыха предыдущего триала (или из фоновой активности в случае первого испытания). Этот дополнительный фрагмент использовался для выполнения процедуры коррекции базовой линии (так называемой *baseline correction*) для исключения влияния любой предыдущей активности на выполнение текущего задания. Затем полученные зависимости изменения окси- и дезоксигемоглобина были усреднены по 20 повторениям для каждого типа движения (рис. 2).

Видно, что выполнение движения вызывает рост  $HbO$  и уменьшение  $HbR$  по всей моторной коре, при этом наблюдается ярко выраженная контралатеральность, свойственная движениям рук. Действительно, амплитуда изменения концентраций  $HbO$  и  $HbR$  в левом полушарии больше, чем в правом, что обусловлено движением правой рукой. Изменения концентраций  $HbO$  и  $HbR$  в ответ на выполнения движения вызваны увеличенной метаболической потребностью мозга

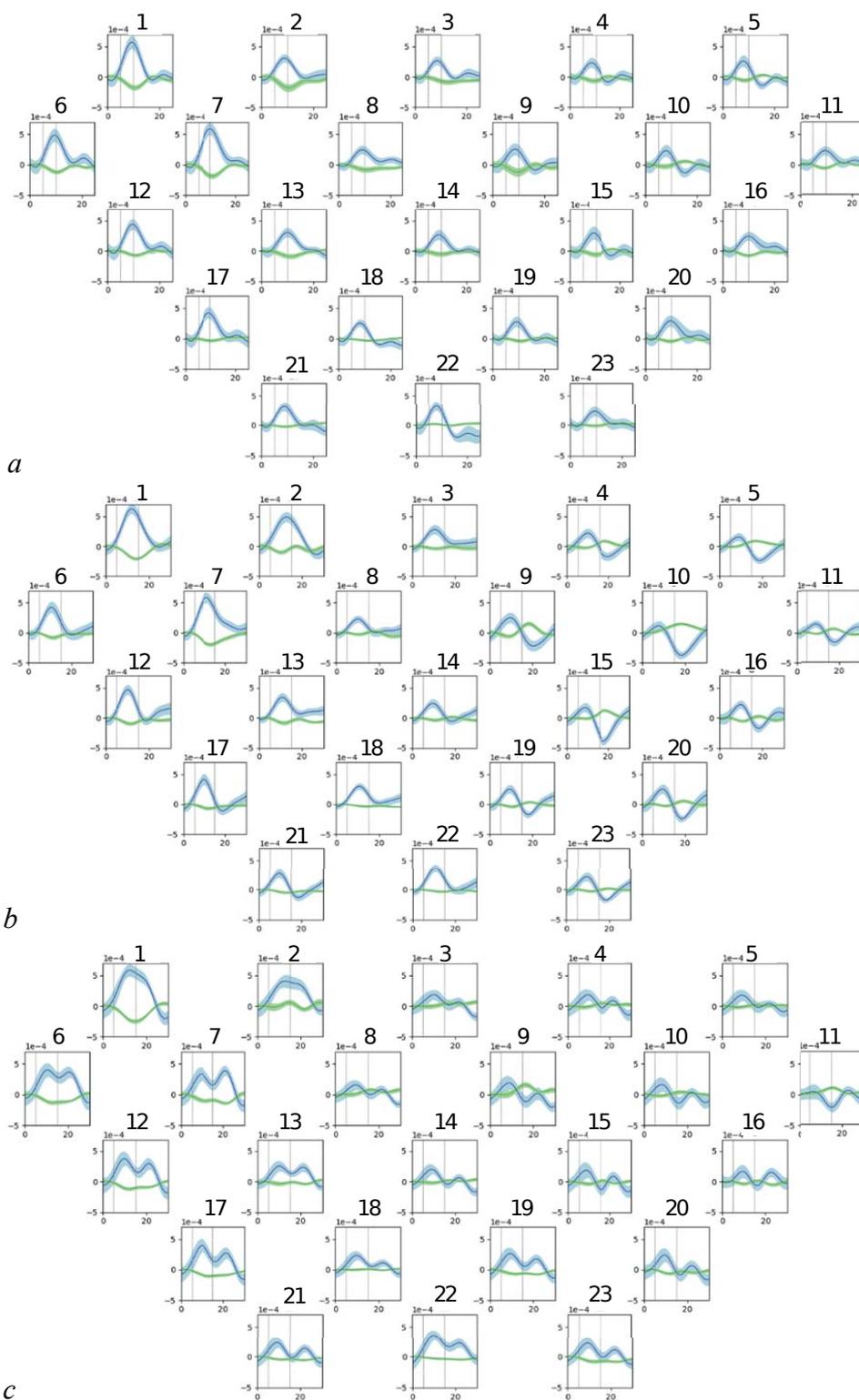


Рис. 2. Изменения окси- (синий) и дезоксигемоглобина (зеленый) для различных типов движения: *a* — одиночное движение; *b* — тэппинг; *c* — многократные повторения. Более светлым областям тех же цветов соответствует стандартная ошибка. Вертикальные штриховые линии обозначают начало/конец выполнения движения (цвет online)

Fig. 2. Changes in oxy- (blue) and deoxyhemoglobin (green) for different types of movement: *a* — single movement; *b* — tapping; *c* — multiple repetitions. Lighter areas of the same colors correspond to the standard error. Vertical dashed lines indicate the beginning/end of the movement (color online)

в кислороде, что приводит к переизбытку регионального мозгового кровотока для удовлетворения метаболических потребностей мозга. Гемодинамический ответ на увеличение нейронной активности определяется несколькими механизмами нервно-сосудистого взаимодействия, в частности, изменением диаметра капилляров [21]. Таким образом, избыток мозгового кровотока вызывает увеличение концентрации HbO и снижение концентрации HbR.

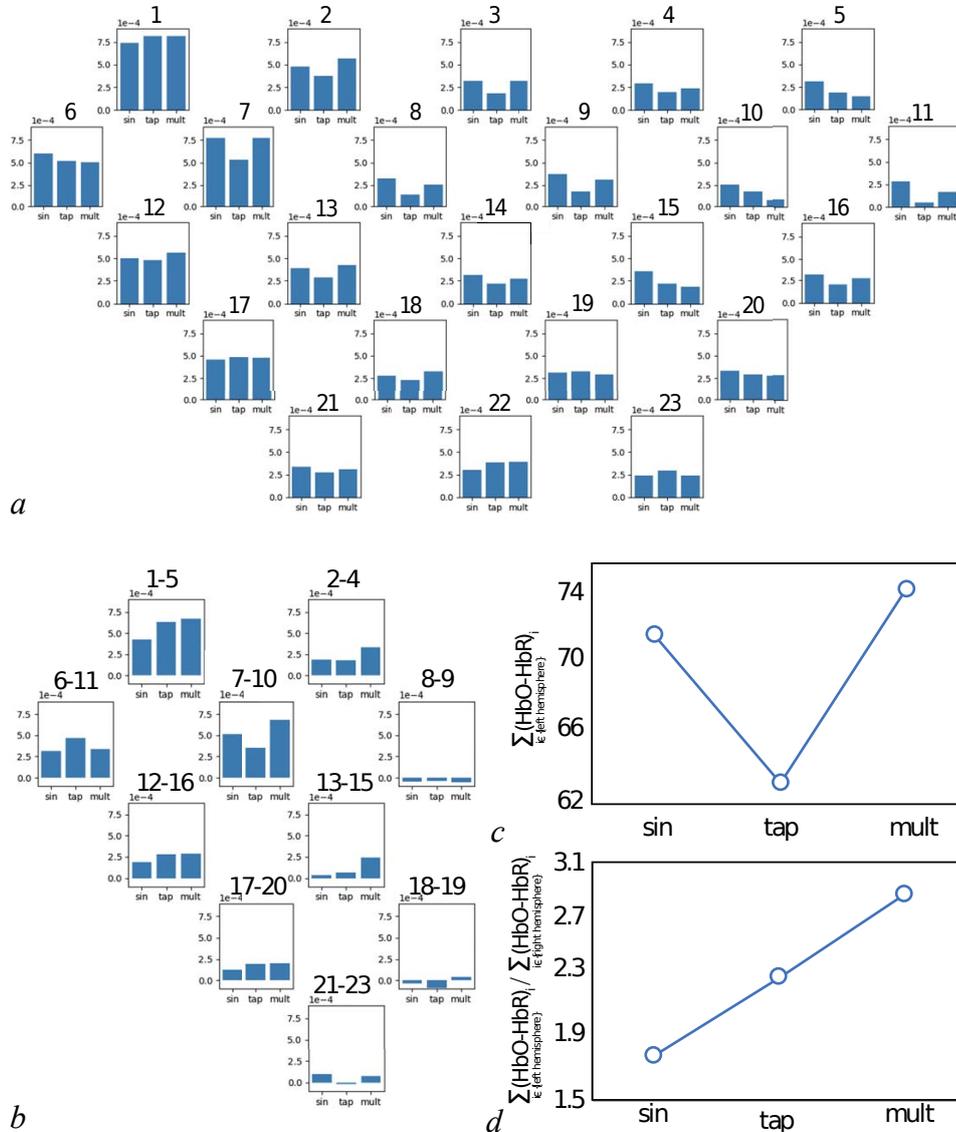


Рис. 3. *a* — Распределение по каналам максимальных значений амплитуды гемодинамического отклика для каждого типа движения; *b* — разница между максимальными значениями амплитуды гемодинамического отклика симметричных каналов левого и правого полушарий; *c* — суммарный гемодинамический ответ в левом полушарии для каждого из типов движения («sin» — одиночное движение, «tap» — тэппинг, «mult» — серия движений); *d* — отношение суммарного гемодинамического ответа левого и правого полушарий для рассматриваемых движений. Здесь в качестве гемодинамического ответа рассматривается разница между HbO и HbR

Fig. 3. *a* — distribution over channels of the maximum values of the hemodynamic response amplitude for each of the movement types; *b* — difference between the maximum values of the hemodynamic response amplitude of symmetrical channels of the left and right hemispheres; *c* — total hemodynamic response in the left hemisphere for each of the movement types (“sin” – single movement, “tap” – tapping, “mult” – series of movements); *d* — ratio of the total hemodynamic response of the left and right hemispheres for considered movements. Here, the difference between HbO and HbR is considered as a hemodynamic response

Максимальный гемодинамический ответ располагается вблизи положения датчика ЭЭГ С3 (см. рис. 1, *с*). Здесь следует отметить, что согласно последним результатам, данная область совпадает с расположением первичной моторной коры (M1).

Для анализа различий между движениями было предложено использовать единую характеристику, включающую изменение концентраций HbO и HbR. В роли такой величины выступает разница между ними — (HbO–HbR). Заметим, что данная величина часто обладает большей чувствительностью к изменениям гемодинамического ответа, чем HbO или HbR по отдельности [16].

Были найдены максимальные значения гемодинамического отклика для каждого канала и типа движения (рис. 3, *а*). Видно, что максимальные значения для всех типов движений слабо отличаются друг от друга. Была исследована выраженность контралатеральности для различных типов движений, как разница между максимальными значениями амплитуды (HbO–HbR) между симметричными каналами левого и правого полушарий (рис. 3, *б*). Обнаружено увеличение выраженности контралатеральности для тэппинга и многократных сжатий кисти, по сравнению с одиночным сжатием кисти.

Рассмотрен суммарный гемодинамический ответ в левом и правом полушарии для каждого из типов движения (рис. 3, *д*). Показано, что суммарный гемодинамический ответ в левом полушарии слабо различается между всеми видами движений. В то же время степень контралатеральности, рассматриваемая как отношение суммарного гемодинамического ответа левого и правого полушарий, демонстрирует существенное различие между движениями (рис. 3, *с*). Максимально выражена контралатеральность при выполнении серии движений, а минимально выражена при одиночном сжатии.

### Заключение

В работе представлены результаты сравнения разных типов движения, а также рассмотрены различные подходы к анализу гемодинамического отклика.

Было подтверждено, что распределение отклика при выполнении движения зависит от области мозга. Показано, что максимальные ответы появляются в полушарии, контралатеральном по отношению к выполняющей конечности.

Показано, что суммарный гемодинамический ответ в моторной коре левого полушария слабо различается между всеми рассматриваемыми видами движения, при этом выраженность контралатеральности демонстрирует существенные различия между типами движений. Сильнее всего контралатеральность проявляется при выполнении серии движений, в то время как одиночное сжатие кисти вызывает наименьшую контралатеральную реакцию. Наличие подобной асимметрии при выполнении рассматриваемых типов движений, вероятно, вызвано различиями в ассоциированной нейронной активности, в результате которой каждое из движений задействует различные по своему размеру нейронные сети или требует разную степень их активации.

Различия в контралатеральности также отражают изменение межполушарных взаимодействий между областями M1 каждого полушария, в результате которых повышенная активация нейронов в M1 одного полушария вызывает снижение активности в M1 противоположного полушария. Это, в свою очередь, вызывает повышение оксигемоглобина в контралатеральной движению коре M1 из-за наличия компенсационных механизмов и повышение дезоксигемоглобина в ипсилатеральной коре M1, обусловленное активацией тормозящих связей между полушариями и продолжающимися метаболическими процессами.

Отметим, что результаты, полученные в данной работе, хорошо согласуются с известными ранее [22–24]. В частности, в работе [22] было обнаружено связанное с интенсивностью движения увеличение нейронной активности в контралатеральном полушарии, приводящее к более высоким

положительным BOLD (Blood-oxygen-level-dependent) ответам, передающееся в ипсилатеральное полушарие и сопровождаемое более выраженным отрицательным BOLD ответом в данном полушарии. Здесь следует отметить, что отрицательный BOLD ответ по сравнению с исходным уровнем возникает как следствие увеличения содержания дезоксигемоглобина.

Заметим, что полученные в работе результаты демонстрируют высокую чувствительность технологии фБИКС к выполнению различных типов движений. В частности, короткие одиночные сжатия кисти хорошо видны на характеристиках HbO и HbR, что может быть использовано при разработке и проектировании различных интерфейсов мозг–компьютер, в том числе и мультимодальных, так как открывает возможности использования более коротких команд при их создании. Отметим, что обычно интерфейсы мозг–компьютер на базе технологии фБИКС требуют продолжительной нагрузки, в частности, среди двигательных задач наиболее популярной является «тэппинг», требующий активность порядка 10 секунд.

### Список литературы

1. *Bansal K., Garcia J. O., Tompson S. H., Verstynen T., Vettel J. M., Muldoon S. F.* Cognitive chimera states in human brain networks // *Science Advances*. 2019. Vol. 5, no. 4. P. eaau8535. DOI: 10.1126/sciadv.aau8535.
2. *Brittin C. A., Cook S. J., Hall D. H., Emmons S. W., Cohen N.* A multi-scale brain map derived from whole-brain volumetric reconstructions // *Nature*. 2021. Vol. 591, no. 7848. P. 105–110. DOI: 10.1038/s41586-021-03284-x.
3. *Andreev A. V., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Synchronization of interacted spiking neuronal networks with inhibitory coupling // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 146. P. 110812. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110812.
4. *Hramov A. E., Maksimenko V. A., Pisarchik A. N.* Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states // *Physics Reports*. 2021. Vol. 918. P. 1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
5. *Karpov O. E., Grubov V. V., Maksimenko V. A., Utashev N., Semerikov V. E., Andrikov D. A., Hramov A. E.* Noise amplification precedes extreme epileptic events on human EEG // *Phys. Rev. E*. 2021. Vol. 103, no. 2. P. 022310. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.022310.
6. *Chholak P., Kurkin S. A., Hramov A. E., Pisarchik A. N.* Event-related coherence in visual cortex and brain noise: An MEG study // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 375. DOI: 10.3390/app11010375.
7. *Maksimenko V., Kuc A., Frolov N., Kurkin S., Hramov A.* Effect of repetition on the behavioral and neuronal responses to ambiguous Necker cube images // *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, no. 1. P. 3454. DOI: 10.1038/s41598-021-82688-1.
8. *Villringer A., Planck J., Hock C., Schleinkofer L., Dirnagl U.* Near infrared spectroscopy (NIRS): A new tool to study hemodynamic changes during activation of brain function in human adults // *Neuroscience Letters*. 1993. Vol. 154, no. 1–2. P. 101–104. DOI: 10.1016/0304-3940(93)90181-J.
9. *Abdelnour A. F., Huppert T.* Real-time imaging of human brain function by near-infrared spectroscopy using an adaptive general linear model // *NeuroImage*. 2009. Vol. 46, no. 1. P. 133–143. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2009.01.033.
10. *Lachert P., Janusek D., Pulawski P., Liebert A., Milej D., Blinowska K. J.* Coupling of Oxy- and Deoxyhemoglobin concentrations with EEG rhythms during motor task // *Scientific Reports*. 2017. Vol. 7, no. 1. P. 15414. DOI: 10.1038/s41598-017-15770-2.
11. *Leff D. R., Orihuela-Espina F., Elwell C. E., Athanasiou T., Delpy D. T., Darzi A. W., Yang G.-Z.* Assessment of the cerebral cortex during motor task behaviours in adults: A systematic review of functional near infrared spectroscopy (fNIRS) studies // *NeuroImage*. 2011. Vol. 54, no. 4. P. 2922–2936. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.10.058.

12. *Derosière G., Mandrick K., Dray G., Ward T.E., Perrey S.* NIRS-measured prefrontal cortex activity in neuroergonomics: strengths and weaknesses // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2013. Vol. 7. P. 583. DOI: 10.3389/fnhum.2013.00583.
13. *Ayaz H., Shewokis P.A., Bunce S., Izzetoglu K., Willems B., Onaral B.* Optical brain monitoring for operator training and mental workload assessment // *NeuroImage*. 2012. Vol. 59, no. 1. P. 36–47. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.06.023.
14. *Naseer N., Hong K.-S.* fNIRS-based brain-computer interfaces: a review // *Frontiers in Human Neuroscience*. 2015. Vol. 9. P. 3. DOI: 10.3389/fnhum.2015.00003.
15. *Badarin A.A., Skazkina V.V., Grubov V.V.* Studying of human's mental state during visual information processing with combined EEG and fNIRS // In: *Saratov Fall Meeting 2019: Computations and Data Analysis: from Nanoscale Tools to Brain Functions*. Vol. 11459 of Proc. SPIE. VII International Symposium on Optics and Biophotonics, 23–27 September 2019, Saratov, Russian Federation. Bellingham, Washington: SPIE, 2020. P. 114590D. DOI: 10.1117/12.2564403.
16. *Hramov A.E., Grubov V., Badarin A., Maksimenko V.A., Pisarchik A.N.* Functional near-infrared spectroscopy for the classification of motor-related brain activity on the sensor-level // *Sensors*. 2020. Vol. 20, no. 8. P. 2362. DOI: 10.3390/s20082362.
17. *Talamonti D., Montgomery C.A., Clark D.P.A., Bruno D.* Age-related prefrontal cortex activation in associative memory: An fNIRS pilot study // *NeuroImage*. 2020. Vol. 222. P. 117223. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2020.117223.
18. *Rahman M.A., Siddik A.B., Ghosh T.K., Khanam F., Ahmad M.* A narrative review on clinical applications of fNIRS // *Journal of Digital Imaging*. 2020. Vol. 33, no. 5. P. 1167–1184. DOI: 10.1007/s10278-020-00387-1.
19. *Kurkin S., Badarin A., Grubov V., Maksimenko V., Hramov A.* The oxygen saturation in the primary motor cortex during a single hand movement: functional near-infrared spectroscopy (fNIRS) study // *The European Physical Journal Plus*. 2021. Vol. 136, no. 5. P. 548. DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01516-7.
20. *Baker W.B., Parthasarathy A.B., Busch D.R., Mesquita R.C., Greenberg J.H., Yodh A.G.* Modified Beer-Lambert law for blood flow // *Biomedical Optics Express*. 2014. Vol. 5, no. 11. P. 4053–4075. DOI: 10.1364/BOE.5.004053.
21. *Nippert A.R., Biesecker K.R., Newman E.A.* Mechanisms mediating functional hyperemia in the brain // *The Neuroscientist*. 2018. Vol. 24, no. 1. P. 73–83. DOI: 10.1177/1073858417703033.
22. *Newton J.M., Sunderland A., Gowland P.A.* fMRI signal decreases in ipsilateral primary motor cortex during unilateral hand movements are related to duration and side of movement // *NeuroImage*. 2005. Vol. 24, no. 4. P. 1080–1087. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2004.10.003.
23. *Mullinger K.J., Mayhew S.D., Bagshaw A.P., Bowtell R., Francis S.T.* Evidence that the negative BOLD response is neuronal in origin: A simultaneous EEG–BOLD–CBF study in humans // *NeuroImage*. 2014. Vol. 94. P. 263–274. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2014.02.029.
24. *Mayer A.R., Hanlon F.M., Shaff N.A., Stephenson D.D., Ling J.M., Dodd A.B., Hogeveen J., Quinn D.K., Ryman S.G., Pirio-Richardson S.* Evidence for asymmetric inhibitory activity during motor planning phases of sensorimotor synchronization // *Cortex*. 2020. Vol. 129. P. 314–328. DOI: 10.1016/j.cortex.2020.04.028.

## References

1. Bansal K, Garcia JO, Tompson SH, Verstynen T, Vettel JM, Muldoon SF. Cognitive chimera states in human brain networks. *Science Advances*. 2019;5(4):eaau8535. DOI: 10.1126/sciadv.aau8535.
2. Brittin CA, Cook SJ, Hall DH, Emmons SW, Cohen N. A multi-scale brain map derived from whole-brain volumetric reconstructions. *Nature*. 2021;591(7848):105–110. DOI: 10.1038/s41586-021-03284-x.

3. Andreev AV, Maksimenko VA, Pisarchik AN, Hramov AE. Synchronization of interacted spiking neuronal networks with inhibitory coupling. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021;146:110812. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110812.
4. Hramov AE, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Physical principles of brain–computer interfaces and their applications for rehabilitation, robotics and control of human brain states. *Physics Reports*. 2021;918:1–133. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.03.002.
5. Karpov OE, Grubov VV, Maksimenko VA, Utashev N, Semerikov VE, Andrikov DA, Hramov AE. Noise amplification precedes extreme epileptic events on human EEG. *Phys. Rev. E*. 2021;103(2): linebreak 022310. DOI: 10.1103/PhysRevE.103.022310.
6. Chholak P, Kurkin SA, Hramov AE, Pisarchik AN. Event-related coherence in visual cortex and brain noise: An MEG study. *Applied Sciences*. 2021;11(1):375. DOI: 10.3390/app11010375.
7. Maksimenko V, Kuc A, Frolov N, Kurkin S, Hramov A. Effect of repetition on the behavioral and neuronal responses to ambiguous Necker cube images. *Scientific Reports*. 2021;11(1):3454. DOI: 10.1038/s41598-021-82688-1.
8. Villringer A, Planck J, Hock C, Schleinkofer L, Dirnagl U. Near infrared spectroscopy (NIRS): A new tool to study hemodynamic changes during activation of brain function in human adults. *Neuroscience Letters*. 1993;154(1–2):101–104. DOI: 10.1016/0304-3940(93)90181-J.
9. Abdelnour AF, Huppert T. Real-time imaging of human brain function by near-infrared spectroscopy using an adaptive general linear model. *NeuroImage*. 2009;46(1):133–143. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2009.01.033.
10. Lachert P, Janusek D, Pulawski P, Liebert A, Milej D, Blinowska KJ. Coupling of Oxy- and Deoxyhemoglobin concentrations with EEG rhythms during motor task. *Scientific Reports*. 2017;7(1):15414. DOI: 10.1038/s41598-017-15770-2.
11. Leff DR, Orihuela-Espina F, Elwell CE, Athanasiou T, Delpy DT, Darzi AW, Yang GZ. Assessment of the cerebral cortex during motor task behaviours in adults: A systematic review of functional near infrared spectroscopy (fNIRS) studies. *NeuroImage*. 2011;54(4):2922–2936. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2010.10.058.
12. Deroisière G, Mandrick K, Dray G, Ward TE, Perrey S. NIRS-measured prefrontal cortex activity in neuroergonomics: strengths and weaknesses. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2013;7:583. DOI: 10.3389/fnhum.2013.00583.
13. Ayaz H, Shewokis PA, Bunce S, Izzetoglu K, Willems B, Onaral B. Optical brain monitoring for operator training and mental workload assessment. *NeuroImage*. 2012;59(1):36–47. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2011.06.023.
14. Naseer N, Hong KS. fNIRS-based brain-computer interfaces: a review. *Frontiers in Human Neuroscience*. 2015;9:3. DOI: 10.3389/fnhum.2015.00003.
15. Badarin AA, Skazkina VV, Grubov VV. Studying of human’s mental state during visual information processing with combined EEG and fNIRS. In: *Saratov Fall Meeting 2019: Computations and Data Analysis: from Nanoscale Tools to Brain Functions*. Vol. 11459 of Proc. SPIE. VII International Symposium on Optics and Biophotonics, 23–27 September 2019, Saratov, Russian Federation. Bellingham, Washington: SPIE; 2020. P. 114590D. DOI: 10.1117/12.2564403.
16. Hramov AE, Grubov V, Badarin A, Maksimenko VA, Pisarchik AN. Functional near-infrared spectroscopy for the classification of motor-related brain activity on the sensor-level. *Sensors*. 2020;20(8):2362. DOI: 10.3390/s20082362.
17. Talamonti D, Montgomery CA, Clark DPA, Bruno D. Age-related prefrontal cortex activation in associative memory: An fNIRS pilot study. *NeuroImage*. 2020;222:117223. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2020.117223.
18. Rahman MA, Siddik AB, Ghosh TK, Khanam F, Ahmad M. A narrative review on clinical applications of fNIRS. *Journal of Digital Imaging*. 2020;33(5):1167–1184. DOI: 10.1007/s10278-020-00387-1.
19. Kurkin S, Badarin A, Grubov V, Maksimenko V, Hramov A. The oxygen saturation in the primary

- motor cortex during a single hand movement: functional near-infrared spectroscopy (fNIRS) study. *The European Physical Journal Plus*. 2021;136(5):548. DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01516-7.
20. Baker WB, Parthasarathy AB, Busch DR, Mesquita RC, Greenberg JH, Yodh AG. Modified Beer–Lambert law for blood flow. *Biomedical Optics Express*. 2014;5(11):4053–4075. DOI: 10.1364/BOE.5.004053.
  21. Nippert AR, Biesecker KR, Newman EA. Mechanisms mediating functional hyperemia in the brain. *The Neuroscientist*. 2018;24(1):73–83. DOI: 10.1177/1073858417703033.
  22. Newton JM, Sunderland A, Gowland PA. fMRI signal decreases in ipsilateral primary motor cortex during unilateral hand movements are related to duration and side of movement. *NeuroImage*. 2005;24(4):1080–1087. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2004.10.003.
  23. Mullinger KJ, Mayhew SD, Bagshaw AP, Bowtell R, Francis ST. Evidence that the negative BOLD response is neuronal in origin: A simultaneous EEG–BOLD–CBF study in humans. *NeuroImage*. 2014;94:263–274. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2014.02.029.
  24. Mayer AR, Hanlon FM, Shaff NA, Stephenson DD, Ling JM, Dodd AB, Hogeveen J, Quinn DK, Ryman SG, Pirio-Richardson S. Evidence for asymmetric inhibitory activity during motor planning phases of sensorimotor synchronization. *Cortex*. 2020;129:314–328. DOI: 10.1016/j.cortex.2020.04.028.

*Бадарин Артем Александрович* — младший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий университета Иннополис. Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Колебательные явления в релятивистских электронных потоках с виртуальным катодом в полях резонансных систем и фотонных кристаллов» по специальностям «Физическая электроника» и «Радиофизика» (2020, СГУ). Область научных интересов — применение методов численного моделирования и анализа для исследования процессов, происходящих в интенсивных электронных потоках.



Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
 Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
 Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
 Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
 E-mail: a.badarin@innopolis.ru  
 ORCID: 0000-0002-3212-5890  
 AuthorID: 898302

*Грубов Вадим Валерьевич* — родился в пос. Емильчино Житомирской области (Украина). Окончил факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (2012). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему «Частотно-временной анализ сигналов электрической активности нейронного ансамбля головного мозга при абсанс-эпилепсии» (2015). Старший научный сотрудник лаборатории нейронауки и когнитивных технологий университета Иннополис. Область научных интересов — нейронаука, анализ и обработка комплексных сигналов, вейвлетный анализ и его приложения в нелинейной динамике и нейронауке. Автор более 60 публикаций в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, индексируемых в Scopus/Web of Science, ряда патентов и свидетельств о регистрации программ для ЭВМ (более 15 свидетельств на результаты интеллектуальной деятельности).



Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
 Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
 Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
 Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
 E-mail: v.grubov@innopolis.ru  
 ORCID: 0000-0001-6613-8940  
 AuthorID: 734305



*Андреев Андрей Викторович* — окончил с отличием магистратуру факультета нелинейных процессов СГУ (2017). Защитил кандидатскую диссертацию по специальности «радиофизика» (2020). Область научных интересов — нейронаука, математическое моделирование, нейронные сети, нелинейная динамика, сложные сети, хаос. Автор более 30 научных публикаций в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах, индексируемых в Scopus/Web of Science, ряда свидетельств о регистрации программ для ЭВМ.

Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: andreevandre1993@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6642-4517  
AuthorID: 933583



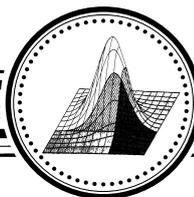
*Антипов Владимир Михайлович* — окончил с отличием магистратуру Юго-Западного государственного университета (2019, ЮЗГУ). Область научных интересов: различные виды взаимодействия человека и экзоскелетных систем. Опубликовал более 15 научных работ. Является победителем в конкурсной программе «Умник — Цифровая Россия» с темой проекта «Кастомизируемые, деформируемые матричные сенсоры для робототехники и тренажеров».

Россия, 420500 Иннополис, Университетская, 1  
Центр технологий компонентов робототехники и мехатроники, Университет Иннополис  
AuthorID: 1033158



*Куркин Семён Андреевич* — родился в Саратове (1986). Окончил с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского по специальности «радиофизика и электроника» (2008). Доктор физико-математических наук (2017), доцент. Работает в должности профессора в Центре технологий компонентов робототехники и мехатроники Университета Иннополиса. Автор ряда статей в центральных реферируемых журналах, участник всероссийских и международных конференций. Область научных интересов — исследование электронно-волновых систем с интенсивными пучками заряженных частиц; нейронаука.

Россия, 420500 Иннополис, ул. Университетская, 1  
Лаборатория нейронауки и когнитивных технологий, Университет Иннополис  
Россия, 236016 Калининград, ул. А. Невского, 14  
Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта  
E-mail: kurkinsa@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-3438-5717  
AuthorID: 607241



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья

УДК 519.9, 621.372

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-109-124

## Селекция пространственных мод в ансамбле хаотических отображений с дальнедействующими связями

*А. В. Шабунин*

Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 14.08.2021, принята к публикации 05.10.2021,  
опубликована 31.01.2022

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — выявление закономерностей формирования пространственных структур в ансамбле хаотических систем с нелокальными диффузионными связями; влияния на эти структуры волновой характеристики цифрового фильтра, образованного связями между элементами ансамбля. **Методы.** Исследование проводилось посредством численного моделирования ансамбля логистических отображений, расчета типичных колебательных режимов и их спектрального анализа. При этом система связей ансамбля рассматривалась как цифровой фильтр с частотной характеристикой, зависящей от параметров связей. Рассматривалась корреляция между пространственными спектрами и амплитудно-частотной характеристикой фильтра связей и взаимная когерентность колебаний при изменении параметров связи. **Результаты.** Показано, что система связей между хаотическими отображениями ведет себя как волновой фильтр, обладающий селективными свойствами, позволяя существовать пространственным модам с определенными длинами волн и подавляя другие. Селекция пространственных мод происходит на основе волновой характеристики фильтра связей, вид которой определяется радиусом действия и величиной связей между элементами ансамбля. В области сильной связи волновые характеристики для ансамблей с локальными и нелокальными связями качественно отличаются, что ведет для них к принципиально разному поведению. **Обсуждение.** Использование спектральных методов для анализа динамики систем со сложной топологией связи представляется перспективным направлением, в том числе и для исследования синхронизации и мультистабильности в хаотических осцилляторах и отображениях. Обнаруженные закономерности обобщают результаты, известные для ансамблей осцилляторов с локальными связями. Они в значительной части могут быть применены к ансамблям автоколебательных систем с непрерывным временем.

**Ключевые слова:** пространственно-временной хаос, ансамбли отображений, синхронизация, пространственная фильтрация.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-52-12004.

**Для цитирования:** Шабунин А. В. Селекция пространственных мод в ансамбле хаотических отображений с дальнедействующими связями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 109–124.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-109-124

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Selection of spatial modes in an ensemble of non-locally coupled chaotic maps

A. V. Shabunin

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 14.08.2021, accepted 05.10.2021, published 31.01.2022

**Abstract.** Purpose of this work is to determine regularities of formation of spatial structures in an ensemble of chaotic systems with non-local diffusion couplings and to study how these structures depend on the wave response of the digital filter formed by the ensemble couplings structure. *Methods.* The study was carried out by numerical simulation of an ensemble of logistic maps, calculation of its typical oscillatory regimes and their spectral analysis. The network was considered as a digital filter with a frequency response depending on the coupling parameters. Correlation between the spatial spectra and the amplitude-frequency response of the coupling filter and the mutual coherence of oscillations when the coupling parameters change were considered. *Results.* The system of couplings between chaotic maps behaves like a wave filter with selective properties, allowing spatial modes with certain wavelengths to exist and suppressing others. The selection of spatial modes is based on the wave characteristic of the coupling filter, the type of which is determined by the radius and the magnitude of couplings. At strong coupling the wave characteristics for ensembles with local and non-local couplings are qualitatively different, therefore they demonstrate essentially different behavior. *Discussion.* Using spectral methods for dynamics analysis systems with complex network topologies seems to be a promising approach, especially for research of synchronization and multistability in ensembles of chaotic oscillators and maps. The found regularities generalize the results known for ensembles of maps with local couplings. They also can be applied to ensembles of self-sustained oscillators.

**Keywords:** spatiotemporal chaos, ensembles of maps, synchronization, spatial filtering.

**Acknowledgements.** This work was supported by Russian Foundation for Basic Research and DFG, grant No 20-52-12004.

**For citation:** Shabunin AV. Selection of spatial modes in an ensemble of non-locally coupled chaotic maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(1):109–124. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-109-124

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Ансамбли колебательных систем представляют значительный интерес для физики и других естественных наук, поскольку служат моделями пространственно распределенных сред, позволяя выявлять механизмы явлений кооперации, конкуренции и самоорганизации. Особый интерес представляют ансамбли осцилляторов с хаотическим поведением [1, 2] поскольку в подобных системах может наблюдаться широкий круг явлений, например: синхронизация хаотических колебаний [2–6], бегущие волны [7, 8], образование диссипативных пространственных структур [9–11], развитая мультистабильность [12–17].

В последние годы, наряду с изучением ансамблей с локальными связями между узлами, значительный интерес привлекают к себе сети с более сложной топологией. Одним из примеров таких сетей можно считать системы с *дальнодействующими связями* (ДС), когда взаимодействуют не только ближайшие соседи, но и удаленные друг от друга элементы ансамбля. Интерес к ансамблям с ДС подогревается развитием современных инфокоммуникационных технологий, а также исследованиями в области биологии, нейрофизиологии и социологии. Интерес к динамике ансамблей с ДС проявляется также в связи с обнаружением в них особого вида кластерных структур, получивших название *химер* [18–22].

Системы высокой размерности, как правило, демонстрируют большое разнообразие сосуществующих режимов, поэтому их трудно анализировать, используя методы бифуркационного

анализа, применяемые для более простых систем. В таких случаях удобно использовать интегральные характеристики, позволяющие предсказывать типичное поведение ансамбля при стандартных начальных условиях. Одним из таких подходов является спектральный анализ, основанный на расчете временных и пространственных спектров. Переход от временного описания к частотному является традиционным как для физики, так и для техники. Он позволяет, например, диагностировать синхронизацию между осцилляторами ансамбля и количественно оценить ее величину [23]. Для некоторых типов связи (например, диффузионной) использование спектрального метода позволяет определить условия для синхронизации хаотических колебаний в ансамбле в зависимости от величины связей [6].

В данном исследовании мы предлагаем рассматривать связи между осцилляторами сети как пространственный цифровой фильтр, свойства которого характеризуются волновой характеристикой. Ранее метод цифрового фильтра был использован для анализа закономерностей формирования мультистабильности периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями [24] и для анализа пространственных мод в ансамбле с локальными диффузионными связями [25]. В настоящем исследовании мы рассматриваем селекцию пространственных мод в ансамбле с нелокальными связями, находящемся в режиме пространственно-временного хаоса. Такой режим объединяет в своем составе множество метастабильных пространственно-временных состояний и его свойства зависят от связей между элементами ансамбля.

## 1. Пространственная селекция в ансамблях с дальнедействующей связью

Рассмотрим ансамбль из  $N$  отображений с симметричной связью, замкнутый в кольцо

$$x_i(n+1) = F(x_i(n)) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{j=-L}^L [F(x_{i+j}(n)) - F(x_i(n))]. \quad (1)$$

Здесь  $x_i(n)$  — динамическая переменная, зависящая от дискретного времени  $n$  и пространственной координаты  $i$ , заданной на отрезке  $[1 : N]$ ;  $F(x)$  — функция, задающая динамику одиночного отображения;  $\gamma$  — сила связей между элементами ансамбля,  $L = 1, 2, \dots, N/2$  — их максимальное дальнедействие (радиус связей). Вследствие кольцевой топологии сети все операции с нижними индексами выполняются по модулю  $N$ .

Система связей в сети (1) представляет собой линейный фильтр, обладающий селективными свойствами. Чтобы убедиться в этом, перепишем уравнение (1) в виде

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j F(x_{i+j}(n)), \quad (2)$$

где  $h_0 = 1 - \gamma$ ,  $h_j = \gamma/(2L)$  ( $j = \pm 1, \dots, \pm L$ ) — положительные константы. Формулу (2) можно представить как суперпозицию нелинейного отображения

$$y_i(n) = F(x_i(n))$$

и линейной свертки по пространственной координате

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j y_{i+j}(n).$$

Последнее уравнение совпадает по форме с уравнением линейного цифрового фильтра с импульсной характеристикой  $\mathbf{h}$ , действующего на пространственную траекторию  $\mathbf{y}$ . Как известно,

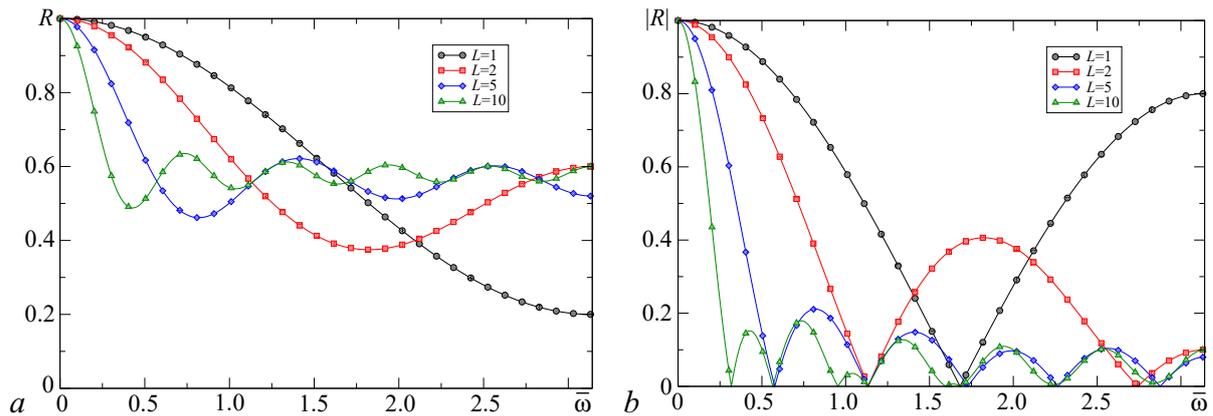


Рис. 1. Графики коэффициента передачи фильтра связей при  $\gamma = 0.4$  (a) и его АЧХ при  $\gamma = 0.9$  (b)

Fig. 1. Plots of the frequency response of the coupling filter at  $\gamma = 0.4$  (a) and its amplitude-frequency response at  $\gamma = 0.9$  (b)

частотная (волновая) характеристика такого фильтра есть преобразование Фурье от его импульсной характеристики; для указанных выше значений коэффициентов  $h_j$  она примет вид:

$$R(\bar{\omega}) = 1 - \gamma + \frac{\gamma}{L} \sum_{l=1}^L \cos(l\bar{\omega}). \quad (3)$$

Здесь  $R$  – коэффициент передачи фильтра,  $\bar{\omega} \in [0 : \pi]$  – нормированная пространственная частота (волновое число)<sup>1</sup>.

Рассмотрим свойства  $R$ , определяемые формулой (3). Прежде всего отметим, что  $R(\bar{\omega})$  – вещественная величина, что является следствием симметрии связей в ансамбле<sup>2</sup>. График функции  $R(\bar{\omega})$  определяется радиусом связей и для значений  $L = 1, 2, 5, 10$ , которые рассматриваются в данном исследовании, он представлен на рис. 1, a. Хорошо видно, что при  $L > 1$  коэффициент передачи имеет *лепестковую* структуру с выраженным максимумом в окрестности нуля (*основной лепесток*) и осциллирующими «хвостами» (*боковыми лепестками*) на периферии. Такая форма напоминает хорошо известную в радиотехнике функцию sinc. Данное сходство не случайно, поскольку выражение для  $R$  является дискретным аналогом выражения для спектра прямоугольного импульса, и при больших  $L$  соотношение (3) хорошо аппроксимируется формулой

$$R(\bar{\omega}) \simeq 1 - \gamma + \gamma \operatorname{sinc}((L + 0.5)\bar{\omega}). \quad (4)$$

«Хвосты» частотной характеристики приподняты над осью абсцисс на некоторую постоянную величину  $\Delta R$ , которая при  $L \gg 1$  близка к значению  $1 - \gamma$ . Поэтому значение силы связей определяет интенсивность селективных свойств фильтра. Существенно влияет на форму  $R(\bar{\omega})$  также радиус связей. С увеличением  $L$  число боковых лепестков растет, а их ширина уменьшается (при  $L \gg 1$  ширина лепестков обратна радиусу связей). Таким образом, в диапазоне значений связи  $0 < \gamma \leq 1$  основной лепесток всегда приподнят над боковыми, величина которых тем меньше, чем выше их номер. При слабой связи фильтр является прозрачным для любых длин волн; при этом с увеличением связи селективные свойства усиливаются в сторону подавления коротковолновых режимов.

Из выражения (3) легко получить фазочастотную (ФЧХ) и амплитудно-частотную (АЧХ) характеристики фильтра связей.

<sup>1</sup>Для отличия пространственных частот от обычных будем их помечать чертой сверху.

<sup>2</sup>Для ансамблей с несимметричными связями  $R$  будет комплексным.

**Фазочастотная характеристика.** Поскольку коэффициент передачи является вещественным числом, фазовый сдвиг пространственного фильтра  $\phi = \arg(R)$  либо равен нулю при положительном  $R$ , либо  $\pi$  – при отрицательном. Таким образом, ФЧХ является либо постоянной, либо кусочно-постоянной функцией волнового числа  $\bar{\omega}$ . Последний случай реализуется, если параметр связи превосходит некоторое критическое значение

$$\gamma_c = \frac{2}{4 - \arctan(L - 1)}. \quad (5)$$

**Амплитудно-частотная характеристика.** Вид амплитудно-частотной характеристики  $A(\bar{\omega}) = |R(\bar{\omega})|$  также будет отличаться для  $\gamma < \gamma_c$  и  $\gamma > \gamma_c$ . В первом случае АЧХ совпадает с соответствующим графиком  $R(\bar{\omega})$ , изображенным на рис. 1, а. Поскольку максимальное значение коэффициента передачи достигается на нулевой частоте, форма АЧХ будет соответствовать фильтру нижних частот (ФНЧ); при этом основной лепесток можно считать *полосой пропускания*, а боковые – *полосой заграждения* фильтра. С ростом  $\gamma$  средний уровень полосы заграждения понижается, соответственно селективные свойства фильтра усиливаются. При  $\gamma > \gamma_c$  форма АЧХ становится более сложной, что можно увидеть на примере графиков на рис. 1, б, но при  $L > 1$  она продолжает соответствовать ФНЧ. Исключением является случай локальных связей, при котором переход  $\gamma$  через критическое значение приводит к смене типа фильтра с НЧ на заграждающий (см. [25]).

Таким образом, система симметричных дальнедействующих связей при  $L > 1$  ведет себя как пространственный фильтр нижних частот, ширина полосы пропускания которого определяется радиусом действия связей, а селективные свойства (отношение коэффициентов передачи в полосе пропускания и заграждения) – силой связей  $\gamma$ . Как известно, связи между отображениями оказывают влияние на их временную и пространственную динамику. При этом изменение величины параметра связи может приводить к формированию в ансамбле различных пространственных структур. Интересно выяснить, насколько эти изменения коррелируют с изменением формы волновой характеристики фильтра связей, рассмотренной выше, и возможно ли предсказать пространственные свойства наблюдаемых режимов по виду этой характеристики. Данные вопросы и будут рассмотрены в ходе численного исследования.

## 2. Рассматриваемая система и алгоритм исследования

В качестве объекта исследования выберем наиболее простую систему, демонстрирующую развитый пространственно-временной хаос: кольцо из  $N$  логистических отображений, уравнение которого соответствует (1) при  $F(x) = \alpha x(1 - x)$ , где  $\alpha$  – параметр, управляющий динамикой одиночного отображения.

Логистическое отображение является базовой системой нелинейной динамики. Его поведение хорошо известно: с ростом  $\alpha$  оно демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периодических орбит, завершающийся переходом к хаосу; в закритической области наблюдается развитие хаотической динамики через каскад обратных бифуркаций удвоения. При  $3.68 \leq \alpha < 4$  в отображении реализуется режим развитого хаоса, который для слабых связей ( $\gamma \simeq 0$ ) сохраняется и при объединении отображений в ансамбль. В этом случае в ансамбле реализуется режим однородного пространственно-временного хаоса. В ансамбле с локальными связями в диапазоне  $0 < \gamma \leq 1$  наблюдается множество пространственно-временных режимов, включая диссипативные структуры [26].

Исследование системы (1) проводится методом численного эксперимента при фиксированном  $\alpha = 3.98$  и меняющихся значениях  $\gamma$  и  $L$ . В ходе численного эксперимента определяется предельная траектория при случайных начальных условиях, равномерно распределенных в

диапазоне  $]0 : 1[$ , по которой строятся фазовые портреты и пространственные снимки колебаний, рассчитываются функция взаимной когерентности и пространственные амплитудные спектры

$$Sp\left(\bar{\omega}_k = \frac{2\pi k}{N}\right) = \sqrt{\langle X_k(n)X_k^*(n) \rangle}, \quad (6)$$

где  $X_k(n) = \sum_{i=1}^N x_i(n) \exp(-j2\pi ki/N)$  — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) пространственного снимка колебаний в момент времени  $n$ ,  $k$  — номер пространственной гармоники.

### 3. Влияние связей на взаимную когерентность колебаний

При нулевой связи каждое из отображений ансамбля (1) демонстрирует независимую динамику, поэтому колебания в разных ячейках сети являются некогерентными<sup>3</sup>, и ансамбль в целом демонстрирует режим однородного пространственно-временного хаоса. Однако с ростом связи колебания синхронизируются, в результате чего в ансамбле могут реализоваться разные типы пространственного и временного поведения.

Рассмотрим, как меняется когерентность колебаний в ансамбле с ростом связи для разных  $L$ . Для ее измерения мы воспользуемся формулой, полученной в работе [23]:

$$S_{i,j} = \frac{\int_0^\infty C_{i,j}(\omega) (P_i(\omega) + P_j(\omega)) d\omega}{\int_0^\infty (P_i(\omega) + P_j(\omega)) d\omega}. \quad (7)$$

Здесь  $C_{i,j}(\omega)$  — функция взаимной когерентности между динамикой  $i$ -го и  $j$ -го отображений,  $P_i$  и  $P_j$  — соответствующие спектры мощности. Величина  $S_{i,j}$ , являющаяся интегральной мерой когерентности колебаний по всем частотам, определяет отношение мощности когерентной части сигналов подсистем  $i$  и  $j$  к их общей мощности. Она является безразмерной величиной, принимающей значения от нуля (для полностью некогерентных сигналов) до единицы (для полностью когерентных).

В настоящем исследовании мы рассматриваем когерентность между соседними осцилляторами  $S_{i,i+1}$ , обозначаемую в дальнейшем как  $S(i)$ . Будет ли она одинаковой в разных частях ансамбля или же будет меняться от точки к точке? Исследования показывают, что может наблюдаться

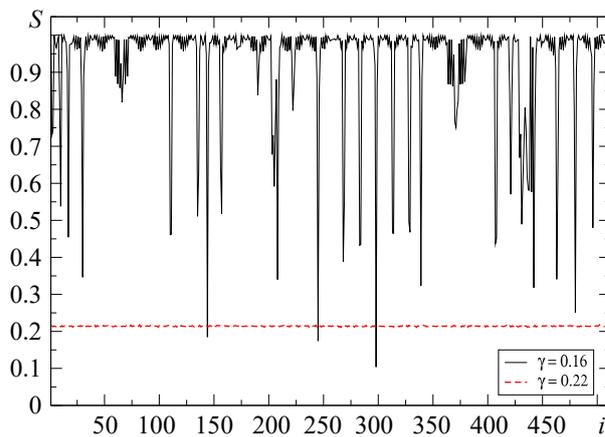


Рис. 2. Графики  $S(i)$  для ансамбля с локальными связями при  $\gamma = 0.16$  и  $\gamma = 0.22$

Fig. 2. Plots  $S(i)$  for an ensemble with local couplings at  $\gamma = 0.16$  and  $\gamma = 0.22$

и тот и другой случай. Соответствующие примеры приведены на рис. 2, где построены графики  $S(i)$  для двух значений параметра локальной связи:  $\gamma = 0.16$  и  $\gamma = 0.22$ . Как видно из первого графика, в ансамбле могут сосуществовать кластеры как с высоким, так и с низким уровнем когерентности. В этом случае, для оценки когерентности колебаний ансамбля в целом целесообразно взять среднее:  $S_{\text{mean}} = \langle S(i) \rangle$ , а для оценки неоднородности в распределении — максимальное и минимальное значения:  $S_{\text{max}} = \max\{S(i)\}$ ,  $S_{\text{min}} = \min\{S(i)\}$ . Очевидно, что в случае неоднородного распределения когерентности будет выполняться соотношение  $S_{\text{min}} \ll \ll S_{\text{mean}} \ll S_{\text{max}}$ . Противоположный случай

<sup>3</sup>Под когерентностью здесь понимается взаимный захват фаз в спектрах колебаний подсистем.

реализуется при  $\gamma = 0.22$  (штриховая линия на рис. 2). Здесь  $S(i)$  практически является константой, а потому  $S_{\text{mean}} \simeq S_{\text{max}} \simeq S_{\text{min}}$ .

Рассмотрим, как  $S_{\text{mean}}$ ,  $S_{\text{max}}$  и  $S_{\text{min}}$  меняются с ростом  $\gamma$ . Результаты расчетов приведены на рис. 3, *a* ( $L = 1$ ), рис. 3, *b* ( $L = 2$ ), рис. 3, *c* ( $L = 5$ ) и рис. 3, *d* ( $L = 10$ ). Для всех рассмотренных случаев зависимость когерентности от связи можно разделить на две характерные зоны: область однородной когерентности (I и III) и область неоднородной когерентности (II). Неоднородная когерентность означает, что в ансамбле присутствуют интервалы как с высокой ( $S(i) \simeq S_{\text{max}}$ ), так и с низкой ( $S(i) \simeq S_{\text{min}}$ ) когерентностью, то есть формируются стационарные пространственные структуры (в нелинейной динамике их принято называть *диссипативными структурами*). Зона диссипативных структур располагается в узком диапазоне значений параметра связи при  $\gamma \gtrsim 0.1$  и ее ширина незначительно увеличивается с ростом  $L$ . Соответственно, зона однородности занимает оставшиеся диапазоны значений  $\gamma$ : область слабых связей (зона I), в которой когерентность близка к нулю, и область средних и сильных связей (зона III), в которой когерентность принимает существенные значения и может достигать единицы. Для последней характерны две типичные зависимости  $S_{\text{mean}}(\gamma)$ : монотонный рост при  $L > 1$  и унимодальный характер: вначале рост, а затем падение при  $L = 1$ . Разное поведение функции  $S_{\text{mean}}(\gamma)$  свидетельствует о качественном различии в поведении ансамблей с локальным и нелокальным взаимодействием, которое наблюдается при сильной связи. Рассмотрим поведение системы (1) в разных зонах более детально, сравнивая его с изменением АЧХ фильтра связей (3).

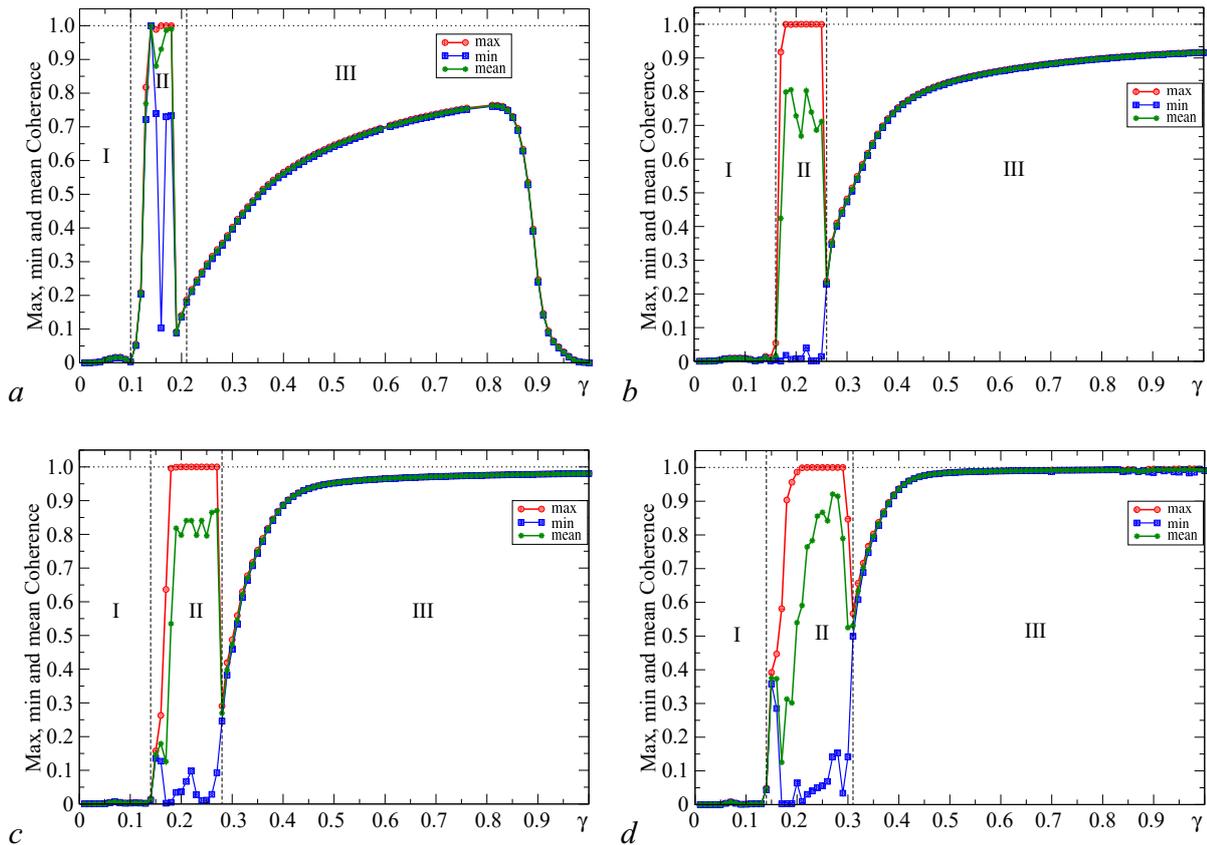


Рис. 3. Графики зависимостей когерентности от  $\gamma$  при разных радиусах связи:  $L = 1$  (a), 2 (b), 5 (c) и 10 (d)

Fig. 3. Plots of coherence from  $\gamma$  at different radii:  $L = 1$  (a), 2 (b), 5 (c) and 10 (d)

#### 4. Зона пространственно однородных колебаний

Рассмотрим сначала область параметра связи, где когерентность не зависит от координаты, то есть интервалы I и III. Однородность  $S(i)$  является следствием пространственной однородности колебаний, то есть отсутствия стационарных пространственных структур.

**Интервал I.** При малой связи селективные свойства сети, определяемые формулой (3), выражены слабо, и пространственный фильтр является всеволновым. Поэтому пространственное распределение должно содержать моды всех длин волн и результирующий режим будет представлять собой развитый пространственно-временной хаос. Проведенные расчеты подтверждают эти предположения. Как показали исследования, временная динамика ансамбля (1) в области I соответствует одноленточному хаотическому аттрактору, а пространственная динамика представляет собой однородный пространственный хаос. Типичные фазовые портреты и пространственные снимки для режима в данной области приведены на рис. 4, *a* (для  $L = 2$ ) и рис. 4, *b* (для  $L = 10$ ). Аналогичные портреты существуют и для других значений  $L$ . Визуально они почти не различаются. Однако расчет пространственных спектров показывает, что количественные различия между ними существуют. Рассмотрим графики  $Sp(\bar{\omega})$ , приведенные на рис. 5, *a*. Как видно из рисунка, с ростом  $L$  доля коротковолновых мод в пространственном хаосе уменьшается. Заметно сходство формы пространственных спектров с формой АЧХ (3): они имеют подобную АЧХ лепестковую

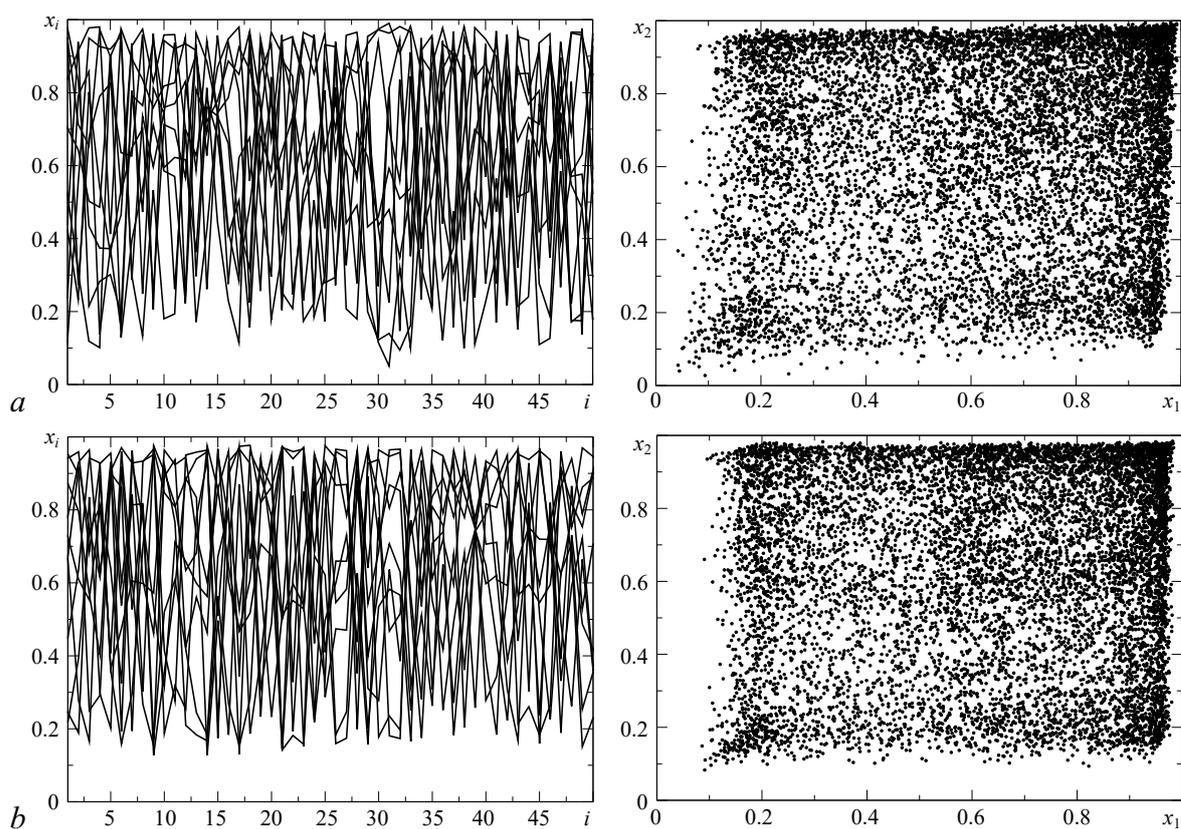


Рис. 4. Динамика системы в области I: пространственные снимки (слева) и перекрестные фазовые портреты (справа) при  $\gamma = 0.08$  и  $L = 2$  (*a*), 10 (*b*)

Fig. 4. System dynamics in region I: spatial snapshots (left) and cross phase-portraits (right) at  $\gamma = 0.08$  and  $L = 2$  (*a*), 10 (*b*)

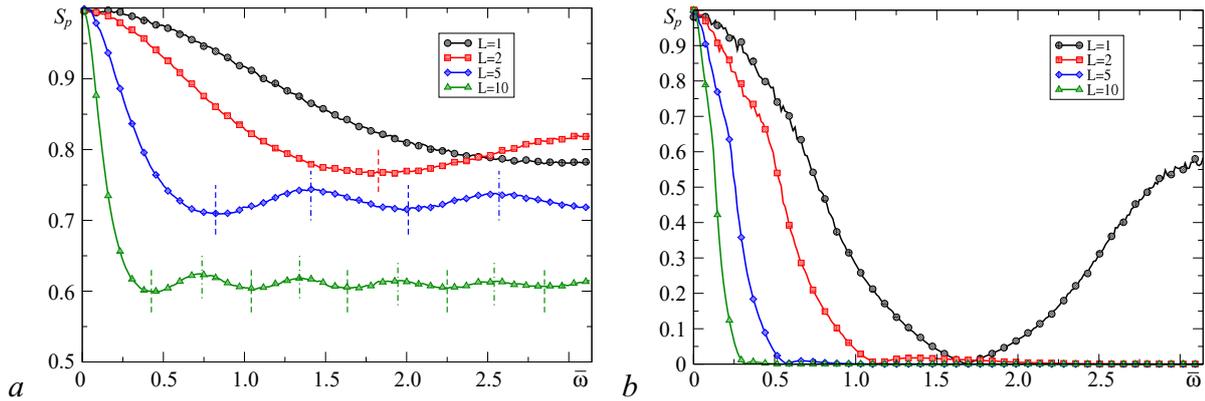


Рис. 5. Пространственные спектры (a) в зоне I при  $\gamma = 0.08$  и (b) в зоне III при  $\gamma = 0.9$ ; вертикальные штриховые линии на рисунке (a) отмечают положение минимумов АЧХ, штрихпунктирные — ее максимумов

Fig. 5. Spatial spectra (a) in zone I at  $\gamma = 0.08$  and (b) in zone III at  $\gamma = 0.9$ ; on figure (a) vertical dashed and dashed-dotted lines mark minima and maxima of the frequency response plot, correspondently

структуру; причем число и расположение экстремумов и там и там идентично (для наглядности расположение экстремумов соответствующих АЧХ отмечено вертикальными линиями). В то же время, между ними существуют количественные различия: уровень боковых лепестков спектров существенно ниже, чем это следует из формы АЧХ, то есть селективные свойства в ансамбле (1) проявляются сильнее, чем в соответствующем линейном фильтре (3).

**Интервал III.** В области сильной связи наблюдается качественное расхождение в поведении ансамблей с локальными и нелокальными связями: при  $L > 1$  наблюдается монотонный рост когерентности с ростом  $\gamma$  (см. рис. 3, b, c и d), при  $L = 1$  когерентность вначале растет, а затем, при  $\gamma \geq 0.8$  начинает уменьшаться; при  $\gamma \simeq 1$  она становится близкой к нулю (см. рис. 3, a). Данное расхождение объясняется качественным различием АЧХ фильтров. Как уже было отмечено в разделе 1, в то время как нелокальные связи сохраняют свойства ФНЧ во всем диапазоне значений  $\gamma$ , система локальных связей при  $\gamma > 0.5$  начинает приобретать свойства заграждающего фильтра, что отражается на поведении ансамбля. Как было показано в работе [25], начиная с  $\gamma = 0.5$  снижение доли коротковолновых режимов сменяется их ростом с максимумом в окрестности  $\bar{\omega} = \pi$ . Этот процесс резко усиливается при  $\gamma \geq 0.8$ . Поэтому при сильной локальной связи в пространственном спектре наряду с длинноволновыми модами присутствуют и коротковолновые. Пространственная динамика представляет собой сосуществование метастабильных кластеров «длинных» и «коротких» мод, как это показано на рис. 6, a. Переменяемость между этими кластерами и является причиной ослабления когерентности.

Иное поведение характерно для ансамблей с нелокальными связями. Здесь низкочастотный характер пространственного фильтра сохраняется и при сильной связи (см. рис. 1, b), поэтому рост связи приводит к дальнейшему понижению доли коротковолновых мод в ансамбле. Это хорошо видно по пространственным снимкам колебаний, построенных на рис. 6, b для  $L = 2$  и особенно на рис. 6, c для  $L = 10$ . В результате, при сильной дальнедействующей связи ансамбль постепенно переходит к режиму, близкому к хаотической синхронизации, что видно по перекрестным фазовым портретам (см. рис. 6, c).

Как и в зоне I, в области сильной когерентности наблюдается качественное совпадение между пространственными спектрами колебаний (рис. 5, b) и формой АЧХ (см. рис. 1, b). Как видно из рисунков, во всех спектрах, кроме  $L = 1$ , присутствуют лишь длинноволновые компоненты.

Однако, как и при слабой связи, селективные свойства ансамбля выражены гораздо сильнее, чем соответствующего линейного фильтра, так что величина боковых лепестков становится настолько малой, что в спектрах остаются лишь те компоненты, которые соответствуют основному лепестку.

Таким образом, в областях I и III динамика системы (1) представляет собой пространственно-временной хаос, форма пространственного спектра которого качественно схожа с амплитудно-частотной характеристикой системы связей ( $|R(\bar{\omega})|$ ), но не повторяет ее.

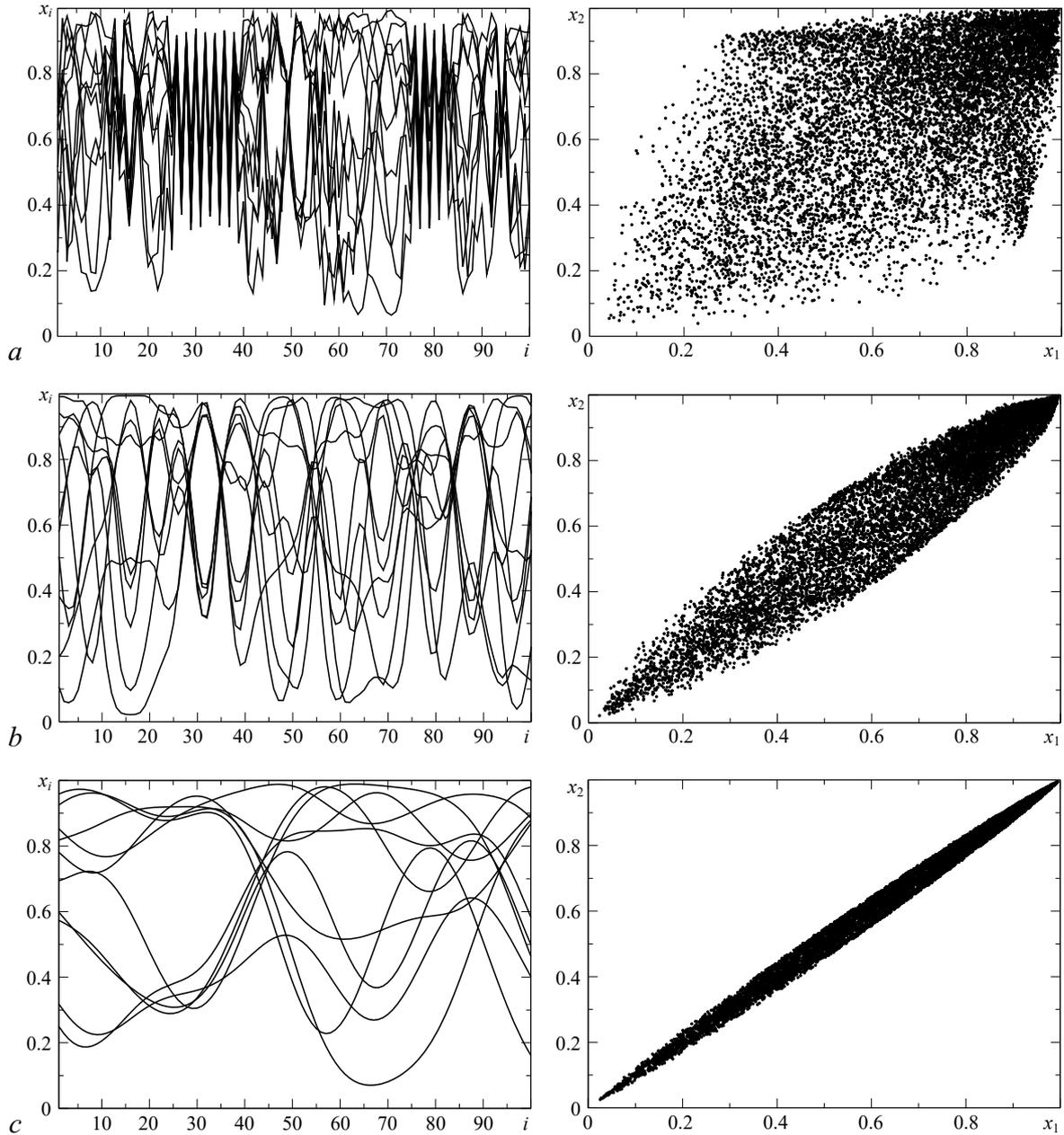


Рис. 6. Динамика системы в области III: пространственные снимки (слева) и перекрестные фазовые портреты (справа) при  $\gamma = 0.9$  и  $L = 1$  (a), 2 (b), 10 (c)

Fig. 6. The system dynamics in region III: spatial snapshots (left) and cross phase-portraits (right) at  $\gamma = 0.9$  and  $L = 1$  (a), 2 (b), 10 (c)

## 5. Зона диссипативных структур

Как было отмечено выше, в большей части диапазона  $\gamma \in [0 : 1]$  колебания в ансамбле (1) представляют собой однородный пространственно-временной хаос. Рассмотрим теперь динамику в оставшемся интервале значений  $\gamma$ , обозначенном на рис. 3 как зона II. В этой области когерентность меняется вдоль ансамбля, так что в нем сосуществуют как участки с полной ( $S(i) = 1$ ), так и со слабой ( $S(i) \ll 1$ ) когерентностью. Такая неоднородность предполагает существование стационарных пространственных структур. Каков вид этих структур и будут ли они как-то связаны с коэффициентом передачи фильтра  $R$ ?

Для ответа на данные вопросы рассмотрим типичные пространственные снимки колебаний в ансамбле при разных  $L$ , приведенные на рис. 7. Как видно из рисунков, образующиеся структуры представляют собой нерегулярные сочетания кластеров с разными характерным масштабами, соответствующими преимущественно коротковолновым модам. Так, в случае локальных связей основной модой являются противофазные колебания, пространственный спектр которых представляет собой  $\delta$ -импульс на частоте  $\bar{\omega} = \pi$ . При  $\gamma = 0.14$  противофазные колебания распространяются на весь ансамбль, в остальной части интервала II они перемежаются с короткими кластерами иной структуры, как это показано на рис. 7, *a*. При дальнедействующих связях набор

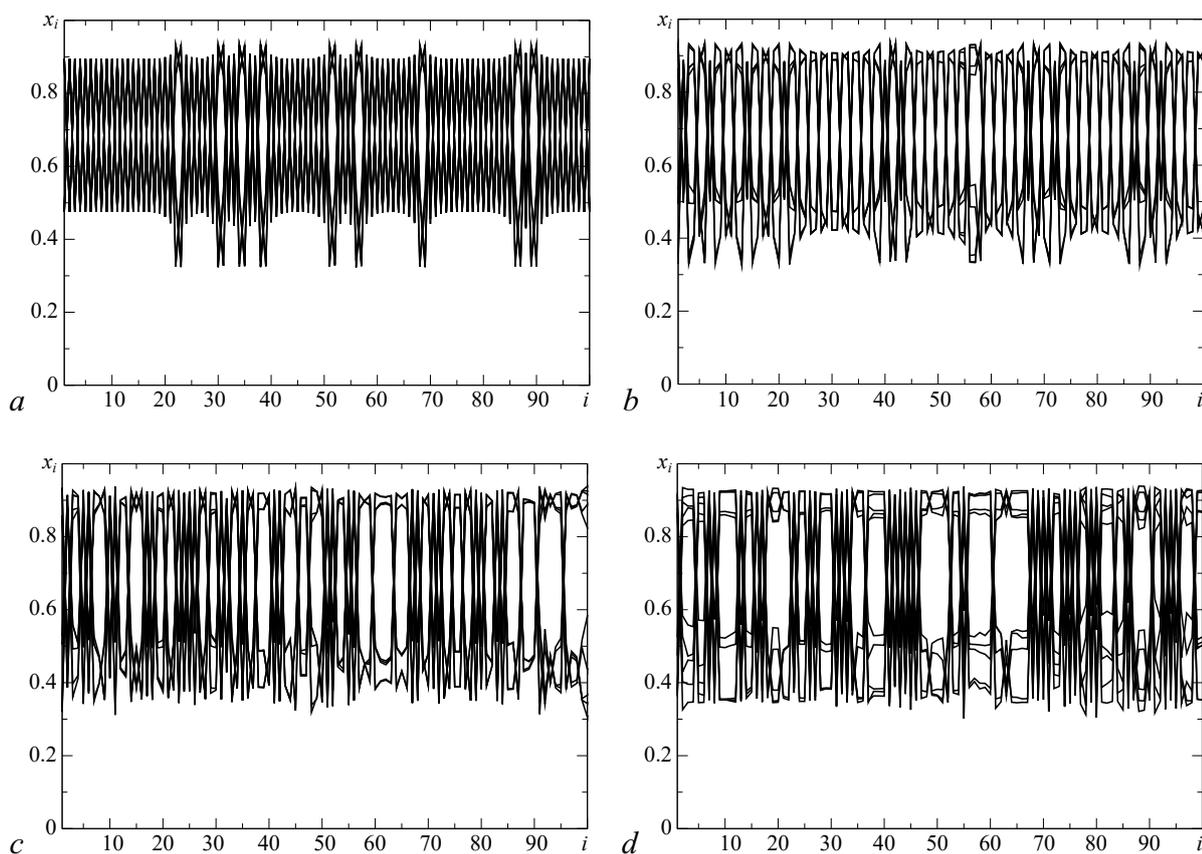


Рис. 7. Пространственные снимки в зоне II при:  $L = 1$ ,  $\gamma = 0.16$  (*a*);  $L = 2$ ,  $\gamma = 0.18$  (*b*);  $L = 5$ ,  $\gamma = 0.2$  (*c*)  $L = 10$ ,  $\gamma = 0.2$  (*d*)

Fig. 7. The spatial snapshots in zone II at:  $L = 1$ ,  $\gamma = 0.16$  (*a*);  $L = 2$ ,  $\gamma = 0.18$  (*b*);  $L = 5$ ,  $\gamma = 0.2$  (*c*)  $L = 10$ ,  $\gamma = 0.2$  (*d*)

чередующихся кластеров является более разнообразным, но и в этих случаях, очевидна высокая доля коротковолновых мод.

Колебательные режимы, показанные на рис. 7, не единственные для данных значений параметров. Очевидно, что вследствие трансляционной симметрии системы (1) любые пространственные структуры, полученные из изображенных посредством сдвига на произвольное число ячеек вправо или влево, будут также сосуществовать в ансамбле. Кроме того, существует множество и других похожих структур. Таким образом, в зоне II в системе наблюдается развитая мультистабильность.

Для определения количественного состава волновых мод, присутствующих в ансамбле, обратимся к пространственным спектрам рассматриваемых колебательных режимов. Каждому из аттракторов будет соответствовать свой спектр, который будет характеризовать пространственные свойства данного режима. Но, поскольку таких аттракторов множество, для того чтобы характеризовать систему в целом, при расчете спектров по формуле (6) мы будем проводить усреднение не только по времени, как для пространственно-однородных режимов, но и по начальным условиям. Построенные таким образом спектры приведены на рис. 8.

Из анализа спектров можно заметить, прежде всего, «провал» на нулевой частоте, означающий подавление длинноволновых мод, характерное для данной зоны. Кроме того, очевидно, что спектры обладают лепестковой структурой, подобно тому, как это имеет место в зоне I. Однако здесь эта структура имеет дуальный характер по отношению к форме АЧХ пространственного фильтра связей: легко убедиться, что максимумы в спектрах соответствуют минимумам характеристики и наоборот. Для большей наглядности на рис. 8 построены вертикальные штриховые линии, отмечающие положения минимумов функции  $R(\bar{\omega})$  для разных  $L$ . Дуальность спектра по отношению к АЧХ особенно заметна на примере ансамбля с локальными связями, где максимум оказывается строго на пространственной частоте  $\bar{\omega} = \pi$ , но она проявляется и для дальнедействующих связей.

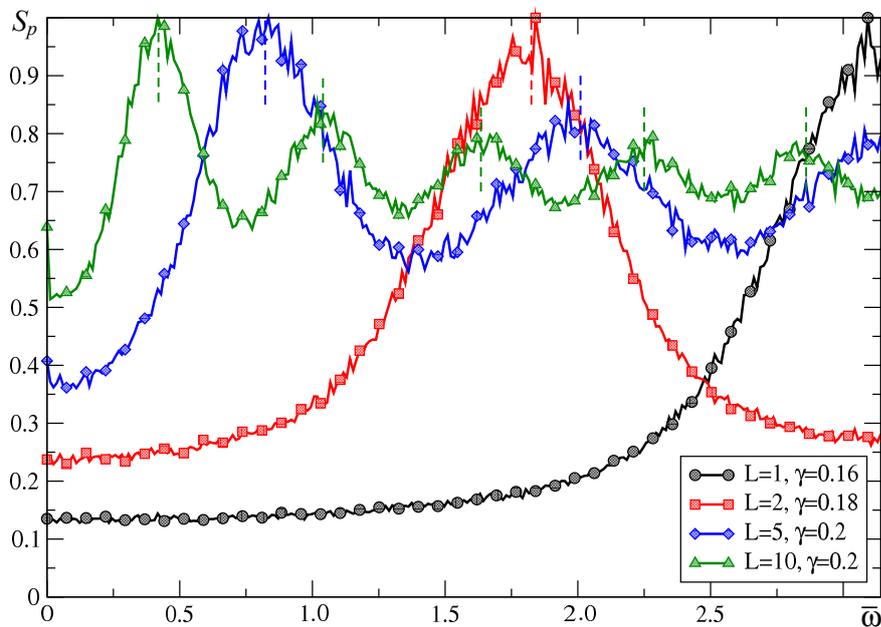


Рис. 8. Пространственные спектры в зоне диссипативных структур

Fig. 8. Spatial spectra in the zone of dissipative structures

Таким образом, в зоне диссипативных структур, так же, как и в зоне однородного пространственно-временного хаоса, наблюдается селекция пространственных мод сетевым фильтром. Однако эта селекция происходит противоположным образом: если в областях I и III пространственные спектры колебаний оказываются качественно схожи с АЧХ фильтра связей, в результате чего с ростом  $\gamma$  подавляются коротковолновые моды (за исключением случая локальных связей), то в зоне II, наоборот, подавляются преимущественно длинноволновые моды, а длины волн, соответствующие минимумам АЧХ, сохраняются.

### Заключение

Проведенные исследования показали, что система связей между хаотическими отображениями представляет собой линейный волновой фильтр, обладающий пространственно-селективными свойствами, позволяя существовать пространственным модам с определенными длинами волн и подавляя другие. Селекция пространственных структур происходит на основе волновой характеристики фильтра связей, вид которой определяется радиусом действия и величиной связей между элементами ансамбля. Селективные свойства наглядно проявляются в режиме развитого пространственно-временного хаоса. В этом случае пространственный спектр колебаний качественно соответствует волновой характеристике фильтра связей. Между спектром и формой волновой характеристики существует также и количественное соответствие: расположение минимумов и максимумов в пространственных спектрах приходится на те же длины волн, что и соответствующие экстремумы волновой характеристики. Тем не менее полное соответствие между ними не наблюдается: селективные свойства в нелинейной системе проявляются существенно сильнее, чем в соответствующем линейном фильтре связей.

В ходе численного моделирования ансамбля логистических отображений выяснилось, что между динамикой ансамблей с локальными и нелокальными связями существует характерное качественное различие. Оно проявляется в области сильной связи. В этом случае рост силы нелокальных связей ведет к подавлению коротких волн и постепенному переходу к режиму полной синхронизации, а рост локальных связей ведет к пространственно-временной перемежаемости между длинноволновыми и коротковолновыми кластерами. При этом переход к синхронизации не происходит.

Помимо однородного пространственно-временного хаоса в небольшом интервале связи в ансамбле наблюдаются диссипативные структуры. Здесь также проявляются селективные свойства сети, но «в обратную сторону»: максимумам в характеристике фильтра связей соответствуют минимумы в распределении энергии колебаний по длинам волн. Поэтому в области диссипативных структур доминирующими становятся моды с малой длиной волны.

### Список литературы

1. Анищенко В. С., Постнов Д. Э., Сафонова М. А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, № 24. С. 1505–1509.
2. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. Пространственная синхронизация и развитие бифуркаций в цепочке связанных осцилляторов // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120–1124.
3. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 69, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
4. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II: The mapping approach // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 70, no. 5, P. 1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.

5. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safonova M. A.* Synchronization of chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, no. 3. P. 633–644. DOI: 10.1142/S0218127492000756.
6. *Heagy J. F., Carroll T. L., Pecora L. M.* Synchronous chaos in coupled oscillator systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50, no. 3. P. 1874–1884. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.1874.
7. *Ren L., Ermentrout B.* Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // Physica D. 2000. Vol. 143, no. 1–4. P. 56–73. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00096-8.
8. *Шабунин А. В., Акопов А. А., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // Известия вузов. ПНД. 2005. Т. 13, № 4. С. 37–55. DOI: 10.18500/0869-6632-2005-13-4-37-55.
9. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
10. *Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation outside of equilibrium // Rev. Mod. Phys. 1993. Vol. 65, no. 3. P. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
11. *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific, 2002. 440 p. DOI: 10.1142/4845.
12. *Arecchi F. T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, no. 17. P. 1217–1220. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1217.
13. *Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. П., Селезнев Е. П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, № 3. С. 60–65.
14. *Астахов В. В., Безручко Б. П., Пудовочкин О. Б., Селезнев Е. П.* Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 2. С. 291–295.
15. *Prengel F., Wacker A., Schöll E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // Phys. Rev. B. 1994. Vol. 50, no. 3. P. 1705–1712. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.1705.
16. *Sun N. G., Tsironis G. P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51, no. 16. P. 11221–11224. DOI: 10.1103/PhysRevB.51.11221.
17. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, no. 4. P. 708–711. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.708.
18. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
19. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, no. 23. P. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102.
20. *Hagerstrom A. M., Murphy T. E., Roy R., Hövel P., Omelchenko I., Schöll E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // Nature Physics. 2012. Vol. 8, no. 9. P. 658–661. DOI: 10.1038/nphys2372.
21. *Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Schöll E., Анищенко В. С.* Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42, № 14. С. 103–110.
22. *Gopal R., Chandrasekar V. K., Venkatesan A., Lakshmanan M.* Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89, no. 5. P. 052914. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.052914.
23. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, no. 1. P. 016218. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016218.

24. Шабунин А. В. Мультистабильность периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 2. С. 5–23.  
DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23.
25. Shabunin A. Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 7. P. 073132. DOI: 10.1063/5.0054510.
26. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency // Physica D. 1989. Vol. 34, no. 1–2. P. 1–41.  
DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.

## References

1. Anishchenko VS, Postnov DE, Safonova MA. Dimension and physical properties of chaotic attractors in a chain of coupled oscillators. Sov. Tech. Phys. Lett. 1985;11(12):621.
2. Anishchenko VS, Aranson IS, Postnov DE, Rabinovich MI. Spatial synchronization and development bifurcations in a chain of coupled oscillators. Soviet Physics. Doklady. 1986;31(2):169.
3. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. Progress of Theoretical Physics. 1983;69(1):32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
4. Yamada T, Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II: The mapping approach. Progress of Theoretical Physics. 1983;70(5):1240–1248.  
DOI: 10.1143/PTP.70.1240.
5. Anishchenko VS, Vadivasova TE, Postnov DE, Safonova MA. Synchronization of chaos. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1992;2(3):633–644. DOI: 10.1142/S0218127492000756.
6. Heagy JF, Carroll TL, Pecora LM. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. Phys. Rev. E. 1994;50(3):1874–1884. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.1874.
7. Ren L, Ermentrout B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. Physica D. 2000;143(1–4):56–73. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00096-8.
8. Shabunin AV, Akopov AA, Astakhov VV, Vadivasova TE. Running waves in a discrete anharmonic self-oscillating medium. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2005;13(4):37–55 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2005-13-4-37-55.
9. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
10. Cross MC, Hohenberg PC. Pattern formation outside of equilibrium. Rev. Mod. Phys. 1993;65(3):851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
11. Mosekilde E, Maistrenko Y, Postnov D. Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems. Singapore: World Scientific; 2002. 440 p. DOI: 10.1142/4845.
12. Arecchi FT, Meucci R, Puccioni G, Tredicce J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser. Phys. Rev. Lett. 1982;49(17):1217–1220. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1217.
13. Astakhov VV, Bezruchko BP, Gulyaev YV, Seleznev EP. Multistable states in dissipative coupled Feigenbaum's systems. Tech. Phys. Lett. 1989;15(3):60–65 (in Russian).
14. Astakhov VV, Bezruchko BP, Pudovochkin OB, Seleznev EP. Phase multistability and setting of the oscillations in nonlinear systems with period-doublings. Journal of Communications Technology and Electronics. 1993;38(2):291–295 (in Russian).
15. Prengel F, Wacker A, Schöll E. Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices. Phys. Rev. B. 1994;50(3):1705–1712. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.1705.
16. Sun NG, Tsironis GP. Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices. Phys. Rev. B. 1995;51(16):11221–11224. DOI: 10.1103/PhysRevB.51.11221.
17. Foss J, Longtin A, Mensour B, Milton J. Multistability and delayed recurrent loops. Phys. Rev. Lett. 1996;76(4):708–711. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.708.

18. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
19. Omelchenko I, Maistrenko Y, Hövel P, Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(23):234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102.
20. Hagerstrom AM, Murphy TE, Roy R, Hövel P, Omelchenko I, Schöll E. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics.* 2012;8(9):658–661. DOI: 10.1038/nphys2372.
21. Bogomolov SA, Strelkova GI, Schöll E, Anishchenko VS. Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators. *Tech. Phys. Lett.* 2016;42(7):765–768. DOI: 10.1134/S1063785016070191.
22. Gopal R, Chandrasekar VK, Venkatesan A, Lakshmanan M. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling. *Phys. Rev. E.* 2014;89(5):052914. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.052914.
23. Shabunin A, Astakhov V, Kurths J. Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence. *Phys. Rev. E.* 2005;72(1):016218. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016218.
24. Shabunin AV. Multistability of periodic orbits in ensembles of maps with long-range couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2018;26(2):5–23 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23.
25. Shabunin A. Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos. *Chaos.* 2021;31(7):073132. DOI: 10.1063/5.0054510.
26. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. *Physica D.* 1989;34(1–2):1–41. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.



*Шабунин Алексей Владимирович* — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук (2007, СГУ) по специальности «Радиофизика». С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский национальный исследовательский  
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru  
 ORCID: 0000-0002-3495-9418  
 AuthorID: 34839

## EDITOR-IN-CHIEF

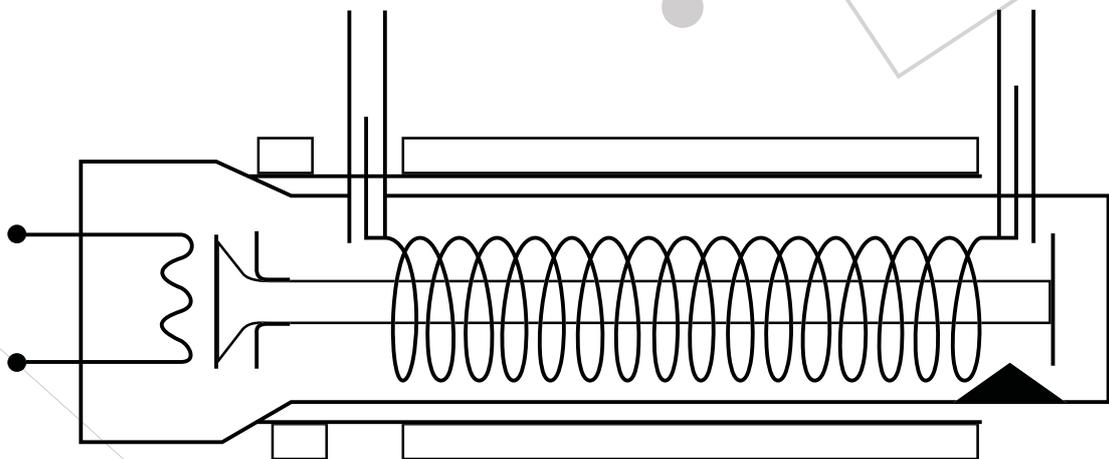
*Yu. V. Gulyaev*, Ph.D., Professor, Member of the RAS,  
Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Moscow

## DEPUTY EDITORS

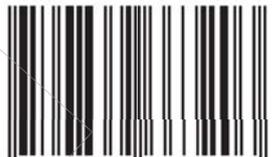
*I. V. Sysoev*, Ph.D., Professor Saratov State University, Saratov  
*A. N. Chumachenko*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov

## EDITORIAL BOARD

*V. M. Anikin*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov  
*B. P. Bezruchko*, Ph.D., Professor, Saratov State University, Saratov  
*S. V. Gonchenko*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny  
Novgorod, Nizhny Novgorod  
*N. S. Ginzburg*, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS, Institute of Applied  
Physics of the RAS, Nizhny Novgorod  
*A. S. Dmitriev*, Ph.D., Professor, Institute of Radioengineering and Electronics  
of the RAS, Moscow  
*S. A. Kashchenko*, Ph.D., Professor, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl  
*P. S. Landa*, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow  
*G. G. Malinetskii*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow  
*V. V. Matrosov*, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny  
Novgorod, Nizhny Novgorod  
*V. I. Nekorkin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS,  
Nizhny Novgorod  
*A. V. Porubov*, Ph.D., Professor, Institute for Problems in Mechanical Engineering  
of the RAS, St. Petersburg  
*Yu. M. Romanovsky*, Ph.D., Professor, Moscow State University, Moscow  
*V. V. Tuchin*, Ph.D., Professor, Corresponding Member of the RAS,  
Saratov State University, Saratov  
*A. M. Feigin*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod  
*V. A. Tsarev*, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov  
*M. V. Shitikova*, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh  
*V. G. Yakhno*, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod  
*S. Boccaletti*, Ph.D., Senior Researcher of Institute for Complex Systems  
of the National Research Council (CNR), Sesto Fiorentino, Italy  
*A. V. Kraskov*, Ph.D., Principal Investigator, UCL Institute of Neurology,  
Sobell Department, London, UK  
*N. V. Kuznetsov*, Visiting Professor, University of Jyväskylä, Finland  
*G. van Luijtelaar*, Professor, Radboud University Nijmegen, Nijmegen, The Netherlands  
*A. K. Lüttjohann*, Ph.D., Postdoctoral researcher, Institut für Physiologie I, Westfälische  
Wilhelms-Universität, Münster, Germany  
*A. B. Neiman*, Dr. of Sciences, Physics and Mathematics, Associate professor  
of Department of Physics and Astronomy, Ohio University, USA  
*A. S. Pikovsky*, Dr. rer. Nat. habil., Professor, Universität Potsdam, Germany  
*A. N. Pisarchik*, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid,  
Centre for Biomedical Technology, Spain  
*V. A. Vakorin*, Ph.D., Data Scientist, NeuroInformatics and NeuroAnalytics  
Lead, ImageTech Lab, Simon Fraser University, Vancouver, Canada



ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >