

ISSN 0869-6632 (print) ISSN 2542-1905 (online)

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Прикладная Деловая Динамика



*70 лет Сергею Владимировичу Гонченко
(10 мая 1953 года)*

ИЗДАНИЕ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю. В. Гуляев, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

И. В. Сысоев, д.ф.-м.н., доцент, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

А. Н. Чумаченко, д. геогр. н., СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

В. М. Аникин, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Б. П. Безручко, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

С. Боккалетти, Ph.D., Институт сложных систем при Национальном
исследовательском совете (Флоренция, Италия)

А. М. Быков, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН
(Санкт-Петербург, Россия)

В. А. Вакорин, Ph.D., Университет Саймона Фрейзера (Ванкувер, Канада)

С. В. Гонченко, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

Н. С. Гинзбург, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Дмитриев, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
(Москва, Россия)

С. А. Кащенко, д.ф.-м.н., профессор, ЯрГУ им. П. Г. Демидова
(Ярославль, Россия)

А. В. Красков, Ph.D., Ньюкаслский университет (Ньюкасл, Великобритания)

Н. В. Кузнецов, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Ж. ван Луйтелаар, Ph.D., профессор, Университет Неймегена имени
святого Радбода Утрехтского (Неймеген, Нидерланды)

А. Люттйоханн, Ph.D., Институт физиологии I Вестфальского университета
имени Вильгельма (Мюнстер, Германия)

Г. Г. Малинецкий, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
(Москва, Россия)

В. В. Матросов, д.ф.-м.н., профессор, ННГУ им. Н. И. Лобачевского
(Нижний Новгород, Россия)

И. И. Мохов, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, Институт физики атмосферы
им. А. М. Обухова РАН (Москва, Россия)

А. Б. Нейман, д.ф.-м.н., Университет Огайо (Огайо, США)

В. И. Некоркин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН
(Нижний Новгород, Россия)

А. С. Пиковский, доктор наук, Потсдамский университет (Потсдам, Германия)

А. Н. Писарчик, к.ф.-м.н., Мадридский технический университет (Мадрид, Испания)

А. В. Порубов, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН (Санкт-Петербург, Россия)

В. В. Тучин, чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессор, СГУ имени Н. Г. Чернышевского
(Саратов, Россия)

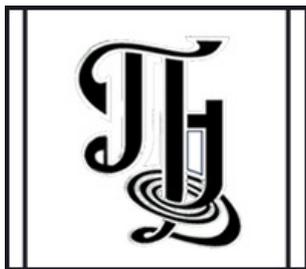
А. М. Фейгин, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)

В. А. Царёв, д.т.н., профессор, СГТУ имени Гагарина Ю. А (Саратов, Россия)

В. А. Черепенин, академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, ИРЭ им. В. А. Котельникова
РАН (Москва, Россия)

М. В. Шитикова, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия)

В. Г. Яхно, д.ф.-м.н., профессор, ИПФ РАН (Нижний Новгород, Россия)



**Известия высших учебных заведений
ПРИКЛАДНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА**

Научно-технический журнал

Издается с 1993 года, выходит 6 раз в год

Учредитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»
Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83; e-mail: rector@sgu.ru

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. Свидетельство о регистрации средства массовой информации № 1492 от 19.12.1991, перерегистрация: № 1492 от 24.08.1998, перерегистрация: ПИ № ФС77-77991 от 20.03.2020

Краткое название: Известия вузов. ПНД

ISSN печатной версии 0869-6632, ISSN online версии 2542-1905

Язык публикаций: русский, английский

Журнал включён как самостоятельное издание в два индекса Web of Science: Emerging Source Citation Index (WoS Core Collection) и Russian Science Citation Index

Журнал включен в библиографическую базу данных SCOPUS (sourceid/21100864538) как самостоятельное издание

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук». Научные специальности, по которым присуждаются учёные степени (физико-математические науки): 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела, 1.3.3 – Теоретическая физика, 1.3.4 – Радиофизика, 1.3.5 – Физическая электроника, 1.3.6 – Оптика, 1.3.9 – Физика плазмы, 1.3.11 – Физика полупроводников, 1.3.19 – Лазерная физика, 1.5.2 – Биофизика

Подписку на печатную версию издания можно оформить в Интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (uralpress.ru). Цена свободная

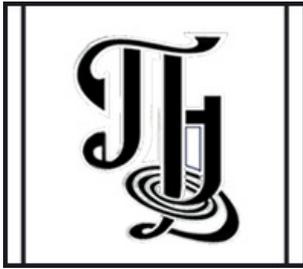
Электронная версия журнала находится в открытом доступе

Зав. редакцией М. В. Сысоева
Редакторы: Л. А. Сидорова, А. О. Салахова
Верстка О. Н. Строгановой

Адрес редакции: Россия, 410012 Саратов,
Астраханская, 83. Тел.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
сайт: <http://andjournal.sgu.ru>

Подписан в печать 11.05.2023
Вышел в свет 31.05.2023
Формат 60x84 1/8. Усл. печ. л. 18,37 (19,75)
Тираж 100 экз. Заказ № 68-Т

Отпечатан в Типографии Саратовского
университета. Адрес типографии: Россия,
410012 Саратов, Астраханская, 83, корп. 8
Тел.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru



Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy
APPLIED NONLINEAR DYNAMICS

Scientific-technical journal

Published since 1993, 6 issues per year

The journal was founded by Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

The publisher of the journal is Saratov State University
83, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia; e-mail: rector@sgu.ru

Registered with the Federal service for supervision of communications, information technology and mass communications. Certificate of mass media registration No 1492 of 19.12.1991, re-registration: No 1492 of 24.08.1998, re-registration: ПИ No ФC77-77991 of 20.03.2020

Abbreviated title: Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics

ISSN print 0869-6632, ISSN online 2542-1905

Languages of publication: Russian and English

The journal is included into Web of Science Core Collection, Emerging Source Citation Index and into Russian Science Citation Index on the Web of Science platform

The journal has been indexed in SCOPUS as an independent source (sourceid/21100864538)

The journal is included in «The LIST of peer-reviewed scientific publications, where the main scientific results of Candidate of Sciences and Doctor of Sciences dissertations have to be published». The following Scientific Specialties in the field of Physics and Mathematical Sciences are presented: 1.1.8 – Mechanics of a deformable solid body, 1.3.3 – Theoretical Physics, 1.3.4 – Radio Physics, 1.3.5 – Physical Electronics, 1.3.6 – Optics, 1.3.9 – Plasma Physics, 1.3.11 – Semiconductor Physics, 1.3.19 – Laser Physics, 1.5.2 – Biophysics

A subscription to the print version of the journal can be issued in the Internet catalog of the Ural-Press Group of Companies (ural-press.ru)

The journal is Open Access

Head of Editorial office M. V. Sysoeva
Editors: L. A. Sidorova, A. O. Salakhova
Layout of O. N. Stroganova

Address of Editorial office: 83, Astrakhanskaya Str.,
Saratov 410012, Russia. Ph.: +7 (8452) 523864,
+7 (909) 3367208, e-mail: andjournal@sgu.ru,
website: <http://andjournal.sgu.ru>

Signed to press 11.05.2023. Published 31.05.2023
Format 60x84 1/8. Conv.-pr. Sh. of 18,37 (19,75)
Edition of 100 copies. Order No. 68-T

Printed by Printing House of Saratov State
University. Address of Printing House:
83, build. 8, Astrakhanskaya Str., Saratov 410012,
Russia. Ph.: +7 (8452) 273385, e-mail: sguprint@bk.ru

СО Д Е Р Ж А Н И Е

ОТ РЕДАКТОРА

- Казаков А. О., Тураев Д. В.* 70 лет Сергею Владимировичу Гонченко 247
40 лет Илье Вячеславовичу Сысоеву 249

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

- Матросов В. В., Шалфеев В. Д.* Взаимосвязанные экономические колебания — динамическая модель синхронизации 254
Шабунин А. В. Пространственная и временная динамика возникновения эпидемий в гибридной SIRS+V модели клеточных автоматов 271
Говорухин В. Н. Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя 286
Гуйо Г. А., Павлов А. Н. Применение совместного спектра сингулярностей для анализа кооперативной динамики сложных систем 305

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И ГУМАНИТАРНЫЕ НАУКИ

- Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г.* Математическая модель трех конкурирующих популяций и мультистабильность периодических режимов 316
Krivososov M. I., Tikhomirov S. N. Strategies and first-absorption times in the random walk game [*Кривонососов М. И., Тихомиров С. Н.* Стратегии и время поглощения в игровых случайных блужданиях] 334

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА И НЕЙРОНАУКА

- Меркулова К. О., Постнов Д. Э.* Рассеянный свет в ночное время вызывает рассинхронизацию ритмов в модели переключения «сон–бодрствование» 351

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ. СОЛИТОНЫ. АВТОВОЛНЫ. САМООРГАНИЗАЦИЯ

- Mogilevich L. I., Popova E. V.* Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity [*Могилевич Л. И., Попова Е. В.* Продольные волны в стенках кольцевого канала из материала с дробной нелинейностью, заполненного жидкостью] 365

PERSONALIA

- Гурия Г. Т., Малинецкий Г. Г., Соминский Г. Г., Пойзнер Б. Н.* К 85-летию Дмитрия Ивановича Трубецкого 377

C O N T E N T S

EDITORIAL

<i>Kazakov A. O., Turaev D. V.</i> 70 years of Sergey V. Gonchenko	247
40 years of Ilya V. Sysoev	249

APPLIED PROBLEMS OF NONLINEAR OSCILLATION AND WAVE THEORY

<i>Matrosov V. V., Shalfeev V. D.</i> Coupled economic oscillations – synchronization dynamical model	254
<i>Shabunin A. V.</i> Spatial and temporal dynamics of the emergence of epidemics in the hybrid SIRS+V model of cellular automata	271
<i>Govorukhin V. N.</i> Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane	286
<i>Guyo G. A., Pavlov A. N.</i> Application of joint singularity spectrum to analyze cooperative dynamics of complex systems	305

MODELING OF GLOBAL PROCESSES. NONLINEAR DYNAMICS AND HUMANITIES

<i>Nguyen B. H., Tsibulin V. G.</i> Mathematical model of three competing populations and multistability of periodic regimes	316
<i>Krivososov M. I., Tikhomirov S. N.</i> Strategies and first-absorption times in the random walk game	334

NONLINEAR DYNAMICS AND NEUROSCIENCE

<i>Merkulova K. O., Postnov D. E.</i> Ambient light at night causes desynchronization of rhythms in the sleep–wake switching model	351
--	-----

NONLINEAR WAVES. SOLITONS. AUTOWAVES. SELF-ORGANIZATION

<i>Mogilevich L. I., Popova E. V.</i> Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity	365
--	-----

PERSONALIA

<i>Guria G. T., Malinetskii G. G., Sominskii G. G., Poizner B. N.</i> To the 85th anniversary of Dmitry Ivanovich Trubetskov	377
--	-----



70 лет Сергею Владимировичу Гонченко

А. О. Казаков¹, Д. В. Тураев²

¹Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

²Имперский колледж Лондона, Великобритания

E-mail: kazakovdz@yandex.ru, d.turaev@imperial.ac.uk

Поступила в редакцию 11.05.2023, опубликована 31.05.2023

Для цитирования: Казаков А. О., Тураев Д. В. 70 лет Сергею Владимировичу Гонченко // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 247–248. DOI: 10.18500/0869-6632-003046. EDN: TLQBSO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

10 мая 2023 года исполняется 70 лет профессору Сергею Владимировичу Гонченко, ведущему научному сотруднику Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Сергей Владимирович родился в городе Горьком в 1953 году. В 1975 году окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского университета. После окончания университета С. В. Гонченко работал в первом отделе (отделе дифференциальных уравнений) НИИ прикладной математики и кибернетики Горьковского университета под руководством Леонида Павловича Шильникова — выдающегося российского ученого, одного из отцов-основателей современной теории хаоса. В 2012 году, после смерти Л. П. Шильникова, Сергей Владимирович возглавил отдел, ныне это лаборатория имени Л. П. Шильникова.

Сергей Владимирович Гонченко — признанный лидер Нижегородской школы по теории динамических систем. Основная тема его исследований — хаотическая динамика негрубых (структурно-неустойчивых) систем. К этому классу относится большинство систем дифференциальных уравнений, возникающих в приложениях, но задача описания динамики для них настолько трудна, что основной поток математических исследований старается их обходить. Гонченко является пионером в области строгого математического исследования таких систем. Ему принадлежат фундаментальные результаты по теории гомоклинического касания — основного механизма, ответственного за структурные изменения хаотической динамики и даже за возникновение

хаоса в результате так называемого омега-взрыва. Гонченко стал первым, кто начал развивать многомерную теорию гомоклинических касаний, он предложил альтернативную конструкцию явления Ньюхауса (существование бесконечного множества устойчивых траекторий) и показал, что явление Ньюхауса имеет конечную коразмерность. Одним из важнейших его достижений в этой области стало открытие модулей омега-сопряженности для систем с гомоклиническими касаниями. Эти исследования легли в основу его кандидатской (1983), а затем докторской (2004) диссертаций. Построенная теория позволила выявить общие свойства динамики негрубых хаотических систем и изучить их основные бифуркации с помощью семейств, в которых в качестве управляющих параметров рассматривались омега-модули.

Одним из наиболее ярких достижений, выросших из теории гомоклинических касаний, явилась предложенная Сергеем Владимировичем совершенно новая концепция обратимого хаоса. До его работ исследования хаотического поведения фокусировались или на изучении странных аттракторов (диссипативный хаос) или на неинтегрируемой гамильтоновой динамике (консервативный хаос), но Гонченко показал существование нового, третьего типа хаотической динамики, где консервативное и диссипативное поведение существуют неотделимо друг от друга. Таким образом, он основал новое направление в математической теории хаотических динамических систем — вклад, сравнимый с достижениями классиков прошлого.

В настоящее время Сергей Гонченко продолжает активно заниматься хаотической динамикой в многомерных системах. Важнейшие среди его недавних замечательных результатов — открытие и классификация дискретных обобщений аттрактора Лоренца в многомерных системах самой разнообразной природы, и открытие и исследование так называемой смешанной динамики — неустранимого пересечения аттрактора и репеллера, как в слабодиссипативных, так и в сильнодиссипативных системах. Эти открытия полностью изменили наши представления о природе многомерного хаоса и вызвали немедленный отклик как теоретиков, так и прикладных ученых. Они легли в основу интенсивного сотрудничества с различными исследовательскими группами как в России, так и за рубежом.

Сергей Владимирович Гонченко ведет активную научную работу в Нижегородском университете им. Н. И. Лобачевского и в Нижегородской высшей школе экономики. Под его руководством защищено 4 кандидатских и 1 докторская диссертации. Он опубликовал более 100 научных работ в ведущих российских и зарубежных изданиях, а также 2 монографии: «Гомоклинические касания» и «Избранные труды Л. П. Шильникова». Сергей Владимирович — постоянный автор журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика», входит в состав его редколлегии.

*Коллеги и друзья от всей души поздравляют Сергея Владимировича с юбилеем,
желают новых свершений, открытий и крепкого здоровья!*



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003045
EDN: TJOIXK

40 лет Илье Вячеславовичу Сысоеву

Поступила в редакцию 26.04.2023, опубликована 31.05.2023

Для цитирования: 40 лет Илье Вячеславовичу Сысоеву // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 249–253.
DOI: 10.18500/0869-6632-003045. EDN: TJOIXK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

9 июня 2023 года исполняется 40 лет зам. главного редактора журнала «Известия вузов. ПНД», доктору физико-математических наук, профессору СГУ Илье Вячеславовичу Сысоеву.

*Редколлегия и редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» от всей души поздравляют уважаемого и дорогого Илью Вячеславовича с Днем рождения!
Желаем ему крепкого здоровья, благополучия, абсолютного семейного счастья,
новых научных побед и личных достижений!*

Присоединяемся ко всем поздравлениям и пожеланиям учеников Ильи Вячеславовича, размещенным на этих страницах.

Наконечный Павел Игоревич (специалист 2007)

Поздравляю с Юбилеем! Как один из первых подопечных, я наверняка создал все возможные проблемы для тогда ещё начинающего свою карьеру научного работника. Но для меня лично это был тот интересный и поучительный опыт, который я вспоминаю до сих пор: любопытные задачи, занятия в институте г. Юлих, поездка по немецким полям на велосипеде со спущенным колесом, Аахенский карнавал...

Желаю дальнейшего развития в научном пути и конечно в семейной жизни. Последнее это и есть главное достижение.

Дерюгин Константин Александрович (бакалавр 2009)

Уважаемый Илья Вячеславович! Поздравляю Вас с Днём Рождения! Пусть этот день напомнит Вам, как много Вы значите для нас — студентов (как бывших, так и настоящих) и нашего университета. Ваше руководство и наставничество оказали на меня большое влияние, и они будут помниться всю жизнь.

Все, что Вы делаете, будет иметь важное значение для многих студентов, которые будут служить обществу и делать этот мир лучше.



Желаю Вам здоровья и энергии для продолжения науки, Ваш труд, влияние и знания будут всегда оценены и уважаемы. Вы прекрасный профессионал и я чувствую себя очень счастливым, что имел возможность учиться под Вашим руководством. С наилучшими пожеланиями, Константин Дерюгин!

Макаров Павел Андреевич (бакалавр 2009, магистр 2011)

Моё поздравление будет кратким, как квалификационная работа, но столь же душевным. Желаю успеха в нелёгком деле созидания. P.S. Борода — это правильный выбор.

Алексеев Алексей Александрович (бакалавр 2010, магистр 2012)

Поздравляю с Юбилеем Сысоева Илью Вячеславовича! Желаю сил и вдохновения, чтобы науку продвигать и гранты получать, уверенности в завтрашнем дне, стабильного благополучия и удачи, семейного тепла и уюта и крепкого здоровья!

Хейлык Иван Александрович (бакалавр 2010, магистр 2012)

Глубокоуважаемый Илья Вячеславович! От всей души поздравляю Вас с Днём Рождения! Безмерно благодарен Вам за уникальные знания и навыки, которыми Вы делились со мной и другими студентами, за те качества личности и свойства характера, которые Вы демонстрировали. Ваш талант учёного и высокая требовательность служат примером для всех нас.

Желаю Вам способных и талантливых учеников, почёта, уважения, огромных сил, терпения и многочисленных побед.

Комарова Лидия Васильевна (бакалавр 2011, магистр 2013)

С Днём Рождения поздравляю самого замечательного и опытного научного руководителя. Желаю Вам к каждой работе иметь свой подход и светлые мысли, к каждому вопросу находить верный и развёрнутый ответ, никогда не терять статуса уважаемого и виртуозного специалиста своего дела. Будьте крепко здоровы и всегда успешны в любых начинаниях.

Корнилов Максим Вячеславович (магистр 2011, кандидат наук 2015)

Поздравляю с Днём Рождения отличного человека, замечательного научного руководителя, и хорошего начальника Илью Вячеславовича Сысоева! Желаю увлекательных исследований, порождающих удивительные открытия, которые в свою очередь стали бы ключами к новым теориям! Чтобы никакой, даже самый неудобный результат натурального эксперимента, не смог избежать таланта учёного и не остался необъяснимым! Умных и трудолюбивых учеников!

Пармонов Фёдор Борисович (специалист 2012)

Поздравляем с большим Юбилеем! Много уже достигнуто, но ещё больше ждёт впереди! Новых открытий, покорений новых вершин, чувства юмора и самообладания! Всех благ и новых высот!

Дубровский Владимир Владимирович (бакалавр 2012, магистр 2014)

Дорогой Илья Вячеславович! Поздравляю Вас с Юбилеем — 40-летием!

У меня остались только хорошие воспоминания о ваших лекциях. Благодарен вам за помощь в изучении Python и нейросетей, это пригодилось мне в профессиональной деятельности. Желаю вам счастья, здоровья и успехов в профессиональной деятельности. С Днём Рождения!

Баданин Даниил Вячеславович (бакалавр 2013, магистр 2015)

Хочу поздравить Илью Вячеславовича Сысоева с Юбилеем и пожелать ему крепкого здоровья, пляду новых достижений и горизонтов. Чтобы хмурые моменты скрашивались, а счастливые отпечатывались в памяти навечно, а самый тяжёлый выбор в жизни был из разряда какой галстук надеть на вручение Нобелевской премии.

Безмерно благодарен Илье Вячеславовичу за всё, ведь он один из немногих деятелей науки, кто способен вдохновлять на её грызение.

Осипова Анна Сергеевна (бакалавр 2014)

Илья Вячеславович, поздравляю вас с Юбилеем! Хочу сказать вам большое спасибо за ваш преподавательский труд и особенно за роль моего научного руководителя! Вы познакомили меня с азами программирования и вычислительной статистики. Помогли применить эти знания на практике в качестве дипломной работы. Именно эта работа зажгла во мне искру любознательности и определила мою дальнейшую профессию.

Я искренне считаю, что умение пробудить в студенте интерес к знаниям является одним из отличительных качеств хорошего преподавателя. Вы им обладаете на пятёрку!

Желаю вам успехов в вашем нелёгком деле! И много пытливых студентов! Ваша дипломница, Осипова Аня.

Медведева (Голова) Татьяна Михайловна (бакалавр 2014, магистр 2016, кандидат наук 2020)

Илья Вячеславович, с Днём Рождения! Желаю Вам ещё больше достижений, поддержки окружающих, воплощения идей и благополучия в семье!

Старцева София Алексеевна (магистр 2014)

Поздравляю Вас с Юбилеем, желаю побольше радости и неожиданных хороших новостей. Спасибо за введение в мир написания научных статей. И у меня остались очень хорошие воспоминания о Ваших лекциях по программированию. Наверное, это были самые увлекательные лекции за время моего обучения в университете.

Марков Сергей Валерьевич (бакалавр 2015, магистр 2017)

Уважаемый Илья Вячеславович! Поздравляю Вас с Юбилеем! Желаю Вам оставаться таким же энергичным и жизнерадостным! Будьте счастливы! Также хочу выразить благодарность за привитый интерес к науке — Ваш неиссякаемый энтузиазм и увлечённость своим делом послужили для меня хорошим примером.

Сысоева (Глушкова) Марина Вячеславовна (кандидат наук 2015)

Любимый Илья Вячеславович! Ты являешься для меня примером для подражания, образцом настоящего учёного, идеалом, уровня которого я никогда не достигну. Спасибо тебе огромное, что доводишь все мои научные недоделки до ума и публикабельного состояния. Я без тебя бы не справилась! И не достигла бы тех научных высот, которые сейчас у меня есть. Это всё твоя заслуга. Спасибо, что ты у меня, у нас всех есть!

Горбунов Сергей Дмитриевич (бакалавр 2018)

Поздравляю Илью Вячеславовича с Юбилеем, успехов в науке и крепких нервов. Надеюсь, его вклад в разработку методов диагностики заболеваний навсегда впишет его имя в историю медицины.

Грищенко Анастасия Александровна (бакалавр 2018, магистр 2020)

Уважаемый Илья Вячеславович! С радостью спешу поздравить Вас с этим замечательным праздником, с Юбилеем. Хочу пожелать Вам множество радостей, больших научных успехов, чтобы в вашей жизни было больше побед, больших и маленьких, а в вашей семье всегда царили счастье, любовь и уважение. Будьте уверены в своих силах, будьте успешным и счастливым человеком!

Я очень благодарна, что в моей жизни появился такой замечательный наставник, спасибо Вам большое за все, что Вы для нас делаете!

Калугина (Гуляева) Анастасия Олеговна (бакалавр 2020)

Хочу поздравить Сысоева Илью Вячеславовича с 40-летием! Прежде чем что-то пожелать, обмолвлюсь буквально парой слов об этом замечательном человеке. Не хотела бы хвастаться, но мне, в основном, всегда везло с учителями/преподавателями/руководителями, и Илья Вячеславович — одно из главных тому подтверждений. Как же приятно иметь дело с людьми, которые умеют не только грамотно разложить всё в голове (несмотря на все беспорядки, происходящие в ней) по полочкам, но и заставить полюбить своё поприще. И я искренне благодарна судьбе, Богу, случайности (не знаю, что или кто именно руководит парадом жизни) за то, что мне посчастливилось поработать с таким невероятно талантливым и, что тоже немаловажно, не лишённым чувства юмора преподавателем, который верил в мои успехи порой даже больше, чем я сама.

Итак, проходим этап лирического отступления моего поздравления и переходим к главному! Хочу пожелать Илье Вячеславовичу, чтобы он никогда не переставал любить своё дело, ведь именно благодаря любви к своей стихии можно прийти к небывалым успехам, стойко преодолев все трудности жизни. Желаю, чтобы в семье процветали гармония и взаимопонимание, ибо семья — самая надёжная крепость. И, наконец, желаю сохранить ту изюминку, которую все мы так любим в ИВ — остроумие, добродушие и умение находить подход абсолютно к каждому человеку. P.S. Главное — не стареть душой!

Хайрушев Сергей Валентинович (бакалавр 2021)

Поздравляем нашего уважаемого наставника, человека, который с огромной душой и профессионализмом подходит к своему делу. Желаем Вам быть таким же энергичным всегда.

Здоровья Вам, крепких нервов, чтобы вытерпеть все шалости учеников, и чувства юмора, ведь без этого никак. Пусть сбудутся все Ваши замыслы и мечты, а Ваш бесценный труд приносит прекрасные плоды. Будьте счастливы! С Днём Рождения!

Долинина Анастасия Юрьевна (бакалавр 2021)

Илья Вячеславович, от всего сердца поздравляю вас с Днём Рождения! Хочется пожелать вам крепкого здоровья, много сил и большого энтузиазма для достижения задуманных целей, успехов во всех начинаниях, гениальных идей и, конечно же, много-много радостных и счастливых моментов! Пускай все ваши заветные мечты сбудутся!

Лачинова Дарья Андреевна (бакалавр 2021)

Дорогой Илья Вячеславович! Поздравляю с Днём Рождения опытного наставника, лучшего научного руководителя и замечательного человека! Желаю Вам крепкого здоровья, семейного тепла и уюта, успехов в любых начинаниях, личных достижений, творческих идей и счастья! Пусть Ваши научные труды принесут не только пользу окружающим, но и подарят удовлетворение и радость! Пусть каждый день будет наполнен неиссякаемой энергией! Ценю Вашу поддержку, наставничество и мудрость!

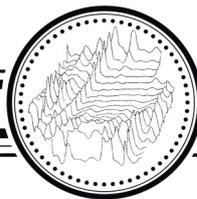
Созонов Евгений Александрович (бакалавр 2022)

Илья Вячеславович, поздравляю вас с Днём рождения! Желаю вам больше заинтересованных студентов, меньше лоботрясов, ещё больше успешных публикаций и, конечно же, крепкого здоровья и не менее крепких нервов!

Такашвили Лев Вячеславович (магистр 2022)

Поздравляю с Юбилеем! Сысоева Илью Вячеславовича, профессора, доктора физико-математических наук, моего научного руководителя.

Дорогой Илья Вячеславович, примите самые искренние поздравления с Юбилеем. На протяжении многих лет вы трудитесь на благо одного из крупнейших университетов страны. Ваш богатейший опыт, созидательная энергия и деятельный характер будут способствовать дальнейшему его процветанию. Высоко ценю общение с Вами, для меня Вы являетесь источником неиссякаемой энергии, примером профессионализма и трудолюбия. Сердечно желаю Вам доброго здоровья, благополучия, новых достижений и творческих успехов.



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 338.12; 519.6; 530.182.2; 621.37

DOI: 10.18500/0869-6632-003037
EDN: INVKIQ

Взаимосвязанные экономические колебания — динамическая модель синхронизации

В. В. Матросов✉, *В. Д. Шалфеев*

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 17.10.2022, принята к публикации 15.12.2022,
опубликована онлайн 14.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Цель работы. Анализ динамических процессов и, в частности, процессов синхронизации в ансамбле связанных хаотических экономических осцилляторов. Методы. Качественно-численные методы теории нелинейных динамических систем и теории бифуркаций. Результаты. Рассмотрена нелинейная модель экономического осциллятора, построенная на основе идей теории систем автоматического управления. Такого типа общие экономические модели не подходят для получения конкретных экономических оценок или рекомендаций, однако такие модели полезны для развития теории экономических циклов — теории генерации, взаимодействия, синхронизации циклов и др. Проведенные численные эксперименты с рассматриваемыми моделями продемонстрировали хорошее качественное сходство генерируемых в модели хаотических колебаний с реальными экономическими циклами. Показано, что в малом ансамбле связанных экономических осцилляторов возможна синхронизация хаотических экономических циклов с некоторой ошибкой, существенно зависящей от силы связей.

Ключевые слова: экономические колебания, динамический хаос, синхронизация.

Благодарности. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSWR-2023-0031). Авторы выражают благодарность М. И. Рабиновичу и В. П. Пономаренко за полезные дискуссии и советы.

Для цитирования: Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Взаимосвязанные экономические колебания — динамическая модель синхронизации // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 254–270. DOI: 10.18500/0869-6632-003037. EDN: INVKIQ

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Coupled economic oscillations – synchronization dynamical model

V. V. Matrosov[✉], V. D. Shalfeev

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Received 17.10.2022, accepted 15.12.2022, available online 14.04.2023, published 31.05.2023

Abstract. Purpose of this work is the research of the dynamical processes and in particular the phenomenon of the synchronization in an ensemble of coupled chaotic economic oscillators. *Methods.* The research methods are the qualitative and numerical methods of the theory of nonlinear dynamical systems and the theory of the bifurcations. *Results.* The nonlinear model of economic oscillator as the system of automatic control are considered. Such kind of general economic models are unsuitable for getting some concrete economic estimations and recommendations. But such kind models are very useful for a development the theory of the economic cycles, theory of the generation, interactions, synchronization of the cycles and so on. Our numerical experiments demonstrated a good enough qualitative similarity of an chaotic economic oscillations in our model and real economic cycles. The phenomenon of the synchronization of the chaotic oscillations in the ensemble of coupled economic oscillators are considered, however the accuracy of the synchronization depends with couplings essentially.

Keywords: economic oscillation, dynamical chaos, synchronization.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSWR-2023-0031). Authors are grateful to M. I. Rabinovich and V. P. Ponomarenko for useful discussions and tips.

For citation: Matrosov VV, Shalfeev VD. Coupled economic oscillations – synchronization dynamical model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(3):254–270. DOI: 10.18500/0869-6632-003037

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Экономические колебания (деловые циклы) являются предметом пристального внимания экономистов уже не одно десятилетие. Несмотря на множество выдвинутых теорий (теория периодических циклов, экзогенные теории влияния природных катастроф, социальных, технологических потрясений, эндогенные теории недопотребления, равновесного цикла, перенакопления и др.) [1–4], следует признать, что единой общепринятой теории экономических колебаний сегодня нет, как нет и единого взгляда на причины, порождающие циклы [5]. Еще более неясным и запутанным представляется вопрос о синхронизации экономических колебаний. Ряд авторов изучают синхронизацию циклов на основе анализа time-series [6]. Однако в большинстве экономических работ под синхронизацией понимается не совпадение частот колебаний, а некоторая близость колебаний (concordance analysis), основанная на близости «фаз» (стадий) циклов [7]. Есть авторы — сторонники применения теории динамического хаоса в экономике и финансах, в частности для анализа синхронизации [8, 9].

В [10, 11] рассматривается динамическая модель хаотического экономического осциллятора, функционирующего как система автоматического управления, и процессы генерации и синхронизации экономических циклов на основе этой модели. Настоящая работа представляет собой развитие этих исследований, в частности, продолжает изучение процессов синхронизации в ансамбле связанных экономических осцилляторов.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 обсуждается динамическая модель экономического осциллятора. В разделе 2 приведены результаты исследования процессов синхронизации в ансамбле связанных осцилляторов.

1. Модель экономических колебаний

В [10, 11] рассматривается идея построения нелинейной модели гипотетического экономического осциллятора, функционирующего как типовая система автоматического управления. Такой подход к описанию динамического поведения различных технических, биологических, социальных и др. объектов не является новым и в литературе можно найти много примеров использования такого подхода, в частности, пример построения динамической модели покупателя в задаче формирования общественного мнения [12].

Как можно построить модель экономического осциллятора с использованием идей теории автоматического управления? Экономические колебания (бизнес-циклы) определяются несколькими показателями, среди которых наиболее важным является валовый внутренний продукт (ВВП), характеризующийся общей суммой произведенных в стране товаров и услуг. Выберем один определенный вид товара из состава ВВП и построим для него цепь автоматического управления, где в качестве входного сигнала примем трендовое значение стоимости этого товара (постоянное или изменяющееся во времени), а в качестве объекта управления примем некий оценщик величины стоимости товара. Цепь управления будет регулировать выходной сигнал оценщика в соответствии с входным сигналом. Функции различных элементов цепи управления построенной гипотетической системы, очевидно, должны реализовываться управляющими действиями правительства страны, инвестбанков, руководства предприятий и т. д. Поскольку выбранный товар производится, как правило, не одним производителем, а несколькими, возможно, потребуется организация многоконтурной системы управления. Наличие множества агентов, участвующих в управлении, может иметь результатом несогласованность управляющих воздействий, а неизбежное присутствие инерционностей и задержек в цепях управления может привести к неустойчивостям, порождающим возникновение предельных циклов и хаотических аттракторов, в результате чего на выходе системы будут формироваться периодические и хаотические колебания. Для оценки величины стоимости других товаров и услуг, входящих в состав ВВП, аналогичным образом должны быть построены другие системы управления. Суммирование выходных сигналов всех построенных систем управления позволит получить оценку величины ВВП и его динамику, то есть получить в итоге модель бизнес-цикла. Очевидно, что полученная в результате таких построений модель, включающая большое число многоконтурных систем управления, будет столь громоздкой, что не позволит провести исследование динамики и получить какие-либо конкретные данные о бизнес-цикле, поскольку большинство параметров построенной модели будут неизвестны. С учетом этого обстоятельства более целесообразным, по-видимому, будет реализовать самый простой вариант системы автоматического управления для оценки только одного показателя — композитного индекса бизнес-цикла.

Модель экономического осциллятора, функционирующего как система автоматического управления величиной композитного индекса бизнес-цикла [10, 11], представлена на рис. 1.

Здесь объектом управления является оценщик (estimator) E , на выходе которого формируется текущая оценка величины композитного индекса бизнес-цикла $I_E(t)$. На вход системы поступает

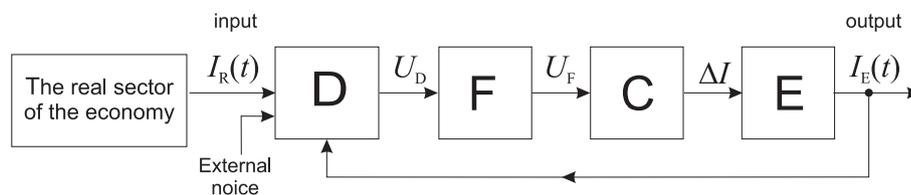


Рис. 1. Модель экономического осциллятора: E — объект управления, оценщик, C — управитель, F — фильтр, D — дискриминатор

Fig. 1. The model of economic oscillator: E — estimator, C — control element, F — filter, D — discriminator

$I_R(t)$ — величина реального индекса бизнес-цикла, определяемая реальным сектором экономики (для простоты положим ее постоянной). Дискриминатор D сравнивает $I_E(t)$ и $I_R(t)$. Сигнал с выхода D проходит через фильтр F , убирающий высокочастотные шумы. Сигнал с выхода фильтра U_F поступает на управитель C , корректирующий оценку $I_E(t)$ на величину ΔI в сторону сближения с $I_R(t)$.

Уравнение, описывающее динамику модели экономического осциллятора (см. рис. 1), получено в [10, 11] в операторной форме:

$$x + K(p)\Phi(x) = \gamma, \quad p \equiv d/dt. \quad (1)$$

Здесь $x = (I_E - I_R)/\Delta I_{\max}$ — безразмерное текущее отклонение величины I_E композитного индекса бизнес-цикла от величины I_R реального композитного индекса бизнес-цикла. $\Delta I_{\max} = SE$ (S — крутизна характеристики управителя, E — максимальная величина сигнала с выхода D), $\gamma = (I_E^0 - I_R)/\Delta I_{\max}$ — безразмерное отклонение величины композитного индекса бизнес-цикла I_E^0 в начальный момент времени от величины I_R реального композитного индекса бизнес-цикла, $K(p)$ — передаточная функция фильтра, $\Phi(x)$ — нелинейность дискриминатора D , нормированная к единице.

Принимая $K(p) = (1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3)^{-1}$ и вводя безразмерное время $\tau = t/a_1$ и параметры $\varepsilon = a_2/a_1^2$, $\mu = a_3/a_1^3$, запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y, & \frac{dy}{d\tau} &= z, \\ \mu \frac{dz}{d\tau} &= \gamma - x - y - \varepsilon z - \Phi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Динамика (2) изучалась в ряде работ, в частности, в [13] для $\Phi(x) = 2\beta x/(1 + \beta^2 x^2)$ при $\beta > 0$, в [14] для инвертированной нелинейности $\Phi(x)$ при $\beta < 0$, а также в [15] и др. Приведем краткие сведения о динамике (2).

При $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ система (2) сводится к уравнению первого порядка, а при $\mu = 0$, $\varepsilon \neq 0$ — к уравнению второго порядка. Динамика (2) в этих случаях определяется состояниями равновесия (рис. 2, а). Для неинвертированной нелинейности $\Phi(x)$ существует одно устойчивое

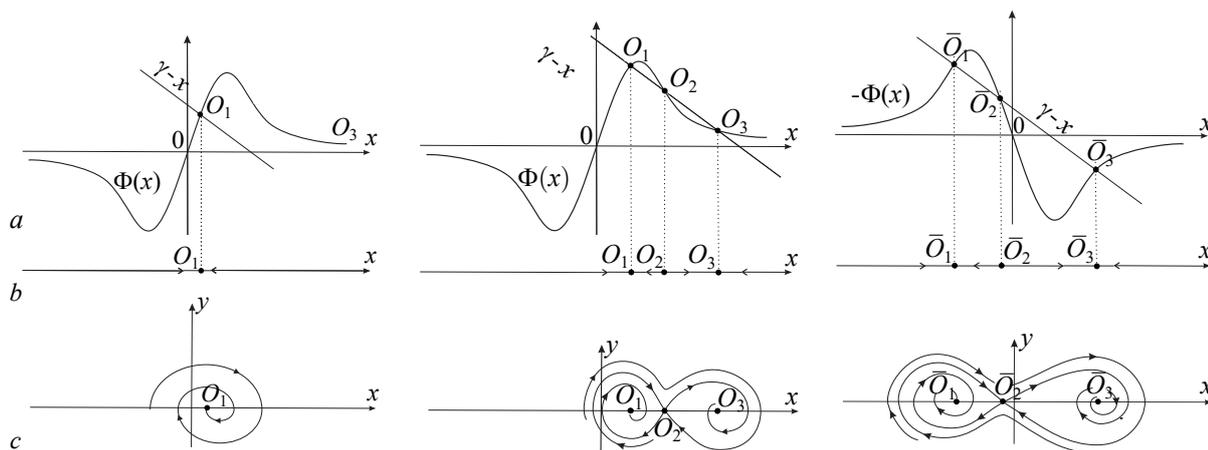


Рис. 2. Состояния равновесия системы (2) (а), фазовые портреты системы (2) при $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ (b), фазовые портреты системы (2) при $\mu = 0$, $\varepsilon \neq 0$ (c)

Fig. 2. Equilibrium states of the system (2) (a), phase portraits of the system (2) when $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ (b), phase portraits of the system (2) when $\mu = 0$, $\varepsilon \neq 0$ (c)

состояние равновесия O_1 (O_3), либо три — O_1 , O_3 — устойчивые и O_2 — неустойчивое, а для инвертированной нелинейности $\Phi(x)$ одно устойчивое состояние равновесия \bar{O}_1 (\bar{O}_3), либо три — \bar{O}_1 (\bar{O}_3) — устойчивые и \bar{O}_2 — неустойчивое. На рис. 2, *b* даны характерные фазовые портреты системы (2) для $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$, а на рис. 2, *c* — фазовые портреты для $\mu = 0$, $\varepsilon \neq 0$, полученные стандартными методами теории колебаний [16].

Динамика системы (2) в трехмерном фазовом пространстве (x, y, z) достаточно сложна и характеризуется не только наличием состояний равновесия, но и наличием предельных циклов и хаотических аттракторов, как около одного состояния равновесия O_1 или O_3 (\bar{O}_1 или \bar{O}_3), так и около трех состояний равновесия O_1, O_2, O_3 ($\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$).

Не приводя здесь полного описания динамики (2), представим наиболее важные с точки зрения экономических интерпретаций бифуркации, иллюстрирующие разные пути возбуждения хаотических колебаний в системе (2).

Для случая неинвертированной характеристики $\Phi(x)$ на рис. 3 представлен параметрический портрет (μ, γ) системы (2) для $\varepsilon = 1$, $\beta = 10$.

Здесь штрихпунктирная линия $\gamma = \gamma^*$ соответствует бифуркации слияния состояний равновесия O_2 и O_3 , а штрихпунктирная линия $\gamma = \gamma^{**}$ соответствует бифуркации слияния состояний равновесия O_2 и O_1 . Линии $\gamma = \gamma^*$ и $\gamma = \gamma^{**}$ ограничивают область C_1 существования состояния равновесия O_1 , область C_2 существования состояний равновесия O_1, O_2, O_3 и область C_3 существования состояния равновесия O_3 .

Линия 1 соответствует бифуркации Андронова–Хопфа для состояния равновесия O_1 . Первая ляпуновская величина на линии 1 отрицательна, следовательно, эта бифуркация суперкритическая и линия 1 соответствует мягкому рождению устойчивого предельного цикла L_1 вокруг O_1 (рис. 4, *a*) при пересечении линии 1 слева направо.

Пунктирные линии 2 и 3 соответствуют первой бифуркации удвоения периода цикла L_1 , после которой цикл L_1 претерпевает серию бифуркаций удвоения периода, в результате чего

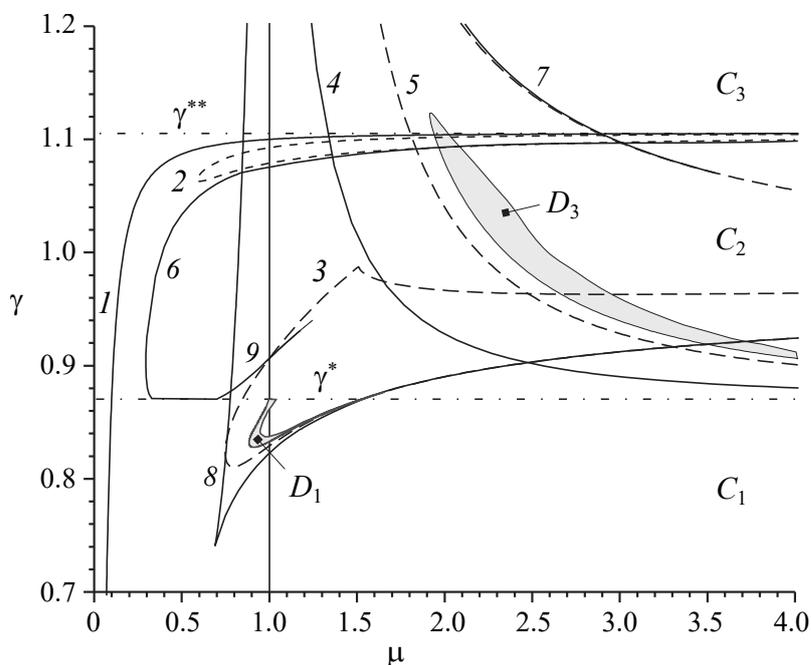


Рис. 3. Параметрический портрет системы (2) при $\varepsilon = 1$, $\beta = 10$

Fig. 3. Parametric portrait of the (2) when $\varepsilon = 1$, $\beta = 10$

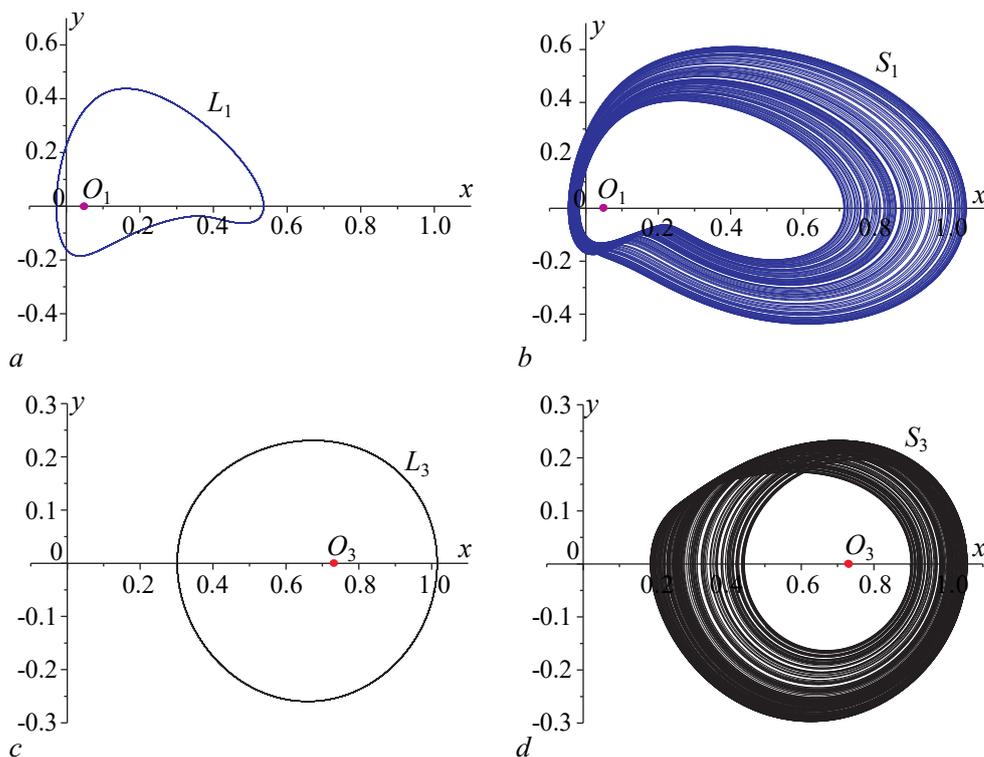


Рис. 4. Проекция аттракторов системы (2) при $\varepsilon = 1$, $\beta = 10$, $\gamma = 0.835$, $\mu = 0.4$ (a), $\gamma = 0.835$, $\mu = 0.9$ (b), $\gamma = 1$, $\mu = 2.1$ (c), $\gamma = 1$, $\mu = 0.239$ (d) (цвет онлайн)

Fig. 4. Projections of attractors of (2) when $\varepsilon = 1$, $\beta = 10$, $\gamma = 0.835$, $\mu = 0.4$ (a), $\gamma = 0.835$, $\mu = 0.9$ (b), $\gamma = 1$, $\mu = 2.1$ (c), $\gamma = 1$, $\mu = 0.239$ (d) (color online)

появляется хаотический аттрактор S_1 в соответствии со сценарием Фейгенбаума (рис. 4, b). Область существования аттрактора S_1 , ограниченная линией 2, очень мала и поэтому на рис. 3 не показана, а область существования аттрактора S_1 , ограниченная линией 3, обозначена D_1 на рис. 3.

Линия 4 соответствует потере устойчивости состояния равновесия O_3 в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Первая Ляпуновская величина на линии 4 отрицательна, то есть это суперкритическая бифуркация и на линии 4 вокруг O_3 мягко рождается устойчивый предельный цикл L_3 (рис. 4, c).

Пунктирная линия 5 соответствует первой бифуркации удвоения периода цикла L_3 , затем через серию бифуркаций удвоения периода рождается хаотический аттрактор S_3 в соответствии со сценарием Фейгенбаума (рис. 4, d). Область существования аттрактора S_3 обозначена D_3 на рис. 3.

Кроме описанных выше бифуркаций система (2) демонстрирует другие бифуркации, в частности, бифуркацию влипания цикла L_1 в петлю сепаратрис седла O_2 с последующим исчезновением L_1 (линия 6), седло-узловую бифуркацию исчезновения цикла L_3 (линия 7), седло-узловую бифуркацию рождения цикла L_2 , охватывающего все три состояния равновесия O_1, O_2, O_3 (линия 8), бифуркацию петли сепаратрис седло-фокуса O_2 с отрицательной седловой величиной и положительной седловой величиной (линия 9), в последнем случае имеет место сложная структура параметрического портрета, связанная с бесконечным числом бифуркационных линий, отвечающих кратным циклам и многообходным петлям сепаратрис [17]. Анализ этих бифуркаций здесь не приводится, поскольку выходит за рамки основной цели работы.

Обратимся теперь к динамике системы (2) в случае инвертированной нелинейности $\Phi(x)$. На рис. 5 для этого случая представлены наиболее важные бифуркационные кривые, отражающие возникновение и хаотизацию автоколебательных режимов в модели (2), а на рис. 6 приведены примеры проекций соответствующих этим режимам аттракторов.

Штрихпунктирная прямая $\gamma = \gamma^*$ делит плоскость параметров (μ, γ) на области C_1 и C_2 существования трех ($\bar{O}_1, \bar{O}_2, \bar{O}_3$) и одного (\bar{O}_3) состояний равновесия.

Линии 1 и 2 (см. рис. 5) отвечают за рождение устойчивого предельного цикла L_1 вокруг состояния равновесия \bar{O}_1 (рис. 6, а). Линия 1 соответствует бифуркации Андронова–Хопфа состояния равновесия \bar{O}_1 . Точка M , где первая ляпуновская величина обращается в ноль, разделяет бифуркационную кривую на участки мягкого и жесткого возбуждения автоколебаний. Часть линии 1, расположенная выше точки M , отвечает суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, при пересечении этого участка кривой слева направо смена устойчивости состояния равновесия \bar{O}_1 сопровождается рождением устойчивого предельного цикла L_1 практически нулевой амплитуды. Часть линии 1, расположенная ниже точки M , отвечает жесткому рождению автоколебаний. Жесткий автоколебательный режим возникает в результате бифуркации двукратного предельного цикла на линии 2. Линия 2 располагается ниже точки M и проходит левее линии 1. При пересечении линии 2 слева направо в фазовом пространстве модели (2) появляется устойчивый предельный цикл L_1 конечной амплитуды.

Цикл L_1 может испытывать бифуркации удвоения периода, в результате чего на его основе может сформироваться хаотический аттрактор S_1 (рис. 6, б). Пунктирная линия 3 отвечает за первую бифуркацию удвоения периода цикла L_1 , эта бифуркация мягкая, и соответствует появлению устойчивого предельного цикла $L_1^{(2)}$ удвоенного периода. Заметим, что процесс удвоений периода цикла L_1 не всегда завершается формированием хаотического аттрактора, сценарий Фейгенбаума может прерваться исчезновением предельных циклов больших периодов либо через касательную бифуркацию, либо в результате бифуркаций многообходных петель сепаратрис седла \bar{O}_2 . В частности, на рис. 5 сплошная линия 5 отвечает касательной бифуркации цикла $L_1^{(2)}$

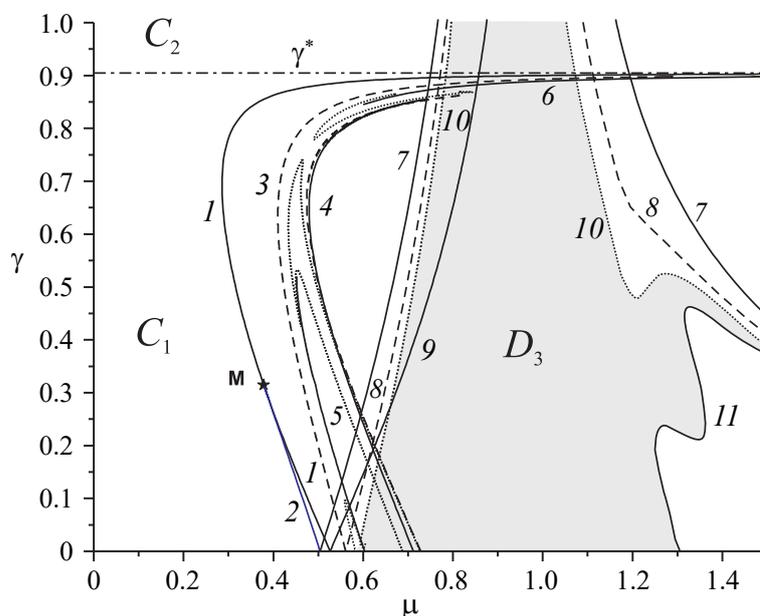


Рис. 5. Параметрический портрет модели (2) в плоскости $\{\mu, \gamma\}$ при $\varepsilon = 1, \beta = -10$

Fig. 5. Parameter portrait of the (2) when $\varepsilon = 1, \beta = -10$

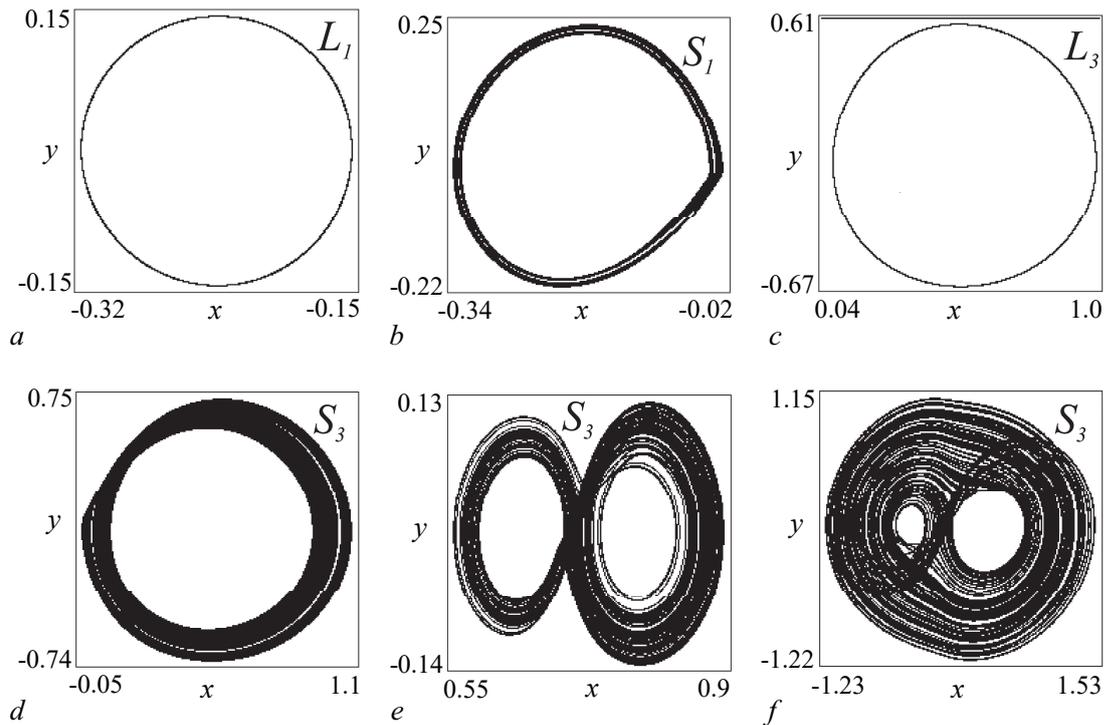


Рис. 6. Проекция аттракторов системы (2) при $\varepsilon = 1$, $\beta = -10$, $\gamma = 0.5$, $\mu = 0.321$ (a), $\gamma = 0.6$, $\mu = 0.463$ (b), $\gamma = 0.05$, $\mu = 0.529$ (c), $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.623$ (d), $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.66$ (e), $\gamma = 0.1$, $\mu = 1.27$ (f)

Fig. 6. Projections of attractors of the system (2) when $\varepsilon = 1$, $\beta = -10$, $\gamma = 0.5$, $\mu = 0.321$ (a), $\gamma = 0.6$, $\mu = 0.463$ (b), $\gamma = 0.05$, $\mu = 0.529$ (c), $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.623$ (d), $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.66$ (e), $\gamma = 0.1$, $\mu = 1.27$ (f)

удвоенного периода, а сплошная линия 6 — бифуркации двухобходной петли сепаратрис седло-фокуса \bar{O}_2 . Линия 4 ограничивает область существования цикла L_1 справа, на этой кривой цикл L_1 исчезает через касательную бифуркацию. Области существования хаотического аттрактора S_1 на рис. 5 не выделены, поскольку имеют незначительные размеры, однако на параметрический портрет нанесены точечные линии, отражающие переход от регулярных колебаний к хаотическим.

Линия 7 отвечает за рождение устойчивого предельного цикла L_3 (рис. 6, c) через бифуркацию двукратного предельного цикла. При малых γ в момент рождения цикл L_3 охватывает состояние равновесия \bar{O}_3 , с ростом γ , а также при удалении от линии 7 амплитуда цикла L_3 растет, и он начинает охватывать все три состояния равновесия.

Пунктирная линия 8 соответствует началу удвоений периода цикла L_3 , при удалении от этой линии цикл L_3 испытывает каскад бифуркаций удвоения периода, в результате на базе L_3 формируется хаотический аттрактор S_3 (рис. 6, d). Линии 9 и 11 ограничивают область D_3 существования хаотических колебаний. Точечная линия 10 отражает четвертую бифуркацию удвоения периода цикла L_3 , а поскольку бифуркационные значения пятой и последующих бифуркаций удвоения периода L_3 укладываются в интервал $\Delta\mu = 10^{-4}$, то значение четвертой бифуркации удвоения периода практически можно использовать в качестве границы области существования хаотических колебаний. На сплошной линии 11 происходит кризис хаотического аттрактора, при выходе из области D_3 через эту линию аттрактор S_3 разрушается, фазовые траектории из его окрестности устремляются в бесконечность. Отметим, что хаотические колебания S_3 могут принимать различный вид, это свидетельствует о широких возможностях рассматриваемой модели по генерации хаотических колебаний с различными характеристиками. Примеры возможных проекций аттрактора S_3 приведены на рис. 6, d-f.

Таким образом, приведенные выше данные показывают, что модель (2) демонстрирует широкие возможности генерации хаотических режимов. Сравнение осциллограмм таких хаотических колебаний [10, 11] с осциллограммами реальных колебаний композитных индексов бизнес-циклов, приведенными в литературе [18], дает возможность сделать вывод о достаточно хорошем качественном сходстве таких колебаний.

2. Анализ процессов синхронизации связанных экономических колебаний

Рассмотрим динамику малого ансамбля из пяти экономических осцилляторов (2), связанных по схеме рис. 7.

Связи по схеме рис. 7 позволяют исследовать процессы синхронизации в ансамбле в зависимости от силы связей с осциллятором O_0 . Будем считать связи осцилляторов O_1, O_2, O_3, O_4 примерно одинаковыми, а связи от осциллятора O_0 будем варьировать от слабых до сильных. Такая ситуация может моделировать процессы экономического взаимодействия группы стран, имеющих примерно одинаковые экономики, с одной страной, имеющей существенно более сильную экономику.

Система уравнений, описывающих динамику ансамбля, представленного на рис. 7, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - x_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \Phi_1(x_1) - \kappa_{21}\Phi_2(x_2) - \kappa_{31}\Phi_3(x_3) - \kappa_{01}\Phi_0(x_0), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - x_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \Phi_2(x_2) - \kappa_{12}\Phi_1(x_1) - \kappa_{42}\Phi_4(x_4) - \kappa_{02}\Phi_0(x_0), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= y_3, & \frac{dy_3}{d\tau} &= z_3, \\ \mu_3 \frac{dz_3}{d\tau} &= \gamma_3 - x_3 - y_3 - \varepsilon_3 z_3 - \Phi_3(x_3) - \kappa_{13}\Phi_1(x_1) - \kappa_{43}\Phi_4(x_4) - \kappa_{03}\Phi_0(x_0), \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= y_4, & \frac{dy_4}{d\tau} &= z_4, \\ \mu_4 \frac{dz_4}{d\tau} &= \gamma_4 - x_4 - y_4 - \varepsilon_4 z_4 - \Phi_4(x_4) - \kappa_{24}\Phi_2(x_2) - \kappa_{34}\Phi_3(x_3) - \kappa_{04}\Phi_0(x_0), \\ \frac{dx_0}{d\tau} &= y_0, & \frac{dy_0}{d\tau} &= z_0, \\ \mu_0 \frac{dz_0}{d\tau} &= \gamma_0 - x_0 - y_0 - \varepsilon_0 z_0 - \Phi_0(x_0) - \kappa_{10}\Phi_1(x_1) - \kappa_{20}\Phi_2(x_2) - \kappa_{30}\Phi_3(x_3) - \kappa_{40}\Phi_4(x_4). \end{aligned} \quad (3)$$

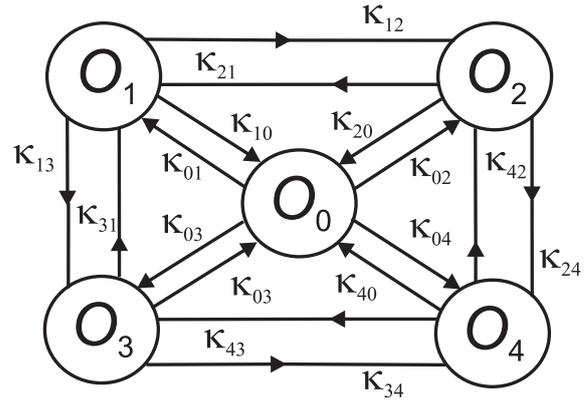


Рис. 7. Ансамбль экономических осцилляторов
Fig. 7. The ensemble of oscillators

На рис. 8–10 представлены результаты численных экспериментов с системой (3). Проекции хаотических аттракторов для случая отсутствия связей с осциллятором O_0 даны на рис. 8. В этом случае осцилляторы $O_1 - O_4$ синхронизованы, а синхронизация с осциллятором O_0 отсутствует. На рис. 9 представлен случай слабых связей с осциллятором O_0 . В этом случае синхронизация осцилляторов $O_1 - O_4$ осталась примерно на прежнем уровне, при этом появилась слабая

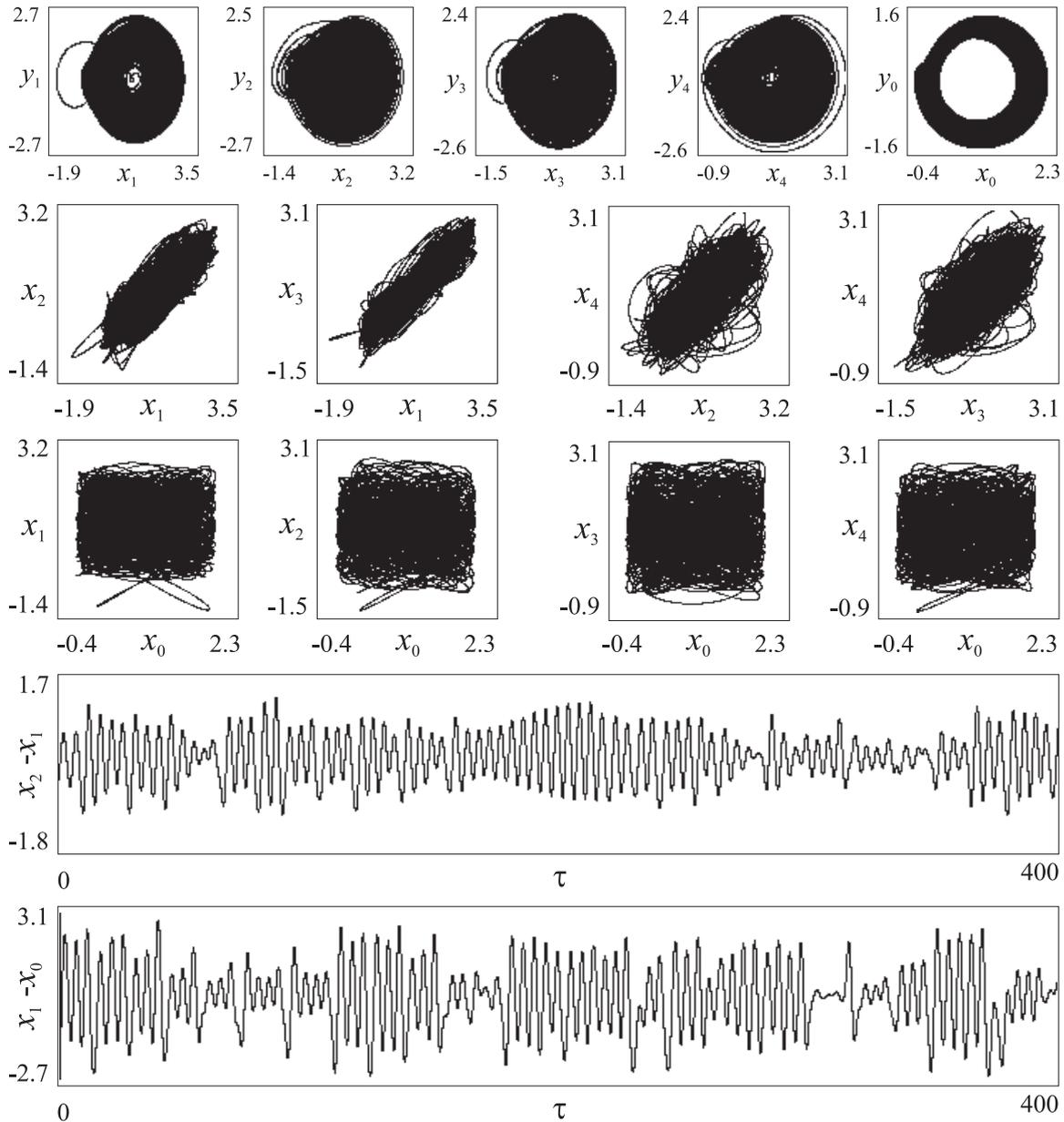


Рис. 8. Проекция аттракторов системы (3) при отсутствии связей от осциллятора O_0 в случае $\gamma_0 = 0.64$, $\varepsilon_0 = 0.64$, $\mu_0 = 0.53$, $\beta_0 = -10$, $\gamma_1 = 0.64$, $\varepsilon_1 = 0.64$, $\mu_1 = 0.53$, $\beta_1 = -10$, $\gamma_2 = 0.65$, $\varepsilon_2 = 0.61$, $\mu_2 = 0.51$, $\beta_2 = -10$, $\gamma_3 = 0.64$, $\varepsilon_3 = 0.61$, $\mu_3 = 0.51$, $\beta_3 = -10$, $\gamma_4 = 0.63$, $\varepsilon_4 = 0.65$, $\mu_4 = 0.52$, $\beta_4 = -10$, $\kappa_{21} = 0.8$, $\kappa_{31} = 0.98$, $\kappa_{12} = 1$, $\kappa_{42} = 0.1$, $\kappa_{13} = 1$, $\kappa_{43} = 0.06$, $\kappa_{24} = 0.4$, $\kappa_{34} = 0.84$, $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0$

Fig. 8. Projections of attractors of the system (3) when couplings from oscillator O_0 are absent and $\gamma_0 = 0.64$, $\varepsilon_0 = 0.64$, $\mu_0 = 0.53$, $\beta_0 = -10$, $\gamma_1 = 0.64$, $\varepsilon_1 = 0.64$, $\mu_1 = 0.53$, $\beta_1 = -10$, $\gamma_2 = 0.65$, $\varepsilon_2 = 0.61$, $\mu_2 = 0.51$, $\beta_2 = -10$, $\gamma_3 = 0.64$, $\varepsilon_3 = 0.61$, $\mu_3 = 0.51$, $\beta_3 = -10$, $\gamma_4 = 0.63$, $\varepsilon_4 = 0.65$, $\mu_4 = 0.52$, $\beta_4 = -10$, $\kappa_{21} = 0.8$, $\kappa_{31} = 0.98$, $\kappa_{12} = 1$, $\kappa_{42} = 0.1$, $\kappa_{13} = 1$, $\kappa_{43} = 0.06$, $\kappa_{24} = 0.4$, $\kappa_{34} = 0.84$, $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0$

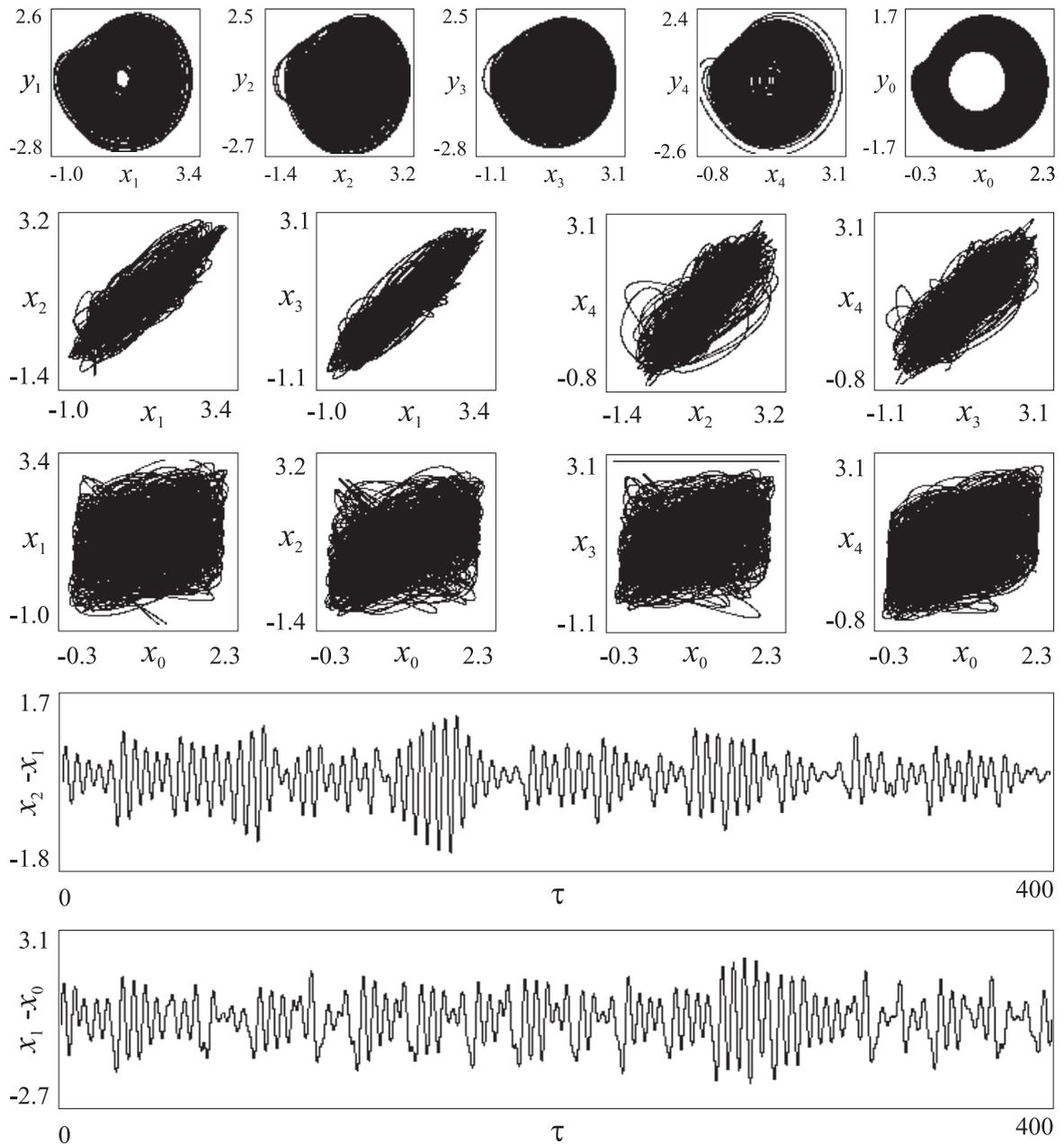


Рис. 9. Проекция аттракторов системы (3) при слабых связях от осциллятора O_0 в случае $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0.3$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.05$

Fig. 9. Projections of attractors of the (3) when couplings from oscillator O_0 are weak and $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 0.3$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.05$

синхронизация с осциллятором O_0 . На рис. 10 представлен случай сильных связей с осциллятором O_0 , в этом случае существенно улучшилась синхронизация O_1-O_4 и появилась вполне заметная синхронизация O_0 с другими осцилляторами.

Как следует из рис. 8–10, точность полученной синхронизации хаотических колебаний оказалась невысокой. Её можно увеличить, усиливая связи, однако даже тройное увеличение силы связей с элементом O_0 (рис. 10) не привело к значительному увеличению точности синхронизации.

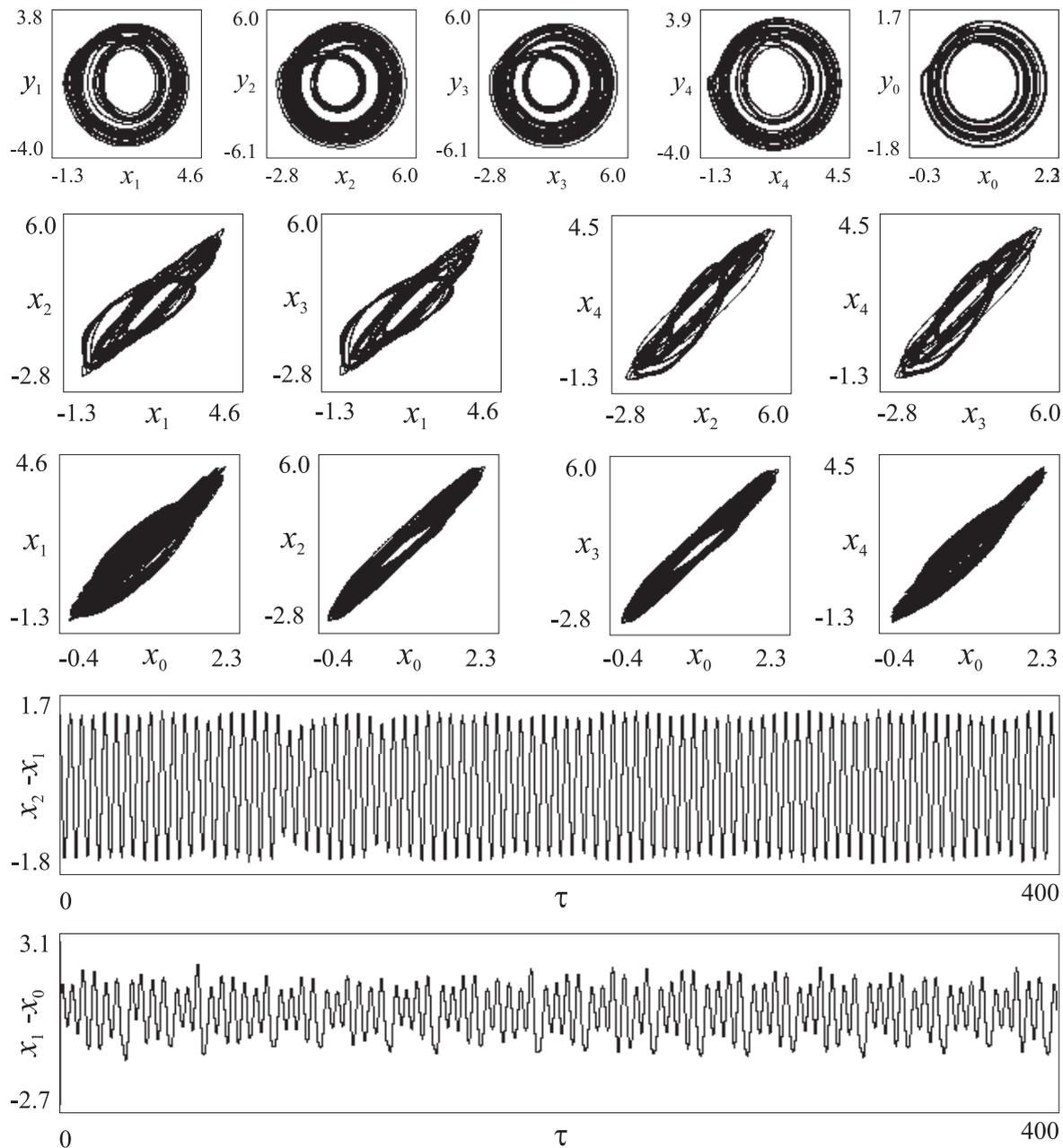


Рис. 10. Проекция аттракторов системы (3) при сильных связях от осциллятора O_0 в случае $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 3$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$

Fig. 10. Projections of attractors of the (3) when couplings from oscillator O_0 are strong and $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = 3$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$

Далее рассмотрим влияние параметров связей на величину ошибок синхронизации. В качестве количественной оценки точности синхронизации i -го и j -го осцилляторов будем использовать величину $\Delta_{i,j}$, рассчитанную по формуле

$$\Delta_{i,j} = \max_{\tau \in [0, T]} |x_i(\tau) - x_j(\tau)| / \sqrt{(x_i^{\min} - x_j^{\min})^2 + (x_i^{\max} - x_j^{\max})^2}. \quad (4)$$

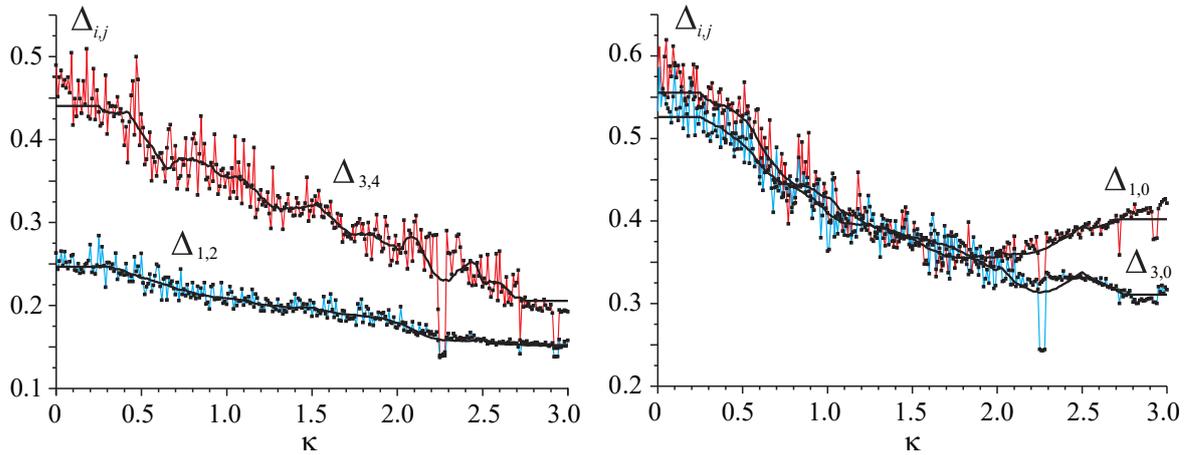


Рис. 11. Эволюция ошибок синхронизации при увеличении связей от осциллятора O_0 в случае $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = \kappa$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$ (цвет онлайн)

Fig. 11. The evolution of synchronization errors when couplings from oscillator O_0 are $\kappa_{01} = \kappa_{02} = \kappa_{03} = \kappa_{04} = \kappa$, $\kappa_{10} = \kappa_{20} = \kappa_{30} = \kappa_{40} = 0.1$ (color online)

Эта величина характеризует максимальное отклонение фазовых переменных $x_i(\tau)$ и $x_j(\tau)$ от прямой $x_i = x_j$ за время наблюдения T , отнесенное к размеру проекции аттрактора на плоскость соответствующих координат [19]. Количественные оценки точности синхронизации осцилляторов ансамбля, рассчитанные по формуле (4) на интервале $T = 15000$, представлены на рис. 11. Из приведенных результатов следует, что зависимость $\Delta_{i,j}$ от κ представляет собой нерегулярный процесс в целом со спадающим трендом. Сплошные толстые линии на рис. 11 являются результатом сглаживания значений $\Delta_{i,j}$ с использованием алгоритма Савицкого–Голея, которые более наглядно отражают тенденции в эволюции ошибок синхронизации при увеличении связи. Из анализа представленных результатов следует, что ошибки синхронизации с ростом κ спадают не монотонно; $\Delta_{1,2}$ и $\Delta_{3,4}$ убывают; $\Delta_{1,0}$ и $\Delta_{3,0}$ имеют минимумы*. Заметим, что усиление связей влечет увеличение размеров аттрактора, а также может привести к регуляризации хаотических колебаний осцилляторов. В последнем случае наблюдается резкое уменьшение значений $\Delta_{i,j}$. На рис. 11 резкие «провалы» $\Delta_{i,j}$, в частности, в районе $\kappa = 2.26$ обусловлены регуляризацией хаотических колебаний.

Другой путь улучшения синхронизации — изменение типа связей, а именно организация связей осцилляторов не по переменной x , а по скорости ее изменения y . В этом случае для двух связанных осцилляторов (2) математическая модель будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\
 \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - x_1 - y_1 - \varepsilon_1 z_1 - \Phi_1(x_1) - \kappa_2 \Phi_2(y_1 - y_2), \\
 \frac{dx_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\
 \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - x_2 - y_2 - \varepsilon_2 z_2 - \Phi_1(x_2) - \kappa_1 \Phi_2(y_2 - y_1).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Результаты численного эксперимента с моделью (5) представлены на рис. 12. На основании этих результатов можно сделать вывод, что связь осцилляторов (2) по координате y позволяет

*Значения $\Delta_{1,3}$ и $\Delta_{2,4}$ близки к значениям $\Delta_{1,2}$ и $\Delta_{3,4}$, а значения $\Delta_{2,0}$ и $\Delta_{4,0}$ — к значениям $\Delta_{1,0}$ и $\Delta_{3,0}$, соответственно.

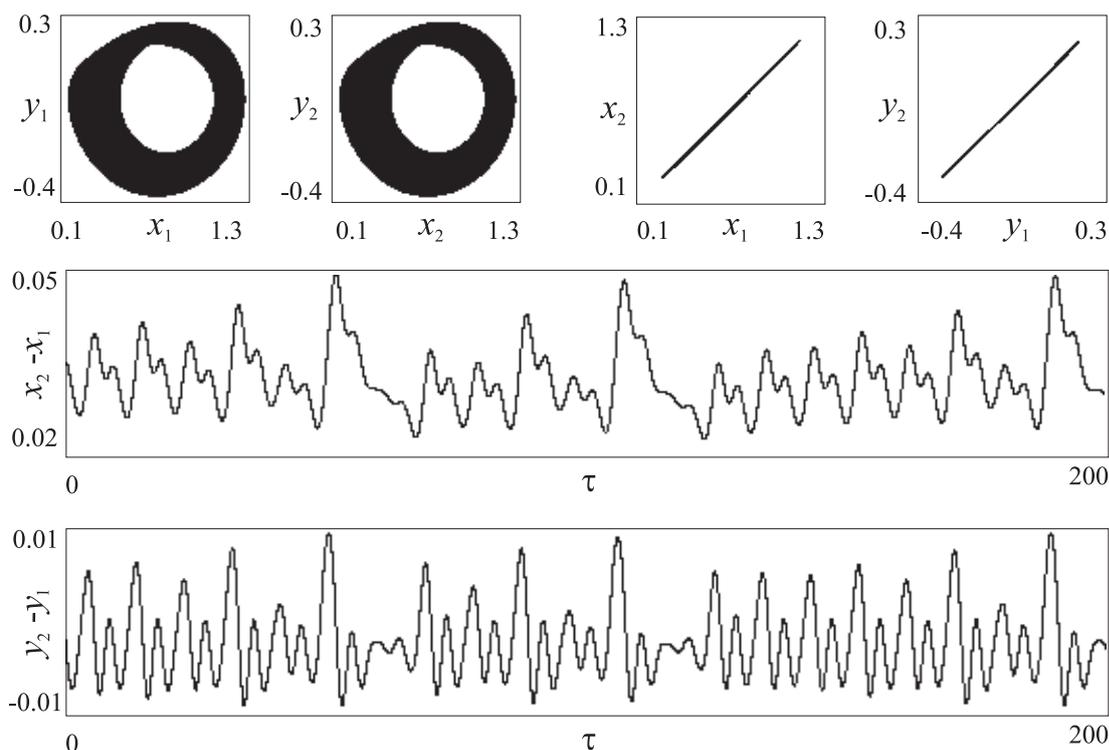


Рис. 12. Проекция аттракторов системы (5) при $\gamma_1 = 1.06$, $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 2.1$, $\gamma_2 = 1.05$, $\varepsilon_2 = 0.96$, $\mu_2 = 2.06$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 10$, $\kappa_1 = 0.07$, $\kappa_2 = 0.2$

Fig. 12. Projections of attractors of the (5) when $\gamma_1 = 1.06$, $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_1 = 2.1$, $\gamma_2 = 1.05$, $\varepsilon_2 = 0.96$, $\mu_2 = 2.06$, $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 10$, $\kappa_1 = 0.07$, $\kappa_2 = 0.2$

достичь хорошей точности синхронизации моделируемых экономических колебаний в ансамбле. Тем не менее такого типа связь для реальных экономических осцилляторов представляется малореалистичной, поскольку измерение скоростей y изменения экономических переменных x для управления осцилляторами скорее всего маловероятно или практически невозможно.

Заключение

Рассмотрена задача о синхронизации ансамбля связанных хаотических экономических осцилляторов. Модель экономического осциллятора является эндогенной динамической моделью, построенной на основе идей теории систем автоматического управления. Конечно, такого сорта общие динамические модели нельзя использовать для получения каких-либо конкретных экономических оценок или конкретных рекомендаций для принятия экономических решений. Однако такие модели полезны для развития динамических теорий экономических циклов, теорий их генерации, взаимодействия, синхронизации и т. п. Численные эксперименты с рассматриваемой в работе моделью продемонстрировали качественное сходство генерируемых моделью хаотических колебаний с реальными экономическими колебаниями, представленными в литературе. Установлено, что малый ансамбль связанных экономических осцилляторов демонстрирует появление синхронизации хаотических колебаний при достижении определенных величин коэффициентов связей. Для полученной в численных экспериментах синхронизации хаотических колебаний характерно наличие заметной ошибки синхронизации, величина которой существенно зависит от силы связей между осцилляторами.

Список литературы

1. Самуэльсон П. Э., Нордхаус В. Д. Экономика. 16-е изд. М.: Издательский дом «Вильямс», 2000. 672 с.
2. Вечканов Г. С., Вечканова Г. Р. Макроэкономика. СПб.: Питер, 2002. 412 с.
3. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 17 (224). С. 50–61.
4. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты (окончание) // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 18 (225). С. 42–56.
5. Лебедева А. С. Генезис теории экономического цикла // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 8–3 (15). С. 31–34.
6. Lopes A. M., Machado J. A. T., Huffstot J. S., Mata M. E. Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization // PLoS ONE. 2018. Vol. 13, no. 2. P. e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
7. Otan W. The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area // International Journal of Central Banking. 2019. Vol. 15, no. 1. P. 327–362.
8. Guegan D. Chaos in economics and finance // Annual Reviews in Control. 2009. Vol. 33, no. 1. P. 89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
9. Volos C., Kyprianidis I., Stouboulos I. N. Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles // WSEAS Transactions on Systems. 2012. Vol. 11, no. 12. P. 681.
10. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД, 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
11. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование процессов синхронизации бизнес-циклов в ансамбле связанных экономических осцилляторов // Известия вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64, № 10. С. 833–843. DOI: 10.52452/00213462_2021_64_10_833.
12. McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F. A dynamical model of decision-making behavior in a network of consumers with applications to energy choices // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
13. Пономаренко В. П. Моделирование эволюции динамических режимов в автогенераторной системе с частотным управлением // Известия вузов. ПНД, 1997. Т. 7, № 5. С. 44–55.
14. Пономаренко В. П., Заулин И. А. Динамика автогенератора, управляемого петлей автоподстройки с инвертированной характеристикой дискриминатора // Радиотехника и электроника. 1997. Т. 42, № 7. С. 828–835.
15. Касаткин Д. В., Матросов В. В. Хаотические колебания в двух каскадно связанных осцилляторах с частотным управлением // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32, № 8. С. 71–77.
16. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
17. Беляков Л. А. О структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса // В кн.: IX Международная конференция по нелинейным колебаниям: Тез. докл. Киев: ИМ АН УССР, 1981. С. 57.
18. Schüller Y. S., Hiebert P., Peltonen T. A. Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach // ECB Working Paper Series. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank, 2015. 54 p. DOI: 10.2139/ssrn.2664126.
19. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2013. 366 с.

References

1. Samuelson P, Nordhaus W. Economics. 15th edition. New York: McGraw Hill; 1995. 792 p.
2. Vechkanov GS, Vechkanova GR. Macroeconomics. Saint Petersburg: Piter; 2002. 412 p. (in Russian).
3. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results. Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(17(224)):50–61 (in Russian).
4. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results (end). Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(18(225)):42–56 (in Russian).
5. Lebedeva AS. The genesis of the economic cycle theory. International Research Journal. 2013; 8–3(15):31–34 (in Russian).
6. Lopes AM, Machado JAT, Huffstot JS, Mata ME. Dynamical analysis of the global business-cycle synchronization. PLoS ONE. 2018;13(2):e0191491. DOI: 10.1371/journal.pone.0191491.
7. Oman W. The synchronization of business cycles and financial cycles in Euro area. International Journal of Central Banking. 2019;15(1):327–362.
8. Guegan D. Chaos in economics and finance. Annual Reviews in Control. 2009;33(1):89–93. DOI: 10.1016/j.arcontrol.2009.01.002.
9. Volos C, Kyprianidis I, Stouboulos IN. Synchronization phenomena in coupled nonlinear systems applied in economic cycles. WSEAS Transactions on Systems. 2012;11(12):681.
10. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):515–537 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
11. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of the business-cycle synchronization processes in an ensemble of coupled economic oscillators. Radiophysics and Quantum Electronics. 2022;64(10): 750–759. DOI: 10.1007/s11141-022-10176-1.
12. McCullen NJ, Ivanchenko MV, Shalfeev VD, Gale WF. A dynamical model of decision-making behavior in a network of consumers with applications to energy choices. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011;21(9):2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
13. Ponomarenko VP. Modeling the evolution of dynamic modes in an oscillator system with frequency control. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 1997;7(5):44–55 (in Russian).
14. Ponomarenko VV, Zaulin IA. The dynamics of an oscillator controlled by a frequency-locked loop with an inverted discriminator characteristic. J. Commun. Technol. Electron. 1997;42(7):828–835 (in Russian).
15. Kasatkin DV, Matrosov VV. Chaotic oscillations of two cascade-coupled oscillators with frequency control. Tech. Phys. Lett. 2006;32(4):357–360. DOI: 10.1134/S1063785006040250.
16. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. New York: Dover Publications; 1987. 815 p.
17. Belyakov LA. About structure of bifurcation multitudes in systems with separatrix loop of saddle-focus. In: Abstracts of the IX International Conference on Nonlinear Oscillations. Kiev: Institute of Mechanics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR; 1981. P. 57 (in Russian).
18. Schüler YS, Hiebert P, Peltonen TA. Characterising the financial cycle: a multivariate and time-varying approach. ECB Working Paper Series. No. 1846. Frankfurt am Main: European Central Bank; 2015. 54 p. DOI: 10.2139/ssrn.2664126.
19. Shalfeev VD, Matrosov VV. Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press; 2013. 366 p. (in Russian).



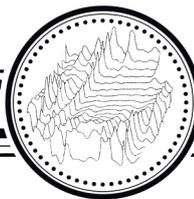
Матросов Валерий Владимирович – родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Под его руководством защищено 5 кандидатских диссертаций. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак); научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: matrosov@rf.unn.ru
ORCID: 0000-0003-3146-111X
AuthorID (eLibrary.Ru): 24397



Шалфеев Владимир Дмитриевич – родился в 1941 году, окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андропова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.

603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: shalfeev@rf.unn.ru
AuthorID (eLibrary.Ru): 19690



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 517.9, 621.372

DOI: 10.18500/0869-6632-003042
EDN: PBXBCY

Пространственная и временная динамика возникновения эпидемий в гибридной SIRS+V модели клеточных автоматов

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 29.01.2023, принята к публикации 21.03.2023,
опубликована онлайн 3.05.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Цель — построение модели распространения инфекции в виде решетки вероятностных клеточных автоматов, учитывающей инерционный характер передачи инфекции между особями. Выявление связи между пространственной и временной динамикой модели в зависимости от вероятности миграции особей. Методы — численное моделирование стохастической динамики решетки клеточных автоматов методом Монте-Карло. Результаты. Построена модифицированная SIRS+V модель распространения эпидемий в виде решетки вероятностных клеточных автоматов. От стандартных моделей она отличается учетом инерционного характера процесса передачи инфекции между особями популяции, что реализуется посредством введения в модель «агента-переносчика», в качестве которого выступают вирусы. Выявлено сходство и различие динамики модели клеточных автоматов от ранее исследованной модели среднего поля. Обсуждение. Модель в виде клеточных автоматов позволяет исследовать процессы распространения инфекции в популяции, в том числе и в условиях пространственно неоднородного распределения заболевания. Последняя ситуация возникает, если вероятность миграции особей не слишком велика. При этом возможно как существенное изменение количественных характеристик процессов, так и возникновение качественно новых режимов, таких как режим незатухающих колебаний.

Ключевые слова: популяционная динамика, SIRS-модель, решетки клеточных автоматов.

Для цитирования: Шабунин А. В. Пространственная и временная динамика возникновения эпидемий в гибридной SIRS+V модели клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 271–285. DOI: 10.18500/0869-6632-003042. EDN: PBXBCY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Spatial and temporal dynamics of the emergence of epidemics in the hybrid SIRS+V model of cellular automata

A. V. Shabunin

Saratov State University, Russia

E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

*Received 29.01.2023, accepted 21.03.2023,
available online 3.05.2023, published 31.05.2023*

Abstract. *Purpose* of this work is to construct a model of infection spread in the form of a lattice of probabilistic cellular automata, which takes into account the inertial nature of infection transmission between individuals. Identification of the relationship between the spatial and temporal dynamics of the model depending on the probability of migration of individuals. *Methods.* The numerical simulation of stochastic dynamics of the lattice of cellular automata by the Monte Carlo method. *Results.* A modified SIRS+V model of epidemic spread in the form of a lattice of probabilistic cellular automata is constructed. It differs from standard models by taking into account the inertial nature of the transmission of infection between individuals of the population, which is realized by introducing a “carrier agent” into the model, which viruses act as. The similarity and difference between the dynamics of the cellular automata model and the previously studied mean field model are revealed. *Discussion.* The model in the form of cellular automata allows us to study the processes of infection spread in the population, including in conditions of spatially heterogeneous distribution of the disease. The latter situation occurs if the probability of migration of individuals is not too high. At the same time, a significant change in the quantitative characteristics of the processes is possible, as well as the emergence of qualitatively new modes, such as the regime of undamped oscillations.

Keywords: population dynamics, SIRS model, dynamical systems.

For citation: Shabunin AV. Spatial and temporal dynamics of the emergence of epidemics in the hybrid SIRS+V model of cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(3):271–285. DOI: 10.18500/0869-6632-003042

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Практическое применение нелинейной динамики основано на построении математических моделей природных явлений и технических устройств, позволяющих предсказывать их поведение, в том числе и при изменении внешних условий. Одной из подобных задач является моделирование процессов распространения эпидемий инфекционных заболеваний в биологических популяциях [1–4].

Математическое моделирование эпидемий осуществляется разными методами: с помощью анализа временных рядов [5], построения регрессионных [6] и авторегрессионных [7] моделей, использования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [8], уравнений в частных производных [9], а также решеток клеточных автоматов [10–13]. Классическим подходом к моделированию является разбиение популяции на группы особей и определение для них правил взаимодействия, из которых посредством усреднения получают уравнения для наблюдаемых количественных характеристик заболевания. Примером данного подхода является SIRS-модель, предложенная в 1920-х годах Кермаком и МакКендриком [8]. В этой модели популяцию разбивают на три класса: здоровых и восприимчивых (S – Susceptible), больных (I – Infectious) и выздоровевших (R – Recovered) особей, и определяют для них правила взаимодействия (происходящие за интервал времени Δt):

- встреча восприимчивой особи (S) с зараженной (I) приводит с вероятностью P_1 к заражению восприимчивой особи: $S + I \xrightarrow{P_1} 2I$;
- заболевшая особь (I) с вероятностью P_2 излечивается, приобретая при этом иммунитет к последующим заражениям (R): $I \xrightarrow{P_2} R$;

- иммунная особь (R) с вероятностью P_3 утрачивает иммунитет, возвращая особь к восприимчивому состоянию (S): $R \xrightarrow{P_3} S$.

Таким образом, в эволюции каждой особи мы наблюдаем циклическую цепочку превращений между дискретным и конечным набором состояний $S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$. Отсюда и название данной модели — *SIRS*. В *SIRS*-модели скорость заражения определяется частотой контактов между восприимчивыми и инфицированными особями. Это правило было впервые предложено в работе [14] и в дальнейшем широко использовалось. Однако оно не всегда адекватно описывает реальные процессы заражения, которые могут характеризоваться как нелокальностью, так и инерционностью, что характерно, например, для респираторных вирусных инфекций, когда вирус, вызывающий заражение, может достаточно долго существовать вне организма «хозяина». Поэтому акт заражения может происходить в отрыве (во времени и пространстве) от непосредственного контакта между S и I особями. Это требует внесения в модель дополнительной инерционности, например, в виде запаздывающего аргумента [15–17], или, как это было сделано в [18], при помощи дополнительной переменной (и, соответственно, дополнительного уравнения).

В работе [18] была предложена модификация *SIRS*-модели, в которой передача инфекции происходит опосредованно, за счет взаимодействия восприимчивой особи с агентом-переносчиком, в качестве которого выступают вирусы. Эту модель в дальнейшем будем называть *SIRS+V* моделью. *SIRS+V* является моделью взаимодействия двух систем: популяции особей и популяции вирусов, каждая из которых живет по своим законам. Особи — это обособленные индивидуумы, состояние которых меняется дискретным образом, тогда как вирусы формируют как бы внешнее поле, воздействующее на особей и приводящее к изменению их состояния — заражению.

Ранее, в работе [18] *SIRS+V* модель была исследована при помощи системы ОДУ (то есть в приближении среднего поля) и продемонстрировала качественное соответствие с динамикой реальных эпидемических процессов. Однако приближение среднего поля является весьма грубой идеализацией для эпидемических процессов, поскольку пространственная неоднородность может являться для них определяющим фактором. Поэтому в настоящем исследовании мы решили исследовать эту модель методом *вероятностных клеточных автоматов* (ВКА), которые позволяют имитировать процессы заражения/выздоровления на уровне отдельных особей, учитывая их вероятностный характер, а также исследовать возникающие пространственные структуры.

Клеточным автоматом (КА) называется система (клетка), обладающая конечным набором состояний, переключения между которыми происходят дискретно во времени по заданному закону [19, 20]. Если закон изменения состояний клетки представляет собой стохастический марковский процесс, то такой КА называется вероятностным, в противном случае — детерминированным. Клеточные автоматы, как правило, объединяют в сети (решетки). Решетки клеточных автоматов (РКА) являются мощным средством моделирования физических процессов в распределенных системах, позволяя получить их временную и пространственную динамику [21]. В них наблюдаются характерные для динамических систем колебательные и волновые явления: периодические, квазипериодические и хаотические колебания [22, 23], распространение волн и волновых фронтов [24].

Модели ВКА имеют преимущество перед ОДУ, поскольку позволяют рассматривать пространственно неоднородные процессы заболевания и позволяют исследовать роль миграционных процессов на ход болезни. Например, в работах [10, 25] было показано, что использование моделей среднего поля оправдано лишь при высокой миграции особей, когда происходит сильное перемешивание инфицированных особей в пространстве. При слабой миграции, когда инфекция носит очаговый характер, предсказания моделей ОДУ и ВКА сильно расходятся. Впоследствии этот вывод получил подтверждение в работе [12]. В работе [11] метод ВКА был использован для оценки роли вакцинации на процессы развития эпидемии. Во всех этих работах моделирование проводилось на основе классического алгоритма *SIRS*. В настоящем исследовании метод вероятностных клеточных автоматов применяется для модифицированного *SIRS+V* алгоритма.

1. SIRS+V модель распространения инфекционных заболеваний

Как было сказано выше, в стандартной SIRS-модели акт заражения описывается как результат локального контакта S и I особей: $S + I \rightarrow 2I$. Однако на практике заражение может происходить и опосредованно, без непосредственного взаимодействия особей. В модифицированной системе предлагается именно такая схема заражения, основанная на взаимодействии особей с вирусными частицами, обозначаемыми далее как V . В этой схеме больная особь (I) выступает генератором вирусов (V), которые вследствие диффузии распространяются в пространстве, заражая восприимчивых особей (S): $S \xrightarrow{P_1(v)} I$. Таким образом, вместо стандартной SIRS-модели будет использована двухкомпонентная (особи + вирусы) модель: $S \xrightarrow{P_1(v)} I \xrightarrow{P_2} R \xrightarrow{P_3} S$. В ней учтено, что вероятность заражения P_1 зависит от концентрации вирусов (v) в месте нахождения особи. Функция $P_1(v)$, следуя [18], выбрана в виде: $P_1(v) = 1 - \exp(-\alpha v)$, где $\alpha > 0$ – фактор, характеризующий заражающую способность вирусов. Вероятности P_2 и P_3 представляют собой константы, величины которых характеризуют средние продолжительности болезни и потери иммунитета (измеренные в количестве элементарных интервалов Δt): $\tau_2 = P_2^{-1}$ – средняя продолжительность заболевания (так называемый «период инфицирования»), $\tau_3 = P_3^{-1}$ – средняя длительность иммунитета.

В SIRS+V модели динамика вирусных частиц принципиально отличается от поведения особей популяции. Последние представляют собой частицы с дискретным набором состояний $\{S, I, R\}$, переходы между которыми являются случайными событиями и характеризуются своими значениями вероятностей (P_k , $k = 1, 2, 3$). Кроме того, полагаем, что каждой из особей требуется некоторый ареал обитания (назовем его *элементарной ячейкой*), вследствие чего число особей в конечной области ограничено числом элементарных ячеек N . В противоположность этому вирусные частицы могут накапливаться в каждой точке пространства, поэтому их количество способно принимать произвольные неотрицательные значения¹.

Превращения, произошедшие в каждой элементарной ячейке пространства за время Δt , представляются в виде следующей схемы:



где первые три реакции описывают уже рассмотренную выше модифицированную схему SIRS, а две последние задают закон изменения вирусов:

- зараженная особь (I) генерирует σ вирусных частиц (V);
- часть вирусов (μ) инактивируется.

Параметры σ и μ задают скорости производства и удаления вирусов. Первый из них определяется способностью вирусов размножаться внутри организма-хозяина, а величина, обратная к μ , определяет характерное время существования вируса вне организма зараженной особи.

При рассмотрении процессов распространения эпидемии основной интерес представляет не динамика индивидуальных особей, а изменение их количества N_k ($k \in \{S, I, R\}$). При исследовании модели вместо величин N_k удобно использовать их относительные значения: $s = N_S/N$,

¹ Дискретным характером числа вирусов можно пренебречь, поскольку оно несопоставимо огромно по сравнению с числом особей.

$i = N_I/N$, $r = N_R/N$, которые будем называть плотностями (концентрациями) соответствующих групп особей. В силу неизменности общей численности популяции сумма $s + i + r$ есть постоянное значение — плотность населения популяции, обозначаемая далее как C .

Помимо реакций, изменяющих численности особей и вирусов, важную роль играют процессы, меняющие их распределение в пространстве — миграция. Под миграцией понимаем случайные изменения особями своих пространственных координат (подобно диффузии броуновских частиц), в результате чего каждая из особей независимо от своего состояния $\{S, I, R\}$ перемещается в произвольном направлении и на произвольное расстояние. Миграция не влияет напрямую на величины N_k , однако может влиять на них косвенно, через изменение пространственного распределения особей. Процесс миграции ведет к постепенному перемешиванию особей разных видов в пространстве. Для вирусов миграция определена в виде локальной диффузии, при которой существует «ток вирусов» из мест с высокой концентрацией в соседние области с более низкой концентрацией.

2. SIRS+V модель в виде решетки клеточных автоматов

Эволюция одиночной особи, задаваемая системой (1), (5), представляет собой готовый набор правил для функционирования вероятностного клеточного автомата. Соответственно, популяция особей может быть описана в виде ансамбля таких автоматов. Зададим ансамбль в виде квадратной решетки (матрицы) \hat{M} , размером $L \times L$ клеток, каждая из которых соответствует элементарной ячейке популяции. Клетка может принимать одно из значений $\{S, I, R, E\}$, первые три из которых соответствуют состоянию занимаемой ею особи, а последнее (Empty) — пустой ячейке. Таким образом, общее число клеток $N = L^2$ определяет максимальную емкость популяции, а относительное число «непустых» клеток — введенный ранее параметр C . Положение клетки в решетке идентифицируется двумя индексами: i — номером строки и j — номером столбца матрицы, которые ассоциируются с пространственными координатами. Таким образом, состояние клеток решетки $M_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, L$) задает пространственное распределение популяции.

Эволюция решетки клеточных автоматов совершается из начального состояния \hat{M}_0 в ходе последовательности итераций

$$\hat{M}(t+1) = F(\hat{M}(t), \hat{V}(t)) \quad (3)$$

с дискретным временем t , где F — стохастический оператор, реализующий схемы (1), (5), \hat{V} — матрица $L \times L$, задающая пространственное распределение вирусов. Уравнение (3) необходимо дополнить уравнением для $\hat{V}(t)$. Запишем его в виде решетки диффузионно связанных отображений

$$V_{i,j}(t+1) = g_{i,j}(t) + \frac{\gamma}{4} \left(g_{i-1,j}(t) + g_{i+1,j}(t) + g_{i,j-1}(t) + g_{i,j+1}(t) - 4g_{i,j}(t) \right), \quad (4)$$

где $g_{i,j}$ — функция, описывающая реакции схемы (2) в каждой точке пространства

$$g_{i,j} = V_{i,j} - \mu V_{i,j} + \sigma h(M_{i,j}),$$

$$h(M_{i,j}) = \begin{cases} 1, & M_{i,j} = I, \\ 0, & M_{i,j} \neq I; \end{cases}$$

слагаемое в скобках представляет собой дискретный аналог двумерного оператора ∇ (см. [27,28]); $\gamma \in [0 : 0.8]$ — коэффициент диффузионной связи.

3. Алгоритм численного моделирования

Для нахождения траектории $\hat{M}(t)$, $t = 0, 1, \dots$ необходимо найти численное решение системы (3), (4). Отображение (4) решается непосредственным итерированием, а для нахождения динамики РКА (3) используется следующий метод: на каждом шаге дискретного времени t определяются текущие состояния всех N элементов решетки $M_{i,j}$, после чего они трансформируются, согласно правилам реакций схемы (1).

- (а) Если $M_{i,j} = S$, состояние исходной клетки с вероятностью $P_1(v_{i,j})$ трансформируется в I . Таким образом реализуется случайное событие заражения.
- (б) Если $M_{i,j} = I$, состояние исходной клетки с вероятностью P_2 трансформируется в R , то есть реализуется событие излечения.
- (в) Если $M_{i,j} = R$, состояние исходной клетки с вероятностью P_3 трансформируется в S , то есть происходит потеря иммунитета и возврат к исходному состоянию.

Трансформации (а)–(в) производятся в случайном порядке и реализуют моделирование процессов, связанных с заболеванием.

Помимо них, в динамике РКА присутствует миграция — случайное изменение особями своих пространственных координат. Результат такого перемещения может быть представлен в виде реакции глобальной диффузии, при которой две частицы, занимающие разные клетки, меняются местами



Здесь X и Y — особи произвольного вида, включая «вакансию», то есть пустую ячейку; P_m — вероятность.

Реализуя шаг за шагом описанный алгоритм, получаем эволюцию решетки ВКА в виде зависимости от времени матрицы \hat{M} . На рис. 1 приведен пример одновременных «снимков»

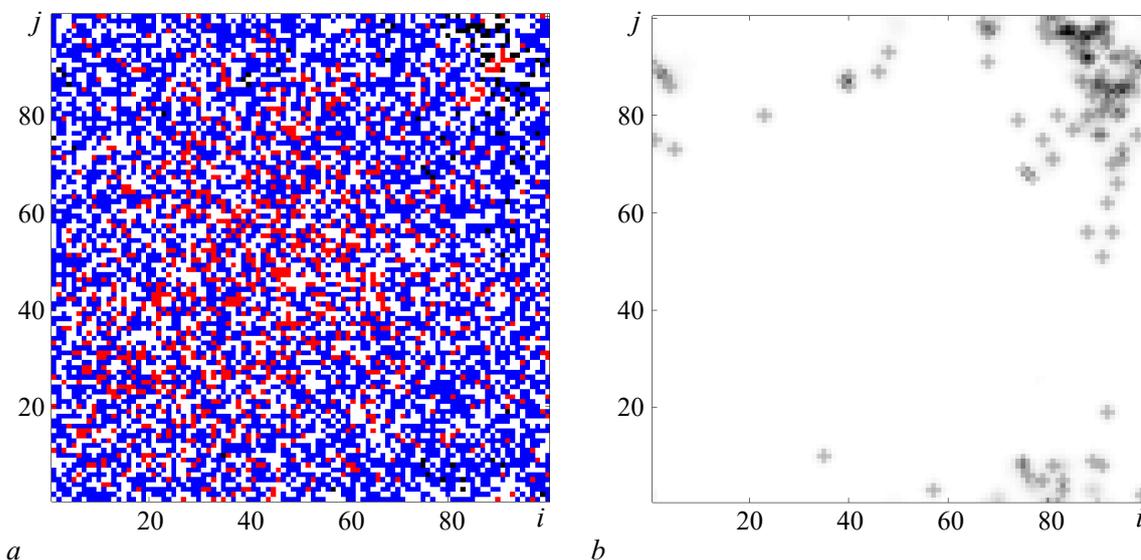


Рис. 1. Пространственное распределение по решетке: a — особей (состояние особи отмечено цветом: « S » — красный, « I » — черный, « R » — синий) и b — вирусов (концентрация вирусов отмечена оттенками серого: чем темнее цвет, тем выше концентрация) (цвет онлайн)

Fig. 1. Spatial distribution on the grid: a — of individuals (the state of the individual is marked with the color: « S » — red, « I » — black, « R » — blue) and b — viruses (the concentration of viruses is marked with shades of gray: the darker the color, the higher the concentration) (color online)

матриц \hat{M} и \hat{V} для значений параметров: $\alpha = 1$, $P_2 = 0.1$, $P_3 = 0.0033$, $\sigma = 0.7$, $\mu = 0.3$, $\gamma = 0.8$ ² и $P_m = 0.0001$. Здесь мы наблюдаем высокую корреляцию в распределении больных особей и распределении вирусов, которая сохраняется и в других случаях. Вследствие вероятностного характера клеточных автоматов зависимости $\hat{M}(t)$ и $\hat{V}(t)$ являются случайными функциями времени. Однако после усреднения по ансамблю клеток при большом N относительные концентрации особей каждого вида

$$k = \frac{N_K}{N} \quad (6)$$

($K \in \{S, I, R\}$) будут представлять собой детерминированные величины. Именно они и рассматриваются в исследовании.

4. Сравнение решетки ВКА с моделью среднего поля

В приближении среднего поля SIRS+V модель (1) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, управляющих изменением концентраций особей ($i = N_I/N$, $r = N_R/N$) и вирусов ($v = N_V/N$):

$$\begin{aligned} \dot{i} &= P(v)(C - i - r) - P_2 i, \\ \dot{r} &= P_2 i - P_3 r, \\ \dot{v} &= \sigma i - \mu v. \end{aligned} \quad (7)$$

Исследование, проведенное в работе [18], показало, что единственным аттрактором фазового пространства (7) является состояние равновесия типа устойчивого фокуса. Поэтому развитие эпидемии стремится со временем к стационарному состоянию, которое при типичных значениях параметров соответствует невысокому уровню относительного числа заболевших $C_i = i/C$. Однако на начальном этапе заболевания наблюдаются колебания $C_i(t)$ большой амплитуды, в ходе которых число заболевших достигает значений, сопоставимых с общей численностью популяции. Насколько результаты, полученные для ОДУ, будут наблюдаться в модели ВКА?

Как известно, модель среднего поля строится в предположении равномерного пространственного распределения вирусов и особей, что достигается в условиях сильного перемешивания последних. Поэтому при $P_m \simeq 1$ обе модели предположительно должны давать близкие результаты. Чтобы проверить это предположение, сравним траектории $C_i(t)$ обеих моделей, стартующие из одинаковых начальных условий и при равных значениях всех параметров; в модели ВКА будем использовать полное перемешивание особей ($P_m = 1$). Как показывают расчеты, обе модели дают близкие результаты, примеры которых показаны на рис. 2. Здесь мы видим почти полное совпадение временных зависимостей $C_i(t)$. Аналогичное соответствие наблюдается и для других значений параметров системы (7).

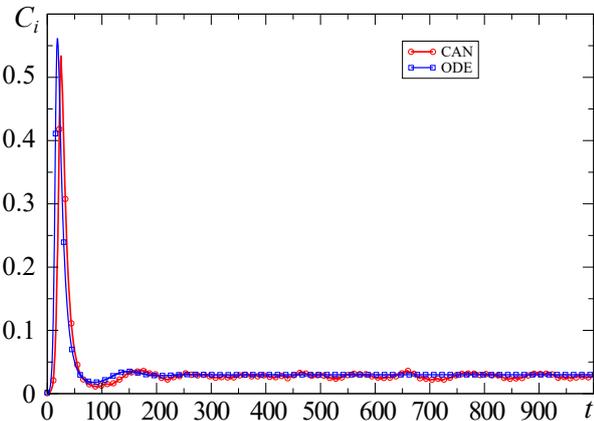


Рис. 2. Зависимость от времени относительной концентрации заболевших в моделях среднего поля (ODE) и клеточных автоматов (CAN) при $P_m = 1$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Time dependence of the relative concentration of the diseased in the mean field (ODE) and cellular automata (CAN) models at $P_m = 1$ (color online)

²Данные значения параметров будут использованы и далее.

Таким образом, можно заключить, что при высокой миграции населения модель среднего поля адекватно описывает динамику заболевания и нет необходимости в привлечении более сложной модели ВКА. Однако при меньшей миграции (или ее отсутствии), условие пространственной однородности распределения вирусов и особей перестает выполняться, что, очевидно, должно приводить к расхождению в поведении обеих моделей. Как показано ниже, при неполном перемешивании наблюдается качественное сходство динамики обеих моделей при их количественном расхождении. Кроме того, при отсутствии перемешивания возможно существование качественно новых режимов. Рассмотрим более подробно, какие эффекты наблюдаются в пространственно неоднородной среде.

5. Динамика заболевания при изменении миграции

Будем исследовать, как меняется динамика ВКА модели при уменьшении вероятности миграции особей от $P_m = 1$ до $P_m = 0$, что соответствует уходу от условия равномерного распределения особей в пространстве. В качестве начальных условий выберем заражение здоровой популяции при проникновении в нее одной инфицированной особи. В модели ВКА этому соответствует решетка, заполненная S -клетками с заданной концентрацией C , в центр которой помещена одна I -клетка. В ходе моделирования РКА будем рассчитывать временные реализации для относительных концентраций зараженных особей $C_i(t)$; при этом интерес представляет как динамика переходного процесса, так и установившийся режим при $t \rightarrow \infty$.

Полученные в результате численного исследования зависимости $C_i(t)$ приведены на рис. 3, а. Как видно из графиков, при $P_m > 0$ развитие эпидемии проходит по тому же качественному сценарию, что и в модели среднего поля, то есть через последовательность уменьшающихся по величине «волн заражения» и переход к стационарному состоянию: $i_s = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$. При этом итоговое стационарное значения i_s не зависит от интенсивности миграции и совпадает с координатами состояния равновесия в модели среднего поля (7). Однако величина P_m влияет на характеристики переходного процесса к стационарному состоянию. Как видно из рис. 3, а, уменьшение миграции ведет к существенному понижению амплитуды первой «волны заражения» с $C_i^{(1)} \simeq 0.5$ ($C_i^{(m)}$ — максимальный относительный уровень заболевших в ходе m -й волны заражения) при $P_m \simeq 1$ до $C_i^{(1)} \simeq 0.1$ при $P_m \simeq 0.001$. При этом существенного изменения амплитуды второй и последующих «волн заражения» не наблюдается. Графики зависимостей

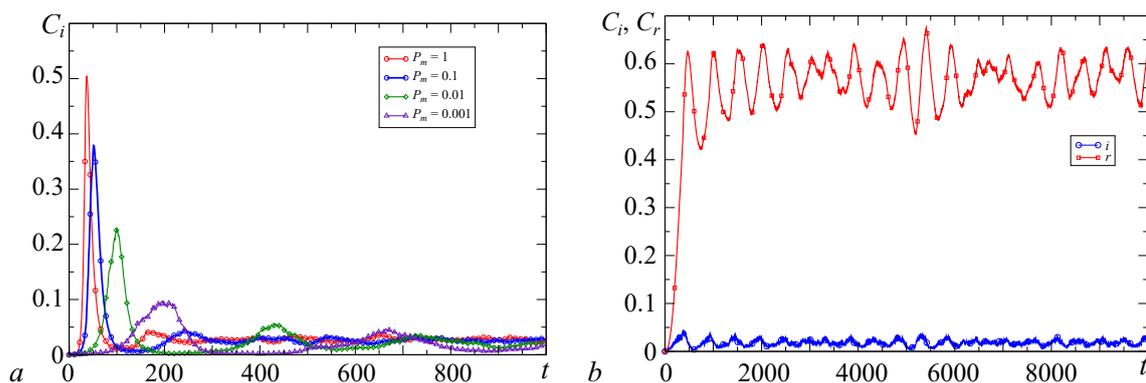


Рис. 3. Динамика модели ВКА для разных значений параметра миграции (а) и при отсутствии миграции (б) (цвет онлайн)

Fig. 3. Dynamics of the PCA model for different values of the migration parameter (a) and at the absence of migration (b) (color online)

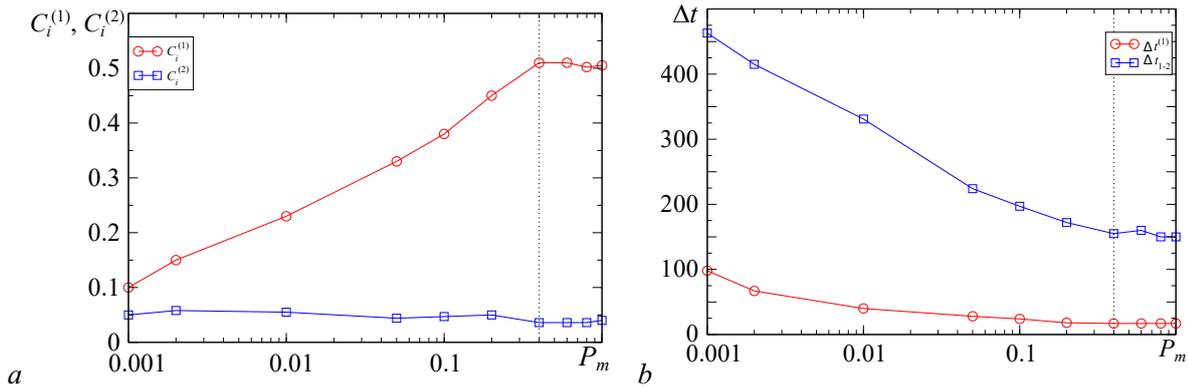


Рис. 4. *a* – Зависимость максимального уровня первой ($C_i^{(1)}$) и второй ($C_i^{(2)}$) волн заражения от P_m ; *b* – зависимость длительности первой волны заражения ($\Delta t^{(1)}$) и интервала между первой и второй волнами заражения (Δt_{1-2}) от P_m (цвет онлайн)

Fig. 4. *a* – Dependence of the maximum level of the first ($C_i^{(1)}$) and the second ($C_i^{(2)}$) infection waves on P_m ; *b* – dependence of the duration of the first infection wave ($\Delta t^{(1)}$) and the interval between the first and the second waves of infection (Δt_{1-2}) from P_m (color online)

$C_i^{(1)}(P_m)$ и $C_i^{(2)}(P_m)$ отображены на рис. 4, *a*. Здесь мы видим, что амплитуда первой волны растет с увеличением P_m почти по логарифмическому закону, вплоть до $P_m \simeq 0.4$; после чего она стабилизируется на постоянном уровне. Что касается амплитуды второй волны, то она почти не зависит от величины миграции. Рост P_m , помимо влияния на амплитуду, ведет к изменению временных характеристик переходного процесса: «сужению» первой волны с $\Delta t^{(1)} \simeq 100$ до $\Delta t^{(1)} \simeq 16$ и к уменьшению среднего интервала между последовательными волнами заражения от $\Delta t_{1-2} \simeq 470$ до $\Delta t_{1-2} \simeq 140$ (рис. 4, *b*). На представленных рисунках хорошо видно, что существенные изменения в динамике заболевания происходят в диапазоне изменения параметра миграции $0 < P_m < 0.4$, а после перехода порогового значения $P_m \simeq 0.4$, отмеченного пунктирной линией, рост миграции почти не оказывает влияния на эпидемические процессы.

Таким образом, миграция особей, хотя и не меняет итоговый уровень заболевших в популяции, резко усиливает его на начальном этапе, одновременно уменьшая длительность переходного процесса. Анализ динамики на начальном уровне свидетельствует также и об изменении формы $C_i(t)$ с изменением P_m . Для иллюстрации этого эффекта приведем графики $C_i(t)$ на этапе монотонного возрастания числа инфицированных в ходе «первой волны» с $C_i(0) \simeq 0$ до максимального значения $C_i^{(1)}$ (рис. 5). Как видно из графиков, при $P_m = 1$ мы имеем «взрывной», то есть почти экспоненциальный рост числа заболевших, тогда как при $P_m \ll 1$ увеличение происходит более

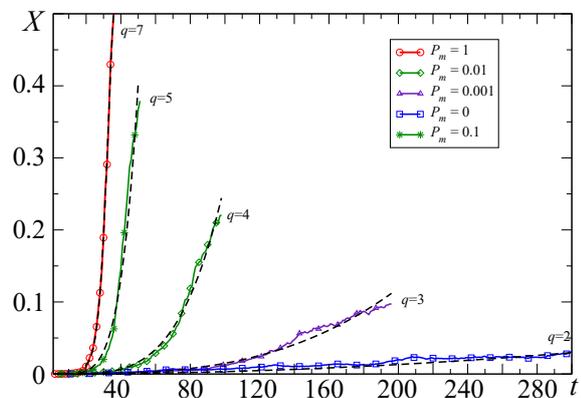


Рис. 5. Графики начального этапа эпидемии, соответствующие монотонному возрастанию числа заболевших и аппроксимирующие их функции $C_i(t) = At^q$, которые показаны штриховыми линиями; порядок аппроксимирующей функции указан рядом с соответствующей кривой (цвет онлайн)

Fig. 5. Plots of the initial stage of the epidemic which correspond to a monotonic rise of the number of cases and their approximating functions $C_i(t) = At^q$, which are shown by dashed lines; the order of the approximating function is indicated near the corresponding curve (color online)

плавно, причем чем меньше миграция, тем более плавно происходит нарастание заболевания. Количественно скорость нарастания $C_i(t)$ можно оценить с помощью полиномиальной аппроксимации. Как показали расчеты, графики на рис. 5 хорошо аппроксимируются степенными зависимостями $C_i(t) = At^q$, где порядок q определяется величиной P_m . При этом минимальная степень полинома, достаточная, чтобы аппроксимировать экспериментальную зависимость, может служить количественной характеристикой скорости роста инфекции на начальном этапе. Например, для аппроксимации кривой « $P_m = 1$ » оказалось достаточным использование полинома седьмой степени, для $P_m = 0.1$ — пятой и т. д. Чем меньше P_m , тем ниже порядок аппроксимирующего полинома. При отсутствии миграции ($P_m = 0$) рост числа заболевших на начальном этапе происходит по закону, близкому к квадратичной параболе.

Таким образом, как было отмечено выше, при $0 < P_m \leq 1$ динамика решетки ВКА качественно соответствует модели ОДУ, хотя и отличается количественно. Как было показано в [18], в модели среднего поля переходный процесс от первоначального заражения к стационарному состоянию соответствует «наматыванию» траектории на устойчивый фокус. Подобную картину мы наблюдаем и в РКА. При этом «декремент затухания» переходного процесса уменьшается с уменьшением вероятности миграции. Если же миграцию полностью «выключить» ($P_m = 0$), то «затухание» также исчезнет, и в системе будут наблюдаться незатухающие колебания, пример которых представлен на рис. 3, b. Режим колебаний — качественно новый по отношению к модели ОДУ, в которой он не реализуется. Таким образом, при $P_m = 0$ наблюдается также и качественное расхождение между динамиками ОДУ и ВКА.

6. Пространственное распределение заболевших в модели ВКА

В предыдущем разделе было показано, что величина параметра миграции существенно влияет на временную динамику заболевания. Очевидно, что причина этого должна заключаться в пространственной неоднородности распределения заболевших, усиливающейся с уменьшением миграции. Рассмотрим пространственное распределение инфицированных на разных этапах эпидемии, начиная с момента первоначального заражения при $t = 0$. Для этого построим последовательность снимков $V(i, j)$ ³ для возрастающих моментов времени при разных значениях P_m . Значения остальных параметров и начальные условия оставим теми же, что и в предыдущем разделе.

При отсутствии миграции, то есть при $P_m = 0$, временные реализации $i(t)$ и $r(t)$, как это следует из рис. 3, b, представляют собой повторяющийся колебательный процесс. Пусть в момент времени $t = 0$ в популяцию проникла одна зараженная особь, которая локализована в центре решетки. В этом случае начальное распределение представляет собой точку, которая за время $\Delta t = 50$ вследствие диффузии преобразуется в небольшое пятно в центре решетки (рис. 6, a). Далее, в ходе развития эпидемии к моменту $t = 100$ (рис. 6, b) эта зона постепенно трансформируется в кольцевую область, которая с увеличением t постепенно распространяется от центра к периферии. Эта зона представляет собой главный очаг эпидемии, в толще которого происходит большая часть новых заражений. Внутри кольцевой зоны подавляющее число особей уже переболело и обладает иммунитетом. Снаружи находится область восприимчивых к инфекции, которая служит питательной средой для дальнейших заражений. По мере развития эпидемии, кольцо заражений постепенно расширяется, охватывая все большую часть решетки. При этом, скорость его расширения остается почти постоянной (см. кривую «o» на рис. 7). С течением времени, кольцо заражения все более расширяется, захватывая почти всю решетку (рис. 6, c), после чего, дойдя до ее границы (рис. 6, d), эпидемия идет на убыль. В момент $t \simeq 500$ уровень заражения становится

³Распределение вирусов соответствует распределению больных особей, но более удобно для отображения.

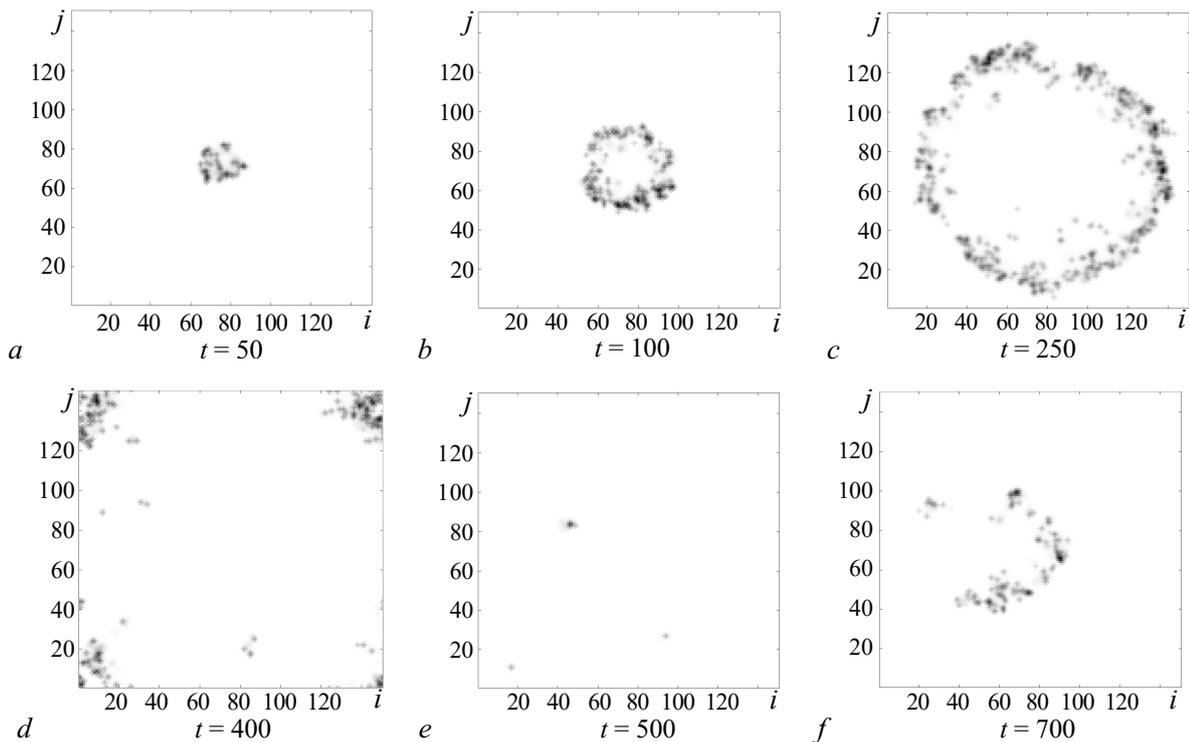


Рис. 6. Пространственное распределение вирусов в разные моменты времени при отсутствии миграции ($P_m = 0$)

Fig. 6. Spatial distribution of viruses at different time moments at the absence of migration ($P_m = 0$)

почти нулевым (рис. 6, e). Однако к этому времени успевает исчезнуть иммунитет в центральной области решетки, и оставшиеся там точечные очаги инфекции становятся активными центрами для следующего «кольца заражения» (рис. 6, f). Возникает вторая волна заражения, которая распространяется в отсутствие иммунитета и, соответственно, почти повторяет первую. Процесс воспроизводится циклически, создавая почти периодические колебания уровня заражений.

При наличии даже небольшой миграции ($P_m = 0.01$) картина заражения кардинально меняется. В этом случае уже на начальном этапе от первоначального очага «отпочковываются» вторичные очаги (рис. 8, a), каждый из которых является источником своего «кольца заражений» (рис. 8, b) и, одновременно, создает новые очаги заражения (8, c). В результате рост инфицирования идет одновременно по всей площади решетки, и уже при $t = 100$ достигается максимум заболевания, когда почти вся решетка покрыта инфекцией (рис. 8, d). Затем волна идет на спад, и к $t \simeq 250$ заболевание прекращается, за исключением оставшихся единичных очагов инфекции. Впоследствии на их основе по тому же сценарию возникает вторая волна заражения. Однако, поскольку к этому времени иммунитет в популяции еще сохраняется, вторая волна растет медленнее первой

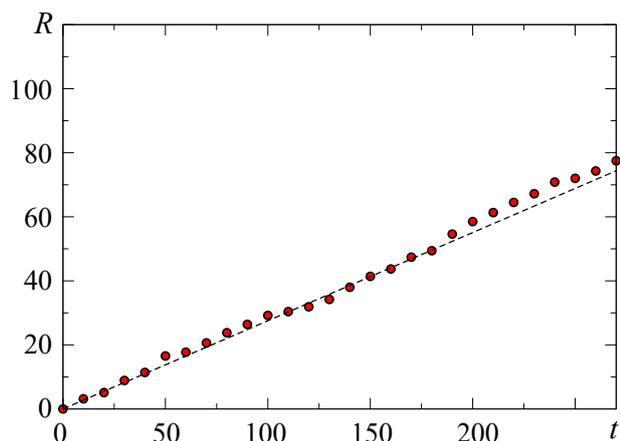


Рис. 7. Зависимость внешнего радиуса «кольца заражения» (R) от времени при $P_m = 0$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Dependence of the outer radius «of the infection ring» (R) on time at $P_m = 0$ (color online)

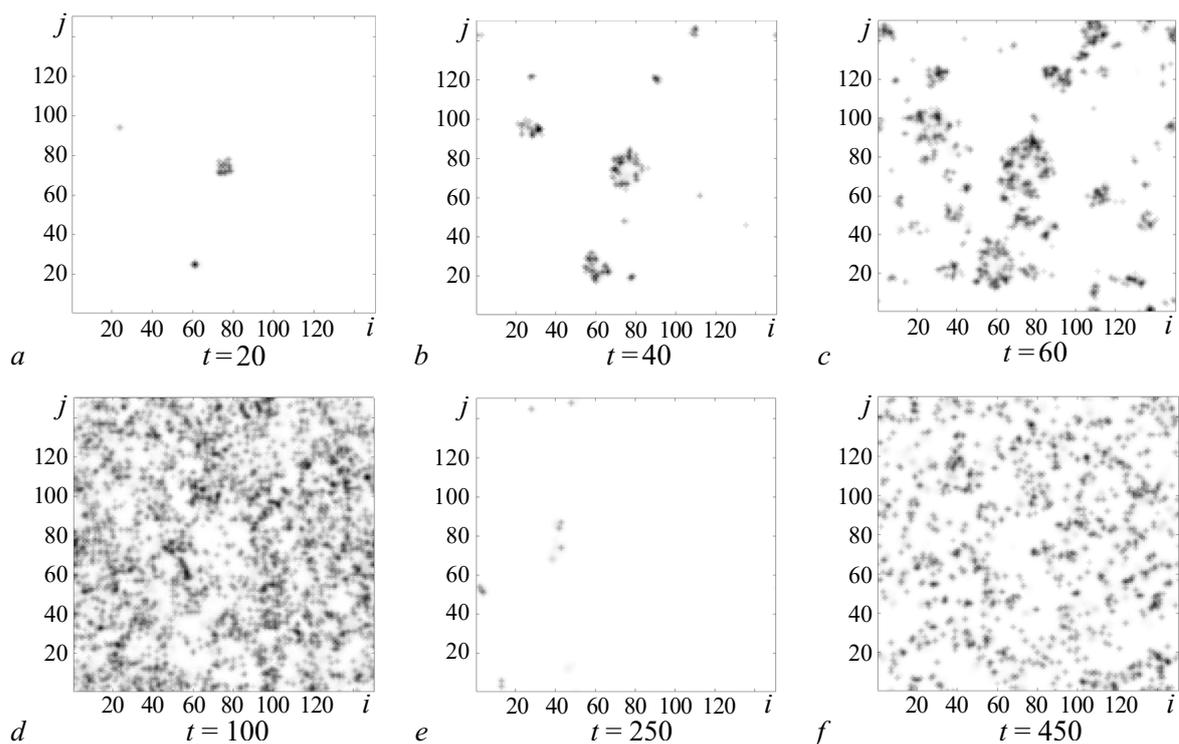


Рис. 8. Пространственное распределение вирусов в разные моменты времени при небольшой миграции ($P_m = 0.01$)
 Fig. 8. Spatial distribution of viruses at different moments of time for small migration ($P_m = 0.01$)

и достигает значительно меньшей величины (рис. 8, *f*). Последующие волны оказываются еще менее выражены и постепенно заболевание выходит на стационарный уровень. При более интенсивной миграции качественная картина не меняется, но процессы заражения ускоряются: наблюдается «взрывной» рост заболевания, при котором очаги инфекции появляются одновременно на всей решетке и популяция очень быстро оказывается равномерно зараженной. Этот случай соответствует почти экспоненциальному росту заражения и очень высокому его уровню на пике заболевания.

Заключение

Клеточная SIRS+V модель развития эпидемических процессов позволяет рассматривать не только временную, но и пространственную динамику развития заболеваний, учитывая распространение вирусов и особей в пространстве за счет диффузии и миграции. Проведенное исследование показало, что пространственное распределение инфекции играет определяющую роль в развитии эпидемии, меняя количественные характеристики наблюдающихся процессов и приводя к качественно новым режимам. При наличии небольшой миграции в модели ВКА, так же как и в ОДУ, наблюдается переход к стационарному состоянию через последовательность затухающих «волн заражения». Однако амплитуда и длительность этих волн оказываются существенно зависящими от интенсивности миграций: с ростом миграции амплитуда первой волны заражения растет по логарифмическому закону, одновременно происходит «ускорение» переходного процесса к стационарному состоянию. Уровень заражений в стационарном состоянии оказывается таким же, как и в модели ОДУ, и не зависит от миграции. При полном отсутствии миграции особей в клеточной модели может наблюдаться режим незатухающих колебаний, отсутствующий в модели ОДУ.

Список литературы

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
2. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии: Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991. 276 с.
3. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases // SIAM Review. 2000. Vol. 42, no. 4. P. 599–653. DOI: 10.1137/S0036144500371907.
4. Андерсон Р., Мэй Р. Инфекционные болезни человека: Динамика и контроль. М.: Мир, 2004. 784 с.
5. Serfling R. E. Methods for current statistical analysis of excess pneumonia-influenza deaths // Public Health Reports. 1963. Vol. 78, no. 6. P. 494–506. DOI: 10.2307/4591848.
6. Burkom H. S., Murphy S. P., Shmueli G. Automated time series forecasting for biosurveillance // Statistics in Medicine. 2007. Vol. 26, no. 22. P. 4202–4218. DOI: 10.1002/sim.2835.
7. Pelat C., Boëlle P.-Y., Cowling B. J., Carrat F., Flahault A., Ansart S., Valleron A.-J. Online detection and quantification of epidemics // BMC Medical Informatics and Decision Making. 2007. Vol. 7. P. 29. DOI: 10.1186/1472-6947-7-29.
8. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proc. R. Soc. Lond. A. 1927. Vol. 115, no. 772. P. 700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118.
9. Bailey N. T. J. The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications. 2nd edition. London: Griffin, 1975. 413 p.
10. Voccara N., Cheong K. Automata network SIR models for the spread of infectious diseases in populations of moving individuals // Journal of Physics A: Mathematical and General. 1992. Vol. 25, no. 9. P. 2447–2461. DOI: 10.1088/0305-4470/25/9/018.
11. Sirakoulis G. C., Karafyllidis I., Thanailakis A. A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation // Ecological Modelling. 2000. Vol. 133, no. 3. P. 209–223. DOI: 10.1016/S0304-3800(00)00294-5.
12. Шабунин А. В. SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
13. Шабунин А. В. Синхронизация процессов распространения инфекций во взаимодействующих популяциях: Моделирование решетками клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 4. С. 383–396. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.
14. Hamer W. H. Epidemic disease in England – the evidence of variability and persistence of type // The Lancet. 1906. Vol. 1. P. 733–739.
15. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht: Springer, 1992. 502 p. DOI: 10.1007/978-94-015-7920-9.
16. Переварюха А. Ю. Непрерывная модель трех сценариев инфекционного процесса при факторах запаздывания иммунного ответа // Биофизика. 2021. Т. 66, № 2. С. 384–407. DOI: 10.31857/S0006302921020204.
17. Переварюха А. Ю. Модель адаптационного противодействия индуцированной биотической среды в инвазионном процессе // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 4. С. 436–455. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-436-455.
18. Шабунин А. В. Гибридная SIRS-модель распространения инфекций // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 6. С. 717–731. DOI: 10.18500/0869-6632-003014.
19. Кобринский Н. Е., Трахтенберг Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. М: Физматгиз, 1962. 405 с.
20. Тоффолли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991. 283 с.
21. Ванг В. К. Исследование пространственно распределенных динамических систем методами вероятностного клеточного автомата // УФН. 1999. Т. 169, № 5. С. 481–505. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199905a.0481.

22. *Provata A., Nicolis G., Baras F.* Oscillatory dynamics in low-dimensional supports: A lattice Lotka–Volterra model // *J. Chem. Phys.* 1999. Vol. 110, no. 17. P. 8361–8368. DOI: 10.1063/1.478746.
23. *Shabunin A. V., Baras F., Provata A.* Oscillatory reactive dynamics on surfaces: A lattice limit cycle model // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 66, no. 3. P. 036219. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036219.
24. *Tsekouras G., Provata A., Baras F.* Waves and their interactions in the lattice Lotka–Volterra mode // *Известия вузов. ПНД*, 2003. Т. 11, № 2. С. 63–71.
25. *Boccaro N., Cheong K.* Critical behaviour of a probabilistic automata network SIS model for the spread of an infectious disease in a population of moving individuals // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1993. Vol. 26, no. 15. P. 3707–3717. DOI: 10.1088/0305-4470/26/15/020.
26. *Benyoussef A., HafidAllah N. E., ElKenz A., Ez-Zahraouy H., Loulidi M.* Dynamics of HIV infection on 2D cellular automata // *Physica A.* 2003. Vol. 322. P. 506–520. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01915-5.
27. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // *Progress of Theoretical Physics.* 1983. Vol. 69, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
28. *Yamada T., Fujisaka H.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II: The mapping approach // *Progress of Theoretical Physics.* 1983. Vol. 70, no. 5. P. 1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.

References

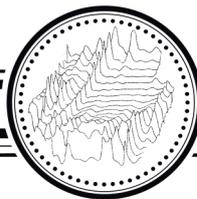
1. Bailey NTJ. *The Mathematical Approach to Biology and Medicine.* London: John Wiley and Sons; 1967. 296 p. DOI: 10.2307/2982529.
2. Marchuk GI. *Mathematical Models in the Immunology: Simulation Methods and Experiments.* Moscow: Nauka; 1991. 276 p. (in Russian).
3. Hethcote HW. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review.* 2000;42(4):599–653. DOI: 10.1137/S0036144500371907.
4. Anderson RM, May R. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control.* Oxford: Oxford University Press; 1991. 768 p.
5. Serfling RE. Methods for current statistical analysis of excess pneumonia-influenza deaths. *Public Health Reports.* 1963;78(6):494–506. DOI: 10.2307/4591848.
6. Burkom HS, Murphy SP, Shmueli G. Automated time series forecasting for biosurveillance. *Statistics in Medicine.* 2007;26(22):4202–4218. DOI: 10.1002/sim.2835.
7. Pelat C, Boëlle PY, Cowling BJ, Carrat F, Flahault A, Ansart S, Valleron AJ. Online detection and quantification of epidemics. *BMC Medical Informatics and Decision Making.* 2007;7:29. DOI: 10.1186/1472-6947-7-29.
8. Kermack WO, McKendrick AG. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1927;115(772):700–721. DOI: 10.1098/rspa.1927.0118.
9. Bailey NTJ. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications.* 2nd edition. London: Griffin; 1975. 413 p.
10. Boccaro N, Cheong K. Automata network SIR models for the spread of infectious diseases in populations of moving individuals. *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1992;25(9):2447–2461. DOI: 10.1088/0305-4470/25/9/018.
11. Sirakoulis GC, Karafyllidis I, Thanailakis A. A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation. *Ecological Modelling.* 2000;133(3):209–223. DOI: 10.1016/S0304-3800(00)00294-5.
12. Shabunin AV. SIRS-model with dynamic regulation of the population: Probabilistic cellular automata approach. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2019;27(2):5–20 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.

13. Shabunin AV. Synchronization of infections spread processes in populations interacting: Modeling by lattices of cellular automata. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(4):383–396 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-4-383-396.
14. Hamer WH. Epidemic disease in England – the evidence of variability and persistence of type. *The Lancet*. 1906;1:733–739.
15. Gopalsamy K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Dordrecht: Springer; 1992. 502 p. DOI: 10.1007/978-94-015-7920-9.
16. Perevaryukha AY. A continuous model of three scenarios of the infection process with delayed immune response factors. *Biophysics*. 2021;66(2):327–348. DOI: 10.1134/S0006350921020160.
17. Perevaryukha AY. Modeling of adaptive counteraction of the induced biotic environment during the invasive process. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(4):436–455. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-4-436-455.
18. Shabunin AV. Hybrid SIRS model of infection spread. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2022;30(6):717–731. DOI: 10.18500/0869-6632-003014.
19. Kobrinskii NE, Trahtenberg BA. *Introduction to the Theory of Finite Automata*. Moscow: Fizmatgiz; 1962. 405 p. (in Russian).
20. Toffoli T, Margolus N. *Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling*. Cambridge: MIT Press; 1987. 259 p.
21. Vanag VK. Study of spatially extended dynamical systems using probabilistic cellular automata. *Phys. Usp.* 1999;42(5):413–434. DOI: 10.1070/PU1999v042n05ABEH000558.
22. Provata A, Nicolis G, Baras F. Oscillatory dynamics in low-dimensional supports: A lattice Lotka–Volterra model. *J. Chem. Phys.* 1999;110(17):8361–8368. DOI: 10.1063/1.478746.
23. Shabunin AV, Baras F, Provata A. Oscillatory reactive dynamics on surfaces: A lattice limit cycle model. *Phys. Rev. E*. 2002;66(3):036219. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036219.
24. Tsekouras G, Provata A, Baras F. Waves and their interactions in the lattice Lotka–Volterra mode. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2003;11(2):63–71.
25. Boccara N, Cheong K. Critical behaviour of a probabilistic automata network SIS model for the spread of an infectious disease in a population of moving individuals. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1993;26(15):3707–3717. DOI: 10.1088/0305-4470/26/15/020.
26. Benyoussef A, HafidAllah NE, ElKenz A, Ez-Zahraouy H, Loulidi M. Dynamics of HIV infection on 2D cellular automata. *Physica A*. 2003;322:506–520. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01915-5.
27. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*. 1983;69(1):32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
28. Yamada T, Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II: The mapping approach. *Progress of Theoretical Physics*. 1983;70(5):1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.



Шабунин Алексей Владимирович — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-3495-9418
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34839



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 519.6, 532.5

DOI: 10.18500/0869-6632-003039
EDN: НКQPIN

Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя

В. Н. Говорухин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 29.12.2022, принята к публикации 24.03.2023,
опубликована онлайн 25.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — изучить перенос пассивных частиц вихревым триполем при изменении параметра, определяющего скорость перемещения конфигурации. Под триполем понимается структура, состоящая из центрального вихря и вращающихся вокруг него вихрей-спутников с противоположной центру циркуляцией. В работе рассмотрена простейшая классическая математическая модель триполя — система трёх точечных вихрей, формулируемая в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Исследование ограничено частным случаем триполя с нулевой суммарной интенсивностью. Изучено влияние скорости перемещения конфигурации на процессы переноса пассивных частиц. **Методы.** Исследование проводилось численно с использованием алгоритмов, основанных на подходах теории динамических систем, включая построение отображения Пуанкаре и анализ переноса маркерных частиц. Применялись расчёты на больших временах, соответствующих сотням и тысячам оборотов триполя вокруг центра. Для решения возникающих задач Коши использовались интеграторы высоких порядков точности, что позволило контролировать адекватность результатов вычислений. **Результаты.** Установлено, что перенос пассивных частиц принципиально различен в зависимости от скорости перемещения триполя. Когда скорость мала, в окрестности вихревой конфигурации возникает обширная область хаотической динамики, которая медленно смещается вместе с триполем. В области хаоса существуют подобласти активного и медленного перемешивания. Перенос частиц состоит из следующих возможных стадий: перенос из левой от триполя области в правую, сильное перемешивание в окрестности вихрей, медленный дрейф в левую от триполя область. При большой скорости конфигурации во всей области хаотической динамики частицы сильно перемешиваются, вихревой триполь перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования. В промежуточных ситуациях в разной степени реализуются оба процесса. **Заключение.** Обнаружены и описаны нетривиальные сценарии переноса пассивных частиц вихревым триполем, которые могут возникать и в реальных вихревых конфигурациях жидкостей.

Ключевые слова: вихревые потоки, система точечных вихрей, перенос частиц, перемешивание пассивной примеси, нелинейные системы, хаос.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-29-06013. Автор благодарен рецензенту за глубокий анализ статьи, полезные замечания и предложения.

Для цитирования: Говорухин В. Н. Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039. EDN: НКQPIN

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane

V. N. Govorukhin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru

Received 29.12.2022, accepted 24.03.2023,
available online 25.04.2023, published 31.05.2023

Abstract. Purpose of this article is to study the transport of passive particles in the velocity field of a vortex tripole with a change in the parameter that determines the speed of the configuration movement. A structure consisting of a central vortex and satellite vortices rotating around it with the opposite vorticity is understood as a tripole. We employ a system of three point vortices, the most simple mathematical representation of a vortex tripole, which may be expressed as a system of nonlinear ordinary differential equations with a parameter. Consideration is limited to a particular case of a tripole with zero total vorticity. The influence of the speed values of vortex configuration movement on the processes of passive particle transport has been studied. *Methods.* The study was carried out numerically using algorithms based on the dynamical systems approaches including the construction of the Poincaré map and the analysis of the dynamics of marker particles. Were carried out long times calculations, corresponding to hundreds and thousands of turns around the tripole center. Integrators of high orders of accuracy were used to solve the Cauchy problems, which made it possible to adequacy of the calculation result control. *Results.* We found that transferring passive particles is fundamentally different depending on the speed of the tripole. A vast zone of chaotic dynamics forms in the neighborhood of the vortices when the velocity is low. This zone slowly shifts along with the tripole. There are subregions of active and slow mixing inside the chaos region. The possible stages of particle dynamics are: transfer from the region to the right of the tripole to the area to the left, vigorous mixing near the vortices, and slowly drifting to the region to the left of the tripole. At a high speed of vortex configuration in the entire chaotic region, the particles are strongly mixed. The vortex tripole removes particles from the vicinity of its initial position over long distances and practically does not capture new particles along its path. In intermediate situations, both processes can be realized at varying degrees. *Conclusion.* Non-trivial scenarios for the transport of passive particles by a vortex tripole, which can also occur in real vortex configurations of fluids, have been discovered and described.

Keywords: vortex flows, system of point vortices, particle transfer, chaotic mixing, nonlinear systems, chaos.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-29-06013.

For citation: Govorukhin VN. Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(3):286–304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Близкие к двумерным мультипольные вихревые конфигурации встречаются в природе и воспроизводятся в физических экспериментах [1–5]. Под мультиполюм понимается конфигурация, состоящая из центрального вихря и нескольких спутников, причём центр и спутники имеют циркуляцию (интенсивность) противоположных знаков. Для описания подобных структур используются различные математические модели [6–8], но простейшей является система точечных вихрей. Если рассматривать бесконечно тонкие вихревые нити, и предположить [9], что завихренность сосредоточена на прямолинейных нитях, параллельных друг другу, то можно рассматривать движение точек пересечения вихрей с плоскостью. Образ такого вихря на плоскость является точкой, его называют точечным вихрем [10], который описывается координатами на плоскости и значением циркуляции в ней. Системы даже небольшого числа точечных вихрей порождают сложные потоки, и во многих случаях хорошо описывают реальные гидродинамические течения. Так, подобная математическая модель нашла применение при анализе неустойчивости вихревого следа фон Карманом в 1912 г., при возникновении больших когерентных вихрей и во многих других задачах. Математически конфигурация N точечных вихрей представляет собой гамильтонову систему $2N$

обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование подобных систем началось, видимо, ещё Гельмгольцем [11] и активно продолжается до сих пор.

Простейшей конфигурацией на плоскости, демонстрирующей большое разнообразие режимов движения в зависимости от параметров (интенсивности и взаимного расположения вихрей), является система трёх вихрей, что объясняет высокий интерес к её изучению (см. работы [2, 12–16] и ссылки в них). Известно, что несмотря на интегрируемость задачи динамики трёх вихрей [17, 18] (в силу существования достаточного числа интегралов), такие конфигурации порождают сложные течения и нетривиальные процессы переноса в жидкостях. Частным случаем трёхвихревой конфигурации является точечный триполь, который состоит из расположенных на одной прямой центрального вихря и находящихся по разные стороны от него двух спутников. Исследована устойчивость триполя, его динамика, структура порождаемого им поля скорости, особое внимание уделено случаю нулевой суммарной циркуляции конфигурации (см. [6, 19, 20] и ссылки в них). В статье [19] показано хорошее совпадение динамики частиц жидкости в поле скорости точечного триполя с результатами физических экспериментов.

Вихревая конфигурация порождает поле скорости, определяющее массоперенос в области течения. Пассивными называют частицы жидкости, которые не оказывают влияния на движение других частиц, но переносятся полем скорости, и могут демонстрировать сложную динамику [21, 22]. Наряду с математическим моделированием переноса пассивных частиц возможны и другие постановки проблем адвекции в жидкости, которые учитывают различные факторы [23, 24], но далее в работе такие задачи не рассматриваются. Изучение процессов переноса и перемешивания пассивных частиц может дать информацию о происходящих процессах в атмосфере, океане, важно для приложений, таких как анализ водных течений, переноса загрязнений, движения циклонов и антициклонов [25, 26]. В частности известно, что поле скорости конфигурации трёх вихрей во многих случаях порождает хаотические процессы переноса, демонстрирующие многообразие свойств и нетривиальные эффекты [14, 15, 19], которые ещё не до конца изучены.

Перенос пассивной частицы N точечными вихрями может трактоваться как динамика системы из $N+1$ вихрей, причем интенсивность $(N+1)$ -го вихря равна нулю. Математически такая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, где переменными являются координаты вихрей и пассивных частиц, а параметрами — интенсивности и расположение вихрей. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений являются классическим инструментом математического моделирования лагранжевой динамики жидкости. Для их анализа эффективны методы исследования, основанные на положениях теории динамических систем (см., например, [27–31]). Эти подходы включают поиск и анализ инвариантных объектов, их бифуркаций, методы исследования хаотической динамики с использованием показателей Ляпунова, отображений Пуанкаре и др. [32–36].

В данной статье рассматривается вихревой точечный триполь с нулевой суммарной интенсивностью, состоящий из центрального вихря (его интенсивность 2ω) и двух спутников (с интенсивностями $-\omega$). Рассматриваемая конфигурация может вращаться на месте (в симметричном случае), а может вместе с вращением перемещаться по плоскости (при нарушении симметрии). Несмотря на простоту, такая математическая модель вихревой динамики позволяет изучить многие реальные процессы и эффекты, оценить влияние на них различных возмущений и внешних воздействий. Основное внимание в работе уделяется изучению динамики пассивных частиц и переноса в зависимости от их начального положения при различных параметрах триполя, определяющих скорость перемещения конфигурации. В силу существенной нелинейности большинство решаемых задач поддается только численному анализу, который является основным инструментом исследования в статье. В силу консервативности системы при решении возникающих задач Коши в работе используются методы интегрирования высокого порядка точности, что необходимо для сохранения интегралов системы. Для качественного анализа динамики и переноса частиц применяется построение сечений Пуанкаре и анализ динамики «маркерных отрезков».

1. Простейшая математическая модель вихревого триполя

Кирхгофом [9, 37] показано, что движения N точечных вихрей на плоскости описываются следующей гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\omega_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \omega_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \omega_i \omega_j \ln(r_{ij}) \quad i = 1 \dots N. \quad (1)$$

Здесь (x_i, y_i) — координаты вихря с номером i на плоскости, $r_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, а ω_i — его интенсивность (циркуляция). Очевидно, что H — гамильтониан и первый интеграл системы (1). Интенсивности вихрей и их начальные координаты можно рассматривать как параметры системы. Начальные значения определяют значения интегралов системы точечных вихрей, а значит, инвариантные подпространства, на которых происходит динамика. Функция тока для пассивной частицы в поле скорости системы точечных вихрей имеет вид

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \ln[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2], \quad (2)$$

где (x, y) — координаты пассивной частицы на плоскости. То есть динамика частицы описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i}{2\pi} \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что воздействие на пассивную частицу системы вихрей равно сумме воздействий на неё всех вихрей, причем в бесконечно малый момент времени каждый вихрь раскручивает частицу по кругу вокруг себя со скоростью, прямо пропорциональной интенсивности и обратно пропорциональной квадрату расстояния между вихрем и частицей.

Помимо гамильтониана, система (1), в силу инвариантности относительно переноса и вращения, обладает ещё тремя первыми интегралами:

$$Q = \sum_{i=1}^N \omega_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \omega_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \omega_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (4)$$

Интеграл H выражает закон сохранения энергии взаимодействия вихрей, а интегралы (4) являются аналогами законов сохранения компонент импульса и момента импульса для точечных вихрей. Следовательно, динамика системы N вихрей для $N = 2, 3$ является интегрируемой, а для $N \geq 4$ это уже не так, и ее поведение может быть хаотическим. Неинтегрируемость системы четырёх вихрей строго доказана в работе [38]. Отметим, что при $N = 2, 3$, в то время как сама система (1) интегрируема, поведение пассивной частицы, то есть система (1)–(3) может демонстрировать хаотическую динамику.

Далее рассматривается триполь, который состоит из центрального точечного вихря C и двух его спутников S_1 и S_2 , причем интенсивности спутников имеют противоположные знаки с центром. Интерес к анализу движений вихревых триполей обусловлен тем, что они наблюдаются в природе и реализуются в физических экспериментах [1]. Такие конфигурации могут иметь малую суммарную циркуляцию, а два спутника — близкие интенсивности [2]. Мы будем рассматривать идеализацию такой структуры: предполагается, что центральный вихрь C имеет интенсивность $\omega_1 = 2\omega$, а каждый из спутников $\omega_2 = \omega_3 = -\omega$. Полагаем, что в начальный момент времени

S_1 расположен на плоскости в точке с координатами $x = 0, y = -d$, S_2 — в $x = 0, y = d$, а C — в точке $x = 0, y = \varepsilon$.

Тогда система уравнений, описывающая динамику вихревого триполя и пассивных частиц, в координатной форме примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{y_1 - y_2}{r_{12}} + \frac{y_1 - y_3}{r_{13}} \right), \quad \dot{y}_1 = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \frac{x_1 - x_3}{r_{13}} \right), \\ \dot{x}_2 = -\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{-2(y_1 - y_2)}{r_{21}} + \frac{y_2 - y_3}{r_{23}} \right), \quad \dot{y}_2 = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{-2(x_1 - x_2)}{r_{21}} + \frac{x_2 - x_3}{r_{23}} \right), \\ \dot{x}_3 = -\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{-2(y_1 - y_3)}{r_{31}} + \frac{y_3 - y_2}{r_{32}} \right), \quad \dot{y}_3 = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{-2(x_1 - x_3)}{r_{31}} + \frac{x_3 - x_2}{r_{32}} \right), \\ \dot{x} = -\frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{2(y - y_1)}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \frac{y - y_2}{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} + \frac{y - y_3}{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} \right), \\ \dot{y} = \frac{\omega}{2\pi} \left(\frac{2(x - x_1)}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + \frac{x - x_2}{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} + \frac{x - x_3}{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} \right), \end{array} \right. \quad (5)$$

где (x_1, y_1) — координаты вихря C , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) — координаты S_1 и S_2 , соответственно, а (x, y) — координаты переносимой частицы. Изучаемый точечный вихревой триполь определяют следующие начальные условия:

$$x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = \varepsilon, \quad x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = -d, \quad x_3(0) = 0, \quad y_3(0) = d. \quad (6)$$

Далее в расчетах принято $\omega = 1, d = 1$. Отметим, что ω и d можно всегда принять равными единице за счет выбора масштабов времени и пространственных координат. Таким образом, в рассматриваемой задаче (5), (6) останется лишь один параметр ε , определяющий асимметрию конфигурации.

Динамика системы трёх точечных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью достаточно хорошо изучена (см. [12, 19, 20, 39–41] и ссылки в них). В статье [19] подробно рассмотрен и частный случай системы уравнений (5). В частности, показано хорошее совпадение динамики математической модели с физическими экспериментальными наблюдениями. Следуя этой работе, представим необходимые для изучения переноса пассивной частицы факты о динамике точечного вихревого триполя при изменении параметра ε .

Для невозмущенного ($\varepsilon = 0$) симметричного триполя обе компоненты импульса $P = Q = 0$, а $I = -2\omega \neq 0$. Это означает, что центральный вихрь остается на месте, а спутники вращаются вокруг C против часовой стрелки. При $\varepsilon = 0$ известно выражение для периода вращения $T_0 = 2\pi d^2 / (3\omega)$. Когда $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$, структура теряет симметрию, но сохраняет трипольную топологию, $P = 2\omega\varepsilon \neq 0$ и $I = -2\omega(1 - \varepsilon^2) \neq 0$. Оба спутника S_1 и S_2 вращаются вокруг центрального вихря C в положительном направлении, а вся конфигурация движется на плоскости вдоль горизонтальной оси координат со средней за период T скоростью $\langle v_x \rangle$. Направление движения определяется знаком ε , при $\varepsilon > 0$ — движение вправо. При этом в подвижной системе координат $x' = x - x_1, y' = y - y_1$, где точке $(0, 0)$ соответствует положение центра триполя C , динамика триполя является периодической с периодом $T = T(\varepsilon)$. За время $0 < t < T$ изменяются расстояния $d_1 = \|C - S_1\|$ и $d_2 = \|C - S_2\|$ и угол между отрезками $[C, S_1]$ и $[C, S_2]$, но при $t = kT, k = 1, 2, \dots$ триполь возвращается в исходное положение в подвижной системе координат. В координатах (x, y) при $t = kT$ вихрь C имеет координаты $(kT \langle v_x \rangle, \varepsilon)$, а S_1 и S_2 соответственно $(kT \langle v_x \rangle, -d)$ и $(kT \langle v_x \rangle, d)$. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ (при выбранных для численного анализа значениях

параметров критическое значение $\epsilon_c \approx 0.544$) вихревая конфигурация переходит от триполя в режим диполь-монополю, когда вихрь C и один из спутников формируют движущийся диполь. В данной работе этот случай не рассматривается.

Динамику вихревого точечного триполя на плоскости (x, y) иллюстрирует рис. 1, *a*, на котором изображены траектории центра C , спутников S_1 и S_2 при $\epsilon = 0.4$ на $t \in [0, 6T]$. Кроме того, показаны положения триполя для трех моментов времени t ($t = 10.16 \approx 6T$ соответствует шести оборотам триполя), где кружок обозначает положение центра C , квадрат — спутника S_1 и ромб — S_2 . На рис. 1, *b* приведены графики периодической зависимости расстояний d_1 и d_2 от времени для $t \in [0, 4T]$. Кроме того, рис. 1, *a* демонстрирует перемещение триполя вправо вдоль оси x с некоторой скоростью $\langle v_x \rangle$. Величина $\langle v_x \rangle$ зависит от параметра ϵ и была построена численно (рис. 1, *c*). При $\epsilon < 0.2$ средняя скорость перемещения триполя по плоскости мала, $\langle v_x \rangle < 0.1$, но при $\epsilon > 0.2$ имеет место её значительный рост, и $\langle v_x \rangle$ при $\epsilon \approx \epsilon_c$ почти достигает значения 2.0. Период полного оборота триполя также зависит от параметра ϵ (рис. 1, *d*).

Цель представленного здесь исследования — изучить, как влияет параметр ϵ , а значит, и величина скорости смещения триполя $\langle v_x \rangle$ на плоскости, на свойства переноса пассивных частиц. В цитируемых выше работах [19, 20, 41] исследование влияния параметра ϵ рассматривалось, но изучение, в основном, проводилось в подвижной (с центром в C) системе координат $x' = x - x_1, y' = y - y_1$. В этом случае динамическую систему для триполя и пассивных частиц (5)

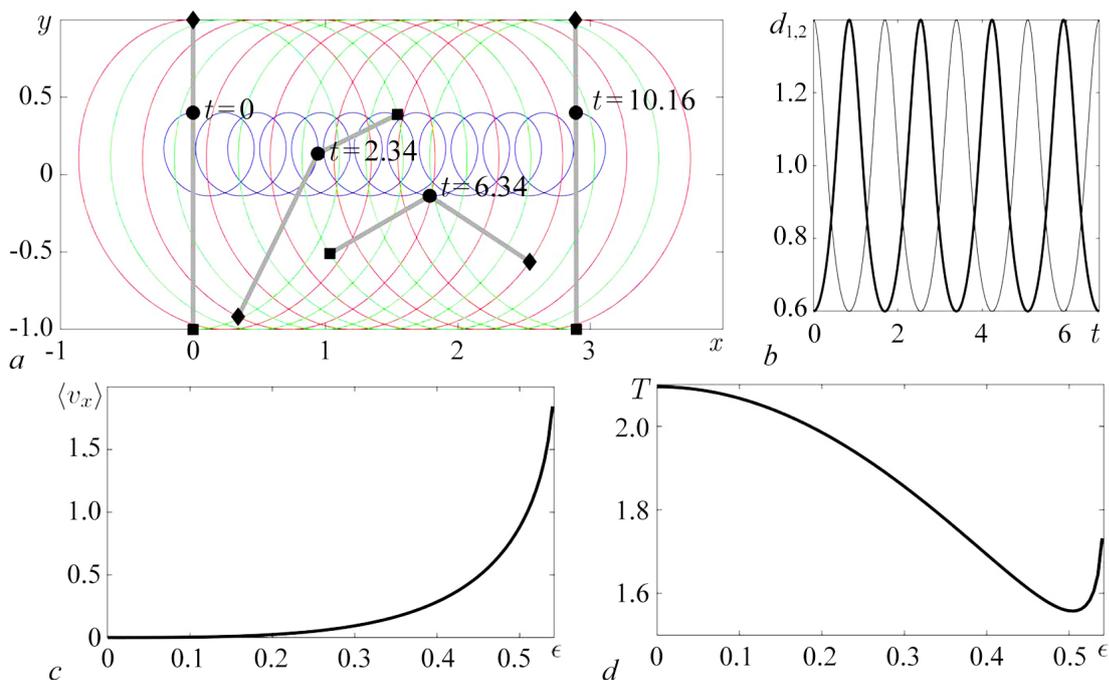


Рис. 1. *a* — Динамика триполя при $\epsilon = 0.4$. Изображены траектория центра C (синяя кривая, помечен кружком) и спутников S_1 (зеленая, квадрат) и S_2 (красная, ромб). *b* — Графики периодической зависимости расстояний d_1 (тонкая линия) и d_2 (жирная линия) от $t \in [0, 4T]$. *c* — График зависимости средней за период T скорости перемещения триполя $\langle v_x \rangle$ от параметра ϵ . *d* — График зависимости периода вращения T спутников триполя вокруг его центра от параметра ϵ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* — Tripole dynamics at $\epsilon = 0.4$. The trajectory of the center C (blue curve, circled) and satellites S_1 (green, square) and S_2 (red, rhombus) are shown. *b* — Graphs of the periodic dependence of the distances d_1 (thin line) and d_2 (thick line) on $t \in [0, 4T]$. *c* — Graph of the dependence of the tripole velocity $\langle v_x \rangle$ averaged over the period T on the ϵ parameter. *d* — Graph of the dependence of the period of rotation of the satellites of the tripole around its center on the parameter ϵ (color online)

удается привести к каноническому виду, и рассматривать с позиций КАМ-теории (положения теории см. в [42, 43] и в ссылках на литературу в этих работах). Удаётся доказать интегрируемость системы при $\varepsilon = 0$, найти особые точки, получить выражение для функции Мельникова [19], что позволяет оценить возникновение и развитие хаотических областей. Однако изучения зависимости свойств переноса частиц триполюм от скорости $\langle v_x \rangle$ на плоскости (x, y) в предшествующих работах автору обнаружить не удалось.

2. Анализ динамики частиц в поле скорости триполя

Из уравнений переноса пассивных частиц в поле скорости точечных вихрей (5) следует, что $|\dot{x}| \rightarrow 0$ и $|\dot{y}| \rightarrow 0$ при $r(x, y) \rightarrow +\infty$, где $r(x, y)$ — расстояние от частицы до C . Это означает, что перемещение пассивных частиц вдалеке от триполя практически отсутствует, и активные перемешивание и перенос частиц происходят в окрестности вихревой конфигурации. Для изучения размеров и формы области перемешивания, характера динамики частиц и других процессов сопровождающих перемещение триполя требуются дополнительные исследования. В силу нелинейности возникающих задач аналитические методы их решения отказываются, и требуется применение численных подходов.

При исследовании переноса пассивных частиц в данной работе большинство расчетов проводились на интервалах $t \in [0, 1000T]$ и больше. Такие длительные вычисления выдвигают высокие требования к выбору методов решения задачи Коши и построения отображения Пуанкаре, особенно для систем, обладающих первыми интегралами. К таким задачам относится и расчёт динамики частиц несжимаемой невязкой жидкости (см. статью [44] и ссылки в ней). Известно, что все явные интеграторы для систем обыкновенных дифференциальных уравнений не сохраняют нелинейные интегралы (величина этих нарушений определяется порядком метода), что может приводить к качественно неверным численным результатам. Возможным способом минимизации этой проблемы на больших временах является использование специальных геометрических интеграторов [45], например, симплектические методы приводят к колебаниям вычисленных величин интегралов в окрестности истинных значений. Однако такие методы являются неявными, что создаёт трудности в их реализации и рост вычислительных затрат, особенно для высоких порядков точности. Альтернативой является «силовой» подход — использование явных методов высокого порядка точности с малым шагом интегрирования, что и применяется в представленной статье. Такой подход позволяет сохранять малую погрешность в значениях интегралов на больших временах расчёта.

В работе применялись методы Рунге–Кутты 7, 8 и 9 порядков точности с автоматическим выбором шага и контролем точности с помощью «вложенных формул», см. [46]. Все расчёты и визуализация результатов проводилась в среде пакета MATLAB с использованием встроенных в пакет функций решения задачи Коши `ode78` (метод порядка 7/8) и `ode89` (порядок метода 8/9) (описание методов см. в [47]). Кроме того, использовался метод Рунге–Кутты Дормана–Принса 7/8 порядка точности [48] и его программная реализация `ode87` [49]. Этот метод был основным при численном исследовании и вычислении точек отображения Пуанкаре. В расчетах использовалась относительная погрешность $\text{rel} = 10^{-10}$, максимальный шаг $h_{\max} = 0.05$, условие принадлежности секущей Пуанкаре $|x_1 - x_2| < 10 \text{ rel}$. Шаг ограничивался с целью сокращения влияния алгоритма управления шагом интегрирования. Для уточнения точки траектории на секущей применялся метод Ньютона. Такой подход обеспечивал сохранение инвариантов задачи с необходимой высокой точностью. Во всех проведенных расчётах интегралы P и Q , см. (4), сохранялись точно, а погрешность в вычислении I и H , см. (1), не превышала 10^{-8} на интервале $t \in [0, 1000T]$. Для проверки корректности вычислений расчеты повторялись с $\text{rel} = 10^{-11}$ и с использованием интеграторов `ode78` и `ode89`. Все численные результаты воспроизводились.

2.1. Динамика пассивных частиц в подвижной системе координат (x', y') . Изучим изменения динамики системы (5) на плоскости (x', y') при изменении ε . На рис. 2 на плоскости (x', y') даны вычисленные точки отображения Пуанкаре для различных 32-х траекторий и шести значений ε . Секущая Пуанкаре задана условием $x_1 - x_2 = 0, y_2 < 0$, что соответствует полному обороту триполя (одному периоду T) при заданных параметрах. Для каждой траектории рассчитано 3500 пересечений (то есть $t \in [0, 3500 T]$). Начальные точки траекторий идентичны для всех ε .

Когда $\varepsilon = 0$, система интегрируема, $x = x', y = y'$, вся вихревая конфигурация вращается вокруг центра C , который находится в точке $x = 0, y = 0$ при всех t . На плоскости Пуанкаре вихрям триполя соответствуют эллиптические особые точки и имеются две седловые, соединенные сепаратрисами (см. рис. 2). При начальных значениях из плоскости Пуанкаре вне разделенных сепаратрисами зон, включающих эллиптические особые точки, реализуются квазипериодические движения. Им соответствуют замкнутые кривые в отображении Пуанкаре, причем все они охватывают вихревой триполь при $\varepsilon = 0$.

При $\varepsilon \neq 0$ интегрируемость и симметрия динамической системы (5) нарушается, согласно КАМ-теории, в окрестности сепаратрис возникают области хаотической динамики. При малых возмущениях, смотри случай $\varepsilon = 0.01$, ширина хаотической области мала. Кроме того, качественно изменяется топологическая структура отображения Пуанкаре в переменных (x', y') и за пределами области хаоса. Возникает дополнительная эллиптическая особая точка кратности 1 вне области

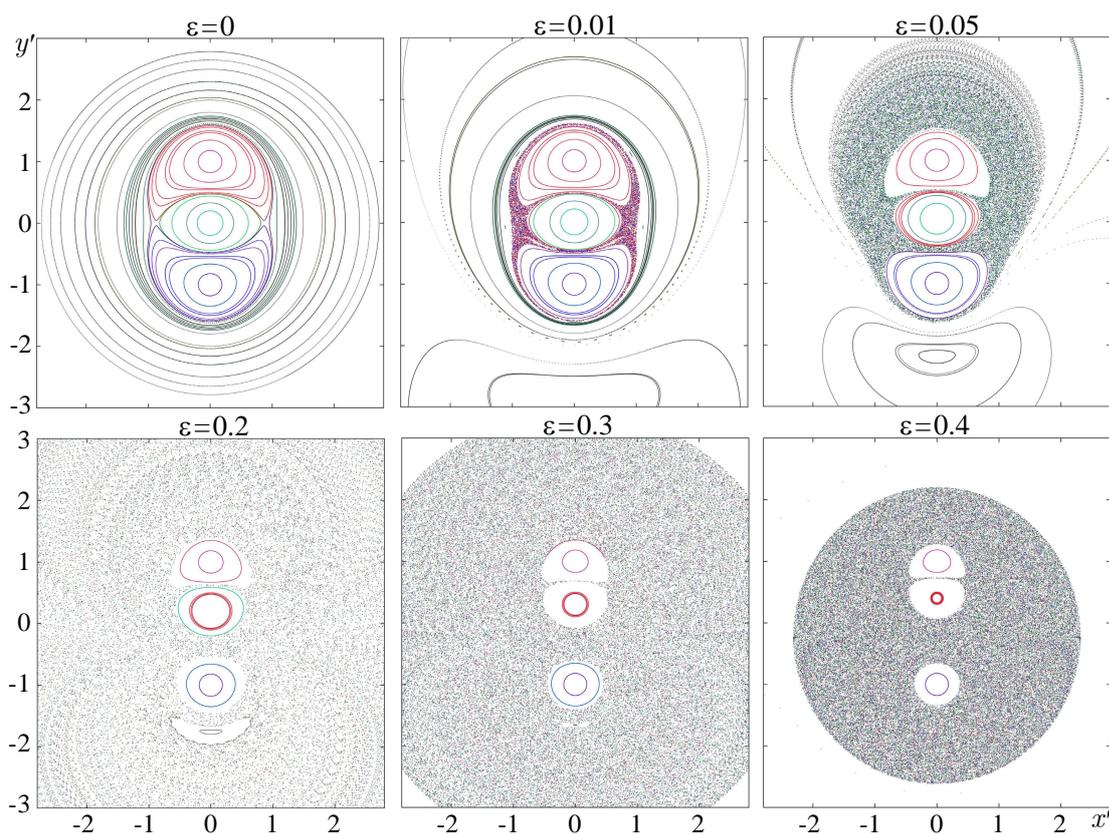


Рис. 2. Отображение Пуанкаре на секущей $x_1 - x_2 = 0, y_2 < 0$ на плоскости (x', y') для различных значений ε , рассчитано 32 траектории, каждая помечена своим цветом (цвет онлайн)

Fig. 2. Poincaré map by the section $x_1 - x_2 = 0, y_2 < 0$ on the plane (x', y') for different values of ε , calculated 32 trajectories, each marked with its own color (color online)

вихревого триполя. Квазипериодические движения вокруг этой особой точки не охватывают триполь, см. нижнюю часть рис. 2, $\epsilon = 0.01$. То есть на плоскости Пуанкаре формируются две качественно различные области, которые разделяются сепаратрисой.

При росте ϵ размер хаотической области увеличивается, смещается в полуплоскость $y' > 0$. Интенсивность перемешивания частиц зависит от положения в хаотической области, сильнее в окрестности вихрей триполя, и уменьшается при приближении к границе хаотической области. Вблизи границ хаотической области движения частиц близки к квазипериодическим на (x', y') с малым радиальным смещением по отношению к триполю. Эти эффекты демонстрирует рис. 2, $\epsilon = 0.05$. Возрастание ϵ приводит к развитию хаотической области, которая имеет максимальный размер при $\epsilon \approx 0.2$. Рост возмущения при $\epsilon > 0.2$ сопровождается увеличением скорости перемещения триполя $\langle v_x \rangle$ (см. рис. 1, c), сокращением размеров единой хаотической области (см. рис. 2, $\epsilon = 0.3$), которая приобретает форму круга с небольшими зонами регулярной динамики в окрестности вихрей триполя (см. рис. 2, $\epsilon = 0.4$). Все траектории с начальными данными вне зоны хаоса при $\epsilon > 0.3$ быстро смещаются в направлении $x' \rightarrow -\infty$.

2.2. Динамика пассивных частиц на плоскости (x, y) . Для анализа переноса частиц движущимся триполем в исходных координатах (x, y) рассмотрим изменение «маркерных отрезков» на плоскости во времени. Под маркерным отрезком $l(x_0, t, b, n)$ понимается набор из n пассивных частиц с одинаковой начальной координатой $x^{(i)} = x_0$ и координатами $y^{(i)} = -b + i h_y$, $i = 0, \dots, n$, $h_y = 2b/n$. Отслеживание трансформации маркерных отрезков при росте возмущения во времени позволяет исследовать перенос пассивных частиц в поле скорости вихревой конфигурации. В численных экспериментах в качестве характерного времени использовалась величина $T = T(\epsilon)$, соответствующая полному обороту спутников вокруг центра триполя, которая зависит от величины возмущения. Также от ϵ зависит скорость $\langle v_x \rangle$ движения триполя по плоскости (x, y) , см. предыдущий раздел и рис. 1. В представленных ниже расчётах использовались четыре маркерных отрезка $l(x_0, t, b, k)$ для $x_0 = -5, -2, 2, 5$ при $b = 6$, $k = 1000$. То есть в каждом расчёте решалась задача Коши для системы уравнений (5), состоящей из 6 уравнений, описывающих динамику точечных вихрей и $n = 1000 \times 4 \times 2 = 8000$ уравнений для частиц, задающих $l(x_0, t, 6, 1000)$, $x_0 = -5, -2, 2, 5$. Полученные результаты представлены графически, начальные позиции маркерных отрезков для всех расчетов иллюстрирует рис. 3. На рисунках частицы каждого маркерного отрезка помечены одним цветом и символом.

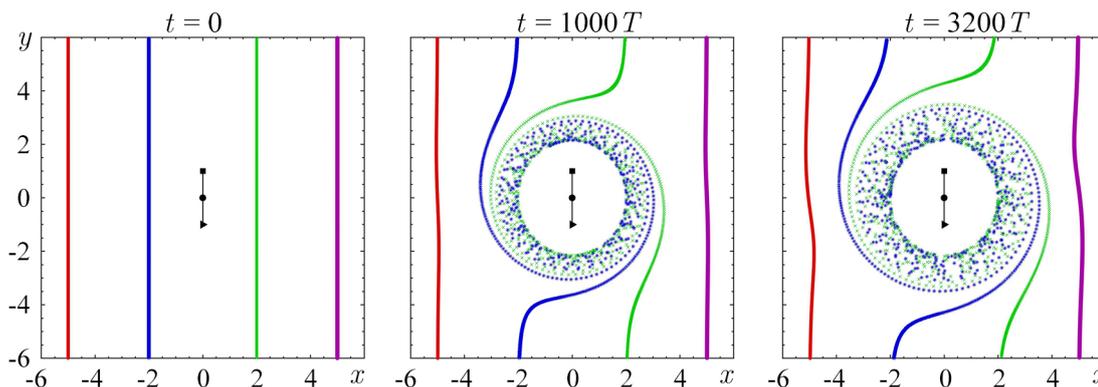


Рис. 3. Маркерные отрезки на плоскости (x, y) в начальный момент времени $t = 0$, и для $t = 1000 T$, $3200 T$, то есть после 1000 и 3200 полных оборотов триполя при $\epsilon = 0$. Символами, соединенными отрезками, изображен вихревой триполь (цвет онлайн)

Fig. 3. Marker segments on the plane (x, y) at the initial time $t = 0$, and for $t = 1000 T$, $3200 T$, i.e. after 1000 and 3200 full rotations of the tripole at $\epsilon = 0$. Symbols connected by lines depict a vortex tripole (color online)

В симметричном случае ($\varepsilon = 0$) вихри S_1 и S_2 вращаются вокруг центра C с постоянной скоростью, триполь не перемещается по плоскости, $\langle v_x \rangle = 0$. Тогда $x = x', y = y'$ и структура линий тока пассивных частиц на плоскости (x, y) описывается рис. 2. В этом случае перенос частиц является регулярным с высокой скоростью в окрестности вихревой конфигурации, и затухающим при удалении от неё. Это иллюстрирует динамика маркерных отрезков, изображенная на рис. 3. Удаленные отрезки $l(-5, t, 6, 1000)$ и $l(5, t, 6, 1000)$ практически не затрагиваются триполем на временах порядка сотен оборотов, и только на временах порядка $1000 T$ и выше наблюдается их небольшая деформация. Для отрезков $l(-2, t, 6, 1000)$ и $l(2, t, 6, 1000)$ ситуация иная — их середины попадают в область быстрых движений в окрестности триполя, растягиваются и трансформируются, принадлежащие им частицы вращаются вокруг триполя. Концы же маркерных отрезков практически не меняют своего положения, так как находятся в областях с малой скоростью $\dot{x}^{(i)}, \dot{y}^{(i)}$.

При $\varepsilon > 0$ нарушается симметрия триполя, возникает движение вихревой конфигурации со скоростью $\langle v_x \rangle$ вдоль оси абсцисс на плоскости (x, y) , качественно меняется структура фазового пространства динамической системы для пассивных частиц (5) в координатах (x', y') , см. предыдущий подраздел и рис. 2. Изменение процессов переноса при росте ε хорошо иллюстрируют трансформации маркерных отрезков. При малых $\varepsilon > 0$ $\langle v_x \rangle \ll 1$ движение триполя медленное, но структура переноса принципиально отличается от симметричного случая $\varepsilon = 0$. На рис. 4 приведены результаты расчетов для $\varepsilon = 0.05$, когда $\langle v_x \rangle = 0.0003$, $T = 2.0874$. Видно, что между триполем и возникшей застойной зоной (с координатой центра $y \approx -2$) возникает область быстрого перемещения частиц из области слева от триполя в правую (см. рис. 4, $t = 20 T, 200 T$). На больших временах, соответствующих сотням оборотов триполя, оба маркерных отрезка

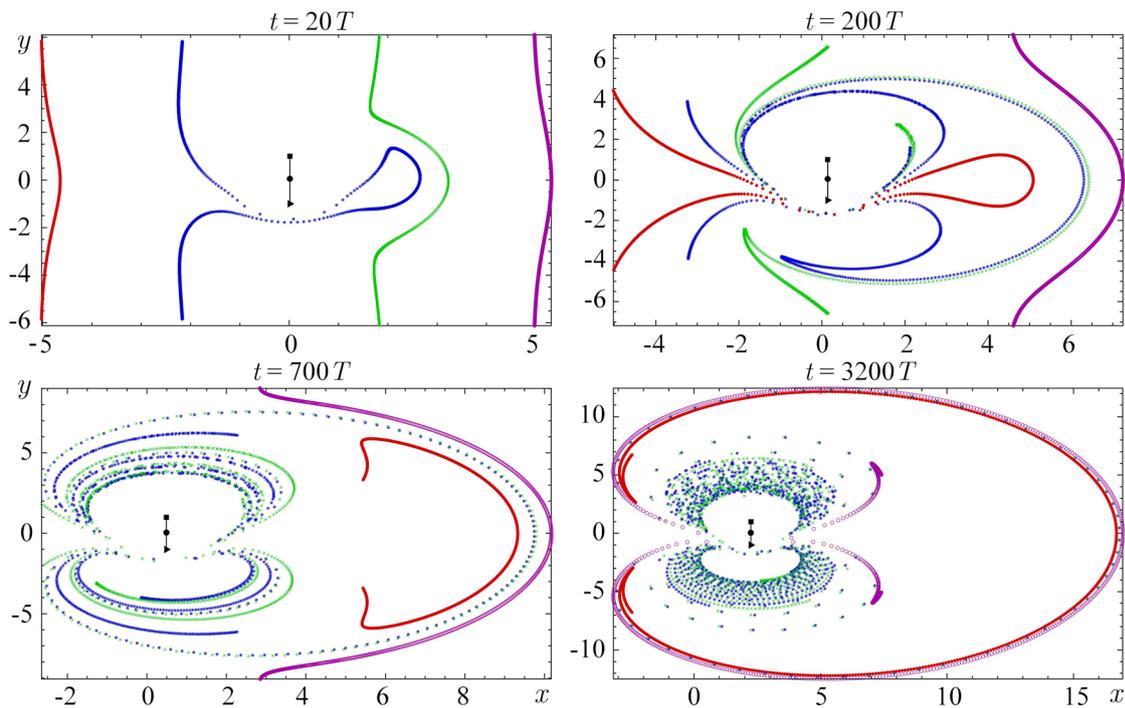


Рис. 4. Положение частиц маркерных отрезков $l(x_0, t, 6, 1000)$ для $x_0 = -5, -2, 2, 5$ при $\varepsilon = 0.05$ в различные моменты времени (цвет онлайн)

Fig. 4. The position of particles of marker segments $l(x_0, t, 6, 1000)$ for $x_0 = -5, -2, 2, 5$ at $\varepsilon = 0.05$ at different times (color online)

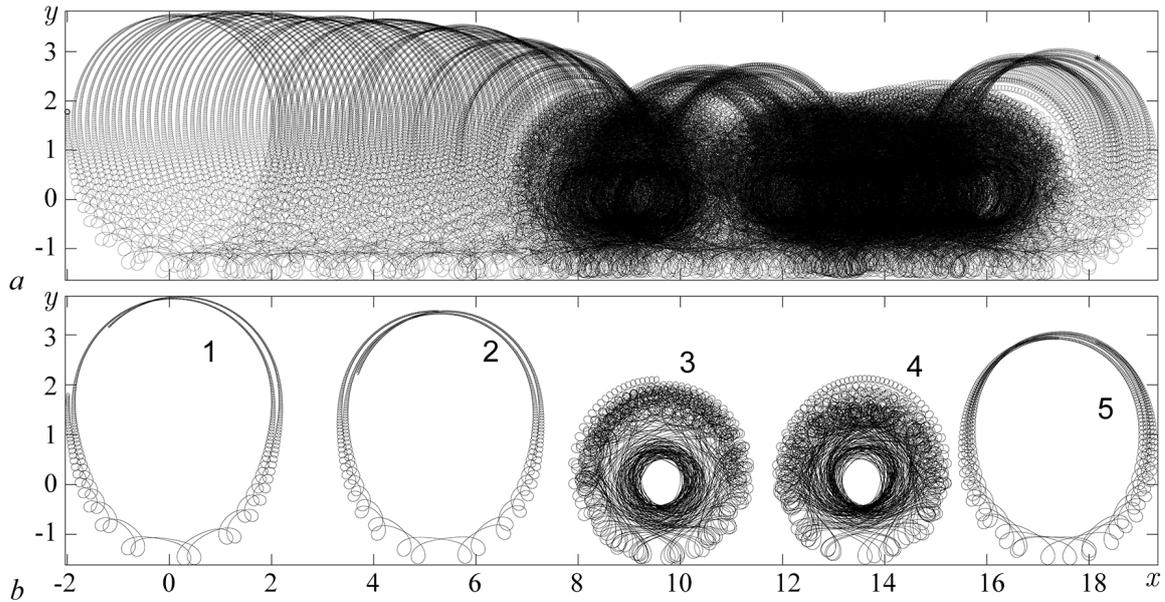


Рис. 5. Траектория одной из пассивных частиц на плоскости (x, y) при $\varepsilon = 0.05$. a – На всем временном интервале $t \in [0, 25000 T]$; b – пять участков траектории для: 1 – $t \in [0, 350 T]$, 2 – $t \in [7450 T, 7800 T]$, 3 – $t \in [13500 T, 13850 T]$, 4 – $t \in [19200 T, 19550 T]$, 5 – $t \in [24650 T, 25000 T]$

Fig. 5. Trajectory of one of the passive particles on the (x, y) plane at $\varepsilon = 0.05$. a – Over the entire time interval $t \in [0, 25000 T]$; b – five sections of the trajectory for: 1 – $t \in [0, 350 T]$, 2 – $t \in [7450 T, 7800 T]$, 3 – $t \in [13500 T, 13850 T]$, 4 – $t \in [19200 T, 19550 T]$, 5 – $t \in [24650 T, 25000 T]$

с $x_0 < 0$ полностью перемещаются вправо от триполя ($t = 700 T$). Часть частиц отрезков с $x_0 > 0$ (с координатой y на уровне вихрей) растягиваются и смещаются по движению вихревой конфигурации, а остальные – против движения (см. рис. 4, $t = 10 T, 350 T$). На больших временах (более нескольких тысяч оборотов триполя) эти частицы попадают в полуплоскость $x < x_1(t)$, медленно стремятся к области перетока частиц, и переносятся через область быстрого перемещения в полуплоскость $x > x_1(t)$. Отметим, что динамика каждой частицы маркерных отрезков оказывается не регулярной (то есть, все они попадают в область хаотической динамики) и состоит из медленных и быстрых движений. Медленные состоят в близких к квазипериодическим движениям вдалеке от триполя, причём при этом расстояние до триполя может как увеличиваться, так и уменьшаться. Быстрые движения происходят в окрестности точечных вихрей, и заключаются в их переносе из области $x < x_1(t)$ в $x > x_1(t)$ или в хаотических движениях вблизи вихрей триполя. Это иллюстрирует траектория одной из частиц, построенная для $t \in [0, 25000 T]$, и изображенная на рис. 5. Видно, что она состоит из качественно различных участков. Так, кривые, помеченные символами 1, 2, 5 соответствуют медленной нерегулярной динамике, а 3, 4 – хаотическим движениям в окрестности триполя. Таким образом, при $\varepsilon = 0.05$ возникает обширная область хаотической динамики, причем она состоит из двух качественно различных подобластей – активного и медленного перемешивания. Область хаотической динамики на плоскости (x', y') дана на рис. 2, $\varepsilon = 0.05$.

Увеличение ε приводит к росту зоны хаотической динамики и расширению подобласти активного перемешивания частиц. Эти процессы можно видеть на рис. 6 где даны положения частиц маркерных отрезков для различных значений T и $\varepsilon = 0.1$. При этом значении параметра скорость перемещения триполя на порядок больше, чем при $\varepsilon = 0.05$, но остается малой $\langle v_x \rangle = 0.0027$, время полного оборота триполя $T = 2.0667$. И в этом случае маркерные отрезки с $x_0 < 0$ целиком переходят в область $x > x_1(t)$ после приблизительно 500 оборотов триполя, но при этом частицы

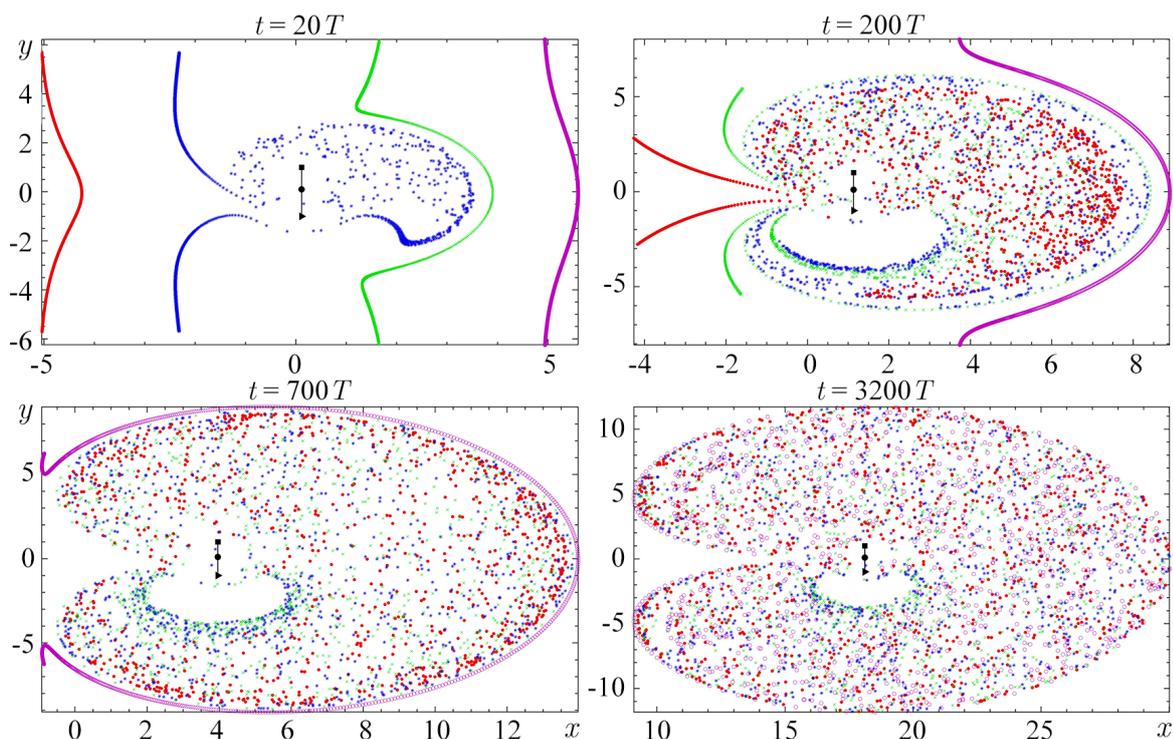


Рис. 6. Положение частиц четырех маркерных отрезков при $\varepsilon = 0.1$ в различные моменты времени (цвет онлайн)
 Fig. 6. The position of the particles of the four marker segments at $\varepsilon = 0.1$ at different times (color online)

сразу попадают в область сильного перемешивания в окрестности триполя, см. $t = 20T, 200T$. При $t = 3200T$ частицы всех четырёх маркерных отрезков перемешались между собой и находятся в области хаотической динамики. То есть при такой геометрии триполя вся вихревая структура перемещается с малой скоростью вдоль оси x , затягивая в область сильного перемешивания частицы из широкой области вокруг себя. Кроме того, все частицы маркерных отрезков переносятся на достаточно большое расстояние вместе с триполем (см. рис. 6, $t = 3200T$).

Дальнейший рост возмущения симметрии триполя приводит к качественному изменению структуры переноса маркерных отрезков. На рис. 7 приведены результаты вычислений при $\varepsilon = 0.2$.

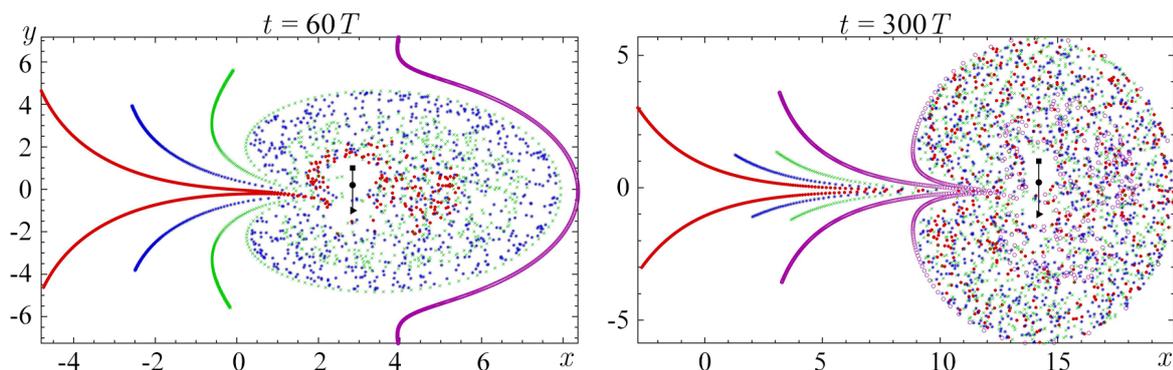


Рис. 7. Положение частиц четырех маркерных отрезков при $\varepsilon = 0.2$ в различные моменты времени (цвет онлайн)
 Fig. 7. The position of the particles of the four marker segments at $\varepsilon = 0.2$ at different times (color online)

При этом значении параметра скорость перемещения $\langle v_x \rangle = 0.0238$, то есть выросла ещё почти на порядок, а период уменьшился, $T = 1.985$. Принципиальное изменение переноса частиц состоит в том, что при такой скорости $\langle v_x \rangle$ не все частицы маркерных отрезков попадают в окрестность триполя, и остаются в области $x < x_1(t)$, так как скорость их перемещения оказывается меньше чем $\langle v_x \rangle$, и уменьшается с ростом t . Остальные частицы попадают в область хаоса, как и в предыдущих случаях. Зона хаотической динамики смещается вместе с вихревой конфигурацией, в ней присутствуют частицы всех четырёх маркерных отрезков.

Последующее увеличение ϵ приводит к существенному росту скорости $\langle v_x \rangle$ перемещения вихревой конфигурации (см. рис. 1, *c*), ускорению вращения (см. рис. 1, *d*), и уменьшению области хаоса на плоскости (x', y') (см. рис. 2 при $\epsilon = 0.3, 0.4$). Это радикально меняет динамику пассивных частиц и их перенос в поле скорости триполя. На рис. 8 в одинаковых осях координат на плоскости (x, y) даны положения частиц маркерных отрезков в четыре момента времени при $\epsilon = 0.4$ ($\langle v_x \rangle = 0.2846$, $T = 1.6931$). В этом случае триполь захватывает часть частиц маркерных отрезков $l(-2, t, 6, 1000)$ и $l(2, t, 6, 1000)$, и они попадают в область хаоса. Остальные частицы этих отрезков на первом этапе динамики смещаются, а с удалением триполя их скорости стремятся к нулю, и частицы останавливаются. Все маркерные частицы $l(-5, t, 6, 1000)$ остаются недалеко от начального положения. Отрезок $l(5, t, 6, 1000)$ на первом этапе растягивается, затем триполь «проходит сквозь» этот маркерный отрезок, и с удалением триполя, большая часть его частиц (а возможно, и все) останавливается. На всех рассмотренных в численном эксперименте временах $t \in [0, 1000T]$ в области хаоса находятся только частицы отрезков $l(-2, t, 6, 1000)$ и $l(2, t, 6, 1000)$. Это даёт основание предположить, что при движении с достаточно большой скоростью вихревой триполь переносит частицы из окрестности начального положения, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования вдоль оси x , частицы впереди его движения «обтекают» хаотическую область.

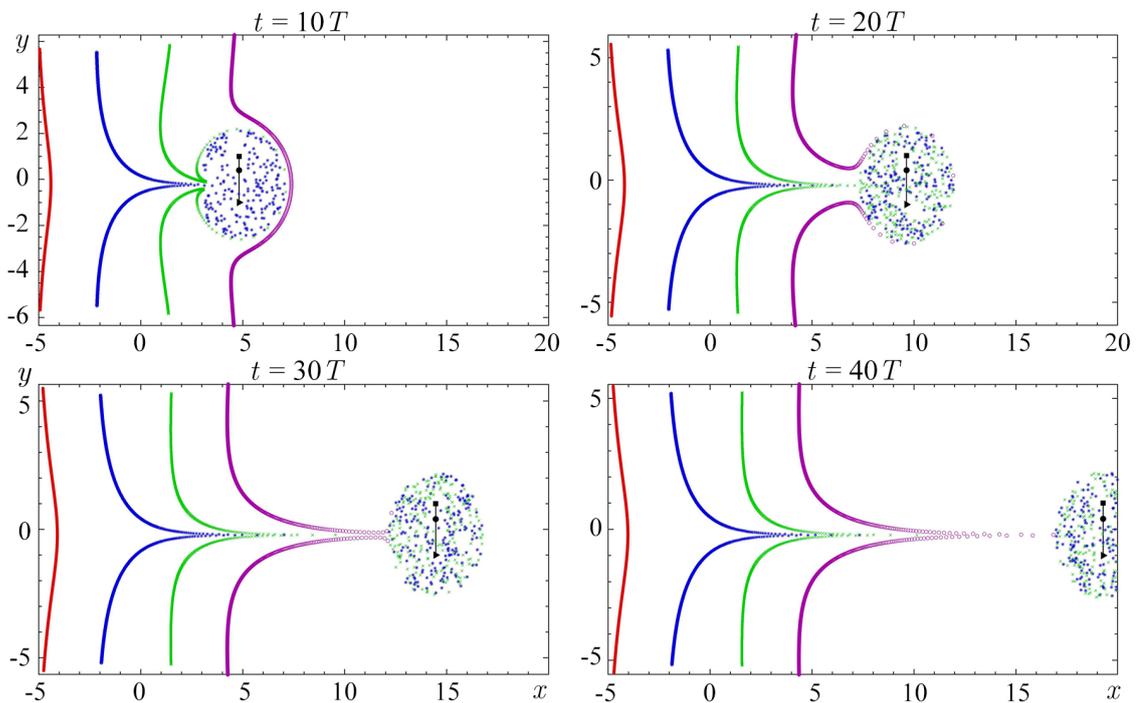


Рис. 8. Положение частиц четырех маркерных отрезков при $\epsilon = 0.4$ в различные моменты времени (цвет онлайн)

Fig. 8. The position of the particles of the four marker segments at $\epsilon = 0.4$ at different times (color online)

Заключение

В статье изучен перенос пассивных частиц в поле скорости вихревого триполю. Для описания вихревой структуры использована простейшая классическая математическая модель — система точечных вихрей. Под триполем понимается конфигурация, состоящая из центрального вихря и двух спутников, причем интенсивности центра и спутников противоположны по знаку, все три вихря расположены в начальный момент на одной прямой, центр находится между спутниками. В работе рассмотрение ограничено частным случаем триполя с нулевой суммарной интенсивностью, когда модуль интенсивности центра в два раза больше, чем модули интенсивности каждого из спутников. В симметричном случае (когда расстояния от центра до спутников в начальный момент одинаковы) центр такой конфигурации остаётся на месте, а спутники вращаются вокруг центра. При нарушении симметрии (расстояния между спутниками и центром различны) возникает движение всей конфигурации по плоскости, и чем больше разница расстояний, тем больше скорость перемещения. Проведен анализ влияния величины возмущения симметрии триполя, а значит, и скорости его перемещения, на процессы переноса пассивных частиц.

Математически модель формулируется в виде системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром — величиной возмущения триполя. Исследование проводилось численно с использованием интеграторов высокого порядка точности и алгоритмов, основанных на подходах теории динамических систем, включая построение отображения Пуанкаре и анализ трансформации «маркерных отрезков», которые представляют собой набор пассивных частиц, расположенных на отрезке в начальный момент. Расчеты проводились на больших временах, соответствующих сотням и тысячам оборотов триполя вокруг его центра.

В результате численного исследования установлено, что перенос пассивных частиц принципиально различен при малой и большой скоростях движения триполя по плоскости. Когда скорость мала (при малых возмущениях триполя), в окрестности вихревой конфигурации возникает обширная область хаотической динамики, которая состоит из двух качественно различных подобластей — активного и медленного перемешивания. Вся область медленно смещается вместе с триполем, а триполь выступает в качестве «смесителя», перемещающего и перемешивающего частицы из левой от себя области в правую, причем этот процесс захватывает большую площадь на плоскости. При достаточно большой скорости вихревого триполя область хаотической динамики существенно меньше, она полностью состоит из области активного перемешивания. В этом случае вихревая конфигурация является «перевозчиком», который перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования. В промежуточных ситуациях в разной степени, что определяется параметром возмущения, реализуются оба процесса. Естественно предположить, что и реальные трипольные вихревые конфигурации жидкостей и газов могут демонстрировать аналогичные зависимости свойств переноса от их геометрии и скорости перемещения.

Список литературы

1. *van Heijst G. J. F., Kloosterziel R. C.* Tripolar vortices in a rotating fluid // *Nature*. 1989. Vol. 338, no. 6216. P. 569–571. DOI: 10.1038/338569a0.
2. *Kloosterziel R. C., van Heijst G. J. F.* An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid // *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 223. P. 1–24. DOI: 10.1017/S0022112091001301.
3. *Carnevale G. F., Kloosterziel R. C.* Emergence and evolution of triangular vortices // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 259. P. 305–331. DOI: 10.1017/S0022112094000157.
4. *Trieling R. R., van Heijst G. J. F., Kizner Z.* Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid // *Physics of Fluids*. 2010. Vol. 22, no. 9. P. 094104. DOI: 10.1063/1.3481797.
5. *Rostami M., Zeitlin V.* Evolution of double-eye wall hurricanes and emergence of complex tripolar

- end states in moist-convective rotating shallow water model // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34, no. 6. P. 066602. DOI: 10.1063/5.0096554.
6. *Carton X., Legras B.* The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 267. P. 53–82. DOI: 10.1017/S0022112094001114.
 7. *Kizner Z., Khvoles R.* The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions // *Phys. Rev. E*. 2004. Vol. 70, no. 1. P. 016307. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016307.
 8. *Víúdez A.* A stable tripole vortex model in two-dimensional Euler flows // *J. Fluid Mech.* 2019. Vol. 878. P. R5. DOI: 10.1017/jfm.2019.730.
 9. *Курхгоф Г.* Механика: Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 404 с.
 10. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.
 11. *Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1858. Bd. 55. S. 25–55. DOI: 10.1515/crll.1858.55.25.
 12. *Aref H.* Motion of three vortices // *Physics of Fluids*. 1979. Vol. 22, no. 3. P. 393–400. DOI: 10.1063/1.862605.
 13. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Васькина А. В.* Новые относительные равновесия в системе трех точечных вихрей в круговой области и их устойчивость // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 1. С. 119–138. DOI: 10.20537/nd1101006.
 14. *Kuznetsov L., Zaslavsky G. M.* Passive particle transport in three-vortex flow // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 61, no. 4. P. 3777–3792. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3777.
 15. *Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. M.* Motion of three vortices near collapse // *Physics of Fluids*. 2000. Vol. 12, no. 8. P. 1911–1927. DOI: 10.1063/1.870440.
 16. *Yim H., Kim S.-C., Sohn S.-I.* Motion of three geostrophic Bessel vortices // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2022. Vol. 441. P. 133509. DOI: 10.1016/j.physd.2022.133509.
 17. *Gröbli W.* Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // *Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch.* 1877. Bd. 22. S. 129–165.
 18. *Новиков Е. А.* Динамика и статистика системы вихрей // *ЖЭТФ*. 1975. Т. 68, № 5. С. 1868–1882.
 19. *Velasco Fuentes O. U., van Heijst G. J. F., van Lipzig N. P. M.* Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 307. P. 11–41. DOI: 10.1017/S002211209600002X.
 20. *Гудименко А. И., Захаренко А. Д.* Движение трех вихрей с нулевой суммарной интенсивностью // *Прикладная механика и техническая физика*. 2010. Т. 51, № 3. С. 55–65.
 21. *Aref H.* Stirring by chaotic advection // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 143. P. 1–21. DOI: 10.1017/S0022112084001233.
 22. *Govorukhin V. N., Morgulis A., Yudovich V. I., Zaslavsky G. M.* Chaotic advection in compressible helical flow // *Phys. Rev. E*. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.
 23. *Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М.* Основные принципы и модели динамической адвекции // *Доклады Академии наук*. 2010. Т. 432, № 1. С. 41–44.
 24. *Ryzhov E. A., Koshel K. V.* Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow // *Chaos*. 2015. Vol. 25, no. 10. P. 103108. DOI: 10.1063/1.4930897.
 25. *Koshel K. V., Sokolovskiy M. A., Davies P. A.* Chaotic advection and nonlinear resonances in an oceanic flow above submerged obstacle // *Fluid Dynamics Research*. 2008. Vol. 40, no. 10. P. 695–736. DOI: 10.1016/j.fluiddyn.2008.03.001.
 26. *Aref H., Blake J. R., Budišić M., Cardoso S. S. S., Cartwright J. H. E., Clercx H. J. H., El Omari K., Feudel U., Golestanian R., Goullart E., van Heijst G. F., Krasnopolskaya T. S., Le Guer Y., MacKay R. S., Meleshko V. V., Metcalfe G., Mezić I., De Moura A. P. S., Piro O., Speetjens M. F. M., Sturman R., Thiffeault J.-L., Tuvai I.* Frontiers of chaotic advection // *Rev. Mod. Phys.* 2017. Vol. 89, no. 2. P. 025007. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.025007.

27. *Говорухин В. Н.* Численное исследование динамической системы, порождаемой САВС векторным полем // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 6. С. 633–642. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642.
28. *Петровская Н. В.* Конечномерные модели динамики вихревых течений идеальной жидкости в квадратной области // Известия вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 6. С. 159–172. DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-159-172.
29. *Delbende I., Selçuk C., Rossi M.* Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach // Phys. Rev. Fluids. 2021. Vol. 6, no. 8. P. 084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701.
30. *Sengupta T. K., Singh N., Suman V. K.* Dynamical system approach to instability of flow past a circular cylinder // J. Fluid Mech. 2010. Vol. 656. P. 82–115. DOI: 10.1017/S0022112010001035.
31. *Prants S. V.* Dynamical systems theory methods to study mixing and transport in the ocean // Physica Scripta. 2013. Vol. 87, no. 3. P. 038115. DOI: 10.1088/0031-8949/87/03/038115.
32. *Ryzhov E. A., Koshel K. V., Carton X. J.* Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow // European Journal of Mechanics - B/Fluids. 2012. Vol. 34. P. 121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005.
33. *Говорухин В. Н.* Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 8. С. 1491–1505. DOI: 10.7868/S004446691608007X.
34. *Говорухин В. Н., Филимонова А. М.* Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 4. С. 367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
35. *Govorukhin V. N.* An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2023. Vol. 95, no. 4. P. 579–602. DOI: 10.1002/flid.5163.
36. *Metcalf G., Lester D., Trefry M.* A primer on the dynamical systems approach to transport in porous media // Transport in Porous Media. 2023. Vol. 146, no. 1–2. P. 55–84. DOI: 10.1007/s11242-022-01811-6.
37. *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Математические методы динамики вихревых структур. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
38. *Зиглин С. Л.* Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 250, № 6. С. 1296–1300.
39. *Aref H.* Stability of relative equilibria of three vortices // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21, no. 9. P. 094101. DOI: 10.1063/1.3216063.
40. *Kizner Z.* Stability of point-vortex multipoles revisited // Physics of Fluids. 2011. Vol. 23, no. 6. P. 064104. DOI: 10.1063/1.3596270.
41. *Rott N.* Three-vortex motion with zero total circulation // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1989. Vol. 40, no. 4. P. 473–494. DOI: 10.1007/BF00944801.
42. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. С. 5–290.
43. *Де Ла Яве Р.* Введение в КАМ-теорию. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 176 с.
44. *Говорухин В. Н.* О выборе метода интегрирования уравнений движения множества жидких частиц // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 4. С. 697–710. DOI: 10.7868/S0044466914040073.
45. *Hairer E., Wanner G., Lubich C.* Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. Vol. 31 of Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. 515 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05018-7.

46. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
47. Verner J. H. Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants // Numerical Algorithms. 2010. Vol. 53, no. 2–3. P. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3.
48. Prince P. J., Dormand J. R. High order embedded Runge-Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1981. Vol. 7, no. 1. P. 67–75. DOI: 10.1016/0771-050X(81)90010-3.
49. Govorukhin V. ode87 Integrator [Electronic resource] // MATLAB Central File Exchange. Retrieved February 28, 2023. Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>.

References

1. van Heijst GJF, Kloosterziel RC. Tripolar vortices in a rotating fluid. *Nature*. 1989;338(6216):569–571. DOI: 10.1038/338569a0.
2. Kloosterziel RC, van Heijst GJF. An experimental study of unstable barotropic vortices in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* 1991;223:1–24. DOI: 10.1017/S0022112091001301.
3. Carnevale GF, Kloosterziel RC. Emergence and evolution of triangular vortices. *J. Fluid Mech.* 1994;259:305–331. DOI: 10.1017/S0022112094000157.
4. Trieling RR, van Heijst GJF, Kizner Z. Laboratory experiments on multipolar vortices in a rotating fluid. *Physics of Fluids*. 2010;22(9):094104. DOI: 10.1063/1.3481797.
5. Rostami M, Zeitlin V. Evolution of double-eye wall hurricanes and emergence of complex tripolar end states in moist-convective rotating shallow water model. *Physics of Fluids*. 2022;34(6):066602. DOI: 10.1063/5.0096554.
6. Carton X, Legras B. The life-cycle of tripoles in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.* 1994;267:53–82. DOI: 10.1017/S0022112094001114.
7. Kizner Z, Khvoles R. The tripole vortex: Experimental evidence and explicit solutions. *Phys. Rev. E*. 2004;70(1):016307. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.016307.
8. Viúdez A. A stable tripole vortex model in two-dimensional Euler flows. *J. Fluid Mech.* 2019;878:R5. DOI: 10.1017/jfm.2019.730.
9. Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig: Teubner; 1876. 489 s. (in German).
10. Batchelor GK. An Introduction to Fluid Dynamics. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. 658 p. DOI: 10.1017/CBO9780511800955.
11. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1858;55:25–55 (in German). DOI: 10.1515/crll.1858.55.25.
12. Aref H. Motion of three vortices. *Physics of Fluids*. 1979;22(3):393–400. DOI: 10.1063/1.862605.
13. Borisov AV, Mamaev IS, Vaskina AV. Stability of new relative equilibria of the system of three point vortices in a circular domain. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2011;7(1):119–138 (in Russian). DOI: 10.20537/nd1101006.
14. Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Passive particle transport in three-vortex flow. *Phys. Rev. E*. 2000;61(4):3777–3792. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3777.
15. Leoncini X, Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Motion of three vortices near collapse. *Physics of Fluids*. 2000;12(8):1911–1927. DOI: 10.1063/1.870440.
16. Yim H, Kim SC, Sohn SI. Motion of three geostrophic Bessel vortices. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2022;441:133509. DOI: 10.1016/j.physd.2022.133509.
17. Gröbli W. Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. *Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch.* 1877;22:129–165 (in German).

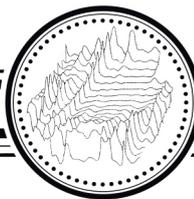
18. Novikov EA. Dynamics and statistics of a system of vortices. *Sov. Phys. JETP*. 1975;41(5): 937–943.
19. Velasco Fuentes OU, van Heijst GJF, van Lipzig NPM. Unsteady behaviour of a topography-modulated tripole. *J. Fluid Mech.* 1996;307:11–41. DOI: 10.1017/S002211209600002X.
20. Gudimenko AI, Zakharenko AD. Three-vortex motion with zero total circulation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2010;51(3):343–352. DOI: 10.1007/s10808-010-0047-5.
21. Aref H. Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.* 1984;143:1–21. DOI: 10.1017/S0022112084001233.
22. Govorukhin VN, Morgulis A, Yudovich VI, Zaslavsky GM. Chaotic advection in compressible helical flow. *Phys. Rev. E*. 1999;60(3):2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.
23. Borisov AV, Mamaev IS, Ramodanov SM. Basic principles and models of dynamic advection. *Dokl. Phys.* 2010;55(5):223–227. DOI: 10.1134/S1028335810050058.
24. Ryzhov EA, Koshel KV. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow. *Chaos*. 2015;25(10):103108. DOI: 10.1063/1.4930897.
25. Koshel KV, Sokolovskiy MA, Davies PA. Chaotic advection and nonlinear resonances in an oceanic flow above submerged obstacle. *Fluid Dynamics Research*. 2008;40(10):695–736. DOI: 10.1016/j.fluiddyn.2008.03.001.
26. Aref H, Blake JR, Budišić M, Cardoso SSS, Cartwright JHE, Clercx HJH, El Omari K, Feudel U, Golestanian R, Gouillart E, van Heijst GF, Krasnopolskaya TS, Le Guer Y, MacKay RS, Meleshko VV, Metcalfe G, Mezić I, De Moura APS, Piro O, Speetjens MFM, Sturman R, Thiffeault JL, Tuval I. Frontiers of chaotic advection. *Rev. Mod. Phys.* 2017;89(2):025007. DOI: 10.1103/RevModPhys.89.025007.
27. Govorukhin VN. Numerical study of dynamical system generated by CAB vector field. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2020;28(6):633–642 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-633-642.
28. Petrovskaja NV. Low-order dynamical models for vortical flows of inviscid fluid in square area. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2009;17(6):159–172 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2009-17-6-159-172.
29. Delbende I, Selçuk C, Rossi M. Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach. *Phys. Rev. Fluids*. 2021;6(8):084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701.
30. Sengupta TK, Singh N, Suman VK. Dynamical system approach to instability of flow past a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* 2010;656:82–115. DOI: 10.1017/S0022112010001035.
31. Prants SV. Dynamical systems theory methods to study mixing and transport in the ocean. *Physica Scripta*. 2013;87(3):038115. DOI: 10.1088/0031-8949/87/03/038115.
32. Ryzhov EA, Koshel KV, Carton XJ. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2012;34:121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005.
33. Govorukhin VN. Numerical analysis of the dynamics of distributed vortex configurations. *Comput. Math. Math. Phys.* 2016;56(8):1474–1487. DOI: 10.1134/S0965542516080078.
34. Govorukhin VN, Filimonova AM. Analysis of the structure of vortex planar flows and their changes with time. *Computational Continuum Mechanics*. 2021;14(4):367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
35. Govorukhin VN. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2023;95(4):579–602. DOI: 10.1002/fld.5163.
36. Metcalfe G, Lester D, Trefry M. A primer on the dynamical systems approach to transport in porous media. *Transport in Porous Media*. 2023;146(1–2):55–84. DOI: 10.1007/s11242-022-01811-6.

37. Borisov AV, Mamaev IS. *Mathematical Methods in the Dynamics of Vortex Structures*. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science; 2005. 368 p. (in Russian).
38. Ziglin SL. Nonintegrability of a problem on the motion of four point vortices. *Sov. Math. Dokl.* 1980;21:296–299.
39. Aref H. Stability of relative equilibria of three vortices. *Physics of Fluids*. 2009;21(9):094101. DOI: 10.1063/1.3216063.
40. Kizner Z. Stability of point-vortex multipoles revisited. *Physics of Fluids*. 2011;23(6):064104. DOI: 10.1063/1.3596270.
41. Rott N. Three-vortex motion with zero total circulation. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. 1989;40(4):473–494. DOI: 10.1007/BF00944801.
42. Arnold VI, Kozlov VV, Neishtadt AI. *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. 2nd edition. Berlin, Heidelberg: Springer; 1997. 294 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61237-4.
43. de la Llave R. A tutorial on KAM theory. In: Katok A, de la Llave R, Pesin Y, Weiss H, editors. *Smooth Ergodic Theory and Its Applications*. Rhode: American Mathematical Society; 2001. 133 p. DOI: 10.1090/pspum/069/1858536.
44. Govorukhin VN. On the choice of a method for integrating the equations of motion of a set of fluid particles. *Comput. Math. Math. Phys.* 2014;54(4):706–718. DOI: 10.1134/S0965542514040071.
45. Hairer E, Wanner G, Lubich C. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Vol. 31 of Springer Series in Computational Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer; 2002. 515 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05018-7.
46. Hairer E, Nørsett SP, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer; 1987. 482 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12607-3.
47. Verner JH. Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants. *Numerical Algorithms*. 2010;53(2–3):383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3.
48. Prince PJ, Dormand JR. High order embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1981;7(1):67–75. DOI: 10.1016/0771-050X(81)90010-3.
49. Govorukhin V. ode87 Integrator [Electronic resource]. MATLAB Central File Exchange. Retrieved February 28, 2023. Available from: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>.



Говорухин Василий Николаевич — родился в Ростове-на-Дону (1962). Окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1984). Защитил докторскую (2021) диссертацию в области численного исследования вихревых и конвективных течений жидкости. Опубликовал более 70 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает профессором кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
 E-mail: vngovoruhin@sfnu.ru
 ORCID: 0000-0001-8459-7841
 AuthorID (eLibrary.Ru): 13438



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 57.087

DOI: 10.18500/0869-6632-003041
EDN: RALPKR

Применение совместного спектра сингулярностей для анализа кооперативной динамики сложных систем

Г. А. Гуйо, А. Н. Павлов✉

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: guyo199814@gmail.com, ✉pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступила в редакцию 23.01.2023, принята к публикации 4.04.2023,
опубликована онлайн 21.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Целью данной работы является обобщение на случай кооперативной динамики взаимодействующих систем метода максимумов модулей вейвлет-преобразования и введение в рассмотрение совместного спектра сингулярностей. Методом исследования является основанный на вейвлетах мультифрактальный формализм, обобщенная версия которого применяется для количественного описания эффекта синхронизации хаоса в динамике модельных систем. Рассматриваются модели связанных систем Рёсслера и парных нейронов. В результате проведенных исследований отмечены основные изменения совместных спектров сингулярностей при переходе от синхронных колебаний к несинхронным в первой модели и к режиму частичной синхронизации во второй. Заключение по итогам проведенного исследования: предложенный подход может найти применение в исследованиях кооперативной динамики систем различной природы.

Ключевые слова: мультифрактальный формализм, совместный спектр сингулярностей, синхронизация колебаний, вейвлет-преобразование.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-22-00065).

Для цитирования: Гуйо Г. А., Павлов А. Н. Применение совместного спектра сингулярностей для анализа кооперативной динамики сложных систем // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 305–315. DOI: 10.18500/0869-6632-003041. EDN: RALPKR

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Application of joint singularity spectrum to analyze cooperative dynamics of complex systems

G. A. Guyo, A. N. Pavlov✉

Saratov State University, Russia

E-mail: guyo199814@gmail.com, ✉pavlov.alexeyn@gmail.com

Received 23.01.2023, accepted 4.04.2023, available online 21.04.2023,
published 31.05.2023

Abstract. Purpose of this work is to generalize the wavelet-transform modulus maxima method to the case of cooperative dynamics of interacting systems and to introduce the joint singularity spectrum into consideration. The research method is the wavelet-based multifractal formalism, the generalized version of which is used to quantitatively describe the effect of chaotic synchronization in the dynamics of model systems. Models of coupled Rössler systems and paired nephrons are considered. As a result of the studies carried out, the main changes in the joint singularity spectra were noted during the transition from synchronous to asynchronous oscillations in the first model and to the partial synchronization mode in the second model. Conclusion. Proposed approach can be used in studies of the cooperative dynamics of systems of various nature.

Keywords: multifractal formalism, joint singularity spectrum, synchronization of oscillations, wavelet transform.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 22-22-00065.

For citation: Guyo GA, Pavlov AN. Application of joint singularity spectrum to analyze cooperative dynamics of complex systems. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3):305–315. DOI: 10.18500/0869-6632-003041

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Сложные системы часто включают взаимодействующие компоненты, которые, в свою очередь, могут демонстрировать сложное поведение. Изменение динамики таких систем является следствием изменения функционирования отдельных компонентов или связей между ними. В последнем случае важно получать информацию о кооперативной динамике элементов сложной системы (например, сложной сети), используя количественные критерии, отражающие взаимодействие подсистем. С этой целью могут использоваться взаимные спектры, взаимные ковариационные или корреляционные функции [1], а также специальные характеристики (например, меры взаимной информации [2]). Учитывая то обстоятельство, что динамика отдельных элементов может демонстрировать мультифрактальную структуру, для количественного описания которой недостаточно одной величины, отражающей закономерности частотной зависимости спектральной плотности мощности или спада корреляций, достаточно часто при проведении исследований используется подход на основе расчета спектра сингулярностей [3]. Известно много методов вычисления данного спектра, каждый из которых имеет свои особенности и ограничения. В частности, подход на основе структурных функций [4, 5] не подходит для изучения слабых сингулярностей. Более универсальными методами считаются мультифрактальный формализм, основанный на вейвлетах [6, 7], и мультифрактальный флуктуационный анализ [8, 9]. Первый из них за счет выбора подходящей вейвлет-функции (имеющей большое число нулевых моментов) позволяет игнорировать полиномиальный тренд в экспериментальных данных. Обобщение концепции мультифракталов на случай кооперативной динамики сложных систем было предложено, например, в [10], где были введены в рассмотрение совместные мультифрактальные меры. Однако статья [10] базировалась на классическом подходе к анализу, предусматривающем покрытие фрактального множества геометрическими объектами (например, кубиками), который имеет ряд ограничений при изучении сигналов.

В данной работе мы рассматриваем обобщение на случай взаимной динамики автоколебательных систем метода максимумов модулей вейвлет-преобразования, в рамках которого в качестве элементов покрытия выбираются вейвлет-функции. Это позволяет, с одной стороны, использовать более универсальный подход, применимый как к стационарным процессам, так и к сигналам систем с меняющимися во времени характеристиками. С другой стороны, обеспечивается анализ как сильных, так и слабых сингулярностей (больших и малых флуктуаций) при использовании алгоритма вычисления обобщенных статистических функций. Мы иллюстрируем предлагаемый обобщенный метод на примере эффекта синхронизации хаотических колебаний в модельных системах: модели двух связанных систем Рёсслера и более сложной модели парных нефронов.

1. Методы

1.1. Метод расчета совместного спектра сингулярностей. Основанный на вейвлетах мультифрактальный формализм был предложен в работе [6] и протестирован на различных примерах в последующих публикациях [7, 11–13]. Он предусматривает вычисление максимумов модулей (скелетона) вейвлет-преобразования, который содержит основную информацию о сигнале, и анализ степенных закономерностей вейвлет-коэффициентов в зависимости от масштаба [14]. Алгоритмически, вычисления спектра сингулярностей функции $f(t)$ можно разделить на два этапа, первым из которых является вычисление коэффициентов непрерывного вейвлет-преобразования

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (1)$$

где a — параметр масштаба, b характеризует смещение вейвлет-функции ψ , а в качестве $f(t)$ рассматривается функция распределения анализируемого сигнала. Выбор базисной функции ψ определяется спецификой анализируемого процесса. Теоретически спектр сингулярностей не зависит от выбора базиса, но в случае нестационарных процессов присутствие тренда оказывает влияние на проводимые оценки. В задачах мультифрактального анализа часто применяют вейвлет-базисы, сконструированные на основе производных функции Гаусса

$$\psi^{(m)} = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \right], \quad (2)$$

например, WAVE ($m = 1$) или МНАТ ($m = 2$). В данной работе мы использовали МНАТ-вейвлет.

Как и для любого метода анализа структуры сигналов, исследователю необходимо оценить чувствительность результатов к выбору алгоритмических параметров, в частности, диапазона масштабов для изучения и количественного описания свойств фрактальности.

При наличии сингулярного поведения в точке t^* , в окрестности этой точки $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = P_n(t) + C|t - t^*|^{h(t^*)}, \quad (3)$$

то есть в виде регулярной составляющей $P_n(t)$ (полинома степени n) и слагаемого, описывающего сингулярность, которое характеризуется нецелым значением $h(t^*)$. При выборе вейвлета, имеющего m нулевых моментов ($m \geq n$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(t) \psi(t) dt = 0, \quad (4)$$

и в результате вейвлет-анализа мы получим степенную зависимость

$$W(a, t^*) \sim a^{h(t^*)}, \quad (5)$$

которая количественно описывается показателем Гёльдера $h(t^*)$. Каждая сингулярность приводит к появлению одной или нескольких линий локальных максимумов модулей вейвлет-преобразования (линий скелетона), поэтому именно в скелетоне вейвлет-преобразования содержится вся информация о сингулярностях $f(t)$.

Однако провести вычисления по формуле (5) затруднительно из-за влияния соседних сингулярностей, препятствующих рассмотрению приемлемого для расчетов диапазона масштабов. По этой причине в качестве второго этапа вычислений в работе [7] предложено проводить построение обобщенных статистических функций

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left(\sup_{\hat{a} \leq a} |W(\hat{a}, b_l(\hat{a}))| \right)^q, \quad (6)$$

где $L(a)$ — полный набор линий локальных экстремумов $W(a, b)$ на масштабе a , $b_l(\hat{a})$ — расположение на масштабе $\hat{a} \leq a$ максимума, который относится к линии l , а \sup рассматривается для того, чтобы избежать появления нулевых значений для отрицательных q . Согласно выводам работ [6, 7], обобщенные статистические функции обычно демонстрируют степенное поведение

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (7)$$

где $\tau(q)$ — скейлинговые показатели, которые являются промежуточными величинами при расчете показателей Гёльдера $h(q)$ и спектра сингулярностей $D(h)$

$$D(h) = qh - \tau(q), \quad h(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (8)$$

Описание алгоритма максимумов модулей вейвлет-преобразования более подробно приведено в работе [7]. Расчет $\tau(q)$ проводится по линейным участкам зависимостей $\lg Z(q, a)$ от $\lg a$ (мы использовали диапазон $\lg a \in [0.7, 4.0]$).

Рассмотрим теперь обобщение этого алгоритма на случай кооперативной динамики сложных систем, а именно для описания сложного скейлинга в функционировании взаимодействующих подсистем по сигналам, отражающим функционирование каждой из них. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — функции распределения двух анализируемых процессов. Вычислим для каждой из них непрерывное вейвлет-преобразование

$$W_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (9)$$

$$W_g(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

и соответствующие скелетоны. Возможно несколько вариантов решения задачи проведения совместного мультифрактального анализа. Например, можно изначально рассмотреть взаимное вейвлет-преобразование функций распределения с выделением его максимумов модулей. В данной работе мы выбрали сравнительно простой подход, состоящий в модификации процедуры вычисления обобщенных статистических функций

$$Z^2(q, a) = \sum_{i \in L_f(a)} \left(\sup_{\hat{a} \leq a} |W_f(\hat{a}, b_i(\hat{a}))| \right)^q \times \sum_{j \in L_g(a)} \left(\sup_{\tilde{a} \leq a} |W_g(\tilde{a}, b_j(\tilde{a}))| \right)^q. \quad (10)$$

Здесь $L_f(a)$ и $L_g(a)$ обозначают скелетоны для каждой из функций распределения, $b_i(\hat{a})$ и $b_j(\tilde{a})$ — расположение на масштабах $\hat{a} \leq a$ и $\tilde{a} \leq a$ максимумов, которые относятся к линиям i и j .

Дальнейшие расчеты проводятся в соответствии с ранее приведенным алгоритмом, то есть вычисляются показатели скейлинга $\tau(q)$ и спектр сингулярностей $D(h)$ по формулам (7) и (8), соответственно. Все параметры алгоритма выбраны такими же, как и для расчетов по одному сигналу. Однако теперь вычисленный спектр сингулярностей можно интерпретировать как совместный, так как он отражает совместную динамику подсистем, генерирующих анализируемые сигналы. Для тестирования предлагаемого подхода рассмотрим два примера математических моделей.

1.2. Связанные системы Рёсслера. Модель двух связанных систем Рёсслера часто используется в качестве базового примера для тестирования различных методов анализа сигналов, учитывая, что ее динамика хорошо изучена, и наличие разнообразных вариантов сложных колебаний в этой модели позволяет проанализировать возможность диагностики смены режимов функционирования при изменении управляющих параметров. Модель описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx_{1,2}}{dt} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= b + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{aligned}\tag{11}$$

в которой параметры $a = 0.15$, $b = 0.2$ и c определяют режим динамики отдельных подсистем, а $\gamma = 0.02$ является коэффициентом их связи. Для рассмотрения неидентичных подсистем введем расстройку частот $\omega_{1,2} = 1.0 \pm \Delta$, и выберем два управляющих параметра c и Δ , вариация которых позволяет наблюдать режимы синхронных и несинхронных хаотических колебаний, гиперхаотический режим, а также различные варианты периодических и квазипериодических колебаний. Чтобы изучать поперечную структуру хаотических аттракторов, которая демонстрирует свойство мультифрактальности, можно выбрать в качестве исследуемых сигналов последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре. Рассмотрим в качестве анализируемых сигналов последовательности времен возврата в секущие плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, соответствующие режимам синхронного хаоса ($c = 6.8$, $\Delta = 0.009$) и несинхронного хаоса ($c = 6.8$, $\Delta = 0.010$). На рис. 1 приведены последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре $x_1 = 0$ для выбранных режимов. Видно, что они визуально отличаются, поэтому можно ожидать и существенных отличий в характеристиках мультифрактальной структуры соответствующих аттракторов.

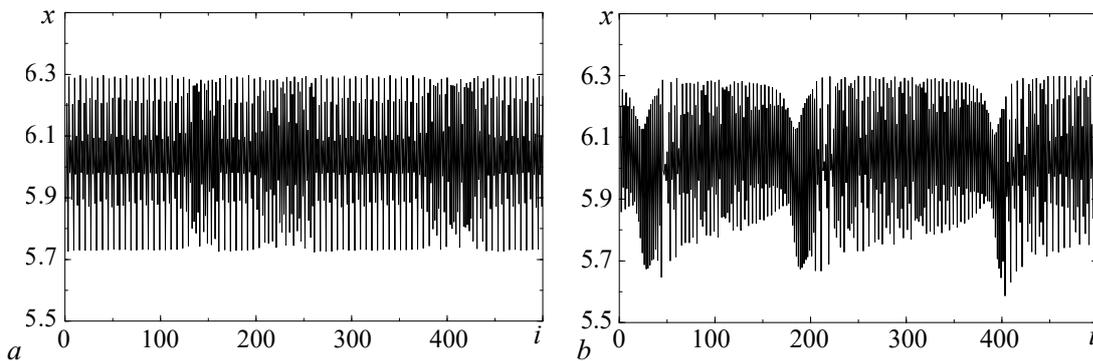


Рис. 1. Последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре $x_1 = 0$ для режима синхронного (a) и несинхронного (b) хаоса в модели двух связанных систем Рёсслера

Fig. 1. Return time sequences into the Poincaré section $x_1 = 0$ for synchronous (a) and asynchronous (b) chaos in the model of two coupled Rössler systems

1.3. Модель парных нефронов. Модель парных нефронов является более сложной; для одного структурного элемента почки она была предложена в работе [15] и построена в соответствии с физиологическими представлениями о почечной авторегуляции кровотока. Модель оказалась удачной в том смысле, что она позволяет описать многие особенности реальной динамики нефронов, которые были обнаружены в многочисленных экспериментальных исследованиях. Например, с помощью модели хорошо описывается переход от почти регулярных колебаний давления жидкости в проксимальных канальцах нефронов (случай нормы) к сильно нерегулярным при почечной гипертонии. Отметим, что модель является очень сложной, и ее полное описание занимает несколько страниц. По этой причине в данной статье мы приводим лишь схематичное описание

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{dt} &= \frac{1}{C_{\text{tub}}} \{F_f(P_t, r) - F_{\text{reab}} - (P_t - P_d)/R_{\text{Hen}}\}, \\ \frac{dr}{dt} &= v_r, \\ \frac{dv_r}{dt} &= \frac{1}{\omega} \{P_{av}(P_t, r) - P_{eq}(r, \Psi(X_3, \beta)) - \omega dv_r\}, \\ \frac{dX_1}{dt} &= \frac{1}{R_{\text{Hen}}} (P_t - P_d) - \frac{3}{T} X_1, \\ \frac{dX_2}{dt} &= \frac{3}{T} (X_1 - X_2), \\ \frac{dX_3}{dt} &= \frac{3}{T} (X_2 - X_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Переменная P_t описывает давление в проксимальном канальце, F_f — скорость гломерулярной фильтрации, C_{tub} — эластическая проводимость канальца. Разность $P_t - P_d$ между проксимальным и дистальным давлением и сопротивление R_{Hen} определяют поток жидкости в петле Генле. Реабсорбция в проксимальном канальце F_{reab} считается постоянной величиной. Второе и третье уравнения характеризуют динамику, обусловленную контролем потока в приносящей артериоле. Здесь r — радиус сосуда, v_r — скорость его изменения, d описывает затухание колебаний, ω является мерой массы по отношению к эластической проводимости стенки артериолы, а P_{av} обозначает среднее давление в артериоле. P_{eq} представляет собой значение этого давления, при котором артериола находится в равновесном состоянии с ее текущим значением радиуса и мышечной активацией Ψ . Выражения для F_f , P_{av} и P_{eq} включают ряд алгебраических уравнений, которые необходимо решить вместе с интегрированием системы (12). Три оставшихся уравнения описывают задержку T в механизме канальцево-гломерулярной регуляции, которая является причиной появления медленных колебаний переменной P_t с частотой 0.02...0.04 Гц. Миогенный механизм, описываемый вторым и третьим уравнениями, приводит к возникновению более быстрых колебаний (0.1...0.2 Гц), амплитуда которых значительно меньше амплитуды медленного ритма. Переход от нормального артериального давления к почечной гипертонии сопровождается увеличением силы обратной связи (параметр β модели (12)). Пример хаотической динамики модели (12) приведен на рис. 2.

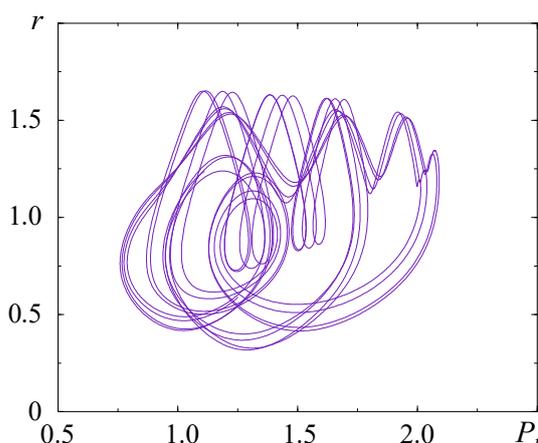


Рис. 2. Пример хаотических колебаний в модели нефрона
Fig. 2. An example of chaotic oscillations in nephron model

Рис. 2. Пример хаотических колебаний в модели нефрона

Взаимодействие парных нефронов, в основном, определяется электрохимическими сигналами. В модели (12) равновесное давление в приносящей артериоле зависит от текущего радиуса r и уровня активации Ψ гладких мышц. Мышечная активация распространяется вдоль приносящей артериолы затухающим образом. Когда она достигает точки разветвления с артериолой соседнего нефрона, часть сигнала может распространяться по ней и оказывать влияние на соседний нефрон. В модели парных нефронов эту связь можно описать добавлением вклада уровня активации в одном нефроне к уровню активации в соседнем нефроне [16]

$$\Psi_{1,2}^* = \Psi_{1,2} + \gamma\Psi_{2,1}, \quad (13)$$

где γ — параметр связи и $\Psi_{1,2}$ — уровни активации двух несвязанных нефронов, определяемые их соответствующими потоками Генле. Чтобы разделить медленные и быстрые колебания и характеризовать их по отдельности, нами выбраны параметры $\gamma = 0.005$ и $\beta = 27.3$ и рассмотрены последовательности времен возврата в сечения Пуанкаре $P_t = 1.6$ и $v_r = 0$. Для иллюстрации метода рассмотрены примеры полной синхронизации хаотических колебаний ($T_1 = T_2 = 13.5$ с, где T_1 и T_2 — значения задержки в механизме обратной связи для каждого нефрона) и частичной хаотической синхронизации, наблюдаемой только для медленной динамики ($T_1 = 13.5$ с, $T_2 = 13.4$ с). Анализируемые последовательности времен возврата для выбранных режимов динамики показаны на рис. 3.

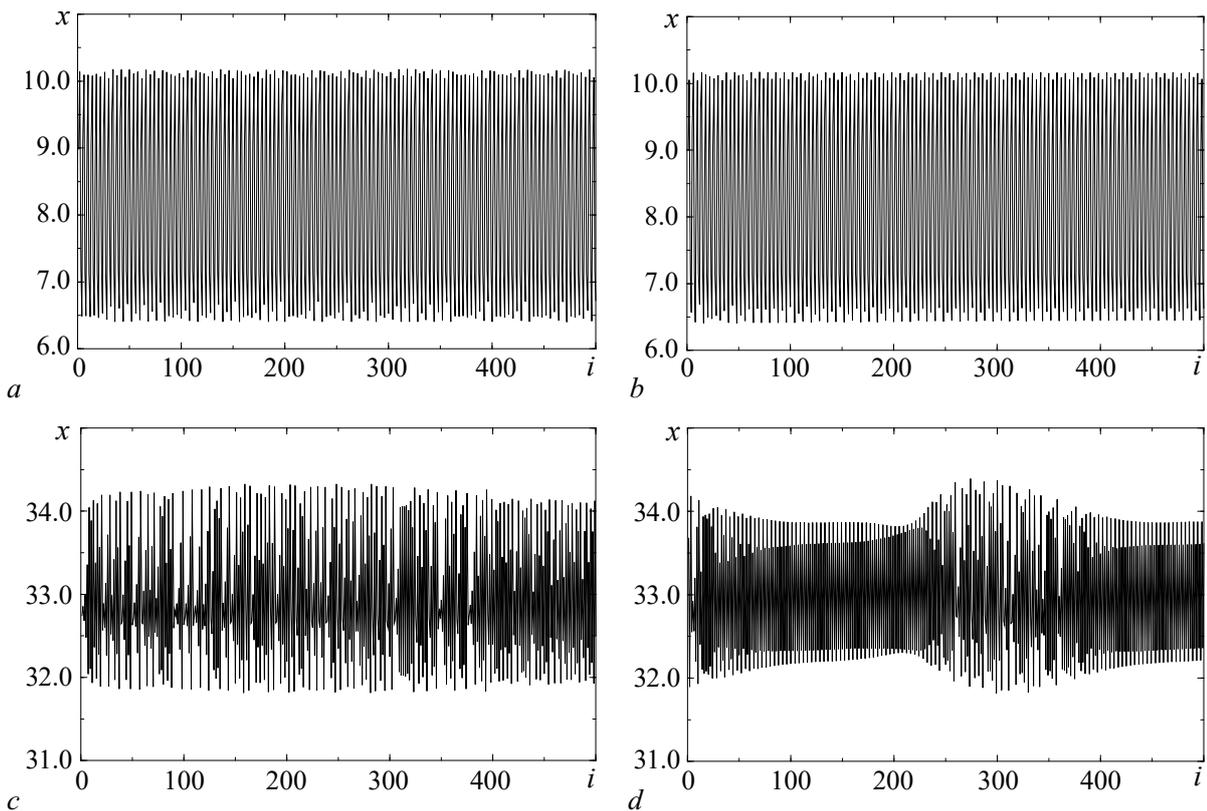


Рис. 3. Последовательности времен возврата для быстрой (a, b) и медленной (c, d) динамики в режимах полной (a, c) и частичной синхронизации (b, d) в модели парных нефронов (для первой подсистемы)

Fig. 3. Return times sequences for fast (a, b) and slow (c, d) dynamics in the regimes of full synchronization (a, c) and partial synchronization (b, d) in the model of two paired nephrons (for the first unit)

2. Результаты

2.1. Связанные системы Рёсслера. Переход через границу области хаотической синхронизации в модели (11) сопровождается значительными изменениями совместного спектра сингулярностей. Эти изменения аналогичны ранее обсуждавшимся результатам для метода максимумов модулей вейвлет-преобразования, примененного к анализу динамики одной из взаимодействующих подсистем [12]. Однако в данном случае различие состоит в рассмотрении спектра сингулярностей, который отражает кооперативную динамику модели (11). Можно выделить два основных отличия синхронного и несинхронного режимов: разное положение $D(h)$ вдоль оси h , которое можно описать расположением максимума функции $D(h)$, а также изменение ширины спектра — диапазона показателей Гёльдера. С точки зрения первого отличия можно констатировать переход от положительно коррелированных последовательностей времен возврата ($h > 0.5$) несинхронного режима к антикоррелированным ($h < 0.5$) при синхронизации.

Так, на рис. 4 продемонстрировано уменьшение среднего значения показателя Гёльдера (соответствующего $q = 0$, то есть максимуму спектра сингулярностей) с 1.16 для несинхронных хаотических колебаний до 0.01 для синхронного хаоса. Второе отличие проявляется не менее четко: ширина спектра сингулярностей, которая может интерпретироваться как мера неоднородности (сложности) режима динамики, уменьшается с 0.48 до 0.02 при переходе в область синхронизации. Таким образом, диагностировать эффект синхронизации можно с помощью любой из этих мер — среднего значения показателя Гёльдера, описывающего изменение корреляционных свойств последовательностей времен возврата, или меры неоднородности, свидетельствующей об уменьшении сложности синхронного режима. Отметим, что в данном контексте сложность оценивается числом характеристик, с помощью которых можно описать режим, а не его предсказуемостью. Например, белый шум, являющийся дельта-коррелированным процессом, можно интерпретировать как простой, поскольку он описывается одним значением показателя Гёльдера $h = 0.5$ и спектром сингулярностей, состоящим из одной точки. Для приведенного на рис. 4 примера синхронный режим также является намного более простым по сравнению с несинхронным, хотя в обоих случаях речь идет о хаотических колебаниях в модели (11). Выявленные различия являются прогнозируемыми, учитывая отличия последовательностей времен возврата рассматриваемых режимов (см. рис. 1).

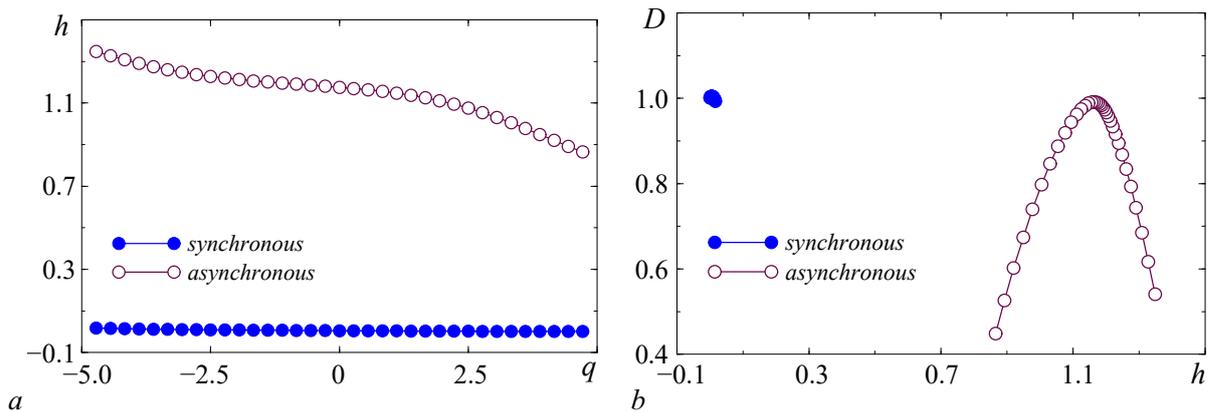


Рис. 4. Мультифрактальный анализ синхронной и несинхронной динамики связанных систем Рёсслера: a — показатели Гёльдера, b — спектры сингулярностей

Fig. 4. Multifractal analysis of synchronous and asynchronous dynamics of coupled Rössler systems: a — Hölder exponents, b — singularity spectra

2.2. Модель парных нефронов. При выбранных значениях управляющих параметров модель (12) демонстрирует существенно различное поведение для быстрых и медленных ритмов структурных элементов почки (рис. 5). Как отмечается в работах [16, 17], для парных нефронов (и в модели, и в физиологических экспериментах, проводимых на лабораторных животных) можно наблюдать различные режимы полной, частичной синхронизации, а также несинхронное поведение. Например, частичная синхронизация состоит в подстройке частот одних ритмов при отсутствии подстройки частот других. В примере, представленном на рис. 5, при $T_2 = 13.4$ с наблюдается синхронная динамика быстрых ритмов, сопровождающаяся несинхронным поведением для медленных (см. рис. 3). Это приводит к отсутствию принципиальных различий совместных спектров сингулярностей для быстрых ритмических процессов (при $T_2 = 13.4$ с и $T_2 = 13.5$ с они соответствуют спектрам сингулярностей процессов, близких к монофрактальным, а сама динамика быстрых ритмов близка к периодической). В то же время для медленной динамики парных нефронов отличия есть, и они существенные. По сравнению с более простым примером связанных систем Рёсслера, изменения совместного спектра сингулярностей описываются одной характеристикой — положением спектра, то есть средним значением показателя Гёльдера. Как и ранее, происходит четко фиксируемый переход от положительно коррелированных последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре к антикоррелированным последовательностям, и среднее значение h уменьшается с 0.71 до 0.15. Обнаруженная смена типа корреляций является отражением взаимосогласованной динамики подсистем при синхронизации, и она достаточно типична при увеличении связи между подсистемами или уменьшении расстройки по частоте, приводящей к переходу внутрь области синхронизации [12]. Уменьшения при этом ширины совместного спектра сингулярностей не происходит, в чем можно убедиться наложением спектров сингулярностей обоих режимов. Таким образом, оба режима демонстрируют сложное поведение.

Приведенные примеры свидетельствуют о разных проявлениях эффекта синхронизации в мультифрактальной структуре хаотических аттракторов связанных автоколебательных систем, которые можно диагностировать с помощью предлагаемого подхода. Отметим, что целью данной работы является обобщение метода максимумов модулей вейвлет-преобразования на случай кооперативной динамики сложных систем. Представленные примеры являются иллюстрациями, подтверждающими применимость предложенного подхода для решения таких задач. Мы полагаем, что метод может найти более широкое применение в исследованиях кооперативной динамики различных систем, включая сложные сети.

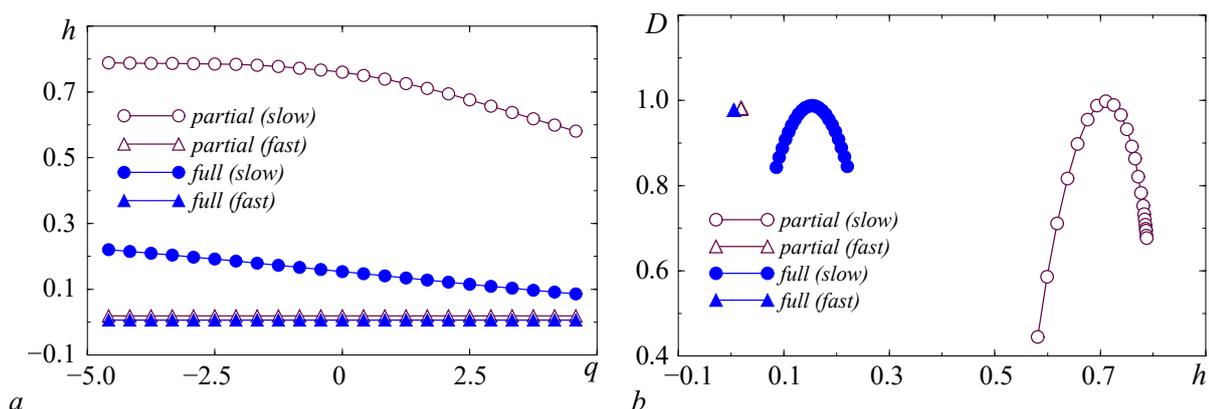


Рис. 5. Мультифрактальный анализ полной и частичной синхронизации в модели парных нефронов: a — показатели Гёльдера, b — спектры сингулярностей

Fig. 5. Multifractal analysis of full and partial synchronization in the model of paired nephrons: a — Hölder exponents, b — singularity spectra

Заключение

Предложено обобщение на случай кооперативной динамики автоколебательных систем основанного на вейвлетах мультифрактального формализма. Установлены изменения совместного спектра сингулярностей при синхронизации хаотических колебаний в модели связанных систем Рёсслера, которые включают изменение типа корреляций в последовательностях времен возврата (переход от положительных корреляций к антикорреляциям) и значительное уменьшение ширины спектра, что позволяет говорить об упрощении динамики относительно числа характеристик, необходимых для диагностики режима. При рассмотрении частичной синхронизации в модели парных нефронов отмечены изменения положения совместного спектра сингулярностей, которые связаны со средним значением показателя Гёльдера (переходом к антикорреляциям при синхронизации медленных колебаний), но не сопровождаются уменьшением ширины спектра. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности диагностики изменений мультифрактальной структуры хаотических аттракторов при синхронизации хаоса. Предложенное обобщение основанного на вейвлетах мультифрактального формализма может найти применение при решении широкого круга задач анализа кооперативной динамики сложных систем по экспериментальным данным.

References

1. Bendat JS, Piersol AG. Random Data: Analysis and Measurement Procedures. 4th edition. New Jersey: John Wiley & Sons; 2010. 640 p. DOI: 10.1002/9781118032428.
2. Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. 3rd edition. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. 1256 p.
3. Halsey TC, Jensen MH, Kadanoff LP, Procaccia I, Shraiman BI. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets. Phys. Rev. A. 1986;33(2):1141–1151. DOI: 10.1103/PhysRevA.33.1141.
4. Frish U, Parisi G. On the singularity structure of fully developed turbulence. In: Ghil M, Benzi R, Parisi G, editors. Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics. New York: North-Holland; 1985. P. 84–88.
5. Benzi R, Vulpiani A. Multifractal approach to fully developed turbulence. Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali. 2022;33(3):471–477. DOI: 10.1007/s12210-022-01078-5.
6. Muzy JF, Bacry E, Arneodo A. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. Phys. Rev. Lett. 1991;67(25):3515–3518. DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.3515.
7. Muzy JF, Bacry E, Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets. International Journal of Bifurcation and Chaos. 1994;4(2):245–302. DOI: 10.1142/S0218127494000204.
8. Kantelhardt JW, Zschiegner SA, Koscielny-Bunde E, Havlin S, Bunde A, Stanley HE. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002;316(1–4):87–114. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3.
9. Ihlen EAF. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab. Frontiers in Physiology. 2012;3:141. DOI: 10.3389/fphys.2012.00141.
10. Meneveau C, Sreenivasan KR, Kailasnath P, Fan MS. Joint multifractal measures: Theory and applications to turbulence. Phys. Rev. A. 1990;41(2):894–913. DOI: 10.1103/PhysRevA.41.894.
11. Ivanov PC, Amaral LAN, Goldberger AL, Havlin S, Rosenblum MG, Struzik ZR, Stanley HE. Multifractality in human heartbeat dynamics. Nature. 1999;399(6735):461–465. DOI: 10.1038/20924.
12. Pavlov AN, Sosnovtseva OV, Ziganshin AR, Holstein-Rathlou NH, Mosekilde E. Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2002;316(1–4):233–249. DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01202-5.

13. Pavlov AN, Pavlova ON, Abdurashitov AS, Sindeeva OA, Semyachkina-Glushkovskaya OV, Kurths J. Characterizing scaling properties of complex signals with missed data segments using the multifractal analysis. *Chaos*. 2018;28(1):013124. DOI: 10.1063/1.5009438.
14. Addison PS. *The Illustrated Wavelet Transform Handbook: Introductory Theory and Applications in Science, Engineering, Medicine and Finance*. 2nd edition. Boca Raton: CRC Press; 2016. 464 p. DOI: 10.1201/9781315372556.
15. Barfred M, Mosekilde E, Holstein-Rathlou NH. Bifurcation analysis of nephron pressure and flow regulation. *Chaos*. 1996;6(3):280–287. DOI: 10.1063/1.166175.
16. Postnov DE, Sosnovtseva OV, Mosekilde E, Holstein-Rathlou NH. Cooperative phase dynamics in coupled nephrons. *International Journal of Modern Physics B*. 2001;15(23):3079–3098. DOI: 10.1142/S0217979201007233.
17. Sosnovtseva OV, Pavlov AN, Mosekilde E, Yip KP, Holstein-Rathlou NH, Marsh DJ. Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats. *Am. J. Physiol. Renal. Physiol*. 2007;293(5):F1545–F1555. DOI: 10.1152/ajprenal.00054.2007.



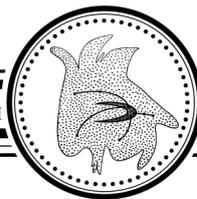
Гуйо Герман Александрович — родился в Саратове (1998). Окончил среднюю школу № 94 и поступил на факультет нелинейных процессов (2016). С отличием окончил институт физики СГУ по направлению «Информационные системы и технологии» (2022). С 2022 года является младшим научным сотрудником кафедры физики открытых систем и аспирантом этой кафедры. Научные интересы — нейронаука, динамический хаос, теория колебаний и волн. Победитель стипендиальной программы Владимира Потанина, стипендиат Правительства РФ.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: guyo199814@gmail.com



Павлов Алексей Николаевич — родился в Саратове (1973). Окончил физический факультет Саратовского университета по специальности радиофизика и электроника (1995). Кандидат физико-математических наук (1998), доктор физико-математических наук (2009). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ временных рядов. Автор более 150 научных статей, монографий и учебных пособий.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-9946-8938
 AuthorID (eLibrary.Ru): 87201



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003038
EDN: HHZEBK

Математическая модель трех конкурирующих популяций и мультистабильность периодических режимов

Б. Х. Нгуен, В. Г. Цибулин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 30.01.2023, принята к публикации 23.03.2023,

опубликована онлайн 27.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Цель настоящей работы — анализ колебательных режимов в системе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих конкуренцию трех неантагонистических видов на пространственно-однородном ареале. **Методы.** С использованием теории косимметрии устанавливается связь между разрушением двухпараметрического семейства равновесий и возникновением непрерывного семейства периодических режимов. С помощью вычислительного эксперимента в MATLAB проведен поиск предельных циклов и анализ мультистабильности. **Результаты.** Изучены динамические сценарии для системы трех конкурирующих видов с учетом различия в коэффициентах роста и взаимодействия. Для ряда комбинаций параметров найдены новые непрерывные семейства предельных циклов (extreme multistability). Установлена бистабильность в виде сосуществования изолированных предельных циклов, а также стационарного решения и колебательного режима. **Заключение.** Обнаружены два сценария расположения семейства предельных циклов по отношению к плоскости, проходящей через три равновесия, отвечающие существованию разных видов. Помимо циклов, лежащих в этой плоскости, возможно семейство с циклами, пересекающими эту плоскость в двух точках. Это может рассматриваться как пример периодических процессов, приводящих к перенаселению и последующему падению численности. Эти результаты далее послужат основой для анализа систем конкурирующих популяций на пространственно неоднородных ареалах.

Ключевые слова: вольтерровская модель, нелинейные дифференциальные уравнения, конкуренция, семейство предельных циклов, мультистабильность.

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту за внимательное чтение и стимулирующие замечания. Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФ, грант № 23-21-00221.

Для цитирования: Нгуен Б. Х., Цибулин В. Г. Математическая модель трех конкурирующих популяций и мультистабильность периодических режимов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 316–333. DOI: 10.18500/0869-6632-003038. EDN: HHZEBK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Mathematical model of three competing populations and multistability of periodic regimes

B. H. Nguyen, V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov on Don, Russia

E-mail: ✉kng@sfedu.ru, vgcibulin@sfedu.ru

Received 30.01.2023, accepted 23.03.2023, available online 27.04.2023,

published 31.05.2023

Abstract. Purpose of this work is to analyze oscillatory regimes in a system of nonlinear differential equations describing the competition of three non-antagonistic species in a spatially homogeneous domain. *Methods.* Using the theory of cosymmetry, we establish a connection between the destruction of a two-parameter family of equilibria and the emergence of a continuous family of periodic regimes. With the help of a computational experiment in MATLAB, a search for limit cycles and an analysis of multistability were carried out. *Results.* We studied dynamic scenarios for a system of three competing species for different coefficients of growth and interaction. For several combinations of parameters in a computational experiment, new continuous families of limit cycles (extreme multistability) are found. We establish bistability: the coexistence of isolated limit cycles, as well as a stationary solution and an oscillatory regime. *Conclusion.* We found two scenarios for locating a family of limit cycles regarding a plane passing through three equilibria corresponding to the existence of only one species. Besides cycles lying in this plane, a family is possible with cycles intersecting this plane at two points. We can consider this case as an example of periodic processes leading to overpopulation and a subsequent decline in numbers. These results will further serve as the basis for the analysis of systems of competing populations in spatially heterogeneous areas.

Keywords: Volterra model, nonlinear differential equations, competition, family of limit cycles, multistability.

Acknowledgements. The authors are grateful to the referee for careful reading and stimulating comments. The work was carried out at the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation, grant No. 23-21-00221.

For citation: Nguyen BH, Tsybulin VG. Mathematical model of three competing populations and multistability of periodic regimes. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(3):316–333. DOI: 10.18500/0869-6632-003038

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Для экологических систем характерны сценарии взаимодействия видов, приводящие к колебательным процессам. Математическое моделирование таких явлений проводится с использованием динамических систем с непрерывным и дискретным временем — потоков и каскадов [1–5]. Для нелинейного отображения на отрезке (в случае одного вида) возникает периодическая и хаотическая динамика, а для дифференциального уравнения это невозможно. Для двух антагонистических видов (хищник – жертва, хозяин – паразит) наблюдаются колебательные режимы, а для конкурирующих популяций имеются только стационарные решения [6, 7]. Актуальным является вопрос о колебательных сценариях для трех и более неантагонистических популяций, в частности, для системы с квадратичной правой частью, описывающей динамику трех видов [8–17]. В общем случае эта система имеет восемь вещественных параметров ($r_1 = 1$):

$$\dot{u}_1 = r_1 u_1 (1 - u_1 - \alpha_1 u_2 - \beta_1 u_3), \quad (1)$$

$$\dot{u}_2 = r_2 u_2 (1 - \beta_2 u_1 - u_2 - \alpha_2 u_3), \quad (2)$$

$$\dot{u}_3 = r_3 u_3 (1 - \alpha_3 u_1 - \beta_3 u_2 - u_3). \quad (3)$$

Здесь u_i — численность вида i , r_i — параметр роста, коэффициенты α_i , β_i характеризуют влияние других видов на рост вида i , а точка обозначает дифференцирование по времени t .

Система (1)–(3) имеет нулевое равновесие $E_0 = (0, 0, 0)$, три равновесия с одной ненулевой компонентой

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0), \quad E_3 = (0, 0, 1) \quad (4)$$

и равновесие с тремя ненулевыми компонентами:

$$E_* = (p_1, p_2, p_3), \quad p_i = \frac{z_i}{z_0}, \quad (5)$$

$$z_1 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_3 - \alpha_1 - \beta_1 + 1,$$

$$z_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_1 \beta_2 \beta_3 - \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 + 1.$$

В (5) величины z_2 и z_3 получаются из z_1 циклической перестановкой индексов: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

В ряде работ [8–10] система (1)–(3) рассматривалась при одинаковых параметрах роста $r_i = 1$. Для симметричной модели ($\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $i = 1, 2, 3$) в [8] показано, что при $\alpha + \beta = 2$ получается семейство периодических режимов на плоскости, обладающих нейтральной устойчивостью в касательном к плоскости направлении. В случае различных коэффициентов $0 < \alpha_i < 1 < \beta_i$, $i = 1, 2, 3$ в [9] было установлено существование аналогичного семейства при $A = B$, где

$$A = \prod_{i=1}^3 (1 - \alpha_i), \quad B = \prod_{i=1}^3 (\beta_i - 1), \quad (6)$$

В [10] при нарушении условий $\alpha_i < 1 < \beta_i$, но сохранении равенства $A = B$ найдены значения параметров, для которых также существует семейство периодических режимов.

При $r_i \neq 1$ система (1)–(3) исследовалась в [11–17]. Так, в [11] представлены результаты по вычислению предельных циклов при $r_1 = 2$ и $\alpha + \beta > 2$ ($\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$). В [12] с помощью теорем [13, 14] доказано, что при выполнении условия $A = B$ имеется семейство периодических режимов для параметров роста r_i , которые выражаются через коэффициенты взаимодействия

$$r_1 = 1, \quad r_2 = \frac{\alpha_1 - 1}{1 - \beta_2}, \quad r_3 = \frac{1 - \beta_1}{\alpha_3 - 1}. \quad (7)$$

В случае идентичных параметров роста в [15, 16] дана классификация динамики системы (1)–(3). Показано, что существует 37 топологических классов, определяемых соотношениями между коэффициентами α_i , β_i .

В [17] для системы (1)–(3) на основе косимметричного подхода [18] найдены условия, при которых возникают семейства равновесий, и рассчитаны колебательные режимы при значениях параметров, отвечающих нейтральной устойчивости равновесия (5). Проанализирована динамика при нарушении условий косимметрии.

Целью данной работы является анализ колебательных режимов системы (1)–(3) и поиск семейств периодических режимов, обладающих нейтральной устойчивостью в одном направлении. При этом считается, что каждый режим из семейства принадлежит соответствующему двумерному многообразию, на котором является единственным изолированным предельным циклом. Таким образом, данную совокупность периодических режимов можно считать новым объектом — семейством предельных циклов. В работе проводится вычислительный эксперимент для параметров системы, рассчитываются периоды и мультипликаторы предельных циклов.

1. Исследование четырехпараметрической модели

В [18] описан сценарий разрушения однопараметрического семейства равновесий косимметричной системы, приводящий к возникновению предельного цикла. Проанализируем возможность появления однопараметрического семейства периодических режимов (предельных циклов) при разрушении двухпараметрического семейства равновесий. Такое семейство существует для системы (1)–(3) при $\alpha_i = \beta_i = 1$ и произвольных значениях параметров роста.

Рассмотрим случае четырехпараметрической модели с коэффициентами $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, r_2, r_3 . Дифференциальные уравнения (1)–(3) при $\alpha_i = \beta_i = 1$ можно записать в векторном виде:

$$\dot{U} = F, \quad U = [u_1, u_2, u_3]^T, \quad F = P[u_1, r_2 u_2, r_3 u_3]^T, \quad P = 1 - \sum_{i=1}^3 u_i. \quad (8)$$

Система (8) имеет двухпараметрическое семейство равновесий

$$u_1 = 1 - u_2 - u_3, \quad 0 \leq u_2 + u_3 \leq 1, \quad (9)$$

лежащее в плоскости

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1. \quad (10)$$

Спектр устойчивости равновесия семейства имеет два нулевых значения $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, соответствующих нейтральным направлениям вдоль плоскости (10), и значение $\sigma_3 = (1 - r_2)u_2 + (1 - r_3)u_3 - 1$, отвечающее за устойчивость в трансверсальном к плоскости направлении. При любых положительных значениях r_2, r_3 величина $\sigma_3 < 0$, то есть все семейство состоит из устойчивых равновесий. При $r_2 = r_3 = 1$ получается идентичный для всех равновесий спектр $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -1$, что соответствует симметрии задачи, а при $r_2 \neq 1$, $r_3 \neq 1$ каждое равновесие обладает индивидуальным спектром, что характерно для косимметричных систем [19].

Согласно введенному в [19] определению, косимметрией является векторное поле, ортогональное полю задачи во всем пространстве. Двухпараметрическому семейству отвечает мультикосимметрия, то есть существование двух разных косимметрий, ортогональных вектору правой части. Косимметриями системы (8) являются векторы, введенные в [17]:

$$L_1 = (r_2 u_2, -u_1, 0)^T, \quad (11)$$

$$L_2 = (-r_3 u_3, 0, u_1)^T, \quad (12)$$

$$L_3 = (0, r_3 u_3, -r_2 u_2)^T. \quad (13)$$

Это проверяется непосредственно вычислением скалярного произведения косимметрии L_i и правой части системы F .

Так как линейная комбинация двух векторов из (11)–(13) позволяет получить третий (например, $-u_1 L_3 = r_3 u_3 L_1 + r_2 u_2 L_2$), то пару косимметрий можно получить при помощи процедуры ортогонализации Грама–Шмидта. Полученные векторы будут ортогональны друг другу и вектору правой части F .

Рассмотрим возмущение системы (8) при следующем выборе коэффициентов взаимодействия для исходной модели (1)–(3)

$$\alpha_i = 1 - s, \quad \beta_i = 1 + hs. \quad (14)$$

Проанализировать решения, реализующиеся в результате разрушения семейства, позволяет метод, основанный на вычислении косимметричного дефекта и селективной функции [18].

Скалярные произведения косимметрий и вектора правой части системы (1)–(3) дают косимметрические дефекты

$$\mathcal{D}_1 = (F, L_1) = ((u_1 - u_3)h + u_2 - u_3)sr_2u_1u_2, \quad (15)$$

$$\mathcal{D}_2 = (F, L_2) = -((u_2 - u_3)h - u_1 + u_2)sr_3u_1u_3, \quad (16)$$

$$\mathcal{D}_3 = (F, L_3) = -((u_1 - u_2)h + u_1 - u_3)sr_2r_3u_2u_3. \quad (17)$$

Видно, что \mathcal{D}_i обращаются в нуль для равновесий E_i (4), а также для равновесия E_* (5), которое имеет три одинаковые координаты $p_i = [3 + (h - 1)s]^{-1}$. Таким образом, при возмущении (14) из двухпараметрического семейства сохраняются четыре равновесия. Проанализируем, что происходит с остальными членами семейства (9). Для этого подставим в (15)–(17) выражения для отрезка из элементов (9). В результате получаются селекционные (селективные) функции. Например, для отрезка $(u_1, u_1, 1 - 2u_1)$, где $0 < u_1 < \frac{1}{3}$, имеем:

$$\mathcal{S}_1 = (3u_1 - 1)(h + 1)sr_2u_1^2, \quad (18)$$

$$\mathcal{S}_2 = (3u_1 - 1)(-1 + 2u_1)hsr_3u_1, \quad (19)$$

$$\mathcal{S}_3 = (3u_1 - 1)(-1 + 2u_1)sr_2r_3u_1. \quad (20)$$

Видно, что $\mathcal{S}_i(u_1) \neq 0$ при любых $u_1 \in (0, \frac{1}{3})$. Следовательно, при возмущении системы (8) из равновесий (9), отвечающих значениям $u_1 \in [0, \frac{1}{3}]$, остаются только концевые точки. Аналогично получается и для других отрезков, которые идут от точки E_* до границы семейства равновесий. В этом случае согласно [18] возможно появление предельных циклов.

В [8] показано, что для симметричной модели ($r_i = 1$) семейство предельных циклов получается при $\alpha + \beta = 2$, что соответствует значению $h = 1$. Циклы располагаются на плоскости (10) и образуют систему концентрических замкнутых кривых вокруг равновесия (5) с тремя ненулевыми компонентами:

$$E_* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \quad (21)$$

Проанализируем свойства этих режимов для двух наборов коэффициентов: $\alpha = 0.8, \beta = 1.2$ и $\alpha = 0.6, \beta = 1.4$. На рис. 1 приведены результаты вычислений периодов циклов из семейства. Для этого использован алгоритм, описанный в приложении А. На рис. 1, а кружки обозначают начальные точки для расчета периодов и мультипликаторов периодических режимов. Траектория каждого режима определяется начальной точкой на плоскости (10) и не зависит от α, β . Периоды циклов и значения их мультипликаторов приведены в табл. 1. Обозначим через d расстояние от начальной точки до равновесия (21). Видно, что с увеличением d периоды циклов растут (рис. 1, b).

В вычислительном эксперименте установлено, что с увеличением разности $\beta - 1$ периоды предельных циклов уменьшаются. Это иллюстрирует рис. 1, с, где представлены результаты вычисления периодов циклов T для двух начальных точек: $P_1 = (0.3, 0.4, 0.3)$ и $P_2 = (0.6, 0.1, 0.3)$. На рис. 1, d приведены зависимости от $\beta - 1$ произведения $T(\beta - 1)$. Таким образом, получается, что период цикла обратно пропорционален разности $\beta - 1$, то есть $T = K(\beta - 1)^{-1}$, где K определяется выбором начальной точки.

Анализ устойчивости равновесий и проведенный вычислительный эксперимент показали, что при отличных от единицы значениях r_i на плоскости параметров $\alpha_i = \alpha, \beta_i = \beta$ получается

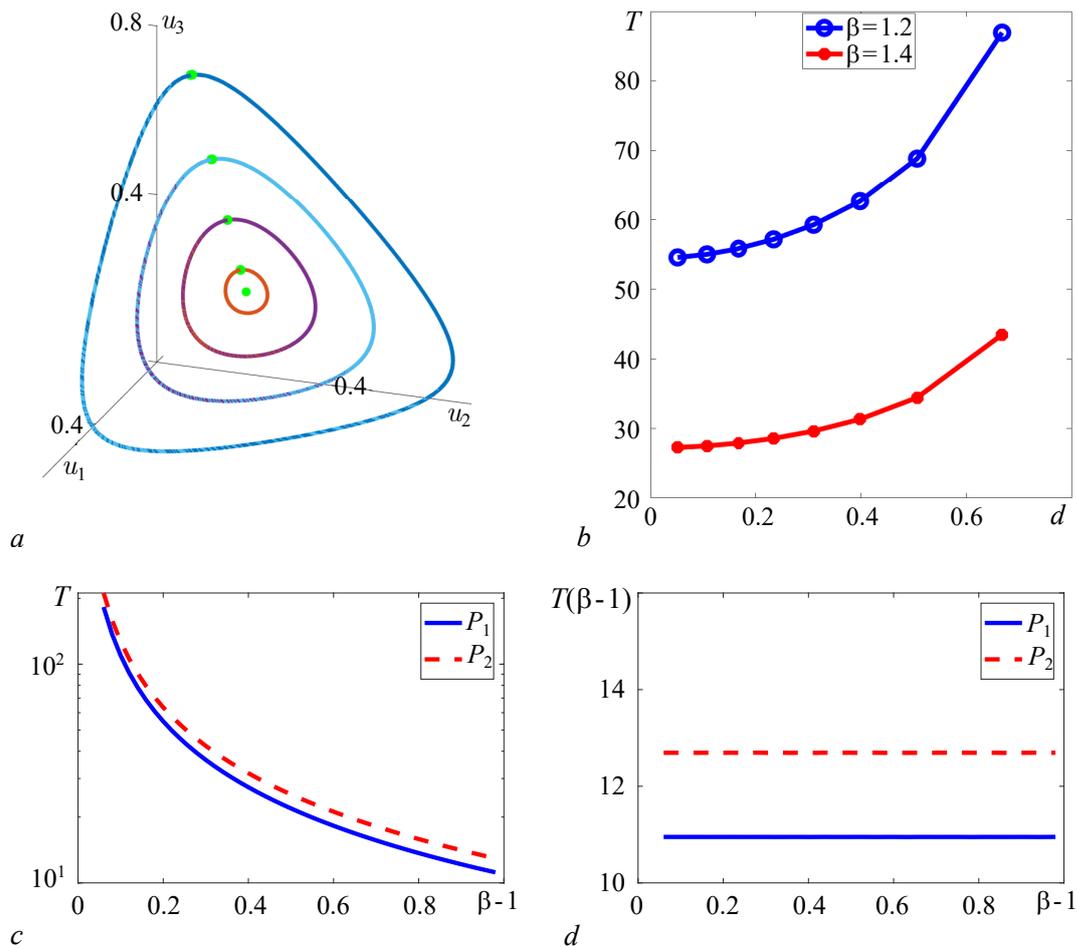


Рис. 1. Семейство предельных циклов: *a* – траектории, *b* – график зависимости периодов от расстояния между начальной точкой и равновесием (21), *c* и *d* – графики зависимости периодов предельных циклов от значения $\beta - 1$ (цвет онлайн)

Fig. 1. Family of limit cycles: *a* – trajectories, *b* – dependence of period T on the distance from the starting point to equilibrium (21), *c* and *d* – graphs dependence of periods of limit cycles on the value of $\beta - 1$ (color online)

Таблица 1. Периоды (T) и мультипликаторы (ρ_i) предельных циклов при $\alpha + \beta = 2$, $r_i = 1$

Table 1. Periods (T) and multipliers (ρ_i) of limit cycles for $\alpha + \beta = 2$, $r_i = 1$

Коэффициенты взаимодействия	d	Период	ρ_1	ρ_2, ρ_3
$\alpha_i = 0.8, \beta_i = 1.2$	0.05	54.55	1.3×10^{-16}	1.0, 1.0
	0.31	59.25	-1.0×10^{-16}	$1.0 \pm i0.0002$
	0.51	68.87	-1.1×10^{-16}	$1.0 \pm i0.0003$
$\alpha_i = 0.6, \beta_i = 1.4$	0.05	27.28	1.4×10^{-12}	1.0, 0.99999
	0.31	29.62	1.4×10^{-13}	$1.0 \pm i6.7 \times 10^{-5}$
	0.51	34.43	1.1×10^{-15}	$1.0 \pm i0.0008$

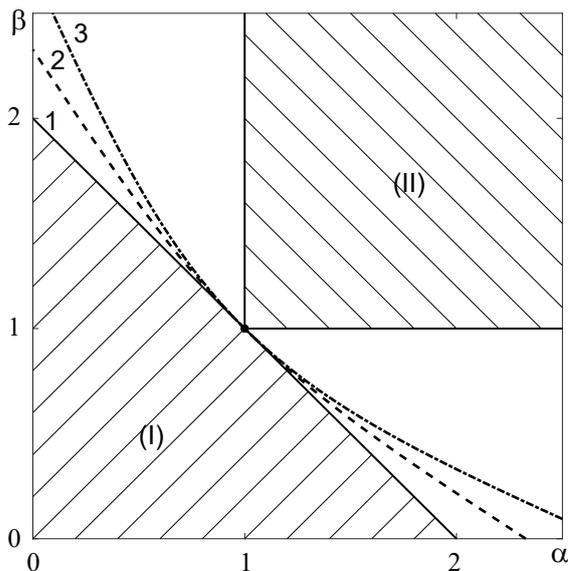


Рис. 2. Области устойчивости равновесий E_* (I) и E_i (II) системы (1)–(3) при $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$. Граница области (I) при $r_2 = r_3 = 1$ (1), при $r_2 = 0.5$, $r_3 = 2.5$ (2), при $r_2 = 2$, $r_3 = 0.2$ (3)

Fig. 2. The stability regions of the equilibria E_* (I) and E_i (II) of the (1)–(3) system for $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$. Region boundary (I) at $r_2 = r_3 = 1$ (1), at $r_2 = 0.5$, $r_3 = 2.5$ (2), at $r_2 = 2$, $r_3 = 0.2$ (3)

и одному неустойчивому усю, которые принадлежат плоскостям, соответствующим отсутствию одного из видов ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$ или $u_3 = 0$).

Кроме того, для четырехпараметрической модели ($\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, r_i) имеется область значений α , β , при которых реализуется бистабильность: устойчивы равновесие E_* и гетероклинический цикл, разделенные неустойчивым седловым предельным циклом. На рис. 2 эта область примыкает к вогнутым кривым — границе области устойчивости равновесия E_* .

2. Вычислительный эксперимент

Для поиска предельных циклов системы (1)–(3) с восемью параметрами будем анализировать устойчивость равновесия E_* (5), которая определяется корнями характеристического полинома:

$$\sigma^3 + C_2\sigma^2 + C_1\sigma + C_0 = 0, \quad (22)$$

где

$$C_2 = p_1 + p_2r_2 + p_3r_3,$$

$$C_1 = r_2r_3p_2p_3(1 - \alpha_2\beta_3) + r_2p_1p_2(1 - \alpha_1\beta_2) + r_3p_1p_3(1 - \alpha_3\beta_1),$$

$$C_0 = r_2r_3p_1p_2p_3(1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3).$$

В работе [12] показано, что неустойчивый предельный цикл имеется при выполнении условий $C_2C_1 > C_0$, $A < B$, а устойчивый предельный цикл — при $C_2C_1 < C_0$, $A > B$, здесь A и B

карта режимов, аналогичная приведенной в работе [8] (рис. 2). При $\alpha, \beta > 1$ имеется мультистабильность: устойчивы равновесия E_i (4), причем реализация конкретного равновесия зависит от выбора начальной точки.

Треугольник, ограниченный отрезками $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha + \beta = 2$, определяет область устойчивости равновесия E_* (21) при $r_2 = r_3 = 1$. С изменением r_i прямая $\alpha + \beta = 2$ превращается в вогнутую кривую, так что область устойчивости равновесия E_* включает треугольник, получающийся при $r_i = 1$. При этом граница деформированной области содержит точку с координатами $\alpha = \beta = 1$, для этих значений система (8) имеет двухпараметрическое семейство равновесий (9) и косимметрии (11)–(13).

При значениях α и β вне области устойчивости равновесия E_* и зоны мультистабильности (устойчивость равновесий E_i) получается устойчивый гетероклинический цикл [8], формирующийся из кривых, «соединяющих» равновесия E_1 , E_2 и E_3 . Данные равновесия при $\alpha_i < \beta_i$ имеют по одному устойчивому и

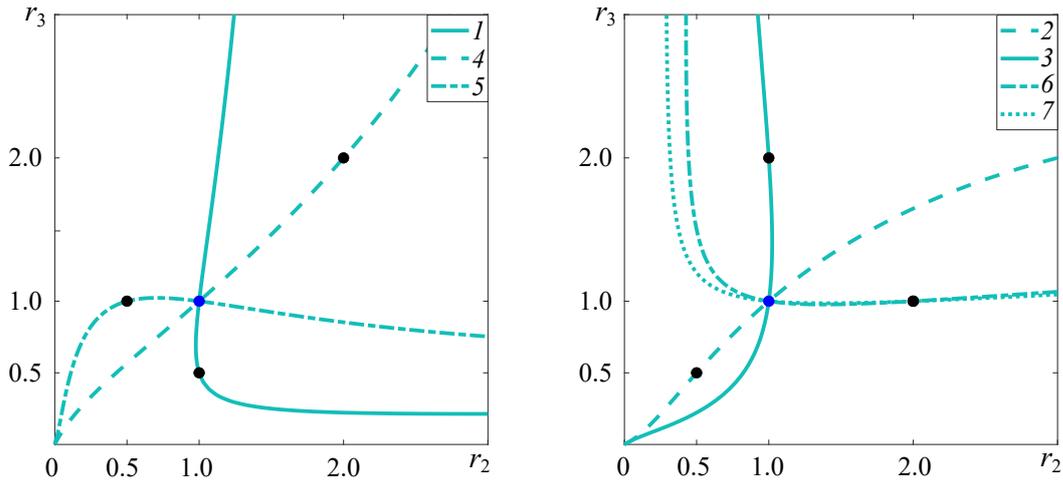


Рис. 3. Кривые зависимости r_3 от r_2 , отвечающие условию (23); цифры соответствуют строкам табл. 2 (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence curves of r_3 on r_2 , which ensure the fulfillment of the condition (23); the numbers correspond to the rows in Table 2 (color online)

определяются формулами (6). Будем искать значения параметров, при которых полином (22) имеет пару мнимых корней, то есть выполняется

$$C_2C_1 = C_0. \quad (23)$$

Равенство (23) содержит все восемь параметров системы (1)–(3). В табл. 2 для ряда значений коэффициентов α_i, β_i , обеспечивающих выполнение равенства $A = B$, приведены величины параметров роста r_i , для которых установлено существование семейств предельных циклов [9, 12]. Этим значениям r_i на рис. 3 соответствуют точки, через которые проходят кривые, отвечающие (23). Для разных вариантов α_i, β_i кривые пересекаются в общей точке $r_2 = r_3 = 1$. Таким образом, для шести наборов коэффициентов взаимодействия (случаи 1–6 из табл. 2) существуют семейства предельных циклов при параметрах роста, указанных в табл. 2, и для $r_2 = r_3 = 1$. Имеются также значения коэффициентов взаимодействия, для которых кривая на плоскости r_2, r_3 стягивается в одну точку. Такой случай приведен в последней строке табл. 2.

Таблица 2. Комбинации параметров, для которых имеются семейства предельных циклов при выполнении условий (23) и $A = B$ (см. рис. 3)

Table 2. Combinations of parameters for which there are families of limit cycles under the conditions (23) and $A = B$ (see fig. 3)

α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	r_2	r_3	Кривая
0.8	0.8	0.8	1.1	1.2	1.4	1	0.5	1
			1.1	1.4	1.2	0.5	0.5	2
			1.4	1.2	1.1	1	2	3
			1.4	1.1	1.2	2	2	4
			1.2	1.4	1.1	0.5	1	5
			1.2	1.1	1.4	2	1	6
0.6	0.8	0.9	1.1	1.2	1.4	2	1	7
			1.1	1.4	1.2	1	1	

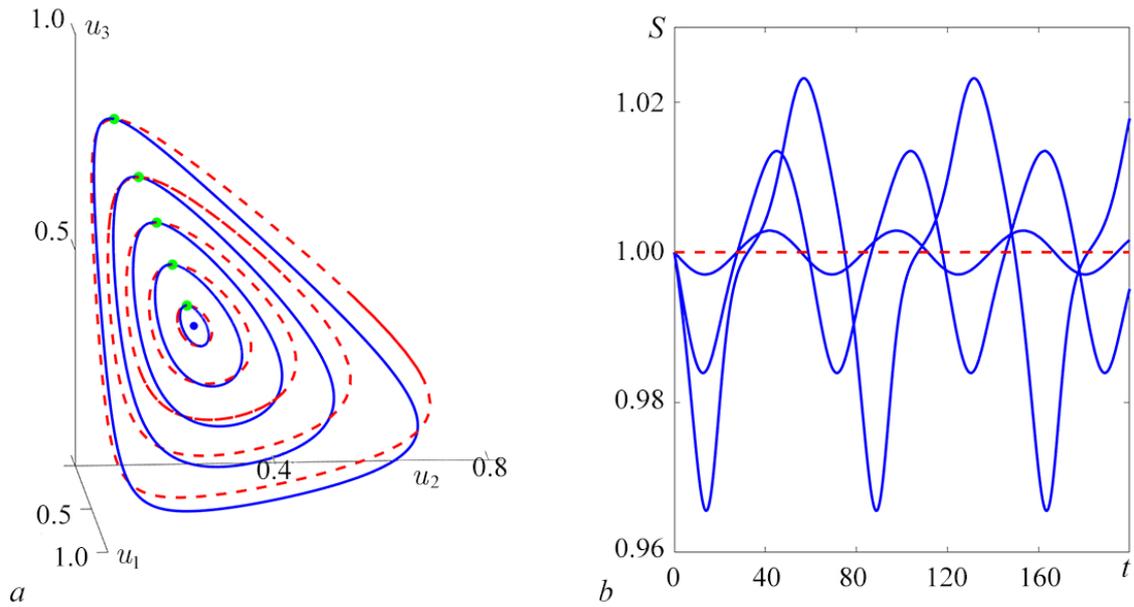


Рис. 4. Семейство предельных циклов при $r_2 = 1, r_3 = 1$ (синие сплошные линии) и $r_2 = 1, r_3 = 0.5$ (красные штриховые): a – траектории в фазовом пространстве, b – зависимость от времени значения суммы видов S ; $\alpha_i = 0.8, \beta_1 = 1.1, \beta_2 = 1.2, \beta_3 = 1.4$ (цвет онлайн)

Fig. 4. The family of limit cycles for $r_2 = 1, r_3 = 1$ (solid blue lines) and $r_2 = 1, r_3 = 0.5$ (red dashed): a – trajectories in phase space, b – time dependence of the sum of species S ; $\alpha_i = 0.8, \beta_1 = 1.1, \beta_2 = 1.2, \beta_3 = 1.4$ (color online)

На рис. 4, a представлены предельные циклы из двух семейств, вычисленные при $\alpha_i = 0.8, \beta_1 = 1.1, \beta_2 = 1.2, \beta_3 = 1.4, r_2 = 1$ для значений $r_3 = 1$ (синие кривые) и $r_3 = 0.5$ (красные штриховые). Начальные точки и все семейство, отвечающее значению $r_3 = 0.5$, лежат в плоскости (10). Предельные циклы для случая $r_3 = 1$ пересекают плоскость (10) и по мере удаления начальной точки от E_* амплитуда колебаний становится больше. Это характеризует рис. 4, b , где представлены графики изменения по времени суммы видов $S(t) = \sum_{i=1}^3 u_i(t)$.

В проведенном вычислительном эксперименте было найдено, что семейство предельных циклов существует и при r_2, r_3 , отличающихся от описанных в [9, 12]. На рис. 5 для значений α_i, β_i , отвечающих случаям 1 и 4 из табл. 2, дана кривая зависимости r_3 от r_2 , удовлетворяющая равенству (23). Для значений r_2, r_3 , лежащих между этой кривой (синяя сплошная) и рассчитанной границей (красная штриховая), наблюдаются изолированные предельные циклы. Данные режимы находятся между гетероклиническим циклом и равновесием E_* . Точки T_j отвечают значениям r_2, r_3 , при которых получаются семейства предельных циклов. Например, в случае 1 кроме точек T_1 ($r_2 = r_3 = 1$) [9] и T_2 ($r_2 = 1, r_3 = 0.5$) [12] семейство предельных циклов получено для $r_2 = 0.9834636477, r_3 = 0.8335$ (точка T_3), см. рис. 5, a . Отметим, что точки T_j соответствуют пересечениям сплошной (синей) и штриховой (красной) кривых. Из рис. 5, b видно, что область значений r_2, r_3 , для которых имеются изолированные предельные циклы, может быть очень небольшой.

Для предельных циклов семейства были вычислены мультипликаторы, см. табл. 3. Видно, что модули мультипликаторов ρ_2, ρ_3 близки к единице. В условиях вырожденности задачи это можно рассматривать как хорошее приближение для двукратной единицы, одна из которых отвечает направлению вдоль орбиты цикла, а другая – нейтральному направлению для непрерывного семейства.

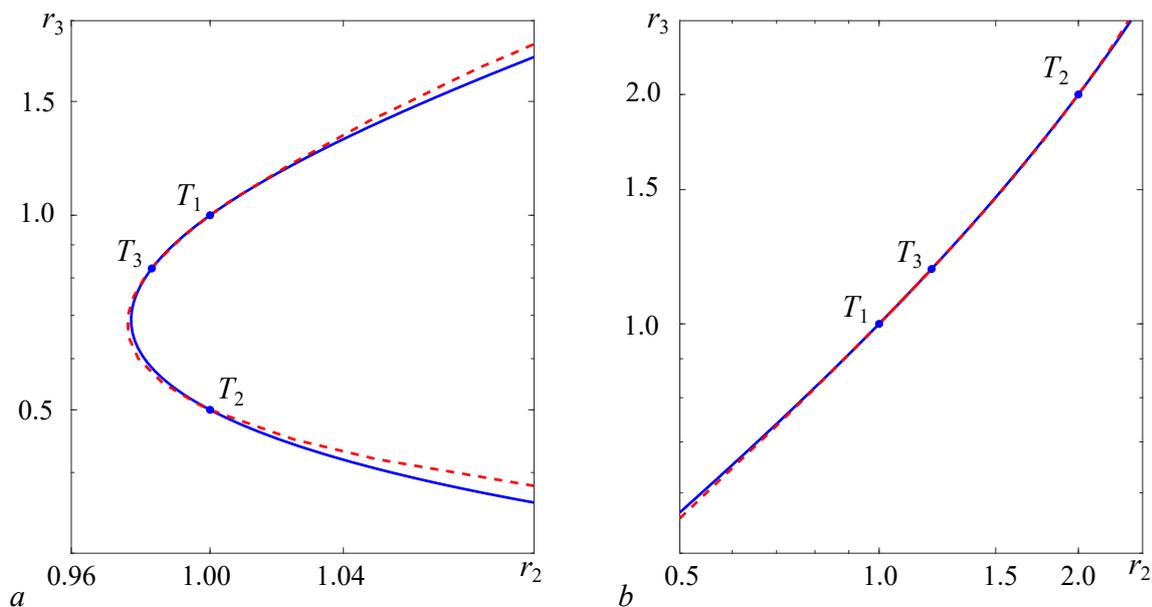


Рис. 5. Кривые зависимости r_3 от r_2 при $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$, $\beta_3 = 1.4$ (слева) — случай 1 в табл. 2 и $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.4$, $\beta_2 = 1.1$, $\beta_3 = 1.2$ (справа) — случай 4 в табл. 2; синяя кривая отвечает (23), красная штриховая отмечает границу существования предельных циклов, T_i соответствуют семействам предельных циклов (цвет онлайн)

Fig. 5. Curves of dependence of r_3 on r_2 at $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$, $\beta_3 = 1.4$ (left) — case 1 in Table 2 and $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.4$, $\beta_2 = 1.1$, $\beta_3 = 1.2$ (right) — case 4 in Table 2; the blue curve corresponds to (23), the red dashed line marks the boundary of the existence of limit cycles, T_i correspond to families of limit cycles (color online)

Таблица 3. Период и мультипликаторы циклов при разных значениях r_2 , r_3 ; $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$, $\beta_3 = 1.4$

Table 3. Period and cycle multipliers for different values of r_2 , r_3 ; $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$, $\beta_3 = 1.4$

r_2, r_3	Период	ρ_1	ρ_2, ρ_3
1, 1	58.84	-9.1×10^{-17}	$1.0 \pm i2.4 \times 10^{-5}$
	74.77	6.6×10^{-16}	$1.0 \pm i0.0002$
1, 0.5	75.11	9.2×10^{-18}	$1.0 \pm i0.0004$
	95.4	-1.4×10^{-16}	$1.0 \pm i0.0001$
0.9834636477, 0.8335	59.35	-8.6×10^{-17}	$1.0 \pm i0.0003$
	77.31	1.1×10^{-16}	$1.0 \pm i6.6 \times 10^{-5}$

На рис. 6 представлены траектории нескольких циклов из нового семейства ($r_2 = 0.9834636477$, $r_3 = 0.8335$, точка T_3 на рис. 5, а) и сходимость показателей Ляпунова для одного цикла из семейства.

Если параметры удовлетворяют условию (23), но при этом $A \neq B$, то семейство предельных циклов вырождается и получается медленная динамика, с очень малым прирастанием или убыванием амплитуды колебаний. Фрагменты таких траекторий из большого числа оборотов представлены далее на рис. 7. В этом случае возможна реализация изолированных предельных циклов. Зафиксируем значения пяти параметров: $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$. Тогда при $\beta_3 = 1.45$

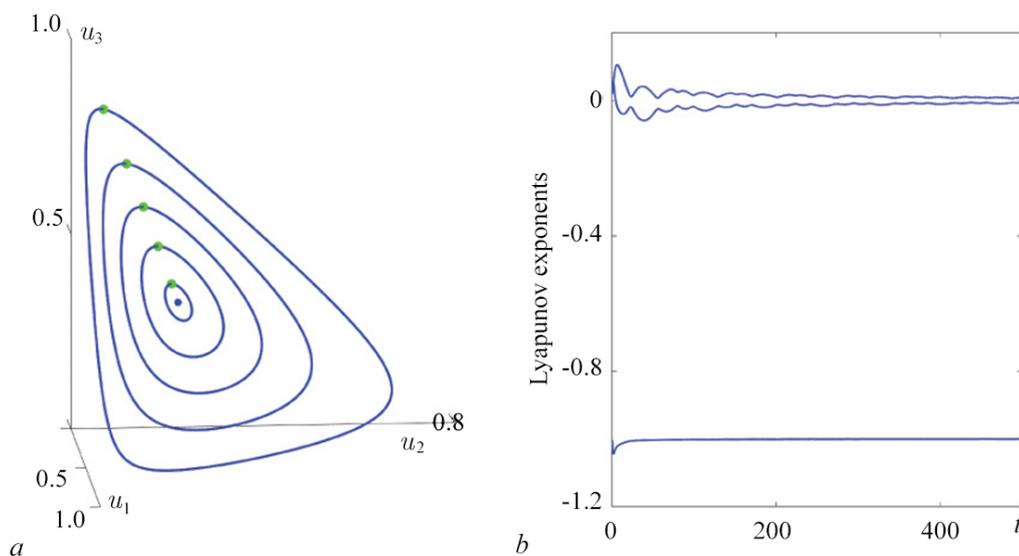


Рис. 6. Семейство предельных циклов при $r_2 = 0.9834636477$, $r_3 = 0.8335$: a – траектории в фазовом пространстве, b – показатели Ляпунова; $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$, $\beta_3 = 1.4$ (цвет онлайн)

Fig. 6. The family of limit cycles for $r_2 = 0.9834636477$, $r_3 = 0.8335$: a – trajectories in the phase space, b – Lyapunov exponents; $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$, $\beta_3 = 1.4$ (color online)

Таблица 4. Период и мультипликаторы предельных циклов при $A \neq B$;
 $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$, $\beta_2 = 1.2$

Table 4. Period and multipliers of limit cycles for $A \neq B$; $\alpha_i = 0.8$, $\beta_1 = 1.1$,
 $\beta_2 = 1.2$

β_3	r_2, r_3	Период	ρ_1	ρ_2, ρ_3
1.45	1.2, 0.22620179898	108.76	-5.8×10^{-18}	1.0, 1.0043
1.35	1.587661492, 3.5	37.8	-1.1×10^{-16}	1.0, 0.99625

получается $A < B$, а при $\beta_3 = 1.35$ – $A > B$. В табл. 4 представлены мультипликаторы вычисленных предельных циклов при различных значениях r_2, r_3 . Первая строка отвечает неустойчивому предельному циклу ($\rho_3 > 1$), а вторая – устойчивому предельному циклу ($\rho_3 < 1$).

Результаты, иллюстрирующие существование предельных циклов, представлены на рис. 7 для ряда значений параметров роста. Расчеты проводились из различных начальных данных (черные звезды на рисунке) на интервалах времени, позволяющих убедиться в росте или затухании амплитуды колебаний (цветные полосы на рисунке). Конечные состояния отмечены синими точками. При $\beta_3 = 1.45$ существуют бассейны начальных данных, из которых реализуется равновесие E_* и гетероклинический цикл, опирающийся на равновесия E_i (рис. 7, a). В этом случае имеется неустойчивый предельный цикл (тонкая кривая). Для $\beta_3 = 1.35$ равновесие E_* и гетероклинический цикл неустойчивы и имеется изолированный предельный цикл (рис. 7, b). Этот цикл получается для небольших интервалов значений параметров роста r_2, r_3 .

Кроме того, были обнаружены другие сценарии динамики. Например, при $\beta_3 = 1.45$, $r_2 = 1.6$, $r_3 = 0.195$ и $\beta_3 = 1.35$, $r_2 = 1.6$, $r_3 = 3.62$ имеется два изолированных (устойчивый и неустойчивый) предельных цикла (рис. 7, c, d). Это означает бистабильность в виде сосуществования гетероклинического цикла и изолированного устойчивого предельного цикла, а также равновесия (стационарного решения) и изолированного устойчивого предельного цикла.

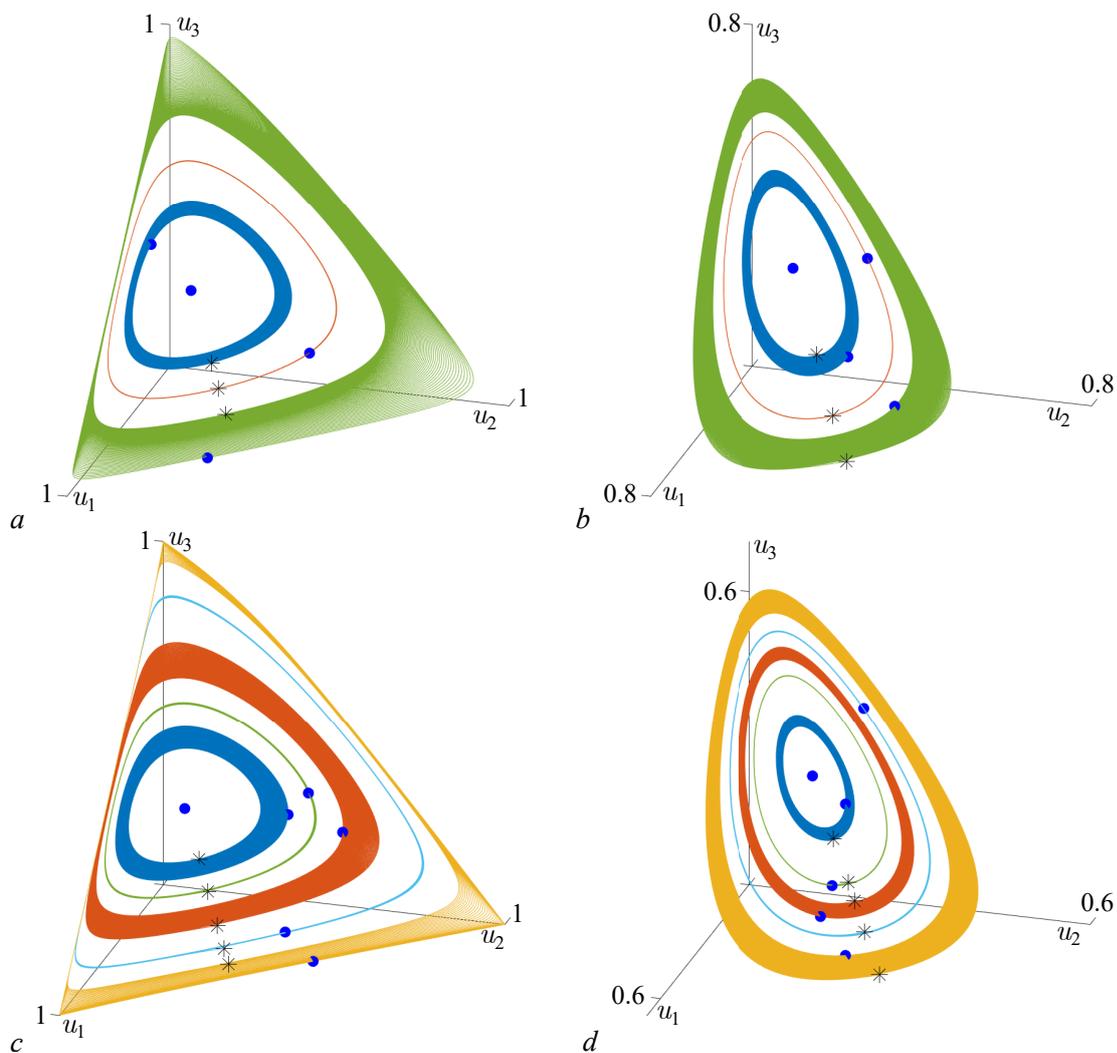


Рис. 7. Колебания с меняющейся амплитудой (цветные полосы) и изолированные предельные циклы (тонкие кривые) при $\beta_3 = 1.45$ (слева) и при $\beta_3 = 1.35$ (справа): $a - r_2 = 1.2, r_3 = 0.22620179898$, $b - r_2 = 1.587661492, r_3 = 3.5$, $c - r_2 = 1.6, r_3 = 0.195$, $d - r_2 = 1.6, r_3 = 3.62$; начальные условия – черные звезды, конечные состояния – синие точки (цвет онлайн)

Fig. 7. Oscillations with varying amplitude (color bars) and isolated limit cycles (thin curves) at $\beta_3 = 1.45$ (left) and at $\beta_3 = 1.35$ (right): $a - r_2 = 1.2, r_3 = 0.22620179898$, $b - r_2 = 1.587661492, r_3 = 3.5$, $c - r_2 = 1.6, r_3 = 0.195$, $d - r_2 = 1.6, r_3 = 3.62$; initial conditions are black stars, final states are blue dots (color online)

В вычислительном эксперименте при фиксированных коэффициентах взаимодействия найдены области значений параметров роста, при которых реализуются переходы от устойчивого равновесия с ненулевыми компонентами E_* к устойчивому гетероклиническому циклу. Например, для фиксированных коэффициентов $\alpha_i = 0.8$ ($i = 1, 2, 3$), $\beta_1 = 1.1, \beta_2 = 1.2, \beta_3 = 1.35$ при $r_2 = 1.6$ равновесие E_* устойчиво от $r_3 \approx 3.7$ до $r_3 \approx 3.6$. Для $r_3 \approx 3.62$ происходит рождение «из воздуха» устойчивого и неустойчивого предельных циклов, которые с уменьшением параметра r_3 влипают соответственно в гетероклинический цикл и равновесие E_* , так что при $r_3 = 3.35$ устойчив только гетероклинический цикл. При значениях $0.3 < r_3 < 0.4$ переход от устойчивого равновесия E_* к устойчивому гетероклиническому циклу происходит при увеличении r_3 . Аналогичный сценарий реализуется и при значениях r_2 , близких к рассмотренному случаю $r_2 = 1.6$.

Заключение

Данная работа посвящена исследованию относительно простой системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих конкуренцию трех неантагонистических видов на пространственно-однородном ареале. Рассматриваются колебательные сценарии взаимодействия видов и возникновения семейств предельных циклов. С использованием теории косимметрии установлена связь между разрушением двухпараметрического семейства стационарных решений (равновесий) и возникновением непрерывного семейства периодических режимов. Ранее в [20, 21] для системы двух хищников и жертвы был найден сценарий возникновения однопараметрического семейства предельных циклов, ответвляющихся от равновесий, составляющих однопараметрическое семейство. В [22] были обнаружены двухпараметрические семейства равновесий и предельных циклов (следствие мультикосимметрии) для системы двух хищников и двух жертв.

Проведенный анализ позволил найти новые случаи экстремальной мультистабильности — возникновение континуального семейства предельных циклов при дополнительных соотношениях на параметры системы. При нарушении этих соотношений реализуются долговременные режимы установления к изолированным периодическим режимам, в том числе и к гетероклиническому циклу. Такая динамика связана с разрушением косимметричного семейства предельных циклов.

Полученные результаты могут быть полезны для анализа конкуренции видов с учетом стохастических воздействий. Практика показывает [23–25], что для трактовки результатов с учетом шумов полезно предварительное исследование детерминированной системы с выделением бифуркационных интервалов для параметров. Результаты, представленные на рис. 7, показывают, что для разных значений параметров роста фазовую картину существенно меняют небольшие отклонения коэффициента β_3 от значения, при котором возможно существование семейств циклов.

Далее предполагается исследование колебательных режимов для пространственно-распределенных систем конкурирующих популяций. При $\beta_i = 0$ в [26] рассмотрена задача для трех видов с учетом пространственных эффектов и запаздывания. Анализ конкуренции двух видов с учетом пространственных эффектов показал, что типичным сценарием является установление к стационарным распределениям [27]. При дополнительных соотношениях между параметрами систем возможны косимметрии и мультистабильные решения в виде семейств стационарных распределений [28, 29].

Приложение

Вычисление мультипликаторов предельного цикла

Система автономных дифференциальных уравнений (1)–(3) записывается в виде

$$\dot{u} = f(u), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad u = (u_1, u_2, u_3), \quad n = 3. \quad (24)$$

Ее периодическое решение, имеющее период $T > 0$, удовлетворяет условию

$$u(t + T) = u(t). \quad (25)$$

Устойчивость периодического решения определяется собственными числами матрицы монодромии [30, 31], у которой всегда существует единичное собственное значение $\rho_1 = 1$. Если остальные собственные числа лежат внутри единичной окружности, то периодическое решение устойчиво. Решение неустойчиво, если существует хотя бы одно собственное значение вне единичной окружности.

В расчетах асимптотически устойчивый периодический режим получался в результате установления, при этом оценивалась величина периода T . Для вычисления периодического решения системы (24) полагали, что в (25) $t = 0$. Через $U_t(x)$ далее обозначается оператор сдвига по траектории системы (24) из точки $u(0) = x$ за время t .

Задача поиска предельного цикла сводилась к нахождению неподвижной точки оператора $U_t(x)$, то есть точки x , удовлетворяющей условию $x = U_T(x)$. Получающаяся система состояла из n уравнений с $n + 1$ неизвестными (координаты точки x и период T).

$$g(x) = x - U_T(x) = 0. \quad (26)$$

В расчетах фиксировалась одна из координат x ($x_3 \equiv u_3$). Для решения уравнения (26) применялся метод Ньютона

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - M^{-1}(x^{(m)})g(x^{(m)}). \quad (27)$$

Здесь M — матрица Якоби системы (26). Вместе с решением задачи Коши для (24) решались задачи в вариациях, для которых начальными данными являлись орты фазового пространства: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. На каждом шаге метода Ньютона (27) решалась задача Коши для системы $n(n + 1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Для расчета предельных циклов использовались различные варианты метода Рунге–Кутты, реализованные в MATLAB (функции `ode45` и `ode89`), вычисления производились с контролем абсолютной и относительной точности. В вычислениях для оценки сходимости метода Ньютона использовались значения 10^{-5} и 10^{-7} , а при расчетах методом Рунге–Кутты применялись величины 10^{-7} и 10^{-9} .

Список литературы

1. *Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Мюррей Дж.* Математическая биология. Т. 1. Введение. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований; Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 776 с.
3. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
4. *Rubin A., Riznichenko G.* Mathematical Biophysics. New York: Springer, 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
5. *Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. *Lotka A. J.* Elements of Physical Biology. Philadelphia, Pennsylvania: Williams & Wilkins, 1925. 495 p.
7. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. 1926. Vol. 2. P. 31–113.
8. *May R. M., Leonard W. J.* Nonlinear aspects of competition between three species // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1975. Vol. 29, no. 2. P. 243–253. DOI: 10.1137/0129022.
9. *Chia-Wei C., Lih-Ing W., Sze-Bi H.* On the asymmetric May–Leonard model of three competing species // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1998. Vol. 58, no. 1. P. 211–226. DOI: 10.1137/S0036139994272060.
10. *Antonov V., Dolićanin D., Romanovski V. G., Tóth J.* Invariant planes and periodic oscillations in the May–Leonard asymmetric model // MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry. 2016. Vol. 76, no. 2. P. 455–474.

11. *van der Hoff Q., Greeff J. C., Fay T. H.* Defining a stability boundary for three species competition models // *Ecological Modelling*. 2009. Vol. 220, no. 20. P. 2640–2645. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2009.07.027.
12. *Hou Z., Baigent S.* Heteroclinic limit cycles in competitive Kolmogorov systems // *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2013. Vol. 33, no. 9. P. 4071–4093. DOI: 10.3934/dcds.2013.33.4071.
13. *Zeeman E. C., Zeeman M. L.* An n-dimensional competitive Lotka–Volterra system is generically determined by the edges of its carrying simplex // *Nonlinearity*. 2002. Vol. 15, no. 6. P. 2019–2032. DOI: 10.1088/0951-7715/15/6/312.
14. *Zeeman E. C., Zeeman M. L.* From local to global behavior in competitive Lotka–Volterra systems // *Transactions of the American Mathematical Society*. 2003. Vol. 355, no. 2. P. 713–734. DOI: 10.1090/s0002-9947-02-03103-3.
15. *Chen X., Jiang J., Niu L.* On Lotka–Volterra equations with identical minimal intrinsic growth rate // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2015. Vol. 14, no. 3. P. 1558–1599. DOI: 10.1137/15M1006878.
16. *Jiang J., Liang F.* Global dynamics of 3D competitive Lotka–Volterra equations with the identical intrinsic growth rate // *Journal of Differential Equations*. 2020. Vol. 268, no. 6. P. 2551–2586. DOI: 10.1016/j.jde.2019.09.039.
17. *Нгуен Б. Х., Ха Д. Т., Цибулин В. Г.* Мультистабильность для системы трех конкурирующих видов // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2022. Т. 14, № 6. С. 1325–1342. DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-6-1325-1342.
18. *Юдович В. И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 398, № 1. С. 57–61.
19. *Yudovich V. I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. Vol. 5, no 2. P. 402–411. DOI: 10.1063/1.166110.
20. *Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование колебательных сценариев сосуществования конкурирующих популяций // *Биофизика*. 2016. Т. 61, № 4. С. 823–832.
21. *Епифанов А. В., Цибулин В. Г.* О динамике косимметричных систем хищников и жертв // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2017. Т. 9, № 5. С. 799–813. DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-799-813.
22. *Ха Д. Т., Цибулин В. Г.* Мультистабильные сценарии для дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы хищников и жертв // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020. Т. 12, № 6. С. 1451–1466. DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1451-1466.
23. *Fay T. H., Greeff J. C.* A three species competition model as a decision support tool // *Ecological Modelling*. 2008. Vol. 211, no. 1–2. P. 142–152. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2007.08.023.
24. *Баширцева И. А., Карпенко Л. В., Ряшко Л. Б.* Стохастическая чувствительность предельных циклов модели «хищник – две жертвы» // *Известия вузов. ПНД*. 2010. Т. 18, № 6. С. 42–64. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-6-42-64.
25. *Абрамова Е. П., Рязанова Т. В.* Динамические режимы стохастической модели «хищник–жертва» с учетом конкуренции и насыщения // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2019. Т. 11, № 3. С. 515–531. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-515-531.
26. *Bayliss A., Nepomnyashchy A. A., Volpert V. A.* Mathematical modeling of cyclic population dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019. Vol. 394. P. 56–78. DOI: 10.1016/j.physd.2019.01.010.

27. *Frischmuth K., Budyansky A. V., Tsybulin V. G.* Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability // *Applied Mathematics and Computation*. 2021. Vol. 410. P. 126456. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456.
28. *Будянский А. В., Цибулин В. Г.* Моделирование динамики популяций на неоднородном ареале: инвазия и мультистабильность // *Биофизика*. 2022. Т. 67, № 1. С. 174–182. DOI: 10.31857/S0006302922010197.
29. *Ха Т. Д., Цибулин В. Г.* Мультистабильность для математической модели динамики хищников и жертв на неоднородном ареале // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2022. Т. 68, № 3. С. 509–521. DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-509-521.
30. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 400 с.
31. *Waugh I., Illingworth S., Juniper M.* Matrix-free continuation of limit cycles for bifurcation analysis of large thermoacoustic systems // *Journal of Computational Physics*. 2013. Vol. 240. P. 225–247. DOI: 10.1016/j.jcp.2012.12.034.

References

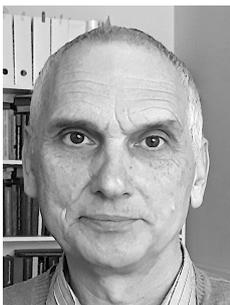
1. Svirezhev IM, Logofet DO. Resilience of Biological Communities. Moscow: Nauka; 1978. 352 p. (in Russian).
2. Murray JD. Mathematical Biology. I. An Introduction. New York: Springer; 2002. 551 p. DOI: 10.1007/b98868.
3. Bazykin AD. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. Singapore: World Scientific; 1998. 216 p. DOI: 10.1142/2284.
4. Rubin A, Riznichenko G. Mathematical Biophysics. New York: Springer; 2014. 273 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8702-9.
5. Frisman YY, Kulakov MP, Revutskaya OL, Zhdanova OL, Neverova GP. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. *Computer Research and Modeling*. 2019;11(1):119–151 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. Lotka AJ. Elements of Physical Biology. Philadelphia, Pennsylvania: Williams & Wilkins; 1925. 495 p.
7. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*. 1926;2:31–113 (in Italian).
8. May RM, Leonard WJ. Nonlinear aspects of competition between three species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1975;29(2):243–253. DOI: 10.1137/0129022.
9. Chia-Wei C, Lih-Ing W, Sze-Bi H. On the asymmetric May–Leonard model of three competing species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1998;58(1):211–226. DOI: 10.1137/S0036139994272060.
10. Antonov V, Dolićanin D, Romanovski VG, Tóth J. Invariant planes and periodic oscillations in the May–Leonard asymmetric model. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*. 2016;76(2):455–474.
11. van der Hoff Q, Greeff JC, Fay TH. Defining a stability boundary for three species competition models. *Ecological Modelling*. 2009;220(20):2640–2645. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2009.07.027.
12. Hou Z, Baigent S. Heteroclinic limit cycles in competitive Kolmogorov systems. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2013;33(9):4071–4093. DOI: 10.3934/dcds.2013.33.4071.
13. Zeeman EC, Zeeman ML. An n-dimensional competitive Lotka–Volterra system is generically determined by the edges of its carrying simplex. *Nonlinearity*. 2002;15(6):2019–2032. DOI: 10.1088/0951-7715/15/6/312.

14. Zeeman EC, Zeeman ML. From local to global behavior in competitive Lotka-Volterra systems. *Transactions of the American Mathematical Society*. 2003;355(2):713–734. DOI: 10.1090/s0002-9947-02-03103-3.
15. Chen X, Jiang J, Niu L. On Lotka–Volterra equations with identical minimal intrinsic growth rate. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2015;14(3):1558–1599. DOI: 10.1137/15M1006878.
16. Jiang J, Liang F. Global dynamics of 3D competitive Lotka-Volterra equations with the identical intrinsic growth rate. *Journal of Differential Equations*. 2020;268(6):2551–2586. DOI: 10.1016/j.jde.2019.09.039.
17. Nguyen BH, Ha DT, Tsybulin VG. Multistability for system of three competing species. *Computer Research and Modeling*. 2022;14(6):1325–1342 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2022-14-6-1325-1342.
18. Yudovich VI. Bifurcations under perturbations violating cosymmetry. *Doklady Physics*. 2004;49(9):522–526. DOI: 10.1134/1.1810578.
19. Yudovich VI. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos*. 1995;5(2):402–411. DOI: 10.1063/1.166110.
20. Epifanov AV, Tsybulin VG. Modeling of oscillatory scenarios of the coexistence of competing populations. *Biophysics*. 2016;61(4):696–704. DOI: 10.1134/S0006350916040072.
21. Epifanov AV, Tsybulin VG. Regarding the dynamics of cosymmetric predator – prey systems. *Computer Research and Modeling*. 2017;9(5):799–813 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-5-799-813.
22. Ha TD, Tsybulin VG. Multi-stable scenarios for differential equations describing the dynamics of a predators and preys system. *Computer Research and Modeling*. 2020;12(6):1451–1466 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-6-1451-1466.
23. Fay TH, Greeff JC. A three species competition model as a decision support tool. *Ecological Modelling*. 2008;211(1–2):142–152. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2007.08.023.
24. Bashkirtseva IA, Karpenko LV, Ryashko LB. Stochastic sensitivity of limit cycles for «predator – two preys» model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(6):42–64 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-6-42-64.
25. Abramova EP, Ryazanova TV. Dynamic regimes of the stochastic “prey – predatory” model with competition and saturation. *Computer Research and Modeling*. 2019;11(3):515–531 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-3-515-531.
26. Bayliss A, Nepomnyashchy AA, Volpert VA. Mathematical modeling of cyclic population dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2019;394:56–78. DOI: 10.1016/j.physd.2019.01.010.
27. Frischmuth K, Budyansky AV, Tsybulin VG. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. *Applied Mathematics and Computation*. 2021;410:126456. DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456.
28. Budyansky AV, Tsybulin VG. Modeling the dynamics of populations in a heterogeneous environment: Invasion and multistability. *Biophysics*. 2022;67(1):146–152. DOI: 10.1134/S0006350922010043.
29. Ha TD, Tsybulin VG. Multistability for a mathematical model of the dynamics of predators and preys in a heterogeneous area. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 2022;68(3):509–521 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-509-521.
30. Pontryagin LS. *Ordinary Differential Equations*. USA: Addison-Wesley; 1962. 304 p. DOI: 10.1016/C2013-0-01692-1.
31. Waugh I, Illingworth S, Juniper M. Matrix-free continuation of limit cycles for bifurcation analysis of large thermoacoustic systems. *Journal of Computational Physics*. 2013;240:225–247. DOI: 10.1016/j.jcp.2012.12.034.



Нгуен Бьу Хоанг — родился в Куангнам, Вьетнам (1996), окончил Военно-морской институт в Санкт-Петербурге (2021). Учится в аспирантуре Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: kng@sfnu.ru
ORCID: 0009-0001-1644-5800



Цибулин Вячеслав Георгиевич — родился в Ростове-на-Дону (1956), окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1978). Защитил кандидатскую (1990) и докторскую (2011) диссертации. Работает в Институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета. Заведует кафедрой теоретической и компьютерной гидроаэродинамики. Занимается вычислительной гидродинамикой, задачами конвекции, популяционной динамикой и др. В соавторстве с В. Н. Говорухиным написал книги «Введение в Maple», «Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB и LaTeX»

Россия, 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ
E-mail: vgcibulin@sfnu.ru
ORCID: 0000-0003-4812-278X
AuthorID (eLibrary.Ru): 4304



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003043

Strategies and first-absorption times in the random walk game

M. I. Krivonosov^{1,2}✉, S. N. Tikhomirov¹

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

²Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ✉krivonosov@itmm.unn.ru, stikhomirov@itmm.unn.ru

Received 22.10.2022, accepted 5.04.2023, available online 15.05.2023, published 31.05.2023

Abstract. *Purpose* of this work is to determine the average time to reach the boundaries, as well as to identify the strategy in the game between two players, controlling point movements on the finite square lattice using an independent choice of strategies. One player wants to survive, i. e., to stay within the interior of the square, as long as possible, while his opponent wants to reach the absorbing boundary. A game starts from the center of the square and every next movement of the point is determined by independent strategy choices made by the players. The value of the game is the survival time that is the number of steps before the absorption happens. In addition we present series of experiments involving both human players and an autonomous agent (bot) and analysis of the survival time probability distributions. *Methods.* In this work, methods of the theory of absorbing Markov chains were used to analyze strategies and absorption times, as well as the Monte Carlo method to simulate trajectories. Additionally, a large-scale field experiment was conducted using the developed mobile application. *Results.* The players' strategies are experimentally obtained for the cases of playing against an autonomous agent (bot), as well as human players against each other. A comparison with optimal strategies and a random walk is made: the difference between the experimental strategies and the optimal ones is shown, however, the resulting strategies show a much better result of games than a simple random walk. In addition, especially long-running games do not show the Markovian property in case of the simulation corresponding strategies. *Conclusion.* The sampled histograms indicate that the game-driven walks are more complex than a random walk on a finite lattice but it can be reproduced with a Markov Chain model.

Keywords: random walk, markov chain, random walk game, mobile application, game experiment.

Acknowledgements. The authors are thankful to Sergey Denisov (Oslo Metropolitan University), who suggested the idea of experiment and designed the game. The reported study was funded by RFBR, project number No. 20-31-90121.

For citation: Krivonosov MI, Tikhomirov SN. Strategies and first-absorption times in the random walk game. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3):334–350. DOI: 10.18500/0869-6632-003043

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Стратегии и время поглощения в игровых случайных блужданиях

М. И. Кривоносов^{1,2}✉, С. Н. Тихомиров¹

¹Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия

²Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Москва, Россия

E-mail: ✉krivonosov@itmm.unn.ru, stikhomirov@itmm.unn.ru

Поступила в редакцию 22.10.2022, принята к публикации 5.04.2023,

опубликована онлайн 15.05.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования — определить среднее время достижения границы, а также выявить стратегии в игре между двумя игроками, управляющими движением фишки на конечной квадратной решетке с помощью независимого выбора стратегий. Один игрок старается оставаться внутри квадрата как можно дольше, пока его противник старается достичь поглощающей границы. Игра начинается в центре квадрата, и каждое следующее движение фишки определяется стратегиями, выбираемыми игроками независимо друг от друга. Результат игры — это время выживания, то есть количество шагов до того, как произойдет поглощение. Дополнительно в работе представляются результаты проведения серии экспериментов с участием как игроков-людей, так и автономного агента (бота), и анализ соответствующих распределений вероятностей времени выживания. **Методы.** В данной работе применялись методы теории поглощающих марковских цепей для анализа стратегий и времен достижения границы, а также метод Монте-Карло для симуляции траекторий. Дополнительно были применены подходы к проведению масштабного полевого эксперимента с использованием разработанного мобильного приложения. **Результаты.** Экспериментально получены стратегии игроков для случаев игры против автономного агента (бота), а также игроков-людей друг против друга. Проведено сравнение с оптимальными стратегиями и случайным блужданием, в ходе которого показано отличие экспериментальных стратегий от оптимальных, однако полученные стратегии показывают значительно лучший результат игр, чем простое случайное блуждание. Дополнительно проанализированы особенно длительные игры, не обладающие свойством марковости при столкновении соответствующих стратегий. **Заключение.** Найденные распределения указывают на то, что исследуемый процесс является более сложным, чем случайное блуждание на конечной решетке, однако распределение может быть воспроизведено с помощью моделей цепи Маркова.

Ключевые слова: случайные блуждания, марковские цепи, игровые случайные блуждания, мобильные приложения, игровой эксперимент.

Благодарности. Авторы благодарны Сергею Денисову (Oslo Metropolitan University) за предложенную идею эксперимента и построение игры. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90121.

Для цитирования: Кривоносов М. И., Тихомиров С. Н. Стратегии и время поглощения в игровых случайных блужданиях // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 334–350. DOI: 10.18500/0869-6632-003043. EDN: SWQCCC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Introduction

A one-dimensional random walk on a finite discrete interval is famously interpreted as a story of two gamblers playing a coin-flipping game again and again until one of the gambler's capital is exhausted and he is ruined [1, 2]. In the random-walk framework, this is a situation when the random walker — whose position is determined by the current capital of one of the players — reaches one of the two boundary points and is absorbed there. The ruin time is therefore first-passage or survival time, one of the key concepts of the random walk theory [3].

Assume now that the game is not completely random but the corresponding transition probabilities are controlled by the players. This is the idea of “games of survival” proposed by Hausner [4] and Peisakoff [5] in their notes in 1952. Similar to the original gambler ruin's process [6], survival games can be generalized to two and three dimensions and finally formulated in the most general way as a game-driven motion over some finite domain with a border [7]. In such a game one of the players tries

to avoid hitting the border while his opponent wants to reach the border as fast as possible. The game is specified with a matrix with a certain number of rows (strategies of the first player) and columns (strategies of the second player). On every step, the players independently choose their strategies, that is the first player chooses a row and the second one – the column, and the move of the point is determined by the corresponding element of the matrix. The game is over once the point has reached the boundary.

Even though the idea of such games was formulated more than seventy years ago [7], no quantitative results were presented until now. This is not a surprise as such games are characterized by high complexity [8]. Here we present an experimental realization of a two-dimensional survival game. Our idea is to consider the game as a first-passage process [3] and analyze the collected game histories from the corresponding perspective, by inspecting histograms of the survival time.

From the very start, random walks were interpreted in biological and behavioral terms, and now Pearson's drunkard [9] is no less famous than Schrödinger's cat. Different types of random walks [10, 11] are used as foundations to build optimal search theories and explain the spatial-temporal patterns produced by foraging animals and people exploring the Disney World park [12].

However, whenever a new random-walk model is introduced, a round of discussion about model's validity and the importance of all details neglected during the model's formulation immediately starts. E.g., it is often mentioned that search landscapes are not uniform but patchy and often exhibit fractal-like patterns, which might induce a power-law scaling in foraging trajectories [13, 14], or that people usually follow streets or existing trails which form a very correlated structure [15], etc. In other words, there are always factors and features that are not taken into account and thus there is always room for a discussion on whether these features are important and relevant; see, f.e., Refs. [16, 17]. Therefore, it would be beneficial to *design* a process, perform series of experiments (with organisms or humans), and collect the statistically sounding amount of data – which then can be analyzed.

In case of humans, game theory provides a possibility to implement this idea. The concept of game-driven or “game-type” [7] random walks, when players determine the move of a point by independently choosing strategies, looks like a good opportunity.

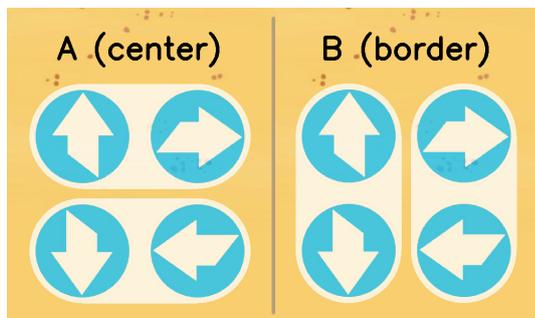
Here we present the results collected for a two-dimensional game-driven process, by using a mobile application (app) “Random Walk Game” [18]. The app provides two people with a possibility to play regardless of their location, interrupt games, and challenge each other for a game by inviting the opponent from the list of registered players. The app allowed us to collect data more quickly and with less effort than traditional methods (such as lab sessions) usually demand. Additionally, the app provides a human player with a possibility to play anytime against a bot (the latter, so to say, is simply flipping a fair coin on every round).

We analyze the collected game histories from a point of view of survival time statistics, by comparing the histograms of the game duration with the distributions corresponding to random walks and distributions obtained with Markov-chain models. The experimental histograms bear several features which demonstrate that the game-driven walks can be, in general, emulated with a Markov-chain model. However, we also have detected some games with anomalous length whose occurrence cannot be explained as ‘rare events’ of the corresponding model.

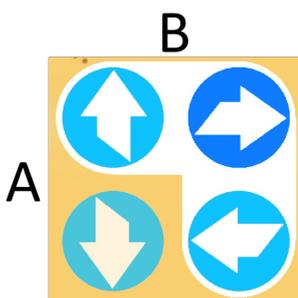
1. Game

The Random Walk Game is a game played on a square lattice by two players, A and B . The lattice consists of vertices (x, y) , $x, y \in \{-N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2\}$, where N is an even number, and the size of field is $n \times n$, where $n = N + 1$. The game always starts from the center of the square, i.e., from the vertex $(0, 0)$. Both players can see the current position of the marker on the lattice. The boundary vertices of the lattice can be defined as absorbing points and the game terminates once the marker gets into one of these vertices.

Players control the movement of the marker by making an independent choice of one out of the two possible strategies. Information about the possible movement is represented by a matrix (analog of a pay-off matrix in the standard games) which is known by both players; see Fig. 1, *a*. The movement of the marker is defined by the mutual choice of strategies; Fig. 1, *b*, Fig. 2.



a



b

Fig. 1. *a* – The strategies of two players, player A (playing 'for the center') and player B (playing 'for the border'). Each player has two strategies to choose from: Player A – (up, right) and (down, left) and player B – (up, down) and (right, left). *b* – Example of the one turn. At each step of the game, players independently choose their strategies. For example, if player A has chosen the first button (up, right) and the player B has chosen the second button (right, left), the next move will be to the right (color online)

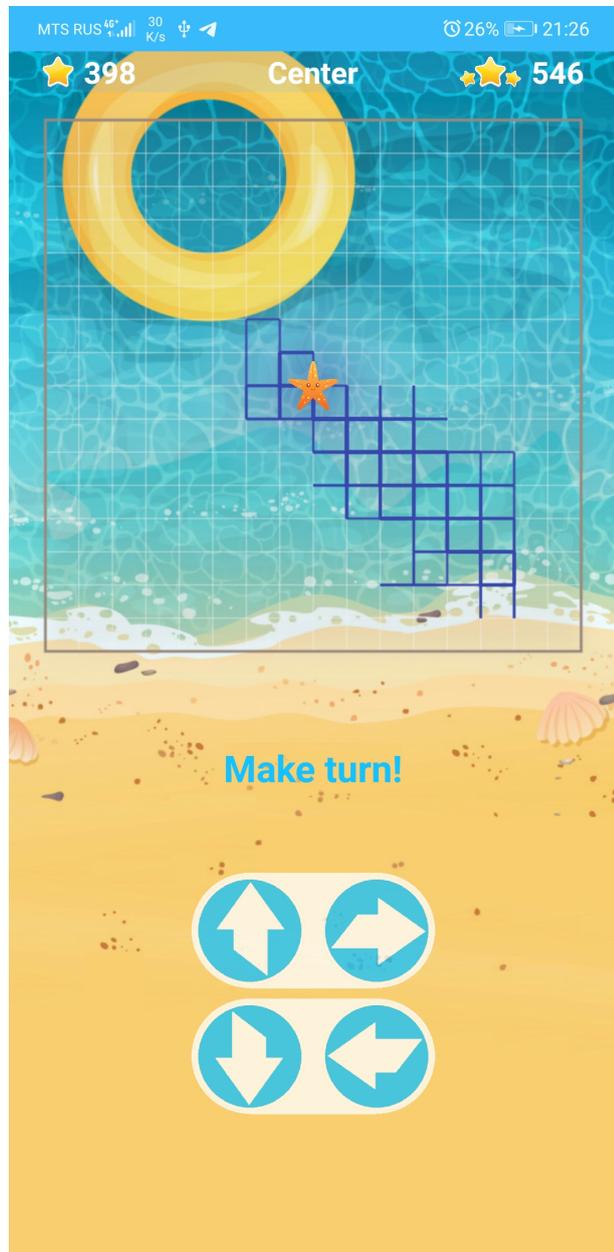


Fig. 2. Screenshot of the Random Walk Game. The header shows of the number of turns made (left), what the player is playing for (in this case they are 'playing the center', i.e., they try to avoid the absorption for as long as possible) (center), and the number of turns in the longest up-to-date game (right). Players see the game field, the marker current position and the trajectory of the game. At the bottom of the screen there are the strategies for a player to choose from. In this case, these are the rows of the movement 'pay-off' matrix (color online)

The aim of player A is to keep the marker inside the square, i.e., at one of the internal vertices, and thus avoid the absorption as long as possible. We say that this player 'plays the center'. The aim of player B is to reach the absorbing boundary, i.e., one of the boundary vertices, as fast as possible. We say that this player 'plays the border'.

A typical trajectory produced during a game is shown on Fig. 2.

2. Experiment

2.1. Mobile application. To carry out the experiment, we have developed a mobile application [18] which offers two game types: (i) to play against another player (P vs P) or (ii) to play against the bot (P vs B, in case the player plays for the center or B vs P, in case the player plays for the border). The bot makes a completely random choice of its strategy at every turn. The app transmits player choices over the Internet to the web-server and receives back the resulting movements. All player choices and resulting movements are collected in the server database for further analysis.

Choices of the bot in P vs B and B vs P games are determined by the sequence of pseudo-random numbers computed by using Mersenne Twister random number generator (implemented in PHP 7.4 as `mt_rand` function). The game is played on a square lattice 17×17 (which means $N = 16, n = 17$).

2.2. Players. Players, that are the participants of the experiment, are aged from 16 to 52 years. Players in the category <25 years are volunteers from the students of Lobachevsky State University and Higher School of Economics. Players above 25 are volunteers from academic staff of different universities and research institutions in Russia, Germany, France, Norway, and South Korea.

2.3. Experiment. Player versus player (P vs P) sessions were organized in the three following formats.

1. Students were gathered in the same room and played without communications for one hour. The participant's goal was to obtain the highest score in the room. Player pairs were formed based on similarity of players' skills in the competitive programming.
2. Students were gathered in the same room and played without communications for two hours. The participant were arranged by the sum of weighted scores of played games. The longer game — the higher weight associated with this game for player A (and the opposite for player B).
3. Players played without communications for around 30 minutes per day, whenever they wanted to play. The aim is to reach the highest cumulative score.

To organise Player vs Bot game sessions we used two formats.

1. Participants played against the bot at will (they were also able to pause the game any moment). This was continued for one month. Players were then ranked by the ratio of exponentially moving average (EMA) score of playing 'for the center' (P vs B game) to the EMA score of playing 'for the border' (B vs P game). Player ranking table was then made available online to all participants.
2. Participants played against the bot at will. The ranking table defined as the result of the implementation of the previous format was used. The task for a participant was to beat the highest score.

Whether a player is supposed to stay inside the square as long as possible (i.e., Player A type) or reach the absorbing boundary as soon as possible (Player B type), is decided at random at the beginning of every game. Altogether, we have collected a database consisting of 512 realizations for the P vs P game and 528 and 534 realizations for the P vs B and B vs P games, respectively.

3. Analysis

We are interested in the statistics of the game duration, i.e., the number of turns k before the absorption on the boundary happens and the game terminates. In terms of the random walk theory this will correspond to the 'first-passage time' or 'survival time' [3].

We will consider three different types of games: (i) a pure random game, when two players choose their strategy at random (B vs B game or random walk), (ii) a game when a player plays against the environment (P vs B and B vs P games) and (iii) a game played by two players (P vs P game).

3.1. Absorbing Markov Chains. To analyze P vs B, B vs P, and P vs P games, we use the framework of Markov Chain theory [19].

The state of the system is a coordinate vector $w_k = (x_k, y_k)$ at the k -th turn, where position corresponds to the vertex and coordinates vary in the ranges: $-N/2 \leq x_k \leq N/2$, $-N/2 \leq y_k \leq N/2$. Overall there are $n^2 - 4$ reachable vertices (excluding 4 unreachable corners), $r = 4(n - 2)$ of which correspond to absorbing states ($|x_k| = N/2 \vee |y_k| = N/2$) and the remaining $s = (n - 2)^2$ to transient states ($|x_k| < N/2 \wedge |y_k| < N/2$), see Fig. 2. Although, there are two parity cases of the lattice size, we consider only odd sizes due to the symmetry of the lattice with respect to the center. We arrange vertices into a column according to the horizontal scanning of the lattice. After that we introduce transition matrix [20] $P((i, j) \rightarrow (x, y))$ with elements corresponding to probabilities to go from the state (i, j) to (x, y) after one turn.

The absorbing Markov Chain theory provides a way to compute survival time in the case of absorption processes [20]. According to the theory, transition matrix P can be represented as a block matrix:

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ \mathbf{0} & I_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

where Q is an s -by- s matrix corresponding to transitions between internal states, R is a non-zero s -by- r matrix corresponding to transitions from internal states to absorbing states, and last two matrices are corresponding to loops in the absorption states: $\mathbf{0}$ is an r -by- s zero matrix, and I_r is the r -by- r identity matrix [20].

Here we resort to the standard concept of the mean absorption time which is based on the idea of fundamental matrix [20] (it also appears in the context of quasistationary state theory [21]).

Namely, we construct fundamental matrix L :

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = (I_s - Q)^{-1}, \quad (2)$$

where I_s is the s -by- s identity matrix. The (i, j) entry of matrix L is the expected number of times the chain is found in state j , given that the chain started in state i .

Based on the property of fundamental matrix, we obtain the expected number of steps before being absorbed starting in transient state i :

$$T = L\mathbf{1}, \quad (3)$$

where $\mathbf{1}$ is a column vector whose entries are all 1.

Since the starting position of the game is a center of square lattice the resulting expected number of steps before being absorbed t_n corresponds to entry of T for the $(0, 0)$ state, where n is a size of field.

3.2. Game as a Markov Chain. To model the game as a Markov chain, we have to specify transition probabilities between different states. In general, relying on memoryless property of Markov chains, we define mixed strategy S_{ij}^p , determined by Bernoulli distribution σ_{ij}^p over two pure strategies for the player $p \in \{A, B\}$ in the state (i, j) :

$$\sigma_{ij}^p(s) = \begin{cases} f_{ij}^p, & \text{if } s = 0, \\ 1 - f_{ij}^p, & \text{if } s = 1, \end{cases} \quad (4)$$

where $f_{ij}^p \in [0, 1]$ is a probability of picking first strategy ($s = 0$).

This in turn allows us to determine the transient probability from the state (i, j) to (x, y) for the corresponding mixed strategies:

$$P((i, j) \rightarrow (x, y)) = \begin{cases} 0, & \text{if } |i - x| + |j - y| \neq 1, \\ f_{ij}^A (1 - f_{ij}^B), & \text{if } x = i \wedge y = j + 1, \rightarrow \\ (1 - f_{ij}^A) f_{ij}^B, & \text{if } x = i + 1 \wedge y = j, \downarrow \\ (1 - f_{ij}^A) (1 - f_{ij}^B), & \text{if } x = i \wedge y = j - 1, \leftarrow \\ f_{ij}^A f_{ij}^B, & \text{if } x = i - 1 \wedge y = j, \uparrow \end{cases} \quad (5)$$

The connectivity in the system is defined by transitions to the four neighboring states on the square lattice. This way, the first case of transient probability denotes the zero probability between unconnected states, and others are transition probabilities to neighboring states in the corresponding direction.

The case of the random strategy choice corresponds to equal probability to choose strategies for both players, $f_{ij}^A = 1/2$, $f_{ij}^B = 1/2$. Therefore, the transient probability is equal to $1/4$ for neighbour state transition and zero otherwise. Having applied the absorbing Markov chain formalism, we were able to compute the mean absorption time t_n^{BvsB} depending on the field size n .

The last two cases, games against the bot (P vs B and B vs P games) and games of two players (P vs P games) explicitly determine only the bot strategy which is the equiprobable choice. In contrast, strategies of participants are unknown. Therefore, in order to assess behavior we assume the absence of memory in participant choices and estimate relative frequencies of their strategies depending on the current position of the marker on the lattice. Next, we interpreted the experimentally obtained relative frequencies as probabilities and computed the mean absorption time for both cases, t_{17}^{PvsB} , t_{17}^{BvsP} and t_{17}^{PvsP} .

3.3. Probability evolution model. Although absorbing Markov Chains let us find the mean duration of the game, the exact distribution of the duration cannot be obtained in this framework. To solve this problem, we define a mathematical model based on a Markov chain property of the game.

Let us first define probability W_{ij}^k of finding a marker in the state (i, j) on the k -th turn. The $(0, 0)$ is the initial state of the marker and for $k = 0$ the probability to find the marker in this position $W_{00}^0 = 1$ and for all other states $W_{ij}^0 = 0$, $(i, j) \neq (0, 0)$. By sequentially applying modified transition matrix \tilde{P} to state probability vector \mathbf{w}^k , we could propagate the latter:

$$\mathbf{w}^{k+1} = \tilde{P}\mathbf{w}^k, \quad k \geq 0 \quad (6)$$

where \tilde{P} is n^2 -by- n^2 transition matrix P modified in such a way that reaching the boundary state excludes the marker from the system. These modification are required to compute exact probability W_{ij}^k that marker finishes in the particular absorption state at turn k , where $(i, j) \in \mathbf{B}$ – boundary states.

Then, the probability of marker being absorbed on the k -th turn can be computed using the following expression:

$$p_{\text{abs}}^k = \sum_{(i,j) \in \mathbf{B}} W_{ij}^k, \quad (7)$$

where \mathbf{B} is a set of boundary states.

The analysis described above was applied to all three cases, B vs B, P vs B (also B vs P), and P vs P.

3.4. Numerical simulations. To model game realizations, we perform stochastic simulations of the game process by using transition matrices constructed from the collected database.

The mark's start is located at the state $(0, 0)$ initially and then, at each turn, its move is determined by sampling of strategy choices, Eq. (4). Upon selecting the strategies, the marker is moved according to Eq. (5). Eventually, marker reaches an absorption vertex and the simulation stops.

We compute statistical properties and distributions considered in this Section in order to compare the obtained results with the modelling and experimentally obtained statistics. All three approaches (numerical simulations, probability evolution model, and inversion of fundamental matrix) and their statistics were implemented using Python 3.8 and performed on a work station (Core i5-8600 3.1GHz, 32Gb RAM).

The source code is available at <https://github.com/SermanVS/RWAnalyzer>.

3.5. B vs B game or random walk. This game results in the standard random walk on finite two-dimensional lattice, initiated at the central vertex of the lattice. There is the analytic closed form solution for the mean absorption time [6]:

$$\bar{k}_N^{\text{BvsB}} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} (-1)^k \alpha_{k,N} \frac{\cos((2k+1)\pi/(2N))}{\sin^3(2k+1)\pi/2N}, \quad (8)$$

$$\alpha_{k,N} = 1 - \frac{1}{\cosh\left(N/2 \cosh^{-1}\left(1 + 2 \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2N}\right)\right)}.$$

For our case, $N = 16$, this expression gives 75.22. Additionally, we simulated the process to sample the probability distribution of k . It is shown by the purple line on Fig. 4, a, b (Cf. below).

4. Results

Aiming at analysis process, Python 3.8 is used for modelling, simulations and inversion of the matrices. Results address the 3 cases of the random walk game of 2 players on the finite lattice. Comparison to experimentally obtained trajectories of real games were done with using the 17×17 field. The size of the field was chosen due to the comfortable game time: longer game leads to fatigue and smaller games have simpler strategies. The players have spent approximately 250 hours in total playing in the Random Walk Game to produce experimental data. As a result, we have obtained trajectories of marker movements and corresponding player choices of 1562 real games in different modes (Cf. first row of the Table).

Table. The absorption mean times obtained by different approaches for the 3 game modes: B vs B is a pure random walk on 2D finite lattice, player versus bot in case of two goals: keep marker inside the field as long as possible (P vs B, center), reach the border as soon as possible (B vs P, border), and P vs P mode is a game of two players (all games and only games with length greater than 400 turns). The values are provided for the field size 17×17 . The statistics in the simulation were performed using 10^5 trajectories. The modelling were performed up to 10^4 steps. The simulation, modelling and AMC theory (absorption Markov chain) were applied to the frequencies obtained from the real games in the experiment. In B vs B case were used the equiprobable choice strategy

Field size 17×17	Random walk	P vs B	B vs P	P vs P	P vs P 400+
# of games	–	528	534	500	13
Experiment	–	145.45	71.12	120.60	594.27
Simulation	75.22	145.77	73.66	115.93	132.91
AMC theory	75.21	145.85	73.79	116.22	133.22
Modelling	75.21	145.85	73.79	116.22	133.22
Optimal	–	225.00	64.00	N/A	–

4.1. Mean absorption time. The analysis of B vs B and P vs B (also B vs P) cases of random walk game suggests the quadratic function of the mean absorption time depending on the field size. The corresponding dependencies are presented on Fig. 3. In case of P vs B the identified relation for player A (goal: center) is $t_n^{PvsB} = (n - 2)^2$ and for player B (goal: border) is $t_n^{BvsP} = (n - 1)^2/4$. Though, relation for B vs B can be approximated by formula $t_n^{BvsB} = 0.294685413(n - 1)^2 - 0.232$ with mean absolute error less than 10^{-3} at the range $[3; 1001]$. Coefficients at leading term n^2 are approximately equal to 1.0, 0.3, 0.25 in the order P vs B (goal center), B vs P (goal border), B vs B. Asymptotically the expected time of the game in the optimal center strategy (P vs B) is 3 times longer than the absorption time in the pure random walk. However, the optimal border strategy (B vs P) is only about 20% quicker than the pure random walk.

The mean absorption time in B vs B case was computed based on formula (8) is equal to 75.20846497681383 that match up to 14 significant digits to the values obtained by the inverse of fundamental matrix approach 75.20846497681377.

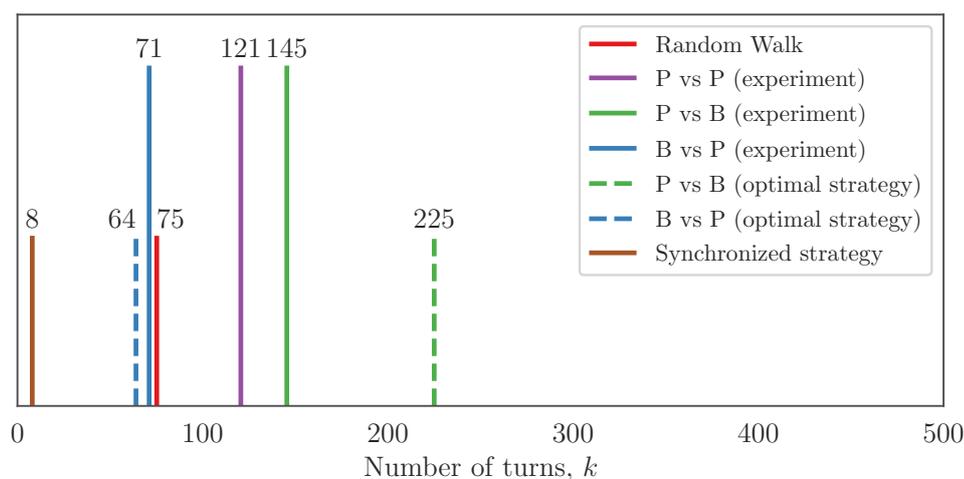


Fig. 3. Mean absorption times obtained in the experiment compared to different strategies and pure random walk (color online)

Here, we showed the algorithm of the optimal strategy construction in B vs P case. It is evident that increasing the number of states on one-dimensional segment leads to higher mean absorption times. Therefore, in case of requirement to reach the border as soon as possible it is profitable to choose the smallest one-dimensional segment on the 2d plane. There are 2 shortest segments that passes through the center: vertical and horizontal. According to the rules of movements (Cf. Fig. 1), player B can explicitly choose one of those segments and keep the marker on this segment until reaching the border. The resulting process is a one-dimensional random walk on the shortest segment that has the property of shortest mean absorption time among other segments. The length of this segment is equal to n and based on the random walk theory the mean absorption time is equal to $t_n^{BvsP} = (n - 1)^2/4$. Considering of other 2 dimensional strategies leads to increased number of states on the path to the absorption states resulting in increased mean absorption time. The formal proof was done only for small sizes 5, 7 by solving the global optimization problem using Wolfram Mathematica.

On the other hand, the goal of staying inside the field as long as possible requires the longest path for the random walk. The longest segment that can be placed within field corresponds to diagonal states. Although, such states are ambiguous, their constitute main and side diagonal “stairs”. The movement rules enable player A to keep marker only on the main diagonal regardless of choices of the second player. That produces a random walk on the diagonal with length $2n - 3$ because the states under the main diagonal have symmetry according to movement rules. Then, mean absorption time is equal to $t_n^{PvsB} = ((2n - 3 - 1)/2)^2 = (n - 2)^2$.

Another strategy for player A can be described as follows: in neighbors of absorption states choose pure strategy with one probability corresponding to movement away from the field border, and in other states choose any strategy. Analysis of this algorithm was done for the sizes 5, 7, 9, 11. As a result of the t_n simplification we found the independence of the mean absorption time from choices away from the border. The values of mean absorption times obtained by this algorithm matched to the optimal times of one-dimensional diagonal strategy t_n^{PvsB} . The formal proof of optimality of this algorithm will be interesting part of the future works.

Next step in the analysis of the expected time of game endings is the comparison of the theoretical optimum to the experimental statistics. The detailed experimental study description was provided in the section “Experiment”. In total we obtained 1062 games in the player versus bot mode: 528 of which are corresponds to playing with a center goal (P vs B) and 534 — with a border goal (B vs P). The participants who should have kept marker inside the field as long as possible in the average shows 145.45 turns per one game. However, the optimal strategy suggests the mean absorption time equal to $t_{17}^{PvsB} = (17 - 2)^2 = 225$, that 57% higher than obtained in the real games. Although, players showed lower average times than optimal, their games are still 2 times longer than pure random walk that provides 75.2 mean absorption time. The experiment shows the ability of the considered population to recognize properties of the game and to improve the simple strategy of random choices at each step regardless of knowledge about optimal strategies. However, the population strategy did not converge to the optimal strategy in the average. Applying the modelling approach to the average population strategy in the P vs B mode provides similar result of 145.85 absorption time.

Results of players aimed to reach border as soon as possible demonstrate the average number of turns equal to 71.12. This is 7 turns ahead compared to the optimal strategy $t_n^{BvsP} = (17 - 1)^2/4 = 64$ and 4 turns faster than pure random walk. Also, in that game mode we see slight improvement of equiprobable random choice strategy and gap with the optimal strategy. Eventually, modelling of the average population strategy for B vs P border mode demonstrates quite higher mean absorption time 73.79 in contrast to the modelling of P vs B center strategy. This difference can be caused by inaccurate frequencies of rarely visited states.

Using frequencies sampled with the player versus bot games as input probabilities for the modelling Markov process which propagates probability distribution (Cf. Sections 3.2, 3.3, Eq. (5)) and

for the stochastic simulation procedure of individual trajectories (Cf. Section 3.4) we correctly reproduced the results. Therefore, frequencies of corresponding strategy choices determined for each state allowed us to interpret set of f_{ij} as the average strategy revealed by population. Simulation and modelling values are presented in the summary table of mean absorption times (Cf. the Table).

Finally, results of participant games with each other (P vs P) shows intermediate mean absorption times between P vs B center and B vs P border values. The average number of turns in P vs P games is 57 moves longer than mean absorption time in the optimal strategy of the B vs P mode with border goal. Comparison to the P vs B mode with center goal shows 25 steps lower values in P vs P versus experimental P vs B games and approximately 2 times lower values in P vs P versus optimal P vs B center strategy.

Mean absorption times obtained with simulations for particular frequencies coincide with AMC theory mean values (error is less than 10^{-9}). Therefore, both methods can be used to calculate mean absorption times for the arbitrary strategies. The simulation of 10^5 trajectories shows good error, accurate to the integer part.

4.2. Absorption time distributions. Both modelling and simulation approaches allowed us to compute precise and estimated probabilities of finishing the game at the arbitrary turn number. Applying these methods requires specifications of mixed strategy depends on the game field position. The pure random walk defines simple strategy of the equiprobable choice from pure strategies. Also, we analysed two suggested strategies of optimal random walk in the player versus bot mode. Besides the analytic strategies we collected experimental games of choice frequencies at each state. Based on those strategies we propagate probabilities through the field space and time. Additionally, we run simulations of 10^5 individual trajectories using different strategies. As a result we obtain distributions of absorption times that are presented on the Fig. 4.

All the distributions have differences in probabilities on even and odd turns on the close inspection. To assess only behavior associated with major trends, we consider histogram with wide bins (size 16). All the modes follow the same pattern of distribution:

1. the short games are rare;
2. distribution has one statistic mode at an intermediate number of turns;
3. the probability of long games exponentially decreases as game length increases.

The P vs B center mode demonstrates similar distribution form except the statistic mode corresponds to short games that remain hidden with chosen bin size.

Although the number of trajectories in the P vs P mode are small (500), very long games were observed in the distribution with length greater than 400 turns. The probability of obtaining such games according to modelling the population average strategy is lower than 0.015. However, 13 long trajectories were found in games of participants in the range from 461 to 964 turns and average absorption time equal to 594.27. Discovered abnormality can be explained by “synchronization” between individual brain activities in long runs. As one turn takes 4.5 seconds in the average, game with 400 turns is 30 minutes long. Such a long time of the failure to finish the game by player B causes frustration and reduces concentration that can lead to unconscious decisions that can be easily predicted by player A. A loss of concentration results in worse ability of the individual to produce pure random independent choices. In this regard, such “synchronization” events can arise in the game.

Analysis of these games was performed by decoupling strategies of the games from the main part of the distribution. Eventually, the modelling of the opposite average long run strategies produced the lower mean absorption time, approximately 133.22 turns. In order to compare distributions of such games we also modeled propagation of frequencies of movement directions that were observed in the long run games. The corresponding distributions of long run games are depicted in Fig. 5. Although,

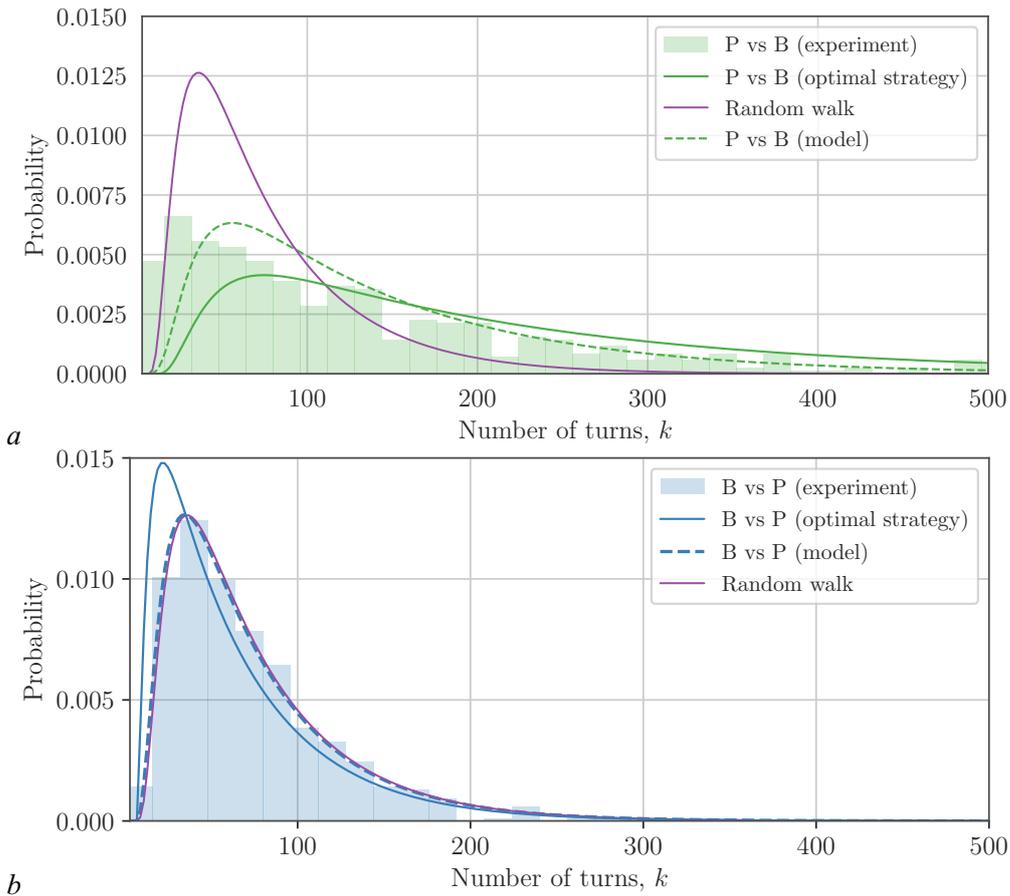


Fig. 4. Distributions of the number of turns obtained by modelling (solid line) and by simulation (dots) using corresponding strategies of players A and B. The Random walk mode (purple line) run equiprobable choice for both players. The player versus bot (green – P vs B, and blue – B vs P) curves were produced based on corresponding average population strategies. The bot chooses a strategy equiprobably. The optimal strategy for the P vs B center mode (green dashed line) is to keep a marker on the diagonal stair. The optimal strategy for the B vs P border mode (blue dashed line) is to only chooses movements along the horizontal line. Experimentally obtained histograms are presented for player versus bot modes (green area – P vs B, and blue area – B vs P) (color online)

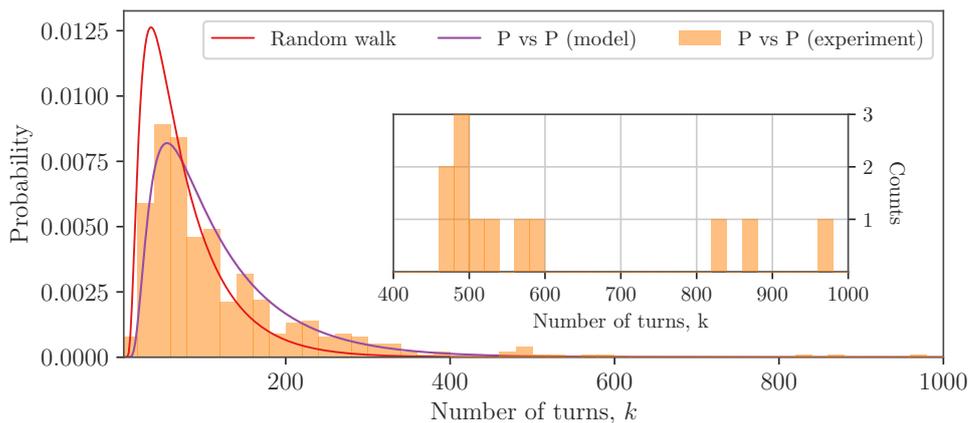


Fig. 5. The absorption time distributions for the P vs P mode (yellow histogram and purple line) compared to modelling of movement frequencies (green line) and strategies (blue line) observed in long run games (400+ turns). The frequencies of movement directions for each state obtained in the experimental long run games were used to propagate probabilities over the field by the modelling approach. Strategies of both players A and B in the P vs P with length over 400 turns were used separately in the modelling approach (color online)

the distribution of frequencies demonstrates the long tail, the underlying strategies that appears in the “synchronized” games did not reproduce the emergence of long games. Therefore, it demonstrates the presence of choice dependence on hidden factors that can not be explained only by the Markov chain property.

4.3. Spatial distributions. Next, we analysed probabilities to find a marker in a particular state during the game. Similarly to previous sections we assessed experimentally obtained frequencies and results of modelling. Visualizations of spatial distributions for corresponding strategies are depicted on the Fig. 6.

The pure random walk demonstrates generalized multinomial distribution over space. In contrast, addition of game rules changes resulting distribution picture. Predictably, the P vs B mode with center goal demonstrates mostly movements on the diagonal (Fig. 6, *a*). Although, this behavior coincides with the spatial distribution in the suggested optimal strategy, the experimental data have higher spread around the diagonal states than optimal.

The optimal strategy in B vs P border mode should produce vertical or horizontal lines of involved states. As a result of experimental B vs P border games we obtained 3 main patterns in the distribution (Fig. 6, *b*): the expected movements on the straight lines, and different from the optimal pattern is a distribution similar to the pure random walk on 2D square lattice. The second pattern shows the attempt of population to find the best strategy in the two-dimensional space rather than in one-dimensional line. However, the leaving of one-dimensional lines increases the mean absorption times. This explains

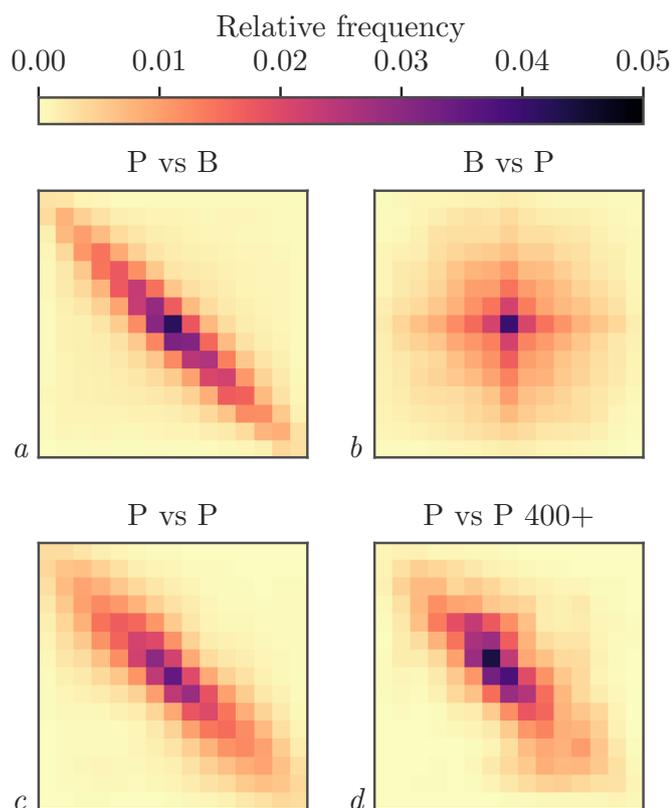


Fig. 6. The 2D distributions of state visits obtained in experimental games for 4 cases: *a* – P vs B with center goal, *b* – B vs P with the border goal, *c* – games of two players (P vs P), and *d* – games longer than 400 turns in P vs P mode (color online)

the small difference in terms of mean absorption times between experimental B vs P border and pure random walk (B vs B).

The spatial distribution pattern in the P vs P mode (Fig. 6, *c*) is similar to the P vs B center case: the marker mainly moves on the diagonal. The only difference is the enlarged spread around the diagonal line that shows stronger average strategy of player B with border goal compared to the equiprobable random choices (as in the P vs B center mode).

Lastly, we analysed the spatial distribution of states in games longer than 400 turns. In general, the probability of marker locations mostly concentrated on the main diagonal similar to previous cases (Fig. 6, *d*). Nevertheless, the distribution is more compact at the field center and has higher variation around the main diagonal compared to the P vs B center and P vs P cases. Such behavior suggests longer staying of marker close to the center during the long games, but also with movements from the diagonal and not only along it.

4.4. Strategy analysis. Finally, we disentangle average population strategies of each player A and B and compare it to each other and to the optimal one. To present strategies we visualize them as the colored two-dimensional matrix with indices corresponding to the states on the 2D squared lattice (Fig. 7). Elements of the matrix depict the frequency of choosing the first pure choice from possible

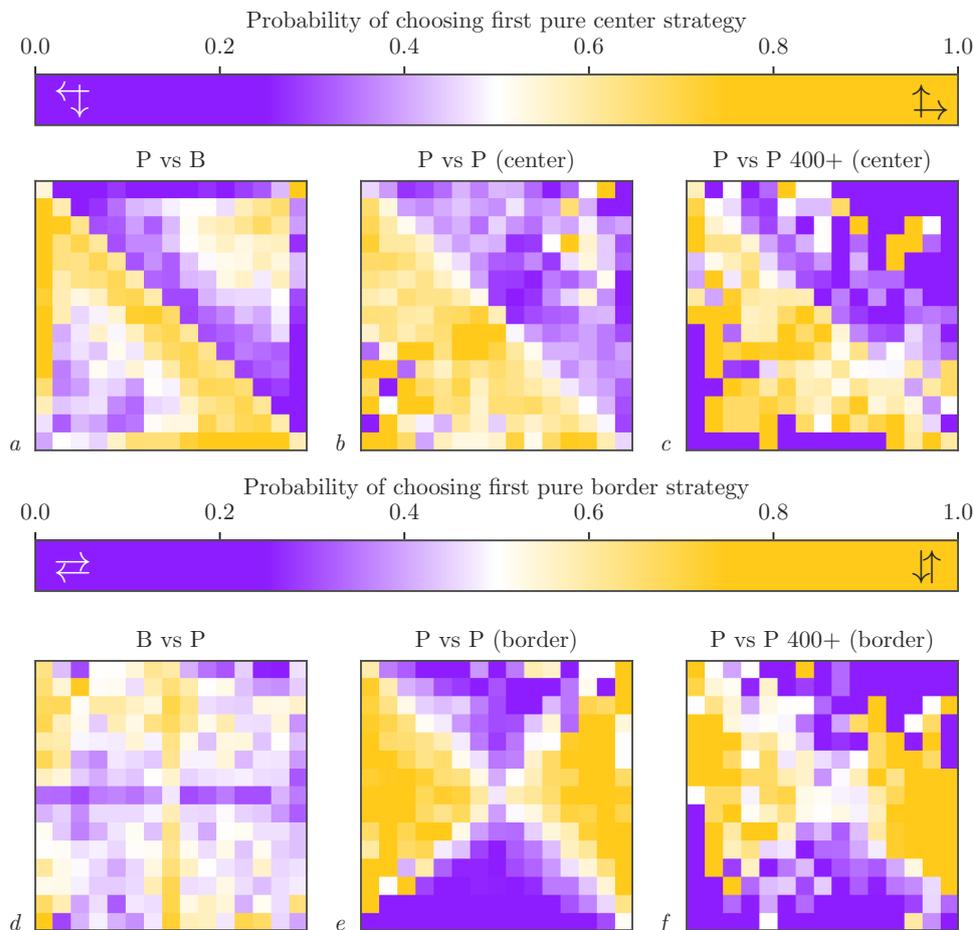


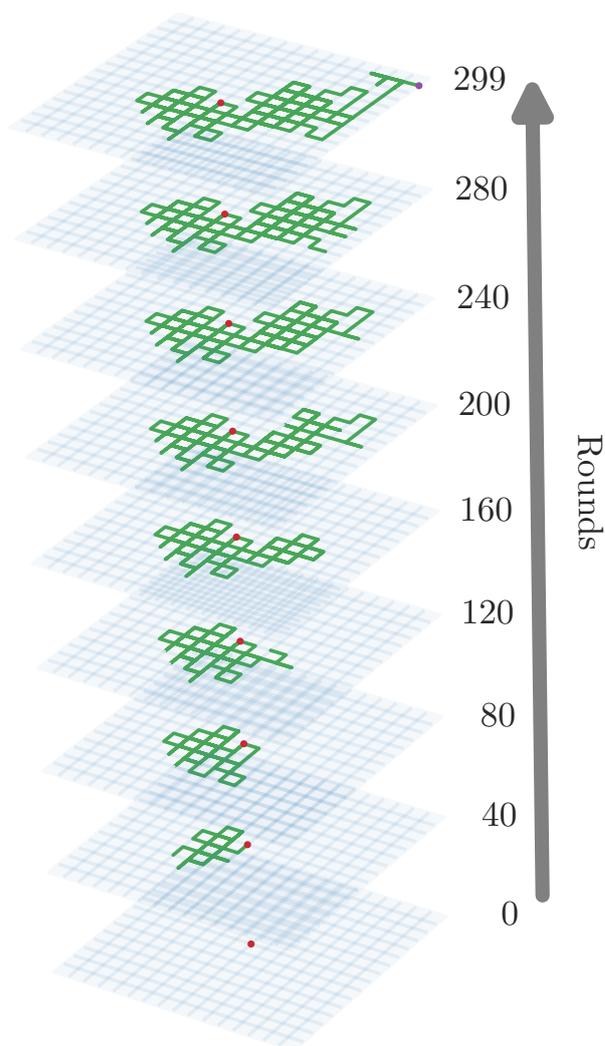
Fig. 7. The visualization of average population strategies for different modes obtained in the experiment. The color of cells depicts the frequency of choosing first pure strategy: for the center goal (*a, b, c*) and for the border goal (*d, e, f*) (color online)

choices according to the rules (Cf. Fig. 2). Technically, player A with center goal has two choices: move up/right, and move down/left; player B with border goal has another two choices: move up/down, and move left/right. The divergent colors of elements demonstrate which pure strategy dominates at each state in the average over all games.

The observed strategy in case of P vs B center mode shows mainly movement in direction of the diagonal states (Fig. 7, a). However, states distant from the diagonal shows slightly higher frequencies of the opposite choices. Generally, players choose go away from the border, but in the states closer to corners on the side diagonal the behavior becomes more random (relative frequencies are closer to 0.5). The experimental strategy on the main diagonal looks similar to the first optimal strategy. In contrast, the choices on the border differs from the second optimal strategy that suggests always moving away from the border. This results in a leak of probabilities outside the field not only in corners of main diagonal, but also in other border states.

The strategy of player with center goal in the P vs P case also shows similar strategy to the P vs B center mode (Fig. 7, b). Moreover, players on average choose to move in the direction of the main diagonal regardless of the position on the lattice.

Almost all states at the border suggests similar strategy except some states with almost equal frequencies of both choices. In comparison to the P vs B center mode, player in P vs P mode with center goal have slightly lower confidence about moving towards main diagonal (the frequencies are closer to 0.5 in the P vs P center compared to P vs B center). As an example of experimental P vs P trajectory see Fig. 8.



Eventually, the B vs P border strategy is well-defined at the horizontal and vertical lines (Fig. 7, d). Although, players more often chose move towards the closest border at the central straight lines, frequencies in other states are not following to the common pattern. In contrast to the similarity of P vs B and P vs P center goal strategies, the strategy of P vs P border demonstrates very different picture with clear pattern. In this case players act exactly the opposite to the B vs P border mode. Their average strategy suggests the more often to choose moving along straight line that already conquered. That means movements along the coordinate line with lower deviation from the center. As a result plane of decisions is divided into 4 alternated triangles. Although, the frequencies are close to 0 or 1, they are not equal to. The small difference demonstrates rare attempts of movements towards the closest border.

Lastly, strategies obtained in the long games between 2 players did not produce clear patterns due to limited number of games. However, there is similarity of decision principles to the normal P vs P model.

Рис. 8. Trajectory of P vs P mode game obtained from the experiment divided by rounds that consist of 40 turns (color online)

Conclusions

We presented the results of experimental studies of a game-driven spatial process which appears as the result of the interaction of two antagonistic players. The collected trajectories were analyzed as realizations of a two-dimensional random walk in a finite domain with absorbing boundaries. We chose to focus on the statistics of survival time and its features such as the shape of the corresponding probability distribution. We use a novel technique to conduct experiments and collect the data, based on a mobile app [22].

We demonstrated that the survival time histograms, obtained from the experimental data, can be reproduced with Markov Chain (MC) models. However, we also detected instances of super-long games which cannot be explained as 'rare events' of the Markov Chain models – because the probability to observe such a *single* event is negligibly small for the corresponding MC model. These 'anomalous' games were played by experienced players and their duration cannot be explained by, f.e., assuming that one of the players is a 'dummy' who chooses the next move (strategy) completely at random – in this case the duration of game can be estimated with a MC model and should be much shorter.

The origin of super-long games is a challenging open problem. We could only speculate that the mechanism behind is related to some sort of (anti)correlations appearing between antagonistic players and its explanation can only be found by going beyond the MC models and standard single-round theory of games.

As the next step, we are aimed at collecting more realizations thus obtaining more instances of super-long games. A detailed analysis of the corresponding trajectories can shed light on the origin of the counter-intuitive inter-player (anti)correlations.

References

1. Coolidge JL. The gambler's ruin. *Annals of Mathematics*. 1909;10(4):181–192. DOI: 10.2307/1967408.
2. Feller WD. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley: New York; 1950. 704 p.
3. Redner S. *A Guide to First-Passage Processes*. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 312 p. DOI: 10.1017/CBO9780511606014.
4. Hausner M. *Games of Survival*. Report No. RM-776. Santa Monica: The RAND Corporation; 1952. 7 p.
5. Peisakoff MP. *More on Games of Survival*. Report No. RM-884. Santa Monica: The RAND Corporation; 1952. 20 p.
6. Kmet A, Petkovšek M. Gambler's ruin problem in several dimensions. *Advances in Applied Mathematics*. 2002;28(2):107–118. DOI: 10.1006/aama.2001.0769.
7. Romanovskii IV. Game-type random walks. *Theory of Probability & Its Applications*. 1961;6(4):393–396. DOI: 10.1137/1106051.
8. Nisan N, Roughgarden T, Tardos E, Vazirani VV. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge: Cambridge University Press; 2007. 754 p. DOI: 10.1017/CBO9780511800481.
9. Pearson K. The problem of the random walk. *Nature*. 1905;72:294. DOI: 10.1038/072294b0.
10. Zaburdaev V, Denisov S, Klafter J. Lévy walks. *Reviews of Modern Physics*. 2015;87(2):483–530. DOI: 10.1103/RevModPhys.87.483.
11. Bénichou O, Loverdo C, Moreau M, Voituriez R. Intermittent search strategies. *Reviews of Modern Physics*. 2011;83(1):81–129. DOI: 10.1103/RevModPhys.83.81.
12. Rhee I, Shin M, Hong S, Lee K, Kim SJ, Chong S. On the Levy-walk nature of human mobility. *IEEE/ACM Transactions on Networking*. 2011;19(3):630–643. DOI: 10.1109/TNET.2011.2120618.
13. Fauchald P. Foraging in a hierarchical patch system. *The American Naturalist*. 1999;153(6):603–613. DOI: 10.1086/303203.

14. Scanlon TM, Caylor KK, Levin SA, Rodriguez-Iturbe I. Positive feedbacks promote power-law clustering of Kalahari vegetation. *Nature*. 2007;449(7159):209–212. DOI: 10.1038/nature06060.
15. Reynolds A, Ceccon E, Baldauf C, Karina Medeiros T, Miramontes O. Lévy foraging patterns of rural humans. *PLOS ONE*. 2018;13(6):e0199099. DOI: 10.1371/journal.pone.0199099.
16. Pyke GH. Understanding movements of organisms: it's time to abandon the Lévy foraging hypothesis. *Methods in Ecology and Evolution*. 2015;6(1):1–16. DOI: 10.1111/2041-210X.12298.
17. LaScala-Gruenewald DE, Mehta RS, Liu Y, Denny MW. Sensory perception plays a larger role in foraging efficiency than heavy-tailed movement strategies. *Ecological Modelling*. 2019;404:69–82. DOI: 10.1016/j.ecolmodel.2019.02.015.
18. Krivonosov MI, Tikhomirov SN. Random Walk Game [Electronic resource]. 2020. Available from: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.scigames.RWGame> (Google Play Store), <https://apps.apple.com/us/app/random-walk/id1564589250> (AppStore).
19. Taylor HM, Karlin S. *An Introduction to Stochastic Modeling*. San Diego: Academic Press; 2008. 648 p.
20. Kemeny JG, Snell JL. *Finite Markov Chains*. New York: Springer-Verlag; 1983. 226 p.
21. Darroch JN, Seneta E. On quasi-stationary distributions in absorbing discrete-time finite Markov chains. *Journal of Applied Probability*. 1965;2(1):88–100. DOI: 10.2307/3211876.
22. Zhang J, Calabrese C, Ding J, Liu M, Zhang B. Advantages and challenges in using mobile apps for field experiments: A systematic review and a case study. *Mobile Media & Communication*. 2018;6(2):179–196. DOI: 10.1177/2050157917725550.

Кривоносов Михаил Игоревич — родился в Нижнем Новгороде (1995). Окончил с отличием Институт информационных технологий математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению «Прикладная математика и информатика» (2018). Окончил аспирантуру Института информационных технологий математики и механики по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (2022). С 2023 года работает в Институте системного программирования им. В. П. Иванникова Российской академии наук в должности младшего научного сотрудника и в центре фотоники ННГУ им. Н. И. Лобачевского в должности младшего научного сотрудника. Научные интересы — случайные блуждания, таксис, нейробиология, сложные сети, анализ временных рядов, компьютерные науки. Опубликовал свыше 30 научных статей по указанным направлениям.



603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: krivonosov@itmm.unn.ru
 ORCID: 0000-0002-1169-5149
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1066771

Тихомиров Сергей Николаевич — родился в г. Бор (1999). Выпускник Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению «Математика и компьютерные науки» (2021). Обучается в магистратуре Института информационных технологий, математики и механики по специальности «Прикладная математика и информатика» (2023). С 2023 года работает в Центре фотоники ННГУ им. Н. И. Лобачевского в должности лаборанта-исследователя. Научные интересы — случайные блуждания, машинное обучение, анализ данных.



603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: stikhomirov@itmm.unn.ru
 ORCID: 0000-0001-8203-7090



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003036
EDN: JFYIYI

Рассеянный свет в ночное время вызывает рассинхронизацию ритмов в модели переключения «сон–бодрствование»

К. О. Меркулова[✉], Д. Э. Постнов

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉merksenia@gmail.com, postnov@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 9.02.2023, принята к публикации 17.03.2023,
опубликована онлайн 7.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Цель настоящего исследования заключается в анализе влияния формы суточного профиля освещенности на синхронизацию ритмов в модели переключения состояний «сон–бодрствование». В норме чередование сна и бодрствования человека синхронизовано с его циркадным ритмом и с 24-часовым ритмом освещенности. Имеется, однако, множество экспериментальных свидетельств нарушения этого синхронизма, как в форме сбоев фазы (например, при авиаперелетах), так и в форме длительного рассогласования ритмов (например, при сменной работе на производстве). Математические модели процесса переключения между сном и бодрствованием также демонстрируют рассинхронизацию ритмов и успешно применяются для оптимизации рабочих графиков. В то же время, влияние целого ряда факторов на этот процесс недостаточно изучено, в том числе — характера изменения освещенности в течение суток. **Методы.** Анализ исследуемой шестимерной модели показывает, что в терминах нелинейной динамики задача сводится к поиску и интерпретации областей резонансов на трехмерном торе. Для конкретных целей нашей работы удобной оказалась оценка соотношения трех периодов (24 часа, циркадный период и текущая длительность цикла «сон–бодрствование») методом численного интегрирования уравнений модели на сетке значений параметров с помощью технологии параллельных вычислений. **Основной результат** нашей работы заключается в том, что наличие круглосуточной малоинтенсивной засветки (то есть добавление к суточному световому циклу сигнала нулевой частоты) вызывает рассинхронизацию циркадного ритма по отношению к суточному в значительной области параметров. Нами предложено объяснение данного эффекта на основе структуры математической модели. **Заключение.** Полученные нами результаты поднимают как минимум два серьезных вопроса, первый из которых связан с физиологической интерпретацией одной из основных переменных модели, гомеостаза сна, а второй — с уточнением предположений, которые использованы при модельном описании реакции фоторецепторов. В любом случае открываются интересные перспективы дальнейших исследований.

Ключевые слова: цикл сон–бодрствование, циркадный ритм, рассинхронизация, математическая модель.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 22-15-00143.

Для цитирования: Меркулова К. О., Постнов Д. Э. Рассеянный свет в ночное время вызывает рассинхронизацию ритмов в модели переключения «сон–бодрствование» // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 351–364. DOI: 10.18500/0869-6632-003036. EDN: JFYIYI

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Ambient light at night causes desynchronization of rhythms in the sleep–wake switching model

K. O. Merkulova[✉], D. E. Postnov

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉merksenia@gmail.com, postnov@info.sgu.ru

Received 9.02.2023, accepted 17.03.2023, available online 7.04.2023, published 31.05.2023

Abstract. The purpose of this study is to analyze the influence of the shape of the daily illumination profile on the synchronization of rhythms in the sleep–wake state switching model. Normally, the alternation of sleep and wakefulness of a person is synchronized with his circadian rhythm and with the 24-hour rhythm of illumination. There is, however, a lot of experimental evidence of a violation of this synchronism, both in the form of phase failures (for example, during air travel) and in the form of long-term mismatch of rhythms (for example, during shift work in production). Mathematical models of the process of switching between sleep and wakefulness also demonstrate the desynchronization of rhythms and are successfully used to optimize work schedules. At the same time, the influence of a number of factors on this process has not been sufficiently studied, including the nature of changes in illumination during the day. *Methods.* An analysis of the six-dimensional model under study shows that, in terms of nonlinear dynamics, the problem is reduced to finding and interpreting resonance regions on a three-dimensional torus. For the specific purposes of our work, it turned out to be convenient to estimate the ratio of three periods (24 hours, the circadian period, and the current duration of the sleep–wake cycle) by numerically integrating the model equations on a grid of parameter values using parallel computing technology. *The main result* of our work is that the presence of round-the-clock low-intensity illumination (that is, the addition of a zero-frequency signal to the daily light cycle) causes the circadian rhythm to desynchronize with respect to the daily one in a significant range of parameters. We have proposed an explanation of this effect based on the structure of the mathematical model. *Conclusion.* Our results raise at least two serious questions, the first of which is related to the physiological interpretation of one of the main variables of the model, sleep homeostasis, and the second is to refine the assumptions that are used in the model description of the photoreceptor response. In any case, there are interesting prospects for further research.

Keywords: sleep–wake cycle, circadian rhythm, desynchronization, mathematical model.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research, grant No. 22-15-00143.

For citation: Merkulova KO, Postnov DE. Ambient light at night causes desynchronization of rhythms in the sleep–wake switching model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(3):351–364. DOI: 10.18500/0869-6632-003036

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

В 1982 году А. А. Борбели опубликовал первую математическую модель регуляции процесса сон–бодрствование [1], которая стала известна как «модель двух процессов» и была позднее расширена и дополнена в работах [2–6].

Первый из двух процессов, гомеостаз сна, отражает потребность во сне, которая увеличивается во время бодрствования и снижается во время сна [1]. Второй, циркадный процесс, как правило, синхронизован с суточным ритмом и влияет на последовательность эпизодов сна и бодрствования. Он способствует бодрствованию, противодействуя гомеостатической потребности в сне в дневное время, и отвечает за консолидацию эпизодов сна в ночное время [1, 7].

В упомянутых выше математических моделях двум процессам соответствуют две автоколебательные подсистемы (далее по тексту для краткости — «осцилляторы»), которые находятся под воздействием времени суток, особенностей поведения, ритма питания, уровня физической активности и других факторов окружающей среды (цейтгеберов) — основным из которых является ритм чередования света и темноты [7–9].

Сбои в световом ритме могут возникать при авиаперелетах, а также при сменной работе на производстве, в сфере обслуживания, в медицине. Их влияние на состояние работников крайне важно и потому стало предметом интенсивного изучения, как экспериментального [10–13], так и модельного [14, 15].

Как упомянутые выше факторы, так и другие, часто не установленные причины, могут вызывать нарушение синхронизма между циркадным ритмом и циклом сон–бодрствование [16–18]. При таких расстройствах человеку трудно (иногда невозможно) поддерживать социально нормальный распорядок дня и рабочий график, что усугубляет ситуацию со сном и здоровьем [19]. Как правило, эти проблемы относят к нарушениям в системе циркадного ритма, однако их точные механизмы неизвестны [20].

В то время как влияние сбоев фазы светового ритма в упомянутых выше работах изучено хорошо, гораздо меньшее внимание на настоящий момент уделено не столь явным и труднее контролируемым характеристикам, в частности — профилю освещенности в течение суток. Применительно к отдельно взятому циркадному ритму эта задача решалась [7, 21], однако роль суточных изменений освещенности в рассинхронизации всех трех ритмов практически не исследована.

В данной работе мы опираемся на конкретный вариант математической модели нейронных популяций (*neuron mass models*), предложенный в работе [22]. Как и многие другие модели системного уровня, она изначально строилась с целью наилучшего количественного описания экспериментально зафиксированных закономерностей на языке уровня активности и характера взаимовлияния физиологически значимых блоков — нейронных ядер. Так, в работе [23] показано, что подобный тип модели, основанный на модели Янсена и Рита, может генерировать многочастотные ритмы, которые близки к реальным ритмам ЭЭГ. А модель, представленная в работе [24], способна с высокой точностью воспроизводить данные ЭЭГ для стадий сна N2 и N3. Выбор конкретной модели для наших исследований обусловлен тем, что она опирается на недавние разработки моделей такого типа [25, 26] и наилучшим (на момент ее публикации) образом воспроизводит экспериментальные данные по возникновению эффекта рассинхронизации между ритмами организма и суточным ритмом (*spontaneous internal desynchrony, SID*). В работе [22] показано, что использованный вид нелинейности и выбранные значения параметров обеспечивают лучшее, по сравнению с моделями-прототипами, соответствие лабораторным исследованиям.

В ходе вычислительного эксперимента мы строим двупараметрические диаграммы значений периодов двух ритмов модели и анализируем полученные зависимости при различных уровнях фоновой освещенности. Главный результат проведенного нами анализа заключается в том, что наличие ночной засветки слабо изменяет режимы в области типичного выбора параметров, однако вызывает значительные изменения в соседней области диаграммы и может, таким образом, оказаться важным фактором в синхронизации исследуемых ритмов. Мы предлагаем объяснение полученным результатам на основе анализа особенностей взаимосвязи уравнений модели, а также обсуждаем возникающие при этом вопросы на тему физиологической интерпретации переменных и параметров модели.

1. Методика

1.1. Модель. В этом разделе мы кратко описываем модель, детально обоснованную в работе [22]. В этой и других подобных моделях процессы описаны с точки зрения популяций нейронов и их взаимодействий. Структурная схема модели приведена на рис. 1 и включает блок активации фоторецепторов (1), циркадный осциллятор (2), блоки переключения нейронных ядер (3) и (4), блок гомеостаза сна (5) и зависимые от состояния (сон или бодрствование) связи элементов (6). Физиологически состояния сна или бодрствования задаются работой нейронных

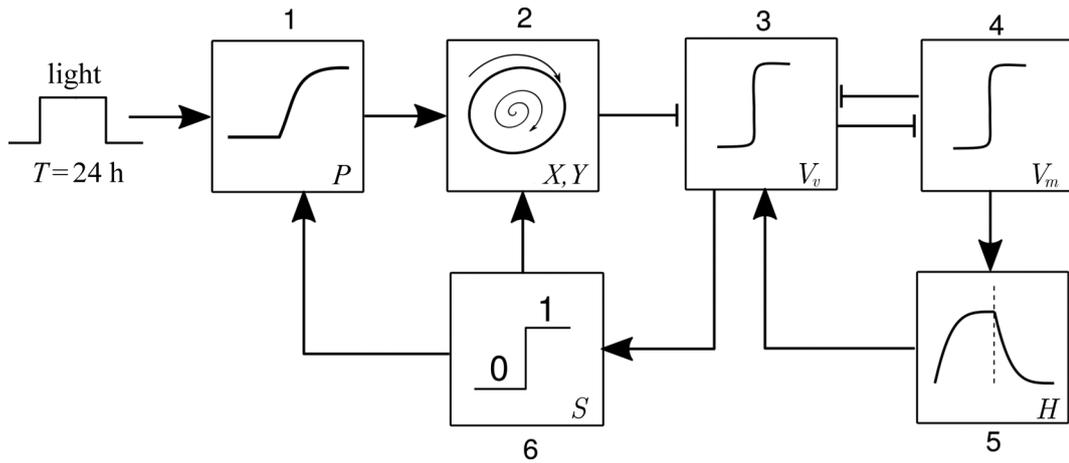


Рис. 1. Структура математической модели: 1 – уровень активации фоторецепторов (переменная P) зависит от поступающего света и текущего состояния системы S ; 2 – генератор циркадного ритма (переменные X, Y); 3 – «центр сна», вентролатеральное преоптическое ядро гипоталамуса (VLPO), переменная V_v ; 4 – «центр бодрствования», моноаминергические ядра (МА), переменная V_m ; 5 – гомеостатический процесс, переменная H ; 6 – процедура пороговой фильтрации отображает состояния сна и бодрствования в значения $S = 0$ и $S = 1$, соответственно

Fig. 1. The structure of the mathematical model: 1 – the level of photoreceptor activation (variable P) depends on the incoming light and the current state of the system S ; 2 – circadian rhythm generator (variables X, Y); 3 – “sleep center”, ventrolateral preoptic nucleus of the hypothalamus (VLPO), variable V_v ; 4 – “center of wakefulness”, monoaminergic nuclei (MA), variable V_m ; 5 – homeostatic process, variable H ; 6 – threshold filtering procedure maps sleep and wake states to $S = 0$ and $S = 1$, respectively

ядер мозга: МА (моноаминергические ядра, центр бодрствования) и VLPO (вентролатеральное преоптическое ядро гипоталамуса, представляющее центр сна). Активность этих ядер описывается средним напряжением популяций нейронов: для центра сна это переменная V_v , а для центра бодрствования – V_m . Состояние бодрствования регистрируется по превышению V_m заранее заданного порогового значения V_{th} , иначе считается, что система находится в состоянии сна. Ядра VLPO и МА (блоки 3 и 4 на рис. 1) связаны между собой тормозящими связями и образуют бистабильную систему, которая в отсутствие внешнего воздействия сколь угодно долго находится в одном из двух устойчивых состояний. Смена состояний (переключение активности ядер) вызывается действующими на них циркадным и гомеостатическим процессами (модули 2 и 5 на рис. 1, соответственно). Кроме того, на активность ядер влияют их латеральные связи (сигналы от других популяций нейронов), которые в данной версии модели предельно упрощены представленными управляющими параметрами A_v и A_m .

Уровень активности ядра определяется как средняя частота возбуждения нейронов $Q(V_i)$ и описывается сигмоидной функцией среднего напряжения соответствующей популяции V_i

$$Q(V_i) = \frac{Q_{\max}}{1 + e^{(\Theta - V_i)/\sigma'}}, \quad i = m, v, \quad (1)$$

где Q_{\max} – максимально возможная частота генерации импульсов, Θ – средний потенциал действия нейрона относительно покоя, а $\sigma'/\pi/\sqrt{3}$ – его стандартное отклонение [25].

Уравнения, описывающие активность ядер МА и VLPO, имеют вид:

$$\tau_v \frac{dV_v}{dt} = \nu_{vm} Q(V_m) - V_v + A_v + \nu_{vH} H + \nu_{vC} C(X, Y), \quad (2)$$

$$\tau_m \frac{dV_m}{dt} = \nu_{mv} Q(V_v) - V_m + A_m, \quad (3)$$

где τ_v и τ_m — постоянные времени, v_{mv} и v_{vm} — параметры влияния ядер друг на друга, A_v и A_m — упомянутые выше параметры, представляющие собой входы от других популяций нейронов. Слагаемые $v_{vH}H$ и $v_{vC}C(X, Y)$ описывают воздействие со стороны гомеостатического и циркадного процесса, соответственно.

Гомеостатический процесс H (блок 5) полностью определяется активностью центра бодрствования $Q(V_m)$, он описан уравнением:

$$\tau_H \frac{dH}{dt} = v_{Hm}Q(V_m) - H, \quad (4)$$

где τ_H — постоянная времени гомеостатического процесса, а v_{Hm} задает силу воздействия со стороны МА.

Циркадный процесс C (блок 2) имеет форму квазигармонических колебаний и генерируется автоколебательной подсистемой из двух уравнений для переменных X и Y

$$\tau_x \frac{dX}{dt} = Y + \gamma \left(\frac{1}{3}X + \frac{4}{3}X^3 - \frac{256}{105}X^7 \right) + C_{Xn} + C_{Xp}, \quad (5)$$

$$\tau_y \frac{dY}{dt} = - \left(\frac{\delta}{\tau_c} \right)^2 X + C_{Yp}, \quad (6)$$

где τ_x, τ_y — константы времени, которые задают период осциллятора, γ — параметр, управляющий формой колебаний, τ_c и δ — параметры, введенные для согласования с экспериментальными данными [27]. Конкретная форма нелинейной функции $C(X, Y)$ предложена в [22] для лучшего соответствия экспериментальным данным.

Эмпирически подобранные нелинейные функции C_{Xp}, C_{Yp} и C_{Xn} задают влияние света и других Zeitgeberов (факторов окружающей среды, которые увлекают биологические ритмы к 24-часовому суточному ритму), соответственно.

Влияние циркадного осциллятора на активность ядра VLPO задано в уравнении (2) с помощью функции

$$C(X, Y) = 0.1 \frac{(X + 1)}{2} + \left(\frac{c_1 X - c_2 Y + c_3}{X + 2} \right)^2, \quad (7)$$

где сила циркадного воздействия выражается параметром v_{vC} , а форма регулируется параметрами c_1, c_2 и c_3 .

Не зависящие от света воздействия на циркадный осциллятор со стороны гомеостатического заданы следующими соотношениями:

$$C_{Xn} = v_{Xn} \left(\frac{1}{3} - (1 - S) \right) (1 - \tanh(rX)), \quad (8)$$

$$S = U(V_m - V_{th}), \quad (9)$$

где v_{Xn} — параметр, характеризующий силу связи факторов, не связанных со светом, а постоянная r делает воздействие зависимым от фазы циркадного осциллятора. Функция состояния системы S выражается через ступенчатую функцию U , которая принимает единичное значение, когда $V_m - V_{th} > 0$ (система «бодрствует»), или нулевое, когда $V_m - V_{th} \leq 0$ (система «спит»).

Зависимое от света воздействие на циркадный осциллятор задается с помощью функций C_{Xp} and C_{Yp} для каждой из переменных осциллятора

$$C_{Xp} = v_{Xp} \alpha_I (1 - P)(1 - \varepsilon X)(1 - \varepsilon Y), \quad (10)$$

$$C_{Yp} = \alpha_I (1 - P)(1 - \varepsilon X)(1 - \varepsilon Y)(v_{Y Y} Y - v_{Y X} X). \quad (11)$$

Параметры ν_{YU} и ν_{YX} делают воздействие зависимым от текущей фазы циркадного осциллятора, а ε задает степень чувствительности световой составляющей к циркадным переменным.

Физиологически влияние света на циркадную систему осуществляется через ганглиальные клетки (фоторецепторы) на сетчатке глаз [28, 29]. В модели активность фоторецепторов представлена переменной P и выражается следующими уравнениями:

$$\tau_P \frac{P}{dt} = \alpha_I(1 - P) - \beta P, \quad (12)$$

$$\alpha_I = \alpha_0 S \frac{I(t)}{I(t) + I_1} \sqrt{\frac{I(t)}{I_0}}. \quad (13)$$

Доля фоторецепторов, готовых к активации, составляет $(1 - P)$. Они переходят в активное состояние со скоростью α_I и спонтанно деактивируются со скоростью β . Параметры α_0, I_0, I_1 задают зависимость активности фоторецепторов от текущей интенсивности света $I(t)$, τ_P — постоянная времени активации. Отметим, что присутствие состояния системы S в уравнении (13) делает световой сигнал значимым только в состоянии бодрствования (глаза открыты).

1.2. Световой профиль. Суточный профиль освещенности $I(t)$ в реальных условиях может иметь самые различные формы в зависимости от географической широты, погодных явлений и т. д. В городской среде он во многом задается социальными факторами (график работы) и с учетом искусственного освещения может быть представлен в виде последовательной смены дневного и ночного освещения, что соответствует сигналу типа «меандр» (рис. 2). Управляющие параметры модели I_{amb} и I_{ext} задают уровень фоновой засветки и размаха основного сигнала, соответственно. Из рисунка видно, что наличие фоновой засветки лишь приподнимает весь сигнал, не меняя его форму, и увеличивает амплитуду постоянной составляющей в спектре. Тем не менее, как будет показано ниже, такие изменения могут резко менять динамический режим системы в целом.

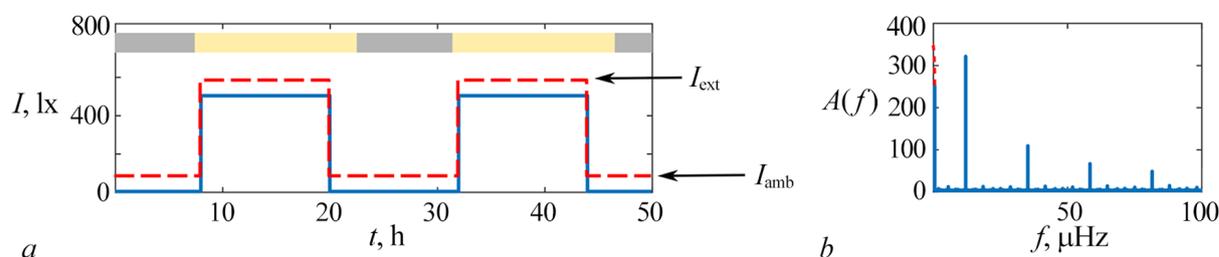


Рис. 2. Световой суточный профиль в виде меандра с пиковой интенсивностью $I_{\text{ext}} = 500$ лк (а) и его фурье-спектр амплитуд (б). Красным пунктиром проиллюстрированы изменения в случае наличия фоновой засветки с интенсивностью $I_{\text{amb}} = 100$ лк. Полоса в верхней части панели демонстрирует смену состояний сна (серый цвет) и бодрствования (желтый) при типичном выборе управляющих параметров (цвет онлайн)

Fig. 2. Light diurnal profile in the form of a meander with a peak intensity $I_{\text{ext}} = 500$ lx (a) and its amplitude Fourier spectrum (b). The red dotted line illustrates the changes in the presence of background illumination with an intensity $I_{\text{amb}} = 100$ lx. The bar at the top of the panel shows the transition between sleep (gray) and wakefulness (yellow) for a typical choice of control parameters (color online)

1.3. Вычислительный метод. Для оценки периода каждого из двух внутренних ритмов системы выполнялось ее численное интегрирование с одними и теми же начальными условиями, но разными комбинациями управляющих параметров. Считалось, что период установления занимает не более 1000 часов модельного времени, после чего в последующие 1000 часов

вычислялись средние значения периода циркадного осциллятора T_c по временной реализации переменной X и периода ритма сон–бодрствование T_s по временной реализации переменной V_m . Данная процедура выполнялась независимо для каждой комбинации управляющих параметров τ_H и I_{ext} . Для ускорения расчетов все комбинации параметров обрабатывались одновременно с помощью метода параллельных вычислений на графических процессорах. Таким образом, анализ текущего режима основывался на соотношении периодов трех ритмов: суточного с периодом строго 24 часа, циркадного с периодом T_c и гомеостатического с периодом T_s .

Для интегрирования уравнений использовались две различные программы. Первая, в среде Octave с использованием функции lode и переменными двойной точности считалась эталонной. Вторая программа в среде разработки NVIDIA CUDA, применялась для расчета двухпараметрических диаграмм. В ней использовалась разновидность метода Рунге–Кутты 4 порядка с фиксированным шагом ($h = 0.001$ ч), адаптированная для решения как обыкновенных, так и стохастических дифференциальных уравнений [30–32]. В результатах расчета двумя указанными программами значимых расхождений не выявлено.

1.4. Значения управляющих параметров. Мы опирались на набор управляющих параметров из [22]. Основная их часть подбиралась с точки зрения количественного соответствия экспериментальным данным, мы считали их константами. Свободно изменяемыми параметрами можно считать параметры интенсивности светового воздействия I_{amb} , I_{ext} , а также параметр τ_H , физиологический смысл и роль в модели которого понятны, но обоснованная количественная оценка затруднительна. Ниже приведены значения тех параметров, которые считались константами: $Q_{max} = 100$ Гц; $\Theta = 10$ мВ; $\sigma' = 3$ мВ; $\tau_v = \tau_m = 50/3600$ ч; $v_{vm} = -2.1/3600$ мВ·ч; $v_{mv} = -1.8/3600$ мВ·ч; $A_v = -10.3$ мВ; $A_m = 1.3$ мВ; $V_{th} = -2$ мВ; $v_{vH} = 1$ мВ; $v_{vC} = -0.5$ мВ; $\tau_H = 59$ ч; $v_{Hm} = 4.57/3600$ ч; $\tau_x = \tau_y = 24/(2\pi)$ ч; $\gamma = 0.13$; $\tau_c = 24.2$ ч; $\delta = 24.2/0.99729$ ч; $c_1 = 0.838$; $c_2 = 0.676$; $c_3 = 1.136$; $v_{Xn} = 0.032$; $r = 10$ ч; $v_{Xp} = 37$; $v_{Yp} = 12.33/60$ ч; $v_{YX} = 20.35/60$ ч; $\varepsilon = 0.4$; $\beta = 0.007/60$ Гц; $\alpha_0 = 0.1/60$ Гц; $I_0 = 9500$ лк; $I_1 = 100$ лк; $\tau_p = 1/3600$ ч.

2. Результаты

При исследовании динамики цикла сон–бодрствование принято представлять результаты расчетов или измерений в виде диаграмм, показанных на рис. 3, *a* и *b*, где по обеим осям отложено время, в часах по горизонтали и днях по вертикали. Цветной заливкой выделено чередование периодов сна и бодрствования, а красные и зеленые метки указывают положение основных биологических маркеров: минимум внутренней температуры тела (зеленые треугольники) и пик мелатонина в плазме (красные квадраты). По таким диаграммам легко диагностировать отсутствие (панель *a*) либо наличие (панель *b*) синхронности процессов по отношению к суточному ритму, на панели *a* хорошо виден сдвиг и «перескок» зон и маркеров по горизонтали.

В данной работе мы используем более традиционный при анализе синхронизации подход: сопоставляем рассчитанные за достаточно длительный промежуток времени периоды двух автоколебательных подсистем модели. На рис. 3, *c* приведены такие зависимости для $\tau_H = 58.0$. Как можно видеть, в правой части графика (помечено буквой А) обе кривые совпадают и лежат на уровне 24 часов. То есть оба внутренних ритма системы синхронизованы со световым суточным ритмом, $T_s = T_c = 24.0$ часа. Это физиологически нормальный режим, который реализуется при типичном выборе параметров. При меньших уровнях освещенности, в области С, оба периода отличны от суточного периода 24 часа, но синхронизованы между собой, $T_c = T_s$. Наконец, в области D, при малых уровнях интенсивности дневного освещения I_{ext} , все три периода различны, $T_c = 23.2 \dots 23.5$ часа, а T_s уменьшается с уменьшением I_{ext} .

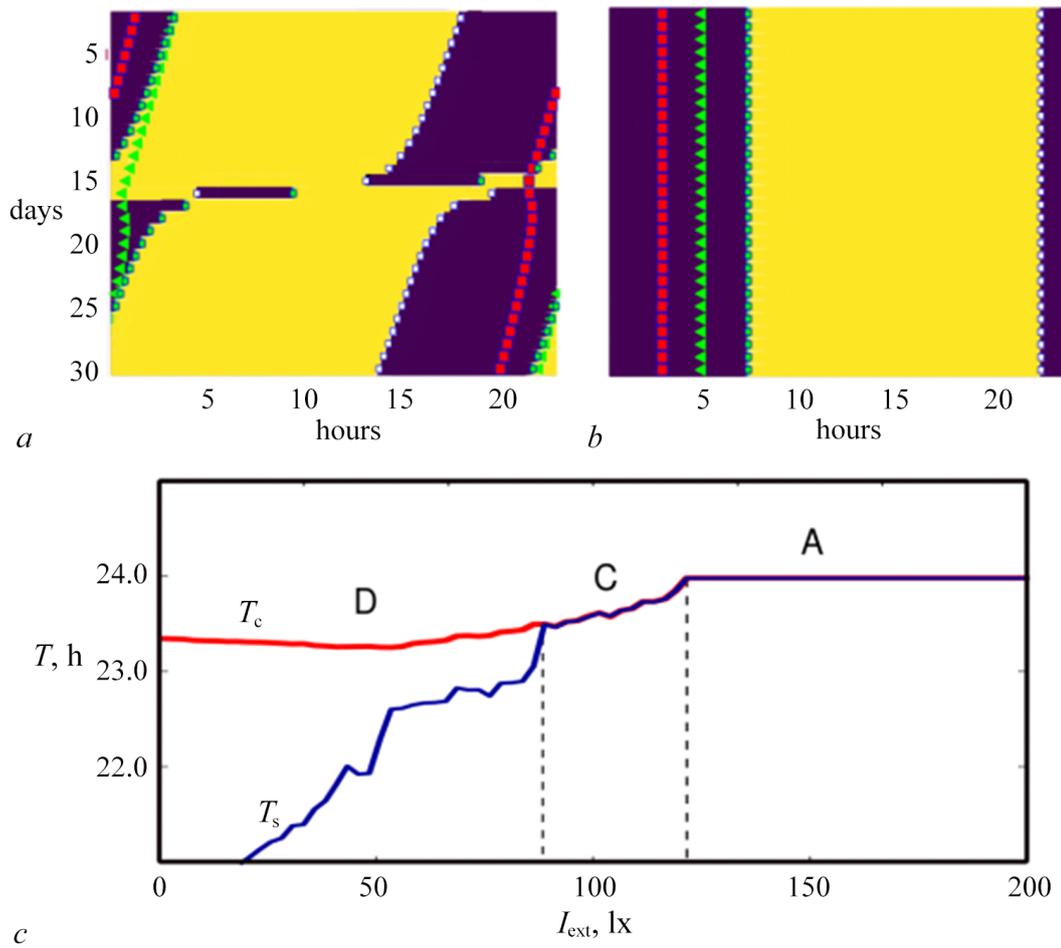


Рис. 3. *a, b* — Представление режимов модели в форме суточных диаграмм при отсутствии засветки и различном уровне дневной освещенности I_{ext} : 10 лк (*a*); 200 лк (*b*). Значения других параметров даны в разделе 1.4. Фиолетовая заливка соответствует интервалам сна, желтая — интервалам бодрствования. Красные и крупные зеленые маркеры показывают фазу циркадного ритма. Панель *c* является однопараметрической диаграммой зависимости периодов циркадного ритма (T_c) и цикла сон–бодрствование (T_s) от степени дневной освещенности I_{ext} для $\tau_H = 58.0$ (цвет онлайн)

Fig. 3. *a, b* — Representation of the model dynamics in the form of daily diagrams in the absence of constant illumination and various levels of daylight illumination I_{ext} : 10 lx (*a*), 200 lx (*b*). The values of other parameters are given in the section 1.4. Purple shading corresponds to sleep intervals, yellow — to waking intervals. Red markers show the phase of the circadian rhythm. Panel *c* is single parameter diagram of dependence of the periods of the circadian rhythm (T_c) and the sleep–wake cycle (T_s) on the degree of daylight I_{ext} at $\tau_H = 58.0$ (color online)

На рис. 4 приведены значения циркадного периода T_c уже на плоскости двух управляющих параметров τ_H и I_{ext} для различной величины фоновой засветки I_{amb} . Анализ таких диаграмм позволяет идентифицировать три описанных выше режима (области A, C, D) и еще один, обозначенный как область B, где период циркадного ритма T_c в пределах точности расчетов равен 24.0 часам, тогда как T_s имеет существенно меньшие значения, примерно 18 часов. Описанное выше разбиение плоскости параметров имеет ясную интерпретацию с точки зрения теории синхронизации [33, 34]. Так, область A соответствует области основной ($24 : T_c : T_s = 1 : 1 : 1$) синхронизации трех ритмов, где величины всех трех периодов одинаковы. Области B и C — это зоны частичной синхронизации, где совпадают 2 из 3 частот, а результирующий колебательный режим — это двухчастотные квазипериодические колебания. Область D соответствует полностью

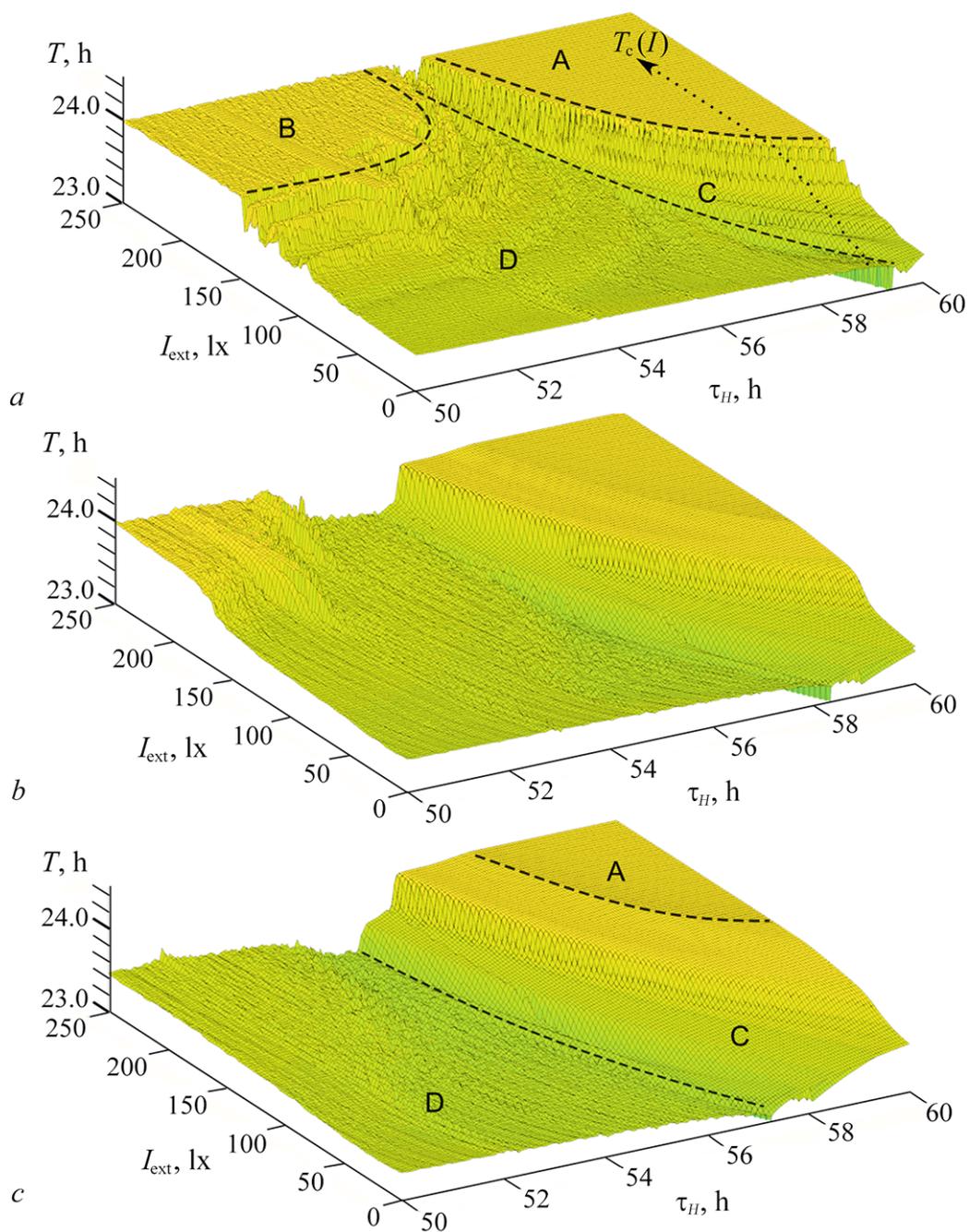


Рис. 4. Значения циркадного периода T_c на плоскости управляющих параметров τ_H и I_{ext} для различных значений интенсивности фоновой засветки $I_{amb} = 0, 25, 50$ лк для панелей a, b и c , соответственно. Пунктирные линии и буквы А, В, С, D разграничивают области режимов различной степени синхронности, см. текст (цвет онлайн)

Fig. 4. The values of the circadian period T_c on the plane of the control parameters τ_H and I_{ext} for different values of the background illumination intensity $I_{amb} = 0, 25, 50$ lx for panels a, b and c respectively. Dashed lines and letters A, B, C, D delimit the regions of modes of varying degrees of synchronicity, see text (color online)

несинхронному поведению, когда все три ритма имеют различные периоды. В работе [35] на примере простейшей модельной системы показана подобная иерархия степени синхронности. Отметим, что в рамках данной работы мы не рассматриваем резонансы вида $(1 : 1 : n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, которые расположены в области $\tau_H < 50$. В настоящем исследовании нас интересует область В, а точнее, обнаруженный нами эффект ее исчезновения при увеличении интенсивности фоновой засветки I_{amb} .

Панель *a* рис. 4 соответствует рис. 3, однако для лучшей визуализации для величины T_c выбран другой вертикальный масштаб, от 23 до 24.5 часов. При этом значения T_s в областях В и D не отображаются, но поведение T_c видно более детально. Интенсивность фоновой засветки I_{amb} на рис. 4 увеличивается сверху вниз и составляет 0, 25 и 50 лк для панелей *a*, *b* и *c*, соответственно. Сравнение панелей позволяет увидеть влияние фоновой засветки в динамике: при ее увеличении многочисленные зоны слабых резонансов и переходов между ними сглаживаются, область полной синхронизации А уменьшается в размерах, но главное — при $I_{amb} = 50$ лк (*c*) полностью исчезает область В! Таким образом, добавление постоянной составляющей, то есть сигнала нулевой частоты, существенно влияет на картину взаимодействия трех ритмов в исследуемой системе.

Интересно, что высокая чувствительность процесса переключения между сном и бодрствованием к излишнему освещению в ночное время известна физиологам и изучалась экспериментально [36].

Для получения дополнительной информации были построены однопараметрические зависимости величин T_c и T_s от интенсивности дневного освещения I_{ext} (рис. 5). Как можно видеть, зависимость T_s от I_{ext} мало меняется при наличии фоновой засветки, во всяком случае, однозначной тенденции не наблюдается. В то же время график для T_c , во всех случаях находящийся между T_s и значением 24 часа, монотонно смещается в сторону T_s , черная, синяя и красная кривые соответствуют фоновой засветке I_{amb} в 0, 25 и 50 лк, соответственно. Это можно интерпретировать двояко: либо как ослабление синхронизирующего действия со стороны 24-часового ритма, либо как усиление действия со стороны ритма сон–бодрствование.

В задачи данной работы входило предложить нелинейно-динамическое, а не физиологическое объяснение найденных эффектов. Поэтому в его поисках были проанализированы особенности модельных уравнений (1)–(13), которые могут привести к обнаруженным нами эффектам.

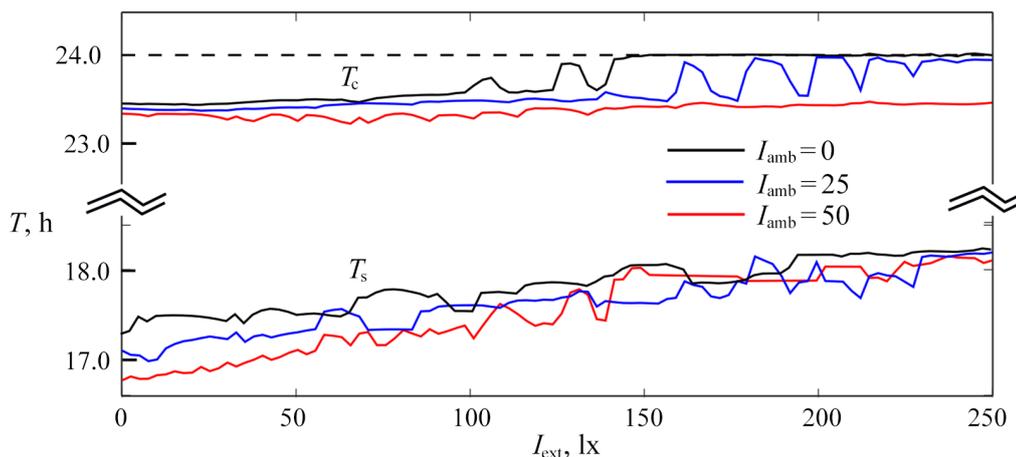


Рис. 5. Зависимость величин T_c и T_s от интенсивности дневного освещения I_{ext} для $\tau_H = 52.0$ (цвет онлайн)

Fig. 5. Dependence of T_c and T_s on daylight intensity I_{ext} for $\tau_H = 52.0$ (color online)

Первая проверенная гипотеза была связана с возможным вкладом нелинейной функции активации фоторецепторов (13). Выяснилось, однако, что в исследуемом диапазоне значений параметров наличие фоновой засветки весьма незначительно (менее чем на 5%) изменяет соотношение амплитуд постоянной составляющей и амплитуд гармоник в спектре сигнала, преобразованного согласно (13). Кроме того, дополнительные расчеты, в которых тестировались различные формы сигналов, показали, что структура диаграмм довольно слабо зависит от изменения соотношения амплитуд их гармоник.

Однако тестирование различных форм дневного профиля подсказало возможный механизм действия фоновой засветки, который наиболее сильно проявляет себя для сигнала в форме меандра. На рис. 2 вверху панели *a* цветовой градацией отображена смена состояний бодрствования (желтым) и сна (серым) для области А на рис. 4. В выражение (13) эта зависимость входит как умножение на текущее состояние системы S . Фазы сигналов соответствуют типичному установившемуся режиму. В отсутствие засветки (синяя кривая) во время сна, когда $S = 0$, световой сигнал также равен нулю, и их перемножение в выражении (13) не меняет ни формы, ни спектрального состава воздействия на циркадный осциллятор. При наличии ночной засветки, ее перемножение с S порождает колебательную составляющую α_I , которая по частоте и фазе дублирует процесс переключения между сном и бодрствованием. Это качественно эквивалентно усилению степени воздействия на циркадный осциллятор, изначально заложенное в соотношении (8). По мере усиления фоновой засветки I_{amb} это дополнительное синхронизирующее воздействие на T_c растет и противодействует синхронизации циркадного ритма с суточным.

Дополнительные расчеты с различными формами светового профиля подтвердили, что область частичной синхронизации В уменьшается либо вовсе пропадает именно для тех сигналов, которые имеют область ненулевых значений в периоды сна. В то же время, исключение величины S из соотношения (13) значительно расширяет область синхронности циркадного ритма с суточным 24-часовым циклом и существенно ослабляет его зависимость от параметра τ_H .

Заключение

Подводим итоги изложенного выше. Мы исследовали, как форма сигнала светового профиля влияет на синхронность суточного 24-часового цикла, циркадного ритма, и процесса смены состояний сон–бодрствование в математической модели, которая ранее была опубликована в [22] как наиболее точно воспроизводящая экспериментальные данные.

Основной результат нашей работы заключается в том, что наличие круглосуточной малоинтенсивной засветки (то есть добавление к сигналу суточного светового цикла сигнала нулевой частоты) вызывает рассинхронизацию циркадного ритма по отношению к суточному в значительной области параметров. А именно, увеличение интенсивности фоновой засветки (в нашем случае от 0 до 50 лк) приводит к уменьшению в размерах и полному исчезновению области частично-синхронного режима, в пределах которой циркадный ритм синхронизован с суточным 24-часовым ритмом. Нами предложено объяснение данного эффекта на основе структуры математической модели. Интересно, что такое действие ночной засветки есть следствие допущения о нечувствительности фоторецепторов к свету во время сна. Математически это реализовано как стробирование светового сигнала ритмом сон–бодрствование, а потому в определенных ситуациях приводит к эффекту типа конкуренции мод — усиление действия гомеостатического осциллятора не способно синхронизовать циркадный осциллятор, но его достаточно, чтобы «оторвать» циркадные колебания от 24-часового суточного цикла.

Полученные нами результаты поднимают как минимум два серьезных вопроса, первый из которых связан с физиологической интерпретацией одной из основных переменных модели —

гомеостазом сна, а точнее, с дополнительным обоснованием параметра τ_H , который оказывается критически важным для синхронизации ритмов, что уже отмечалось нами в [37]. Второй вопрос связан с уточнением предположений, которые использованы при модельном описании реакции фоторецепторов. Как становится ясно, предположение полной их нечувствительности к свету в период сна — это сильное упрощение ситуации. В любом случае открываются интересные перспективы дальнейшего совершенствования модели.

References

1. Borbély AA. A two process model of sleep regulation. *Hum. Neurobiol.* 1982;1(3):195–204.
2. Achermann P, Borbély AA. Simulation of human sleep: ultradian dynamics of electroencephalographic slow-wave activity. *Journal of Biological Rhythms.* 1990;5(2):141–157. DOI: 10.1177/074873049000500206.
3. Achermann P, Borbély AA. Simulation of daytime vigilance by the additive interaction of a homeostatic and a circadian process. *Biological Cybernetics.* 1994;71(2):115–121. DOI: 10.1007/BF00197314.
4. Achermann P, Dijk DJ, Brunner DP, Borbély AA. A model of human sleep homeostasis based on EEG slow-wave activity: Quantitative comparison of data and simulations. *Brain Research Bulletin.* 1993;31(1–2):97–113. DOI: 10.1016/0361-9230(93)90016-5.
5. Achermann P. The two-process model of sleep regulation revisited. *Aviation, Space, and Environmental Medicine.* 2004;75(Suppl 3):LA37–A43.
6. Borbély AA, Daan S, Wirz-Justice A, Deboer T. The two-process model of sleep regulation: a reappraisal. *Journal of Sleep Research.* 2016;25(2):131–143. DOI: 10.1111/jsr.12371.
7. Golombek DA, Rosenstein RE. Physiology of circadian entrainment. *Physiol. Rev.* 2010;90(3):1063–1102. DOI: 10.1152/physrev.00009.2009.
8. Kalsbeek A, la Fleur S, Fliers E. Circadian control of glucose metabolism. *Molecular Metabolism.* 2014;3(4):372–383. DOI: 10.1016/j.molmet.2014.03.002.
9. Youngstedt SD, Elliott JA, Kripke DF. Human circadian phase–response curves for exercise. *The Journal of Physiology.* 2019;597(8):2253–2268. DOI: 10.1113/JP276943.
10. Casjens S, Brenscheidt F, Tisch A, Beermann B, Brüning T, Behrens T, Rabstein S. Social jetlag and sleep debts are altered in different rosters of night shift work. *PLoS ONE.* 2022;17(1):e0262049. DOI: 10.1371/journal.pone.0262049.
11. Hulsegge G, Loef B, van Kerkhof LW, Roenneberg T, van der Beek AJ, Proper KI. Shift work, sleep disturbances and social jetlag in healthcare workers. *Journal of Sleep Research.* 2019;28(4):e12802. DOI: 10.1111/jsr.12802.
12. Südy ÁR, Ella K, Bódizs R, Káldi K. Association of social jetlag with sleep quality and autonomic cardiac control during sleep in young healthy men. *Front. Neurosci.* 2019;13:950. DOI: 10.3389/fnins.2019.00950.
13. Deacon S, Arendt J. Adapting to phase shifts, I. An experimental model for jet lag and shift work. *Physiology & Behavior.* 1996;59(4–5):665–673. DOI: 10.1016/0031-9384(95)02147-7.
14. Skeldon AC, Phillips AJK, Dijk DJ. The effects of self-selected light-dark cycles and social constraints on human sleep and circadian timing: a modeling approach. *Scientific Reports.* 2017;7(1):45158. DOI: 10.1038/srep45158.
15. Putilov AA, Verevkin EG. Simulation of the ontogeny of social jet lag: A shift in just one of the parameters of a model of sleep-wake regulating process accounts for the delay of sleep phase across adolescence. *Front. Physiol.* 2018;9:1529. DOI: 10.3389/fphys.2018.01529.
16. Harvey AG. Sleep and circadian rhythms in bipolar disorder: Seeking synchrony, harmony, and regulation. *The American Journal of Psychiatry.* 2008;165(7):820–829. DOI: 10.1176/appi.ajp.2008.08010098.

17. Hickie IB, Naismith SL, Robillard R, Scott EM, Hermens DF. Manipulating the sleep-wake cycle and circadian rhythms to improve clinical management of major depression. *BMC Medicine*. 2013;11:79. DOI: 10.1186/1741-7015-11-79.
18. Healy KL, Morris AR, Liu AC. Circadian synchrony: Sleep, nutrition, and physical activity. *Front. Netw. Physiol.* 2021;1:732243. DOI: 10.3389/fnetp.2021.732243.
19. Rajaratnam SMW, Licamele L, Birznieks G. Delayed sleep phase disorder risk is associated with absenteeism and impaired functioning. *Sleep Health*. 2015;1(2):121–127. DOI: 10.1016/j.sleh.2015.03.001.
20. Sack RL, Auckley D, Auger RR, Carskadon MA, Wright Jr KP, Vitiello MV, Zhdanova IV. Circadian rhythm sleep disorders: Part II, advanced sleep phase disorder, delayed sleep phase disorder, free-running disorder, and irregular sleep-wake rhythm. *Sleep*. 2007;30(11):1484–1501. DOI: 10.1093/sleep/30.11.1484.
21. Tekieh T, Lockley SW, Robinson PA, McCloskey S, Zobaer MS, Postnova S. Modeling melanopsin-mediated effects of light on circadian phase, melatonin suppression, and subjective sleepiness. *Journal of Pineal Research*. 2020;69(3):e12681. DOI: 10.1111/jpi.12681.
22. Postnova S, Lockley SW, Robinson PA. Sleep propensity under forced desynchrony in a model of arousal state dynamics. *Journal of Biological Rhythms*. 2016;31(5):498–508. DOI: 10.1177/0748730416658806.
23. Dong E, Liang Z. The multi-frequency EEG rhythms modeling based on two-parameter bifurcation of neural mass model. In: 2014 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. 03-06 August 2014, Tianjin, China. New York: IEEE; 2014. P. 1564–1569. DOI: 10.1109/ICMA.2014.6885933.
24. Weigenand A, Schellenberger Costa M, Victor Ngo HV, Claussen JC, Martinetz T. Characterization of K-complexes and slow wave activity in a neural mass model. *PLoS Comput. Biol.* 2014;10(11):e1003923. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1003923.
25. Phillips AJK, Robinson PA. A quantitative model of sleep-wake dynamics based on the physiology of the brainstem ascending arousal system. *Journal of Biological Rhythms*. 2007;22(2):167–179. DOI: 10.1177/0748730406297512.
26. Phillips AJK, Czeisler CA, Klerman EB. Revisiting spontaneous internal desynchrony using a quantitative model of sleep physiology. *Journal of Biological Rhythms*. 2011;26(5):441–453. DOI: 10.1177/0748730411414163.
27. St Hilaire MA, Klerman EB, Khalsa SBS, Wright Jr KP, Czeisler CA, Kronauer RE. Addition of a non-photoc component to a light-based mathematical model of the human circadian pacemaker. *Journal of Theoretical Biology*. 2007;247(4):583–599. DOI: 10.1016/j.jtbi.2007.04.001.
28. Berson DM. Strange vision: ganglion cells as circadian photoreceptors. *Trends in Neurosciences*. 2003;26(6):314–320. DOI: 10.1016/S0166-2236(03)00130-9.
29. Wong KY, Dunn FA, Graham DM, Berson DM. Synaptic influences on rat ganglion-cell photoreceptors. *The Journal of Physiology*. 2007;582(1):279–296. DOI: 10.1113/jphysiol.2007.133751.
30. Kloeden PE, Platen E. Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations. *Journal of Statistical Physics*. 1992;66(1–2):283–314. DOI: 10.1007/BF01060070.
31. Khodabin M, Rostami M. Mean square numerical solution of stochastic differential equations by fourth order Runge-Kutta method and its application in the electric circuits with noise. *Advances in Difference Equations*. 2015;1:62. DOI: 10.1186/s13662-015-0398-6.
32. Rackauckas C, Nie Q. Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2017;22(7):2731–2761. DOI: 10.3934/dcdsb.2017133.
33. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 432 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.

34. Balanov A, Janson N, Postnov D, Sosnovtseva O. Synchronization: From Simple to Complex. Berlin, Heidelberg: Springer; 2008. 426 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
35. Postnov DE, Balanov AG, Sosnovtseva OV, Mosekilde E. Chaotic hierarchy in high dimensions. International Journal of Modern Physics B. 2000;14(24):2511–2527. DOI: 10.1142/S0217979200002296.
36. Zeitzer JM, Dijk DJ, Kronauer RE, Brown EN, Czeisler CA. Sensitivity of the human circadian pacemaker to nocturnal light: melatonin phase resetting and suppression. The Journal of Physiology. 2000;526(3):695–702. DOI: 10.1111/j.1469-7793.2000.00695.x.
37. Postnov DE, Merkulova KO, Postnova S. Desynchrony and synchronisation underpinning sleep–wake cycles. The European Physical Journal Plus. 2021;136(5):488. DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01491-z.



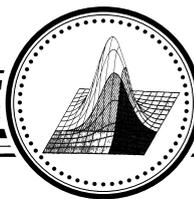
Меркулова Ксения Олеговна — родилась в Саратове (1999). Окончила с отличием бакалавриат Института физики СГУ по направлению «Физика» (2021). На данный момент обучается в магистратуре Института физики по направлению «Физика». С 2019 года работает на кафедре оптики и биофотоники Саратовского государственного университета в должности лаборанта-исследователя. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, триггерные модели. Опубликовала 4 научных статьи по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: merksenia@gmail.com
 ORCID: 0000-0001-5967-4083
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1056482



Постнов Дмитрий Энгелевич — родился в Саратове (1961). Окончил физический факультет СГУ по специальности «Радиофизика и электроника» (1983). Доктор физико-математических наук (2001), профессор по кафедре радиофизики (2007). Главный научный сотрудник (с конца 2022) кафедры оптики и биофотоники СГУ. Научные интересы — нелинейная динамика живых систем, математическое моделирование процессов в клеточных структурах мозга. Автор более 120 статей и 4 монографий в области синхронизации хаоса и сложной динамики моделей живых систем.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: postnov@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-6575-0975
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34837



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Article

DOI: 10.18500/0869-6632-003040

Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity

L. I. Mogilevich✉, E. V. Popova

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia

E-mail: ✉mogilevichli@gmail.com, elizaveta.popova.97@bk.ru

Received 26.02.2023, accepted 14.03.2023, available online 11.05.2023,

published 31.05.2023

Abstract. Purpose of this paper is to study the evolution of longitudinal strain waves in the walls of an annular channel filled with a viscous incompressible fluid. The walls of the channel were represented as coaxial shells with fractional physical nonlinearity. The viscosity of the fluid and its influence on the wave process was taken into account within the study. **Methods.** The system of two evolutionary equations, which are generalized Schamel equations, was obtained by the two-scale asymptotic expansion method. The fractional nonlinearity of the channel wall material leads to the necessity to use a computational experiment to study the wave dynamics in them. The computational experiment was conducted based on obtaining new difference schemes for the governing equations. These schemes are analogous to the Crank–Nicholson scheme for modeling heat propagation. **Results.** Numerical simulation showed that over time, the velocity and amplitude of the deformation waves remain unchanged, and the wave propagation direction concurs with the positive direction of the longitudinal axis. The latter specifies that the velocity of the waves is supersonic. For a particular case, the coincidence of the computational experiment with the exact solution is shown. This substantiates the adequacy of the proposed difference scheme for the generalized Schamel equations. In addition, it was shown that solitary deformation waves in the channel walls are solitons.

Keywords: wave dynamics, annular channel, viscous fluid, fractional nonlinearity, computational experiment.

Acknowledgements. The study was funded by Russian Science Foundation (RSF) according to the project No. 23-29-00140.

For citation: Mogilevich LI, Popova EV. Longitudinal waves in the walls of an annular channel filled with liquid and made of a material with fractional nonlinearity. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3):365–376. DOI: 10.18500/0869-6632-003040

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Продольные волны в стенках кольцевого канала из материала с дробной нелинейностью, заполненного жидкостью

Л. И. Могилевич✉, Е. В. Попова

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия

E-mail: ✉mogilevichli@gmail.com, elizaveta.popova.97@bk.ru

Поступила в редакцию 26.02.2023, принята к публикации 14.03.2023,

опубликована онлайн 11.05.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. Целью данной статьи является исследование эволюции продольных волн деформации в стенках кольцевого канала, заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Стенки канала представлялись коаксиальными оболочками с дробной физической нелинейностью. В ходе исследования учитывалась вязкость жидкости и ее влияние на волновой процесс. **Методы.** Используя метод двухмасштабных разложений получена разрешающая система двух эволюционных уравнений, которые представляют собой обобщенные уравнения Шамеля. Дробная нелинейность материала стенок канала приводит к необходимости использования вычислительного эксперимента для исследования волновой динамики в них. Вычислительный эксперимент проводился на основе получения новых разностных схем для системы эволюционных уравнений. Эти схемы получены с использованием техники базиса Грёбнера и аналогичны схеме Кранка–Николсона для моделирования распространения тепла. **Результаты.** Численное моделирование показало, что скорость и амплитуда волн деформации остаются неизменными, а направление распространения волн совпадает с положительным направлением продольной оси. Последнее указывает на то, что скорость волн сверхзвуковая. Для частного случая показано совпадение вычислительного эксперимента с точным решением. Это обосновывает адекватность предложенной разностной схемы для обобщенных уравнений Шамеля. Кроме того, показано, что уединенные волны деформации в стенках канала являются солитонами.

Ключевые слова: волновая динамика, кольцевой канал, вязкая жидкость, дробная нелинейность, вычислительный эксперимент.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ) в соответствии с проектом № 23-29-00140.

Для цитирования: Могилевич Л. И., Попова Е. В. Продольные волны в стенках кольцевого канала из материала с дробной нелинейностью, заполненного жидкостью // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 365–376. DOI: 10.18500/0869-6632-003040. EDN: RKTUVVT

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Introduction

The wave technologies of nondestructive testing are increasingly being used in different industries, for example, for pipeline diagnostics. Papers [1–5] are devoted to various aspects of wave propagation in rods, plates and shells. In the above papers, the effect on the wave process in the shell of a viscous liquid located inside it was not studied. The shell–fluid interaction was studied in [6] outside the consideration of wave processes. On the other hand, in [7] the wave process in an annular channel is studied considering the fluid inertia forces and cubic nonlinearity of shells forming the channel. In the cases of shells containing a viscous fluid, the use of qualitative analysis methods for the analytical study of nonlinear models for deformation waves causes significant difficulties [7–9]. Consequently, for these cases it is necessary to carry out computational experiments [10]. In our study, the system of governing

equations for wave processes in two cylindrical shells forming an annular channel are obtained by the perturbations' method with respect to a small parameter of the problem, as well as considering the fractional physical nonlinearity of the shell material. This system is two generalized Schamel equations and allows us to estimate the wiggle of dissipative properties of the fluid on longitudinal strain waves in the channel walls. For a particular case, an exact solution of this system is found, for the general case, difference schemes are developed, and its numerical solution is performed.

1. Mathematical statement of the problem

Let us consider an annular channel formed by two cylindrical shells. Further in the paper we denote by the index $i = 1$ the parameters for the outer shell and $i = 2$ the parameters for the inner shell. We assume that the Cartesian coordinate system xyz associated with the channel symmetry axis and the corresponding cylindrical coordinate system $r\theta x$ are introduced. The x -axis coincides with the symmetry axis and the z -axis is directed along the normal to the unperturbed middle surface of the shells. For the shells material, relationship between the stress and strain tensors, as well as deformation intensity in the frames of the plasticity theory of A. A. Ilyushin [11, 12] is

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= E \left(\mu_0 \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_x^{(i)} \right) \left[1 + \varepsilon_u^{(i)\frac{1}{2}} \frac{m}{E} \right] / (1 - \mu_0^2), \\ \sigma_\theta^{(i)} &= E \left(\varepsilon_\theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)} \right) \left[1 + \varepsilon_u^{(i)\frac{1}{2}} \frac{m}{E} \right] / (1 - \mu_0^2), \\ \varepsilon_u^{(i)} &= 2 \left(\mu_1 \left(\varepsilon_\theta^{(i)2} + \varepsilon_x^{(i)2} \right) - \mu_2 \varepsilon_\theta^{(i)} \varepsilon_x^{(i)} \right)^{\frac{1}{2}} / \sqrt{3}, \\ \mu_1 &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \end{aligned} \tag{1}$$

here μ_0 is the shell material Poisson's ratio, E is the shell material Young's modulus, m is the constant determined from tensile-compression experiments [13], σ_x, σ_θ are the normal stresses along the x and θ axes; $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ are the tensile-compression strains along the x and θ axes; ε_u is the strain intensity. Note that the relation of stresses σ_x, σ_θ with strains $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ and strain intensity ε_u on the basis of the physical law with nonlinearity in the form of power function with a fractional value of the exponent for the case of incompressible material, i.e. when $\mu_0 = 1/2$, is considered in [5, 14].

The relationship between the components of the strain tensor and i -th shell displacements has the form

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(i)} &= \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_\theta^{(i)} &= -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \quad \text{at} \quad -\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Here z is the local coordinate along the axis normal to the shell middle surface ($z = 0$ corresponds to the shell middle surface), x is coordinate along the longitudinal axis of the shell median surface, $W^{(i)}$ is the deflection of the i -th shell, the positive direction of which is taken to the shell curvature center,

$U^{(i)}$ is the longitudinal displacement of i -th shell, $R^{(i)}$ is the median surface radius of the i -th shell, $h_0^{(i)}$ is the i -th shell thickness.

The asymptotic analysis carried out in [7] showed that the intensity of deformations in (1), (2) can be considered on the middle surface ($z = 0$) for longitudinal waves. Consequently, forces acting on the element of the shell middle surface are determined by the formulas

$$\begin{aligned}
 N_x^{(i)} &= \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz = \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \\
 &\times \left(1 + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\mu_1 \left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} \right), \\
 N_\theta^{(i)} &= \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_\theta^{(i)} dz = \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left(\mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \\
 &\times \left(1 + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\mu_1 \left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} \right),
 \end{aligned} \tag{3}$$

and the moment is defined as

$$M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz = -\frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1 - \mu_0^2)} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right), \tag{4}$$

We write the dynamics equations for the i -th shell

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} &= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - q_x^{(i)} \Big|_{R^{(i)}}, \\
 \frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\theta^{(i)} &= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - (-1)^{i-1} q_n \Big|_{R^{(i)}}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Here $\rho_0^{(i)}$ is the i -th shell material density, $q_x^{(i)}$, q_n are the shear and normal fluid stresses; r , x are the cylindrical coordinates, t is the time.

Substituting (3), (4) into the shell dynamics equations, we obtain the equations in displacements

$$\begin{aligned}
 \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. \left. + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} \right\} \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - \left[q_x^{(i)} \right]_{R^{(i)}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh_0^{(i)}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle -\frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\rangle + \\
& + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)} W^{(i)}}{\partial x R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} \right\} \right] \right\rangle + \\
& + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)} W^{(i)}}{\partial x R^{(i)}} \right]^{\frac{1}{4}} \right\} \right\rangle = \\
& = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - [(-1)^{i-1} q_n]_{R^{(i)}}. \quad (6)
\end{aligned}$$

2. Analysis of equations for shells containing fluid by perturbation method

To analyze the wave process in the channel walls, we consider a dimensionless axisymmetric problem and choose small parameters of the problem. Namely, we assume

$$\begin{aligned}
W^{(i)} &= w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \\
t^* &= \frac{c_0}{l} t, \quad r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, \quad w_m = h_0, \quad u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}},
\end{aligned} \quad (7)$$

here $c_0 = \sqrt{E/(\rho_0(1-\mu_0^2))}$ is the sound velocity in the shell, l is the wavelength, u_m, w_m are the characteristic values of elastic shells displacements. Let us make the following assumptions

$$\begin{aligned}
\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} &= \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1), \\
\frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} &= O(1), \quad \frac{m}{E} = O(1),
\end{aligned} \quad (8)$$

here ε is the small parameter.

The method of two-scale expansions is applied and the dependent variables as an asymptotic expansion are represented

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_{31}^{(i)} + \dots \quad (9)$$

Independent variables are introduced in the form of

$$\xi = x^* - \sqrt{1-\mu_0^2} t^*, \quad \tau = \varepsilon^{\frac{1}{2}} t^*. \quad (10)$$

Here τ is the slow time.

Substituting (7)–(10) into (5) in the zeroth approximation by ε gives

$$u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} = (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2}. \quad (11)$$

Thus $u_{10}^{(i)}$ is an arbitrary function. Then the system of equations in the next approximation with account (11) is we obtain in the form of

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\ = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{\frac{3}{2}} \rho_0 h_0 c_0^2} \left[\left(q_x^{(i)} \right) - \mu_0 \varepsilon^{\frac{1}{4}} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n)}{\partial \xi} \right]_{R^{(i)}}. \quad (12) \end{aligned}$$

The obtained Eqs. (12) are the generalized Schamel equations for $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$. If the fluid is excluded, we will have two homogeneous uncoupled Schamel equations. To determine fluid stresses in Eqs. (12) it is required to study the fluid motion in the channel.

3. Determination of stresses acting on the shell from the liquid

Two coaxial infinitely long shells forming an annular channel with a viscous fluid whose density is constant are considered. The width of the slot occupied by the liquid $\delta = R_1 - R_2$, where R_1 is the inner surface radius of the outer shell and R_2 is the outer surface radius of the inner shell. The fluid motion equations of creeping flow for the problem under consideration have the following form [15]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

At the boundary of the shells and the liquid, the no-slip conditions of the liquid are satisfied [15]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = - \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad \text{at } r = R_i - W^{(i)}, \quad (14)$$

here r, x is the cylindrical coordinates, V_x, V_r are fluid velocity projections on the coordinate axis, p is the fluid pressure; ρ is the fluid density, ν is the kinematic coefficient of fluid viscosity.

The fluid stresses $q_x^{(i)}$ and q_n are determined at $r = R^{(i)}$

$$q_n = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad q_x^{(i)} = -\rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right). \quad (15)$$

Dimensionless variables and parameters are introduced

$$V_r = h_0^{(i)} \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = h_0^{(i)} \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r^* = \frac{r - R^{(2)}}{\delta}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad p = \frac{\rho v c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P, \quad (16)$$

$$\psi = \frac{\delta}{R^{(2)}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = \frac{h_0^{(i)}}{\delta} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon, \quad \frac{h_0^{(i)}}{l} = \varepsilon^{\frac{5}{4}}, \quad \frac{\delta}{l} = \varepsilon^{\frac{3}{4}}, \quad \text{Re} = \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{\nu} = \varepsilon.$$

The variables (16) are substituted into Eqs. (13), (14), (15), and the following decompositions

$$P = P^0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} P^1 + \dots \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_x^1 + \dots \quad (17)$$

are taken into account. After that, for the first terms of expansion (17) are obtained dynamics equations of the thin fluid layer for creeping flow [7, 15]

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} + \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0 \quad (18)$$

with boundary conditions

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \text{ at } r^* = 1, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \text{ at } r^* = 0 \quad (19)$$

as well as with the accuracy to ψ , $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ from (15) are obtained, too

$$q_x^{(1)} \approx -\rho v \frac{h_0^{(1)} c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^{0*}}{\partial r^*} \text{ at } r^* = 1, \quad q_x^{(2)} \approx -\rho v \frac{h_0^{(2)} c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^{0*}}{\partial r^*} \text{ at } r^* = 0, \quad q_n \approx -\frac{\rho v c_0 l h_0^{(i)}}{\delta^3} P^0. \quad (20)$$

Solving the problem (18), (19) we obtain

$$P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = 6 (r^{*2} - r^*) \int \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*. \quad (21)$$

Bearing in mind (9), the new variables ξ , τ (10) and with the accuracy to $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ we write (21) as

$$P^0 = 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 6 \sqrt{1 - \mu_0^2} (2r^* - 1) (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}), \quad (22)$$

and then

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}), \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 6 \sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=0}^* = - \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}.$$

Given that according (11) $u_{30}^{(i)} = \mu_0 \partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$ submitting (22), (23) into (20) and assuming $R^{(1)} = R^{(2)} = R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$ due to smallness ψ , λ the right-hand side of the first equation ($i = 1$) of system (12) was obtained as

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right), \quad (24)$$

and the right-hand side of the second equation ($i = 2$) of system (12) was obtained in the form of

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right). \quad (25)$$

4. Governing equations of deformation waves

Taking into account the found right-hand parts of Eqs. (24) and (25), the system of Eqs. (12) is rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = \\ = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right), \\ \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = \\ = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

The following notations are introduced

$$\begin{aligned} \partial u_{10}^{(1)} / \partial \xi = c_3 \phi^{(1)}, \quad \partial u_{10}^{(2)} / \partial \xi = c_3 \phi^{(2)}, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau, \\ c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{\nu}{\delta c_0 \varepsilon^{\frac{3}{4}}}, \quad c_1 = \left(2c_2 / \left(\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}, \\ c_3 = \left[6 \frac{c_2 E}{c_1 m} \frac{4}{3 \sqrt{1 - \mu_0^2} (2/\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{\frac{1}{4}}}\right]^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Considering (27) in (26) the system of governing equations for the study of longitudinal deformation waves in the walls of the annular channel is obtained

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + 6\phi^{(1)\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \eta^3} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = 0, \\ \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} + 6\phi^{(2)\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \phi^{(2)}}{\partial \eta^3} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

System of Eqs. (28) has exact partial solution

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = \frac{25}{4}k^4 (1 + \operatorname{ch} k (\eta - 4k^2t))^{-2}, \quad (29)$$

but the general case requires a numerical solution to this system. By implementing a numerical solution to equations (28), the initial conditions at $t = 0$ in the form of solutions (29) can be used

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \varphi^{(2)}(0, \eta) = \frac{25}{4}k^4(1 + \operatorname{ch} k\eta)^{-2} \quad (30)$$

or

$$\varphi^{(1)}(0, \eta) = \frac{25}{4}k^4(1 + \operatorname{ch} k\eta)^{-2}, \quad \varphi^{(2)}(0, \eta) = 0. \quad (31)$$

5. Computational experiment results

The computational experiment was carried out similarly to [7], but taking into account the fractional nonlinearity. The desired difference scheme for the numerical solution of the system of equations (28) was obtained using the Gröbner basis technique in the Maple computer algebra system. The resulting difference scheme is similar to the Crank–Nicholson scheme for the heat equation [16] and has the form

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)}_j{}^{n+1} - u^{(1)}_j{}^n}{\tau} + 4 \frac{\left(u^{(1)3/2}_{j+1}{}^{n+1} - u^{(1)3/2}_{j-1}{}^{n+1}\right) + \left(u^{(1)3/2}_{j+1}{}^n - u^{(1)3/2}_{j-1}{}^n\right)}{4h} + \\ & + \frac{\left(u^{(1)}_{j+2}{}^{n+1} - 2u^{(1)}_{j+1}{}^{n+1} + 2u^{(1)}_{j-1}{}^{n+1} - u^{(1)}_{j-2}{}^{n+1}\right)}{4h^3} + \frac{\left(u^{(1)}_{j+2}{}^n - 2u^{(1)}_{j+1}{}^n + 2u^{(1)}_{j-1}{}^n - u^{(1)}_{j-2}{}^n\right)}{4h^3} + \\ & + \frac{u^{(1)}_j{}^{n+1} + u^{(1)}_j{}^n}{2} - \frac{u^{(2)}_j{}^{n+1} + u^{(2)}_j{}^n}{2} = 0, \\ & \frac{u^{(2)}_j{}^{n+1} - u^{(2)}_j{}^n}{\tau} + 4 \frac{\left(u^{(2)3/2}_{j+1}{}^{n+1} - u^{(2)3/2}_{j-1}{}^{n+1}\right) + \left(u^{(2)3/2}_{j+1}{}^n - u^{(2)3/2}_{j-1}{}^n\right)}{4h} + \\ & + \frac{\left(u^{(2)}_{j+2}{}^{n+1} - 2u^{(2)}_{j+1}{}^{n+1} + 2u^{(2)}_{j-1}{}^{n+1} - u^{(2)}_{j-2}{}^{n+1}\right)}{4h^3} + \frac{\left(u^{(2)}_{j+2}{}^n - 2u^{(2)}_{j+1}{}^n + 2u^{(2)}_{j-1}{}^n - u^{(2)}_{j-2}{}^n\right)}{4h^3} + \\ & + \frac{u^{(2)}_j{}^{n+1} + u^{(2)}_j{}^n}{2} - \frac{u^{(1)}_j{}^{n+1} + u^{(1)}_j{}^n}{2} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Within this scheme, terms with fractional nonlinearity for the next time step are linearized as

$$\begin{aligned}
 v_{k+1}^{3/2} &= v_{k+1}^{3/2} - v_k^{3/2} + v_k^{3/2} = \left(v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2} \right) \left(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2} v_k^{1/2} + v_k \right) + v_k^{3/2} = \\
 &= \left(v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2} \right) \frac{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}}{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}} \left(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2} v_k^{1/2} + v_k \right) + v_k^{3/2} \approx (v_{k+1} - v_k) \frac{3}{2} v_k^{1/2} - 2v_k^{3/2} = \\
 &= \frac{3}{2} v_k^{1/2} v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^{3/2}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Models (28), (30) and (28), (31) were numerically studied by using this difference scheme. We consider the initial condition (30) with $k = 0.2$, the numerical simulation results of the wave process are shown in Fig. 1.

According to Fig. 1, it can be seen that the waves propagate to the right without changing the speed and amplitude (supersonic speed). The numerical solution coincides with the analytic solution (29). Then the initial conditions (31) are considered with $k = 0.2$ and the calculation results are shown in Fig. 2.

According to Fig. 2, it can be seen that in the presence of a disturbance in the outer shell and its absence in the inner shell at the initial moment of time, the wave amplitude in the outer shell decreases with time, while in the opposing shell it increases. The wave amplitudes are equalized, which indicates the transfer of energy through the liquid layer between the shells.

Let us consider the case when at the initial moment a perturbation is given in the form of two waves (30) with different amplitudes and speeds assuming $k = 0.225$ for the first wave and $k = 0.2$ for the second wave. The numerical simulation results are presented in Fig. 3.

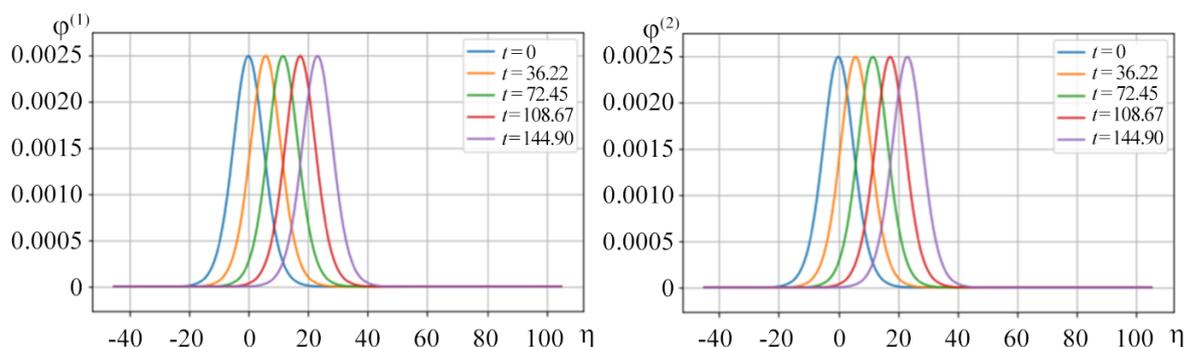


Fig. 1. Results of numerical solution of equations (28) with initial conditions (30) (color online)

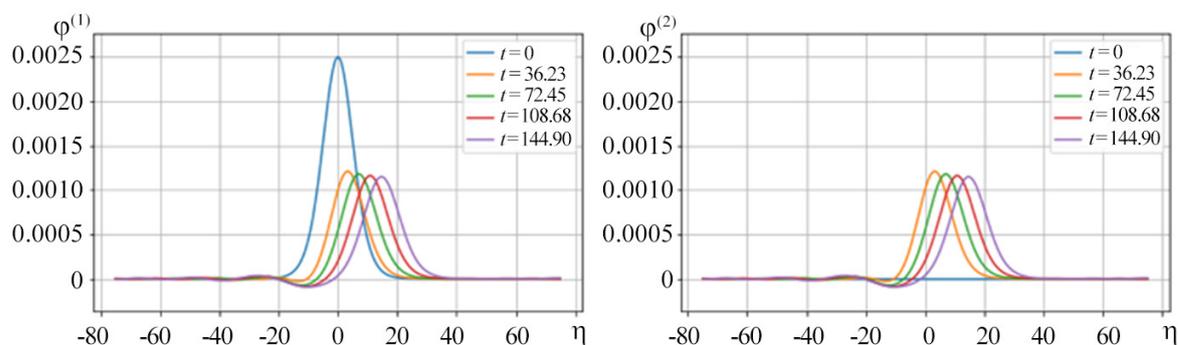


Fig. 2. Results of numerical solution of equations (28) with initial conditions (31) (color online)

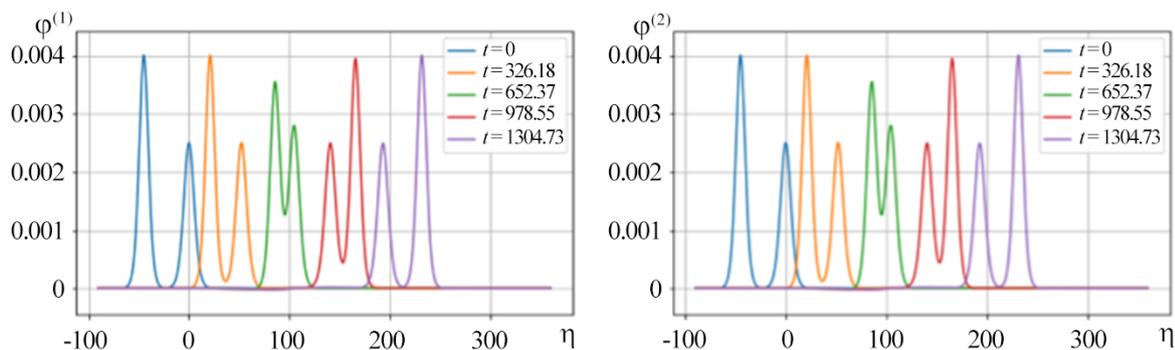


Fig. 3. Results of numerical solution of equations (28) with two initial conditions (30) for $k=0.225$ and $k=0.2$ (color online)

It follows from Fig. 3 that there is an elastic interaction of waves as particles. This means that deformation waves are solitons.

Summary and conclusion

The numerical simulation of nonlinear wave process in the walls of an annular channel indicates the need of accounting the presence of viscous fluid in the channel in the study of longitudinal deformation waves propagation. Excitation of the strain wave in the outer shell at the initial moment of time leads to the appearance of the strain wave in the opposite shell. In other words, energy transfer from one shell to the other occurs via the liquid. This process is accompanied by a decrease in the amplitude of the wave in the outer shell, which leads to a decrease in the rate of propagation of the deformation wave in this shell. At the same time, the amplitude of the wave in the opposite shell increases. Due to fluctuations in amplitudes and velocities, their amplitudes become equal in course of time. In addition, for the case where a solitary strain wave is excited in each shell at the initial moment of time, calculations have shown that these waves are solitons. The results obtained can be used for the development of non-destructive methods of control of pipelines with viscous liquids used in devices, machines and units, as well as the control of working processes.

References

1. Nariboli GA. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.* 1970; 4:64–73.
2. Nariboli GA, Sedov A. Burgers's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.* 1970;32(3):661–677. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90290-8.
3. Erofeev VI, Klyueva NV. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (a review). *Acoustical Physics.* 2002;48(6):643–655. DOI: 10.1134/1.1522030.
4. Zemlyanukhin AI, Mogilevich LI. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells: A new evolution equation. *Acoustical Physics.* 2001;47(3):303–307. DOI: 10.1007/BF03353584.
5. Zemlyanukhin AI, Andrianov IV, Bochkarev AV, Mogilevich LI. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dynamics.* 2019;98(1): 185–194. DOI: 10.1007/s11071-019-05181-5.
6. Bochkarev SA, Matveenkov VP. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Computational Continuum Mechanics.* 2013;6(1):94–102. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12.
7. Mogilevich L, Ivanov S. Longitudinal waves in two coaxial elastic shells with hard cubic nonlinearity and filled with a viscous incompressible fluid. In: Dolinina O, Bessmertny I, Brovko A, Kreinovich V, Pechenkin V, Lvov A, Zhmud V, editors. *Recent Research in Control Engineering*

- and Decision Making. ICIT 2020. Vol. 337 of Studies in Systems, Decision and Control. Cham: Springer; 2021. P. 14–26. DOI: 10.1007/978-3-030-65283-8_2.
8. Païdoussis MP. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow. 2nd edition. London: Academic Press; 2014. 867 p. DOI: 10.1016/C2011-0-08057-2.
 9. Amabili M. Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. New York: Cambridge University Press; 2008. 374 p. DOI: 10.1017/CBO9780511619694.
 10. Samarskii AA. The Theory of Difference Schemes. Boca Raton: CRC Press; 2001. 786 p. DOI: 10.1201/9780203908518.
 11. Il'yushin AA. Continuum Mechanics. Moscow: Moscow University Press; 1990. 310 p. (in Russian).
 12. Jones RM. Deformation Theory of Plasticity. Blacksburg: Bull Ridge Publishing; 2009. 622 p.
 13. Kauderer H. Nichtlineare Mechanik. Berlin: Springer-Verlag; 1958. 684 s. (in German). DOI: 10.1007/978-3-642-92733-1.
 14. Zemlyanukhin AI, Bochkarev AV, Andrianov IV, Erofeev VI. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. Journal of Sound and Vibration. 2021;491:115752. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115752.
 15. Loitsyanskii LG. Mechanics of Liquids and Gases. Vol. 6 of International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics. Oxford: Pergamon Press; 1966. 804 p. DOI: 10.1016/C2013-0-05328-5.
 16. Gerdt VP, Blinkov YA, Mozzhilkin VV. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006;2:051. DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051.

Могилевич Лев Ильич — родился в Саратове (1946). Окончил с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Механика» (1969) и аспирантуру по кафедре теоретической механики и аэрогидродинамики (1972). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук на тему «Некоторые задачи теории коротких волн» по специальностям «Механика жидкости газа и плазмы» (1972, СГУ). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук по специальности «Приборы навигации» (1989, Киевский политехнический институт). Является действительным членом Международной академии информатизации (с 1996). С 2015 года работает на кафедре «Прикладная математика и системный анализ» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю. А. в должности профессора. Научные интересы — нелинейные колебания и волны в механике сплошных сред, асимптотические методы решения нелинейных задач. Опубликовал свыше 300 научных статей по указанным направлениям.

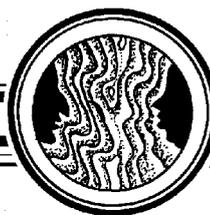


Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: mogilevichli@gmail.com
 ORCID: 0000-0003-2642-762X
 AuthorID (eLibrary.Ru): 2927

Попова Елизавета Викторовна — родилась в Саратове (1997). Окончила с отличием механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Прикладная математика и информатика» (2019). В настоящее время обучается в аспирантуре СГТУ имени Гагарина Ю. А. Научные интересы — нелинейные колебания и волны в механике сплошных сред. Опубликовала более 40 научных статей.



Россия, 410054 Саратов, Политехническая, 77
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.
 E-mail: elizaveta.popova.97@bk.ru
 ORCID: 0000-0001-6374-7468
 AuthorID (eLibrary.Ru): 847784



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3)

Персоналии
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003044
EDN: SOLLTH

К 85-летию Дмитрия Ивановича Трубецкого

Г. Т. Гурия^{1,2}, Г. Г. Малинецкий³, Г. Г. Соминский⁴, Б. Н. Пойзнер⁵

¹Национальный медицинский исследовательский центр гематологии Минздрава РФ, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Россия

³Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

⁴Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия

⁵Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия

E-mail: guria@blood.ru, GMalin@Keldysh.ru, sominski@rphf.spbstu.ru, pznr@mail.tsu.ru,

Поступила в редакцию 11.04.2023, опубликована 31.05.2023

Аннотация. 14 июня 2023 года исполнилось бы 85 лет инициатору создания журнала «Прикладная нелинейная динамика», члену-корреспонденту РАН, заслуженному деятелю науки РФ, лауреату премии Президента РФ в области образования, ректору Саратовского университета (1994–2003), заведующему кафедрой электроники, колебаний и волн (1981–2020) Дмитрию Ивановичу Трубецкому. Публикуемые размышления коллег и друзей Д. И. Трубецкого раскрывают его вклад в развитие науки, образования и значение его многогранной личности для истории Саратовского университета.

Ключевые слова: Д. И. Трубецков, нелинейная динамика, синергетика, СВЧ-электроника, история науки, Саратовский университет.

Для цитирования: Гурия Г. Т., Малинецкий Г. Г., Соминский Г. Г., Пойзнер Б. Н. К 85-летию Дмитрия Ивановича Трубецкого // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 3. С. 377–400. DOI: 10.18500/0869-6632-003044. EDN: SOLLTH

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

To the 85th anniversary of Dmitry Ivanovich Trubetskov

G. T. Guria^{1,2}; G. G. Malinetski³, G. G. Sominski⁴, B. N. Poizner⁵

¹National Medical Research Centre for Hematology, Moscow, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Russia

³Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

⁴Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

⁵National Research Tomsk State University, Russia

E-mail: guria@blood.ru, GMalin@Keldysh.ru, sominski@rphf.spbstu.ru, pznr@mail.tsu.ru,

Received 11.04.2023, published 31.05.2023

Abstract. On June 14, 2023, could be celebrated the 85-th anniversary of the founder of the journal “Applied Nonlinear Dynamics”, the Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, the Honored Scientist of the Russian Federation, the laureate of the Presidential Prize in Education, the Rector of Saratov University (1994–2003), the head of the department electronics, oscillations and waves (1981–2020) Dmitry Ivanovich Trubetskov. Published reflections of colleagues and friends of D. I. Trubetskov reveal his contribution to the development of science, education and the significance of his multifaceted personality for the history of Saratov University.

Keywords: D. I. Trubetskov, nonlinear dynamics, synergetics, microwave electronics, history of science, Saratov University.

For citation: Guria GT, Malinetski GG, Sominski GG, Poizner BN. To the 85th anniversary of Dmitry Ivanovich Trubetskov. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(3):377–400. DOI: 10.18500/0869-6632-003044

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Вспоминая Дмитрия Ивановича Трубецкого

Г. Т. Гурия

14 июня 2023 года должно было бы исполниться 85 лет Дмитрию Ивановичу Трубецкову. Думается, что не только коллеги по Саратовскому государственному университету имени Н. Г. Чернышевского, но и сотрудники многих других организаций из разных городов, с которыми Дмитрий Иванович тесно общался, в этот день поднимут бокалы и помянут его добрым словом. У меня нет сомнений, что прежде всего Дмитрий Иванович останется в памяти людей как крупный ученый, сумевший в непростое время сохранить и приумножить научный потенциал саратовской школы нелинейных исследований. И дело не только в том, что под его руководством целый ряд талантливых людей защитили кандидатские и докторские диссертации, не только в книгах, вышедших из-под пера Дмитрия Ивановича, но и в том, что сама «нелинейная культура» прижилась на берегах Волги, в тех самых местах, где, судя по всему, и сегодня продолжают «бродить призраки» П. А. Столыпина, Н. Н. Вавилова и Н. Н. Семенова.

Мало кто знает, что П. А. Столыпин начал своё университетское образование в 1881 году на естественном отделении физико-математического факультета Санкт-Петербургского Императорского университета. В 1885 году окончил университет и получил диплом о присуждении ему степени кандидата физико-математического факультета. Именно он инициировал создание в Саратовской губернии университета, который получил имя Николаевского и стал девятым по счёту в Российской империи. Провидению было угодно, чтобы Дмитрию Ивановичу Трубецкову, ставшему спустя почти сто лет Ректором этого университета, удалось завершить его архитектурный ансамбль, построив согласно исходным эскизам 10-й корпус, а затем и 11-й. Думается, что высшая справедливость была бы в том, чтобы памятную доску в честь профессора Д. И. Трубецкого установили именно на 10-м корпусе, ставшем сегодня одним из туристических символов Саратова.

Не будет преувеличением сказать, что сооружение 10-го корпуса в тех исторических условиях может рассматриваться людьми, далекими от какой-либо созидательной деятельности, как чудо.

Гурия Г. Т., Малинецкий Г. Г., Соминский Г. Г., Поизнер Б. Н.
Известия вузов. ПНД, 2023, т. 31, № 3

Однако это же событие может рассматриваться как триумф человеческого разума, способного в реальных обстоятельствах увидеть ростки склонности людей к кооперации в сложных условиях, когда идея «тотальной конкуренции» всех со всеми представлялась «победившей окончательно».

Нет нужды говорить, что Дмитрий Иванович Трубецков, много сделавший для пропаганды синергетики, как дисциплины, изучающей переходы «от беспорядка к порядку» в далеких от равновесия системах, написавший учебник «Синергетика для гуманитариев», был не просто «в теме», он входил в тот узкий круг ученых, которых называют на «цивилизованном» западе «*climate makers*» — делателями только формирующейся научной погоды. Причем даже в этом кругу, во многом состоявшем из людей, имеющих естественно-научные взгляды, Дмитрий Иванович входил в самую радикальную подгруппу ученых, искренне веривших, что идеи синергетики необходимо безотлагательно нести в практическую жизнь. Во все сферы, где намечаются радикальные перемены: в образование, в медицину, в администрирование и госуправление.

Стоит заметить, что круг людей, «истинно верующих» в идеи зарождения нового порядка из хаоса при специально созданных условиях, был узким. Он был очень узким. А число людей, входящих в этот круг, которые искали практические возможности реализации синергических идей, было меньше, чем число апостолов (или число рыцарей круглого стола короля Артура).

Дмитрий Иванович не просто был одним из «региональных адептов» теории синергетики, он, без преувеличения, выступал в качестве центра кристаллизации схожих по своим «нелинейным» взглядам людей. Ежегодно, в самое «смутное время» он проводил в Саратове или его окрестностях научные школы под условным названием «Нелинейные дни для молодых». На эти школы приглашались студенты, аспиранты и «продвинутые школьники», которым читали лекции ученые, известные своей научной и педагогической активностью, выходящей далеко за рамки их должностных обязанностей и социального статуса.

Эти «*open-minded*» люди не только читали лекции слушателям, но и на протяжении недели или десяти дней активно общались между собой и с молодыми участниками школы на самые разные темы: от вопросов античной истории и средневековой поэзии до широкополосных средств передачи данных в современных системах коммуникации. В круг этих дискуссий само собой попадали и вопросы преподавания, к обсуждению которых привлекались учителя, сопровождавшие школьников, приехавших из регионов и самого Саратова.

Надо сказать, что Д. И. Трубецков и в отношении того, как следует учить детей в школах, последовательно выступал за соединение «теории и практики». Причём он был сторонником античного опыта, когда научные дисциплины ещё не дифференцировались, приняв современные формы, а рассматривались в своём синтетическом единстве. Сами по себе мероприятия, когда люди, имеющие разные и далекие друг от друга интересы, принуждались к совместным трапезам и взаимному общению, известны со времен Птолемея III Эвергета, который, говоря современным языком, выделял гранты самым разным ученым для работы в библиотеке Александрийского музея, не требуя ничего взамен, никаких публикаций и цитирований. Было лишь требование к грантополучателям ежедневно совместно сотрапезничать и поддерживать застольные беседы. В число такого рода грантополучателей входил и дядя правителя Сиракуз Гиерона, известный в современном мире как Архимед.

Известно несколько исторических попыток реанимации античных технологий обучения, в том числе обучения «продвинутых и одаренных» представителей сообщества. Вероятно, пик такого рода активности пришёлся на эпоху Ренессанса, когда реверсным образом от арабов и представителей восточных церквей в Европу вернулись многие идеи античного времени. В нашем отечестве тоже был такой опыт. Воспитанники Александровского Царскосельского лицея обучались языкам, истории и искусствам в античной стилистике. Преподанные им идеи «гражданственности и патриотизма» привели потом многих на Сенатскую площадь. Но и поэт А. С. Пушкин, и последний канцлер Российской Империи М. А. Горчаков вышли из этого Царскосельского лицея.



Поэтому перед всяким, кто задумывает создание организованного в античной стилистике лица для «продвинутых школьников», встает нетривиальная задача: как развивать элементы критического мышления у детей, чтобы они видели выпуклым образом недостатки и несовершенства в предмете своего внимания, но при этом не стремились к разрушению устоев того общества, которое их предки «завоевали» и отстаивали ценой большой крови. Надо сказать, что Дмитрий Иванович ясно понимал эту сторону проблемы. Ему представлялось, что лицеисты должны знать историю вне схем и расхожих трафаретов во всей полноте.

Его точка зрения состояла в том, что от радикальных социальных идей людей следует «культурно вакцинировать» в детстве и юности, подобно тому, как сейчас принято вакцинировать от ветряной оспы, паротита и кори. Споры о том, верна ли она, неоднократно шли в кулуарах упоминавшихся ранее Школ для молодых. Оппоненты резонно замечали, что реальную

историю нам не дано знать «во всей полноте». Даже в общих чертах писанная история есть не более чем собрание сказок. Поэтому, кого и от чего следует «вакцинировать», — это большой вопрос.

Со всем этим трудно спорить, как и с тем, что образование всегда в том или ином отношении травматично. Вопрос о том, могут ли все эти аргументы об эвентуальных угрозах лишить нас решимости самим обучать и воспитывать своих детей? И Дмитрий Иванович отвечал на него однозначно: «Нет, не могут!»

Да, любое познание — это «игра с огнем». Но история человечества учит, что и огнем можно управлять! Даже взрывы могут использоваться в мирных целях. Так что, создавая Лицей прикладных наук при СГУ, Д. И. Трубецков в качестве одной из целей обучения ставил развитие техник «интеллектуальной безопасности». Выпускники лица должны были обладать не только знаниями и умениями, но и отсутствием «внушаемости» и самовнушаемости; устойчивостью к новым, подчас фантомным, влияниям. Понятно, что такого рода «устойчивость» невозможна, если всё здание образования стоит не на твердом основании.

Именно античные, прошедшие испытание временем, глыбистые блоки, по Д. И. Трубецкову, должны лежать в основании всякого серьезного образования, которое потому и принято называть фундаментальным, что оно стоит на твердом фундаменте рациональных знаний в качестве своего основания.

Дмитрий Иванович Трубецков, как и его близкий друг Юлий Александрович Данилов, был убежден в том, что никакой альтернативы фундаментальному образованию нет. Все, что создается и строится на песке, долго стоять не может. Люди, получившие то или иное суррогатное образование, обречены на непрерывное переучивание и борьбу со своими заблуждениями. Борьбу малопродуктивную, полную драматизма и травматизма.

В этом смысле обучение в Лицее прикладных наук должно было привить воспитанникам если не «способность невооруженным взглядом видеть корни всех проблем», то культурную традицию внутренне непротиворечивым образом строить цепочки умозаключений. Конечно, это

путь не для всех. Он заведомо не подходит тем, кто во всем и везде «ищет бури». Для кого движение к «перманентным революциям» во всех сферах есть не только цель, но и способ существования. Известно утверждение: «Пророкам не нужны никакие продвинутые лица». Они сами находят свой путь и идут по нему. Другое дело, что кроме пророков есть люди, которые стремятся жить не ради идей, а ради детей. Для кого трансляция умений и навыков из поколения в поколение, в том числе в рамках одной семьи или одного социального круга, есть то, «с чего начинается Родина».

Вряд ли надо излишне подчеркивать, что Дмитрий Иванович, несомненно, принадлежит к числу тех, кто видел Университет как эпицентр культурной городской среды, вокруг которого формируются «координационные» образовательные сферы, обладающие, подобно шестерёнкам, взаимным зацеплением. Таким образом образовательные, научные и светские новости обретают способность расходиться центробежным образом по «читающей и думающей» части города.

В этом смысле Дмитрий Иванович был прямым последователем идей французских просветителей XVIII века и отечественных революционеров-демократов XIX века, видевших свою главную миссию в просвещении народа. В силу нашего близкого знакомства и моих частых приездов в Саратов у меня было много душевных бесед с Дмитрием Ивановичем об общих принципах построения эффективного современного образования. Иногда разговоры шли на трезвую голову, когда на столе был «только чай». Иногда в банкетных условиях, когда «евклидовость» пространства нарушалась продуктами виноделия. Но никогда Дмитрий Иванович не терял главную нить беседы, даже в тех случаях, когда она длилась несколько дней подряд за каждым завтраком, обедом и ужином.

Далеко не всегда он разделял мои оценки событий, но всегда давал себе труд выслушивать неблизкое ему мнение до конца, доходить «до самой сути». Эта его уважительность к мнению собеседников имела место и в других случаях. Доводилось быть свидетелем, как некоторые его



В Лицее прикладных наук. Слева направо: А. А. Князев, С. П. Капица, Д. И. Трубецков, Л. А. Торцова

коллеги, а также высокого ранга чиновники из Министерства образования несли полную чушь, а Дмитрий Иванович внимательно их выслушивал, искренне стараясь отделять зерна от плевел.

Часть из обсуждаемых вопросов касалась активности некоторой группы либеральных деятелей, направленной на внедрение единого государственного экзамена. Сегодня мы знаем, что в результате внедрения ЕГЭ существенным образом упал в стране уровень инженерного образования, но в начале нулевых многим это не казалось критичным. В ходу было мнение одного высокопоставленного чиновника: «Нам не нужны творцы, нам требуются квалифицированные потребители». Ему вторил другой: «Нет нужды самим разрабатывать новые идеи. Мы все идеи купим на Западе, вместе с их носителями...». Как бы то ни было, но эти точки зрения доминировали в СМИ, а всех противников ЕГЭ буквально шельмовали.

Конечно, Дмитрий Иванович видел риски, связанные с последствиями тотального перехода на ЕГЭ. В конце концов, строго говоря, ЕГЭ — это не про то, как следует учить школьников. Речь только о том, как их тестировать на предмет наличия или отсутствия «остаточных следов знаний». Он подробно меня расспрашивал о позиции ведущих вузов столицы по вопросу ЕГЭ. Особенно его интересовала мотивационная неформальная часть аргументации.

Конечно, я не мог ответить за все московские вузы, но негласная позиция Физтеха его огорчила. Руководство вуза того времени решило не идти на конфронтацию с Министерством без того, чтобы «сперва попробовать». На уровне факультетов победила точка зрения: «А нам все в кайф, в струю и в жилу». Собственная сеть проведения выездных олимпиад МФТИ состояла примерно из 300 населенных пунктов. Развертывание федеральной сети для тотального проведения всюду ЕГЭ мыслилось как дополнительный «турбонаддув» на собственную сеть. Это должно было только увеличить число абитуриентов в вузе. Голоса о недостатках системы ЕГЭ тонули в хоре «разумных приспособленцев».

Дмитрий Ивановичу было понятно, что столичные вузы, используя ЕГЭ как неототалитарную «форму ограбления» и обескровливания провинциальных образовательных учреждений, находятся с последними по разные стороны баррикад. Те, кто это все задумал, получили в итоге поддержку в обеих столицах, и лозунг: «Умри ты сегодня, а я завтра», — вышел за стены пенитенциарных учреждений и пошел по просторам университетской жизни Новой России.

Наверно, в этой короткой статье неуместно описывать, какие контрмеры были предприняты Д. И. Трубецковым и его коллегами, чтобы смягчить последствия внедрения ЕГЭ. По-видимому, еще не настало время говорить об этом подробно. Так или иначе, но, даже покинув пост ректора СГУ, Дмитрий Иванович смог сильно смягчить тот удар, который был нанесен внедрением ЕГЭ всей образовательной системе Саратовской области.

Вспоминая эти события сегодня, хочется сказать, что долговременные национальные интересы, в том числе интересы в области высоких технологий и, конечно, в области нелинейных исследований, включая проблемы искусственного интеллекта, не могут быть исключительно прерогативой бюрократов и гламурных ученых, любящих посещать зарубежные конференции и носить модные плащи из Болоньи.

Жизнь показала, что представители электронной промышленности в Саратове и его окрестностях никогда не смогли бы вновь запустить заводы по выпуску электронных компонентов для народно-хозяйственных устройств, если бы такие патриоты, как Дмитрий Иванович Трубецков не сохранили научные школы подготовки кадров, способных «в условиях неопределенности» решать важнейшие научно-технические задачи в самые сжатые сроки.

Отдельное слово хочется сказать о компьютерщиках из Саратова. Мне неоднократно доводилось по работе встречаться с представителями ИТ, получившими образование в Саратове, и каждый раз я ловил себя на мысли, что по широте своего восприятия проблем они выгодно отличаются от «узких специалистов». Подобно отличию Волги в районе «Волжских далей» от той же Волги в ее верховьях, или же от Сены, Эльбы и Темзы, протекающих в известных столицах. У меня нет



На школе «ХАОС–2013». Слева направо: Д. И. Трубецков, А. Н. Флейшман, А. П. Сухоруков, Г. Т. Гурия

доказательств, что эта экспозиционная широта есть прямое следствие развития и прорастания в саратовской культурно-образовательной среде «семян античного подхода», продвигавшегося Д. И. Трубецковым. Но, грешен, я именно так и думаю.

В заключение хочу привести фрагмент нашего с Д. И. разговора. Как-то он спросил меня: «Кого Вы, Г. Т., можете выделить среди самых ярких преподавателей на Физтехе?» Немного думая, я сказал: «Одного выделить трудно, но в тройку самых ярких, с моей точки зрения, войдет сотрудник Института химической физики АН СССР, профессор Евгений Евгеньевич Никитин. Он блестяще читал нам курс “Элементарные атомно-молекулярные процессы”». Дмитрий Иванович улыбнулся и сказал: «Он наш, саратовский!».

Я этого не знал про Е. Е. Никитина, но счел нужным заметить, что и основатель Института химической физики АН СССР, в котором работал Е. Е. Никитин, Нобелевский лауреат Николай Николаевич Семенов тоже уроженец Саратова. Да, говорит Д. И., он дважды Герой Социалистического Труда, ему установлен бюст недалеко от университета. Зная, что Дмитрия Ивановича трудно удивить историческими фактами, все-таки счел нужным заметить, что Н. Н. Семенов стоял у истоков организации МФТИ и факультета молекулярной и химической физики, который я окончил. Дмитрий Иванович задумался, а потом сказал: «Да, нелинейные научные связи и “сближения” бывают очень прихотливы. У нас в университете есть аудитория, в которой Николай Иванович Вавилов впервые прочёл свою знаменитую работу о гомологических рядах. Вы, вероятно, знаете?» «Как мне не знать, — говорю я, — ведь это Вы, Дмитрий Иванович, осенью 2000 года удостоили меня высокой чести прочесть в этой самой аудитории перед членами ученого Совета лекцию о нелинейных проблемах активации свертывания в интенсивных потоках крови».

По лицу Дмитрия Ивановича было видно, что ему приятно, что «связь времен» не разорвалась. Хочется верить, что не порвется она и в дальнейшем, а память о Дмитрие Ивановиче Трубецкове, как основателе «нелинейного форпоста на Волге», останется жить в России и за ее пределами, доколе на свете «жив будет хоть один пиит».

Жизнь — вещь интересная

Г. Г. Малинецкий

Эти заметки о замечательном человеке, блестящем ученом, педагоге, организаторе, Дмитрие Ивановиче Трубецкове мне писать одновременно трудно и легко. Трудно, потому что не укладывается мысль, что больше не услышу его оптимистичного, радостного голоса, что не получу больше его чудесных писем, написанных «правильным», «школьным» почерком, не прочту его задорных стихотворений. . .

Легко, потому что в душе живет и согревает её ощущение наших светлых, теплых, радостных отношений с ним. Вольно или невольно мы «классифицируем» своих друзей, знакомых, коллег, разбираемся, на какую полочку его «положить». После нескольких встреч с Дмитрием Ивановичем я ощутил, что во многом чувствую его так же, как бывает при встрече с моим папой. Тепло и радостно от его присутствия, дел, шуток, улыбки. У Торнтон Уайлдера есть такая мысль, — чтобы человек был счастлив, у него должно быть шесть друзей. Двое старше него, двое — младше, двое — примерно одного с ним возраста. Дмитрия Ивановича я всегда считал среди старших друзей.

Первое яркое впечатление от совместного дела — переиздание книги «Введение в синергетику для гуманитариев». Я был очарован этой удивительной книгой, большой, подробной, с цветными картинками. Веселые надписи вызывали улыбку, «приземляли» научный текст и давали ощущение, что всё это можно освоить и применить. Но цветные вкладки дороги, толстую книгу не купят, гуманитарии всё это «не потянут», — у руководства издательства УРСС были свои резоны. Нормальная работа, обсуждения, споры, уточнение деталей

Одна из шуток книги показалась мне жестокой. Я написал Дмитрию Ивановичу о том, что её лучше снять. Сначала были возражения, а потом телефонный разговор:

— Это не Ваша шутка. Вы не такой. И книга не такая. Давайте сохраним в вечности Ваш стиль.

— Наверно, вы правы. Ладно, давайте. Я не буду настаивать.

Меня очень порадовало тогда такое взаимопонимание.

Дмитрий Иванович позвал меня на школу для молодых в Саратове. Она проходила в доме отдыха, на горке, с видом на лес. «Только там проблемы с отоплением, может быть, будет холодно, — напутствовал он меня, — возьмите шапочку для сна». Конечно, я воспринял это как шутку и не озаботился спальной шапочкой. В первую же ночь в школе я об этом очень пожалел. Если сказать, что было холодно, то это ничего не сказать.

Лекции и заседания были в спортивном зале, среди матов и турников, спортивных скамеек. Экзотика. Но что все эти мелкие неудобства по сравнению с синергетикой!

У Дмитрия Ивановича был прекрасный дар превращать то, в чем он участвовал, в праздник. Его радовали достижения, успехи, удачи близких, учеников, коллег, выдающихся ученых. Это проявляется в его текстах о выдающихся ученых — радостное удивление от того, что люди придумали, измерили, сделали.

Как-то в таком отношении мне он сам признался. При обсуждении популярного писателя он заметил: «Не понимаю я его. В его книгах порадоваться нечему».

Наверно, не очень правильно сравнивать научные школы, но, видимо, это стоит сделать. В свое время очень популярна была школа по нелинейным волнам в санатории под Горьким. Масса блеску — стихи после лекций. Объявления на этажах вроде «улица Белого, проспект Горького, переулок Красного». И при этом ощущение конкуренции, соперничества: «Они рекламули, а мы результат получили!» Своеобразный образ науки как спорта.

В школах Дмитрия Ивановича царило ощущение общей удачи от того, как много открылось нам в нелинейном мире. Это, скорее, ощущение искусства. На одной из школ я впервые услышал

сочетание, отражающее её суть — «незримый колледж». Действительно, в 1640–1650 годах существовал клуб английских ученых-натурфилософов и интеллектуалов, развивавших идеи эмпиризма Френсиса Бэкона и считавших, что «Знание — сила». Они называли себя «незримой коллегией». Позже этот колледж превратился в Лондонское королевское общество. Название возродил в 1970-х годах Дерек Прайс, относя его к группам ученых, работающих одновременно над одним кругом проблем в разных организациях и странах.

Это название мне кажется очень глубоким и пониматься сейчас должно по-иному. Есть противоречие между наукой-спортом с соперничеством, грантами, фондами, хиршами и цитированием в Scopus и Web of Science, и познанием. Первого, очень удобного для бюрократов, становится всё больше. Второго, связанного с мечтой, с прорывом в будущее, все меньше. Это удивительно, поскольку именно сейчас становится ясно, как мало мы знаем. В начале XX века будущему классика объясняли, что есть неувязки с движением проводников и изучением абсолютно черного тела, а все остальное уже понятно. Сейчас мы умеем описывать лишь 2% веществ во Вселенной, и главная проблема — люди, желающие понять и исследовать остальное.

Эту идею незримого колледжа мы не раз обсуждали с Дмитрием Ивановичем и его другом, Юлием Александровичем Даниловым. Знание Ю. А. Даниловым десятка с лишним языков и перевод сотни с лишним книг, благодаря которым мы стали намного лучше представлять мировую физико-математическую классику, трудно переоценить. Оба они говорили о «кентавристике» — мосте между естественными и гуманитарными науками. Именно этот их взгляд созвучен синергетике и продолжает привлекать к ней очень многих.

Идею синергетического колледжа воплощает журнал «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика». В этот глубокий, интересный и веселый журнал Дмитрий Иванович вложил очень много. Роль этого издания для отечественной нелинейной науки огромна...

С Дмитрием Ивановичем было очень интересно говорить — его точность и остроумие восхищали. Однако, как и в беседах с моим папой, радость от общения, от того, что он тут, передо мной, превосходила все остальное. Поэтому о многом важном мы не поговорили, многое осталось недосказанным... Общее ощущение от общения с ними связано с тем, что многие детали казались неважными. В душе была полная уверенность, что эти два человека наилучшим образом сделают всё, что надо, решат стоящие проблемы, а если захотят, то мне об этом расскажут.



Слева направо: Г. Г. Соминский, Г. Г. Моносов, Д. И. Трубецков, Ю. А. Данилов

Конечно, я знаю лишь небольшую часть реальности Дмитрия Ивановича. Сейчас с удовольствием расспросил бы его о ректорстве. Когда приезжаешь в незнакомый город, то во многом воспринимаешь его глазами человека, который пригласил тебя. После каждой поездки к Дмитрию Ивановичу у меня возникало ясное понимание, что главное в Саратове — это университет. О каждом факультете он говорил мне с глубоким пониманием и любовью ко многим, которые работали на них.

С удовольствием он рассказывал мне историю про то, как «реформаторы» решили «переустроить» всё так, чтобы дивное университетское место с яблонями пошло под дачи. Дмитрий Иванович устроил совещание по этому поводу именно в месте, которое хотели «оттяпать», около тех самых яблонь. Естественно, всем сразу стало ясно, что надо сохранить всё так, как есть.

С улыбкой он рассказывал мне про нелады с губернатором Д. И. Аяцковым. Звучало это примерно так. «У нас прошла программа по поддержке студенческой молодежи вузов. Я, как председатель местного союза ректоров, выступил, чтобы поблагодарить местную администрацию. И говорю:

— Жизнь-то налаживается. Раньше деньги просили на ремонт текущих крыш, на туалеты, а сейчас на молодежь, на поддержку лучших...

И процитировал:

— Не упиваясь словесами,
Жизнь убеждает нас опять:
Талантам надо помогать,
Бездарности пробьются сами.

Губернатор покраснел, он, видимо, не читал этого стихотворения Льва Озерова, и спрашивает: «Вы имеете в виду меня?»

С этого нелады и начались».

Ну, а про то, как местные лидеры требовали уволить известного историка, который «высоко» оценил научный уровень регионального руководителя... Тут нужно перо Гоголя или Салтыкова-Щедрина...

Немного занимаясь администрированием, понимаю, что много нелегких моментов было с ректорской деятельностью Дмитрия Ивановича. В то время, когда всё вокруг рушилось, он отстроил новый корпус. Был создан факультет нелинейных процессов — единственный в стране. В Саратове долго и успешно развивалась СВЧ-электроника. Дмитрий Иванович «скрестил» её с нелинейной динамикой, создал свою научную школу. А потом началась «эра хаоса» и здесь разработки отечественных ученых, в частности, работавших в Саратове, в контексте электроники и радиофизики оказались на мировом уровне.

В колледже прикладных наук он начал учить школьников синергетике. Прекрасное дело читать свою науку любимой внучке!

Казалось бы, «эффективные менеджеры» должны из своих чисто бюрократических интересов поддерживать таких выдающихся людей. Но не тут-то было!

Помню, как Дмитрий Иванович с улыбкой пересказывал беседу с чиновником из «следующего ректората». И тот на полном серьёзе говорил выдающемуся ученому страны: «Мы бы с удовольствием Вас уволили. Но сейчас это не сразу получится. Вас слишком многие поддерживают...»

Об этой российской проблеме мы несколько раз говорили с Дмитрием Ивановичем. Я вспоминал горькие строки выдающегося историка В. О. Ключевского: «В России нет средних талантов, простых мастеров, а есть одинокие гении и миллионы никуда не годных людей. Гении ничего не могут сделать, потому что не имеют подмастерьев, а с миллионами ничего нельзя сделать, потому что у них нет мастеров. Первые бесполезны, потому что их слишком мало; вторые беспомощны, потому что их слишком много».

«А мы попробуем. Сейчас многое изменилось. У нас должно получиться!» — с улыбкой закончил тот разговор Дмитрий Иванович. И действительно, получилось удивительно много — и те самые СВЧ-приборы, которые связывают с национальной безопасностью, и научная школа, и журнал, и замечательные книги, и факультет, и главное — тот самый «незримый колледж». Ведь тем, кто придет после нас, взлететь будет легче, а утверждения, вокруг которых наше поколение ломает копыа, будут казаться им азами.

Удивительное детское ощущение — хотя уже довольно много знаешь, кажется, что дорогие и очень важные для нас люди будут жить всегда. Так я подсознательно относился и к папе, и к Дмитрию Ивановичу. Всегда казалось, что времени впереди очень много — мы всё успеем обсудить, сделать, изменить. Но когда времена меняются, пытаешься понять, какие главные черты важно сохранить в памяти или, говоря языком синергетики, каковы те параметры порядка, которые изменили мою и многих других людей жизнь.

У Дмитрия Ивановича я бы выделил два начала. Первое — огромная энергия и оптимизм. Его всегда «было много». Каждый разговор с ним был значим, в каждом его письме или предложении — новое, творческое, необычное.

Он удивительно много успевал — ездил на конференции, читал лекции в МГУ, вел курс в МИФИ, писал, читал, обсуждал. Вначале мне хотелось встречаться с ним почаще, по крайней мере, во время поездок в Москву, а потом пришло ощущение, что Дмитрий Иванович постоянно рядом, недалеко, и всё время можно с ним связаться.

Поскольку за спиной у него было настоящее, большое дело, к почестям и неизбежной суете он относился с юмором. Вторая основа — это жизнь в будущем. Именно поэтому ученики, студенты, школьники, внуки были на первом плане. С удовольствием рассказывал он о беседе с внучкой, которая восклицала: «Ну, почему у нас в семье только два адекватных человека?! — А кто адекватные-то? — Ну, ты да я».



Д. И. Трубецков на последнем звонке в Лице прикладных наук, 2016 год. Первая справа в первом ряду И. А. Трубецкова

В один из наших последних разговоров речь шла о его книге, посвященной теории подобия. И он рассказал мне шутивную историю. Когда он защищал докторскую, один из оппонентов заметил: «Теория подобия — это подобие теории». Он отвечал: «Сама связь этого метода в ваших словах с теорией поднимает его на очень высокий уровень». Тут уже крыть было нечем. И о книге: «Эту книгу надо выпустить, она многим ребятам очень поможет».

Думаю, что яркая, удивительная жизнь Дмитрия Ивановича, его дела, мысли, планы помогли многим людям. И еще очень многим помогут.

Что остается? Каков «сухой остаток»? Время — жестокий редактор. И следующее поколение забывает идеи, улыбки, шутки, дела выдающихся людей...

На мой взгляд, большим и очень важным делом является серия книг «Синергетика: от прошлого к будущему». Во многом она состоялась и встала на крыло благодаря книгам и энергии Дмитрия Ивановича. Его удивительный дар сочетать естественно-научную и гуманитарную культуры сыграл здесь огромную роль. Трудно было поломать дисциплинарную матрицу — математики должны писать для математиков, физики — для физиков, поэты — для поэтов. Вдохновенные лекции Дмитрия Ивановича показали, что гуманитариям интересны находки и проблемы естественников, а естественникам звезды гуманитарного знания стали гораздо ближе. В настоящее время в упомянутой серии только на русском языке выпущено более сотни книг, у некоторых — по 6–8 изданий. Они формируют сегодняшнюю научную реальность и будут определять ее развитие дальше.

Еще одна важная черта, которая осталась с тех далеких времен: интерес к хаосу в радиофизике и теории связи. В свое время в Российском открытом университете был проект «Информхаос», а в результате исследований лаборатории профессора А. С. Дмитриева из Института радиоэлектроники стало понятно, насколько интересен и перспективен вариант использования динамического хаоса в передаче информации. Думаю, что это тоже определит будущее. Конечно, «шумотроны», дела классиков, споры и находки останутся в прошлом, а работающие системы будут восприниматься как само собой разумеющиеся. Еще одна вещь, на которую хотелось бы надеяться, это удивительное отношение к людям, которое я вновь и вновь видел в Саратовской научной школе. У Дмитрия Ивановича было удивительное сочетание мудрости и юмора. Он с большим подъемом и уважением рассказывал о делах своих коллег, преподавателей и студентов, независимо от степеней и званий, признания или опалы. Я как-то спросил его про его жизнь после ректорства. «Жизнь прекрасная, интересная, заслуживающая внимания. Живу я в сумасшедшем доме, но отлично». «Почему же отлично?!» «Потому что я — в самой дальней палате, куда начальство заглядывает редко», — услышал я ответ.

Дмитрий Иванович умел удивляться. Когда я восклицал, что наши руководители энергично перепиливают сук, на котором сидят, и изумлялся их глупости, то он объяснял, что это не глупость, а ум такой.

И в книгах, и в работах Дмитрия Ивановича видна удивительная изобретательность. Думаю, что это связано с занятиями радиофизикой. Он много лет руководил кафедрой электроники, колебаний и волн, продолжая традиции и закладывая основы новых направлений.

Я как-то рассказал ему о своем радиофизическом опыте. На военной подготовке из нас готовили офицеров зенитно-ракетных комплексов. До сих пор считаю, что импульсная техника и радиолокация — вещи мистические, а в тех схемах, которые занимают всё пространство от стены до стены, могут разобраться только выдающиеся люди. У нас были лабораторные работы, и почему-то на каждой из них мне удавалось найти 3–4 новых нелинейных эффекта. Я предлагал нашему майору исследовать хотя бы один из них, потому что тут нелинейность на нелинейности сидит и нелинейностью погоняет. Я рассказывал об этих приключениях Дмитрию Ивановичу, он долго смеялся, а потом сказал, что меня очень не хватает у него на кафедре, дай Бог ей здоровья.



В перерыве между заседаниями в Академии наук, 2013 год. Слева направо: А. М. Сергеев, М. Д. Чернобровцева, А. Г. Литвак, Д. И. Трубецков (фото Е. Г. Трубецковой)

Пожалуй, одна важная вещь не удалась. Было бы важно добиться понимания принципиального значения нелинейной науки и междисциплинарных подходов в научном сообществе в целом и в Академии наук в частности. Но в Академии нелинейщиков, кроме Дмитрия Ивановича, было всего несколько человек. После выборов он с грустной улыбкой говорил: «В Академии надо работать шайками, поэтому нелинейщиков опять не услышали. Выбирают другие, а мы при сем присутствуем. Они выбирают — их шайка растёт, работает положительная обратная связь. Синергетика». Та же самая история произошла с программированием. Это направление, которое в течение трех десятков лет было ключевым в мировой науке, также оказалось не замечено и не развито в той мере, в которой это нужно великой стране.

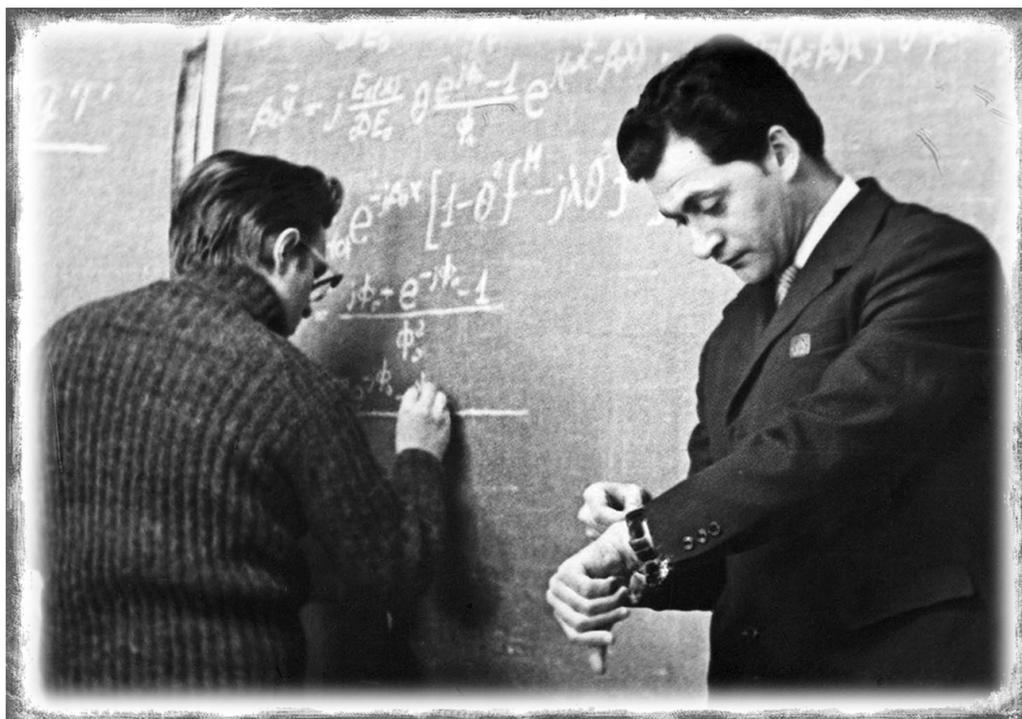
Впрочем, отрицательный результат — тоже результат. Академия находится на постной диете — ее лишили институтов. Думаю, Дмитрий Иванович, узнав всё это, опять улыбнулся бы и сказал: «Думаю, что это не финал. Будущее может оказаться гораздо лучше, чем нам сегодня кажется. Посмотрим».

К 85-летию Д. И. Трубецкова

Г. Г. Соминский

14 июня исполняется 85 лет со дня рождения Дмитрия Ивановича Трубецкова. До этого большого юбилея он, к великому сожалению, не дожил. Он был моим другом, другом моей семьи. Сейчас уместно, наверно, сказать, за что мы его любили и ценили.

Мы познакомились с Дмитрием Ивановичем примерно 45 лет тому назад на одной из конференций по СВЧ-электронике, которой он занимался в Саратовском университете, а я в Ленинградском политехническом институте. При первом же знакомстве Дмитрий Иванович произвел на меня



Рабочий момент: слева — Ю. И. Лёвин, справа — Д. И. Трубецков

огромное впечатление своей эрудицией, глубокими познаниями не только в этой конкретной науке, умением доступно и интересно излагать свои мысли о самых сложных явлениях природы.

Дмитрий Иванович заслуженно достиг больших научных и административных высот. Он автор около 300 печатных статей, целого ряда монографий и обзорных работ, которые уже стали классикой СВЧ-электроники. Дмитрий Иванович стал доктором физ.-мат. наук, профессором, заведующим кафедрой электроники (позже переименована в кафедру электроники, колебаний и волн). Он инициировал на кафедре развитие нового научного направления — нелинейной динамики. При его активном участии в СГУ был создан новый факультет — факультет нелинейных процессов, который возглавил Юрий Иванович Лёвин, один из ближайших учеников и соратников Дмитрия Ивановича. В 1991 году Дмитрий Иванович был избран членом-корреспондентом РАН.

Почти 10 лет Дмитрий Иванович был ректором Саратовского государственного университета. Он всегда старался привлекать в университет способных абитуриентов, делал все для повышения качества подготовки специалистов в университете. Под его руководством защищены десятки кандидатских диссертаций. Многие его ученики стали докторами наук. Научная деятельность группы Дмитрия Ивановича Трубецкого признавалась ведущей научной школой России.

Будучи ректором, Дмитрий Иванович инициировал создание при университете Лицея прикладных наук и преподавал в этом лицее. Мне трудно понять со стороны, как это удалось, но из числа лицеистов вышло большое количество талантливых исследователей и преподавателей. Видимо, сама система общения молодых ребят с высококвалифицированными людьми из университета подталкивала их к такому развитию. До сих пор мы с удовольствием наблюдаем, как ярко выглядят выходцы лицея на всевозможных конкурсах и интеллектуальных соревнованиях.

Огромную роль в развитии СВЧ-электроники сыграли проводившиеся, в основном, раз в 3 года зимние школы по электронике СВЧ и радиофизике, одним из инициаторов и руководителей которых был Дмитрий Иванович. Политехники Петербурга старались не пропускать

этих школ. Большинство школ проходило в Волжских дачах, живописном месте на берегу Волги. К чтению лекций привлекались не только крупнейшие специалисты, но и молодые люди, желающие поучиться или поделиться своими достижениями. Там, в Волжских дачах, можно было пообщаться друг с другом, гуляя по льду замерзшей Волги или в кулуарах. В этом общении зачастую удавалось узнать гораздо больше, чем из чтения печатных работ в журналах. Труды школ издавались в СГУ и вручались участникам по прибытии на школу. Как правило, труды тех школ, которые я посетил, предваряли подготовленные Дмитрием Ивановичем введения. В этих введениях образно и доходчиво он излагал свою точку зрения о смысле и значении школ. Для примера на 9-й школе (1992) он привел высказывание Иогана-Вольфганга Гёте: «Очень трудно избежать двух вещей: тупоумия, если замкнуться в своей специальности, и неосновательности, если выйти за её пределы». И далее написал: «Школы, в известной мере, позволяют избежать того и другого». Я полностью согласен и с Гёте и с Дмитрием Ивановичем.

Из всего сказанного выше ясно, что Дмитрий Иванович был прекрасным ученым и замечательным работником высшей школы, умелым организатором. Но ценим мы его не только за это. Дмитрий Иванович — чрезвычайно привлекательный человек. Поражали его энциклопедические знания в самых разных областях. Он мог интересно и со знанием рассказать не только о близких ему профессиональных проблемах. Он так же глубоко разбирался в литературе и истории, в искусстве. Он умел максимально просто, но полно и убедительно осветить почти любую проблему. Но все же и это, как мне кажется, не самое главное в Дмитрие Ивановиче. Он привлекал к себе людей не только умом и знаниями. Он привлекал к себе доброжелательностью, умением выслушать, услышать и понять собеседника. Он был исключительно надежным человеком, на которого можно было опереться, был настоящим другом. Дмитрий Иванович сумел собрать вокруг себя коллектив умных, умелых и разносторонних сподвижников, создал всемирно



На одной из зимних школ по СВЧ-электронике и радиофизике: Д. И. Трубецков, Т. А. Тумарева, Г. Г. Соминский

известную школу физиков-теоретиков. Хочется надеяться, что они сумеют продолжить лучшие его начинания и таким образом сохранят память об этом замечательном человеке.

Сказанное выше правда и только правда. Но все же, если бы мне пришлось писать портрет Дмитрия Ивановича для близких мне людей, я бы не ограничился только этим. Попробую привести пример, который наилучшим образом говорит о том, каким он был достойнейшим человеком. В наших семьях практически одновременно появились на свет внуки. Мы с Дмитрием Ивановичем к тому времени были уже довольно взрослыми людьми, и к внукам относились приблизительно одинаково, с большой любовью. Не буду говорить о том, что делал я для своей внучки, не обо мне речь. А вот то, что сделал Дмитрий Иванович, как я помню, меня просто потрясло. Как он рассказывал нам с супругой, он прочитал все, что можно было прочитать о Гарри Поттере, чтобы говорить с нею на одном языке. Мы бывали в доме Дмитрия Ивановича и общались со всем его семейством. И было очевидно, что он был любимым дедушкой. Возможно, это было и потому, что он был им интересен.

И Дмитрий Иванович и его супруга Сонечка были очень теплыми и добрыми людьми. Мы бывали в их хлебосольном доме и они бывали у нас. На приведенном фото Дмитрий Иванович, моя супруга Татьяна Алексеевна и я на одной из зимних школ по СВЧ-электронике и радиофизике, организатором которой он был.

В Политехническом знали и любили Дмитрия Ивановича не только мы. Сотрудники нашей лаборатории знали и очень ценили Дмитрия Ивановича.

Парадигма Д. И. Трубецкого: интеллектуал в науке

Б. Н. Пойзнер

Когда человек умирает,
Изменяются его портреты.
По-другому глаза глядят, и губы
Улыбаются другой улыбкой.

Анна Ахматова, 1940

Good society is made only by good people.

Bertran Russel, 1941

Подавляющая часть научных достижений Дмитрия Ивановича Трубецкого получила признание в учёном сообществе при его жизни. Достаточно сказать, что он был избран членом-корреспондентом РАН. Однако потеря фигуры такой величины, как он, побуждает обратить внимание на латентные стороны его социальной значимой деятельности и творческого наследия. Их раньше, возможно, заслоняла от его коллег ежедневная рутина, нужда реагировать на поток событий, нервозность университетской жизни etc. На мой взгляд (наверное, не всеми разделяемый и спорный), важно не упустить из виду: Д. И. Трубецков — практически во всех областях своей активности — проявлял черты интеллектуала и носителя мудрости.

Выносимые на суд читателя заметки — попытка выяснить некоторые обстоятельства, делающие столь насущным для университета присутствие в нём интеллектуала.

Возможен ли счастливый интеллектуал? Определяя интеллект, Б. Рассел видит миссию интеллектуала «в том, чтобы сохранять трезвое и беспристрастное мнение перед лицом всех искушений страсти. Впрочем, я убедился, что большинство интеллектуалов верит в полезность интеллекта лишь в спокойные времена» [1, с. 108]. Рассел особо выделяет интеллектуальную честность. Это «личная добродетель, которая не всегда легко сочетается с сотрудничеством в коллективном предприятии. Однако в перспективе её социальная ценность очень велика» [1, с. 108].

Спустя 70 лет после словаря Рассела философ и филолог М. Н. Эпштейн подготовил лексикон концептов «Первопонятия: Ключи к культурному коду». Чтение его не раз вызывало передо мной образ Дмитрия Ивановича. «В целом ум столь же легко заметить и трудно определить, как обаяние, — сравнивает Эпштейн. — Ум — это обаяние смысла в человеческой речи и поведении. Поэтому ум может восприниматься на взгляд, чисто физиономически. Особенно показательно совместное выражение глаз и губ, когда человек начинает говорить: насколько глаза способны вбирать и излучать смысл, пока рот источает речь» [2, с. 633]. Каждый, кто помнит свою беседу с Дмитрием Ивановичем, легко проверит тезис Эпштейна. Вот ещё его дефиниции: глядя через них, можно уточнить черты и чёрточки Трубецкова-человека, Трубецкова-физика, Трубецкова-администратора etc. «В чём же заключено обаяние ума и умного человека? Ум устанавливает связи далёких вещей и проводит различия между близкими, чтобы каждая вещь получала меру своей единственности — и своего единства с другими» [2, с. 633]. «Живоумие видит обратную сторону вещей, ставит под сомнение претензии на абсолютную истину, подтрунивает даже над самым разумом» [2, с. 633].

Задолго до антропологической дилеммы Э. Фромма «иметь или быть?» Рассел выдвинул свою: иметь или творить? «Высший принцип как политики, так и частной жизни, — полагал он — должен заключаться в том, чтобы поддерживать всё творческое и тем самым ослаблять импульсы и желания, связанные со стремлением к обладанию» [1, с. 284]. На мой взгляд, Дмитрий Иванович практически во всех видах активности действовал в согласии с этим принципом. И вчера, и сегодня такая поддержка отнюдь не тривиальна. Рассел был убеждён: «творческой составляющей человеческой деятельности следует предоставить максимально возможную свободу от общественного контроля, чтобы она могла оставаться спонтанной и не терять своей силы» [1, с. 284]. Надо думать, и тезис, и свойственный Трубецкову стиль руководства масштабными НИР послужат одними из доводов в спорах о средствах санации и развития отечественной высшей школы и науки.

Насколько понимаю, Дмитрий Иванович удовлетворял древнейшему, но трудновыполнимому критерию, который выдвинут, видимо, ещё в глубокой античности. Не грех в наши дни (относительно сытые, но весьма беспокойные) привести его — в редакции Рассела: «Подлинная жизнь человека не состоит в деле набивания желудка и одевания тела, но в искусстве, мышлении и любви, в творчестве и созерцании прекрасного и в научном постижении мира» [1, с. 319]. Было бы ошибкой обвинять Рассела в проповеди аскетизма, монашества и тому подобного. Д. И. Трубецкова — тоже. По моим ощущениям, от него исходили флюиды счастливого человека. По-видимому, этот статус был в гармонии с набором качеств интеллектуала. Ведь последний есть лицо общественное, особенно если он действует в научно-образовательной сфере. Рассел рекомендует: «Если вы хотите сами быть счастливыми, вы должны заняться заботой о счастье других»: «Счастлив тот, — убеждён Рассел, — кто живёт непредубеждённо, кто имеет свободные чувства и широкий спектр интересов, кто обеспечивает своё счастье благодаря этим интересам и чувствам и благодаря тому, что они, в свою очередь, делают его объектом интересов и чувств многих других людей» [1, с. 319]. Возможно, читатель из Саратова вспомнит показательный факт: сколько его земляков пришло проститься с Дмитрием Ивановичем в августе 2020 г., несмотря на пандемию.

Сближая контексты интеллектуальности и счастья, рискну предположить ещё одну область пересечения. Наверное, уже лет 50 назад стало ясно: Дмитрий Иванович обладает тем сочетанием качеств, какое позволяет ему сделаться *связующим звеном*. Миссию эту, столь же редкую, сколько и трудную, он плодотворно выполнял в широкой научно-образовательной среде отечественных специалистов по радиофизике и электронике. То была связь, фигурально говоря, по горизонтали. Она консолидировала творческие усилия его современников, как правило, не очень схожих между собой, а потому и не во всём согласных. Дмитрий Иванович оказался ещё и связующим звеном по вертикали. Он сознательно, ответственно, умело, даже изящно, мне кажется, продолжал минимум

три исследовательские и педагогические традиции. Это, во-первых, стиль деятельности, характерный для кафедры электроники, воспитавшей его. Во-вторых, традиции физико-математического *community* Саратовского университета, которые были заложены яркими фигурами наших дореволюционных учёных. И наконец, это — наследие европейской науки, в соревновании и в диалоге с которой росла и растёт отечественная. Трубецков был незаурядным производителем физико-математического и инженерно-физического знания. По роду своих занятий он не мог не мыслить процессуально. Видимо, благодаря этому преимуществу и своим гуманитарным склонностям, он обогатил летопись этого знания, изучая, уточняя, а иногда восстанавливая недостающие эпизоды.

Известно, что в журнале «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» Дмитрий Иванович заложил традицию отмечать очерками «круглые» даты со дня рождения творцов физики, математики, инженерного искусства. И рождения их детищ: теорий, уравнений, концепций, законов, опытов, гипотез, а также открытий свойств материи. Каждый такой «юбилей» обостряет восприятие старинных результатов интеллектуальной деятельности. Причём оно идёт в контексте современного понимания того или иного феномена, той или иной модели. Поэтому невольно возникает смысловая интерференция двух содержаний. А Трубецков в своём историко-научном нарративе стремился и умел повысить контраст интерференционной картины, как сказал бы физик.

Комментируя узловые эпизоды из жизни науки, Дмитрий Иванович нередко добивался эффекта остранения, «встряхивания» задремавшего внимания к сути дела. Одновременно, хотя и неявно, это влекло усвоение читателем методологической *подоплёки* творческого успеха далёкого предшественника. Подоплёки неприметной, молча подразумеваемой либо туманно высказанной, но весьма существенной.

По моему ощущению, Д. И. Трубецков относился к выдающимся результатам научной деятельности так же, как и к шедеврам литературы, живописи, графики. Ведь и на способе построения математической модели, и на замысле физического эксперимента всегда отражается *modus cognandi* исследователя, всегда различим его индивидуальный отпечаток. Эмоциональный подъём, вызванный восхищением, наслаждением, какое приносит давнее творческое достижение в познании, нередко чувствуется в текстах Дмитрия Ивановича.

Что ещё придаёт занимательность его работам? Бесспорно, то, что он терпеливо распутывает хронологические «узелки», вникает в тяжбы о приоритете, принимает в расчёт феномены парных открытий либо несправедливо непризнанных открытий и т. д. Без этих его действий читателю не понять, в чём же, собственно, состоят типичные приключения идей. Или, напротив, их весьма экзотические и далёкие путешествия. Или — чем же вызваны непредсказуемые перипетии в житейских обстоятельствах и творчестве авторов идей.

В итоге Дмитрий Иванович, фигурально говоря, умело находил общий язык с естествоиспытателями, изобретателями, математиками последних четырёхсот лет. А потому стал вхож в их творческие пространства, часто весьма несходные меж собой, порой в их «кухни». Контраст их закономерному несходству составляло сугубо человеческое *усилие* познания реальности, общее во все века. Его-то и восстанавливал Дмитрий Иванович для любознательных читателей.

Интеллектуал как культуртрегер в науке. Оглядываясь на его «труды и дни», поневоле спрашиваешь: в каких продуктивных формах можно выразить пиетет перед Д. И. Трубецковым — учёным и интеллектуалом? Не пора ли задуматься над культурно-антропологическим ориентиром для современного учёного в России? Не спросить ли себя и коллег: каким они хотят видеть наше учёное сообщество лет через 10–20–30? И каким — не хотят?

Косвенно Дмитрий Иванович ответил на подобные вопросы, остановившись на тех или иных историко-научных сюжетах, выражающих и пиршество духа, и драму носителей идей, и позор отступничества. Выполняя обязанности интеллектуала, он систематически пересаживал

на родную почву рабочие эталоны европейской научной культуры¹. Мне думается, что эта сторона его деятельности особенно важна, если пытаться заглянуть в Россию грядущих 2020-х гг., включая и сообщество учёных. Потому что в стране — острый дефицит культуртрегерства как формы особо ценного социально ценного поведения. Ведь оно компенсирует — хотя бы частично — прогрессирующую убыль малочисленной когорты отечественных интеллектуалов: гуманитариев, естествовников, публицистов.

Как квалифицировать воздействие Д. И. Трубецкого на мышление и ценностные ориентации современников? Если так ставить задачу (и стремиться к определённости терминов), то — в первом приближении — допустимо принять рабочий критерий культуролога. К интеллектуальной элите России культурологи предлагают «отнести людей, занятых интеллектуальным трудом, обладающих достаточной степенью свободы, не вовлечённых в политическую и экономическую жизнь общества и *не ангажированных* в идеологическом отношении» [3, с. 87]. Причём «эти люди должны иметь определённый общественный статус, быть “*властителями умов*”, уметь воздействовать на общество и быть признанными этим обществом» [3, с. 89] (курсив — автора цитат). Но они не образуют «никакого слоя, “касты”, это индивидуальное качество. Обладающий им является тем, кто и один в поле воин, даже если большинство не прислушивается к его мнению и даже активно осуждает его». Таков *case* академика А. Д. Сахарова².

Невредно выслушать ещё суждение С. Сонтаг (1933–2004) о В. Беньямине (1892–1940). Оба они рафинированные интеллектуалы: теоретики литературы и искусства, культурологи, художественные критики модернизма, эссеисты, публицисты. Американка Сонтаг, кроме того, — писательница, немец Беньямин по складу ума — философ. Думаю, что не случайно среди переводчиков его работ — феноменальный эрудит Ю. А. Данилов (1936–2003), друг и единомышленник Д. И. Трубецкого. Сонтаг в эссе о Беньямине с многозначительным названием «Под знаком Сатурна» (1978) без оптимизма заключает: «По мысли Беньямина, независимый интеллектуал — человеческий тип, вымирающий повсюду: в буржуазном обществе он обречён ровно так же, как в коммунистическом» [4, с. 109–110]. Не означает ли этот вывод, что дело не в типе общества, но в самой природе его? Нельзя ли тогда считать, что интеллектуал замещает вакансию пророка в своём отечестве? Ведь его незавидная миссия осознана в незапамятные времена. В лучшем случае над ним смеются и глумятся, в худшем — подвергают ostracism, принуждают к изгнанию или самоубийству. В истории советской жизни таких горестных повествований — масса. Будучи посвящён в столетнюю историю преподавательского корпуса СГУ, Дмитрий Иванович не мог не быть осведомлён о них.

Интеллектуал в периоды Контрпросвещения. «Беньямин чувствовал, что живёт в такое время, когда всё чего-нибудь стоящее приходит к концу» [4, с. 110], — констатирует Сонтаг. Судя по многим источникам, приливы такого умонастроения у просвещённой публики в нашем

¹Методические принципы интродукции мировой научной культуры в российскую научно-образовательную среду, которые применял и совершенствовал Дмитрий Иванович, подсказывают вопросы более общего порядка. Какую роль сыграла мировая естественно-научная культура в становлении и укреплении «единства европейского духа»? Каковы механизмы и обратные связи в этих процессах? Каково сегодня влияние математического естествознания на «единство европейского духа»? А на позиции рационализма вообще? В кавычки взят термин, используемый совсем в другом контексте: при оценке творчества «русского европейца» — философа Н. А. Бердяева (1874–1948).

²Года четыре назад на семинаре для аспирантов речь зашла о А. Д. Сахарове, и я сказал, что он — благородный человек. Аспирантка поднимает руку и спрашивает: а «благородный» — это какой? Спрашивает серьёзно, без интонации издевательства, но, пожалуй, с оттенком искреннего недоумения. Аудитория молчит, никто не подсказывает ей. Стараясь объяснить, советую прочесть его биографию: Горелик Г. Андрей Сахаров: Наука и свобода (2004). Книга, уверен, была известна Дмитрию Ивановичу. Чем поучителен этот эпизод? Он показывает, что благородство сделалось экзотикой, требующей комментариев, как глосса. Вероятно, выросло поколение, не имевшее перед глазами живого носителя высоких качеств, удостоверяемых его поступками. Полагаю, что ими отличался Д. И. Трубецков.

отечестве бывали неоднократно. Скажем, в начале и в конце 1920-х, во время 1930-х, 1940-х, на старте 1950-х, после отмены хрущёвской оттепели», в начале 2020-х. «Бывали хуже времена, но не было подлей» — лейтмотив нашего самокритичного самоописания уже полтора столетия³. Сколько раз это слышал (и так же думал) Дмитрий Иванович? Не знаю. Его я воспринимал как инициативного, здравомыслящего, целеустремлённого, плодотворного оптимиста. Возможно, сказывался эндемический фактор — некий *волжский* культурный архетип? У меня выборка явно не репрезентативная. Всё же, по моим наблюдениям, характер саратовцев отличает общий знаменатель: полное отсутствие того качества, какое лютеране называют ленью сердца, или ацедией⁴.

Сегодня, наверное, уже не всем понятно, почему *modus vivendi* отечественных интеллектуалов (а тем более — их образ мыслей) не мог не быть враждебен советскому режиму. Ведь режим установили отнюдь не интеллектуалы, но революционеры-экстремисты и радикалы-догматики, привыкшие к военному насилию, к военной хитрости, провокации и разведке, утратившие нормы гуманизма. Покорённое большевиками к 1922 г. население было свидетелем их злодеяний либо жертвой и уже потому заслуживало жестокого, запугивающего обращения. Чрезвычайно трагичны были судьбы интеллектуалов дореволюционного происхождения и их неформальных последователей, попавших в условия тоталитарной системы. «Сквозь асфальт» — такой образ предлагает культуролог Р. М. Фрумкина, описывая жизненные стратегии, препятствия для свободного творчества учёных, способы их преодоления (2012). «Одна из особенностей “человека советского” — его способность к социальной мимикрии, — итожит она. — Приходится признать, что без социальной мимикрии многие наши сограждане вообще не выжили бы. Дневники и записки, не предназначенные для печати, но — пусть не вполне осознанно — адресованные неведомым потомкам, открывают нам искалеченные жизни и души» [5, с. 79].

Как это ни парадоксально, сегодня растёт значение опыта противодействия нашей диктатуре для мыслителей Европы! К такому соображению приводит книга «Соблазны несвободы: Интеллектуалы во времена испытаний» (2008). Её написал Ральф Дарендорф (1929–2009), европейский авторитет, известный трудами по социологии и философии. На мой взгляд, деятельность Д. И. Трубецкого желательнее изучать и интерпретировать как активность интеллектуала и во времена испытаний⁵ тоже. Они в России после 1913 года, фактически, не прекращались, варьировалась лишь степень их тяжести и ширина захвата жертв. Склонен считать, что Дмитрий Иванович в основном согласился бы с мыслью Дарендорфа: в XXI в. для Европы наступает «Новое Контр-просвещение» [6, с. 295]. Между тем, Дмитрий Иванович, по-моему, работал и как Ревнитель Просвещения (если изъясняться старинным слогом), и как *просветитель для просветителей* (если так можно сказать). То и другое весьма трудно, ответственно, незаметно истощает нервные ресурсы. И редко когда не вызывает сопротивления начальства вместе с его сторонниками — тем более в родных палестинах.

Правоту диагноза Дарендорфа подтверждает, в частности, активность антиинтеллектуальных течений не только у нас, но и на Западе. Резонно ожидать, что западные доктрины получат

³Вспомнился анекдот об историческом оптимизме, известный уже моему отцу (или это бродячий сюжет?). «Раввин собирает общину и спрашивает евреев, как им живётся. Те стонут: плохо, ребе, ой плохо, уже невыносимо... Раввин выслушал всех и изрекает: ОЧЕНЬ хорошо, что вам так плохо... Евреи в ужасе вопят: ребе, как тебя понимать?! Раввин завершает фразу: ...потому что скоро всем нам будет НАМНОГО хуже!» Верно, и Дмитрий Иванович анекдот этот слышал, улыбаясь чуть грустно?

⁴Этимон — древнегреческое понятие *ακηδία* («акедия»), то есть небрежность, беззаботность. У древних римлян *acedia* («ацедия») означает: уныние, меланхолия. В эпоху Просвещения в Европе ацедию-меланхолию иногда считали недугом учёности, то есть последствием чрезмерного усердия в умственном труде. Для византийских монахов и богословов IV в. акедия — синоним беса (греха) уныния, а позднее — лени. В последние полвека психологи обычно толкуют акедию в контексте противодействия ипохондрии, депрессии, утрате смысла жизни, смысла своего дела и т. п.

⁵Испытаний — вследствие бесчеловечности, жестокости, мракобесия власти. Но и сам технологический фактор в культуре обязывает образованный слой выполнять дополнительные функции. Особенно же — нынче и в России.

популярность в России. И тем самым ценность представлений о фигуре Трубецкого повысится. В плане опасений Дарендорфа стоит коснуться концепции постгуманизма, например, в изложении Фр. Феррандо (2019), исследовательницы из США, полной левых идей и аффектов. Это философское направление, наряду с трансгуманизмом, антигуманизмом, объектно-ориентированной онтологией, стремится переопределить человека [7, с. 14] (кардинально обесценивая его, по нашему мнению). Для этого введено понятие *post*человека. Его жизнедеятельность обусловлена достижениями радикального прогресса (био)технологий, но строго подчинена политическим нормам, включая императивы политкорректности, и экологическим правилам [7, с. 19].

Грубо говоря, концепция Феррандо зиждется на противопоставлении двух понятий, употребляемых и в радиофизике. Когда моделируют процессы распространения электромагнитной волны в устройствах, их представляют двойкой. Либо как системы с электрическими параметрами, непрерывно распределёнными в пространстве (волновод, СВЧ кабель). Либо, напротив, — с параметрами, локально сосредоточенными (низкочастотные радиотехнические цепи). В свете этой аналогии обратимся к эпохе Пифагора Самосского (конец VI в. до н. э.) или итальянского мыслителя периода Возрождения Дж. Пико делла Мирандолы (1463–1494). Можно сказать, что сообщество более или менее мыслящих субъектов, скажем, в Западной Европе было системой с локально сосредоточенными когнитивными параметрами. А вот, социум начала XXI в. примерно уподобить системе с распределёнными параметрами. В чём именно и насколько сильно интенсивность житейского, профессионального, общественного и иного взаимодействия повлияла на понимание человека, его назначения, потенциалов, ценностей etc.? В версии постгуманизма Фр. Феррандо (несколько эклектической и эффектно импрессионистической, на наш взгляд) традиционному и устаревшему человеку прошлого противопоставлено *post*человеческое существо. Оно отличается тем, что включено в сети многообразных социальных, экономических, политических, психологических, культурных и других отношений, связей, влияний. Причём связей не только с человеческими особями всевозможных видов, но также с иными обитателями биосферы Земли, с неорганическими объектами, включая искусственные.

Разумеется, от такой идеологии можно отмахнуться: дескать, она — очередной эпатажирующий акт в комедии современной гуманитарной мысли. Всё же, недопустимо забывать, что носители левых социально-политических убеждений уже предпринимали фундаментальную войну против человека, антропоцентризма, европоцентризма и подобных -измов. Войну вёл русский коммунизм, разгорячённый успехом Октябрьской революции и эффективностью террора. То был очень последовательный, кипящий ресентиментом, изобилующий патологиями импульс к демонтажу человека мыслящего и совестливого.

Но постгуманисты игнорируют антропологию, практику, социальную продукцию расчеловечивания, развёрнутого большевиками вкуче с чекистами, и его фатальные последствия. Между тем, утвердители коммунизма изготовили пробный вариант *post*человека. В СССР его именовали «новый советский человек» и с 1930-х гг. производили в индустриальных объёмах. *Homo soveticus* был спроектирован в качестве полной противоположности интеллектуала. Советский человек не был предназначен жить собственным интеллектом. Но ему было по силам воспроизводить и транслировать текущий набор разрешённых догматов. Он мог трудиться в народном хозяйстве страны, мог воевать с врагами внутренними и внешними. Спустя век после дебюта красных антропоинженеров, в русле их представлений, *de facto*, движется Фр. Феррандо и не только она. Левые мечтают упразднить «самостоянье человека» (если вспомнить Пушкина). Таков же и стержень программы Контрпросвещения. Д. И. Трубецкого это не могло не волновать, мне кажется.

Синергия жизни и ума? Резюмируя одну из сторон научной деятельности Д. И. Трубецкого, рискну напомнить, что со времён шумерских звездочётов и эллинских мудрецов, центральной проблемой науки и её нервом был сам учёный.



На встрече с А. И. Солженицыным (Саратов, 1995 год)

Ныне состояние нашего сообщества, образования, науки таково, что нужда в персонах уровня Д. И. Трубецкого куда острее, чем, скажем, 20–30 лет тому назад. По-видимому, ещё одним средством исправления положения служит не только всемерное повышение методологического, технологического, эпистемологического, метрологического и т. п. уровня НИР и НИОКР. Крайне насущно выбрать эталоны университетского выпускника, пригодного для работы в науке. Видимо, было бы ошибкой продолжать линию *minoris resistentia*, то есть формировать его лишь безликим решателем проблем, познающим субъектом с минимумом индивидуальности, удобным для манипулирования. И личность, и вся деятельность Трубецкого была не просто антиподом, но отрицанием такой образовательной практики, стратегии, политики, противодействием ей.

Приведу ещё один довод, показывающий терапевтический потенциал парадигмы Д. И. Трубецкого для наших ключевых очагов умственной активности: академии и университета — в 2020-е гг. «В России есть сильная традиция антиинтеллектуализма, “умоборчества”: дескать: ум враждебен живой жизни и не способен её постичь (“Умом Россию не понять...”). Но это свойство именно не слишком развитого ума, который склонен умствовать, умничать, то есть обслуживать самого себя. Где неживой ум, там и неумная жизнь — бессмысленная, беспощадная к самой себе. <...> Живой ум, не выпрямляющий понятий догматически, но и не ломающий их истерически, нужнее всего зрелому обществу, которое не готовится к концу света, не дёргается в припадках ясновидения и миротворчества, а собирается жить долго, терпеливо, осмысленно, со вкусом и в своё удовольствие» [2, с. 634–635]. На этом настаивает М. Н. Эпштейн.

Мне кажется, что Дмитрий Иванович вряд ли бы взялся опровергать его кардинальное обобщение. Радиофизик заметит, что оно неявно исходит из понимания синергии двух нелинейных подсистем: интеллектуальной и социальной. Их контакт, их устойчивый прогресс невозможен без связующего звена, без одухотворённого посредника. Образцом такого и был Трубецков.

Список литературы

1. Рассел Б. Словарь разума, материи и морали. Киев: Port-Royal, 1996. 368 с.
2. Эпштейн М. Н. Первопонятия: Ключи к культурному коду. М.: КоЛибри; Азбука-Аттикус, 2022. 720 с.
3. Рыжакова С. И. Проблемы взаимосвязи интеллектуальности и элитарности в современной России // В кн.: Интеллектуальная элита в контексте русской истории XIX–XX вв. / Под ред. Т. А. Пархоменко. М.: РОССПЭН, 2012. С. 78–100.
4. Сонтаг С. Под знаком Сатурна. М.: Ад Маргинем Пресс; Музей современного искусства «Гараж», 2019. 168 с.
5. Фрумкина Р. Сквозь асфальт: Эссе и статьи. М.: Новое литературное обозрение, 2012. 256 с.
6. Дарендорф Р. Соблазны несвободы: Интеллектуалы во времена испытаний. М.: Новое литературное обозрение, 2021. 360 с.
7. Феррандо Ф. Философский постгуманизм. М.: Издательский дом ВШЭ, 2022. 360 с. DOI: 10.17323/978-5-7598-2584-5.

References

1. Russel B. Dictionary of Mind, Matter and Morals. London: The Citadel Press; 1952. 308 p.
2. Epstein MN. First Concepts: Keys to the Cultural Code. Moscow: KoLibri; Azbuka-Attikus; 2022. 720 p. (in Russian).
3. Ryzhakova SI. Problems of the relationship between intellectuality and elitism in modern Russia. In: Parkhomenko TA, editor. Intellectual Elite in the Context of Russian History of the 19th–20th Centuries. Moscow: Russian Political Encyclopedia; 2012. P. 78–100 (in Russian).
4. Sontag S. Under the Sign of Saturn. New York: Penguin Books; 1978. 224 p.
5. Frumkina R. Through the Asphalt: Essays and Articles. Moscow: Novoe Literaturnoe Obozrenie; 2012. 256 p. (in Russian).
6. Dahrendorf R. Versuchungen der Unfreiheit: die Intellektuellen in Zeiten der Prüfung. Munchen: Verlag C. H. Beck oHG; 2008. 239 s. (in German).
7. Farrando F. Philosophical Posthumanism. New York: Bloomsbury Publishing; 2019. 296 p.

Георгий Теодорович Гурия — д.ф.-м.н., профессор, руководитель лаборатории математического моделирования биологических процессов Национального медицинского исследовательского центра гематологии МЗ РФ, по совместительству сотрудник кафедры физики живых систем МФТИ. Окончил факультет молекулярной и биологической физики Московского физико-технического института по кафедре молекулярной и биологической физики (1980) и аспирантуру МФТИ (1983). Дипломную работу и кандидатскую диссертацию выполнял в лаборатории биополимеров Института молекулярной биологии АН СССР под руководством проф. М. В. Волькенштейна и ст.н.с. М. А. Лившица. С 1984 по 1989 год работал в проблемной лаборатории космической биологии кафедры биофизики биологического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. С ноября 1989 года старший, затем ведущий научный сотрудник лаборатории проф. А. М. Жаботинского в Гематологическом научном центре. С марта 1996 года по настоящее время — заведующий лабораторией. Основные работы посвящены исследованию общих проблем самоорганизации неравновесных систем и приложениям теоретических результатов к актуальным биомедицинским ситуациям. Ряд работ посвящен явлениям структурообразования при свертывании крови и их математическим моделям. В декабре 2020 года Ученым Советом МФТИ избран Почетным профессором.

Россия, 125167 Москва, Новый Зыковский проезд, 4
Национальный медицинский исследовательский центр гематологии Минздрава РФ
E-mail: guria@blood.ru
ORCID: 0000-0002-5579-9820
AuthorID (eLibrary.Ru): 42948
<https://www.guria-lab.ru>





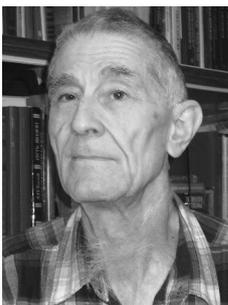
Георгий Геннадьевич Малинецкий — родился в Уфе (1956). Окончил с отличием физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова (1979). Защитил кандидатскую диссертацию (1982), доктор физико-математических наук (1990), профессор, заведующий отделом математического моделирования нелинейных процессов Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Один из ведущих специалистов в области нелинейной динамики, автор более 700 научных трудов, около 100 научно-популярных статей и книг, изданных в России и США. Наиболее известные результаты: теория диффузионного хаоса, модели системы образования, исследовательский проект создания математической истории, а также проект создания Национальной системы научного мониторинга опасных явлений и процессов в природной, техногенной и социальной сферах. Профессор Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана и Российского университета дружбы народов. Является вице-президентом Нанотехнологического общества России. Лауреат премии Правительства РФ в области образования (2002). В последние годы занимается мягким моделированием, системным анализом, прогнозом бедствий, катастроф и кризисных явлений на основе методов нелинейной динамики, а также теорией русел и джокеров, проблемами проектирования будущего.

Россия, 125047 Москва, Миусская площадь, 4,
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: gmalin@keldysh.ru
ORCID: 0000-0001-6041-1926
AuthorID (eLibrary.Ru): 100438



Соминский Геннадий Гиршевич — родился в Ленинграде (1935). Окончил в 1960 году Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина (ныне Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого — СПбПУ). С 1960 года по настоящее время работает в СПбПУ, с 1991 г. — в должности профессора. В 1968 году организовал лабораторию сильноточной и СВЧ электроники и руководит ею по настоящее время. Области основных научных интересов: процессы в пространственном заряде и их влияние на работу сильноточных электронных устройств, разработка и совершенствование полевых эмиттеров для формирования интенсивных электронных потоков. Руководил работами по грантам Российского научного фонда и хозяйственными работами. Автор более 300 печатных работ и 22 изобретений.

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
E-mail: sominski@rphf.spbstu.ru
ORCID: 0000-0001-7945-7238
AuthorID (eLibrary.Ru): 536387
WoS Researcher ID: P-9234-2015



Поизнер Борис Николаевич — родился в Томске (1941). Окончил радиофизический факультет Томского государственного университета (1963). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1970). Профессор кафедры квантовой электроники и фотоники Томского государственного университета (2004–2022). Читал лекции по нелинейной оптике, лазерной технике, основам синергетики, социальной информатике. Автор и соавтор более 400 публикаций, 10 изобретений, 23 учебных пособия и монографии по физике лазеров, процессам самоорганизации и хаотизации в оптических, радиофизических, социокультурных системах, вопросам вузовской педагогики и (само)образования, науковедению и культурологии, проблемам творчества как целенаправленной деятельности в обществе. Заслуженный работник высшей школы РФ (2005). Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.267.04 на базе ТГУ (1974–2020). Действительный член Национального союза библиофилов РФ.

Россия, 634050 Томск, пр. Ленина, 36
Томский государственный университет (радиофизический факультет)
E-mail: pznr@mail.tsu.ru
ORCID: 0000-0003-4550-3587
AuthorID (eLibrary.Ru): 10453

EDITOR-IN-CHIEF

Yu. V. Gulyaev, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

DEPUTY EDITORS

I. V. Sysoev, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

A. N. Chumachenko, Ph.D., Saratov State University (Saratov, Russia)

EDITORIAL BOARD

V. M. Anikin, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

B. P. Bezruchko, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

S. Boccaletti, Ph.D., Institute for Complex Systems of the NRC (Florence, Italy)

A. M. Bykov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Ioffe Institute (Saint-Petersburg, Russia)

V. A. Vakorin, Ph.D., Simon Fraser University (Vancouver, Canada)

S. V. Gonchenko, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

N. S. Ginzburg, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Dmitriev, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

S. A. Kashchenko, Ph.D., Professor, P. G. Demidov Yaroslavl State University (Yaroslavl, Russia)

A. V. Kraskov, Ph.D., Newcastle University (Newcastle, UK)

N. V. Kuznetsov, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saint-Petersburg University (Saint-Petersburg, Russia)

G. van Luijelaar, Ph.D., Professor, Radboud University Nijmegen (Nijmegen, The Netherlands)

A. Lüttjohann, Ph.D., Westfälische Wilhelms-Universität (Münster, Germany)

G. G. Malinetskii, Ph.D., Professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS (Moscow, Russia)

V. V. Matrosov, Ph.D., Professor, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russia)

I. I. Mokhov, Member of the RAS, Ph.D., Professor, A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the RAS (Moscow, Russia)

A. B. Neiman, Ph.D., Professor, Ohio University (Ohio, USA)

V. I. Nekorkin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

A. S. Pikovskiy, Dr. rer. Nat. habil., Professor, University of Potsdam (Potsdam, Germany)

A. N. Pisarchik, Ph.D., Professor, Universidad Politecnica de Madrid (Madrid, Spain)

A. V. Porubov, Ph.D., Professor, Institute of Problems of Mechanical Engineering of the RAS (Saint-Petersburg, Russia)

V. V. Tuchin, Corresponding Member of the RAS, Ph.D., Professor, Saratov State University (Saratov, Russia)

A. M. Feigin, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

V. A. Tsarev, Ph.D., Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Saratov, Russia)

V. A. Cherepenin, Member of the RAS, Ph.D., Professor, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS (Moscow, Russia)

M. V. Shitikova, Ph.D., Professor, Voronezh State Technical University (Voronezh, Russia)

V. G. Yakhno, Ph.D., Professor, Institute of Applied Physics of the RAS (Nizhny Novgorod, Russia)

ISSN 0869-6632



9 770869 663203 >