



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья
УДК 004.032.26, 530.152.2

DOI: 10.18500/0869-6632-003166
EDN: QXCLTF

Рекуррентная нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо: необходимые для обучения характеристики

Н. И. Семенова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: semenovani@sgu.ru

Поступила в редакцию 25.10.2024, принята к публикации 19.02.2025,
опубликована онлайн 7.03.2025, опубликована 31.07.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — установить возможность и особенности обучения рекуррентной нейронной сети, состоящей из систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью, для предсказания импульсного (спайкового) сигнала. **Методы.** Рассматриваемая сеть состояла из $N = 60$ систем ФитцХью–Нагумо с разным временем запаздывания. В процессе обучения решалась задача, какой именно нейрон должен быть активирован и с какой силой запаздывающей обратной связи. Обучение сети проводилось при помощи градиентного спуска с разных начальных условий. В процессе исследований было обнаружено, что использование стандартных для обучения рекуррентных сетей характеристик, таких как среднеквадратическая ошибка или средняя абсолютная ошибка, не применимо в рамках данной задачи, поэтому был предложен альтернативный метод вычисления функции потерь. **Результаты.** Новая предложенная комбинированная функция потерь представляет собой сумму среднеквадратической ошибки и ошибки межспайкового интервала и поэтому обладает следующими преимуществами: 1 — учитывает периодичность спайков и межспайковые интервалы; 2 — адекватно реагирует на отсутствие выходного сигнала сети; 3 — наряду с импульсной динамикой учитывает и колебания небольшой амплитуды, что позволяет предсказывать сложные квазипериодические сигналы. Было показано, что градиентный спуск может быть использован для поставленной задачи, но из-за нелинейности функции потерь необходимо использовать несколько начальных условий. Чем больше начальных условий, тем точнее результат. **Заключение.** Была успешно решена задача предсказания импульсного (спайкового) сигнала при помощи самозамкнутой рекуррентной нейронной сети, состоящей из систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью. Наглядно было показано, какие особенности при этом должна учитывать функция потерь и каким образом должен быть реализован градиентный спуск.

Ключевые слова: нейронные сети, рекуррентные нейронные сети, система ФитцХью–Нагумо, запаздывающая обратная связь.

Благодарности. Работа была поддержанна стипендией Президента РФ СП-749.2022.5.

Для цитирования: Семенова Н. И. Рекуррентная нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо: необходимые для обучения характеристики // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 590–604. DOI: 10.18500/0869-6632-003166. EDN: QXCLTF

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems: characteristics required for training

N. I. Semenova

Saratov State University, Russia

E-mail: semenovani@info.sgu.ru

Received 25.10.2024, accepted 19.02.2025,
available online 7.03.2025, published 31.07.2025

Abstract. The purpose of this study is to determine the feasibility and features of training a recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems with delayed feedback to predict an impulse (spike signal). **Methods.** The network under consideration consisted of $N = 60$ FitzHugh–Nagumo systems with different lag times. During training, the problem of which neuron should be activated and with what strength of lagged feedback was solved. The network was trained using gradient descent from different initial conditions. In the process of research, it was found that the use of standard recurrent network training characteristics such as mean squared error or mean absolute error was not applicable to this task, so an alternative method for computing the loss function was proposed. **Results.** The proposed combined loss function is the sum of MSE error and interspike interval error, and therefore has the following advantages: 1 — includes the information about spike periodicity and interspike intervals, 2 — responds adequately to the absence of a network output signal, 3 — takes into account small amplitude fluctuations in addition to impulse dynamics, which allows predicting complex quasi-periodic signals. It has been shown that gradient descent can be used for the problem, but several initial conditions must be used because of the nonlinearity of the loss function. The more initial conditions, the more accurate the result. **Conclusion.** The problem of predicting a pulse (spike) signal using a self-closed recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems with delayed feedback has been successfully solved. It was clearly shown what features should be taken into account during loss function calculation and how the gradient descent should be realized.

Keywords: neural networks, recurrent neural networks, FitzHugh–Nagumo system, time-delayed feedback.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian President scholarship SP-749.2022.5.

For citation: Semenova NI. Recurrent neural network consisting of FitzHugh–Nagumo systems: characteristics required for training. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4):590–604. DOI: 10.18500/0869-6632-003166

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

За последние годы искусственные нейронные сети (ИНС) всё больше и больше внедряются как в нашу повседневную жизнь, так и в различные области науки, промышленности, медицины и т. д. Появление всё более сложных задач требует создания новых топологий сетей, оптимизации процесса обучения нейронных сетей, применения особых функций активации и внесения других изменений. Более глубокое понимание работы биологических нейронных сетей привело к появлению принципиально новых типов ИНС [1], а также к появлению различной сложности глубоких нейронных сетей (например, VGGNet, ResNet, GPipe, BERT, GPT-3).

В настоящее время обучение одной высокопроизводительной модели требует большого количества аппаратных и энергетических ресурсов, что приводит к увеличению углеродного следа [2]. В качестве отдельного направления исследований можно выделить направление аппаратных (аналоговых) нейронных сетей [3, 4]. В зарубежной литературе можно встретить названия “analog neural network” и “hardware neural network”. Это направление подразумевает создание нейронных сетей аппаратно, когда сами нейроны сети и связь между ними реализованы на физическом уровне, что позволяет получить существенный прирост в скорости и энергоэффективности [5, 6].

Наибольшую эффективность на данный момент показывают аппаратные ИНС, основанные на работе лазеров [7, 8], мемристоров [5, 9], спин-трансферных осцилляторов [10], фотоэлектронных чипов [6] и т. д.

Хотя структура ИНС изначально была построена на упрощенном понимании работы мозга, ИНС принципиально отличаются по структуре, нейронным вычислениям и правилам обучения по сравнению с биологической нейронной сетью. Это наблюдение привело к появлению спайковых нейронных сетей (СНС), которые часто называют третьим поколением нейронных сетей, обещающим стать прорывом в устраниении узких мест обычных ИНС. Спайковые нейронные сети (СНС) представляют собой особый класс ИНС, где нейронные модели взаимодействуют посредством последовательностей спайков разной длительности и количества [11, 12]. С точки зрения энергопотребления использование СНС на нейроморфном оборудовании, таком как TrueNorth [13], Loihi [14], SpiNNaker [15], NeuroGrid [2] и т. д., является многообещающим подходом [1]. В то же время СНС могут кодировать временную информацию в своих сигналах и поэтому также нуждаются в других и биологически более правдоподобных правилах при обучении и использовании [12, 16].

Несмотря на значительные достижения, производительность СНС на эталонных наборах данных, таких как MNIST [17], CIFAR-10 [18] или Fashion-MNIST [19], часто ниже, чем у обычных ИНС [1, 20]. Однако этот разрыв в некоторых задачах компенсируется быстротой и энергоэффективностью [16, 20, 21]. Тем не менее СНС все еще довольно трудно обучать, в основном из-за их сложной спайковой динамики нейронов и недифференцируемости их функций активации. Частично это можно объяснить тем фактом, что изображения в этих наборах данных были получены с помощью традиционных датчиков, а не событийных камер. Однако у СНС есть и другие существенные недостатки [20]. На данный момент для реализации полного потенциала СНС необходимо решить несколько принципиально важных задач [1]:

- Обучение. Существует два основных подхода к обучению СНС: (i) обучение СНС непосредственно на основе градиентного спуска или неконтролируемое обучение с STDP (spike-timing-dependent plasticity); (ii) преобразование предварительно обученной ИНС в модель СНС. Первый подход имеет проблему при вычислении градиента из-за недифференцируемого спайкового сигнала. Кроме того, СНС, обученная градиентным спуском, ограничена мелкими архитектурами и обеспечивает низкую производительность на больших наборах данных, таких как ImageNet. Второй подход увеличивает вычислительную сложность из-за большого количества временных шагов, хотя эти СНС достигают сопоставимой с ИНС точности из-за сходства между СНС и рекуррентными нейронными сетями и обучаются при помощи обратного распространения ошибки во времени (ВРТТ) [1].
- Архитектура СНС. В то время как большинство существующих работ по СНС были сосредоточены на проблеме классификации изображений и использовали доступные архитектуры ИНС, такие как VGG или Resnet, разработка принципиально новой структуры специально для СНС является важной и одной из первостепенных задач [1].

Таким образом, часто в СНС в качестве основы используется архитектура глубоких сетей, которые уже показали свою пригодность для решения отдельно взятых задач классификации, а затем эта структура адаптируется под введение нейронов со спайковыми свойствами [16]. При этом важным аспектом СНС является временная динамика, которая больше характерна для рекуррентных нейронных сетей. Поэтому в настоящей работе предлагается принципиально другой подход, когда в качестве нейронов будут взяты модели биологических нейронов, и для такой сети будет показана возможность обучения и необходимые для этого характеристики.

В данной работе в качестве составляющих ИНС будут использоваться модели биологических нейронов на примере системы ФитцХью–Нагумо [22, 23]. Это покажет применимость

различных методов обучения ИНС, что позволит приблизить систему к реальной биологической системе, оценить особенности внедрения моделей биологических нейронов в искусственную сеть и в дальнейшем доработать алгоритмы обучения. В нашей предыдущей работе [24] мы показали, каким образом системы ФитцХью–Нагумо могут быть внедрены в глубокую сеть и использованы для распознавания базы данных рукописных цифр MNIST [25]. Однако в этой работе не учитывались особенности временной динамики. В данной статье рассматривается другая задача, когда сама задача обучения и ее решение основывается на особенностях спайковой динамики парциальных систем.

Для обучения будут использованы импульсные сигналы, состоящие из последовательности импульсов (спайков), сгенерированные одной системой ФитцХью–Нагумо при определенных параметрах. Нейронная сеть, состоящая из систем ФитцХью–Нагумо, будет обучаться для дальнейшего предсказания этого сигнала. Таким образом, решается одновременно задача обучения и рекуррентной сети, и спайковой нейронной сети, в которой присутствует память о предыдущих состояниях. Для систем ФитцХью–Нагумо в роли «памяти» будет выступать запаздывающая обратная связь. В сети будет использоваться несколько систем ФитцХью–Нагумо с разным временем запаздывания, а то, какой именно нейрон и с какой силой запаздывающей обратной связи необходимо активировать, будет решаться в процессе обучения сети.

Выбор систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью вызван тем, что при определенных параметрах связи она может демонстрировать периодическую, квазипериодическую и даже хаотическую динамику [26]. Таким образом, это позволяет расширить возможности генерации выходного сигнала сети. В данной работе для предсказания было использовано несколько типов периодического импульсного сигнала. В дальнейшем планируется расширить исследования и рассмотреть, как сеть справится с более сложными сигналами.

Процесс обучения рекуррентных нейронных сетей, как правило, заключается в подборе матриц связи между нейронами таким образом, чтобы уменьшить ошибку (функцию потерь) между предсказанным сигналом и заранее известным. В качестве такой ошибки часто используется среднеквадратическая ошибка (MSE) или средняя абсолютная ошибка (MAPE). Однако в данной работе было показано, что эти величины не подходят для поставленной задачи, так как не учитывают импульсный характер сигналов. Исходя из этого, была предложена комбинированная функция потерь, которая включает в себя MSE и ошибку межспайкового интервала.

Для обучения нейронной сети, основываясь на предложенной комбинированной функции потерь, был использован градиентный спуск. Было показано, что предложенный метод хорошо работает и позволяет предсказывать сложные квазипериодические сигналы.

1. Исследуемая система

Топология исследуемой системы схематично похожа на структуру рекуррентной сети с резервуаром (эхо-сети). Основным компонентом сети является так называемый резервуар, состоящий из моделей биологических нейронов, которые задаются при помощи моделей ФитцХью–Нагумо (ФХН) с запаздывающей обратной связью. Все параметры систем в резервуаре идентичные, за исключением времени запаздывания. Рассматриваемая система схематично приведена на рис. 1.

В данной работе сеть будет обучаться для решения задачи прогнозирования входного импульсного (спайкового) сигнала. Входной сигнал, подаваемый в сеть, в первую очередь используется для задания начального набора данных для запаздывающей обратной связи. После «запоминания» всех необходимых данных из входного сигнала сеть становится самозамкнутой,

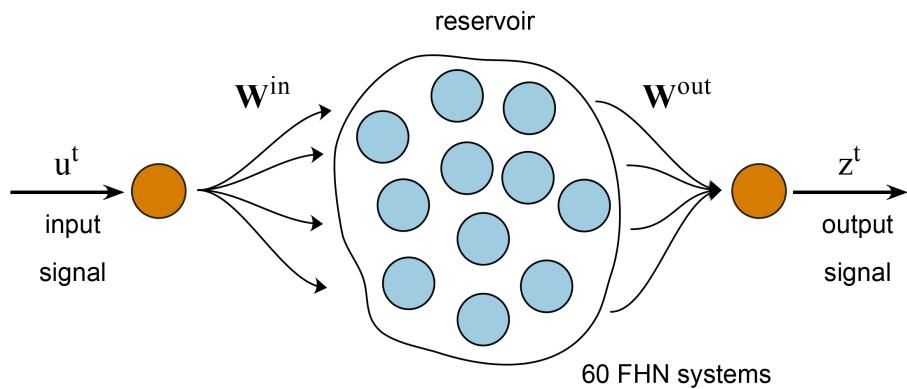


Рис. 1. Схематичное представление исследуемой системы (цвет онлайн)

Fig. 1. Schematic representation of considered system (color online)

и входной сигнал нужен только для сверки с выходным (предсказанным) сигналом сети в процессе обучения. В случае самозамкнутой системы в качестве входного сигнала u^t в момент времени t используется выходной сигнал этой же сети в предыдущий момент времени z^{t-1} .

Нейроны в резервуаре. Каждая модель ФХН в резервуаре задается при помощи следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y + \gamma(x_\tau - x), \\ \dot{y} &= x + a, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — это быстро (activator) и медленно меняющиеся (inhibitor) переменные системы, задающие состояние системы в момент времени t , параметры ε и a — это параметры отдельно взятых систем ФХН, значения ε влияют на временной масштаб, а параметр a является управляющим параметром, при этом значения $|a| < 1$ соответствуют колебательному режиму функционирования системы со спайковой динамикой, а значения $|a| > 1$ соответствуют возбудимому режиму, при котором в системе имеется устойчивое состояние равновесия типа фокус, а спайковая динамика может возникнуть только вследствие внешнего воздействия, например, при когерентном резонансе [27]. В данной работе будет рассмотрен возбудимый режим, и значения параметров $a = 1.01$ и $\varepsilon = 0.05$ не будут меняться на протяжении всей статьи.

Основным принципиально важным компонентом системы (1) является запаздывающая обратная связь, реализованная за счет последнего слагаемого первого уравнения: $\gamma(x_\tau - x)$. Здесь γ — это сила обратной связи, $x_\tau = x(t - \tau)$ определяет значение переменной x в момент времени $(t - \tau)$, а параметр τ является временем запаздывания. Подобный метод задания запаздывающей обратной связи является довольно стандартным для рассматриваемой модели. Он был изначально предложен К. Пирагасом в 1992 году [28] и часто используется для моделирования сетей с запаздыванием [29–31].

В нашей предыдущей работе [26] была рассмотрена одна система ФХН (1) при различных параметрах положительной и отрицательной обратной связи. Было показано, что запаздывающая обратная связь в возбудимом режиме может приводить к появлению колебаний при определенных значениях силы обратной связи γ и времени запаздывания τ . При определенных значениях параметров одна система ФХН с запаздывающей обратной связью может демонстрировать периодическую, квазипериодическую и даже хаотическую динамику. С точки зрения именно спайковой динамики временем межспайковых интервалов можно управлять при помощи времени

запаздывания и силы обратной связи. Исходя из результатов, полученных в работе [26], можно сделать вывод, что выбор времени запаздывания $\tau \in (0, 6]$ и силы обратной связи $\gamma \in [-0.1, 0.1]$ позволяет получить большое количество разнообразных режимов. По этой причине в настоящей работе внутри резервуара находится $N = 60$ нейронов ФХН с разными временами запаздывания из диапазона $\tau_j \in [0.1, 6]$ с шагом $\Delta\tau = 0.1$. Таким образом, в резервуаре все системы ФХН задаются при помощи одинаковых параметров, за исключением времени запаздывания τ . Входной сигнал u^t используется для задания начальных последовательностей значений x_τ для запаздывающей обратной связи.

Обучение сети. Основной целью обучения сети является установление того, нейроны с каким временем запаздывания важны для генерации выходного сигнала и какая сила обратной связи должна быть у них. Обе задачи можно решить при помощи матриц связи \mathbf{W}^{in} и \mathbf{W}^{out} , задающих связь между входным искусственным нейроном (входным сигналом) и выходным искусственным нейроном (выходным сигналом) в текущий момент времени t . Эти нейроны показаны оранжевым цветом на рис. 1. Так как нейронов в резервуаре $N = 60$, то и размер обеих матриц составляет $(1 \times N)$. С точки зрения обучения задание матриц можно производить двумя способами, и в случае самозамкнутой системы эти способы с математической точки зрения приводят к одному и тому же результату.

- Входная матрица задается так, чтобы все значения матрицы были равны единице $W_i^{\text{in}} = 1$, а значения матрицы \mathbf{W}^{out} задаются равными нулю для нейронов, которые не важны для формирования выходного сигнала, а иначе — равными γ , задавая при этом величину силы обратной связи для выходного сигнала сети, который в следующий момент времени используется как входной. Если в выходной матрице связи все элементы кроме j -го равны нулю, тогда можно понять, нейрон с каким временем запаздывания важен для генерации выходного сигнала.
- Входная матрица связи задается как $\mathbf{W}^{\text{in}} = \gamma \cdot \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — матрица, заполненная единицами, а конкретные значения γ подбираются в процессе обучения, но одинаковы для всех W_i^{in} . Выходная матрица связи \mathbf{W}^{out} является бинарной матрицей, в которой влияние ненужных нейронов резервуара соответствует нулевым значениям, а те нейроны, которые важны для формирования выходного сигнала, соответствуют единичным значениям в выходной матрице. Таким образом, если в выходной матрице только один j -й элемент равен единице, то можно установить, нейрону с каким временем запаздывания он соответствует.

В данной работе мы будем использовать второй метод. Тогда выходной сигнал сети задается как

$$z^t = z(t) = \sum_{j=1}^N W_j^{\text{out}} x_j(t). \quad (2)$$

Таким образом, целью обучения является: а) подбор значения γ , отвечающего за формирование матрицы \mathbf{W}^{in} ; б) подбор матрицы \mathbf{W}^{out} таким образом, чтобы один ее элемент был равен 1, а остальные — нулю.

Как видно из рис. 1, в системе присутствует входной сигнал u^t . Этот сигнал используется сначала для задания начальных значений запаздывающего сигнала для всех систем ФХН, а затем для создания самозамкнутой сети. В первом случае входной сигнал используется для задания массива начальных значений x_τ . Для каждой j -й системы ФХН длина такого массива будет разной, так как у каждой системы свое время запаздывания τ_j . После того, как все данные для запаздывающей связи получены, система становится самозамкнутой и отключается от обучающего входного сигнала. Далее в процессе обучения он будет использоваться только для сверки с выходным сигналом сети z^t и подбора матриц связи. В самозамкнутой системе входной сигнал

сети u^t продолжает заноситься в массивы запаздывающего сигнала, но это уже не обучающий сигнал, а выходной сигнал этой же сети в предыдущий момент времени z^{t-1} . В процессе обучения подбирается значение силы запаздывающей обратной связи γ , поэтому в самозамкнутой системе входной сигнал хоть и не входит в уравнение (1) в явном виде, но имеет место следующее равенство:

$$\gamma x_{\tau,j} = W_j^{\text{in}} \cdot u(t - \tau) = W_j^{\text{in}} \cdot u^{t-\tau}. \quad (3)$$

В данной работе нейроны внутри самого резервуара не влияют друг на друга, однако входной сигнал важен для каждого из нейронов. В дальнейших работах планируется добавить и связь внутри резервуара.

2. Функция потерь и необходимые характеристики

2.1. Среднеквадратическая ошибка (MSE). Наиболее часто используемая характеристика, необходимая для оценки расхождения предсказанного и целевого сигнала, — это среднеквадратичная ошибка (mean squared error, MSE), которая вычисляется следующим образом:

$$\text{MSE}(u, z) = \sum_{t=1}^T (z^t - u^{t+1})^2 / T, \quad (4)$$

где z^t — предсказанный сигнал в момент времени t , то есть выходной сигнал сети в момент времени t , а u^{t+1} — обучающий (целевой) сигнал сети в следующий момент времени. T — общее число точек в реализации. Из-за того, что сеть обучается для предсказания сигнала, необходимо сравнивать выходной сигнал сети z^t с входным (целевым) u^{t+1} . В процессе обучения для сравнения и используется целевой сигнал, а не выход самозамкнутой сети.

На рис. 2, a приведен пример входного сигнала сети, который задавался как реализация одной системы ФХН с параметрами $\tau = 2$, $\gamma = 0.03$.

Для понимания расхождения с искомой реализацией при изменении времени запаздывания и силы обратной связи на рис. 2, b приведены значения MSE, полученные при сравнении целевого сигнала с известными параметрами и выходного сигнала сети в зависимости от того, нейрон с каким временем запаздывания выбирался для сравнения и какая сила обратной связи γ должна использоваться при задании входной матрицы \mathbf{W}^{in} . По горизонтальной оси рис. 2, b отложено время запаздывания τ , однако ему в соответствие можно поставить номер нейрона из резервуара $j = \tau / \Delta\tau$. Таким образом, для идеального попадания в искомые параметры получается, что в выходной матрице \mathbf{W}^{out} нулю должны быть равны все элементы, кроме $j = 2/0.1 = 20$, который равен 1. Входная матрица \mathbf{W}^{in} должна быть заполнена значениями $\gamma = 0.03$.

На рис. 2, b зеленым кругом выделены правильные значения τ и γ , которые использовались для получения целевого сигнала. Исходя из цветовой гаммы, видно, что MSE нелинейно изменяется при вариации параметров γ и τ . Большая темно-фиолетовая область с довольно небольшой ошибкой соответствует отсутствию колебаний в выходном сигнале, а значение MSE, близкое к 0 (черный прямоугольник), можно получить, только если попасть в параметры, точно соответствующие входному сигналу. Спайковый выходной сигнал можно получить и в голубых областях MSE, однако из-за сбоя фазы характеристика MSE в этом случае не сработает корректно, даже если разница в периодах минимальна. Таким образом, использование характеристики MSE в чистом виде не применимо для имеющейся задачи, так как в общем случае для неизвестного сигнала нет никаких гарантий, что этот сигнал можно будет задать при помощи выбранного диапазона времени запаздывания в резервуаре, а поиск похожего сигнала при помощи выбранной характеристики невозможен. Еще одним недостатком этой величины является то, что при отсутствии

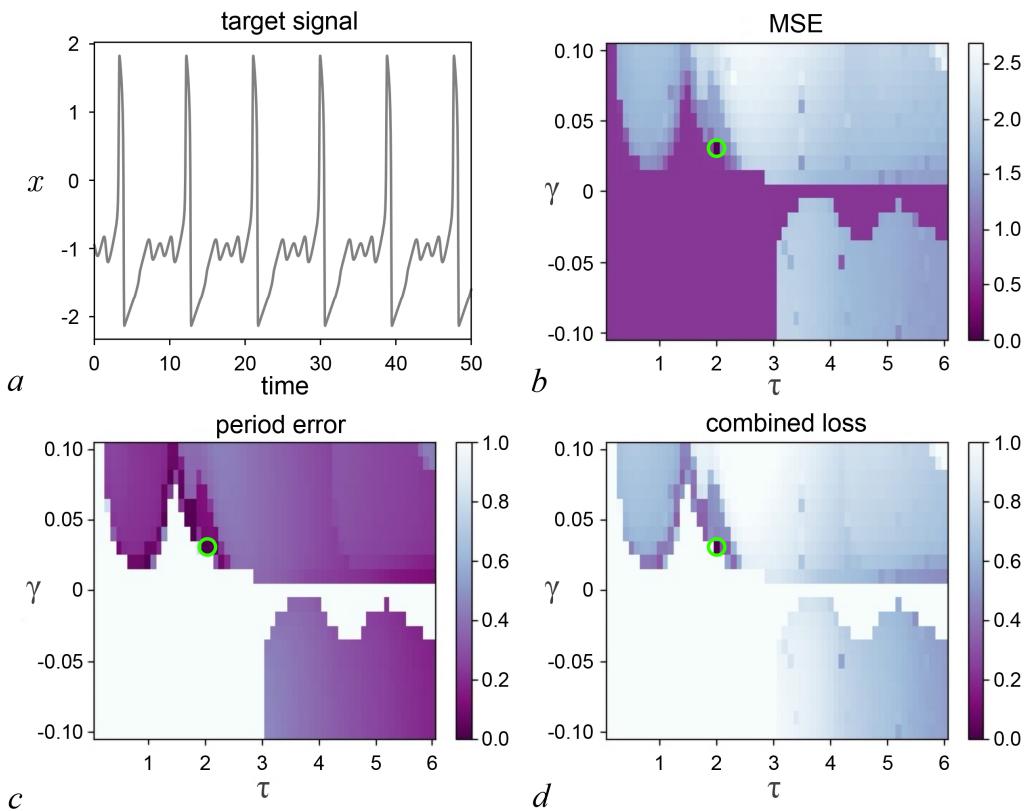


Рис. 2. Входной сигнал, который необходимо предсказать (a), полученный при параметрах $\tau = 2$, $\gamma = 0.03$. Для этого сигнала были вычислены среднеквадратичная ошибка (b), ошибка периода (c) и комбинированная функция потерь (d) при вариации матриц связи, которые соответствуют предсказанным сигналам с некоторыми параметрами τ и γ . Для удобства оценки и сравнения эти характеристики представлены на плоскостях этих параметров (цвет онлайн)

Fig. 2. The input signal to be predicted (a), obtained with parameters $\tau = 2$, $\gamma = 0.03$. For this signal, the mean square error (b), period error (c), and combined loss function (d) were calculated with variation of the coupling matrices that correspond to the predicted signals with some parameters τ and γ . For ease of evaluation and comparison, these characteristics are presented on the planes of these parameters (color online)

колебаний (нижний левый угол на рис. 2, b) эта характеристика не равна нулю. При использовании автоматических методик поиска минимальных значений в большинстве случаев минимум MSE при зафиксированном τ будет приходиться именно на области с полным отсутствием колебаний.

2.2. Оценка межспайковых интервалов. На рис. 2, a приведен сигнал, в котором, кроме спайковой составляющей, присутствуют еще квазипериодические колебания около состояния равновесия. Однако иногда принципиально важна только спайковая составляющая в сигнале, особенно межспайковые интервалы. Как было показано в работе [26], межспайковым интервалом можно управлять при помощи времени запаздывания и силы запаздывающей связи.

Средний межспайковый интервал вычислялся следующим образом. Исходя из формы сигнала на рис. 2, индикатором совершения спайка можно считать момент, когда последовательность значений сигнала x перестает быть возрастающей и становится убывающей, при этом, чтобы не учитывать небольшие колебания около состояния равновесия, накладывается дополнительное условие, что эти значения должны быть строго положительными. Далее между каждыми такими событиями вычисляется среднее время, которое в дальнейшем будем называть средним межспайковым интервалом. Для реализации, приведенной на рис. 2, a, межспайковый интервал составил приблизительно 8.88.

На рис. 2, с приведена ошибка межспайковых интервалов для целевого сигнала u и выходного сигнала сети z , рассчитанная следующим образом:

$$\xi(u, z) = \frac{|P_z - P_u|}{P_z + P_u}, \quad (5)$$

где P_z — средний межспайковый интервал выходного сигнала сети, P_u — аналогичная величина для целевого сигнала. Межспайковые интервалы вычислялись, начиная с момента времени 100, чтобы исключить период установления колебаний для выходного сигнала сети. Расчет величины (5) аналогичен вычислению ошибки SMAPE. Выбор этой величины обусловлен тем, что сама эта величина изменяется в пределе от 0 до 1, а значению 1 будет соответствовать или полное отсутствие спайков в выходном сигнале сети, или если межспайковые интервалы во много раз отличаются. Значения, близкие к 0, будут отвечать наилучшему соответствию между P_u и P_z . Предполагается, что целевой сигнал u уже содержит некоторую спайковую динамику, поэтому $P_u \neq 0$. Однако существует некоторая область параметров γ и τ (левая нижняя четверть на рис. 2, b), для которых наблюдается полное отсутствие колебаний. Если бы ошибка вычислялась стандартным методом с использованием только P_u в знаменателе, то ошибка была бы равна 1. Отличие значений P_u и P_z в несколько раз тоже бы выглядело нерепрезентативно, так как тогда ошибка не имеет верхнего и нижнего предела. Использование в знаменателе значения P_z решило бы последнюю проблему, но тогда отсутствие спайков в выходном сигнале привело бы к наличию 0 в знаменателе.

На рис. 2, с максимальной ошибке соответствует белый цвет. Из рисунка видно, что в рассматриваемом диапазоне значений параметров есть несколько значений параметров с минимальной ошибкой межспайкового интервала. Сравнивая рис. 2, b, c, видно, что эта характеристика лучше подходит для оценки поведения системы, хотя и учитывает только спайковые характеристики сигналов.

2.3. Комбинированная функция потерь. Обычно целью обучения нейронных сетей является подбор матриц связи для уменьшения разницы (функции ошибки) между целевым сигналом и выходным сигналом сети. Сам поиск оптимальных матриц связи, основываясь на имеющейся функции потерь, может быть реализован разными методами. Наиболее часто используемым является градиентный спуск.

В качестве функции ошибки в задачах предсказания часто используется среднеквадратичная ошибка или средняя абсолютная ошибка. Однако, как было показано выше, эта ошибка в чистом виде неприменима для имеющейся задачи. Поэтому для вычисления функции потерь будет использована следующая комбинированная величина, которая учитывает как межспайковые интервалы, так и общую ошибку:

$$L(u, z) = \frac{\text{MSE}(u, z)}{\max(u) - \min(u)} + \xi(u, z). \quad (6)$$

Наличие знаменателя в первом слагаемом обусловлено необходимостью нормировки значений MSE, которые не имеют верхнего предела. При вариации параметров τ и γ для одной изолированной системы ФХН общий разброс значений x и y остается практически неизменным. Поэтому нормировки на разброс значений в целевом сигнале будет достаточно для сохранения первого слагаемого в пределах от 0 до 1. Если в сигнале сети отсутствуют колебания, тогда первое слагаемое будет равно 0, а второе слагаемое будет равно 1, поэтому комбинированная функция потерь будет равна 1. Если же целевой сигнал и сигнал сети максимально близки, тогда оба слагаемых, а значит, и функция потерь, будут стремиться к 0.

Комбинированная функция потерь приведена на рис. 2, d. Из графиков видно, что новая функция ошибок все еще не монотонная, но при этом появилось больше вариантов для поиска похожих режимов функционирования, что позволяет находить похожие режимы, даже если в резервуаре отсутствует необходимое время запаздывания.

3. Обучение сети при помощи градиентного спуска

Градиентный спуск — это самый распространенный метод обучения нейронных сетей. Его смысл заключается в автоматическом поиске минимального значения функции потерь и значений матриц связи, которые ему соответствуют [32]. Смысл обучения нейронной сети в данной работе заключается в предсказании входного спайкового сигнала и автоматическом поиске τ и γ , которые ему могут соответствовать. Эта задача сопряжена с поиском минимального значения комбинированной функции потерь (6) и того, для каких именно нейронов из резервуара, при какой силе обратной связи γ этот минимум достигается.

Смысл градиентного спуска заключается в постепенном спуске к минимальному значению функции потерь путем изменения матриц связи с некоторым шагом. В зависимости от конкретного метода этот шаг может или быть постоянным, или изменяться в зависимости от величины производной функции потерь. Особенность градиентного спуска заключается в том, что в случае невыпуклой функции потерь конечный результат будет сильно зависеть от начальных условий, так как градиентный спуск может «попасть» в локальный минимум и так и не добраться до глобального минимума. По этой причине есть смысл запускать градиентный спуск с нескольких начальных условий.

В рамках решаемой задачи применение градиентного спуска заключалось в следующем. В матрице \mathbf{W}^{out} поочередно изменялось с 0 на 1 одно из значений. Далее для каждой такой конфигурации изменялись значения в матрице \mathbf{W}^{in} . Градиентный спуск применялся для комбинированной функции потерь, вычисленной между целевым сигналом и выходным сигналом сети. Начальные условия для матрицы задавались как $\mathbf{W}^{\text{in}} = \gamma_0 \mathbf{I}$, где γ_0 — некоторая константа, некоторые значения которой будут рассмотрены позже. После выполнения градиентного спуска можно было определить, при каких значениях \mathbf{W}^{in} может быть достигнута минимальная комбинированная функция потерь. После этого в матрице \mathbf{W}^{out} выбирался другой нейрон, и процедура повторялась. После перебора всех N нейронов выбиралась та пара матриц \mathbf{W}^{in} и \mathbf{W}^{out} , которой соответствовало минимальное значение комбинированной функции потерь.

На рис. 3, a приведены графики для входного сигнала, использовавшегося в предыдущих разделах, полученного при параметрах $\tau = 2$ и $\gamma = 0.03$. Для этого сигнала были получены значения комбинированной функции потерь в зависимости от матриц связи, которые соответствовали некоторым значениям τ и γ . Для удобства значения функции потерь приведены в зависимости от подобранных значений τ и γ на первом графике рис. 3, a. На этом графике оранжевыми точками показаны минимальные значения, найденные при помощи градиентного спуска, стартующего с четырех начальных условий $\gamma_0 = \pm 0.1, \pm 1$ с постоянным шагом 0.01. Процедура градиентного спуска была проведена для каждого из N резервуарных нейронов, то есть для каждого j -го нейрона, который соответствует своему времени запаздывания $\tau = j \cdot \Delta\tau$. Поэтому на рис. 3, a N оранжевых точек. Далее из всех N найденных минимальных значений функции потерь можно найти самое минимальное, и это будет соответствовать наиболее похожему на входной сигнал выходному сигналу сети. Для $\tau = 2$ и $\gamma = 0.03$ при помощи градиентного спуска с четырех начальных условий удалось идеально попасть в искомые параметры. На втором графике рис. 3, a серым показан целевой сигнал, а оранжевым — предсказанный с указанием подобранных значений параметров τ и γ , которые ему соответствуют.

Из-за нелинейности функции потерь и наличия областей с одинаковыми значениями комбинированной функции потерь в некоторых случаях необходимо увеличить количество начальных условий для градиентного спуска. Для этого были рассмотрены восемь начальных условий $\gamma_0 = \pm 0.1, \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 1$. Данные, полученные в этом случае, показаны в виде зеленых точек на левом графике рис. 3, *a* и зеленой прерывистой линии на правом графике рис. 3, *a*. Так как для выбранных параметров старта с четырех начальных условий уже было достаточно, то ожидаемо

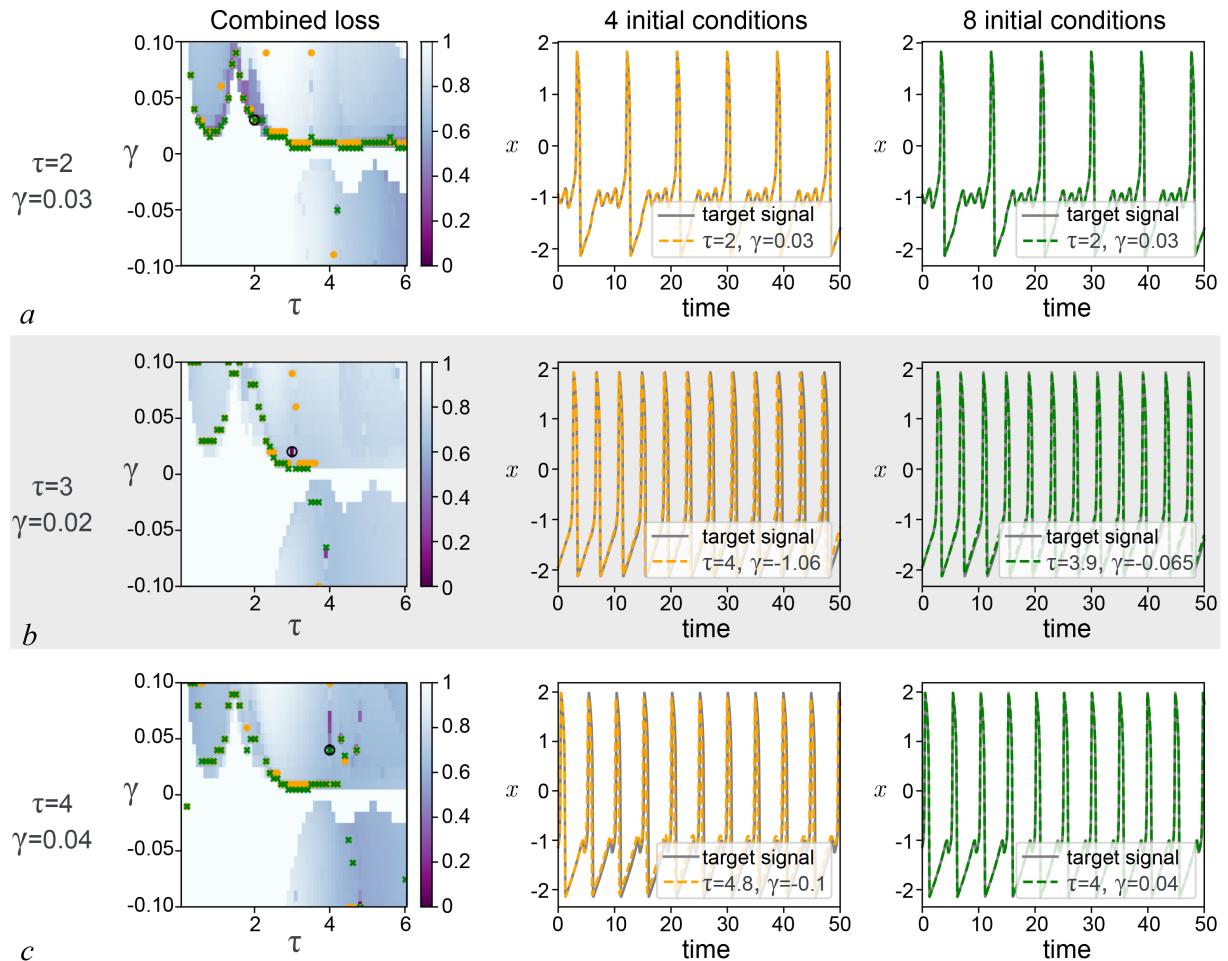


Рис. 3. Использование градиентного спуска для трех целевых сигналов, полученных при параметрах: *a* – $\tau = 2, \gamma = 0.03$, *b* – $\tau = 3, \gamma = 0.02$, *c* – $\tau = 4, \gamma = 0.04$. Графики слева демонстрируют значения комбинированной функции потерь на плоскости соответствующих параметров τ и γ . Сами значения были получены перебором с шагом 0.01. На этом же рисунке оранжевыми и зелеными точками показаны результаты применения градиентного спуска с 4 и 8 начальных условий соответственно. Средние графики показывают искомый сигнал (серая линия) и предсказанный сигнал (оранжевая пунктирная линия), полученный при помощи градиентного спуска с 4 начальных условий, а в легендах указаны параметры τ и γ , восстановленные из матриц связи обученной нейронной сети. Правые графики получены аналогичным образом, но при помощи градиентного спуска с 8 начальных условий (цвет онлайн)

Fig. 3. The use of gradient descent for three input signals obtained with parameters: *a* – $\tau = 2, \gamma = 0.03$, *b* – $\tau = 3, \gamma = 0.02$, *c* – $\tau = 4, \gamma = 0.04$. The graphs on the left demonstrate the values of the combined loss function on the plane of the corresponding parameters τ and γ . The values themselves were obtained by enumeration with a step of 0.01. In the same figure, the orange and green dots show the results of applying gradient descent with 4 and 8 initial conditions, respectively. The middle graphs show the target signal (gray line) and the predicted signal (orange dotted line) obtained using gradient descent with 4 initial conditions, and the legends indicate the parameters τ and γ , reconstructed from the connection matrices of the trained neural network. The right graphs are obtained in a similar way, but using gradient descent from 8 initial conditions (color online)

для восьми начальных условий тоже удалось точно попасть в искомые параметры. Однако это работает не всегда. На других строках рис. 3, *b*, *c* приведены результаты для входного сигнала с другими параметрами. Из рисунка видно, что в некоторых случаях увеличение числа начальных условий приводит к значительному повышению точности. На левых графиках рис. 3 настоящее минимальное значение функции потерь отмечено черным кружком.

На рис. 3 были рассмотрены значения параметров, в которые теоретически можно попасть при помощи градиентного спуска с выбранным шагом. Для сохранения общности далее будут рассмотрены случаи $\tau = 3.05$ и $\tau = 4.05$, то есть такие времена запаздывания, которых точно не может быть в резервуаре. На рис. 4 приведены результаты применения обоих градиентных спусков в этом случае. Графики были получены аналогичным образом, что и для рис. 3. Из графиков видно, что глобальный минимум комбинированной функции потерь, отмеченный черным кружком на левых графиках, так и не был достигнут. Однако, судя по временным реализациям, подобранных в процессе градиентного спуска матриц связи и соответствующих им значений τ и γ было достаточно для задания похожих сигналов. Увеличение количества начальных условий приводит к значительному повышению точности в этом случае.

Одной из проблем применения градиентного спуска является наличие областей, где комбинированная функция потерь не меняется. При попадании в такую область алгоритм градиентного спуска останавливается, и дальнейший подбор значений становится невозможным без старта с других начальных условий. Поэтому здесь работает принцип: больше начальных условий — точнее результат. Еще одной проблемой является шаг градиентного спуска. В данном случае на рис. 3, 4 выбора шага 0.01 было достаточно для достижения необходимых минимумов, однако выбор слишком большого шага может привести к тому, что алгоритм так и не достигнет минимума, а слишком маленький шаг — к большому числу ненужных вычислений. В дальнейших работах планируется рассмотреть применимость других алгоритмов обучения, в частности, применение градиентного спуска с адаптивным шагом.

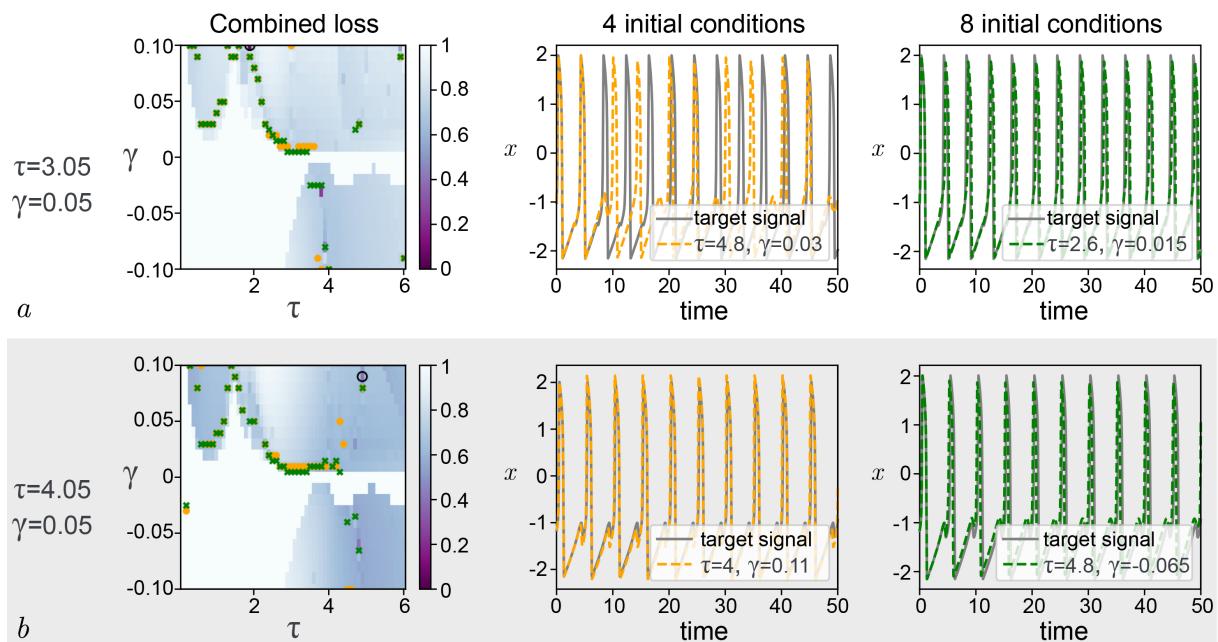


Рис. 4. Использование градиентного спуска для двух целевых сигналов, полученных при параметрах: *a* — $\tau = 3.05$, $\gamma = 0.05$, *b* — $\tau = 4.05$, $\gamma = 0.05$. Остальное построение и структура рисунка аналогично рис. 3 (цвет онлайн)

Fig. 4. The use of gradient descent for three input signals obtained with parameters: *a* — $\tau = 3.05$, $\gamma = 0.05$, *b* — $\tau = 4.05$, $\gamma = 0.05$. The rest of the construction and structure of the figure is similar to Fig. 3 (color online)

Заключение

В данной работе решалась задача предсказания сложного квазипериодического спайкового сигнала при помощи рекуррентной нейронной сети с резервуаром с моделями биологических нейронов на примере систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей обратной связью. Была предложена методика обучения, которая объединяет стандартные для обучения искусственных нейронных сетей методы и то, как это может быть адаптировано для систем ФитцХью–Нагумо. Общий смысл заключается в том, что в качестве нейронов резервуара использовались $N = 60$ систем ФитцХью–Нагумо с разным временем запаздывания τ_j . В процессе обучения подбирается то, какой из нейронов необходимо активировать и с какой силой обратной связи. В данной работе предлагается, каким образом эту информацию можно внедрить в стандартные для искусственных нейронных сетей матрицы связи \mathbf{W}^{in} и \mathbf{W}^{out} .

Для обучения сети использовалась комбинированная функция потерь, включающая в себя как ошибку межспайковых интервалов, так и общую ошибку MSE. Далее для полученной функции потерь был применен градиентный спуск, который позволил найти минимальные значения функции потерь, какие матрицы связи \mathbf{W}^{in} и \mathbf{W}^{out} им соответствуют, а из этого и оптимальное время запаздывания τ и силу обратной связи γ .

Предложенные методы были использованы для нескольких типов сложных спайковых сигналов. Были рассмотрены входные сигналы с заведомо известными параметрами τ и γ как для случаев, когда в резервуаре есть нейрон с идеально подходящим временем запаздывания (рис. 3), так и для случаев, когда подходящего времени запаздывания нет в резервуаре (рис. 4). В обоих случаях предложенная методика помогла найти наиболее похожие сигналы. В данной работе было показано, что градиентный спуск может быть успешно применен для поставленной задачи, однако из-за ощутимой нелинейности функции потерь необходимо использование нескольких начальных условий градиентного спуска. Чем больше начальных условий, тем выше точность. Улучшения методики обучения можно попытаться добиться при помощи использования стохастического градиентного спуска, градиентного спуска с адаптивным шагом или, возможно, при помощи других методик обучения сетей. Сравнение и применение этих методов будет целью исследования в следующих работах.

References

1. Yamazaki K, Vo-Ho V-K, Bulsara D, Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sci.* 2022;12(7):863. DOI: 10.3390/brainsci12070863.
2. Benjamin BV, Gao P, McQuinn E, Choudhary S, Chandrasekaran AR, Bussat JM, Alvarez-Icaza R, Arthur JV, Merolla PA, Boahen K. Neurogrid: A Mixed-Analog-Digital Multichip System for Large-Scale Neural Simulations. *Proceedings of the IEEE.* 2014;102(5):699–716. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2313565.
3. Schuman CD, Potok TE, Patton RM, Birdwell JD, Dean ME, Rose GS, Plank JS. A survey of neuromorphic computing and neural networks in hardware. *arXiv:1705.06963.* arXiv Preprint, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1705.06963.
4. Ghimire D, Kil D, Kim S. A survey on efficient convolutional neural networks and hardware acceleration. *Electronics.* 2022;11(6):945. DOI: 10.3390/electronics11060945.
5. Aguirre F, Sebastian A, Le Gallo M, Song W, Wang T, Yang JJ, Lu W, Chang M-F, Ielmini D, Yang Y, Mehonic A, Kenyon A, Villena MA, Roldán JB, Wu Y, Hsu H-H, Raghavan N, Suñé J, Miranda E, Eltawil A, Setti G, Smagulova K, Salama KN, Krestinskaya O, Yan X, Ang K-W, Jain S, Li S, Alharbi O, Pazos S, Lanza M. Hardware implementation of memristor-based artificial neural networks. *Nat. Commun.* 2024;15(1):1974. DOI: 10.1038/s41467-024-45670-9.
6. Chen Y, Nazhamaiti M, Xu H, Meng Y, Zhou T, Li G, Fan J, Wei Q, Wu J, Qiao F, Fang L,

- Dai Q. All-analog photoelectronic chip for high-speed vision tasks. *Nature*. 2023;623(7985):48–57. DOI: 10.1038/s41586-023-06558-8.
7. Brunner D, Soriano MC, Mirasso CR, Fischer I. Parallel photonic information processing at gigabyte per second data rates using transient states. *Nat. Commun.* 2013;4:1364. DOI: 10.1038/ncomms2368.
 8. McMahon PL. The physics of optical computing. *Nat. Rev. Phys.* 2023;5(12):717–734. DOI: 10.1038/s42254-023-00645-5.
 9. Tuma T, Pantazi A, Le Gallo M, Sebastian A, Eleftheriou E. Stochastic phase-change neurons. *Nature Nanotechnology*. 2016;11:693–699. DOI: 10.1038/nnano.2016.70.
 10. Torrejon J, Riou M, Araujo FA, Tsunegi S, Khalsa G, Querlioz D, Bortolotti P, Cros V, Yakushiji K, Fukushima A, Kubota H, Yuasa S, Stiles MD, Grollier J. Neuromorphic computing with nanoscale spintronic oscillators. *Nature*. 2017;547(7664):428–431. DOI: 10.1038/nature23011.
 11. Ponulak F, Kasinski A. Introduction to spiking neural networks: Information processing, learning and applications. *Acta Neurobiologiae Experimentalis*. 2011;71(4):409–433. DOI: 10.55782/ane-2011-1862.
 12. Ghosh-Dastidar S, Adeli H. Spiking neural networks. *International Journal of Neural Systems*. 2009;19(4):295–308. DOI: 10.1142/S0129065709002002.
 13. Merolla PA, Arthur JV, Alvarez-Icaza R, Cassidy AS, Sawada J, Akopyan F, Jackson BL, Imam N, Guo C, Nakamura Yu, Brezzo B, Vo I, Esser SK, Appuswamy R, Taba B, Amir A, Flickner MD, Risk WP, Manohar R, Modha DS. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. *Science*. 2014;345(6197):668–673. DOI: 10.1126/science.1254642.
 14. Davies M, Srinivasa N, Lin T-H, Chinya G, Cao Y, Choday SH, Dimou G, Joshi P, Imam J, Jain S, Liao Y, Lin C-K, Lines A, Liu R, Mathaiikutty D, McCoy S, Paul A, Tse J, Venkataraman G, Weng Y-H, Wild A, Yang Y, Wang H. Loihi: A Neuromorphic manycore processor with On-Chip Learning. *IEEE Micro*. 2018;38(1):82–99. DOI: 10.1109/MM.2018.112130359.
 15. Furber SB, Galluppi F, Temple S, Plana LA. The SpiNNaker Project. *Proceedings of the IEEE*. 2014;102(5):652–665. DOI: 10.1109/JPROC.2014.2304638.
 16. Tavanaei A, Ghodrati M, Kheradpisheh SR, Masquelier T, Maida A. Deep learning in spiking neural networks. *Neural Networks*. 2019;111:47–63. DOI: 10.1016/j.neunet.2018.12.002.
 17. LeCun Y, Bottou L, Bengio Y, Haffner P. Gradient-based learning applied to document recognition. *Proceedings of the IEEE*. 1998;86(11):2278–2324. DOI: 10.1109/5.726791.
 18. Krizhevsky A, Hinton G. Learning multiple layers of features from tiny images. Technical Report. Toronto: University of Toronto; 2009. Available from: <http://www.cs.utoronto.ca/~kriz/learning-features-2009-TR.pdf>.
 19. Xiao H, Rasul K, Vollgraf R. Fashion-MNIST: A novel image Dataset for benchmarking machine learning algorithms. *arXiv:1708.07747*. arXiv Preprint, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1708.07747.
 20. Nunes JD, Carvalho M, Carneiro D, Cardoso JS. Spiking Neural Networks: A survey. *IEEE Access*. 2022;10:60738–60764. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3179968.
 21. Han B, Roy K. Deep Spiking Neural Network: Energy Efficiency Through Time Based Coding. In: Vedaldi A, Bischof H, Brox T, Frahm JM, editors. *Computer Vision – ECCV 2020*. ECCV 2020. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12355. Cham: Springer; 2020. P. 388–404. DOI: 10.1007/978-3-030-58607-2_23.
 22. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.* 1961;1(6):445–466. DOI: 10.1016/S0006-3495(61)86902-6.
 23. Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*. 1962;50(10):2061–2070. DOI: 10.1109/JRPROC.1962.288235.
 24. Bogatenko T, Sergeev K, Slepnev A, Kurths J, Semenova N. Symbiosis of an artificial neural

- network and models of biological neurons: Training and testing. *Chaos*. 2023;33(7):073122. DOI: 10.1063/5.0152703.
25. LeCun Y, Cortes C, Burges CJC. The MNIST database of handwritten digits [Electronic resource] Available from: <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>.
 26. Semenov VV, Bukh AV, Semenova N. Delay-induced self-oscillation excitation in the Fitzhugh-Nagumo model: Regular and chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023;172:113524. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113524.
 27. Pikovsky AS, Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.* 1997;78(5):775–778. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.775.
 28. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*. 1992; 170(6):421–428. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90745-8.
 29. Schöll E, Hiller G, Hövel P, Dahlem MA. Time-delayed feedback in neurosystems. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2009;367(1891):1079–1096. DOI: 10.1098/rsta.2008.0258.
 30. Just W, Pelster A, Schanz M, Schöll E. Delayed complex systems: an overview. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2010;368(1911):303–304. DOI: 10.1098/rsta.2009.0243.
 31. Masoliver M, Malik N, Schöll E, Zakharova A. Coherence resonance in a network of FitzHugh-Nagumo systems: Interplay of noise, time-delay, and topology. *Chaos*. 2017;27(10):101102. DOI: 10.1063/1.5003237.
 32. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms. *arXiv:1609.04747*. arXiv Preprint, 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1609.04747.

Семенова Надежда Игоревна — родилась в Саратове (1992). Окончила с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Радиофизика и электроника» (2014). Защищила диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2017, СГУ). Получила PhD степень по специальности «Оптика» в университете Бургундии Франш-Конте (Франция, 2021). С 2021 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского в должности доцента и старшего научного сотрудника. Научные интересы — нейронаука, математическое моделирование, нейронные сети, машинное обучение, влияние шумов, пространственно-временные режимы в ансамблях и сетях, химерные состояния, уединенные состояния, запаздывающая обратная связь. Опубликовала свыше 40 научных статей по указанным направлениям.



Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: semenovani@sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-9180-3030
 AuthorID (eLibrary.Ru): 850757