



Прикладные задачи

нелинейной теории колебаний и волн

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья

УДК 338.12; 519.6; 530.182.2; 621.37

DOI: 10.18500/0869-6632-003167

EDN: QXMAJO

## Динамическая модель возникновения экономических циклов

B. B. Matrosov<sup>✉</sup>, V. D. Shalfeev

Национальный исследовательский

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия

E-mail: matrosov@rf.unn.ru, shalfeev@rf.unn.ru

Поступила в редакцию 10.12.2024, принята к публикации 22.02.2025,  
опубликована онлайн 7.03.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель работы. Изучение возможности возникновения экономических колебаний на основе модели производственной сети с кооперативными и конкурентными типами связей. В качестве элемента сети рассматривается модель производства в виде типовой системы автоматического управления добавленной стоимостью — переменной, определяющей прибыльность производства. **Методы.** Качественно-численные методы теории нелинейных динамических систем. **Результаты.** Моделирование нелинейной динамики малых ансамблей связанных элементов-производств указывает на существенную роль связей. В частности, введение антагонистических (конкурентных) связей приводит к возникновению регулярных и нерегулярных экономических колебаний (циклов).

**Ключевые слова:** деловые циклы, нелинейная динамика сетей, конкурентные связи.

**Благодарности.** Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSWR-2023-0031). Авторы благодарят М. И. Рабиновича за полезные дискуссии и советы.

**Для цитирования:** Matrosov B. B., Shalfeev V. D. Динамическая модель возникновения экономических циклов // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 513–530. DOI: 10.18500/0869-6632-003167. EDN: QXMAJO

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Dynamic model of economic cycles origin

V. V. Matrosov<sup>✉</sup>, V. D. Shalfeev

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [✉ matrosov@rf.unn.ru](mailto:matrosov@rf.unn.ru), [shalfeev@rf.unn.ru](mailto:shalfeev@rf.unn.ru)

Received 10.12.2024, accepted 22.02.2025, available online 7.03.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** Purpose of the work is to research the phenomenon of the self-oscillation of the economic cycles for the model of the network with different types of element couplings (cooperative and competitive). As the element of the production network there are considered the typical system of automatic control of the added value, which determines the profitability of production. **Methods.** The research methods of the theory of nonlinear dynamic systems. **Results.** Modeling of nonlinear dynamics of small ensembles of connected production elements indicates the significant role of connections, in particular, the antagonistic (competitive) relationships lead to the emergence of regular and irregular economic fluctuations (cycles).

**Keywords:** business cycles, nonlinear dynamics of networks, competitive couplings.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FSWR-2023-0031). The authors are grateful M. I. Rabinovich for useful discussions and comment.

**For citation:** Matrosov VV, Shalfeev VD. Dynamic model of economic cycles origin. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4):513–530. DOI: 10.18500/0869-6632-003167

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Современная прикладная нелинейная динамика изучает процессы и системы, обладающие экстремальной сложностью. Эти задачи затрагивают не только технические, физические, химические, но также биологические и социоэкономические приложения. Проблемы динамики экономических систем в значительной степени связаны с изучением экономических колебаний — циклов и в первую очередь с их происхождением [1–4]. В настоящей работе рассматривается модельная динамика производственной сети, состоящей из нелинейных элементов — производств, связанных как кооперативными, так и антагонистическими (конкурентными) связями. На примере малого ансамбля связанных элементов-производств изучается влияние характера связей на возможность возникновения колебаний суммарного выпуска продукции в сети, то есть на возникновение экономических колебаний.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 даны краткие сведения об экономических циклах. В разделе 2 предложена модель отдельного производства как элемента производственной сети. В разделах 3, 4 представлены результаты численных экспериментов для изучения динамики ансамблей из двух и трех связанных производств. В Заключении даны выводы.

### 1. Экономические циклы

Анализ развития экономики разных стран разными экономистами (Дж. Кейнс, П. Самуэльсон, М. Фридман и др.) позволил получить вывод о том, что для рыночной экономики характерны нестабильность и наличие нерегулярных колебаний объемов производств, инфляции, занятости.

Матросов В. В., Шалфеев В. Д.

Известия вузов. ПНД, 2025, т. 33, № 4

Установлено, что после экономического подъема всегда следует снижение экономической активности, что свидетельствует о цикличности рыночной экономики. Нерегулярные колебания — повторяющиеся подъемы и спады в экономике [5], осуществляющиеся около некоторого долгосрочного тренда, характеризуют базовое явление рыночной экономики — экономические циклы (деловые циклы, бизнес-цикли). Обычно различают четыре фазы (стадии) экономического цикла: подъем (расширение, expansion), пик (бум, peak), спад (сжатие, рецессия, кризис, contraction), дно (депрессия, застой, trough). Для определения этих фаз используются различные экономические показатели, такие как ВВП (валовый внутренний продукт), уровень занятости, объем прибыли предприятий и др., а также их совокупный (композитный) показатель — индекс бизнес-цикла [6].

На сегодняшний день известно множество теорий, изучающих причины возникновения экономических циклов. Эти теории опираются как на эндогенные (внутренние), так и на экзогенные (внешние) факторы, к которым можно отнести природные катастрофы, социальные потрясения, технологические инновации и др. Однако следует признать, что сколь-нибудь убедительной общей теории экономических циклов сегодня не существует, как нет и единой точки зрения на причины, порождающие эти циклы [7, 8]. Отметим, что объем фактического ВВП является наиболее важным экономическим показателем, определяющим экономический цикл, а некоторые авторы, в частности [9], допускают прямое отождествление колебаний уровня экономической активности с изменениями объема фактического ВВП [8]. Для подсчета ВВП используются несколько методов, в частности метод добавленной стоимости (производственный). Добавленная стоимость — это разница между стоимостью произведенного товара (услуги) и стоимостью материалов, затраченных на его (её) производство, то есть это часть стоимости продукции, добавленная непосредственно самим предприятием. Суммирование добавленных стоимостей по всем производствам на уровне страны позволяет получить величину ВВП за рассматриваемый интервал времени.

Таким образом, задачу изучения причин, порождающих экономические колебания (деловые циклы), в принципе, можно свести к изучению некой динамической модели производственной сети связанных между собой динамических элементов — производств, допускающей оценку суммарной добавленной стоимости по всей сети (то есть ВВП) и анализ динамики изменения ВВП от времени в зависимости от различных параметров сети и связей элементов в сети, что в итоге может позволить изучить на такой модели условия возникновения деловых циклов. Перейдем далее к построению такой модели.

## 2. Производственная модель

Будем рассматривать модель производственной сети как модель связанных между собой динамических элементов — производств. Для каждого производства, как элемента сети, будем рассматривать простую модель, характеризуемую только одной переменной, определяющей прибыльность производства, а именно добавленной стоимостью. В качестве базовой модели такого производства будем рассматривать типовую систему автоматического управления. Подход к описанию динамического поведения различных технических, биологических, социальных и других объектов как систем автоматического управления не является новым, и в литературе можно найти много примеров использования такого подхода, в частности [10, 11].

Модель производства, функционирующего как система автоматического управления, показана на рис. 1. Опишем динамику этой системы аналогично тому, как это сделано в [10]. Здесь  $E$  — объект управления, оценщик (Estimator), вырабатывающий на выходе оценку текущего значения величины добавленной стоимости  $V_C(t)$ . На вход системы поступает сигнал  $V_S(t)$  — установленное

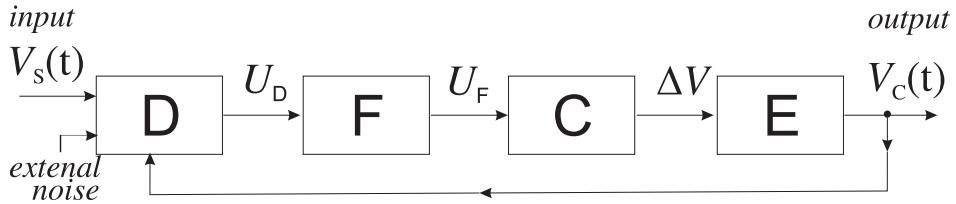


Рис. 1. Модель производства как система автоматического регулирования

Fig. 1. Production model as a system of automatic regulation

заранее плановое значение величины добавленной стоимости. Далее для упрощения будем считать  $V_S(t)$  постоянной величиной на рассматриваемых временных интервалах, а внешний шум отсутствующим. Дискриминатор  $D$  сравнивает сигналы  $V_C(t)$  и  $V_S(t)$ , сигнал  $U_D$  с выхода  $D$  проходит через фильтр  $F$ , который устранил высокочастотные (мелкомасштабные) флуктуации. Сигнал  $U_F$  с выхода фильтра  $F$  поступает на управитель  $C$ , который воздействует на активный элемент  $E$ , изменяя оценочное значение  $V_C(t)$  в сторону сближения с  $V_S(t)$ .

Уравнение, описывающее динамику системы автоматического управления, можно получить, написав уравнения для каждого элемента системы. Сигнал на выходе оценщика можно записать в виде

$$V_C = V_C^0 + \Delta V, \quad (1)$$

где  $V_C^0$  — оценка величины добавленной стоимости в начальный момент времени при разомкнутой цепи управления,  $\Delta V$  — изменение величины оценки под действием управителя  $C$ .

В предположении линейности и безынерционности управителя его уравнение можно записать в виде

$$\Delta V = -S U_F, \quad (2)$$

где  $S$  — крутизна характеристики управителя, а знак «минус» означает, что текущее значение  $V_C$  смещается управителем в сторону сближения с  $V_S$ .

Уравнение для фильтра  $F$  записывается с использованием передаточной функции  $K(p)$ :

$$U_F = K(p) U_D. \quad (3)$$

Уравнение для дискриминатора  $D$  имеет вид

$$U_D = E \Phi(V_C - V_S), \quad (4)$$

где  $E$  — некоторая контрольная величина выходного сигнала дискриминатора,  $\Phi(V_C - V_S)$  — нелинейность дискриминатора.

Введем обозначения: текущая разница оценочного и планового значения добавленной стоимости  $V = V_C - V_S$ , параметр  $\sigma = S E$  — контрольная поправка выходного значения величины добавленной стоимости из-за действия цепи управления, безразмерная разница оценочного и планового значений добавленной стоимости  $x = V/\sigma$ , безразмерная начальная разница  $\gamma = (V_C^0 - V_S)/\sigma$ . С учетом введенных обозначений из (1)–(4) получаем динамическую модель производства в операторной форме

$$x + K(p) \Phi(x) = \gamma, \quad p \equiv d/dt. \quad (5)$$

Учтем инерционность цепи управления модели (5) в форме  $K(p) = (1 + ap)^{-1}$  и, введя безразмерное время  $\tau = t/a$ , получим из (5) в предположении постоянства  $\gamma$  уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} + x + \Phi(x) = \gamma. \quad (6)$$

Нелинейность дискриминатора логично представить однопараметрической функцией с насыщением

$$\Phi(x) = bx/(1 + |bx|) \quad (7)$$

или со спадающим участком

$$\Phi(x) = 2bx/(1 + b^2x^2). \quad (8)$$

Наличие участка насыщения на характеристике дискриминатора представляется вполне естественным допущением. Что касается наличия спадающего участка характеристики дискриминатора, то такой участок можно интерпретировать некой нереалистичностью больших управляющих сигналов с выхода дискриминатора и связанным с этим недоверием к ним.

Далее в численных экспериментах будем принимать в (8) параметр  $b \leq 4$ . Динамика модели (6) при сделанных предположениях определяется [12] единственным устойчивым состоянием равновесия  $O(x^*)$ , координата которого  $x = x^*$  находится из уравнения

$$\Phi(x) = \gamma - x. \quad (9)$$

Заметим, что координата  $x = x^*$  в случае нелинейности (8) может располагаться как на восходящем участке нелинейности  $\Phi(x)$ , так и на спадающем, это не сказывается на устойчивости состояния равновесия. При  $x^* > 0$  производство считаем доходным, при  $x^* < 0$  считаем убыточным.

Здесь уместно следующее замечание. В операторной модели (5) введением различных  $K(p)$  можно учесть инерционности и запаздывания реального производства. В этом случае система дифференциальных уравнений, соответствующая модели (5), может иметь высокий порядок и допускать наличие автоколебательных режимов, в результате которых будут иметь место регулярные или хаотические колебания выходной переменной — добавленной стоимости  $x(\tau)$ . Инерционности и задержки при управлении производством могут быть вызваны, в частности, технологическими особенностями или дефектами управления на данном производстве. Изучение особенностей динамики производства, вызванных инерционностями цепей управления, лежит вне целей данной работы. Здесь предполагается сделать акцент на изучении влияния связей между производствами на динамику сети. С учетом этого обстоятельства далее будет рассматриваться динамика малых ансамблей из двух, трех связанных элементов-производств, где для описания отдельных производств будет использоваться модель (6) в форме дифференциального уравнения первого порядка, имеющая предельно простую динамику — единственное устойчивое состояние равновесия. Модели ансамблей из двух и трех связанных производств представляются нелинейными динамическими системами, определенными в двух и трехмерном фазовых пространствах. Изучение динамики этих моделей проведено путем анализа особых траекторий (состояний равновесия, сепаратрис, предельных циклов) и их бифуркаций с применением комплекса программ ДНС [13].

### 3. Ансамбль из двух связанных производств

Рассмотрим взаимодействие двух производств. Сфокусируем дальнейший анализ на изучении влияния связей на динамику взаимодействующих систем. Исходя из этого, сделаем упрощения: будем считать, что для обеих систем плановые значения  $V_{S1} = V_{S2} = V_S$  одинаковы, нелинейности

дискриминаторов идентичны, инерционности цепей управления  $K_1(p) = K_2(p) = K(p) = (1 + ap)^{-1}$  одинаковы, параметр  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Тогда динамика двух связанных (путем обмена управляющими сигналами) систем будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 + \Phi(x_1) &= \gamma_1 + \delta_{21}\Phi(x_2), \\ \frac{dx_2}{d\tau} + x_2 + \Phi(x_2) &= \gamma_2 + \delta_{12}\Phi(x_1).\end{aligned}\quad (10)$$

Здесь  $\delta_{21}$  — коэффициент связи от второй системы к первой,  $\delta_{12}$  коэффициент связи от первой системы ко второй. Будем далее рассматривать кооперативные и конкурентные (антагонистические) связи. Для примера возьмем два однонаправленно связанных производства П1 и П2, пусть П2 воздействует на П1. Считаем оба производства доходными, то есть значения  $x_1^* > 0$  и  $x_2^* > 0$ . Если действие доходного П2 на П1 ведет к увеличению доходности П1, то такую связь логично называть кооперативной. Если действие доходного П2 на П1 ведет к уменьшению доходности П1 или переходу его в убыточные, то такую связь называют конкурентной (антагонистической). Таким образом, в случае доходных производств при положительных знаках коэффициентов связей  $\delta_{12}, \delta_{21}$  взаимодействие между системами носит кооперативный характер, при отрицательных  $\delta_{12}, \delta_{21}$  взаимодействие носит антагонистический характер. Связь будем называть сильной, если модуль параметра связи больше единицы, слабой — в противном случае.

Координаты  $x_1^*$  и  $x_2^*$  устойчивого состояния равновесия определяют соответственно значения добавленной стоимости первого и второго производства, а сумма  $S = x_1^* + x_2^*$  отражает величину равновесного совокупного валового продукта двух связанных производств. В ансамбле связанных производств величины добавленных стоимостей и совокупного валового продукта обусловливаются как состояниями взаимодействующих производств, так и параметрами связей. Влияние соседней системы на значение добавленной стоимости  $x_1^*$  зависит от состояния  $x_2^*$  соседней системы. Если значение  $x_2^* > 0$ , то кооперативная связь улучшает достигаемое значение добавленной стоимости, если же  $x_2^* < 0$ , то ухудшает. В случае антагонистической связи ситуация меняется на противоположную. Здесь наблюдается положительный эффект при  $x_2^* < 0$  и отрицательный при  $x_2^* > 0$ . Рис. 2 иллюстрирует описанные выше ситуации: линии 1 соответствуют случаю, когда  $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ , линии 2 —  $x_1^* > 0, x_2^* < 0$ .

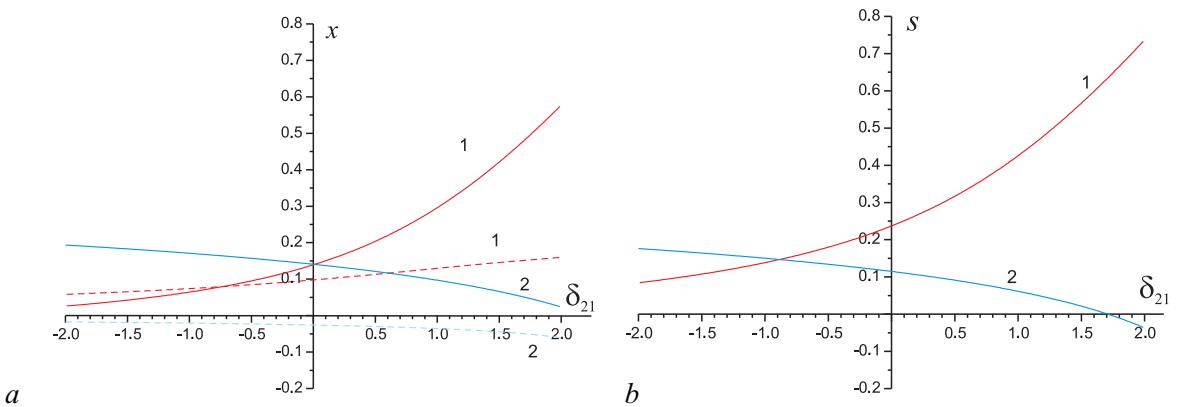


Рис. 2. Зависимости добавленных стоимостей  $x_1^*$  (сплошные линии),  $x_2^*$  (пунктирные линии) (a) и величины равновесного совокупного валового продукта  $S = x_1^* + x_2^*$  (b) от параметра связи  $\delta_{21}$  для нелинейности (7) при  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.2, \delta_{12} = 0.5$  — линии 1;  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = -0.3, \delta_{12} = 0.5$  — линии 2 (цвет онлайн)

Fig. 2. Dependences of added values  $x_1^*$  (solid lines),  $x_2^*$  (dashed lines) (a) and the value of the equilibrium aggregate gross product  $S = x_1^* + x_2^*$  (b) on the link parameter  $k_{21}$  for nonlinearity (7) with  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.2, \delta_{12} = 0.5$  — lines 1;  $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = -0.3, \delta_{12} = 0.5$  — lines 2 (color online)

Система (10) инвариантна относительно замен  $\Lambda_1 : (\gamma_1, \gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, x_1, x_2) \Rightarrow (-\gamma_1, -\gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, -x_1, -x_2)$ ,  $\Lambda_2 : (\gamma_1, \gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, x_1, x_2) \Rightarrow (-\gamma_1, \gamma_2, -\delta_{21}, -\delta_{12}, -x_1, x_2)$ ,  $\Lambda_3 : (\gamma_1, \gamma_2, \delta_{21}, \delta_{12}, x_1, x_2) \Rightarrow (\gamma_1, -\gamma_2, -\delta_{21}, -\delta_{12}, x_1, -x_2)$ , поэтому достаточно рассмотреть динамику ансамбля, когда обе связи кооперативные и когда одна связь антагонистическая, другая кооперативная, например,  $\delta_{21} < 0, \delta_{12} > 0$ .

**3.1. Динамика модели двух производств с нелинейностью с насыщением.** Изучение равновесных состояний модели (10) можно провести путем анализа главных изоклин с последующим вычислением индекса Пуанкаре в точках их пересечения для определения типа особой точки. В результате установлено, что при сильных кооперативных связях при нулевых значениях  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$  и  $1 < b \leq 4$  модель (10) имеет три состояния равновесия, два из которых устойчивые, и одно седло. Представление о размерах и расположении областей существования трех состояний равновесия модели (10) в пространстве параметров дает рис. 3. На нем области существования трех состояний равновесия отмечены серым цветом разной интенсивности в зависимости от значений фиксированных параметров модели. Из представленных картин следует, что режим бистабильного поведения в модели (10) реализуется при кооперативных связях, когда хотя бы одна связь сильная. Область существования бистабильного режима размещается в области малых значений  $\gamma$ . В случае конкурентных связей  $\delta_{21} \cdot \delta_{12} < 0$  в фазовом пространстве модели (10) имеет место одно устойчивое состояние равновесия, в численных экспериментах режимы бистабильного поведения не выявлены.

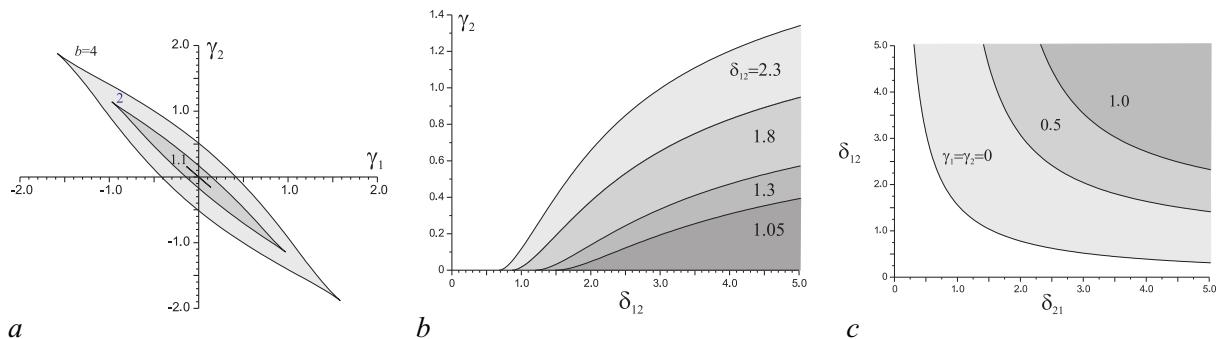


Рис. 3. Области существования трех состояний равновесия модели (10) с нелинейностью (7) при  $\delta_{21} = 1.7, \delta_{12} = 2.3, b = 4.0, 2.0, 1.1$  (a);  $\gamma_1 = 0, b = 4.0, \delta_{12} = 2.3, 1.8, 1.3, 1.05$  (b);  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 0.5, 1.0, b = 4.0$  (c)

Fig. 3. Regions of existence of three equilibrium states of model (10) with nonlinearity (7) when  $\delta_{21} = 1.7, \delta_{12} = 2.3, b = 4.0, 2.0, 1.1$  (a);  $\gamma_1 = 0, b = 4.0, \delta_{12} = 2.3, 1.8, 1.3, 1.05$  (b);  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, 0.5, 1.0, b = 4.0$  (c)

**3.2. Динамика модели двух производств с нелинейностью со спадающим участком.** Отличительной особенностью нелинейности (8) является наличие спадающего участка, что приводит к существованию у модели (5) при  $b > 4$  трех состояний равновесия.

Мы рассмотрели пограничное значение  $b = 4$ , когда в системе (5) существует лишь одно состояние равновесия. Несмотря на то, что исходная модель (5) с нелинейностью (8) содержит лишь одно устойчивое состояние равновесия, при объединении в ансамбль двух таких моделей рождается система с богатой динамикой. В частности, из анализа поведения главных изоклин следует, что модель (10) может иметь в фазовом пространстве до семи состояний равновесия. На рис. 4 приведены структуры плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) при кооперативных связях, когда обе связи сильные (рис. 4, a), одна связь сильная, другая слабая (рис. 4, b) и когда обе связи слабые (рис. 4, c). Здесь выделены области с различным количеством состояний

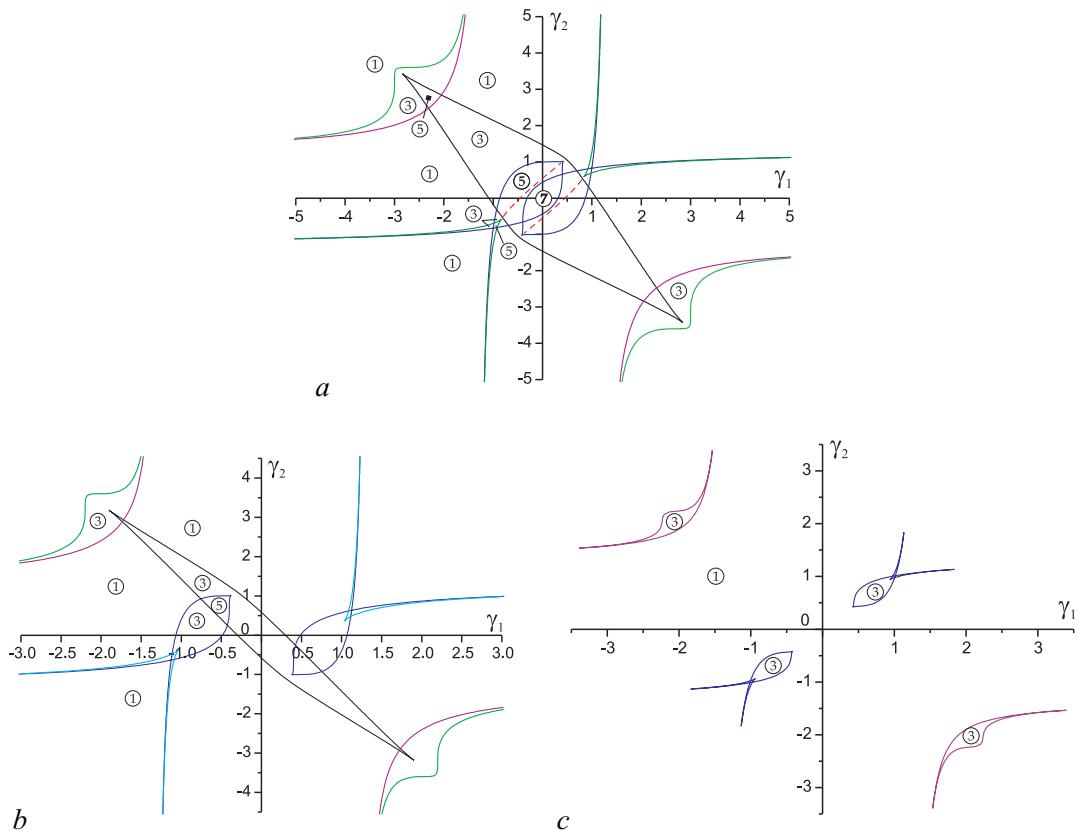


Рис. 4. Разбиение плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) с нелинейностью (8) на области с различным числом состояний равновесия при  $b = 4.0, \delta_{21} = 1.7, \delta_{12} = 2.3$  (а);  $\delta_{21} = 0.9, \delta_{12} = 2.3$  (б);  $\delta_{21} = 0.9, \delta_{12} = 0.9$  (в) (цвет онлайн)

Fig. 4. Partitioning the plane  $(\gamma_1, \gamma_2)$  of parameters of model (10) with nonlinearity (8) into regions with different numbers of equilibrium states when  $b = 4.0, \delta_{21} = 1.7, \delta_{12} = 2.3$  (a);  $\delta_{21} = 0.9, \delta_{12} = 2.3$  (b);  $\delta_{21} = 0.9, \delta_{12} = 0.9$  (c) (color online)

равновесия, общее число состояний равновесия характеризует цифра, заключенная в кружок. При этом число устойчивых состояний равновесия растет по мере увеличения общего количества состояний равновесия и равно 1, 2, 3 и 4 для областей с 1, 3, 5 и 7 состояниями равновесия соответственно. Из представленных диаграмм следует, что при сильных кооперативных связях ансамбль демонстрирует высокую мультистабильность в области малых начальных отклонений  $\gamma$  оценочных значений добавленной стоимости от плановых. Снижение силы связей уменьшает степень мультистабильности в области малых  $\gamma$ , вплоть до полного исчезновения. При этом при больших отклонениях  $\gamma$  зоны бистабильного поведения сохраняются.

Возможные фазовые портреты модели (10) с нелинейностью (8) приведены на рис. 5. Обратим внимание на рис. 5, б и рис. 5, в, где представлены фазовые портреты из области параметров с пятью состояниями равновесия и близкими значениями параметров. Здесь, несмотря на близость параметров, бассейны притяжения состояний равновесия 5 и 7 существенно различаются. На рис. 5, б стационарный режим, определяемый состоянием равновесия 5, не может реализовываться при начальных условиях из четвертого квадранта фазовой плоскости, а на рис. 5, в стационарный режим, определяемый состоянием равновесия 7, не может реализовываться при начальных условиях из второго квадранта. Перераспределение фазовых потоков к состояниям равновесия 5 и 7 происходит в результате совпадения выходящей сепаратрисы  $s$

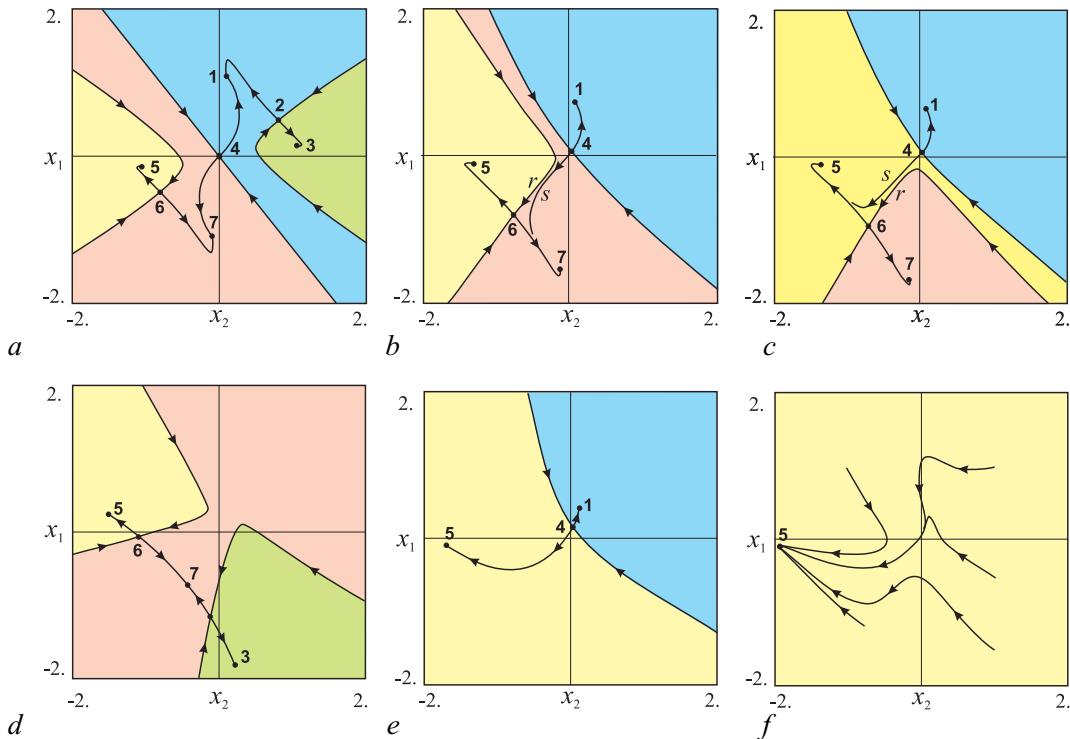


Рис. 5. Фазовые портреты модели (10) с нелинейностью (8) при  $\delta_{21}=1.7, \delta_{12}=2.3, b=4 \quad \gamma_1=\gamma_2=0$  (a);  $\gamma_1=-0.4, \gamma_2=0$  (b);  $\gamma_1=-0.5, \gamma_2=0$  (c);  $\gamma_1=-0.9, \gamma_2=-0.7$  (d);  $\gamma_1=-0.95, \gamma_2=0$  (e);  $\gamma_1=-1.1, \gamma_2=0$  (f) (цвет онлайн)

Fig. 5. Phase portraits of the model (10) with nonlinearity (8) at  $\delta_{21}=1.7, \delta_{12}=2.3, b=4 \quad \gamma_1=\gamma_2=0$  (a);  $\gamma_1=-0.4, \gamma_2=0$  (b);  $\gamma_1=-0.5, \gamma_2=0$  (c);  $\gamma_1=-0.9, \gamma_2=-0.7$  (d);  $\gamma_1=-0.95, \gamma_2=0$  (e);  $\gamma_1=-1.1, \gamma_2=0$  (f) (color online)

седла 4 и входящей сепаратрисы  $r$  седла 6. Бифуркационные кривые, отвечающие за образование гетероклинических траекторий, на рис. 4, a проведены пунктирными линиями.

Представление о структуре плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) с нелинейностью (8) при конкурентных связях дает рис. 6. На нем приведены картины, когда обе связи сильные (рис. 6, a), одна связь сильная, другая слабая (рис. 6, b) и когда обе связи слабые (рис. 6, c).

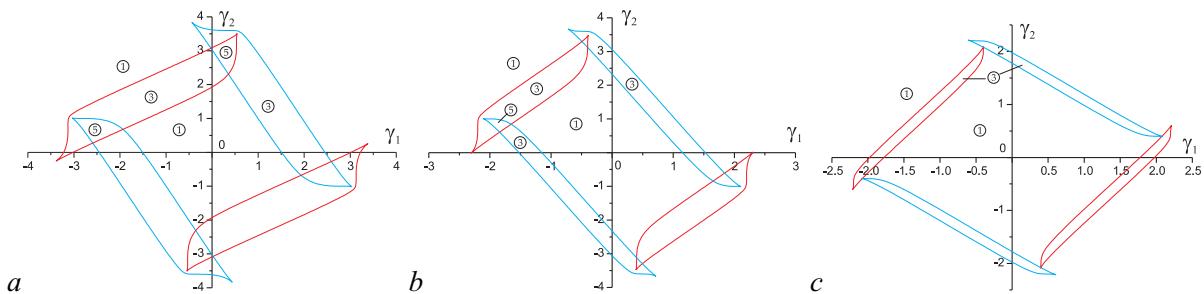


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  модели (10) с нелинейностью (8) на области с различным числом состояний равновесия при  $b=4.0, \delta_{21}=-1.83, \delta_{12}=2.3$  (a);  $\delta_{21}=-0.9, \delta_{12}=2.3$  (b);  $\delta_{21}=-0.9, \delta_{12}=0.9$  (c) (цвет онлайн)

Fig. 6. Partitioning the plane  $(\gamma_1, \gamma_2)$  of parameters of model (10) with nonlinearity (8) into regions with different numbers of equilibrium states when  $b=4.0, \delta_{21}=-1.83, \delta_{12}=2.3$  (a);  $\delta_{21}=-0.9, \delta_{12}=2.3$  (b);  $\delta_{21}=-0.9, \delta_{12}=0.9$  (c) (color online)

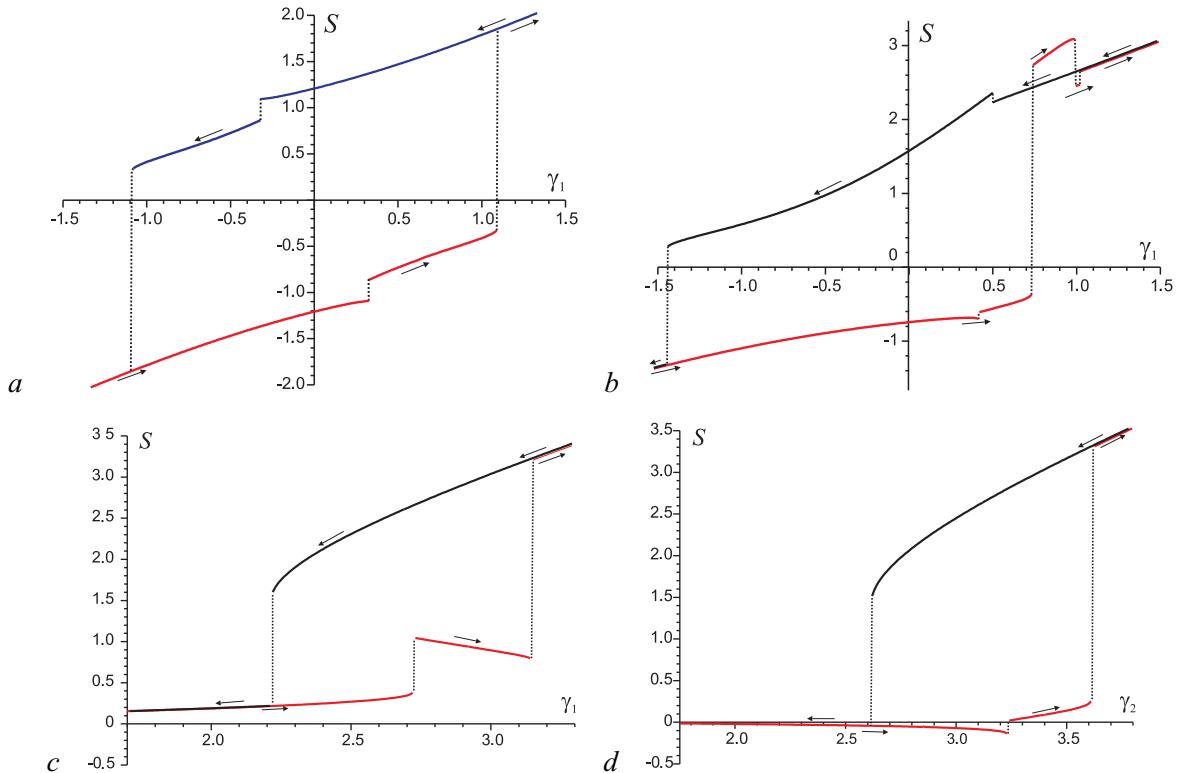


Рис. 7. Примеры зависимостей величины равновесного совокупного валового продукта  $S$ , рассчитанные по модели (10) с нелинейностью (8) при  $b = 4$ ,  $\delta_{21} = 1.7$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = 0$  (а) и  $\gamma_2 = 0.7$  (б);  $\delta_{21} = -1.83$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = -0.5$  (в) и  $\gamma_1 = 0.2$  (г) (цвет онлайн)

Fig. 7. Examples of dependencies of the value of the equilibrium aggregate gross product  $S$ , calculated using the model (10) with nonlinearity (8) at  $b = 4$ ,  $\delta_{21} = 1.7$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = 0$  (a) and  $\gamma_2 = 0.7$  (b);  $\delta_{21} = -1.83$ ,  $\delta_{12} = 2.3$ ,  $\gamma_2 = -0.5$  (c) and  $\gamma_1 = 0.2$  (d) (color online)

Из приведенных картин следует, что области параметров с мультистабильным поведением ансамбля существуют при наличии хотя бы одной сильной связи, и располагаются они в области больших  $\gamma$ . В случае слабых связей ансамбль из двух связанных производств способен демонстрировать бистабильное поведение, которое также наблюдается при больших  $\gamma$ . Мультистабильное поведение системы (10) приводит гистерезисным явлениям. Примеры неоднозначного поведения модели двух связанных производств приведены на рис. 7. Здесь сплошные линии отражают изменение величины равновесного совокупного валового продукта  $S$ , штриховые линии воспроизводят скачкообразное изменение валового продукта, стрелочки указывают направление изменения параметра.

Что касается автоколебательных режимов в ансамбле двух связанных производств, то в процессе численных экспериментов с моделью (10) они не обнаружены.

#### 4. Ансамбль из трех связанных производств

Рассмотрим взаимодействие трех производств (рис. 8). Далее будем считать, что для всех систем плановые значения  $V_{S1} = V_{S2} = V_{S3} = V_S$  одинаковы, нелинейности дискриминаторов идентичны, инерционности цепей управления  $K_1(p) = K_2(p) = K(p) = (1 + ap)^{-1}$  одинаковы, параметр  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ .

Тогда динамика трех связанных систем будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 + \Phi(x_1) &= \gamma_1 + \delta_{21}\Phi(x_2) + \delta_{31}\Phi(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} + x_2 + \Phi(x_2) &= \gamma_2 + \delta_{12}\Phi(x_1) + \delta_{32}\Phi(x_3), \quad (11) \\ \frac{dx_3}{d\tau} + x_3 + \Phi(x_3) &= \gamma_3 + \delta_{13}\Phi(x_1) + \delta_{23}\Phi(x_2), \end{aligned}$$

где  $\delta_{ij}$  — коэффициенты связей от  $i$ -й системы к  $j$ -й. Fig. 8. Scheme of interaction of three productions

Ансамбль из трех элементов можно рассматривать как объединение трех пересекающихся пар:  $\{1, 2\}, \{1, 3\} \{2, 3\}$ . Каждая пара, в зависимости от параметров связей, имеет свое разбиение в плоскости параметров, соответствующих  $\gamma$ .

**4.1. Динамика модели трех производств с нелинейностью с насыщением.** Возьмем пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (7) и параметрами  $b=3.7, \gamma_1=0.6, \gamma_2=0.5, \delta_{12}=2.6, \delta_{21}=4.6$ . В этом случае структуру фазового портрета модели (10) определяют три состояния равновесия:  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04), O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02)$  — устойчивые узлы и  $O_2(x_{12}^*=-0.12, x_{22}^*=-0.077)$  — седло. Связем пару  $\{1, 2\}$  односторонними связями с третьим элементом при  $\gamma_3=0.54$ , динамика которого определяется устойчивым состоянием равновесия с координатой  $x_3^*=0.16$ . Сконструированный таким образом ансамбль наследует структуру фазового пространства модели пары  $\{1, 2\}$ . В случае кооперативных связей  $\delta_{13}=0.75, \delta_{23}=4.6$  структура фазового портрета модели (11) определяется устойчивыми состояниями равновесия  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04, x_{31}^*=2.71), O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02, x_{33}^*=-1.42)$  и седлом  $O_2(x_{12}^*=-0.12, x_{22}^*=-0.077, x_{32}^*=-0.08)$ . При антагонистических связях  $\delta_{13}=-0.75, \delta_{23}=-4.6$  модель (11) также имеет два устойчивых состояния равновесия  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04, x_{31}^*=-1.68), O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02, x_{33}^*=2.44)$  и седло  $O_2(x_{12}^*=-0.12, x_{22}^*=-0.077, x_{32}^*=0.66)$ .

Влияние обратных связей от третьего элемента к первым двум иллюстрирует рис. 9. Здесь линия  $l_1$  соответствует слиянию состояний равновесия  $O_3$  и  $O_2$ ; линия  $l_2$  — появлению двух новых

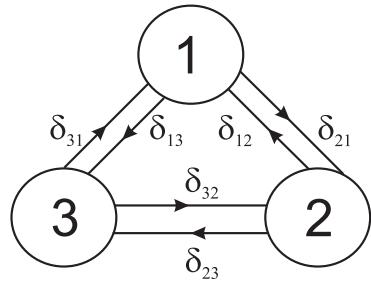


Рис. 8. Схема взаимодействия трех производств

Fig. 8. Scheme of interaction of three productions

Ансамбль из трех элементов можно рассматривать как объединение трех пересекающихся пар:  $\{1, 2\}, \{1, 3\} \{2, 3\}$ . Каждая пара, в зависимости от параметров связей, имеет свое разбиение в плоскости параметров, соответствующих  $\gamma$ .

**4.1. Динамика модели трех производств с нелинейностью с насыщением.** Возьмем пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (7) и параметрами  $b=3.7, \gamma_1=0.6, \gamma_2=0.5, \delta_{12}=2.6, \delta_{21}=4.6$ . В этом случае структуру фазового портрета модели (10) определяют три состояния равновесия:  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04), O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02)$  — устойчивые узлы и  $O_2(x_{12}^*=-0.12, x_{22}^*=-0.077)$  — седло. Связем пару  $\{1, 2\}$  односторонними связями с третьим элементом при  $\gamma_3=0.54$ , динамика которого определяется устойчивым состоянием равновесия с координатой  $x_3^*=0.16$ . Сконструированный таким образом ансамбль наследует структуру фазового пространства модели пары  $\{1, 2\}$ . В случае кооперативных связей  $\delta_{13}=0.75, \delta_{23}=4.6$  структура фазового портрета модели (11) определяется устойчивыми состояниями равновесия  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04, x_{31}^*=2.71), O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02, x_{33}^*=-1.42)$  и седлом  $O_2(x_{12}^*=-0.12, x_{22}^*=-0.077, x_{32}^*=-0.08)$ . При антагонистических связях  $\delta_{13}=-0.75, \delta_{23}=-4.6$  модель (11) также имеет два устойчивых состояния равновесия  $O_1(x_{11}^*=3.72, x_{21}^*=2.04, x_{31}^*=-1.68), O_3(x_{13}^*=-2.14, x_{23}^*=-1.02, x_{33}^*=2.44)$  и седло  $O_2(x_{12}^*=-0.12, x_{22}^*=-0.077, x_{32}^*=0.66)$ .

Влияние обратных связей от третьего элемента к первым двум иллюстрирует рис. 9. Здесь линия  $l_1$  соответствует слиянию состояний равновесия  $O_3$  и  $O_2$ ; линия  $l_2$  — появлению двух новых

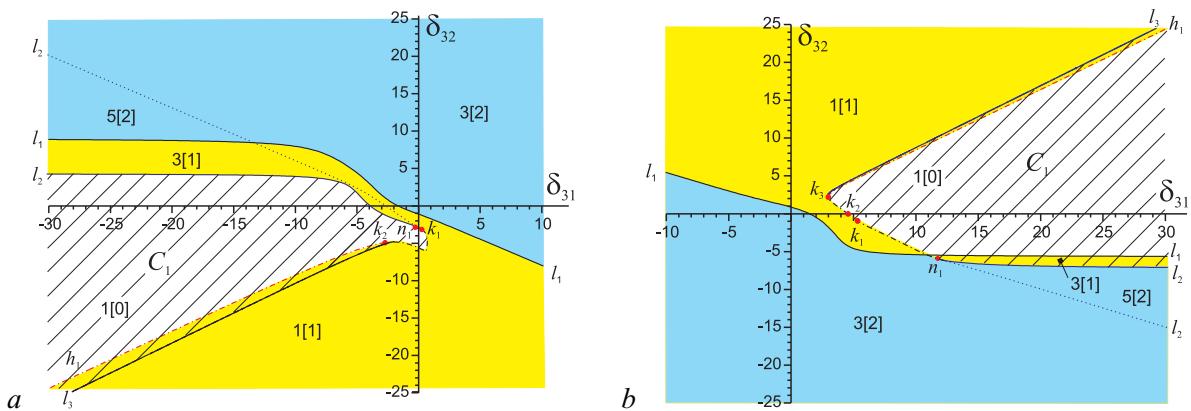


Рис. 9. Параметрический портрет модели (11) при  $b=3.7, \gamma_1=0.6, \gamma_2=0.5, \gamma_3=0.54, \delta_{12}=2.6, \delta_{21}=4.6$  в случае  $\delta_{13}=0.75, \delta_{23}=2.7$  (a) и  $\delta_{13}=-0.75, \delta_{23}=-2.7$  (b) (цвет онлайн)

Fig. 9. Parametric portrait of the (11) when  $b=3.7, \gamma_1=0.6, \gamma_2=0.5, \gamma_3=0.54, \delta_{12}=2.6, \delta_{21}=4.6$  at  $\delta_{13}=0.75, \delta_{23}=2.7$  (a) and  $\delta_{13}=-0.75, \delta_{23}=-2.7$  (b) (color online)

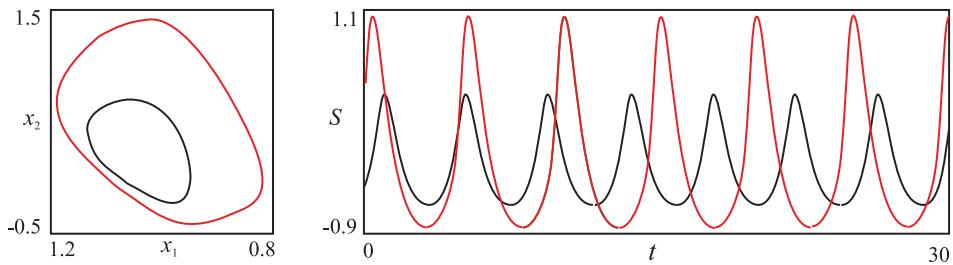


Рис. 10. Пример бистабильного автоколебательного поведения модели (11) и соответствующие ему зависимости  $S(t) = x_1 + x_2$  при  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\gamma_3=0.54$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ ,  $\delta_{31} = 10$ ,  $\delta_{32} = -4.72183$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Example of bistable self-oscillatory behavior of the model (11) and the corresponding dependence  $S(t) = x_1 + x_2$  at  $b=3.7$ ,  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\gamma_3=0.54$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ ,  $\delta_{31} = 10$ ,  $\delta_{32} = -4.72183$  (color online)

состояний равновесия  $O_4$  и  $O_5$ . Линия  $l_2$  содержит точку нейтральности  $n_1$ , которая делит эту линию на два участка. Участок кривой, отмеченный сплошной линией, соответствует слиянию устойчивого и седлового состояний равновесия, а участок кривой, отмеченный штриховой линией, отвечает слиянию неустойчивых состояний равновесия. Точка  $n_1$  является концевой для кривой  $h_1$  бифуркационной кривой Андронова–Хопфа (штрихпунктирная линия). В точках  $k_i$  на линии  $h_1$  первая ляпуновская величина обращается в ноль. Точки  $k_i$  разбивают линию  $h_1$  на участки мягкого и жесткого возбуждения колебаний. Участки кривой с жестким режимом возбуждения колебаний на рис. 9 отмечены красным цветом, с мягким — черным. Механизму жесткого возбуждения колебаний предшествует касательная бифуркация (на линии  $l_3$ ), в результате которой в фазовом пространстве модели (11) появляются устойчивый и неустойчивый предельные циклы.

Таким образом, линии  $l_1 - l_3, h_1$  разбивают плоскость параметров  $(\delta_{31}, \delta_{32})$  на области с различным числом состояний равновесия и динамическим поведением. На рис. 9 выделенные области характеризуются парой чисел, где первое число отражает общее число состояний равновесия в данной области, а в квадратных скобках — число устойчивых состояний равновесия. Здесь также желтым цветом выделены области с одним устойчивым состоянием равновесия, голубым — с двумя устойчивыми состояниями равновесия, штриховкой отмечена область  $C_1$  существования автоколебательных режимов. Установлено, что в области  $C_1$  одновременно может существовать два автоколебательных режима. На рис. 10 приведены проекции одновременно существующих устойчивых предельных циклов. Область бистабильного автоколебательного режима мала, поэтому на рис. 9 она не отмечена.

#### 4.2. Динамика модели трех производств с нелинейностью со спадающим участком.

Возьмем пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (8) и параметрами  $\gamma_1=0.6$ ,  $\gamma_2=0.5$ ,  $\delta_{21}=4.6$ ,  $\delta_{12}=2.6$ ,  $b=3.7$  и свяжем ее односторонней положительной связью с третьим элементом, где  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ . При выбранных значениях параметров фазовый портрет определяют три устойчивых состояния равновесия:  $O_1(3.87, 0.12, 2.4258)$ ,  $O_3(-1.26, -0.07, -0.18)$  и  $O_5(-0.16, -1.45, -0.19)$ , а также седла  $O_2(-0.038, -0.027, -0.025)$ ,  $O_4(-0.53, -1.22, -0.23)$  с сепаратрисами. При нулевых связях  $\delta_{13} = \delta_{23} = 0$  третий элемент ансамбля имеет одно устойчивое стационарное состояние равновесия в точке  $x_3^* = 0.68$ . Далее проанализируем влияние параметров обратных связей  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  от третьего элемента к первому и второму элементам ансамбля.

На рис. 11 приведена карта динамических режимов модели (11) на плоскости  $(\delta_{31}, \delta_{32})$ . Здесь области, где система (11) имеет разное число устойчивых состояний равновесия (стационарных режимов), окрашены различными цветами. Кроме того, каждому цвету области поставлена

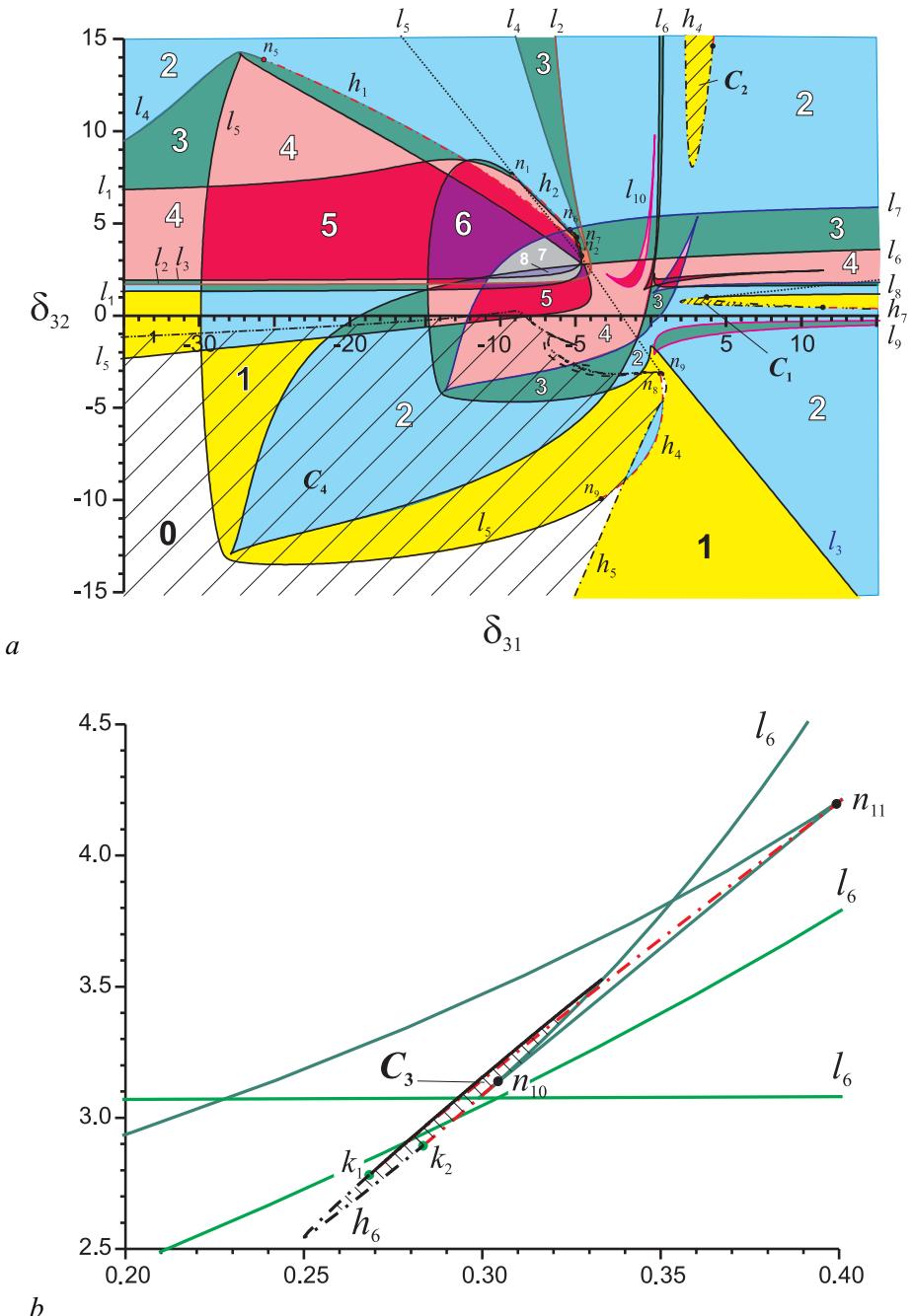


Рис. 11. Параметрический портрет модели (11) при  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (а), увеличенный фрагмент параметрического портрета (б) (цвет онлайн)

Fig. 11. Parametric portrait of the (11) when  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (a), enlarged fragment of parametric portrait (b) (color online)

в соответствие цифра, которая отражает число устойчивых состояний равновесия в этой области. Структуру разбиения определяют сплошные линии  $l_1 - l_{10}$ , соответствующие бифуркации двукратных состояний равновесия (седло-узловая бифуркация), а также штрихпунктирные линии  $h_1 - h_7$ , отражающие бифуркации Андронова–Хопфа. Бифуркационные кривые  $h_1 - h_7$  примыкают к кривым  $l_1 - l_9$  в точках нейтральности  $n_i$ . При этом линии, отмеченные черным

цветом, соответствуют мягкой смене устойчивости состояния равновесия и появлению в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла. Красный цвет штрихпунктирной кривой характеризует жесткий механизм смены устойчивости, когда устойчивые предельные циклы не возникают. Точки, разделяющие участки разного цвета, соответствуют обращению в ноль первой ляпуновской величины. Штриховые линии  $l_5$  и  $l_8$  отражают слияние и исчезновение неустойчивых состояний равновесия. Эти бифуркции не оказывают существенного влияния на аттракторную динамику модели (11), линии  $l_5$  и  $l_8$  нанесены для более полного понимания бифуркационных переходов. Из анализа представленного разбиения плоскости  $(\delta_{31}, \delta_{32})$ , с учетом того, что остальные связи кооперативные<sup>1</sup>, следует:

- объединение трех элементов с одним стационарным состоянием кооперативными связями приводит к увеличению устойчивых стационарных режимов. В рассмотренном случае число одновременно существующих устойчивых состояний равновесия может достигать шести. Наиболее крупными областями мультистабильного поведения являются области с двумя, тремя и четырьмя устойчивыми состояниями равновесия;
- в ансамбле из трех элементов, связанных кооперативными связями, могут реализовываться регулярные автоколебательные режимы;
- в ансамбле из трех элементов, объединенных конкурентными связями, число одновременно существующих устойчивых стационарных режимов может достигать восьми. Также существуют такие значения параметров связей, когда в ансамбле устойчивые стационарные режимы отсутствуют, в этом случае реализуется автоколебательный режим.

На рис. 11 штриховкой отмечены области существования автоколебательных режимов  $C_1-C_4$ . Область  $C_1$ , расположенная в первом квадранте параметрического портрета, ограничена кривыми: суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа (штрихпунктирная линия) и двукратного предельного цикла (нижняя границы области  $C_1$ ). Сверху область  $C_1$  ограничиваются либо линии бифуркаций петли сепаратрис различной обходности, либо линии кризиса хаотического аттрактора. Хаотический аттрактор возникает в результате каскада бифуркаций удвоения периода при больших значениях  $\delta_{31}$ .

Область  $C_2$  размещается в первом квадранте, границами этой области служат бифуркационные кривые: Андронова–Хопфа (штрихпунктирная линия) и двукратного предельного цикла — сплошная линия, примыкающая к точке обращения в ноль первой ляпуновской величины. Автоколебательный режим, реализуемый при значениях параметров из области  $C_2$ , является регулярным, при вариациях параметров внутри области бифуркаций не испытывает.

Область  $C_3$ , в силу малых размеров, представлена на фрагменте 11, b. Границами этой области служат бифуркационные кривые Андронова–Хопфа, двукратного предельного цикла (касательная бифуркация) и петли сепаратрис седло-узла. На фрагменте в точках  $k_1$  и  $k_2$  первая ляпуновская величина обращается ноль.

Область  $C_4$  — наиболее крупная область. Она размещается в третьем квадранте, то есть где параметры связей  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  являются антагонистическими. Отметим, что при больших значениях  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  автоколебательный режим становится глобально устойчивым, при уменьшении  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  глобальная устойчивость предельного цикла нарушается устойчивыми состояниями равновесия, а сам предельный цикл может терять устойчивость через бифуркации удвоения периода, превращаясь в хаотический аттрактор (рис. 12). На рис. 11 бифуркационная кривая, характеризующая первое удвоение периода, проведена пунктирной линией. Область существования хаотических

<sup>1</sup> Первый квадрант отражает случай, когда элементы ансамбля объединены только кооперативными связями — все связи положительны, в остальных квадрантах связи конкурентные.

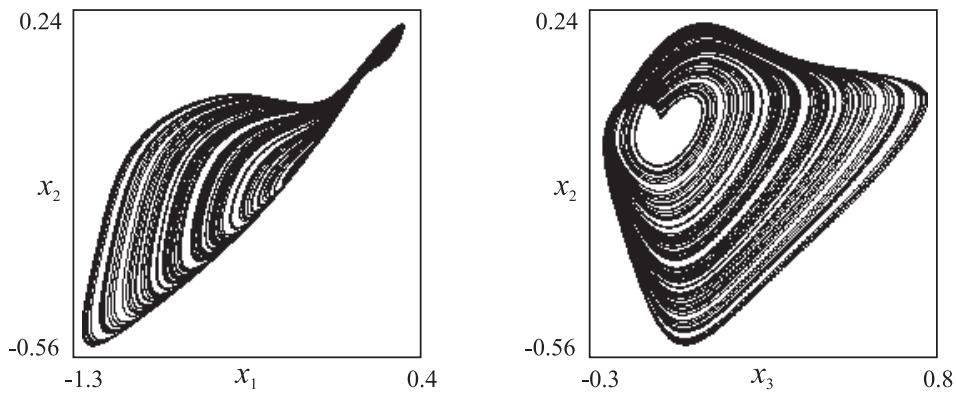


Рис. 12. Проекции хаотического аттрактора модели (11) при  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$ ,  $\delta_{31} = -4.5$ ,  $\delta_{32} = -2.87$

Fig. 12. Projections of chaotic attractors of (11) when  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = 2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = 2.7$ ,  $\delta_{13} = 0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$ ,  $\delta_{31} = -4.5$ ,  $\delta_{32} = -2.87$

колебаний в третьем квадранте несколько больше, чем в первом, но все равно невелика. Область  $C_4$ , где автоколебательный режим глобально устойчив, выделена темно-серым цветом.

Из анализа автоколебательных режимов следует:

- При кооперативных связях в пространстве параметров есть несколько областей, где реализуются автоколебательные режимы — области  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Области существования автоколебательных режимов имеют небольшие размеры, при этом сами автоколебательные режимы не являются глобально устойчивыми. В области  $C_2$  автоколебательный режим может быть как регулярным, так и хаотическим.
- В случае конкурентных связей область существования автоколебательного режима  $C_4$  существенно больше областей  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Автоколебательный режим может быть как регулярным, так и хаотическим, при этом регулярный автоколебательный режим может быть глобально устойчивым.

Теперь рассмотрим пару  $\{1, 2\}$  с нелинейностью (8) с конкурентными (антагонистическими) связями  $\delta_{21} = -4.6$ ,  $\delta_{12} = -2.6$ ,  $b = 3.7$  и свяжем ее односторонними отрицательными связями с третьим элементом, где  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ . При  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$  фазовый портрет модели (11) определяют три устойчивых состояния равновесия:  $O_1(-0.1, 1.84, 0.028)$ ,  $O_3(1.63, -0.04, 0.18)$  и  $O_5(-3.0, 0.14, -1.07)$ , а также седла  $O_2(0.02, 0.01, 0.02)$ ,  $O_4(-1.35, 0.99, -0.18)$  с одномерными выходящими сепаратрисами. Влияние обратных связей от третьего элемента ансамбля к паре  $\{1, 2\}$  отражает рис. 13, который представляет разбиение плоскости параметров  $\delta_{31}$  и  $\delta_{32}$  на области с различным числом устойчивых состояний равновесия, которые помечены различным цветом, а также цифрой, отражающей число стационарных режимов. Границами выделенных областей служат кривые бифуркаций двукратного состояния равновесия — сплошные линии и Андронова–Хопфа — штрихпунктирные линии. Штриховкой отмечены области, при значениях параметров из которых существует регулярный автоколебательный режим. Эти области ограничены штрихпунктирной линией мягкой бифуркации Андронова–Хопфа, а также штрихпунктирной линией с двумя точками, которая включает в себя бифуркационные кривые петли сепаратрис, двукратного предельного цикла, а также бифуркации удвоения периода. Отметим, что при рассмотренных значениях параметра бифуркации удвоения периода является жесткой, которая не приводит к удвоению периодов автоколебательных режимов. Существование хаотических колебаний не установлено.

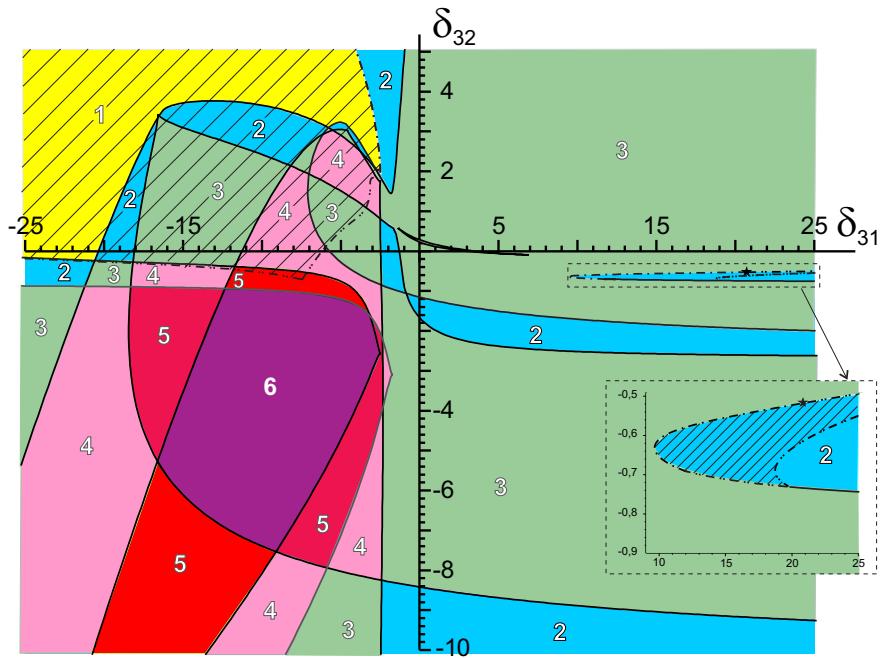


Рис. 13. Параметрический портрет модели (11) при  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = -2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ ,  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (цвет онлайн)

Fig. 13. Parametric portrait of the (11) when  $\gamma_1 = 0.6$ ,  $\delta_{21} = 4.6$ ,  $\delta_{12} = -2.6$ ,  $\gamma_2 = 0.5$ ,  $\delta_{23} = -2.7$ ,  $\delta_{13} = -0.75$ ,  $\gamma_3 = 0.54$ ,  $b = 3.7$  (color online)

Таким образом, проведенный анализ позволяет сделать вывод о важности связей в ансамблях связанных элементов-производств. При этом коллективное поведение элементов в ансамбле определяется как количеством элементов в ансамбле, так и правилом оценки сравниваемых величин добавленной стоимости (видом нелинейности  $\Phi$  дискриминатора  $D$ ). Можно констатировать, что увеличение элементов ансамбля с изначально однозначным стационарным поведением приводит к возникновению в пространстве параметров моделей зон мультистабильного поведения, к появлению автоколебательных режимов, как регулярных, так и хаотических.

### Заключение

В работе рассмотрена динамика эндогенной модели производственной сети в зависимости от типа связей между элементами-производствами. Элементы сети моделировались как системы автоматического управления. В качестве управляемой переменной принят экономический показатель — добавленная стоимость, что позволяет изучать модельную динамику валовой добавленной стоимости по всей сети, а следовательно, динамику изменения объема ВВП. Проведенные численные эксперименты с малыми ансамблями элементов показали, что включение кооперативных и конкурентных связей между элементами сети ведет к появлению регулярных и хаотических колебаний в динамике изменения ВВП, то есть к возникновению экономических циклов. Естественно, что предложенная нами модель не может быть основой для прогнозирования конкретных данных реальных экономических циклов, однако позволяет сделать заключение о перспективности предложенной модели и подхода для дальнейших экспериментов по изучению качественных особенностей экономических колебаний, причин их возникновения и характера их зависимости от экономических связей между участниками рынка.

## Список литературы

1. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 17. С. 50–61.
2. Кузнецов Ю. А. Математическое моделирование экономических циклов: факты, концепции, результаты (окончание) // Экономический анализ: теория и практика. 2011. Т. 10, № 18. С. 42–56.
3. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование экономических и финансовых циклов: генерация и синхронизация // Известия вузов. ПНД. 2021. Т. 29, № 4. С. 515–537. DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
4. Матросов В. В., Шалфеев В. Д. Моделирование процессов синхронизации бизнес-циклов в ансамбле связанных экономических осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. 2021. Т. 64, № 10. С. 833–843. DOI: 10.52452/00213462\_2021\_64\_10\_833.
5. Samuelson P., Nordhaus W. Economics. New York: McGraw Hill, 1992. 784 p.
6. Baxter M., King R. G. Measuring business cycles: approximate band-pass filter for economic time series // The Review of Economics and Statistics. 1999. Vol. 81, no. 4. P. 575–593. DOI: 10.1162/003465399558454
7. Hansen A. H. Business Cycles and National Income. New York: Norton, 1951. 639 p.
8. Лебедева А. С. Генезис теории экономического цикла // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 8. Р. 31–34
9. Вечканов Г. С., Вечканова Г. Р. Макроэкономика. М.: Питер, 2008. 240 с.
10. McCullen N. J., Ivanchenko M. V., Shalfeev V. D., Gale W. F. A dynamical model of decision-making behaviour in network of consumers with application to energy choices // Int. J. Bifurc. Chaos. 2011. Vol. 21, no. 9. P. 2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
11. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: ННГУ, 2013. 366 с.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
13. Матросов В. В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 54 с.

## References

1. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results. Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(17):50–61 (in Russian).
2. Kuznetsov YA. Mathematical modeling of economic cycles: facts, concepts, results (end). Economic Analysis: Theory and Practice. 2011;10(18):42–56 (in Russian).
3. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of business and financial cycles: Self-oscillation and synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2021;29(4):515–537 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2021-29-4-515-537.
4. Matrosov VV, Shalfeev VD. Simulation of the business-cycle synchronization processes in an ensemble of coupled economic oscillators. Radiophys. Quantum Electron. 2022;64(10): 750–759. DOI: 10.1007/s11141-022-10176-1.
5. Samuelson P., Nordhaus W. Economics. New York: McGraw Hill; 1992. 784 p.
6. Baxter M, King RG. Measuring business cycles: approximate band-pass filter for economic time series. The Review of Economics and Statistics. 1999;81(4):575–593. DOI: 10.1162/003465399558454
7. Hansen AH. Business Cycles and National Income. New York: Norton, 1951. 639 p.

8. Lebedeva AS. The genesis of economic cycle theory. Int. Research Journal. 2013;(8):31–34.
9. Vechkanov GS, Vechkanova GR. Macroeconomics. M.: Piter; 2002. 240 p.
10. McCullen NJ, Ivanchenko MV, Shalfeev VD, Gale WF. A dynamical model of decision-making behaviour in network of consumers with application to energy choices. Int. J. Bifurc. Chaos. 2011;21(9):2467–2480. DOI: 10.1142/S0218127411030076.
11. Shalfeev V, Matrosov VV. Nonlinear Dynamics of Phase Synchronization Systems. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2013. 366 p. (in Russian).
12. Andronov AA, Vitt AA, Khaikin SE. Theory of Oscillators. New York: Dover Publ.; 1987. 815 p.
13. Matrosov VV. Dynamics of Nonlinear Systems: Software Complex for Studying Nonlinear Dynamical Systems with Continuous Time. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Publishing; 2002. 54 p. (in Russian).

*Матросов Валерий Владимирович* — родился в 1960 году. Окончил Горьковский (Нижегородский) государственный университет им. Н. И. Лобачевского по специальности «Прикладная математика» (1982). Доктор физико-математических наук (2007), профессор (2009). Научный сотрудник НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н. И. Лобачевского (1984–1999), доцент кафедры теории колебаний и автоматического регулирования (1999), профессор этой кафедры (2007), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования (с 2013), декан радиофизического факультета ННГУ им. Н. И. Лобачевского (с 2014). Имеет более 100 научных и методических работ, в том числе 3 монографии и 3 учебных пособия, изданных как в России, так и за рубежом. Научный руководитель 5 кандидатских диссертаций. Член диссертационного совета Д 212.166.07 при ННГУ (радиофак) и научно-методического совета исследовательской школы «Колебательно-волновые процессы в природных и искусственных средах». Почетный работник сферы образования РФ, награжден знаком НТОРЭС им. А. С. Попова «За заслуги в развитии радиоэлектроники и связи».



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: matrosov@rf.unn.ru  
 ORCID: 0000-0003-3146-111X  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 24397

*Шалфеев Владимир Дмитриевич* — родился в 1941 году. Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1963). Доктор физико-математических наук (1991), профессор (1991). Заведующий лабораторией, заместитель директора по научной работе НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ (1963–1976). Декан факультета вычислительной математики и кибернетики ГГУ (1976–1981), заведующий кафедрой теории колебаний и автоматического регулирования ННГУ (1981–2012). Руководитель 12 кандидатских и 3 докторских диссертаций. Лауреат премии Ленинского комсомола (1974), премии РАН им. А. А. Андронова (2012). Действительный член Академии инженерных наук РФ (2000). Область научных интересов: динамика нелинейных систем синхронизации, пространственно-временной хаос, структуры. Автор и соавтор более 200 публикаций, в том числе 8 книг.



Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: shalfeev@rf.unn.ru  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 19690