



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 4  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(4)

Научная статья  
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003160  
EDN: NXMRAP

## Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда

В. А. Громов, К. К. Томащук<sup>✉</sup>, Ю. Н. Бесчастнов, А. А. Сидоренко, В. В. Какурин

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: stroller@rambler.ru, ✉korneytomashchuk@yandex.ru, y.beschastnov@mail.ru,

sidorenko.arto@gmail.com, vvkakurin@mail.ru

Поступила в редакцию 12.09.2024, принята к публикации 24.01.2025,

опубликована онлайн 29.01.2025, опубликована 31.07.2025

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — разработка численного метода бифуркационного анализа для нелинейных уравнений в частных производных, основанного на методе сведения уравнений в частных производных к обыкновенным с использованием теоремы Колмогорова–Арнольда. **Методы.** В данной работе описывается метод сведения уравнений в частных производных к обыкновенным с использованием теоремы Колмогорова–Арнольда, а также метод бифуркационного анализа нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. **Результаты.** В работе представлен новый метод решения и бифуркационного анализа нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, допускающих вариационную постановку. Метод был применён к нелинейной двумерной задаче Брату с граничными условиями типа Дирихле. **Заключение.** Разработан новый метод бифуркационного анализа для нелинейных уравнений в частных производных, а именно был предложен метод сведения уравнений в частных производных к обыкновенным, который позволяет применять разработанный аппарат бифуркационного анализа для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод позволяет строить бифуркационные картины для нелинейных уравнений в частных производных произвольного вида.

**Ключевые слова:** бифуркационный анализ, нелинейные уравнения в частных производных, краевые задачи, теорема Колмогорова–Арнольда.

**Благодарности.** Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и стратегического проекта «Устойчивый мозг: нейрокогнитивные технологии адаптации, обучения, развития и реабилитации человека в изменяющейся среде» по программе развития НИУ ВШЭ в рамках участия в программе Минобрнауки России «Приоритет-2030». Программа «Приоритет-2030» реализуется в рамках национального проекта «Наука и университеты».

**Для цитирования:** Громов В. А., Томащук К. К., Бесчастнов Ю. Н., Сидоренко А. А., Какурин В. В. Метод построения полной бифуркационной картины краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных: применение теоремы Колмогорова–Арнольда // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 4. С. 435–465. DOI: 10.18500/0869-6632-003160. EDN: NXMRAP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## A method for constructing a complete bifurcation picture of a boundary value problem for nonlinear partial differential equations: application of the Kolmogorov–Arnold theorem

V. A. Gromov, K. K. Tomashchuk<sup>✉</sup>, Y. N. Beschastnov, A. A. Sidorenko, V. V. Kakurin

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia  
E-mail: stroller@rambler.ru, ✉korneytomashchuk@yandex.ru, y.beschastnov@mail.ru,  
sidorenko.arto@gmail.com, vvkakurin@mail.ru

Received 12.09.2024, accepted 24.01.2025, available online 29.01.2025, published 31.07.2025

**Abstract.** The purpose of this study is to develop a numerical method for bifurcation analysis of nonlinear partial differential equations, based on the reduction of partial differential equations to ordinary ones, using the Kolmogorov–Arnold theorem. **Methods.** This paper describes a method for reducing partial differential equations to ordinary ones using the Kolmogorov–Arnold theorem, as well as methods for the bifurcation analysis of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. **Results.** The paper presents a new method for solving and bifurcation analysis of nonlinear boundary value problems for partial differential equations, which allow variational formulation. The method was applied to a nonlinear two-dimensional Bratu problem with Dirichlet-type boundary conditions. **Conclusion.** A new method of bifurcation analysis for nonlinear partial differential equations has been developed. Specifically, a method has been proposed for reducing partial differential equations to ordinary equations, which allows the use of the developed apparatus of bifurcation analysis for boundary value problems of ordinary differential equations. This method allows conducting bifurcation analysis for arbitrary nonlinear partial differential equations.

**Keywords:** bifurcation analysis, nonlinear partial differential equations, boundary value problems, Kolmogorov–Arnold theorem.

**Acknowledgements.** This work/article is an output of a research project implemented as part of the Basic Research Program at the HSE University and Strategic Project “Human Brain Resilience: Neurocognitive Technologies for Adaptation, Learning, Development and Rehabilitation in a Changing Environment”, which is part of Higher School of Economics’ development program under the “Priority 2030” academic leadership initiative. The “Priority 2030” initiative is run by Russia’s Ministry of Science and Higher Education as part of National Project “Science and Universities”.

**For citation:** Gromov VA, Tomashchuk KK, Beschastnov YN, Sidorenko AA, Kakurin VV. A method for constructing a complete bifurcation picture of a boundary value problem for nonlinear partial differential equations: application of the Kolmogorov–Arnold theorem. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(4):435–465. DOI: 10.18500/0869-6632-003160

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Решение значительного числа естественнонаучных задач делает необходимым построение, преимущественно в рамках численных методов, полной бифуркационной картины для краевых задач для систем нелинейных уравнений в частных производных (нелинейных краевых задач). При этом если для отыскания решений задач данного класса мы можем указать значительное число методов (метод конечных элементов, метод конечных разностей и др.), то задача создания метода построения полной бифуркационной картины (включающей ветви первичного, вторичного, третичного и т. д. ветвления) остаётся далекой от разрешения. Собственно говоря, здесь наблюдается определённый разрыв между глубокими теоретическими построениями теории бифуркаций (и теории катастроф) [1–3] и методами, позволяющими построить полную бифуркационную картину для нелинейных уравнений в частных производных, а также проанализировать её в рамках указанных теорий. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий строить полную бифуркационную картину в широком классе нелинейных краевых задач для уравнений в частных

производных, допускающих вариационную постановку; метод обобщает подход Н. И. Ободан и В. А. Громова [4–8] на общий случай представления неизвестных функций задачи в рамках теоремы Колмогорова–Арнольда.

Дальнейшее изложение структурировано следующим образом. В следующем разделе представлен обзор методов решения и бифуркационного анализа уравнений в частных производных, опирающихся на то или иное представление функции многих переменных как суперпозиции функций одной переменной. В разделе 2 представлена постановка задачи, а также уравнения модельной задачи (задача Брату); в разделе 3 изложен предложенный в настоящей статье метод решения нелинейных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Метод сведения уравнений в частных производных с помощью теоремы Колмогорова изложен в секциях 3.5–3.8. В разделе 4 описаны результаты численного эксперимента для задачи Брату. В последнем разделе представлены выводы.

## 1. Обзор литературы

**1.1. Представление функций многих переменных как суперпозиции функций одной переменной.** В рамках рассматриваемого метода предполагается сведение (в рамках итерационного процесса) краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных к последовательности краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; при этом и бифуркационный критерий для краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных представляет собой «комбинацию» бифуркационных критериев для соответствующих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что для обыкновенных дифференциальных уравнений в [9] была предложена методология численного построения полной бифуркационной картины и её анализа в рамках теории катастроф, опирающаяся на теорему Келлера–Антмана [10].

Вышеуказанное обстоятельство обуславливает необходимость представления функции многих переменных как суперпозиции функций одной переменной. Классический метод Фурье предполагает представление неизвестной функции в виде

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i^*(x_1)g_i^*(x_2). \quad (1)$$

Здесь и далее звёздочкой помечены заданные функции, без звёздочки фигурируют функции, подлежащие определению в рамках того или иного численного алгоритма. В работах Л. В. Канторовича [11] был предложен метод, в рамках которого неизвестные функции задачи представлялись в виде

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i^*(x_1)g_i(x_2). \quad (2)$$

Подстановка представления (2) в вариационную постановку задачи с последующим варьированием по неизвестным функциям  $g(x_2)$  сводит задачу бифуркационного анализа краевых задач для системы нелинейных уравнений в частных производных к задаче бифуркационного анализа краевых задач систем обыкновенных дифференциальных уравнений<sup>1</sup>. В работах Н. И. Ободан и В. А. Громова [4–8, 13, 14] был предложен итерационный обобщённый метод Канторовича (ИОМК), основывающийся на представлении вида

$$u(x_1, x_2) \approx \sum_i h_i(x_1)g_i(x_2). \quad (3)$$

<sup>1</sup>В статье [12] предоставлен обзор существующих методов сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (метод Фурье, метод Галёркина и др.).

Здесь определению (в рамках итерационного процесса) подлежат уже как функции  $h_i(x_1)$ , так и функции  $g_i(x_2)$ .

Представление (3) позволяет свести задачу бифуркационного анализа краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных к задаче бифуркационного анализа краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [5]. Полученные здесь результаты хорошо согласуются<sup>2</sup> с теоретическими результатами, полученными в рамках теории особенностей дифференцируемых отображений (теории катастроф) — порядок вырожденности особых точек, допустимые варианты изменения числа максимумов и минимумов потенциальной функции при пересечении бифуркационного множества в пространстве параметров и др. [3]. В частности, полная бифуркационная картина здесь была построена для уравнений Кармана (уравнений теории оболочек) [5]. Указанное представление оказалось эффективным в весьма широком круге задач. Как нам представляется, здесь можно указать две причины. С одной стороны, такого рода представления можно рассматривать как построение базиса, «оптимального» для данной задачи: здесь мы не «навязываем» задаче некий предзаданный базис (например, базис Фурье), но ищем базис, наилучший для данной задачи. Вследствие этого число слагаемых в представлении (3) обычно весьма мало по сравнению с методами, основанными на разложении в ряд Фурье, где предполагается, что функция раскладывается по базису, одинаковому для всех задач. Здесь обычно достаточно двух-трёх слагаемых. С другой стороны, в значительном числе задач решение имеет вид (3) или близкий к нему.

Вместе с тем представление (3), очевидно, не является наиболее общим представлением функции многих переменных, использующим функции одной переменной. Наиболее общее представление даётся теоремой Колмогорова–Арнольда [15]<sup>3</sup>. В формулировке Д. Шпрехера теорема Колмогорова–Арнольда принимает вид [17, 18]:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p + aq) \right), \quad (4)$$

где константы  $a, \alpha_p, p = 1, \dots, n$  и внутренняя функция  $\psi(x)$  одинаковы для всех непрерывных  $u(x_1, \dots, x_n)$ . Следует подчеркнуть, что представление (4), в отличие от представлений (1)–(3), представляет собой точное равенство; при этом число слагаемых здесь мало и определяется лишь числом аргументов функции  $u$ .

В формулировке Хедберга–Кахане теорема Колмогорова–Арнольда принимает вид [19]:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \chi \left( \sum_{p=1}^n \lambda_p \psi_q(x_p) \right). \quad (5)$$

В отличие от предыдущих формулировок, формулировка Хедберга верна для «почти всех» наборов функций  $(\psi_0(x), \dots, \psi_{2n}(x))$ , где  $\psi_i$  принадлежит к классу непрерывных неубывающих функций, удовлетворяющих условиям  $\psi_i(0) = 0, \psi_i(1) = 1$ , для которых существуют целочисленно независимые константы  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

Наконец, в формулировке Р. Досса [20] теорема Колмогорова–Арнольда принимает вид

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right). \quad (6)$$

<sup>2</sup>Что далеко не всегда так для методов, опирающихся на конечные разности, конечные элементы и др.

<sup>3</sup>Отметим также работу Майорова–Пинкуса [16], в которой даётся формула для наилучшего приближения (не точного представления!) функции многих переменных суперпозицией дифференцируемых функций одной переменной.

Данная формулировка также верна для «почти всех»  $n(2n + 1)$  наборов  $\varphi_{i,p} \in C(I)^{n(2n+1)}$ . Для удобства построения вычислительного процесса было использовано обобщение формулировки Досса (7):

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right). \quad (7)$$

Данная формулировка оказалась наиболее удобной с точки зрения построения вычислительного процесса.

Критика теоремы Колмогорова–Арнольда связана с тремя обстоятельствами. Во-первых, внутренние (формулировки Колмогорова–Арнольда и Шпрехера) или внешние (формулировки Хедберга, Досса и Шпрехера) функции являются всюду непрерывными, но нигде не дифференцируемыми («чёртова лестница»). В частности, для двумерной функции  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi * x_1) \sin(\pi * x_2)$  внешняя функция  $\Phi(z)$  в представлении Шпрехера (35) имеет вид (рис. 1).

Во-вторых, в оригинальном доказательстве отсутствовал конструктивный алгоритм построения как внешних, так и внутренних функций. В-третьих, даже то незначительное число (внутренних и внешних) функций, которые фигурируют в представлении (6), в некоторых случаях представляется слишком большим и должно быть уменьшено.

Решение первой из указанных проблем в общем случае, вероятно, невозможно. Здесь можно сослаться на работы А. Г. Витушкина [21, 22], в которых показано, что на кубе  $I_3$  можно определить  $k$  раз непрерывно дифференцируемую функцию трёх переменных, не представимую на этом кубе в виде конечной суперпозиции  $\lceil \frac{2}{3}k \rceil$  раз дифференцируемых функций двух

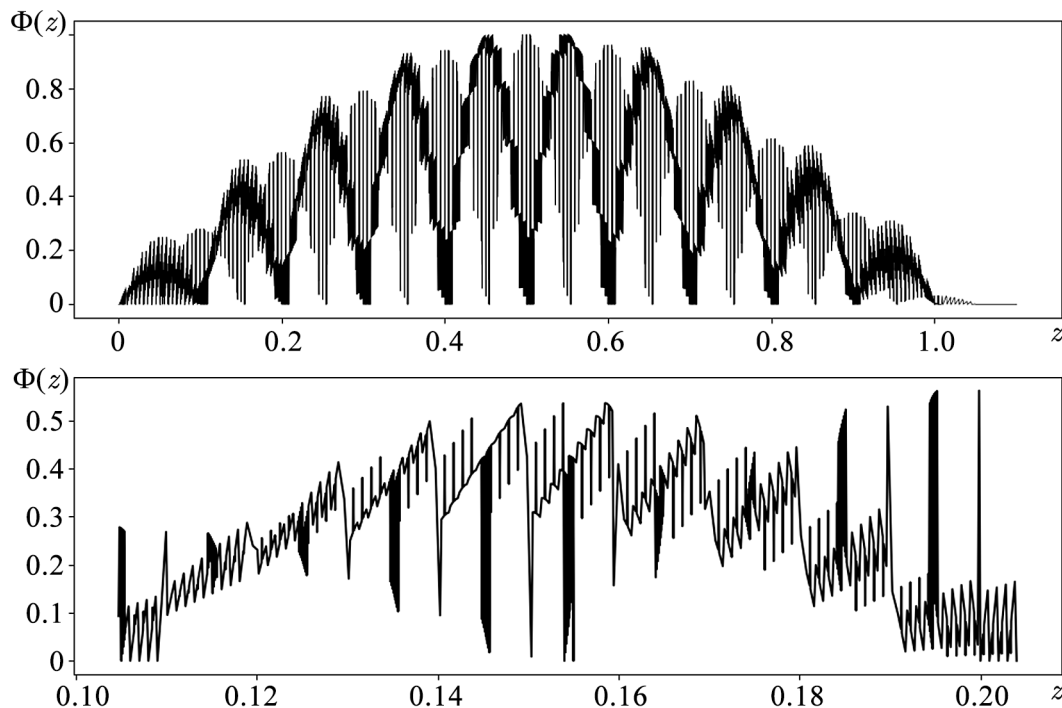


Рис. 1. График функции  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi * x_1) \sin(\pi * x_2)$  в представлении Шпрехера (35)

Fig. 1. Graph of the function  $u(x_1, x_2) = \sin(\pi * x_1) \sin(\pi * x_2)$  in the Sprecher's representation (35)

переменных, с частными производными порядка  $\lceil \frac{2}{3}k \rceil$ , которые удовлетворяют условию Липшица, где  $k$  — произвольное целое положительное число. Вместе с тем следует подчеркнуть, что поскольку в отличие от общего случая, рассматриваемого в теореме Колмогорова–Арнольда, мы ищем решение уравнения в частных производных, то на искомом решении все необходимые производные внутренних и внешних функций существуют и дифференцируемы<sup>4</sup>. С другой стороны, алгоритмы построения внутренних функций, предложенные для различных форм теоремы Колмогорова–Арнольда, являются итерационными алгоритмами, вычисляющими значения указанных функций в конечном числе точек, тем большим, чем больше номер итерации. Это означает, что на каждой конкретной итерации мы имеем значение функции в конечном числе точек и, аппроксимируя эти значения тем или иным способом (например, сплайнами), можем считать их — для конечной итерации — принадлежащими любому необходимому классу гладкости<sup>5</sup>. Здесь мы «опасно» приближаемся к вопросу о природе математического моделирования и дифференциальных уравнений. Мы будем придерживаться той точки зрения — допуская, впрочем, существование прямо противоположной — что мы моделируем реальный процесс, а дифференциальные соотношения являются лишь удобным средством его описания. Следовательно, наши предположения о безграничной делимости и им подобные, лежащие в основе большинства дифференциальных уравнений, являются лишь допущениями, удобными при выводе дифференциальных соотношений — очевидно, что всего лишь стократное уменьшение масштаба в два раза приводит нас в «мир» дискретных атомов, разделённых гигантскими расстояниями, а дальнейшее уменьшение — в квантовый мир. А тогда мы должны предположить, что алгоритмы анализа дифференциальных уравнений, позволяющие описать поведение соответствующей системы для произвольного, но конечного уровня дискретизации, являются «легитимным» средством описания реальных процессов.

Решению второй из указанных проблем посвящено значительное число работ, которые можно условно разделить на два направления. В рамках первого направления осуществляются попытки получения конструктивных алгоритмов построения внутренних функций для формулировок с фиксированными внутренними функциями. Здесь нужно отметить, прежде всего, работы Д. Шпрехера [17, 18], в которых предлагается итерационный алгоритм построения внешних функций. М. Коппен [23] указал на ошибку в алгоритме Шпрехера построения внутренней функции, которая приводит к немонотонности этой функции — нарушению необходимого условия теоремы Колмогорова–Арнольда. Он также предложил корректный алгоритм построения внутренней функции. Дж. Актор [24] предлагает алгоритм построения непрерывных по Липшицу внутренних функций, чем решает серьёзную вычислительную проблему; кроме того, алгоритм позволяет контролировать наклон функций<sup>6</sup>. В рамках второго направления решения второй из указанных проблем осуществляется построение оптимальных аппроксимаций (для которых точное равенство в формулировках типа (4), (5), (6) заменяется приближённым), дифференцируемых необходимое число раз, функциями одной переменной. Так, в работах Майорова–Пинкуса [16] предлагается аппроксимация с использованием дифференцируемых сигмоидальных функций. К этому направлению примыкают работы Тегмарк [25], где теорема Колмогорова–Арнольда используется в архитектуре нейронных сетей. В данном подходе внутренние функции аппроксимируются В-сплайнами.

Среди работ, посвящённых решению третьей из указанных проблем (уменьшению числа функций), можно отметить статьи [17, 26]. Так, в статье [17] Д. Шпрехер даёт формулировку

<sup>4</sup>Что, разумеется, оказывается далеко не так, как только мы даже немного отступаем от решения.

<sup>5</sup>В пределе по числу итераций они сходятся, согласно теореме Колмогорова, к везде непрерывным, нигде не дифференцируемым функциям.

<sup>6</sup>В работе также дан обзор различных формулировок теоремы Колмогорова–Арнольда.



теоремы, где используется только одна внутренняя функция (он использует линейные сдвиги её аргумента), а также предлагает алгоритм построения этой функции. В работе Лоренца [26] и вовсе используются всего две функции — одна внутренняя и одна внешняя (он использует линейные сдвиги внутренней и внешней функций).

**1.2. Алгоритм построения полной бифуркационной картины.** Алгоритм построения полной бифуркационной картины для статических задач для уравнений в частных производных обычно включает в себя: алгоритм идентификации особых точек (бифуркационный критерий); алгоритм классификации особых точек с выделением предельных особых точек и точек бифуркации<sup>7</sup> и порядка их вырожденности; алгоритм продолжения по параметру и смены параметра продолжения для преодоления предельных особых точек (path-tracing); алгоритм построения постбифуркационных ветвей решения, исходящих из данной точки бифуркации. Здесь следует подчеркнуть, что результаты применения данного алгоритма должны согласовываться с известными теоретическими результатами теории бифуркаций и теории катастроф (например, о порядке вырожденности особых точек — однократная или двукратная) и не зависеть от числа узлов аппроксимации. Последнее требование практически исключает возможность применения сеточных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных, а также значительной части бессеточных (обзор последних можно найти в [27]). В рамках представления (3) для построения бифуркационной картины нелинейных уравнений в частных производных в работах [4, 5, 9, 13, 28] был предложен новый итеративный подход к решению уравнений в частных производных — итеративный обобщённый метод Канторовича (ИОМК).

В данном методе искомые функции многих переменных представляются в виде суммы произведений одномерных (3), что позволяет свести краевую задачу уравнений в частных производных к последовательности краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный подход также позволяет свести (в рамках представления (3)) бифуркационный анализ краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных к бифуркационному анализу краевых задач для нелинейных обыкновенных уравнений ОДУ. Существенным достоинством данного подхода является то, что результаты бифуркационного анализа не зависят от использованного способа дискретизации, а также от числа точек дискретизации, но определяются лишь порядком самого уравнения, что позволяет в полной мере применять теоремы теории бифуркаций к анализу уравнений в частных производных<sup>8</sup>. В работах [4, 5, 8, 9, 28, 30] данный метод и сопутствующие алгоритмы применяются к уравнениям Кармана теории тонкостенных оболочек для получения решений; здесь представлена полная бифуркационная картина соответствующей нелинейной краевой задачи<sup>9</sup>.

Представление (3) не является наиболее общим представлением функции многих переменных через суперпозицию функций одной переменной, что обуславливает необходимость использования различных формулировок теоремы Колмогорова для конструирования методов построения полной бифуркационной картины, построенных по модели ИОМК.

В настоящем исследовании предлагается метод численного построения полной бифуркационной картины для краевых задач нелинейных уравнений в частных производных, основанный на представлении теоремы Колмогорова в формах Шпрехера (4), Хедберга (5) и Досса (6).

<sup>7</sup>В некоторых случаях возможен комбинированный вариант (hill-top bifurcation).

<sup>8</sup>Классические подходы к решению краевых задач для уравнений в частных производных (метод конечных элементов, метод конечных разностей и др.) обычно позволяют решить исследуемое уравнение, но результаты бифуркационного анализа могут качественно отличаться в зависимости от порядка дискретизации [29].

<sup>9</sup>Отметим, что на основании предложенной методологии бифуркационного анализа (решение прямой задачи теории бифуркаций) в работах [5, 6, 31] рассматривается проблема прогнозирования бифуркации и определения состояния, предшествующего бифуркации (обратная задача теории бифуркаций).

## 2. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для нелинейного уравнения в частных производных, данная своей вариационной постановкой:

$$\Xi(u) \longrightarrow \underset{u}{extr}, \quad (8)$$

где  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  — односвязная выпуклая область;  $u \in W_2^k(\Omega)$  — неизвестная функция;  $W_2^k(\Omega)$  — пространство Соболева, а  $F$  такое, что выполняется необходимое условие локального экстремума [32]:

$$\Xi = \int \int_{\Omega} \dots \int F\left(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial^2 u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \dots, \frac{\partial^N u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (9)$$

В качестве ограничений выступают граничные условия вида

$$S(u) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10)$$

где  $\partial\Omega$  — граница односвязной выпуклой области  $\Omega$  конечномерного пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $S$  — линейный оператор, который переводит  $u$  в  $\{u : u|_{\partial\Omega} = 0\}$ .

Необходимо предложить метод построения полной бифуркационной картины для нелинейной краевой задачи (8)–(10), позволяющий:

1. Строить решения нелинейной краевой задачи и ветви решения функции в зависимости от параметра.
2. Идентифицировать особые точки решения.
3. Определять их тип и порядок вырожденности<sup>10</sup>.
4. Строить постбифуркационные ветви решения.

В конечном итоге такой метод должен позволить строить полную бифуркационную картину для краевой задачи для нелинейных уравнений в частных производных, включающую ветви первичного, вторичного, третичного и т. д. ветвлений.

В качестве модельных рассматриваются уравнения Брату [33, 34]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \gamma e^{u(x_1, x_2)} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (11)$$

с граничными условиями вида Дирихле:

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \quad (12)$$

где  $\Omega = [0, 1]^2$ . Вариационная задача, эквивалентная дифференциальной, задаётся формулой (13):

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[ \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u}{\partial x_2} \right]^2 - 2\gamma e^{u(x_1, x_2)} \right] dx_1 dx_2 \longrightarrow \underset{u(x_1, x_2)}{extr}. \quad (13)$$

Существование решения задачи Брату доказывается, например, в работах [35, 36].

<sup>10</sup>Здесь предполагается, что указанные характеристики не будут зависеть от способа аппроксимации, но только от порядка самих уравнений, и будут согласовываться с теоретическими результатами теории бифуркаций.



### 3. Метод численного построения полной бифуркационной картины нелинейной краевой задачи

**3.1. Метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши, использующий итерационную формулу метода Ньютона** (в дальнейшем — для краткости — метод Ньютона). В конечном итоге любой из рассмотренных ниже методов решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных так или иначе сводится к последовательности решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений был выбран метод Ньютона. Существенным достоинством метода является то, что данный метод позволяет легко сформулировать бифуркационный критерий для такого рода задач (см. раздел 2.2). Подробное изложение метода можно найти в [5, 37].

Рассмотрим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (14):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), \gamma), \\ h(x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y(x)$  — вектор-функция неизвестных задачи,  $f(x, y(x), \gamma)$  — вектор-функция правых частей,  $\gamma$  — вектор параметров,  $h(x_0, x_1, y(x_0), y(x_1), \gamma)$  — граничные условия.

Метод заключается в сведении рассматриваемой задачи к эквивалентной ей задаче Коши (16):

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), \gamma), \\ y(x^*) = \xi, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\xi$  является вектором значений неизвестных функций задачи  $y(x)$  в произвольной, но фиксированной точке  $x^* \in [x_0, x_1]$ . Интегрирование любым известным методом численного интегрирования<sup>11</sup> из точки  $x^*$  к границам промежутка интегрирования позволяет вычислить невязки задачи как функции вектора (17):

$$\varphi(\xi, \gamma) = h(x_0, x_1, y(x_0, \xi), y(x_1, \xi), \gamma) = 0. \quad (17)$$

Здесь  $\varphi(\xi, \gamma)$  — вектор невязок, заданных в неявном виде через решение задачи Коши (16).

Тем самым задача (14)–(15) сводится к задаче нахождения вектора  $\xi$ , обращающего в ноль вектор невязок  $\varphi(\xi, \gamma)$ , то есть отыскания решения системы трансцендентных уравнений (17).

Для отыскания решения используется метод Ньютона, итерационная формула которого (18):

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - \mathcal{F}^{-1} \varphi(\xi^{(k)}, \gamma), \quad (18)$$

где  $\mathcal{F}$  является численным аналогом матрицы производных Фреше:

$$\mathcal{F}_{i,j} \approx \frac{\varphi_i(\xi_0, \dots, \xi_j + \Delta, \dots, \xi_n, \gamma) - \varphi_i(\xi_0, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n, \gamma)}{\Delta}, \quad (19)$$

а  $\Delta$  — малое, но конечное приращение.

**3.2. Вариационная постановка задачи и связь с теорией катастроф.** Вариационная постановка краевой задачи (14)–(15) может быть записана в виде

$$J(y, y') \longrightarrow \min. \quad (20)$$

<sup>11</sup>Мы использовали метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

Добавление к вариационной постановке в качестве ограничений всех или части условий стационарности функционала не меняет решения вариационной задачи [10, 38]. Соответственно, добавление к функционалу (20) условий (15) превращает его в функцию конечного числа переменных  $\xi$  и вектора параметров  $\gamma$ , то есть в математический объект, который можно исследовать в рамках теории катастроф:

$$H(y, y', \gamma; \xi) \longrightarrow \text{extr.} \quad (21)$$

Градиент функции (21) даёт множество невязок (17), а её гессиан — матрицу Фреше (19). Указанные обстоятельства означают, что задача (14)–(15) в случае наличия вариационной постановки (20) может быть исследована не только методами теории бифуркаций, но и методами теории катастроф [1, 3, 29].

Следует подчеркнуть, что порядок матрицы Фреше в данном подходе определяется не числом узлов аппроксимации, но исключительно порядком самой задачи (числом уравнений в системе). Это позволяет получать в численном расчёте результаты, хорошо согласующиеся с результатами теории катастроф и теории бифуркаций [3, 10, 39]: в частности, для большинства исследованных авторами систем порядок вырожденности матрицы был равен одному или двум, при этом наблюдающиеся поверхности решений соответствовали каспоидным и омбилическим катастрофам соответственно, как это и предполагает теория катастроф.

В рамках сформулированного выше подхода к решению нелинейных краевых задач критическая точка потенциальной функции (21) эквивалентна решению (14)–(15), а вырожденная критическая точка — особой точке решения данной задачи. Это позволило Келлеру и Антману [10] сформулировать критерий для идентификации и классификации особых точек решения (критических точек потенциальной функции (21)). Точка  $(\xi, \gamma)$  является особой точкой, если при данном значении вектора параметров матрица Фреше  $\mathcal{F}$  вырождена:

$$\det(\mathcal{F}) = 0. \quad (22)$$

На практике используется определитель приближения (19), вычисленный на последней итерации метода Ньютона.

Двумя важными характеристиками здесь является порядок вырожденности матрицы  $\mathcal{F}$  и её тип. Порядок вырожденности  $l$  (коранг) матрицы  $\mathcal{F}$  размерности  $n \times n$  определяется как  $l = n - r$ , где  $r$  является рангом данной матрицы. Так как матрица  $\mathcal{F}$  определяется через численное решение задачи сведения краевой задачи к эквивалентной задаче Коши, то и коранг матрицы может быть численно аппроксимирован. В рамках предложенного метода рассматривается численный коранг матрицы: для определения численного коранга матрицы  $\mathcal{F}$  вычисляются её сингулярные значения. Здесь удобно следить за сингулярными значениями матрицы  $\mathcal{F}$  как за функциями параметра продолжения на интервале, содержащем особую точку (см., например, рис. 2, рис. 3): некоторые сингулярные значения касаются точки ноль (обращаются в ноль), а некоторые — нет (хотя могут быть близки к нулю, но не касаются).

Первый случай соответствует однократному вырождению (каспоидные катастрофы), второй — двукратному (омбилические катастрофы)<sup>12</sup>. Здесь возможен и более тонкий анализ в рамках теории катастроф, позволяющий отнести наблюдаемое многообразие ветвей решения к типу одной из элементарных катастроф (см., например, [37]), а свойства элементарных катастроф хорошо известны [2, 3, 29].

Другая классификация особых точек решения делит их на предельные особые точки и точки бифуркации. Для определения типа особой точки строится расширенная матрица Фреше,

<sup>12</sup>На графике зависимости определителя матрицы  $\mathcal{F}$  от параметра эти случаи соответствуют пересечению графиком определителя оси абсцисс и его касанию этой оси.

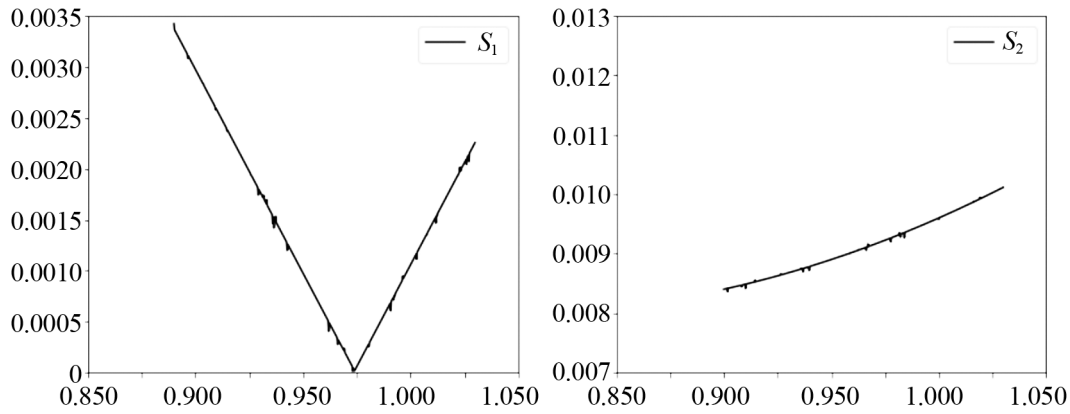


Рис. 2. Слева направо: графики поведения первого и второго сингулярного значения матрицы  $\mathcal{F}$  в случае однократной вырожденности

Fig. 2. From left to right: graphs of the behavior of the first and second singular values of the matrix  $\mathcal{F}$  in the case of single degeneracy

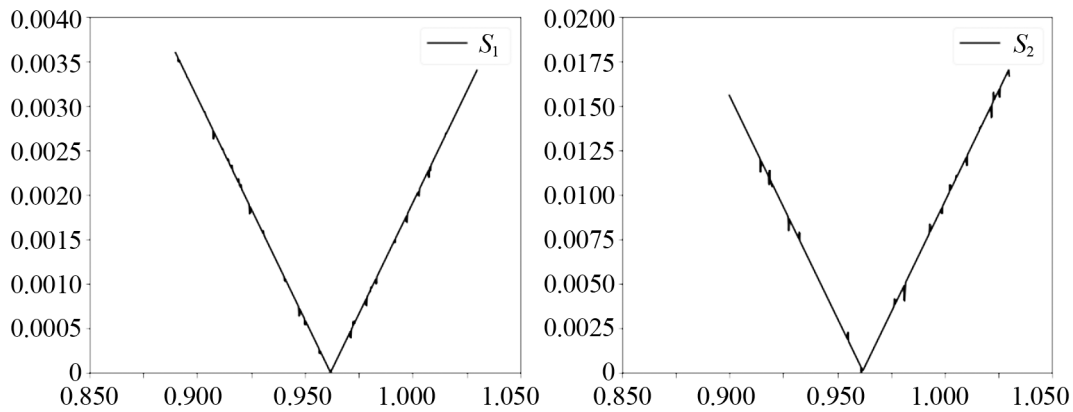


Рис. 3. Слева направо: графики поведения первого и второго сингулярного значения матрицы  $\mathcal{F}$  в случае двукратной вырожденности

Fig. 3. From left to right: graphs of the behavior of the first and second singular values of the matrix  $\mathcal{F}$  in the case of double degeneracy

которая получается из матрицы Фреше путём добавления столбца производных по параметру  $\gamma$ :

$$\mathcal{F}_{i,n+1}^* = \frac{\varphi_i(\xi, \gamma + \Delta) - \varphi_i(\xi, \gamma)}{\Delta}. \quad (23)$$

Пусть  $\mathcal{F}_k^*$  — матрица, получаемая из матрицы  $\mathcal{F}^*$  удалением  $k$ -ого столбца. Тогда тип особой точки определяется по следующим критериям:

$$\begin{aligned} \forall k = 1, \dots, n+1 : \det(\mathcal{F}_k^*) = 0, &\implies (\xi, \gamma) - \text{точка бифуркации,} \\ \exists k = 1, \dots, n+1 : \det(\mathcal{F}_k^*) \neq 0, \det(\mathcal{F}) = 0, &\implies (\xi, \gamma) - \text{предельная точка.} \end{aligned} \quad (24)$$

**3.3. Преодоление предельных особых точек и выход на постбифуркационные ветви решения в точках бифуркации.** Сходимость метода Ньютона во многом определяется «удачным» выбором начального приближения. Для получения как можно более хорошего начального приближения может быть использован метод продолжения по параметру [40], где начальное приближение для следующего значения параметра  $\gamma_{i+1}$  находится по решениям, отвечающим

предыдущим значениям параметра  $(\gamma_i, \gamma_{i-1}, \dots)$ , с использованием интерполяционных многочленов Ньютона. В частности, нами использовались полиномы 3 степени:

$$\begin{aligned}\xi(\gamma_{i+1}) &= \xi(\gamma_{i-2}) + [\gamma_{i+1} - \gamma_{i-2}]\xi(\gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}) + [\gamma_{i+1} - \gamma_{i-2}][\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}]\xi(\gamma_{i-2}, \gamma_{i-1}, \gamma_i), \\ \xi(\gamma_l, \gamma_j) &= \frac{\xi(\gamma_j) - \xi(\gamma_l)}{\gamma_j - \gamma_l}, \\ \xi(\gamma_l, \gamma_j, \gamma_k) &= \frac{\xi(\gamma_j, \gamma_k) - \xi(\gamma_l, \gamma_j)}{\gamma_k - \gamma_l}.\end{aligned}\tag{25}$$

Здесь  $\xi(\gamma_j), j \leq i$  — значения функций-решений краевой задачи (14)–(15) в точке  $x^* \in [x_0, x_1]$ , отвечающие решению для значения параметра  $\gamma_j$ .

В случае невозможности дальнейшего движения по параметру (например, в случае несуществования решения при больших значениях параметра, как это имеет место для предельных особых точек — см. рис. 7) используется метод смены ведущего параметра: из вектора начального приближения  $\xi$  выводится самая быстрорастущая компонента ( $\xi_i : i = \arg\max_i |\xi_i(\gamma_{j+1}) - \xi_i(\gamma_j)|$ ), и далее движение осуществляется по ней как по параметру. Старый параметр занимает место данной компоненты в векторе  $\xi$ . Итерационная формула (18) сохраняется, но матрица производных  $\mathcal{F}$  заменяется матрицей  $\mathcal{F}_\gamma$ , в которой столбец производных по выведенной компоненте заменяется столбцом производных по параметру  $\gamma$ . Данный подход помогает преодолевать предельные особые точки решения.

**3.4. Представление функции многих переменных в виде суперпозиции функции одной переменной с помощью представления Шпрехера.** Для представления неизвестной функции краевой задачи, данной своей вариационной формулировкой (8), (10), в виде суперпозиции функций одной переменной воспользуемся теоремой Колмогорова в формулировке Шпрехера (4) и тем фактом, что  $a$  является малым параметром<sup>13</sup>. Разложим представление (4) в ряд Тейлора по параметру  $a$ :

$$\sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=0}^n \alpha_p \psi(x_p + qa) \right) = \sum_{m=0}^M \frac{a^m}{m!} \frac{d^m}{da^m} \left( \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{i=p}^n \alpha_p \psi(x_p + aq) \right) \right) \Big|_{a=0}.\tag{26}$$

Для более компактной записи воспользуемся полиномами Белла и формулой Фаа-ди-Бруно.

Полином Белла задаётся формулой (27):

$$B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \sum \left( \frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_{n-k+1}!} \prod_{i=1}^{n-k+1} \left( \frac{x_i}{i!} \right)^{j_i} \right),\tag{27}$$

где внешняя сумма берётся по всем неотрицательным  $j_1, j_2, \dots, j_{n-k+1}$ , которые удовлетворяют двум условиям (28), (29):

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} j_i = k,\tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i j_i = n.\tag{29}$$

<sup>13</sup>Так для  $\gamma = 10$ , что является рекомендованным значением параметра для случая  $n = 2$ , получаем  $a = 1/90$ . Так как единственное ограничение для параметра  $\gamma - \gamma \geq 2n + 2$ , то мы можем положить  $\gamma \rightarrow \infty$ , тогда получим  $a \rightarrow 0$ .

Формула Фаа-ди-Бруно (30) используется для представления производной сложной функции произвольного порядка:

$$\frac{d^m}{dx^m} f(g(x)) = \sum \left( \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_m!} \cdot f^{(j_1 + \dots + j_m)}(g(x)) \prod_{i=1}^m \left( \frac{g^{(i)}(x)}{i!} \right)^{j_i} \right), \quad (30)$$

где внешняя сумма берётся по всем неотрицательным целым числам, которые удовлетворяют условию (29). С использованием полиномов Белла запишем формулу Фаа-ди-Бруно в следующем виде:

$$\frac{d^m}{dx^m} f(g(x)) = \sum_{k=0}^m f^{(k)}(g(x)) B_{m,k}(g'(x), g''(x), \dots, g^{(m-k+1)}(x)). \quad (31)$$

Тогда с помощью полиномов Белла получаем компактный вид разложения теоремы Колмогорова в ряд Тейлора, как показано в уравнении (32):

$$\left. \frac{d^m}{da^m} \left( \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p + aq) \right) \right) \right|_{a=0} = \sum_{k=0}^m \sum_{q=0}^{2n} \Phi_q^{(k)} \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p) \right) \times \\ \times q^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (32)$$

где

$$B_{m,k} \left( q \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi'(x_p), q^2 \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi''(x_p), \dots, q^{(m-k+1)} \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi^{(m-k+1)}(x_p) \right) = \\ = q^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (33)$$

Тогда представление теоремы Колмогорова–Арнольда после разложения в ряд Тейлора в окрестности  $a = 0$  даётся формулой (34):

$$\sum_{q=0}^{2n} \Phi_q \left( \sum_{p=0}^n \alpha_p \psi(x_p + qa) \right) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, \dots, x_n) \sum_{q=0}^{2n} \frac{a^m q^m}{m!} \Phi_q^{(k)} \left( \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p) \right). \quad (34)$$

Сделав замену  $z = \sum_{p=1}^n \alpha_p \psi(x_p)$ , получим представление функции многих переменных  $u(x_1, \dots, x_n)$  в виде суммы функций одной переменной (35):

$$u(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \tilde{B}_{m,k}(x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{q=0}^{2n} \frac{a^m q^m}{m!} \Phi_q^{(k)}(z), \quad (35)$$

В итоге получаем представление неизвестной функции нелинейной краевой задачи для уравнения в частных производных в виде функции одной переменной.

**3.5. Метод сведения уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием представления Шпрехера [17].** Для того чтобы свести нелинейную краевую задачу для уравнений в частных производных к последовательности задач обыкновенных дифференциальных уравнений, воспользуемся разложением (35) для неизвестных функций многих переменных, входящих в функционал. Произведём замену переменных:

$$x_i = \bar{x}_i, i = \overline{2, n}, \\ x_1 = \psi^{-1} \left( \frac{z - \sum_{p=2}^n \alpha_p \psi(x_p)}{\alpha_1} \right), \quad (36)$$

тем самым обращая  $x_2, \dots, x_n$  в параметры (производные по ним более не входят в функционал). Тогда границы интегрирования меняются согласно формулам (37):

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &\mapsto z^{\min} = \alpha_1 \psi(x_1^{\min}) + \alpha_2 \psi(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_n \psi(\bar{x}_n), \\ x_1^{\max} &\mapsto z^{\max} = \alpha_1 \psi(x_1^{\max}) + \alpha_2 \psi(\bar{x}_2) + \dots + \alpha_n \psi(\bar{x}_n), \end{aligned} \quad (37)$$

а якобиан замены координат будет иметь вид (38):

$$|J| = \begin{vmatrix} \alpha_1 \psi'(x_1) & \alpha_2 \psi'(x_2) & \dots & \alpha_n \psi'(x_n) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 \psi'(x_1). \quad (38)$$

Выразим частные производные функции  $u(x_1, \dots, x_n)$  через обыкновенные производные функций  $\Phi_i(z)$ , дифференцируя представление (35).

$$\frac{\partial^N u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}} = \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \left[ \sum_{j=0}^N \left[ \frac{\partial^N}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_N}} \left( \tilde{B}_{m,k}(x) \sum_{q=0}^{2n} \frac{a^m q^m}{m!} \Phi_q^{(k)}(z) \right) \right] \right]. \quad (39)$$

Заметим, что в результате любая частная производная функции  $u(x_1, \dots, x_n)$  выражается через обыкновенные производные функций одной переменной  $\Phi_q(z)$ . Таким образом, применив последовательно описанные выше действия к функционалу (9), получаем функционал относительно функций одной переменной:

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_S = \int_{z^{\min}}^{z^{\max}} L \left( z, \Phi_0(z), \dots, \Phi_{2n}(z), \frac{d\Phi_0(z)}{dz}, \dots, \right. \\ \left. \frac{d\Phi_{2n}(z)}{dz}, \dots, \frac{d^N \Phi_0(z)}{dz^N}, \dots, \frac{d^N \Phi_{2n}(z)}{dz^N} \Big|_{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n} \right) dz. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда вариационная задача (8) сводится к параметризованной вариационной задаче для функций одной переменной (41), которая может быть решена методами вариационного исчисления.

$$\begin{aligned} \forall \{ \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n \}, \bar{x}_2 \in [\bar{x}_2^{\min}, \bar{x}_2^{\max}], \dots, \bar{x}_n \in [\bar{x}_n^{\min}, \bar{x}_n^{\max}] : \\ \tilde{\Xi}_S \rightarrow \text{extr.}_{\Phi_q(z)} \end{aligned} \quad (41)$$

Приравнивая вариации функционала по неизвестным функциям к 0, получим краевую задачу обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения и бифуркационного анализа такого рода задач описаны выше в разделах 3.1, 3.2, 3.3.

**3.6. Метод сведения уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием представления Хедберга.** Напомним, что представление Хедберга (5) верно почти для всех внутренних функций  $\psi_q(x)$ . Аналогично предыдущему подходу, опирающемуся на представление Шпрехера, произведём замену переменных:

$$z = \sum_{l=1}^n \lambda_l \psi_0(x_l) \implies x_1 = \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \sum_{l=2}^n \lambda_l \psi_0(x_l)}{\lambda_1} \right), \quad (42)$$

тем самым обращая  $x_2, \dots, x_n$  в параметры (производные по ним более не входят в функционал).



Тогда границы интегрирования меняются согласно формулам (43):

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &\mapsto z^{\min} = \lambda_1 \psi_0(x_1^{\min}) + \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2) + \dots + \lambda_n \psi_0(\bar{x}_n), \\ x_1^{\max} &\mapsto z^{\max} = \lambda_1 \psi_0(x_1^{\max}) + \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2) + \dots + \lambda_n \psi_0(\bar{x}_n), \end{aligned} \quad (43)$$

а якобиан замены координат согласно (44):

$$|J| = \begin{vmatrix} \lambda_1 \psi'_0(x_1) & \lambda_2 \psi'_0(x_2) & \dots & \lambda_n \psi'_0(x_n) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \psi'_0(x_1). \quad (44)$$

Определим функции  $\theta_q(z)$  следующим образом:

$$\theta_q(z) = \lambda_1 \psi_q \left( \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \sum_{l=2}^n \lambda_l \psi_0(x_l)}{\lambda_1} \right) \right) + \sum_{l=2}^n \lambda_l \psi_q(x_l). \quad (45)$$

Тогда формула (5) принимает вид

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=0}^{2n} \chi(\theta_q(z)), \quad (46)$$

а частные производные функции  $u(x_1, \dots, x_n)$  выразим через функции одной переменной, например<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{q=0}^{2n} \lambda_i \psi'_q(x_i) \chi'(\theta_q(z)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{q=0}^{2n} \left[ [\lambda_i \psi'_q(x_i)]^2 \chi''(\theta_q(z)) + \lambda_i \psi''_q(x_i) \chi'(\theta_q(z)) \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

В представлении (47) фигурируют обыкновенные производные по разным аргументам. Для приведения производных к производным по одной переменной  $z$  воспользуемся формулой Фаа-ди-Бруно для дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} \chi_z^{(n)}(\theta_q(z)) &= \sum_{m=1}^n \chi^{(m)}(\theta_q(z)) B_{n,m}(\theta'_q(z), \dots, \theta_q^{(n-m+1)}(z)) \implies \\ \chi^n(\theta_q(z)) &= \frac{\chi_z^{(n)}(\theta_q(z)) - \sum_{m=1}^{n-1} \chi^{(m)}(\theta_q(z)) B_{n,m}(\theta'_q(z), \dots, \theta_q^{(n-m+1)}(z))}{B_{n,n}(\theta'_q(z), \dots, \theta_q^{(n-m+1)}(z))}. \end{aligned} \quad (48)$$

В итоге получаем функционал (9), зависящий от функции одной переменной:

$$\tilde{\Xi}_H = \int_{\bar{x}} \int_{z^{\min}}^{z^{\max}} L\left(z, \chi(\theta_q(z)), \frac{d\chi(\theta_q(z))}{dz}, \dots, \frac{d^N \chi(\theta_q(z))}{dz^N}, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right) dz d\bar{x}. \quad (49)$$

Тогда вариационная задача (8) сводится к набору вариационных задач в обыкновенных производных, которые решаются варьированием функционала по неизвестным функциям и приравниванием

<sup>14</sup>Здесь представлены частные производные первого и второго порядка. Очевидно, что представление позволяет получать выражения для производных произвольного порядка.

вариаций к 0. Методы решения и бифуркационного анализа таких задач описаны выше в разделах 3.1, 3.2, 3.3.

$$\forall \{\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}, \bar{x}_2 \in [\bar{x}_2^{\min}, \bar{x}_2^{\max}], \dots, \bar{x}_n \in [\bar{x}_n^{\min}, \bar{x}_n^{\max}] : \quad (50)$$

$$\tilde{\Xi}_H \rightarrow \underset{\chi(\theta_q(z))}{\text{extr}}.$$

**3.7. Метод сведения уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием представления Досса.** Воспользуемся представлением (6) за тем лишь исключением, что будем считать все функции известными (здесь и далее звёздочкой помечены заданные функции), кроме  $\varphi_i, \psi_{i,p}, p = \overline{1, n}$ :

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right) + \sum_{q=0, q \neq i}^{2n} \varphi_q^* \left( \prod_{p=1}^n \psi_{q,p}^*(x_p) \right) = \\ &= \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right) + \Phi_i^*(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (51)$$

Далее введём новую переменную  $z = \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p)$  и  $x_1$  выразим через  $z, x_2, \dots, x_n$ . Для существования обратной функции  $\psi_{i,1}(x_1)$  должна быть монотонна, что в большинстве случаев не так. Поэтому сначала  $\psi_{i,1}(x_1)$  разбивается на интервалы монотонности  $[x_1^{(k)}, x_1^{(k+1)}]$  и на каждом интервале осуществляется замена (52):

$$x_1 = \psi_{i,1,k}^{(-1)} \left( \frac{z}{\prod_{p=2}^n \psi_{i,p}(x_p)} \right) = \bar{x}_1. \quad (52)$$

Тогда меняются границы интегрирования (53)

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &\mapsto z^{(k)} = \psi_{i,1}(x_1^{(k)}) \psi_{i,2}(\bar{x}_2) \dots \psi_{i,n}(\bar{x}_n), \\ x_1^{(k+1)} &\mapsto z^{(k+1)} = \psi_{i,1}(x_1^{(k+1)}) \psi_{i,2}(\bar{x}_2) \dots \psi_{i,n}(\bar{x}_n) \end{aligned} \quad (53)$$

и Якобиан замены переменных (54)

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \psi'_{i,1}(x_1) \prod_{p=2}^n \psi_{i,p}(x_p) & \psi'_{i,2}(x_2) \prod_{p=1, p \neq 2}^n \psi_{i,p}(x_p) & \dots & \psi'_{i,n}(x_n) \prod_{p=1}^{n-1} \psi_{i,p}(x_p) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \psi'_{i,1}(x_1) \prod_{p=2}^n \psi_{i,p}(x_p). \end{aligned} \quad (54)$$

Используя новую переменную  $z$ , выразим функцию  $u(x_1, \dots, x_n)$  через функцию от  $z$ :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(z) + \Phi_i^*(z, \dots, x_n). \quad (55)$$

Далее получим два функционала: первый (56) путём подстановки представления (51) в функционал (9)

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \dots \int L_1 \left( x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi_i \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right), \dots, \varphi_i^{(N)} \left( \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}(x_p) \right), \right. \\ \left. \psi_{i,1}(x_1), \dots, \psi_{i,1}^{(N_1)}(x_1), \dots, \psi_{i,n}(x_n), \dots, \psi_{i,n}^{(N_n)}(x_n) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (56)$$

и второй (57) путём замены переменных (52) и смены порядка интегрирования в функционале (56).

$$\sum_k \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} \int_{x_n^{\min}(z)}^{x_n^{\max}(z)} \dots \int_{x_2^{\min}(z)}^{x_2^{\max}(z)} L_2 \left( z, x_2, \dots, x_n, \varphi_i(z), \dots, \varphi_i^{(N)}(z), \right. \\ \left. \psi_{i,1}(\bar{x}_1), \dots, \psi_{i,1}^{(N_1)}(\bar{x}_1), \dots, \psi_{i,n}(x_n), \dots, \psi_{i,n}^{(N_n)}(x_n) \right) dz dx_2 \dots dx_n. \quad (57)$$

Тогда, варьируя независимо по  $\psi_{i,p}(x_p)$  функционал (56), получим  $n$  обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, по одному для каждой  $\psi_{i,p}$ .

$$\psi_{i,p}^{(N_p)}(x_p) = F_{i,p} \left( x_p, \psi_{i,p}(x_p), \psi'_{i,p}(x_p), \dots, \psi_{i,p}^{(N_p-1)}(x_p) \right), \quad p = \overline{1, n}. \quad (58)$$

Варируя функционал (57) по  $\varphi_i(z)$ , получим обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение для внешней функции:

$$\varphi_i^{(N)}(z) = G_i \left( z, \varphi_i(z), \varphi'_i(z), \dots, \varphi_i^{(N-1)}(z) \right). \quad (59)$$

Тогда целиком метод отыскания решения выглядит следующим образом:

1. Инициализируем функции  $\varphi_i = 0$ ,  $\psi_{q,p} = 0$ ,  $q = \overline{1, 2n}$ ,  $p = \overline{1, n}$ . Положим  $i = 0$ .
2. Пока  $i \leq 2n$ :
  - 2.1. Положим внешнюю функцию тождественной:  $\varphi_i(z) = \varphi_i^{(0)}(z) = z$ ; а внутренние положим произвольными с тем лишь условием, чтобы они удовлетворяли граничным условиям:  $\psi_{i,p}(x_p) = \psi_{i,p}^{(0)}(x_p)$ .
  - 2.2. Пока  $\|\varphi_i^{(j+1)}(z) - \varphi_i^{(j)}(z)\| > \varepsilon_\varphi$ :
    - 2.2.1. Найдём внутренние функции с помощью итеративного алгоритма. Пока  $\|\prod_{p=1}^n \psi_{i,p}^{(k+1)}(x_p) - \prod_{p=1}^n \psi_{i,p}^{(k)}(x_p)\| > \varepsilon_\psi$ :
      - 2.2.1.1. Для каждой функции  $\psi_{i,p}^{(k+1)}(x_p)$  решим уравнение (58), считая другие внутренние функции и внешнюю известными (берём с предыдущей итерации).
      - 2.2.2. Найдём внешнюю функцию  $\varphi_i^{(j+1)}(z)$  из (59), считая внутренние функции известными.
  - 2.3. Функции с  $i$ -ой итерации фиксируются  $\varphi_i(z) = \varphi_i^{(j)}(z)$ ,  $\psi_{i,p}(x_p) = \psi_{i,p}^{(k)}(x_p)$ ,  $p = \overline{1, n}$ .
  - 2.4.  $i = i + 1$ .

**3.8. Численная реализация теоремы Колмогорова.** В том случае, когда сведение краевой задачи уравнений в частных производных к обыкновенным опирается на суперпозиционную теорему Колмогорова в формулировке Шпрехера, внутренние функции одинаковы для всех непрерывных функций многих переменных и могут быть вычислены с помощью специальных алгоритмов. Согласно теореме, произвольная функция  $n$  переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$  представима в виде суммы суперпозиций функций одной переменной (4). Для вычисления функции  $\psi(x)$  мы использовали алгоритм М. Коппена [23]<sup>15</sup>.

Далее в настоящем разделе мы предоставим краткое описание алгоритма. Пусть  $\mathcal{D}_k = \{d_k\}$  есть множество сходящихся рациональных чисел, которые задаются формулой (60):

$$d_k = \sum_{j=1}^k \frac{i_j}{\gamma^k}, \quad i_j = 0, \dots, \gamma - 1, \quad (60)$$

<sup>15</sup> Исходный алгоритм, предложенный Д. Шпрехером [17], содержал ошибку, из-за которой функция  $\psi(x)$  вычислялась неверно для некоторых комбинаций параметров алгоритма.

где  $k \in \mathbb{N}, \gamma \geq 2n + 2$  являются параметрами алгоритма. Далее определим константы  $a, \alpha_p$  согласно формулам (61):

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)}, \\ \alpha_p &= \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{-(p-1)\frac{n^p-1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Тогда функция  $\psi(x)$  вычисляется рекуррентно по формуле (62)

$$\psi^k(d_k) = \begin{cases} d_k, & \text{for } k = 1, \\ \psi^{k-1}\left(d_k - \frac{i_k}{\gamma_k}\right) + \frac{i_k}{\gamma^{(n^k-1)/(n-1)}} & \text{for } k > 1, \quad i_k < \gamma - 1, \\ \frac{1}{2}\left(\psi_k\left(d_k - \frac{1}{\gamma^k}\right) + \psi_{k-1}\left(d_k + \frac{1}{\gamma^k}\right)\right) & \text{for } k > 1, \quad i_k = \gamma - 1, \end{cases} \quad (62)$$

где  $d_k = 0.i_1i_2, \dots, i_k$ . Для случая  $x > 1$  функция  $\psi(x)$  вычисляется по формуле (63)

$$\psi(x) = \psi(x - [x]) + [x], \quad (63)$$

где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ .

На рис. 4 представлены графики функции  $\psi(x)$  для значений параметров  $\gamma = 10$  и  $k = 2, 3, 4$  соответственно.

Для метода сведения уравнений в частных производных к обыкновенным необходимо уметь вычислять производные функции  $\psi(x)$ , которая является недифференцируемой. Однако для неё можно определить разностный аналог производной (64)

$$\psi'(x) \approx \frac{\psi(x + \Delta) - \psi(x)}{\Delta}, \quad (64)$$

где  $\Delta$  — приращение, которое зависит от параметров  $\gamma, k$ . Так как функция  $\psi(x)$  определена на конечном количестве точек  $\{d_k\}$ , тогда  $\Delta = \gamma^{-k}$  — величина шага между двумя соседними точками из множества  $\mathcal{D}_k$ . На рис. 5 изображены графики первой и второй производной функции  $\psi(x)$  для  $\gamma = 10, k = 4$ .

В случае, когда используется формулировка теоремы Колмогорова в представлении Хедберга, также необходимо определить константы  $\lambda_p$ . При этом, согласно теореме [19], внутренние функции  $\psi_q(x)$  могут быть выбраны почти произвольно с тем только условием, что они

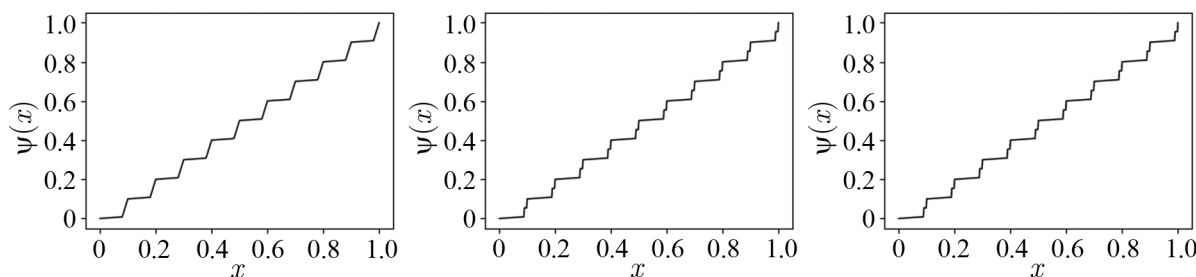


Рис. 4. Графики  $\psi(x)$  для значений параметров  $\gamma = 10$  и  $k = 2, 3, 4$  соответственно

Fig. 4. Plots of  $\psi(x)$  for  $\gamma = 10$  and  $k = 2, 3, 4$  respectively

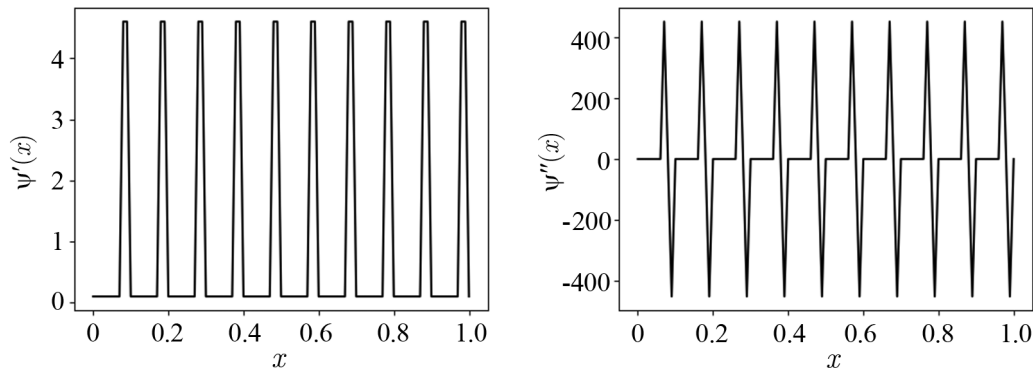


Рис. 5. Графики первой и второй производной функции  $\psi(x)$  для  $\gamma = 10$  и  $k = 2$

Fig. 5. Plots of first and second derivative of a function  $\psi(x)$  for  $\gamma = 10$  and  $k = 2$

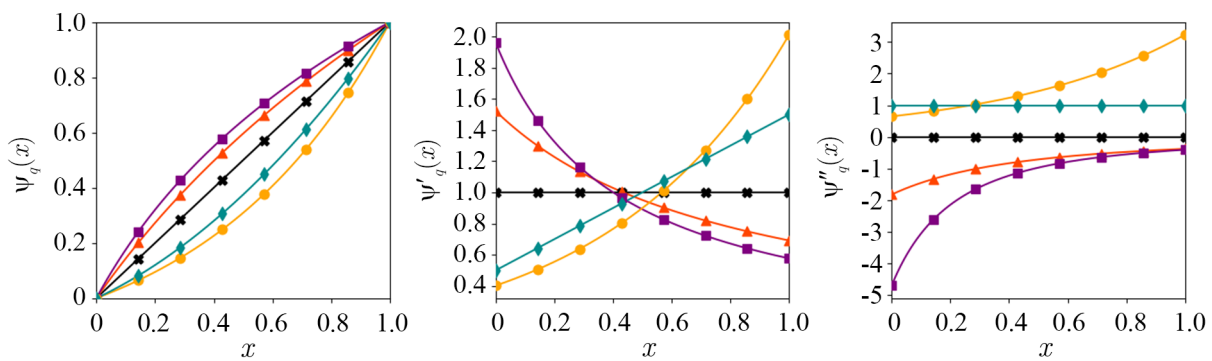


Рис. 6. Слева направо: графики функций  $\psi_q(x)$ ,  $\psi'_q(x)$ ,  $\psi''_q(x)$  для представления Хедберга, использованных в вычислительном эксперименте (цвет онлайн)

Fig. 6. From left to right: plots of functions  $\psi_q(x)$ ,  $\psi'_q(x)$ ,  $\psi''_q(x)$  for Hedberg formulation, used in a computational experiment (color online)

должны не убывать на промежутке  $[0; 1]$  и принимать на его концах значения 0 и 1 соответственно:  $\psi_q(0) = 0$ ,  $\psi_q(1) = 1$ . В вычислительном эксперименте мы использовали варианты, представленные на рис. 6. Константы же  $\lambda_p$  определяются в рамках задачи поиска экстремума функционала (65).

$$\int_{\bar{x}} \tilde{\Xi}_S d\bar{x} \rightarrow \text{extr.}_{\lambda_p} \quad (65)$$

## 4. Результаты

Предложенный метод был применён к двумерной задаче Брату. Данная задача представляет собой нелинейную краевую задачу для уравнений в частных производных. Для данной задачи бифуркационная картина хорошо изучена, что позволяет нам проверить эффективность нашего метода бифуркационного анализа.

**4.1. Вывод разрешающих соотношений для задачи Брату с использованием формулировки Шпрехера.** Представленный в предыдущем разделе алгоритм бифуркационного анализа был применён к решению задачи Брату в вариационной постановке (13). Для данной задачи  $n = 2$ .

Разложим представление функции  $u(x_1, x_2)$  в ряд Тейлора до нулевого слагаемого ( $M = 0$ ). Тогда получим представление (66):

$$u(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^4 \Phi_q(z) = \Phi(z), \quad (66)$$

где  $z = \alpha_1 \psi(x_1) + \alpha_2 \psi(x_2)$ . Выполним замену переменных

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{x}_2, \\ x_1 &= \psi^{-1}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(\bar{x}_2)}{\alpha_1}\right), \\ x_1 = 0 &\rightarrow z^{\min} = \alpha_2 \psi(\bar{x}_2), \\ x_1 = 1 &\rightarrow z^{\max} = \alpha_1 + \alpha_2 \psi(\bar{x}_2), \\ |J| &= \begin{vmatrix} \alpha_1 \psi'(x_1) & \alpha_2 \psi'(x_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1 \psi'(x_1) \implies dx_1 = \frac{dz}{\alpha_1 \psi'\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(\bar{x}_2)}{\alpha_1}\right)} \end{aligned} \quad (67)$$

и выразим частные производные, входящие в функционал задачи Брату, через обыкновенные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i} &= \alpha_i \psi'(x_i) \sum_{q=0}^4 \Phi'_q(z), \\ \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_i^2} &= \alpha_i \psi''(x_i) \sum_{q=0}^4 \Phi'_q(z) + \alpha_i^2 \psi'^2(x_i) \sum_{q=0}^4 \Phi''_q(z). \end{aligned} \quad (68)$$

Подставим вышеуказанные замены в функционал, проварьируем его по неизвестным функциям  $\Phi(z)$ . В итоге получим обыкновенное дифференциальное уравнение (69), которое было разрешено представленным в разделе 3.1 методом сведения УЧП к ОДУ.

$$\begin{aligned} \Phi''(z) &\left[ -\frac{2\alpha_2^2 \psi'(x_2)^2}{\alpha_1 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)} - 2\alpha_1 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right) \right] + \\ &+ \Phi'(z) \left[ \frac{2\alpha_2^2 \psi'(x_2)^2 \psi''\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)}{\alpha_1^2 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)^3} - \frac{2\psi''\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)}{\psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)} \right] - \\ &- \frac{2\gamma e^{\Phi(z)}}{\alpha_1 \psi'\left(\psi^{(-1)}\left(\frac{z - \alpha_2 \psi(x_2)}{\alpha_1}\right)\right)} = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

**4.2. Вывод разрешающих соотношений для задачи Брату с использованием формулировки Хедберга.** Также к задаче Брату был применён метод, использующий представление Хедберга. Для случая двух переменных получаем

$$u(x_1, x_2) = \sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(z)), \quad (70)$$



где  $z = \lambda_1 \psi_0(x_1) + \lambda_2 \psi_1(x_2)$ ,  $\theta_q(z) = \lambda_1 \psi_q \left( \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \lambda_2 \psi_0(x_2)}{\lambda_1} \right) \right) + \lambda_2 \psi_q(x_2)$ . Произведём замену переменных

$$\begin{aligned} x_2 &= \bar{x}_2, \\ x_1 &= \psi_0^{-1} \left( \frac{z - \lambda_2 \psi_0(x_2)}{\lambda_1} \right), \\ x_1 = 0 &\rightarrow z^{\min} = \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2), \\ x_1 = 1 &\rightarrow z^{\max} = \lambda_1 + \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2), \\ |J| &= \begin{vmatrix} \lambda_1 \psi'_0(x_1) & \lambda_2 \psi'_0(x_2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \psi'_0(x_1) \implies dx_1 = \frac{dz}{\lambda_1 \psi'_0 \left( \frac{z - \lambda_2 \psi_0(\bar{x}_2)}{\lambda_1} \right)} \end{aligned} \quad (71)$$

и определим частные производные первого порядка через производные функции одной переменной  $\chi(\theta_q(z))$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{q=0}^4 \lambda_i \psi'_q(x_i) \chi'(\theta_q(z)) \quad (72)$$

Вариация функционала задачи по функции  $\chi(\theta_q(z))$  даёт  $\forall \bar{x}_2 \in [0, 1]$ , получим:

$$\sum_{j=0}^4 \int_{z^{\min}}^{z^{\max}} \left[ \sum_{q=0}^4 a_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi'(\theta_q(z)) \delta \chi'(\theta_j(z)) - \gamma b(z, \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(z))} \delta \chi(\theta_j(z)) \right] dz = 0, \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} a_{q,j}(z, x_2) &= \frac{\lambda_1^2 \psi_q(\bar{x}_1) \psi_j(\bar{x}_1)}{\lambda_1 \psi'_0(\bar{x}_1)} + \frac{\lambda_2^2 \psi_q(\bar{x}_2) \psi_j(\bar{x}_2)}{\lambda_1 \psi'_0(\bar{x}_1)}, \\ b(z, \bar{x}_2) &= \frac{1}{\psi_0(\bar{x}_1)}. \end{aligned} \quad (74)$$

Для  $j$ -го элемента суммы заменим переменную интегрирования с  $z$  на  $\theta_j(z)$  (обозначив для краткости записи новую переменную интегрирования как  $z$ ); получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 \int_{\theta_j(z^{\min})}^{\theta_j(z^{\max})} \frac{1}{\theta'_j(\theta_j^{-1}(z))} \left[ \sum_{q=0}^4 a_{q,j}(\theta_j^{-1}(z), \bar{x}_2) \chi'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) \delta \chi'(z) - \right. \\ \left. - \gamma b(\theta_j^{-1}(z), \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(\theta_j^{-1}(z)))} \delta \chi(z) \right] dz = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Приведём все производные к производным по переменной  $z$ , используя формулу (48):

$$\chi'(\theta_q(\theta_j^{(-1)}(z))) = D_{1,q,j}(z) \chi'_z(\theta_q(\theta_j^{(-1)}(z))), \quad (76)$$

где

$$D_{q,j}(z) = \frac{\theta'_j(\theta_j^{(-1)}(z))}{\theta'_q(\theta_j^{(-1)}(z))}. \quad (77)$$

Тогда, проинтегрировав слагаемые с производными вариаций по частям, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^4 \int_{\theta_j(z^{\min})}^{\theta_j(z^{\max})} \left[ - \sum_{q=0}^4 \bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi_z''(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) - \sum_{q=0}^4 \frac{d\bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2)}{dz} \chi_z'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) - \right. \\ \left. - \gamma \bar{b}_j(z, \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(\theta_j^{-1}(z)))} \right] \delta \chi(z) dz + \\ + \left[ \sum_{q=0}^4 \bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi_z'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) \right] \delta \chi'(z) \Big|_{\theta_j(z^{\min})}^{\theta_j(z^{\max})} = 0, \end{aligned} \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{q,j}(z, x_2) &= \frac{D_{q,j}(z) a_{q,j}(\theta_j^{-1}(z), x_2)}{\theta_j'(\theta_j^{-1}(z))}, \\ \bar{b}_j(z, x_2) &= \frac{b(\theta_j^{-1}(z), x_2)}{\theta_j'(\theta_j^{-1}(z))}, \end{aligned} \quad (79)$$

что даёт следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \forall x_2 \in [0, 1] : \\ \sum_{j=0}^4 \mathbf{I}(z \in [\theta_j(z^{\min}), \theta_j(z^{\max})]) \left[ \sum_{q=0}^4 \bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2) \chi_z''(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) + \right. \\ \left. + \sum_{q=0}^4 \frac{d\bar{a}_{q,j}(z, \bar{x}_2)}{dz} \chi_z'(\theta_q(\theta_j^{-1}(z))) + \gamma \bar{b}_j(z, \bar{x}_2) e^{\sum_{q=0}^4 \chi(\theta_q(\theta_j^{-1}(z)))} \right] = 0, \end{aligned} \quad (80)$$

где  $\mathbf{I}$  — индикаторная функция.

**4.3. Вывод разрешающих соотношений для задачи Брату с использованием формулировки Досса.** К задаче Брату был применён метод, использующий представление Досса. Для случая двух переменных получаем

$$u(x_1, x_2) = \varphi_i(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \Phi_i^*(x_1, x_2). \quad (81)$$

Выполним замену переменных

$$\begin{aligned} z &= \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2), \\ x_1 &= \psi_{i,1,k}^{(-1)}\left(\frac{z}{\psi_{i,2}(x_2)}\right) = \bar{x}_{1,k}, \end{aligned} \quad (82)$$

где  $[x_k, x_{k+1}]$  — интервалы монотонности функции  $\psi_{i,1}(x_1)$ . Якобиан замены переменных задаётся формулой (83):

$$|J| = \psi_{i,1}'(x_1) \psi_{i,2}(x_2) \implies dx_1 = \frac{dz}{\psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,2}(x_2)}. \quad (83)$$

После замены переменных получим

$$\begin{aligned}
 u(x_1, x_2) &= \varphi_i(z) + \Phi_i^*(\bar{x}_{1,k}, x_2), \\
 \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial \bar{x}_{1,k}}(\bar{x}_{1,k}, x_2), \\
 \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi'_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_2}(\bar{x}_{1,k}, x_2).
 \end{aligned} \tag{84}$$

Подставим замены в функционал. До замены переменных получим (85):

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \psi'_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right]^2 + \\
 &+ \left[ \psi_{i,1}(x_1)\psi'_{i,2}(x_2)\varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right]^2 + \\
 &- 2\gamma e^{\varphi_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \Phi_i^*(x_1, x_2)} dx_1 dx_2.
 \end{aligned} \tag{85}$$

После замены переменных и смены порядка интегрирования получаем (86):

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \sum_k \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_0^1 \left[ \left[ \psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial \bar{x}_{1,k}}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \right]^2 + \right. \\
 &+ \left[ \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi'_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z) + \frac{\partial \Phi_i^*}{\partial x_2}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \right]^2 + \\
 &\left. - 2\gamma e^{\varphi_i(z) + \Phi_i^*(\bar{x}_{1,k}, x_2)} \right] \frac{1}{\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\psi_{i,2}(x_2)} dx_2 dz.
 \end{aligned} \tag{86}$$

Проварьируем функционал (85) по  $\psi_{i,1}(x_1)$  и по  $\psi_{i,2}(x_2)$  получим уравнения (87, 88) соответственно:

$$\begin{aligned}
 \psi''_{i,1}(x_1) &= - \frac{1}{\int_0^1 \psi_{i,2}(x_2)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2))^2 dx_2} \times \\
 &\times \int_0^1 \left[ \gamma \psi_{i,2}(x_2) \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) e^{\varphi_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \Phi(x_1, x_2)} - \right. \\
 &- \Phi^{(0,1)}(x_1, x_2) \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2) \psi'_{i,2}(x_2) \varphi''_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \\
 &+ \Phi^{(2,0)}(x_1, x_2) \psi_{i,2}(x_2) \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) - \\
 &- \Phi^{(0,1)}(x_1, x_2) \psi'_{i,2}(x_2) \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) + \\
 &+ \psi_{i,2}(x_2)^3 \psi'_{i,1}(x_1)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) \varphi''_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) - \\
 &- \psi_{i,1}(x_1)^2 \psi_{i,2}(x_2) \psi'_{i,2}(x_2)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) \varphi''_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2)) - \\
 &\left. - \psi_{i,1}(x_1) \psi'_{i,2}(x_2)^2 \varphi'_i(\psi_{i,1}(x_1)\psi_{i,2}(x_2))^2 \right] dx_2,
 \end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{i,2}''(x_2) = & - \frac{1}{\int_0^1 \psi_{i,1}(x_1)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2))^2 dx_1} \times \\
& \times \int_0^1 \left[ \gamma \psi_{i,1}(x_1) \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) e^{\varphi_i(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \Phi(x_1, x_2)} - \right. \\
& - \Phi^{(1,0)}(x_1, x_2) \psi_{i,2}(x_2) \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,1}'(x_1) \varphi_i''(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \\
& + \Phi^{(0,2)}(x_1, x_2) \psi_{i,1}(x_1) \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) - \\
& - \Phi^{(1,0)}(x_1, x_2) \psi_{i,1}'(x_1) \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) + \\
& + \psi_{i,1}(x_1)^3 \psi_{i,2}'(x_2)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) \varphi_i''(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) - \\
& - \psi_{i,2}(x_2)^2 \psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,1}'(x_1)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) \varphi_i''(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2)) - \\
& \left. - \psi_{i,2}(x_2) \psi_{i,1}'(x_1)^2 \varphi_i'(\psi_{i,1}(x_1) \psi_{i,2}(x_2))^2 \right] dx_1.
\end{aligned} \tag{88}$$

В качестве граничных условий для первого и второго уравнений возьмём граничные условия Дирихле:

$$\begin{cases} \psi_{i,j}(0) = 0, \\ \psi_{i,j}(1) = 0. \end{cases} \tag{89}$$

Далее проварируем функционал (86) по функции  $\varphi_i(z)$ , получим

$$\begin{aligned}
\varphi_i''(z) = & \sum_k \int_0^1 -\gamma \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) e^{\Phi(\bar{x}_{1,k}, x_2) + \varphi_i(z)} + \\
& + \bar{x}_{1,k}' \Phi^{(0,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,2}'(x_2) \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,1}''(\bar{x}_{1,k}) - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \Phi^{(0,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,2}'(x_2) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \psi_{i,2}(x_2) \Phi^{(2,0)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \Phi^{(1,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) \psi_{i,2}'(x_2) \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) - \\
& - \bar{x}_{1,k}' \psi_{i,2}(x_2)^2 \varphi_i'(z) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 \psi_{i,1}''(\bar{x}_{1,k}) + \\
& + \bar{x}_{1,k}' \varphi_i'(z) \psi_{i,2}'(x_2)^2 \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})^2 \psi_{i,1}''(\bar{x}_{1,k}) - \\
& - 2\bar{x}_{1,k}' \varphi_i'(z) \psi_{i,2}'(x_2)^2 \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 dx_2 \Big|_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \times \\
& \times \left[ \sum_k \int_0^1 \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k}) (\psi_{i,2}(x_2)^2 \psi_{i,1}'(\bar{x}_{1,k})^2 + \psi_{i,2}'(x_2)^2 \psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})^2) dx_2 \Big|_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{90}$$

Изначальные условия Дирихле после нахождения функций  $\psi_{i,1}(x_1)$  и  $\psi_{i,2}(x_2)$  схлопываются в единое условие (91):

$$\varphi_i(0) = 0. \tag{91}$$

Так как уравнение второго порядка, необходимо также второе условие, в качестве которого возьмём естественное граничное условие, получаемое при варьировании функционала на другом конце отрезка интегрирования (92):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\psi_{i,2}(x_2)\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k})} 2\psi'_{i,2}(x_2)\psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \left( \Phi^{(0,1)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) + \right. \\ & \left. + \psi'_{i,2}(x_2)\psi_{i,1}(\bar{x}_{1,k})\varphi'_i(z) \right) + 2\psi_{i,2}(x_2)\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \left( \Phi^{(1,0)}(\bar{x}_{1,k}, x_2) + \right. \\ & \left. + \psi_{i,2}(x_2)\varphi'_i(z)\psi'_{i,1}(\bar{x}_{1,k}) \right) \Big|_{z=z_{\max}} = 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Далее решать уравнения (87), (88), (90) будем с помощью итеративного подхода, описанного выше.

**4.4. Результаты вычислительного эксперимента.** Для подхода, использующего формулировку Шпрехера, используем значения параметров алгоритма  $\gamma = 10, k = 1$ , тогда  $a = 1/90, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.101000100000000001$ . На рис. 7, а представлен график определителя матрицы Фреше на последней итерации метода Ньютона для функции  $\Phi(z)$  в зависимости от значений параметра  $\gamma$ , а на рис. 7, б  $L_\infty$  — норма решения в зависимости от значений параметра.

В результате вычислительного эксперимента была найдена одна особая точка (предельная) при значениях параметра  $\gamma \approx 7.03$ , что хорошо согласуется с известным из литературы результатом [34] (см. Таблицу). Для формулировок

Таблица. Сравнение методов обнаружения бифуркационных точек для двумерной задачи Брату. Результаты для других методов взяты из статьи [34]

Table. Comparison of methods for detecting bifurcation points for a two-dimensional Bratu problem. The results for other methods are taken from the article [34]

Метод	$\gamma$
Метод конечных разностей	7.122
Метод коллокаций	6.808
Метод взвешенных остатков	6.780
Почти точное решение	7.028
Итерационный дифференциально-квадратурный метод	7.028
<b>Наш подход</b>	<b>7.031</b>

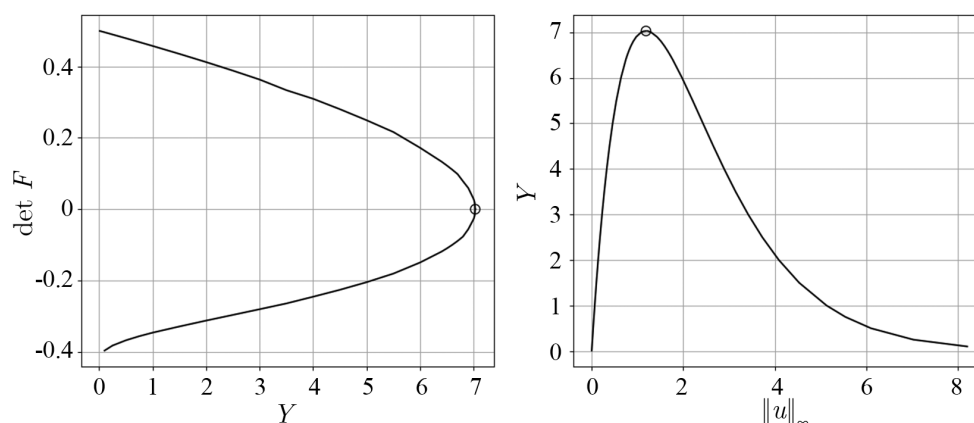


Рис. 7. а — График определителя матрицы Фреше на последней итерации метода Ньютона для разных значений параметра  $\gamma$ ; кружок обозначает критическую точку. б —  $L_\infty$  норма решения для различных значений параметра  $\gamma$ ; кружок обозначает критическую точку

Fig. 7. а — Graph of the determinant of the Fréchet matrix on the last iteration of the Newton method for different value of the parameter  $\gamma$ ; circle denotes critical point. б —  $L_\infty$  norm of the solution for different values of the parameter  $\gamma$ ; circle denotes critical point

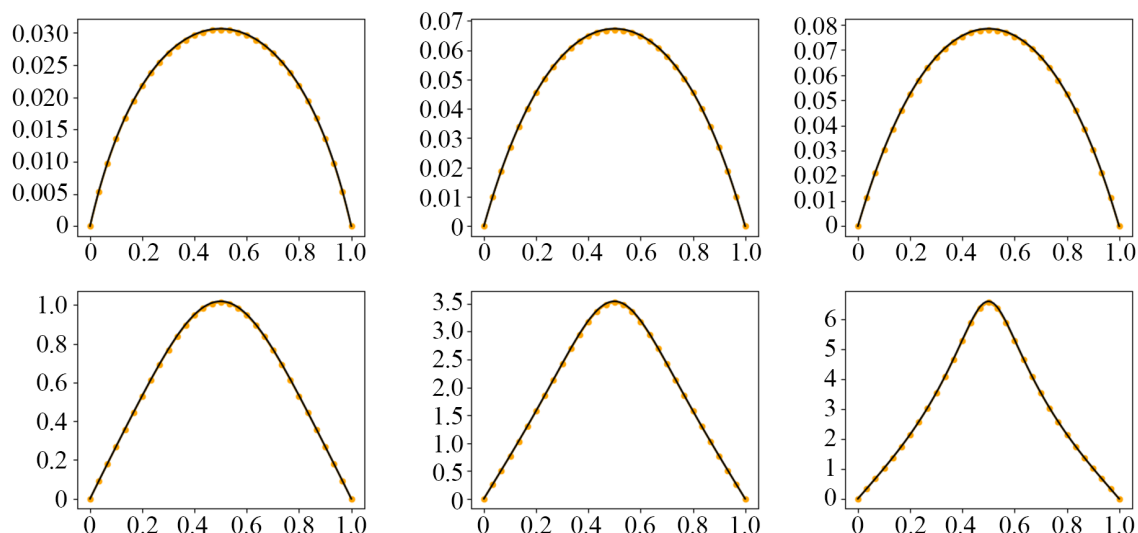


Рис. 8. Срезы решения задачи Брату по  $x_2$  для  $\gamma = 1$ . Решение, полученное с помощью теоремы Колмогорова–Арнольда (чёрная линия). Решение, полученное с помощью метода конечных разностей (оранжевые точки). Слева: срез  $x_1 = 0.1$ ; в центре: срез  $x_1 = 0.3$ , справа: срез  $x_1 = 0.5$ . Верхние графики — левая ветвь решений. Нижние графики — правая ветвь решений (цвет онлайн)

Fig. 8.  $x_2$  cross sections of the solution to the Bratu problem for  $\gamma = 1$ . The solution obtained using the Kolmogorov–Arnold theorem (black line). The solution obtained using the finite difference method (orange dots). Left: cross section  $x_1 = 0.1$ ; center: cross section  $x_1 = 0.3$ ; right: cross section  $x_1 = 0.5$ . The upper graphs are the left branch of the solutions. The lower graphs are the right branch of the solutions (color online)

Хедберга и Досса полученные результаты были неотличимы от результатов, полученных с помощью формулировки Шпрехера. На рис. 8 изображены решения задачи Брату, полученные с помощью предложенного в статье подхода (оранжевые), и решения, посчитанные методом конечных разностей (чёрные). Подчеркнём, что полученные функции решения являются весьма гладкими, несмотря на потенциальную негладкость, связанную со свойствами функций теоремы Колмогорова–Арнольда.

## Выводы

1. В работе представлен алгоритм построения полной бифуркационной картины (картины ветвления) для краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных, данных своими вариационными постановками, опирающийся на суперпозиционную теорему Колмогорова.
2. При этом суперпозиционная теорема Колмогорова в форме Шпрехера приводит к формулировке, где внутренние функции вычисляются с помощью специального алгоритма, в форме Хедберга, где внутренние функции задаются пользователем, в форме Досса, где внутренние функции отыскиваются с помощью итерационного алгоритма. Полученные функции решения являются весьма гладкими, несмотря на потенциальную негладкость, связанную со свойствами функций теоремы Колмогорова–Арнольда.
3. Все три варианта алгоритма были применены к уравнениям Брату и продемонстрировали хорошее согласование с известными из литературы решениями как по форме решений, так и по структуре бифуркационной картины.



## Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений: Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984. 355 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: в 2 т. М.: Мир. Т. 1. 1984. 350 с. Т. 2. 1984. 286 с.
3. Gilmore R. Catastrophe theory // In: Trigg G. L. (ed) Encyclopedia of Applied Physics. Vol. 3. N.Y.: Wiley, 1992. P. 85–115.
4. Obodan N. I., Gromov V. A. Numerical analysis of the branching of solutions to nonlinear equations for cylindrical shells // Int. Appl. Mech. 2006. Vol. 42. P. 90–97. DOI: 10.1007/s10778-006-0062-7.
5. Obodan N. I., Lebedev O. G., Gromov V. A. Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells. Berlin: Springer, 2013. 178 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6365-4.
6. Obodan N. I., Adlucky V. J., Gromov V. A. Rapid identification of pre-buckling states: a case of cylindrical shell // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 124. P. 449–457. DOI: 10.1016/j.tws.2017.12.034.
7. Obodan N. I., Adlucky V. J., Gromov V. A. Prediction and control of buckling: the inverse bifurcation problems for von Karman equations // In: Dutta H., Peters J. (eds) Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications. Cham: Springer, 2020. P. 353–381. DOI: 10.1007/978-3-319-99918-0\_11.
8. Obodan N. I., Gromov V. A. The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 107. P. 612–619. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.020.
9. Obodan N. I., Gromov V. A. Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure // Journal of Engineering Mathematics. 2013. Vol. 78. P. 239–248. DOI: 10.1007/s10665-012-9553-1.
10. Antman S. S. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems. San Francisco: WA Benjamin, 1969. 434 p.
11. Kantorovich L. V. Approximate Methods of Higher Analysis. N.Y.: Interscience Publishers, 1958. 681 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko-Jr. V. A., Kalutsky L. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: From macro- to nano-structural dynamics // Arch. Computat. Methods Eng. 2021. Vol. 28. P. 4781–4813. DOI: 10.1007/s11831-021-09550-5.
13. Gromov V. A. On an approach to solve nonlinear elliptic equations of von Karman type // Вісник Дніпропетровського університету Серія Моделювання. 2017. Т. 25, № 8. С. 122–141. DOI: 10.15421/141707.
14. Gromov V. A. Postcritical Behaviour and Solution Branching for the Cylindrical Shell Theory Nonlinear Problems. PHD Thesis. Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk State University, 2006.
15. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных // Докл. АН СССР. 1957. Т. 108. С. 179–182.
16. Maiorov V., Pinkus A. Lower bounds for approximation by MLP neural networks // Neurocomputing. 1999. Vol. 25, iss. 1–3. P. 81–91. DOI: 10.1016/S0925-2312(98)00111-8.
17. Sprecher D. A. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions // Neural Netw. 1996. Vol. 9, no. 5. P. 765–772. DOI: 10.1016/0893-6080(95)00081-x.
18. Sprecher D. A. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions II // Neural Netw. 1997. Vol. 10, no. 3. P. 447–457. DOI: 10.1016/s0893-6080(96)00073-1.
19. Shapiro H. S. Topics in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1971. 278 p. DOI: 10.1007/BFb0058976.
20. Doss R. Representations of continuous functions of several variables // American Journal of Mathematics. 1976. Vol. 98, no. 2. P. 375–383. DOI: 10.2307/2373891.
21. Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955. 220 с.

22. *Bratu G.* Sur les équations intégrales non linéaires // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1914. Vol. 42. P. 113–142. DOI: 10.24033/bsmf.943.
23. *Köppen M.* On the training of a Kolmogorov network // In: Dorronsoro J. R. (ed) Artificial Neural Networks – ICANN 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2415. Berlin: Springer, 2002. P. 474–479. DOI: 10.1007/3-540-46084-5\_77.
24. *Actor J.* Computation for the Kolmogorov Superposition Theorem. PhD Thesis. Houston: Rice University, 2018. 148 p.
25. *Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljačić M., Hou T. Y., Tegmark M.* KAN: Kolmogorov-Arnold networks // arXiv:2404.19756. ArXiv Preprint, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.
26. *Lorentz G. G.* Approximation of Functions. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966. 188 p.
27. *Nguyen V. P., Rabczuk T., Bordas S., Duflo M.* Meshless methods: A review and computer implementation aspects // Mathematics and Computers in Simulation. 2008. Vol. 79, iss. 3. P. 763–813. DOI: 10.1016/j.matcom.2008.01.003.
28. *Железко И. П., Ободан Н. И.* Вторичные ветвления и закритическое поведение тонкостенных оболочек при неоднородной деформации // ПММ. 1997. Т. 61, № 2. С. 344–349.
29. *Poston T., Stewart I.* Catastrophe Theory and Its Applications. Gloucester: Courier Corporation, 2014. 512 p.
30. *Gromov V. A., Borisenko E. A.* Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction // Neural Comput. Applic. 2015. Vol. 26. P. 1827–1838. DOI: 10.1007/s00521-015-1845-8.
31. *Андреев Л. В., Ободан Н. И., Лебедев А. Г.* Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. М.: Наука, 1988. 208 с.
32. *Фомин С., Алексеев В., Тихомиров В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 385 с.
33. *Odejide S. A., Aregbesola Y. A. S.* A note on two dimensional Bratu problem // Kragujevac Journal of Mathematics. 2006. Vol. 29. P. 49–56.
34. *Temimi H., Ben-Romdhane M., Baccouch M., Musa M. O.* A two-branched numerical solution of the two-dimensional Bratu's problem // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 153. P. 202–216. DOI: 10.1016/j.apnum.2020.02.010.
35. *Boyd J. P.* An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation // J. Sci. Comput. 1986. Vol. 1. P. 183–206. DOI: 10.1007/BF01061392.
36. *Витушкин А. Г., Хенкин Г. М.* Линейные суперпозиции функций // УМН. 1967. Т. 22, № 1. С. 77–124.
37. *Gromov V. A.* Catastrophes of cylindrical shell // In: Dutta H. (ed) Mathematical Modelling: Principle and Theory. Providence: American Mathematical Society, 2023. P. 215–244. DOI: 10.1090/conm/786/15798.
38. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. N.Y.: Wiley, 2008. 575 p.
39. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.
40. *Agapov M. S., Kuznetsov E. B., Shalashilin V. I.* Numerical modeling of the problem of strong nonlinear deformation in Eulerian coordinates // Math. Models Comput. Simul. 2009. Vol. 1. P. 263–273. DOI: 10.1134/S2070048209020094.

## References

1. Arnold VI, Varchenko AN, Huseyn-Zadeh SM. Features of Differentiable Maps: Monodromy and Asymptotics of Integrals. М.: Nauka; 1984. 355 p. (in Russian).
2. Gilmore R. Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. N.Y.: Wiley; 1981. 666 p.
3. Gilmore R. Catastrophe theory. In: Trigg G. L. (ed) Encyclopedia of Applied Physics. Vol. 3. N.Y.: Wiley; 1992. P. 85–115.

4. Obodan NI, Gromov VA. Numerical analysis of the branching of solutions to nonlinear equations for cylindrical shells. *Int. Appl. Mech.* 2006;42:90–97. DOI: 10.1007/s10778-006-0062-7.
5. Obodan NI, Lebedev OG, Gromov VA. *Nonlinear Behaviour and Stability of Thin-Walled Shells*. Berlin: Springer; 2013. 178 p. DOI: 10.1007/978-94-007-6365-4.
6. Obodan NI, Adlucky VJ, Gromov VA. Rapid identification of pre-buckling states: a case of cylindrical shell. *Thin-Walled Structures*. 2018;124:449–457. DOI: 10.1016/j.tws.2017.12.034.
7. Obodan NI, Adlucky VJ, Gromov VA. Prediction and control of buckling: the inverse bifurcation problems for von Karman equations. In: Dutta H, Peters J, editors. *Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications*. Cham: Springer; 2020. P. 353–381. DOI: 10.1007/978-3-319-99918-0\_11.
8. Obodan NI, Gromov VA. The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure. *Thin-Walled Structures*. 2016;107: 612–619. DOI: 10.1016/j.tws.2016.07.020.
9. Obodan NI, Gromov VA. Nonlinear behavior and buckling of cylindrical shells subjected to localized external pressure. *Journal of Engineering Mathematics*. 2013;78:239–248. DOI: 10.1007/s10665-012-9553-1.
10. Antman SS. *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems*. San Francisco: WA Benjamin, 1969. 434 p.
11. Kantorovich LV. *Approximate Methods of Higher Analysis*. N.Y.: Interscience Publishers; 1958. 681 p.
12. Awrejcewicz J, Krysko-Jr. VA, Kalutsky LA, Zhigalov MV, Krysko VA. Review of the methods of transition from partial to ordinary differential equations: From macro- to nano-structural dynamics. *Arch. Computat. Methods Eng.* 2021;28:4781–4813. DOI: 10.1007/s11831-021-09550-5.
13. Gromov VA. On an approach to solve the nonlinear elliptic equations of von Karman type. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*. 2017;25(8):122–141. DOI: 10.15421/141707.
14. Gromov VA. *Postcritical behaviour and solution branching for the cylindrical shell theory nonlinear problems*. PhD Thesis. Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk State University; 2006.
15. Kolmogorov AN. On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. In: *Twelve Papers on Algebra and Real Functions*. American Mathematical Society; 1961. Vol. 17. P. 369–373.
16. Maiorov V, Pinkus A. Lower bounds for approximation by MLP neural networks. *Neurocomputing*. 1999;25(1–3):81–91. DOI: 10.1016/S0925-2312(98)00111-8.
17. Sprecher DA. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions. *Neural Netw.* 1996;9(5):765–772. DOI: 10.1016/0893-6080(95)00081-x.
18. Sprecher DA. A numerical implementation of Kolmogorov's superpositions II. *Neural Netw.* 1997;10(3):447–457. DOI: 10.1016/S0893-6080(96)00073-1.
19. Shapiro HS. *Topics in Approximation Theory*. Berlin: Springer; 1971. 278 p. DOI: 10.1007/BFb0058976.
20. Doss R. Representations of continuous functions of several variables. *American Journal of Mathematics*. 1976;98(2):375–383. DOI: 10.2307/2373891.
21. Vitushkin AG. *About Multidimensional Variations*. M.: Gostekhizdat; 1955. 220 p. (in Russian).
22. Vitushkin AG, Khenkin GM. Linear superpositions of functions. *Russian Math. Surveys*. 1967; 22(1):77–125. DOI: 10.1070/RM1967v022n01ABEH001204.
23. Köppen M. On the training of a Kolmogorov Network. In: Dorronsoro JR, editor. *Artificial Neural Networks – ICANN 2002: International Conference*. Berlin: Springer, 2002. P. 474–479. DOI: 10.1007/3-540-46084-5\_77.
24. Actor J. *Computation for the Kolmogorov Superposition Theorem*. PhD Thesis. Houston: Rice University; 2018. 148 p.
25. Liu Z, Wang Y, Vaidya S, Ruehle F, Halverson J, Soljačić M, Hou TY, Tegmark M. KAN:

- Kolmogorov–Arnold Networks. arXiv:2404.19756. ArXiv Preprint; 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.
26. Lorentz GG. Approximation of Functions. New York: Holt, Rinehart and Winston; 1966. 188 p.
  27. Nguyen VP, Rabczuk T, Bordas S, Duflot M. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2008;79(3):763–813. DOI: 10.1016/j.matcom.2008.01.003.
  28. Zhelezko IP, Obodan NI. Secondary branching and the post critical behaviour of thin-walled shells during non-uniform deformation. *J. Appl. Math. Mech.* 1997;61(2):333–337. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00042-7.
  29. Poston T, Stewart I. Catastrophe Theory and Its Applications. Gloucester: Courier Corporation; 2014. 512 p.
  30. Andreev LV, Obodan NI, Lebedev AG. Stability of Shells under Nonaxisymmetric Deformation. M.: Nauka; 1988. 208 p. (in Russian).
  31. Gromov VA, Borisenko EA. Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction. *Neural Comput. Applic.* 2015;26:1827–1838. DOI: 10.1007/s00521-015-1845-8.
  32. Fomin S, Alekseev V, Tikhomirov V. Optimal Equation. M.: Fizmatlit; 2005. 385 p.
  33. Odejide SA, Aregbesola YAS. A note on two dimensional Bratu problem. *Kragujevac Journal of Mathematics*. 2006;29:49–56.
  34. Temimi H, Ben-Romdhane M, Baccouch M, Musa MO. A two-branched numerical solution of the two-dimensional Bratu’s problem. *Applied Numerical Mathematics*. 2020;153:202–216. DOI: 10.1016/j.apnum.2020.02.010.
  35. Bratu G. Sur les équations intégrales non linéaires. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1914;42:113–142. (in French). DOI: 10.24033/bsmf.943.
  36. Boyd JP. An analytical and numerical study of the two-dimensional Bratu equation. *J. Sci. Comput.* 1986;1:183–206. DOI: 10.1007/BF01061392.
  37. Gromov VA. Catastrophes of cylindrical shell. In: Dutta H., editor. *Mathematical Modelling: Principle and Theory*. Providence: American Mathematical Society; 2023. P. 215–244. DOI: 10.1090/conm/786/15798.
  38. Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. 1. N.Y.: Wiley; 2008. 575 p.
  39. Weinberg MM, Trenogin VA. *Theory of Branching Solutions of Nonlinear Equations*. M.: Nauka; 1969. 527 p. (in Russian).
  40. Agapov MS, Kuznetsov EB, Shalashilin VI. Numerical modeling of the problem of strong nonlinear deformation in Eulerian coordinates. *Math. Models Comput. Simul.* 2009;1:263–273. DOI: 10.1134/S2070048209020094.



*Громов Василий Александрович* — родился в Днепропетровске (1979). Доктор физико-математических наук (2017) по специальности «Математическое моделирование и численные методы», профессор (2018). С 2018 года — заместитель руководителя департамента, профессор департамента анализа данных и искусственного интеллекта факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ и старший научный сотрудник Международной лаборатории интеллектуальных систем и структурного анализа. Автор монографии (издательство Springer) и более 70 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах. Научные интересы — бифуркации в нелинейных краевых задачах для уравнений в частных производных (прямые и обратные задачи), численные методы решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, прогнозирование хаотических временных рядов на много шагов вперёд, естественный язык как самоорганизованно-критичная система и нелинейная наука в целом.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: stroller@rambler.ru  
 ORCID: 0000-0001-5891-6597  
 ScopusID: 35228959300



*Томащук Корней Кириллович* — родился в Москве (2000). Окончил с отличием бакалавриат по программе «Прикладной анализ данных» (2022) и магистратуру по программе «Науки о данных» (2024) факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ. С 2020 года работает в международной лаборатории интеллектуальных систем и структурного анализа НИУ ВШЭ в должности стажёра-исследователя. С 2024 года аспирант школы по компьютерным наукам НИУ ВШЭ. Научные интересы — бифуркационный анализ уравнений в частных производных, прогнозирование хаотических временных рядов.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: korneytomashchuk@yandex.ru  
ORCID: 0000-0002-3288-2744



*Бесчастнов Юрий Николаевич* — родился в Москве (1998). Окончил магистратуру «Науки о данных» (2022) факультета компьютерных наук НИУ Высшая школа экономики. С 2021 года работает в международной лаборатории интеллектуальных систем и структурного анализа НИУ ВШЭ в должности стажёра-исследователя. С 2023 года обучается в аспирантуре Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Научные интересы — численные методы бифуркационного анализа уравнений в частных производных, прогнозирование хаотических временных рядов.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: y.beschastnov@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-6511-5894



*Сидоренко Артем Александрович* — родился в Москве (2001). Окончил бакалавриат факультета общей и прикладной физики НИУ Московский физико-технический институт (2023). Студент магистратуры факультета математики НИУ ВШЭ. Научные интересы — численные методы бифуркационного анализа уравнений в частных производных.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: sidorenko.arto@gmail.com  
ORCID: 0009-0003-7950-5641



*Какурин Василий Владимирович* — родился в Великом Новгороде (2001). В 2024 окончил бакалавриат МИЭМ НИУ Высшая школа экономики по направлению «Прикладная математика». С 2024 года работает в департаменте прикладной математики НИУ ВШЭ в должности стажёра-исследователя. Научные интересы — численные методы решения нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных.

Россия, 109028 Москва, Покровский бульвар, 11  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: vvakurin@mail.ru  
ORCID: 0009-0004-3660-871X