

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья
УДК 530.182.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003156
EDN: LVTTLP

Динамика кинка в модели φ^4 с двумя протяженными примесями

М. И. Фахретдинов✉, Е. Г. Екомасов

Уфимский университет науки и технологий, Россия
E-mail: ✉ fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Поступила в редакцию 11.11.2024, принята к публикации 27.11.2024,
опубликована онлайн 10.12.2024, опубликована 30.05.2025

Аннотация. Цель настоящего исследования — с помощью численных методов рассмотреть задачу нелинейной динамики кинков для уравнения φ^4 в модели с двумя одинаковыми протяженными «примесями» (или пространственной неоднородностью потенциала). **Методы.** Для численного решения модели φ^4 с неоднородностями использовался метод прямых для уравнений в частных производных. Кинк запускался в направлении неоднородностей с разными начальными скоростями. Изменялось также расстояние между двумя примесями. Исследовалась траектория кинка после взаимодействия с примесями. Для нахождения частот колебаний кинка после взаимодействия с пространственными неоднородностями используется дискретное преобразование Фурье. **Результаты.** Описано взаимодействие между кинком и двумя одинаковыми протяженными примесями, описываемыми функциями прямоугольного вида. Определены возможные сценарии динамики кинка с учетом резонансных эффектов в зависимости от величины параметров системы и начальных условий. Найдены критические и резонансные скорости движения кинка в зависимости от параметров примеси и расстояния между ними. Значительные различия наблюдаются в динамике кинка при взаимодействии с отталкивающими и притягивающими примесями. Установлено, что среди найденных сценариев динамики кинка для случая протяженных примесей прямоугольного вида есть сценарии резонансной динамики кинка, полученные ранее для случая одной протяженной примеси, например, квазитуннелирование и отталкивание от притягивающего потенциала. **Заключение.** Проведен анализ влияния параметров системы и начальных условий на возможные сценарии динамики кинка. Найдены критические и резонансные скорости кинка как функции от параметров примеси и расстояния между ними.

Ключевые слова: кинк, уравнение φ^4 , примесь, численное моделирование.

Для цитирования: Фахретдинов М. И., Екомасов Е. Г. Динамика кинка в модели φ^4 с двумя протяженными примесями // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 412–425. DOI: 10.18500/0869-6632-003156. EDN: LVTTLP

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Kink dynamics in the φ^4 model with two extended impurities

M. I. Fakhretdinov[✉], E. G. Ekomasov

Ufa University of Science and Technology, Russia

E-mail: [✉]fmi106tf@gmail.com, ekomasoveg@gmail.com

Received 11.11.2024, accepted 27.11.2024, available online 10.12.2024, published 30.05.2025

Abstract. The purpose of this study is to use numerical methods to consider the problem of nonlinear kink dynamics for the φ^4 equation in a model with two identical extended “impurities” (or spatial inhomogeneity of the potential). *Methods.* The φ^4 model with inhomogeneities was numerically solved using the method of lines for partial differential equations. The kink was launched in the direction of the inhomogeneities with different initial velocities. The distance between the two impurities was also varied. The kink trajectory after interaction with the impurities was studied. The discrete Fourier transform was used to find the oscillation frequencies of the kink after interaction with spatial inhomogeneities. *Results.* The interaction between the kink and two identical extended impurities described by rectangular functions is described. Possible scenarios of kink dynamics are determined, taking into account resonance effects, depending on the magnitude of the system parameters and initial conditions. Critical and resonant velocities of the kink motion are found depending on the impurity parameters and the distance between them. Significant differences are observed in the kink dynamics when interacting with repulsive and attractive impurities. It is established that among the found scenarios of kink dynamics for the case of extended rectangular impurities, there are scenarios of resonant kink dynamics obtained earlier for the case of one extended impurity, for example, quasi-tunneling and repulsion from an attractive potential. *Conclusion.* An analysis of the influence of system parameters and initial conditions on possible scenarios of kink dynamics is carried out. Critical and resonant kink velocities are found as functions of the impurity parameters and the distance between them.

Keywords: kink, φ^4 equation, impurity, numerical simulation.

For citation: Fakhretdinov MI, Ekomasov EG. Kink dynamics in the φ^4 model with two extended impurities. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3):412–425. DOI: 10.18500/0869-6632-003156

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Уравнение Клейна-Гордона и его модификации — одно из нелинейных дифференциальных уравнений, часто исследуемых и используемых в различных приложениях. Уравнение φ^4 , относящееся к классу уравнений Клейна-Гордона [1], широко используется, например, во многих областях физики: от космологии и физики элементарных частиц до биофизики и теории конденсированного состояния [1–5]. Новый импульс к изучению этого уравнения в последние годы придало использование его для описания физических процессов в графене [6, 7]. Кинк уравнения φ^4 отличается от кинка другого типа уравнения Клейна-Гордона — уравнения синус-Гордона (УСГ) [8] — наличием внутренней моды колебаний [1]. Эта колебательная степень свободы может накапливать энергию и периодически отдавать ее, что приводит к возникновению резонансов во взаимодействиях кинк-антикинк [2, 9–11] и кинк-примесь [2, 12, 13], а также стимулировать образование пары кинк-антикинк [14]. Кинк модели φ^4 с возбужденными внутренними модами колебаний получил название воблинг-кинк [1, 15]. В уравнении φ^4 [16–20] кинки и антикинки не могут просто проходить друг через друга. Численно было установлено, что при больших скоростях кинк и антикинк неупруго отражаются друг от друга, теряя энергию. При более низких скоростях кинк и антикинк связывались в долгоживущее колебательное состояние, напоминающее бризер синус-Гордона, но медленно затухающее.

Для уравнения φ^4 пока не найдены локализованные в пространстве решения в виде солитонов и бризеров. Для аналитического нахождения бризера модели φ^4 были попытки использовать разложение в ряд по малому параметру ϵ [14, 15]. Было обнаружено, что в континуальной теории существуют только «наноптеронные» решения (осциллирующие решения с бесконечной энергией, с осциллирующими хвостами малой амплитуды, уходящими в бесконечность). Считается

в настоящее время [1], что бризер модели φ^4 — всего лишь один из примеров «слабо нелокальных» уединенных волн. «Нелокальный», потому что пространственная локализация, присущая классическому определению «уединенной» волны, нарушается квазисинусоидальным излучением, неограниченным по пространству. «Слабо», потому что амплитуда излучения очень мала. Существует «ядро» бризера модели φ^4 — это центральная часть волны с большой амплитудой. Везде за пределами ядра есть «крылья», в которых преобладают крошечные синусоидальные пульсации. Причиной нелокальности такой волны, названной наноптероном [1, с. 166], является резонанс между бризером и волновой модой линеаризованной безграничной системы [1]. Найдено также [21] долгоживущее нелинейное метастабильное связанное состояние трех кинков — «тритон». Этот объект является продуктом симметричного столкновения двух кинков и антикинка.

Для применения модели φ^4 в практических приложениях часто нужно модифицировать уравнение, внося в него дополнительные слагаемые, или считать коэффициенты функциями от координат и времени [1, 2, 22–27]. Например, часто рассматривают наличие примесей, то есть неоднородности параметра перед потенциалом. Для УСГ эта задача разработана достаточно хорошо. Рассмотрена динамика кинка и генерация локализованных волн для моделей с точечной и протяженной примесью, одной и многими примесями, изучено влияние функции, описывающей неоднородность параметра [8, 28–33]. Для модели φ^4 с примесями пока сделано намного меньше. Было показано, что одиночные точечные примеси способны рассеивать или захватывать кинки, а также генерировать локализованную примесную моду [1]. В [34] рассмотрена динамика кинков для модели с одиночными протяженными примесями, имеющими пространственные профили Гаусса или Лоренца. В [26] была подробно исследована структура динамического кинка и влияние параметров примеси прямоугольного вида на резонансную скорость отражения от одиночной притягивающей примеси. Показано не только качественное согласие полученных результатов со случаем точечных примесей, но и существенное количественное влияние профиля примеси на форму локализованной примесной моды и рассеяние кинков на примесях. В [27] рассмотрена динамика солитонов на протяженной одиночной примеси прямоугольного вида. Для УСГ было показано ранее [33, 35], что наличие двух примесей приводит к появлению новых коллективных эффектов и существенно влияет на динамику кинка. В данной работе рассмотрена динамика кинка для модели φ^4 с двумя протяженными примесями прямоугольного вида и проведено сравнение полученных результатов с уже известными для УСГ.

1. Основные уравнения и метод решения

Рассмотрим некоторое скалярное поле $u(x, t)$, для которого уравнение движения в одномерном случае имеет вид

$$u_{tt} - u_{xx} + K(x)(u^2 - 1)u = 0, \quad (1)$$

где $K(x)$ — некоторая функция от координаты x , учитывающая наличие примеси в системе. При $K(x) = 1$ уравнение (1) является уравнением модели φ^4 и имеет решение в виде кинка [1]:

$$u(x, t) = \tanh \frac{x - v_0 t}{\sqrt{2(1 - v_0^2)}}, \quad (2)$$

где v_0 — начальная скорость кинка, $0 \leq v_0 < 1$, x_0 — начальное положение кинка.

Для случая протяженных примесей и произвольного вида функции $K(x)$ уравнение (1) можно решить только численно. Рассмотрим для определенности случай $K(x)$, хорошо исследованный для УСГ, в виде двух одинаковых протяженных примесей [26], который описывается формулой:

$$K(x) = \begin{cases} 1, & x < -\frac{W}{2}, \quad \frac{W}{2} < x < d - \frac{W}{2}, \quad x > d + \frac{W}{2}, \\ 1 - \Delta K, & -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2}, \quad -\frac{W}{2} + d \leq x \leq \frac{W}{2} + d, \end{cases} \quad (3)$$

где d — расстояние между примесями, W — ширина примесей, ΔK — глубина примесей (см. рис. 1). Как показано для точечных примесей ранее [1], если $\Delta K > 0$, то примесь является эффективной потенциальной ямой для кинка, при $\Delta K < 0$ — потенциальным барьером (рис. 1).

Уравнение (1) с пространственной неоднородностью вида (3) решалось численно методом линий [36] на интервале $-60 \leq x \leq 60$, $0 \leq t \leq 1000$. Шаг по координате равен 0.025. Шаг по времени автоматически выбирался программой расчета, чтобы обеспечить абсолютную точность интегрирования получившейся системы дифференциальных уравнений 10^{-8} . В качестве начального решения при $t = 0$ брался кинк вида (2), имеющий координату $x_0 = -10$. Он запускался с разными начальными скоростями v_0 в направлении примеси, и наблюдалась его динамика. Использовались граничные условия Неймана. На границах используемой численной схемы заложено сильное трение, позволяющее по прошествии некоторого времени счета избавиться от излучения свободных волн, возникающих при взаимодействии кинка с примесью и границами расчетной схемы.

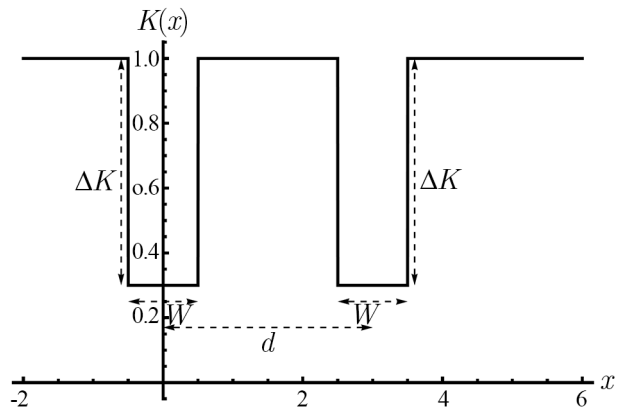


Рис. 1. Зависимость $K(x)$ вида (3)

Fig. 1. Dependence $K(x)$ of the form (3)

2. Результаты

2.1. Случай потенциального барьера. Динамика кинка. Рассмотрим вначале случай $\Delta K < 0$ при значениях параметров: $d = 5.0$, $\Delta K = -0.5$, $W = 1.0$. В отличие от случая одной протяженной примеси [26, 27], когда было найдено два возможных сценария динамики кинка, в данном случае получены четыре возможных сценария движения кинка. Возможные сценарии движения кинка показаны на рис. 2. Пунктирной линией на рис. 2 показаны центры прямоугольных примесей (барьеров). Кинк может отразиться от первого барьера и возвратиться назад (кривая 1 на рис. 2). Это, как правило, происходит при малых скоростях. При превышении некоторого порога начальной скорости кинка v_0 , обычно называемого критической скоростью, кинк v_{cr} начинает проходить оба барьера (кривая 2 на рис. 2). При некотором узком диапазоне начальных скоростей возможны два варианта динамики кинка: кинк может пройти первый барьер, отразиться от второго барьера и, пройдя еще раз первый барьер, вернуться назад (кривая 3 на рис. 2), либо кинк, пройдя первый барьер, начинает колебаться между двумя барьерами (кривая 4 на рис. 2). Траектории 3 и 4 возникают в небольшом диапазоне начальной скорости $v_0 \approx 0.46$.

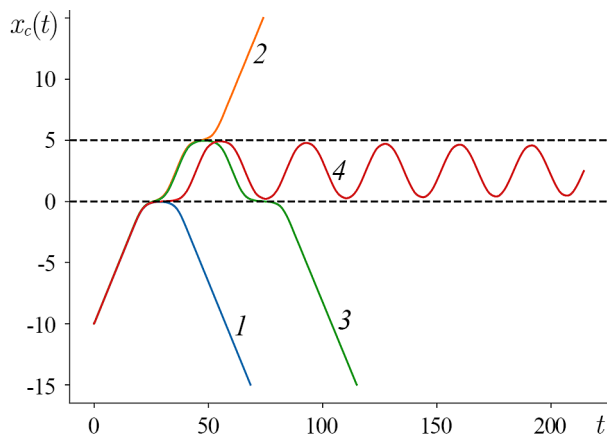


Рис. 2. Различные сценарии динамики кинка: 1 — отражение от барьеров, $v_0 = 0.4580$; 2 — прохождение барьеров, $v_0 = 0.4615$; 3 — отражение от второго барьера, $v_0 = 0.4610$; 4 — колебания между барьерами, $v_0 = 0.4584$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Various scenarios of kink dynamics: 1 — reflection from barriers, $v_0 = 0.4580$; 2 — passing barriers, $v_0 = 0.4615$; 3 — reflection from the second barrier, $v_0 = 0.4610$; 4 — oscillations between barriers, $v_0 = 0.4584$ (color online)

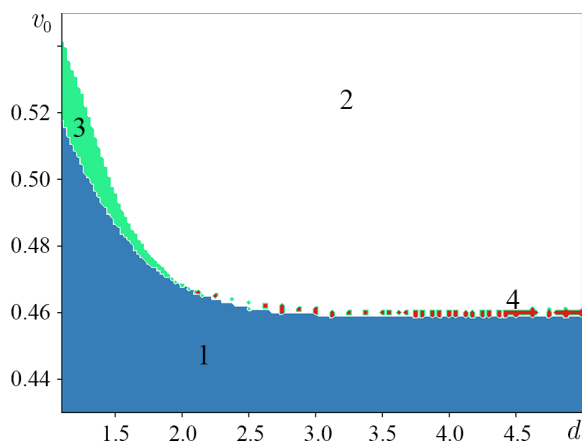


Рис. 3. Различные сценарии динамики кинка в зависимости от расстояния между барьерами и начальной скорости: 1 — отражение от барьеров; 2 — прохождение барьеров; 3 — отражение от второго барьера; 4 — колебания между барьерами (цвет онлайн)

Fig. 3. Different scenarios of kink dynamics depending on the distance between barriers and initial speed: 1 — reflection from barriers; 2 — passing barriers; 3 — reflection from the second barrier; 4 — oscillations between barriers (color online)

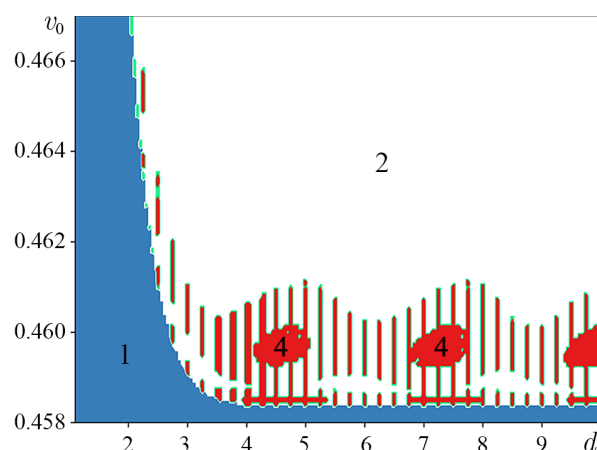


Рис. 4. Различные сценарии динамики кинка в зависимости от расстояния между барьерами и начальной скорости в области критической скорости $v_0 \approx 0.46$: 1 — отражение от барьеров; 2 — прохождение барьеров; 4 — колебания между барьерами (цвет онлайн)

Fig. 4. Various scenarios of kink dynamics depending on the distance between the barriers and the initial velocity in the critical velocity region $v_0 \approx 0.46$: 1 — reflection from barriers; 2 — passing barriers; 4 — oscillations between barriers (color online)

Отметим, что это значение скорости совпадает с точностью до тысячных с минимальной скоростью $v_{cr} = 0.46$, необходимой кинку для прохождения одной протяженной примеси [26]. Отметим, что всегда после взаимодействия с примесью начальный кинк вида (2) превращается в вобблинг-кинк (кинк с возбужденной внутренней модой колебаний), как и для случая одной примеси, рассмотренный ранее [27].

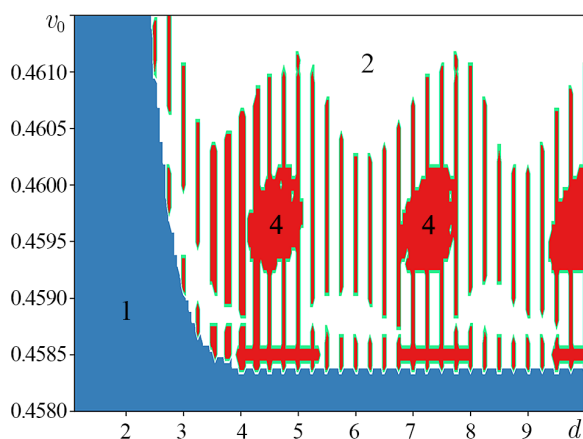


Рис. 5. Увеличенная часть рис. 4 при $4 < d < 10$: 1 — отражение от барьеров; 2 — прохождение барьеров; 4 — колебания между барьерами (цвет онлайн)

Fig. 5. Enlarged part of fig. 4 for $4 < d < 10$: 1 — reflection from barriers; 2 — passing barriers; 4 — oscillations between barriers (color online)

Зависимость режима динамики кинков от начальной скорости и расстояния между центрами барьеров d показана на рис. 3. Области 1–4 соответствуют траекториям 1–4 на рис. 2. При малых расстояниях между барьерами $d < 2$ есть переходная зона от отражения от барьеров к прохождению, при которой кинк проходит первый барьер и отражается от второго (кривая 3, рис. 2). При увеличении расстояния между барьерами в районе $v_0 = 0.46$ кинк начинает колебаться между барьерами (кривая 4, рис. 2). Рисунок получен с шагом по начальной скорости 0.001 и шагом по d , равным 0.05.

Области, в которых кинк колеблется между барьерами, имеют довольно сложную структуру, как показано на рис. 4 и рис. 5. Эти рисунки получены с шагом по начальной скорости 0.0001 и шагом по d , равным 0.05.

Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 после взаимодействия с потенциальными барьерами имеет вид, представленный на рис. 6. Конечная скорость кинка находилась следующим образом. После взаимодействия с примесями в виде потенциальных барьеров кинк движется практически всегда с постоянной скоростью, и его конечную скорость v_f можно найти линейной аппроксимацией траектории $X_c(t) = X_0 + v_f t$. Изменяя начальную скорость кинка, можно получить $v_f(v_0)$ — зависимость конечной скорости кинка от начальной.

Видно, что для $v_0 < v_{cr}$ взаимодействие кинка с примесью практически упругое, хотя на кинке и возбуждается внутренняя мода колебаний. Заметное отличие величин начальных и конечных скоростей возникает после прохождения кинком двух примесей только при скоростях чуть больших v_{cr} и больших величинах параметра ΔK . Это можно объяснить тем, что в этом случае после столкновения с высоким барьером возбуждаются за счет кинетической энергии кинка внутренние моды колебаний, и он начинает сильно излучать объёмные волны, что заметно влияет на величину его скорости. При достаточно больших скоростях $v_0 > 0.7$ взаимодействие кинка с примесью опять практически упругое, так как при такой большой скорости кинк не успевает отдать много кинетической энергии на возбуждение внутренних мод колебаний. В области примесей при этом колебаний не наблюдается.

Более подробно траектория координаты центра кинка, колеблющегося между барьерами, показана на рис. 7 для параметров $d = 5.0$, $v_0 = 0.46$. Эти колебания сопровождаются возбуждением внутренних мод колебаний кинка и излучением кинком малоамплитудных волн. Частота колебаний кинка между барьерами для данных параметров равна примерно 0.21 (см. рис. 8), и видно, что существует только одна частота. Возбуждение локализованных на примеси колебаний при пининге, отражении или прохождении кинка не наблюдалось.

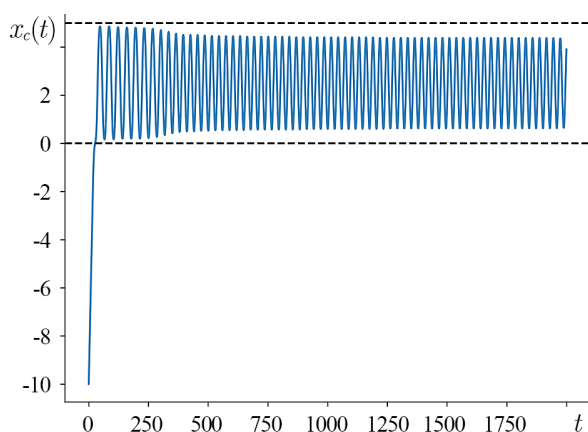


Рис. 7. Зависимость координаты центра кинка от времени ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

Fig. 7. Dependence of the kink center coordinates on time ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

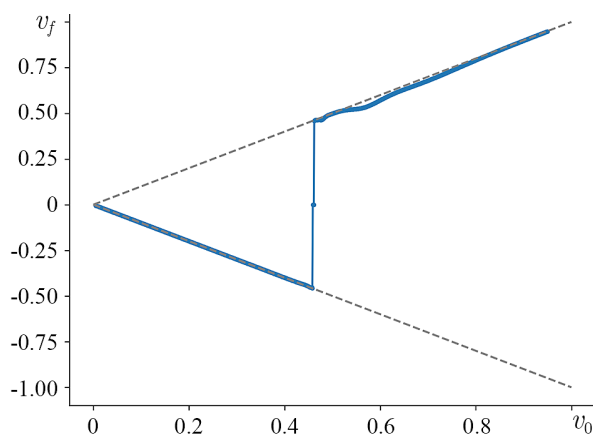


Рис. 6. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 после взаимодействия с потенциальными барьерами. Пунктирными линиями построены прямые $v_f = v_0$, $v_f = -v_0$

Fig. 6. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 after interaction with potential barriers. The dotted lines show the straight lines $v_f = v_0$, $v_f = -v_0$

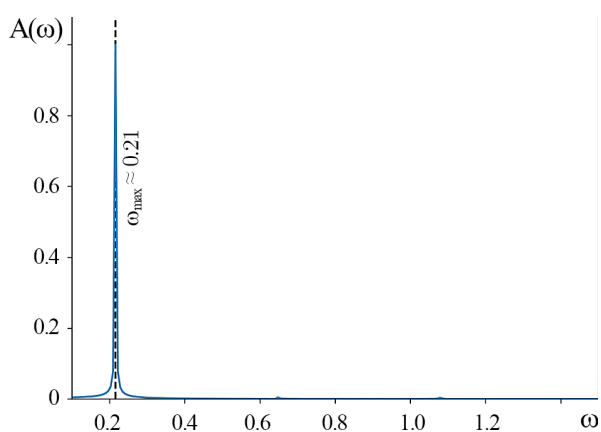


Рис. 8. Преобразование Фурье колебаний координаты центра кинка от времени ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

Fig. 8. Fourier transform of oscillations of the kink center coordinates versus time ($d = 5.0$, $v_0 = 0.46$)

2.2. Случай потенциальной ямы. Динамика кинка. Пусть теперь $\Delta K > 0$, например, $\Delta K = 0.7$, $W = 1.0$. Рассмотрим возможные сценарии динамики кинка, изменяя расстояние d между примесями и начальную скорость кинка (рис. 9). Главное отличие взаимодействия кинка с примесью типа потенциальной ямы от примеси типа барьера, как и для случая уравнения синус-Гордона [2, 8], заключается в том, что взаимодействие кинка с ямой — неупругое. Как и для случая потенциального барьера, на кинке возбуждается внутренняя мода колебаний, то есть образуется вобблинг-кинк. В центре примесей возникают локализованные колебания, которые сильно влияют на динамику кинка.

Наблюдались следующие сценарии динамики кинка: колеблется между двумя примесями (см. рис. 9 кривая 1 ($d = 1.5$, $v_0 = 0.2$)); колеблется то в области первой примеси, то в области второй, и может перескакивать между примесями (см. рис. 9 кривая 6 ($d = 2.1$, $v_0 = 0.06$)); захватывается первой примесью (при малых начальных скоростях кинка см. кривая 2 рис. 9); захватывается второй примесью (кривая 3 рис. 9); резонансно отражается от притягивающего потенциала (кривая 4 рис. 9); проходит обе примеси (кривая 5 рис. 9).

Из рис. 9 следует, что конечная скорость кинка v_f при данных параметрах примеси определяется величиной его начальной скорости. Так, если кинк движется по траекториям 1, 2, 3, 6 рис. 9, то вследствие излучения он в конце концов остановится на первой или второй примеси, и его конечная скорость будет $v_f = 0$. Конечная скорость кинка при движении по траекториям 4 и 5 рис. 9 после взаимодействия с примесями в виде потенциальных ям находится аналогично методике, описанной в параграфе 2.1.

При фиксированном расстоянии между примесями — $d = 5.1$ и $\Delta K = 0.7$, $W = 1.0$, изменяя начальную скорость кинка v_0 с шагом 0.001, можно рассчитать зависимость конечной скорости

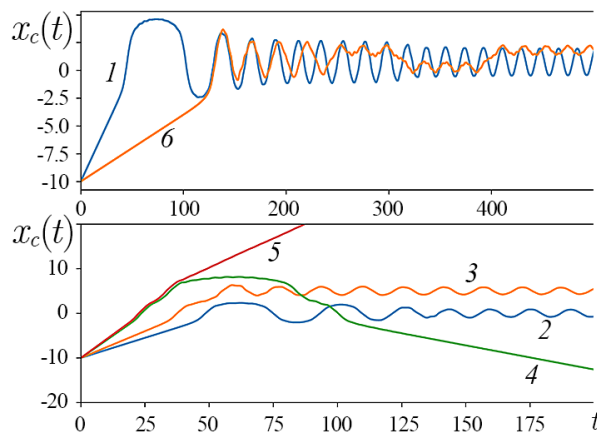


Рис. 9. Различные сценарии динамики кинка: 1 — колебания между двумя примесями ($d = 1.5$, $v_0 = 0.2$); 2 — захват на первой примеси ($d = 5.0$, $v_0 = 0.18$); 3 — захват на второй примеси ($d = 5.0$, $v_0 = 0.24$); 4 — резонансное отражение ($d = 5.0$, $v_0 = 0.4$); 5 — прохождение примесей ($d = 5.0$, $v_0 = 0.42$); 6 — перескоки между первой и второй примесью ($d = 2.1$, $v_0 = 0.06$) (цвет онлайн)

Fig. 9. Various kink dynamics scenarios: 1 — oscillations between two impurities ($d = 1.5$, $v_0 = 0.2$); 2 — capture on the first impurity ($d = 5.0$, $v_0 = 0.18$); 3 — capture on the second impurity ($d = 5.0$, $v_0 = 0.24$); 4 — resonant reflection ($d = 5.0$, $v_0 = 0.4$); 5 — passing impurities ($d = 5.0$, $v_0 = 0.42$); 6 — jumps between the first and second impurity ($d = 2.1$, $v_0 = 0.06$) (color online)

кинка от начальной (рис. 10). Для других параметров примеси, как показали численные расчеты, вид $v_f(v_0)$ будет аналогичным. Из рис. 10 видно, что при малых скоростях конечная скорость кинка равна нулю, так как наблюдаем его пининг на первой или второй примеси. Есть некоторая критическая величина начальной скорости v_{cr} , при превышении величины которой кинк проходит обе примеси. При заданных параметрах неоднородности $v_{cr} = 0.411$. Имеется на рис. 10 значение отрицательной скорости (при $v_0 = 0.408$), которое соответствует резонансному отражению от притягивающего потенциала, как и для рассмотренного ранее случая одной примеси [1, 13, 26]. При данном сценарии после взаимодействия с примесями кинк медленно движется в обратном направлении. Также в определенных диапазонах начальной скорости возможно прохождение кинком обеих примесей при скорости ниже v_{cr} . Найдено два таких диапазона начальных скоростей. Аналогично работе [26] можно назвать это явление квазитуннелированием.

В [1, 13, 26] для случая одной примеси было показано, что резонансное отражение проявляется в очень узком диапазоне

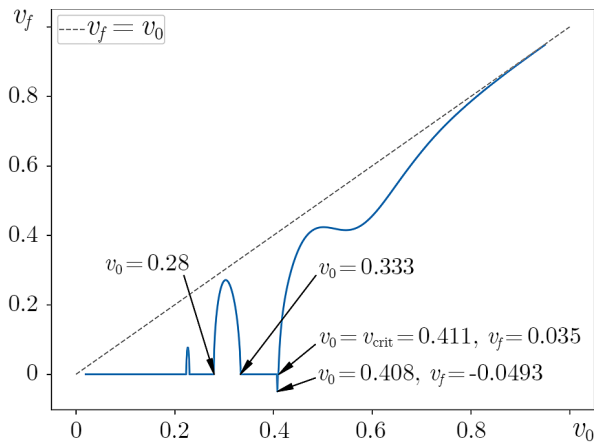


Рис. 10. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при шаге по начальной скорости 0.001

Fig. 10. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 at an initial velocity step of 0.001

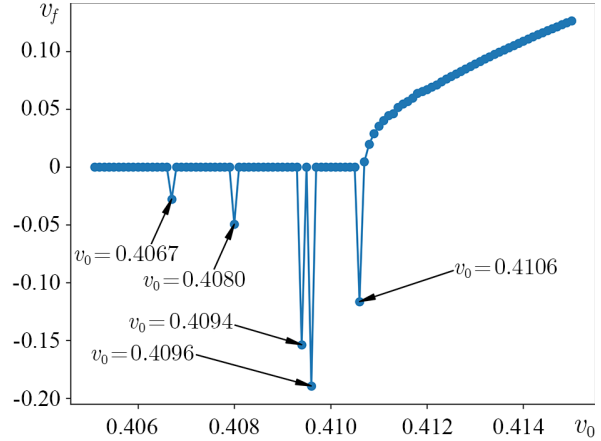


Рис. 11. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при шаге по начальной скорости 0.0001. Область поиска резонансного отражения 0.4-0.42

Fig. 11. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 at an initial velocity step of 0.0001. Search area for resonant reflection 0.4-0.42

скоростей и их количество увеличивается при приближении к величине критической скорости. Для верификации результатов резонансного взаимодействия была построена зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при уменьшенном на порядок шаге по начальной скорости — 0.0001 (см. рис. 11) вблизи области точки критической скорости v_{cr} . В этом случае на графике добавилось еще 5 диапазонов начальной скорости, в которых возникает резонансное отражение.

Рассмотрим первое из новых значений «резонансной» начальной скорости $v_0 = 0.4067$ (см. рис. 11). Если взять и опять уменьшить масштаб и рассмотреть начальные скорости уже с шагом по 0.00001 вблизи $v_0 = 0.4067$, можно получить следующую зависимость (см. рис. 12). Для остальных значений «резонансных» скоростей шага по начальной скорости, равного 0.00001, уже не хватает, но можно предположить, что зависимость будет также иметь подобный вид при уменьшении шага. В целом можно сделать вывод, что для двух протяженных примесей, по сравнению со случаем одной примеси [26], области резонансного отражения намного меньше по величине этих областей меньше, и для их нахождения при расчетах требуется меньший шаг по начальной скорости, что существенно затрудняет их нахождение.

Критическая скорость v_{cr} кинка зависит от параметров примеси и от расстояния d

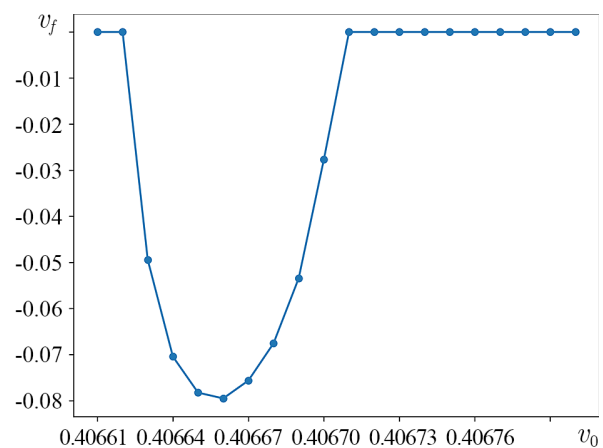


Рис. 12. Зависимость конечной скорости кинка v_f от начальной v_0 при шаге по начальной скорости 0.00001. Область резонансного отражения 0.4067. Остальные окна еще намного меньше и требуют еще более мелкого шага для отрисовки

Fig. 12. Dependence of the final kink velocity v_f on the initial velocity v_0 at a step of initial velocity of 0.00001. The resonant reflection region is 0.4067. The remaining windows are still much smaller and require even smaller steps to draw

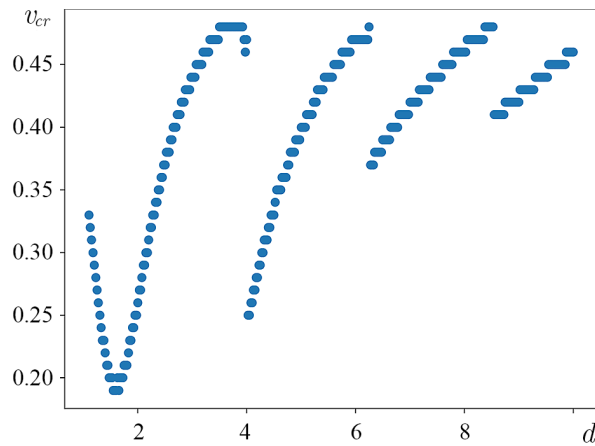


Рис. 13. Зависимость критической скорости кинка v_{cr} от расстояния между примесями

Fig. 13. Dependence of the critical kink velocity v_{cr} on the distance between impurities

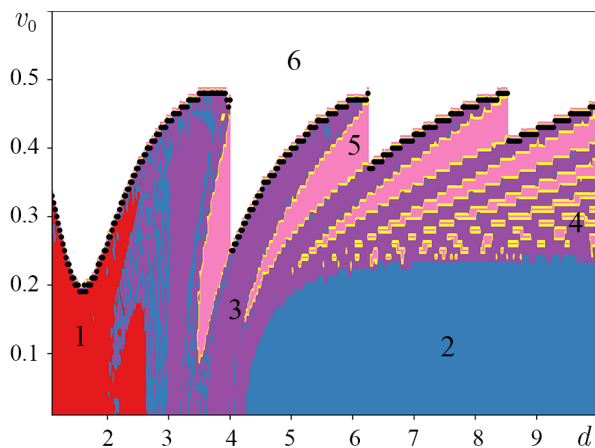


Рис. 14. Диаграмма возможных режимов динамики кинка в зависимости от начальной скорости кинка v_0 и расстояния d между протяженными примесями. Черными маркерами показаны значения критической скорости (цвет онлайн)

Fig. 14. Diagram of possible regimes of kink dynamics depending on the initial kink velocity v_0 and the distance d between extended impurities. Black markers show the critical speed values (color online)

скорости (рис. 13) хорошо ложится на диаграмму режимов динамики кинка (рис. 14). Черными маркерами показаны значения критической скорости, взятые из рис. 13.

Заключение

Определены и описаны возможные сценарии динамики кинка с учетом резонансных эффектов. Показано, что динамика кинка в (1+1)-мерной модели ϕ^4 с двумя протяженными примесями содержит новые сценарии его динамики по сравнению со случаем одной протяженной примеси.

между примесями. Методом половинного деления получена зависимость критической скорости кинка от d . Она представлена на рис. 13.

Построим диаграмму возможных сценариев динамики кинка в зависимости от начальной скорости v_0 и расстояния между примесями d (см. рис. 14). На этом рисунке цифра 1 — колебания кинка между двумя примесями, 2 — захват на первой примеси, 3 — захват на второй примеси, 4 — резонансное отражение, 5 — прохождение кинка через примеси при скорости ниже v_{cr} — квазитуннелирование, 6 — прохождение кинка через две примеси. Диаграмма для областей параметров, определяющих вид сценария динамики кинка, имеет «лепестковый» вид. При одном и том же значении параметра d при изменении начальной скорости кинка могут иметь место как различные, так и одинаковые сценарии его динамики. При постоянной начальной скорости, только меняя расстояние между примесями, также можно получить как разные, так и одинаковые сценарии динамики кинка. Так, при небольшом значении d кинк колеблется между примесями, при увеличении величины параметра d (примерно от 2 до 4) кинк хаотично останавливается то на первой, то на второй примеси. При дальнейшем увеличении $d > 4$ уже видны четкие границы разделения областей притяжения первой и второй ямы. Видно, что резонансное отражение возникает на границах лепестков (получены отдельные значения, найденные при шаге вычисления диаграммы $\Delta d = 0.01$ и $\Delta v_0 = 0.01$). Можно предположить, что если бы мы могли найти точную формулу лепестка $F(v_0, d)$ для заданных параметров примесей, то все величины начальных скоростей для резонансного отражения будут лежать на его границе. Можно заметить также, что зависимость критической

В случае примесей, которые являются потенциальными барьерами для кинка, как и в случае УСГ, он, в зависимости от начальной скорости, может либо отражаться от них, либо проходить через них, либо колебаться между ними. Его взаимодействие с примесями носит в этом случае в основном упругий характер. Для примесей, являющихся потенциальными ямами для кинка, в зависимости от начальной скорости, как и в случае УСГ, найдены следующие сценарии его динамики: захват; резонансное отражение или прохождение при скоростях меньше критической; прохождение при скоростях больше критической. Взаимодействие кинка с примесями носит в этом случае неупругий характер, связанный с затратами его энергии на возбуждение локализованных на примесях волн. Резонансное отражение и прохождение связано с возможностью резонансного взаимодействия кинка с локализованными волнами, возбуждаемыми в области примесей. Найдены зависимости критических и резонансных скоростей кинка в зависимости от параметров примеси. Построена диаграмма возможных сценариев динамики кинка в зависимости от начальной скорости и расстояния между примесями.

Список литературы

1. Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Cham: Springer, 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.
2. Белова Т. И., Кудрявцев А. Е. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 4. С. 377–406. DOI:10.3367/UFNr.0167.199704b.0377.
3. Schneider T., Stoll E. Molecular-dynamics study of a three-dimensional one-component model for distortive phase transitions // Phys. Rev. B. 1978. Vol. 17, no. 3. P. 1302–1322. DOI: 10.1103/PhysRevB.17.1302.
4. Bishop A. R. Defect states in polyacetylene and polydiacetylene // Solid State Communications. 1980. Vol. 33, no. 9. P. 955–960. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90289-6.
5. Rice M. J., Mele E. J. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene // Solid State Communications. 1980. Vol. 35, no. 6. P. 487–491. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90254-9.
6. Yamaletdinov R. D., Slipko V. A., Pershin Y. V. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96, no. 9. P. 094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
7. Yamaletdinov R. D., Romańczukiewicz T., Pershin Y. V. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects // Carbon. 2019. Vol. 141. P. 253–257. DOI:10.1016/j.carbon.2018.09.032.
8. Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer, 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
9. Belova T. I., Kudryavtsev A. E. Quasi-periodic orbits in the scalar classical $\lambda\varphi^4$ field theory // Physica D. 1988. Vol. 32, no. 1. P. 18–26. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90085-1.
10. Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E. High energy density in the collision of N kinks in the φ^4 model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
11. Takyi I., Weigel H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited // Phys. Rev. D. 2016. Vol. 94, no. 8, P. 085008. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.085008.
12. Malomed B. A. Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25, no. 4. P. 755–764. DOI: 10.1088/0305-4470/25/4/015.
13. Fei Z., Kivshar Y. S., Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, no. 8. P. 5214–5220. DOI: 10.1103/physreva.46.5214.

14. *Romańczukiewicz T.* Creation of kink and antikink pairs forced by radiation // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. Vol. 39, no. 13. P. 3479–3494. DOI: 10.1088/0305-4470/39/13/022.
15. *Alonso Izquierdo A., Queiroga-Nunes J., Nieto L. M.* Scattering between wobbling kinks // *Phys. Rev. D.* 2021. Vol. 103, no. 4. P. 045003. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.045003.
16. *Ablowitz M. J., Kruskal M. D., Ladik J. F.* Solitary Wave Collisions // *SIAM J. Appl. Math.* 1979. Vol. 36, no. 3. P. 428–437. DOI: 10.1137/0136033.
17. *Goodman R. H., Haberman R.* Kink-antikink collisions in the ϕ^4 Equation: The n-bounce resonance and the separatrix map // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005. Vol. 4, no. 4. P. 1195–1228. DOI: 10.1137/050632981.
18. *Gani V. A., Kudryavtsev A. E., Lizunova M. A.* Kink interactions in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^6 model // *Phys. Rev. D.* 2014. Vol. 89, no. 12, P. 125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
19. *Marjaneh A. M., Saadatmand D., Zhou K., Dmitriev S. V., Zomorrodian M. E.* High energy density in the collision of N kinks in the ϕ^4 model // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2017. Vol. 49. P. 30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
20. *Yan H., Zhong Y., Liu Y. X., Maeda K.* Kink-antikink collision in a Lorentz-violating ϕ^4 model // *Phys. Lett. B.* 2020. Vol. 807. P. 135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
21. *Getmanov B. S.* Связанные состояния солитонов в модели теории поля ϕ_2^4 // *Письма в ЖЭТФ.* 1976. Т. 24, № 5. P. 323–327.
22. *Saadatmand D., Dmitriev S. V., Borisov D. I., Kevrekidis P. G., Fatykhov M. A., Javidan K.* Effect of the ϕ^4 kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect // *JETP Lett.* 2015. Vol. 101, no. 7. P. 497–502. DOI: 10.1134/S0021364015070140.
23. *Saadatmand D., Javidan K.* Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory // *Braz. J. Phys.* 2013. Vol. 43, no. 1-2. P. 48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
24. *Arash G.* Dynamics of ϕ^4 kinks by using adomian decomposition method // *American Journal of Numerical Analysis.* 2016. Vol. 4, no. 1. P. 8–10. DOI: 10.12691/ajna-4-1-2.
25. *Kälbermann G.* Soliton tunneling // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 55, no. 6. P. R6360–R6362. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.R6360.
26. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Kink Dynamics in the ϕ^4 model with extended impurity // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023. Vol. 19, no. 3. P. 303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
27. *Fakhretdinov M. I., Samsonov K. Y., Dmitriev S. V., Ekomasov E. G.* Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the ϕ^4 model // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. Vol. 20, no. 1. P. 15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
28. *Екомасов Е. Г., Самсонов К. Ю., Гумеров А. М., Кудрявцев Р. В.* Структура и динамика локализованных нелинейных волн уравнения синус-Гордона в модели с одинаковыми примесями // *Известия вузов. ПНД.* 2022. Т. 30, № 6. С. 749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
29. *González J. A., Bellorín A., García-Ñustes M. A., Guerrero L. E., Jiménez S., Vázquez L.* Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations // *Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 381, no. 24. P. 1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
30. *Гумеров А. М., Екомасов Е. Г., Муртазин Р. Р., Назаров В. Н.* Трансформация солитонов уравнения синус-Гордона в моделях с переменными коэффициентами и затуханием // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2015. Т. 55, № 4. С. 631–640. DOI: 10.7868/S0044466915040031.
31. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Murtazin R. R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // *Math. Methods in App. Sciences.* 2016. Vol. 40, no. 17. P. 6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.

32. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 312. P. 198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
33. *Ekomasov E. G., Gumerov A. M., Kudryavtsev R. V., Dmitriev S. V., Nazarov V. N.* Multisoliton dynamics in the sine-Gordon model with two point impurities // *Braz. J. Phys.* 2018. Vol. 48, no. 6. P. 576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.
34. *Lizunova M. A., Kager J., de Lange S., van Wezel J.* Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory // *Int. J. Mod. Phys. B*. 2022. Vol. 36, no. 05. P. 2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
35. *Екомасов Е. Г., Кудрявцев Р. В., Самсонов К. Ю., Назаров В. Н., Кабанов Д. К.* Динамика кинка уравнения синус-Гордона в модели с тремя одинаковыми притягивающими или отталкивающими примесями // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, № 6. С. 693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
36. *Schiesser W. E.* The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. New York: Academic Press, 2012. 326 p.

References

1. Kevrekidis P, Cuevas-Maraver J. A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. Cham: Springer; 2019. 311 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11839-6.
2. Belova TI, Kudryavtsev AE. Solitons and their interactions in classical field theory. *Phys. Usp.* 1997;40(4):359–386. DOI: 10.1070/pu1997v040n04abeh000227.
3. Schneider T, Stoll E. Molecular-dynamics study of a three-dimensional one-component model for distortive phase transitions. *Phys. Rev. B*. 1978;17(3):1302–1322. DOI: 10.1103/PhysRevB.17.1302.
4. Bishop AR. Defect states in polyacetylene and polydiacetylene. *Solid State Communications*. 1980;33(9):955–960. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90289-6.
5. Rice MJ, Mele EJ. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene. *Solid State Communications*. 1980;35(6):487–491. DOI: 10.1016/0038-1098(80)90254-9.
6. Yamaletdinov RD, Slipko VA, Pershin YV. Kinks and antikinks of buckled graphene: a testing ground for the φ^4 field model. *Phys. Rev. B*. 2017;96(9):094306. DOI: 10.1103/PhysRevB.96.094306.
7. Yamaletdinov RD, Romańczukiewicz T, Pershin YV. Manipulating graphene kinks through positive and negative radiation pressure effects. *Carbon*. 2019;141:253–257. DOI: 10.1016/j.carbon.2018.09.032.
8. Cuevas-Maraver J, Kevrekidis P, Williams F. The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. Cham: Springer; 2014. 263 p. DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3.
9. Belova TI, Kudryavtsev AE. Quasi-periodic orbits in the scalar classical $\lambda\varphi^4$ field theory. *Physica D*. 1988;32(1):18–26. DOI: 10.1016/0167-2789(88)90085-1.
10. Marjaneh AM, Saadatmand D, Zhou K, Dmitriev SV, Zomorrodian ME. High energy density in the collision of N kinks in the φ^4 model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2017;49:30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
11. Takyi I, Weigel H. Collective coordinates in one-dimensional soliton models revisited. *Phys. Rev. D*. 2016;94(8):085008. DOI: 10.1103/PhysRevD.94.085008.
12. Malomed BA. Perturbative analysis of the interaction of a φ^4 kink with inhomogeneities. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1992;25(4):755–764. DOI: 10.1088/0305-4470/25/4/015.
13. Fei Z, Kivshar YS, Vázquez L. Resonant kink-impurity interactions in the φ^4 model. *Phys. Rev. A*. 1992;46(8):5214–5220. DOI: 10.1103/physreva.46.5214.

14. Romanczukiewicz T. Creation of kink and antikink pairs forced by radiation. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006;39(13):3479–3494. DOI: 10.1088/0305-4470/39/13/022.
15. Alonso Izquierdo A, Queiroga-Nunes J, Nieto LM. Scattering between wobbling kinks. *Phys. Rev. D.* 2021;103(4):045003. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.045003.
16. Ablowitz MJ, Kruskal MD, Ladik JF. Solitary wave collisions. *SIAM J. Appl. Math.* 1979;36(3):428–437. DOI: 10.1137/0136033.
17. Goodman RH, Haberman R. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: the n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2005;4(4):1195–1228. DOI: 10.1137/050632981.
18. Gani VA, Kudryavtsev AE, Lizunova MA. Kink interactions in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^6 model. *Phys. Rev. D.* 2014;89(12):125009. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.125009.
19. Marjaneh AM, Saadatmand D, Zhou K, Dmitriev SV, Zomorrodian ME. High energy density in the collision of N kinks in the ϕ^4 model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2017;49:30–38. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.01.022.
20. Yan H, Zhong Y, Liu YX, Maeda K. Kink-antikink collision in a Lorentz-violating ϕ^4 model. *Phys. Lett. B.* 2020;807:135542. DOI: 10.1016/j.physletb.2020.135542.
21. Getmanov BS. Bound states of solitons in the ϕ_2^4 field theory model. *Sov. Phys. JETP Lett.* 1976;24:291–294.
22. Saadatmand D, Dmitriev SV, Borisov DI, Kevrekidis PG, Fatykhov MA, Javidan K. Effect of the ϕ^4 kink's internal mode at scattering on a PT-symmetric defect. *JETP Lett.* 2015;101(7):497–502. DOI: 10.1134/S0021364015070140.
23. Saadatmand D, Javidan K. Collective-coordinate analysis of inhomogeneous nonlinear Klein–Gordon field theory. *Braz. J. Phys.* 2013;43(1-2):48–56. DOI: 10.1007/s13538-012-0113-y.
24. Arash G. Dynamics of ϕ^4 Kinks by Using Adomian Decomposition Method. *American Journal of Numerical Analysis.* 2016;4(1):8–10. DOI: 10.12691/ajna-4-1-2.
25. Kälbermann G. Soliton tunneling. *Phys. Rev. E.* 1997;55(6):R6360–R6362. DOI: 10.1103/PhysRevE.55.R6360.
26. Fakhretdinov MI, Samsonov KY, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Kink dynamics in the ϕ^4 model with extended impurity. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2023;19(3):303–320. DOI: 10.20537/nd230603.
27. Fakhretdinov MI, Samsonov KY, Dmitriev SV, Ekomasov EG. Attractive impurity as a generator of wobbling kinks and breathers in the ϕ^4 model. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024;20(1):15–26. DOI: 10.20537/nd231206.
28. Ekomasov EG, Samsonov KY, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Nonlinear waves of the sine-Gordon equation in the model with three attracting impurities. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(6):749–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003011.
29. González JA, Bellorín A, García-Ñustes MA, Guerrero LE, Jiménez S, Vázquez L. Arbitrarily large numbers of kink internal modes in inhomogeneous sine-Gordon equations. *Phys. Lett. A.* 2017;381(24):1995–1998. DOI: 10.1016/j.physleta.2017.03.042.
30. Gumerov AM, Ekomasov EG, Murtazin RR, Nazarov VN. Transformation of sine-Gordon solitons in models with variable coefficients and damping. *Comput. Math. and Math. Phys.* 2015;55(4):628–637. DOI: 10.1134/S096554251504003X.
31. Ekomasov EG, Gumerov AM, Murtazin RR. Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities. *Math. Methods Appl. Sci.* 2016;40(17):6178–6186. DOI: 10.1002/mma.3908.
32. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV. Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2017;312:198–208. DOI: 10.1016/j.cam.2016.04.013.
33. Ekomasov EG, Gumerov AM, Kudryavtsev RV, Dmitriev SV, Nazarov VN. Multisoliton dynamics in the Sine-Gordon model with two point impurities. *Braz. J. Phys.* 2018;48(6):576–584. DOI: 10.1007/s13538-018-0606-4.

34. Lizunova MA, Kager J, de Lange S, van Wezel J. Kinks and realistic impurity models in φ^4 -theory. Int. J. Mod. Phys. B. 2022;36(05):2250042. DOI: 10.1142/S0217979222500424.
35. Ekomasov EG, Kudryavtsev RV, Samsonov KY, Nazarov VN, Kabanov DK. Kink dynamics of the sine-Gordon equation in a model with three identical attracting or repulsive impurities. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(6):693–709. DOI: 10.18500/0869-6632-003069.
36. Schiesser WE. The Numerical Method of Lines: Integration of Partial Differential Equations. New York: Academic Press; 2012. 326 p.



Екомасов Евгений Григорьевич — родился в с. Анучино Приморского края (1958). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (1980). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Физика магнитных явлений» (1991, МГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Физика конденсированного состояния» (2005, ЧелГУ). Профессор кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Награжден Нагрудным знаком «Почетный работник высшего образования РФ» (2011) и Почетной грамотой Министерства образования и науки РФ (2008). Область исследовательских интересов — теоретическая и математическая физика, физика конденсированного состояния, спинтроника, вычислительная физика. Опубликовал более 200 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32
 Башкирский государственный университет
 E-mail: ekomasoveg@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-6194-3358
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29060



Фахретдинов Марат Ирекович — родился в Уфе (1984). Окончил физический факультет Башкирского государственного университета (2007). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Теоретическая физика». Доцент кафедры теоретической физики Уфимского университета науки и технологий. Область исследовательских интересов — нелинейные волны, вычислительная физика. Опубликовал около 50 научных и методических работ.

Россия, Республика Башкортостан, 450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32
 Башкирский государственный университет
 E-mail: fmi106tf@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-5338-2933
 AuthorID (eLibrary.Ru): 586430