



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 3  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3)

Научная статья

УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003154

EDN: JVIJVU

## Влияние топологии связанных антиферромагнитных осцилляторов на их взаимную синхронизацию

К. Д. Самойленко<sup>1,2</sup>✉, А. Ю. Митрофанова<sup>1,2</sup>, А. Р. Сафин<sup>1,2,3</sup>, С. А. Никитов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Россия

<sup>3</sup>Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

E-mail: ✉kris\_samoylenko@mail.ru, nastyamitrofanova\_2000@mail.ru,  
arsafin@gmail.com, nikitov@cplire.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024, принята к публикации 21.10.2024,  
опубликована онлайн 7.12.2024, опубликована 30.05.2025

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — математическое описание ансамбля связанных общим дипольным полем осцилляторов, моделирование и изучение синхронизации трёх рассматриваемых топологий — кольцо, решётка и цепочка — с последующим выявлением приоритетной топологии, которая обеспечивала бы синхронизацию в большем диапазоне начальных условий. **Методы.** Для упрощения численного моделирования и изучения синхронизации систем, связанных общим дипольным полем антиферромагнитных осцилляторов, была использована модель Курамото для фазовых осцилляторов, а также параметр порядка и его среднее значение. **Результаты.** Получена математическая модель для связанных общим дипольным полем антиферромагнитных осцилляторов для трёх топологий: кольцо, решётка и цепочка. На примере модели Курамото связанных осцилляторов и с помощью параметра порядка и его среднего значения была изучена синхронизация рассматриваемых массивов и было выяснено, что решётка является преимущественной топологией при одинаковых параметрах ансамбля. **Заключение.** В работе исследована задача синхронизации ансамблей антиферромагнитных спин-Холл осцилляторов, объединенных в различные топологии: кольцо, решётку и цепочку. Показано, что решётка является наиболее предпочтительной топологией для достижения синхронизации при меньших значениях константы силы связи между осцилляторами. Для кольца и цепочки требуются более высокие значения константы силы связи. Для достижения синхронизации в них требуется существенно повышать силу связи.

**Ключевые слова:** синхронизация, антиферромагнитный спин-Холл осциллятор, модель Курамото, ансамбль, параметр порядка.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-15-2024-538).

**Для цитирования:** Самойленко К. Д., Митрофанова А. Ю., Сафин А. Р., Никитов С. А. Влияние топологии связанных антиферромагнитных осцилляторов на их взаимную синхронизацию // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. 307–321. DOI: 10.18500/0869-6632-003154. EDN: JVIJVU

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Influence of the topology of coupled antiferromagnetic oscillators on their mutual synchronization

K. D. Samoylenko<sup>1,2</sup>✉, A. Yu. Mitrofanova<sup>1,2</sup>, A. R. Safin<sup>1,2,3</sup>, S. A. Nikitov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Russia

<sup>3</sup>National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia

E-mail: ✉kris\_samoylenko@mail.ru, nastyu\_mitrofanova\_2000@mail.ru,  
arsafin@gmail.com, nikitov@cplire.ru

Received 22.08.2024, accepted 21.10.2024, available online 7.12.2024, published 30.05.2025

**Abstract.** The purpose of this study is to mathematically describe an ensemble of oscillators coupled by a common dipole field, to model and study the synchronization of the three topologies under consideration: a ring, a grid, and a special case of a lattice-chain, with subsequent identification of a priority topology that would ensure synchronization over a larger range of initial conditions of the ensemble. **Methods.** To simplify the numerical modeling and study the synchronization of systems of antiferromagnetic oscillators coupled by a common dipole field, the Kuramoto model for coupled oscillators, as well as the order parameter and its average value, were used. **Results.** A mathematical model for antiferromagnetic oscillators coupled by a common dipole field was obtained for three topologies: ring, grid, and chain. Using the Kuramoto model of coupled oscillators and the order parameter and its average value, the synchronization of the considered arrays was studied, and it was found that the lattice is the preferred topology for the same ensemble parameters. **Conclusion.** The paper studies the problem of synchronization of ensembles of antiferromagnetic spin-Hall oscillators combined into different topologies: ring, grid and chain. It is shown that the grid is the most preferable topology for achieving synchronization at lower values of the coupling strength constant between the oscillators. The ring and chain require higher values of the coupling strength constant, which is their disadvantage. Nevertheless, with a sufficiently strong coupling, synchronization is also possible in these topologies.

**Keywords:** synchronization, antiferromagnetic spin-Hall oscillator, Kuramoto model, ensemble, order parameter.

**Acknowledgements.** This work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-15-2024-538).

**For citation:** Samoylenko KD, Mitrofanova AYu, Safin AR, Nikitov SA. Influence of the topology of coupled antiferromagnetic oscillators on their mutual synchronization. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(3):307–321. DOI: 10.18500/0869-6632-003154

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Спинtronика является перспективным направлением развития науки и технологий. В частности, особый научный интерес вызывают спин-трансферные и спин-Холл осцилляторы (СТО и СХО соответственно), которые обладают потенциалом внедрения в СВЧ- и терагерцевой электронике. Названные спинtronные осцилляторы (СТО) могут быть реализованы как на основе ферромагнитных (ФМ) [1, 2], так и антиферромагнитных (АФМ) [3–5] слоёв. Диапазон частот ФМ СТО составляет десятки ГГц, в то время как для АФМ СТО возможно возбуждение колебаний с частотами от единиц ГГц до десятков ТГц, что является преимуществом последних. В свою очередь, СХО выигрывают у СТО в простоте изготовления, что делает АФМ СХО привлекательным объектом исследования [6, 7]. Исследование АФМ СХО открывает перспективы их использования в качестве источников, детекторов и спектроанализаторов ТГц-сигналов [8, 9], а также логических элементов [10] и элементов нейроморфных вычислений [11]. Тем не менее низкая выходная мощность единичного АФМ СХО вызывает проблемы в практической реализации перечисленных компонентов, которые могут быть решены посредством связи и взаимной синхронизации единичных АФМ СХО в массиве [12, 13].

В качестве механизма синхронизации можно использовать общее дипольное поле [14], обусловленное свойствами скошенных АФМ. Такой вид связи обеспечивает возможность построения различных топологий связанных консервативно АФМ СХО путем простого их расположения в пространстве вблизи друг друга. Таким образом, по-разному сгруппированные СХО на основе скошенных АФМ позволяют создавать сложные магнитные структуры и контролировать взаимодействие их элементов друг с другом. Также объединение АФМ осцилляторов в топологические конфигурации может обеспечить устойчивые и эффективные способы генерации и управления спиновыми волнами, что расширяет возможности применения антиферромагнитных осцилляторов. Некоторые топологии могут обеспечивать более сильную и стабильную связь и синхронизацию между осцилляторами, что влияет на эффективность передачи информации или генерацию спиновых волн, а также на возможность улучшения параметров предполагаемых устройств на основе АФМ СХО. В данной работе исследуется взаимная синхронизация связанных посредством общего дипольного поля СХО на основе скошенных АФМ. Сравниваются 3 топологии: кольцо, решётка и её частный случай — цепочка.

## 1. Физическая структура

Антиферромагнитный спин-Холл осциллятор — это двухслойная гетероструктура, которая состоит из слоя немагнитного металла (например, платины) и расположенного на нем АФМ [15]. По немагнитному металлу протекает постоянный электрический ток  $j_{DC}$ . Вследствие спинового эффекта Холла [16–18] при многократном рассеянии электронов появляется поток спин-поляризованных электронов с единичным вектором поляризации  $p$ , и из НМ в АФМ протекает спиновый ток  $j_{SC}$  в направлении, перпендикулярном электрическому току. Вместе с течением спинового тока происходит перенос спинового момента из НМ в АФМ, в результате чего намагниченности АФМ возмущаются, при этом в зависимости от величины  $j_{DC}$  и, соответственно, от перенесенного в АФМ спинового момента происходят либо затухающие колебания намагниченостей  $M_1$  и  $M_2$ , либо их вращение в лёгкой плоскости (EP), то есть автоколебания [19]. Из-за обратного спинового эффекта Холла спиновый ток, протекающий из АФМ в НМ, преобразуется в переменный электрический ток ТГц-диапазона, который протекает по слою НМ и является выходным сигналом АФМ СХО.

Для увеличения мощности выходного сигнала АФМ СХО предлагается объединить несколько осцилляторов в ансамбль и синхронизировать их [20]. Связь антиферромагнитных осцилляторов может быть осуществлена с помощью двух методов: посредством общей шины немагнитного металла и общего дипольного поля. В данной работе рассматривается синхронизация АФМ СХО в режиме автоколебаний, связанных посредством общего дипольного поля. Так как данный вид связи обусловлен динамикой вектора ферромагнетизма, в данной работе в качестве активного слоя СХО рассматривается скошенный АФМ (слабый ФМ), скос намагниченостей которого объясняется взаимодействием Дзялошинского–Мория [21, 22]. Физическая структура единичного АФМ СХО изображена на рис. 1, a. Лёгкая и трудная оси АФМ сонаправлены с осями  $Oy$  и  $Ox$  на рис. 1, a соответственно, их единичные орты обозначаются как  $n_e$  и  $n_h$ . В результате вращения намагниченостей в лёгкой плоскости с терагерцевой частотой, пропорциональной вводимому спиновому току и обменному полю АФМ, возникает дипольное излучение с той же частотой, которое может приниматься как соседними, так и более удалёнными от данного осцилляторами ансамблем.

Рассматриваемые топологии изображены на рис. 1, b и c. Цепочка считается частным случаем решётки, продемонстрированной на рис. 1, c. Расстояние от центра системы координат до  $j$ -го осциллятора обозначено как  $r_j$ , при этом для записи последующих формул и реализации

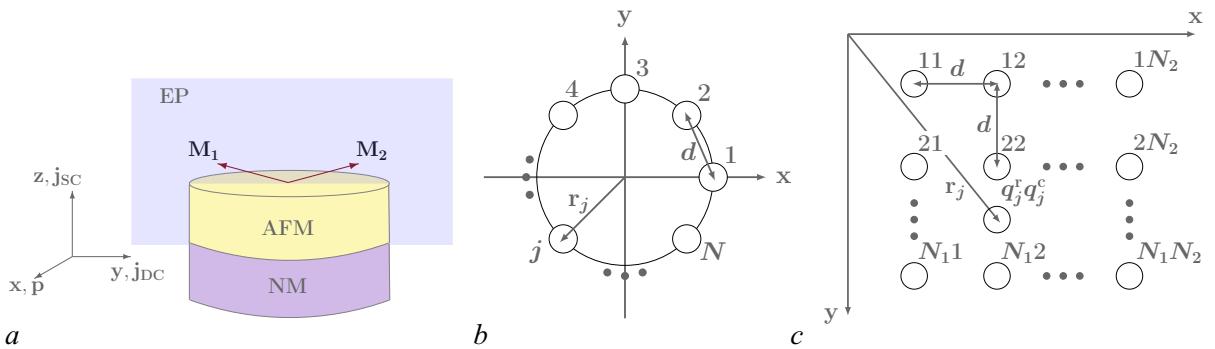


Рис. 1. Физическая структура единичного АФМ СХО и рассматриваемые варианты расположения элементов в массивах: *a* — конструкция антиферромагнитного спин-Холл осциллятора с нижним слоем немагнитного металла (NM), по которому протекает ток  $j_{DC}$ , и верхним слоем антиферромагнетика (AFM), в котором из-за поляризации  $\mathbf{p}$  спинов электронов и течения спинового тока  $j_{SC}$  происходит прецессия намагниченностей  $M_1$  и  $M_2$  в лёгкой плоскости (easy plane-EP); топологии  $N$  связанных АФМ СХО, для которых расстояние от центра системы координат до  $j$ -го осциллятора  $\mathbf{r}_j$ , расстояние между двумя ближайшими осцилляторами  $d$ : *b* — кольцо, *c* — решётка, где  $q_j^r$  и  $q_j^c$  являются индексами строки и столбца соответственно

Fig. 1. Physical structure of a single AFM SCHO and the considered variants of arrangement of elements in arrays; *a* — design of an antiferromagnetic spin-Hall oscillator with a lower layer of non-magnetic metal (NM), through which current  $j_{DC}$  flows and an upper layer of antiferromagnet (AFM), in which, due to polarization  $\mathbf{p}$  of electron spins and the flow of spin current  $j_{SC}$ , precession of magnetizations  $M_1$  and  $M_2$  occurs in the easy plane (EP); topologies of  $N$  coupled AFM SCWs for which the distance from the center of the coordinate system to the  $j$ -th oscillator  $\mathbf{r}_j$ , the distance between two nearest oscillators  $d$ : *b* — ring, *c* — grid, where  $q_j^r$  and  $q_j^c$  are the row and column indices, respectively

вычислительных экспериментов индексы  $j$ -го осциллятора в решётке, которые отвечают за номера строки и столбца, обозначаются в виде  $q_j^r$  и  $q_j^c$ . Так как результаты моделирования связанных осцилляторов, расположенных в цепочке, не зависят от направления самой цепи, то в этом случае нет необходимости уточнять номер строки и столбца, поэтому для  $j$ -го осциллятора цепочки не принято никаких прочих обозначений. Во всех трёх топологиях расстояние между двумя ближайшими осцилляторами одинаково и равно  $d$ . Нумерация осцилляторов начинается с единицы, последний осциллятор имеет номер  $N$ , то есть  $j = \overline{1, N}$ , при этом в решётке количество строк и столбцов обозначено как  $N_1$  и  $N_2$  соответственно.

## 2. Математическая модель

Уравнение для вектора  $\mathbf{l}_j$  антиферромагнитного момента  $j$ -го осциллятора [15, 23–25] имеет вид

$$\mathbf{l}_j \times \left( \ddot{\mathbf{l}}_j + \alpha \omega_{ex} \dot{\mathbf{l}}_j - 2\gamma [\dot{\mathbf{l}}_j \times \mathbf{H}_j] + \frac{\partial W_{AFM_j}}{\partial \mathbf{l}_j} + \sigma j_{DC_j} \omega_{ex} [\mathbf{p} \times \mathbf{l}_j] \right) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — коэффициент затухания Гильберта,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\omega_{ex} = \gamma H_{ex}$  — частота обменного поля  $H_{ex}$ ,  $\sigma = 2\pi \cdot 4.32$  рад  $\cdot$  см $^2$ /(А  $\cdot$  с) — коэффициент, характеризующий перенос спинового момента из слоя НМ в АФМ,  $j_{DC_j}$  — плотность постоянного тока, протекающего через  $j$ -й осциллятор. Расстояние между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами  $\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , в матричном виде для кольца  $\mathbf{r}_{ji} = d \sin \pi(i-j)/N \quad (-\sin \pi(i+j)/N \cos \pi(i+j)/N \quad 0)^T$ , а для решётки  $\mathbf{r}_{ji} = d (q_i^c - q_j^c \quad q_i^r - q_j^r \quad 0)^T$ . Поле взаимодействия между  $i$ -м и  $j$ -м осцилляторами с объёмом  $V_0$

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{V_0}{r_{ij}^3} \left( \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} - \mathbf{m}_i \right). \quad (2)$$

В рассматриваемой модели магнитный момент  $i$ -го осциллятора

$$\mathbf{m}_i = \frac{2M_0[\mathbf{H}_{\text{DMI}} \times \mathbf{l}_i]}{H_{\text{ex}}}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{H}_{\text{DMI}}$  — поле взаимодействия Дзялошинского–Мория,  $M_0$  — намагниченность насыщения подрешёток антиферромагнетика. Тогда суммарное поле для отдельно взятого осциллятора относительно остальных элементов системы выражается как

$$\mathbf{H}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N \mathbf{H}_{ij}. \quad (4)$$

Энергия, выражение для которой включает  $\omega_{\text{e,h}} = \gamma H_{\text{e,h}}$  — частоты полей  $H_{\text{e}}$  и  $H_{\text{h}}$  анизотропии в плоскости и вне плоскости легкого намагничивания:

$$W_{\text{AFM}_j} = -\frac{\omega_{\text{e}}\omega_{\text{ex}}}{2}(\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{n}_{\text{e}})^2 + \frac{\omega_{\text{h}}\omega_{\text{ex}}}{2}(\mathbf{l}_j \cdot \mathbf{n}_{\text{h}})^2 + \frac{\gamma^2}{2}(\mathbf{H}_j \cdot \mathbf{l}_j)^2 + \gamma^2 \mathbf{l}_j \cdot [\mathbf{H}_j \times \mathbf{H}_{\text{DMI}}]. \quad (5)$$

Так как вращение единичного вектора  $\mathbf{l}_j$  происходит в лёгкой плоскости, в сферической системе координат его можно записать в виде  $\mathbf{l}_j = (\cos \varphi_j \sin \varphi_j 0)^T$ ,  $\theta_j = \pi/2$ . Тогда итоговое уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi}_j + a\omega_{\text{ex}}\dot{\varphi}_j + \frac{\omega_{\text{e}}\omega_{\text{ex}}}{2} \sin 2\varphi_j + \frac{3}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{i1} \cos(\varphi_i + \varphi_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{i2} \sin(\varphi_i - \varphi_j) + \frac{3}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{i3} \sin(\varphi_i + \varphi_j) = \sigma j_{\text{DC}_j} \omega_{\text{ex}}, \quad (6)$$

а физические коэффициенты связи  $k_{i1, i2, i3}$  для рассматриваемых топологий представлены в [Таблице](#), где  $a = \left( \sqrt{2(1 - \cos 2\pi|i - j|/N)} / 2 \left| \sin \pi(i - j)/N \right| \right)^3$ ,  $b = \left[ (q_i^{\text{r}} - q_j^{\text{r}})^2 + (q_i^{\text{c}} - q_j^{\text{c}})^2 \right]^{2/3}$ ,  $\zeta = 2\gamma^2 V_0 M_0 H_{\text{DMI}}^2 / (d^3 H_{\text{ex}})$ .

В общем случае динамика связанных фазовых осцилляторов описывается моделью Курамото [26–30]. С помощью различных методов возмущения [31] возможно перейти от исходных уравнений связанных осцилляторов типа (6) к модели фазовых осцилляторов Курамото, как это было сделано, например, в [32] для массивов джозефсоновских контактов, описываемых аналогичными дифференциальными уравнениями, посредством метода многих временных масштабов. После этого соответствующие уравнения для фаз отдельных осцилляторов примут вид

$$\dot{\varphi}_j = \omega_j + \sum_{i=1, i \neq j}^N k_{ij} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad k_{ij} = k a_{ij}, \quad (7)$$

Таблица. Физические коэффициенты связи для разных топологий

Table. Physical coupling coefficients for different topologies

	$k_{i1}$	$k_{i2}$	$k_{i3}$
Цепочка	0	$\frac{\zeta}{ i - j ^3}$	$\frac{\zeta}{ i - j ^3}$
Кольцо	$\zeta a \sin \frac{2\pi(i + j)}{N}$	$\zeta a$	$-\zeta a \cos \frac{2\pi(i + j)}{N}$
Решётка	$2\zeta b \cdot \frac{(q_i^{\text{r}} - q_j^{\text{r}})(q_i^{\text{c}} - q_j^{\text{c}})}{(q_i^{\text{r}} - q_j^{\text{r}})^2 + (q_i^{\text{c}} - q_j^{\text{c}})^2}$	$\zeta b$	$\zeta b \cdot \frac{(q_i^{\text{c}} - q_j^{\text{c}})^2 - (q_i^{\text{r}} - q_j^{\text{r}})^2}{(q_i^{\text{r}} - q_j^{\text{r}})^2 + (q_i^{\text{c}} - q_j^{\text{c}})^2}$

где  $\omega_j = \sigma j_{DC_j} / \alpha$  — собственная частота колебаний  $j$ -ого осциллятора,  $k_{ij}$  — коэффициент связи модели Курамото,  $k$  — константа силы связи, которая подбирается эмпирически для достижения синхронизации из-за условного перехода от модели антиферромагнитных осцилляторов к модели Курамото,  $a_{ij} = V_0 / r_{ij}^3$  является элементом матрицы связи между осцилляторами. Коэффициенты связи модели (1) определяются положением конкретно выбранных осцилляторов в ансамбле, то есть геометрическим расположением элементов внутри системы, а значит, непосредственный расчёт расстояний между выбранными осцилляторами не производится. Отметим, что фазы осцилляторов  $\varphi(t)$  в уравнении (7) не совпадают с полярными углами поворота вектора Нееля из уравнений (6). Далее будем пользоваться обозначением для фаз осцилляторов  $\varphi(t)$ , предполагая, что они удовлетворяют модели Курамото (7). В ней связь осцилляторов относительно друг друга выражается через расстояние  $r_{ij}$ , которое определяет отдаление элементов системы между собой, поэтому матрица связи  $a_{ij}$  представляет собой эквивалент коэффициентов связи, указанных в [Таблице](#) исходной модели. Обратим внимание, что записанная модель Курамото является безразмерной и производная здесь берётся от переменной времени, отличной от (6). Определить факт установления синхронизации возможно с помощью параметра порядка, который показывает степень синхронизации [33]

$$r(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \exp\{i\varphi_i(t)\} \right|. \quad (8)$$

Значения параметра порядка принадлежат интервалу от 0 до 1. Чем ближе значение функции  $r(t)$  к 1, тем выше степень синхронизации. Параметр порядка — функция, зависящая от времени, а значит, для оценки факта установления синхронизации нужен визуальный контроль, что достаточно времязатратно. Поэтому для оценки влияния количества осцилляторов в различных топологиях на синхронизацию АФМ СХО мы будем использовать среднее значение параметра порядка за время  $T$ , которое разбивается на точки  $t_1, \dots, t_p$ , которое записывается в виде

$$r_{av} = \frac{1}{T} \sum_{p=1}^T r(t_p). \quad (9)$$

### 3. Результаты

В качестве скошенного антиферромагнетика рассматривается гематит  $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$  с физическими параметрами  $\alpha = 3.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma = 2\pi \cdot 28$  ГГц/Тл,  $M_0 = 840$  Тл,  $H_{\text{ex}} = 900$  Тл,  $H_e = 0.06$  Тл  $H_{\text{DMI}} = 2.2$  Тл; размеры осциллятора:  $V_0 = 1571$  нм<sup>3</sup>,  $r = 10$  нм; расстояние между соседними осцилляторами ансамбля  $d_0 = 100$  нм. В работе для проведения численного моделирования были выбраны типичные параметры антиферромагнитных структур [23]. Исследование влияния разброса параметров на параметры синхронизации является, несомненно, важной задачей, но составляет предмет отдельного детального исследования и в работе не приводится. Рассмотрим АФМ СХО, через которые должны протекать одинаковые токи, то есть идентичные осцилляторы. Тем не менее технические особенности реализации АФМ СХО могут привести к незначительной разнице между электрическими токами  $j_{DC_j}$ , протекающими по НМ разных СХО. Так как именно  $j_{DC_j}$  определяют собственную частоту  $j$ -го осциллятора  $\omega_j$ , мы считаем, что собственные частоты разных осцилляторов также незначительно отличаются друг от друга. Собственные частоты осцилляторов нормированы к коэффициенту затухания Гильберта и частоте поля  $H_e$ , тогда формула принимает вид  $\omega_j = \sigma j_{DC_j} / \gamma H_e$ , для плотности тока  $j_{DC_j} = 4 \cdot 10^8$  А/см<sup>2</sup> частоты собственных колебаний осцилляторов принимают значения  $\omega_j \approx 1$ . На рис. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента над моделью Курамото (7) и соответствующие им зависимости  $r(t)$  (8). Для численного моделирования было выбрано  $N = 16$ , начальные фазы  $\varphi_j(t = 0) = \varphi_{0j}$  были

случайно распределены на интервале  $[0, 2\pi]$ , при этом результаты на рис. 2, a, b, c соответствуют одинаковым начальным условиям. Время интегрирования (7) составило  $T = 1000$ , однако, так как начиная с  $t = 50$  состояние системы не меняется, графики на рис. 2 ограничиваются именно этим временем. На рис. 2, a продемонстрирован пример установления синхронизации с разностями фаз, близкими к нулевым, то есть в системе колебания АФМ осцилляторов происходит с одинаковой фазой, константа силы связи между осцилляторами составляет  $k = 100$ , тогда нормированная на константу затухания Гильберта сила связи будет определяться выражением  $\tilde{k} = \alpha k = 0.35$ , равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.1]$ . Данному случаю соответствует увеличение параметра порядка  $r(t)$  до единицы. Рис. 2, b иллюстрирует случай, когда в массиве колебания осцилляторов происходят с разными, но постоянными фазами,  $\tilde{k} = 0.35$ ; равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.5]$ , здесь параметр порядка устанавливается постоянным значением,

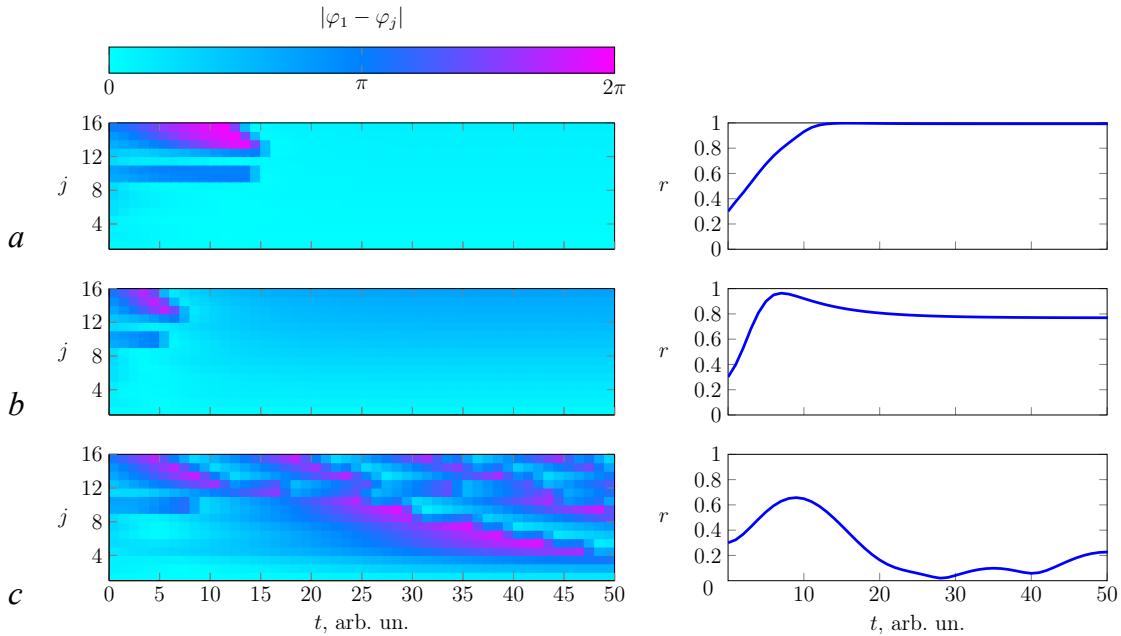


Рис. 2. Визуализация разностей фаз  $|\varphi_1 - \varphi_j|$  и графиков функции  $r(t)$  для топологии решётка, состоящей из 16 осцилляторов со случайным разбросом фаз в начальный момент времени  $[0, 2\pi]$  для трёх случаев: a —  $|\varphi_1 - \varphi_j| \approx 0$ , сила связи с учетом затухания Гильберта  $\tilde{k} = 0.35$ , равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.1]$ , наблюдается синхронизация, функция  $r(t)$  возрастает до единицы; b —  $|\varphi_1 - \varphi_j| = \text{const} \neq 0$ , сила связи с учетом затухания Гильберта  $\tilde{k} = 0.35$ , равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.5]$ , наблюдается синхронизация, функция  $r(t)$  возрастает, но из-за ненулевой постоянной разности фаз не достигает единицы:  $r < 1 \approx 0.8$ ; c —  $|\varphi_1 - \varphi_j| \neq \text{const}$ , сила связи с учетом затухания Гильберта  $\tilde{k} = 0.035$ , равномерное распределение собственных частот колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.5]$ , отсутствие синхронизации, значение функции  $r(t)$  зависит от состояния ансамбля, может как убывать, так и возрастать в зависимости от текущего значения разности фаз (цвет онлайн)

Fig. 2. Visualization of phase differences  $|\varphi_1 - \varphi_j|$  and graphs of function  $r(t)$  for the grid topology consisting of 16 oscillators with random phase spread at the initial time  $[0, 2\pi]$  for three cases: a —  $|\varphi_1 - \varphi_j| \approx 0$ , coupling strength taking into account Hilbert damping  $\tilde{k} = 0.35$ , uniform distribution of oscillator natural frequencies  $\omega_j \in [1, 1.1]$ , synchronization is observed, function  $r(t)$  increases to unity; b —  $|\varphi_1 - \varphi_j| = \text{const} \neq 0$ , coupling strength taking into account Hilbert damping  $\tilde{k} = 0.35$ , uniform distribution of natural frequencies of oscillators  $\omega_j \in [1, 1.5]$ , synchronization is observed, function  $r(t)$  increases, but, due to non-zero constant phase difference, does not reach unity:  $r < 1 \approx 0.8$ ; c —  $|\varphi_1 - \varphi_j| \neq \text{const}$ , coupling strength taking into account Hilbert damping  $\tilde{k} = 0.035$ , uniform distribution of oscillators' natural frequencies  $\omega_j \in [1, 1.5]$ , no synchronization, the value of the function  $r(t)$  depends on the state of the ensemble, can either decrease or increase depending on the current value of the phase difference (color online)

меньше единицы,  $r \approx 0.8$ . Таким образом, рис. 2, a, b демонстрируют наличие синхронизации, что вызвано сильной связью между элементами ансамбля, которая компенсирует разброс собственных частот колебаний осцилляторов. Отметим, что оба описанных режима можно использовать в приложениях. Так, массив синхронизированных АФМ осцилляторов (рис. 2, a) можно использовать в качестве генератора ТГц-сигнала, так как параметр порядка равен одному и ансамбль работает как единая система — большой осциллятор, при прохождении постоянного тока через который на выходе имеем переменный ток ТГц-диапазона, в то время как случай массива на рис. 2, b может найти применение в нейроморфных вычислениях. В данном примере частоты на всех осцилляторах были различны, хоть и близки между собой, о чём говорит значение параметра порядка. Таким образом, проводя разные токи через разные группы осцилляторов, можно добиться того, чтобы на каких-то элементах частоты были одни, а на другой группе — другие. Тогда если мы используем ансамбль в качестве нейроморфного решателя, то входные данные — это значения токов или начальные условия, а выходные — частоты осцилляторов. Например, таким нейроморфным решателем можно решить задачу восстановления зашумленного изображения, ассоциируя разные цвета с разными выходными частотами. На рис. 2, c продемонстрировано отсутствие синхронизации, что вызвано непостоянной разностью фаз и меньшим значением константы силы связи между осцилляторами  $k = 10$  и  $\tilde{k} = 0.035$  в сравнении с предыдущими случаями при равномерном распределении собственных частот колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.5]$ . Соответствующий такой системе параметр порядка не постоянен, а зависит от состояния ансамбля в конкретный момент времени  $t$ : может как убывать, так и возрастать в зависимости от характера изменения значения разности фаз. Выбор величины константы связи для выбранного механизма полевой связи существенно зависит от расстояния между соседними элементами и убывает с расстоянием. Мы проводили численные исследования с моделью Курамото и такими значениями коэффициентов связи, которые соответствуют как близкому расположению осцилляторов (сильная связь), так и дальнему расположению осцилляторов (слабая связь).

В следующих сериях вычислительных экспериментов  $\omega_j$  и  $\phi_{0j}$  распределены равномерно на интервале  $[1, 1.1]$  и  $[0, \pi]$  соответственно. Теперь, когда мы продемонстрировали возможные режимы системы связанных АФМ СХО и связанное с ними поведение параметра порядка, перейдем к сравнению топологий. Рассматривается зависимость среднего значения параметра порядка  $r_{av}$  (9) от константы силы связи  $k$ , которая варьируется в диапазоне  $0 \leq k \leq 2 \cdot 10^4$ , тогда сила связи, с учетом затухания Гильберта, принимает значения  $0 \leq \tilde{k} \leq 70$  для фиксированного числа осцилляторов  $N = 100$ . Использование большого количества осцилляторов позволяет получить результаты, более близкие к реальным системам, где число взаимодействующих элементов, как правило, велико, а также явно демонстрирует особенности рассматриваемых топологий. При этом уменьшались временные затраты на численное решение системы во время проведения вычислительных экспериментов в сравнении с числом осцилляторов ансамбля порядка тысяч элементов. Построенная зависимость представлена на рис. 3. Стоит отметить, что особый интерес представляет выявление значения константы силы связи  $k$ , для которой характерно наступление синхронизации, а конкретно  $r_{av} \approx 1$  для каждой из рассматриваемых топологий. Так, для топологий решётка, кольцо и цепочка значения  $\tilde{k}$ , при которых  $r_{av} \geq 0.999$ , составляют 2.1, 61.6 и 320.25 соответственно. Из-за большого разброса значений  $\tilde{k}$  между рассматриваемыми топологиями визуализация момента наступления синхронизации для каждого массива связанных осцилляторов является затруднительной, поэтому отображение на рис. 3 ограничивается значением  $\tilde{k} = 70$ . Увеличение константы силы связи ансамбля  $k$  приводит к обеспечению более сильной связи между осцилляторами, благодаря чему система приближается к состоянию синхронизации. Для наступления синхронизации в решётке требуется наименьшее значение константы силы связи  $k$  по сравнению с кольцом и цепочкой, так как вклад в среднее значение параметра порядка  $r_{av}$  соседних осцилляторов больше в силу особенности расположения осцилляторов в ансамбле, а именно:

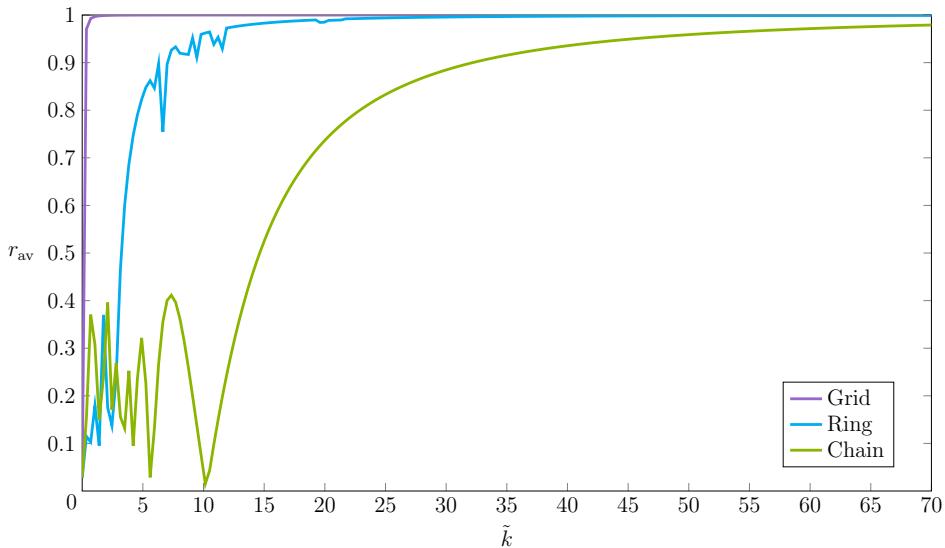


Рис. 3. Зависимость среднего значения параметра порядка  $r_{av}$  для  $N = 100$  осцилляторов ансамбля от силы связи с учетом затухания Гильберта  $\tilde{k}$ , принимающей значения  $0 \leq \tilde{k} \leq 70$ , для равномерного распределения частот собственных колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.1]$  и фаз в начальный момент времени  $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$ ; все рассматриваемые топологии стремятся к синхронизации, достижение среднего значения параметра порядка, близкого к единице  $r_{av} \geq 0.999$ , происходит в решётке при  $\tilde{k} = 2.1$ , в кольце при  $\tilde{k} = 61.6$ , в цепочки при  $\tilde{k} = 320.25$  (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependence of the average value of the order parameter  $r_{av}$  for  $N = 100$  oscillators of the ensemble on the coupling strength taking into account the Hilbert damping  $\tilde{k}$ , taking the values  $0 \leq \tilde{k} \leq 70$ , for a uniform distribution of the frequencies of the oscillators' natural oscillations  $\omega_j \in [1, 1.1]$  and the phases at the initial moment of time  $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$ ; all the topologies under consideration tend to synchronization, the average value of the order parameter close to one  $r_{av} \geq 0.999$  is achieved in the grid at  $\tilde{k} = 2.1$ , in the ring:  $\tilde{k} = 61.6$ , in the chain:  $\tilde{k} = 320.25$  (color online)

число соседних осцилляторов для каждого рассматриваемого элемента системы варьируется от 2 до 4 в зависимости от его расположения в решётке, в то время как для кольца и цепочки число ближайших соседей не может превышать 2. Как видно из рис. 3, для цепочки среднее значение параметра порядка  $r_{av}$  меньше относительно других топологий из-за большого расстояния между 1-м и  $N$ -м осциллятором ансамбля, поэтому достижение состояния синхронизации для данной топологии затруднительно в сравнении с остальными топологиями. Нестабильный характер кольца и цепочки представляет собой интересный вопрос для будущего исследования. Таким образом, делаем вывод о том, что при обеспечении сильной связи в ансамбле, независимо от топологии, система стремится к синхронизации.

В следующем вычислительном эксперименте рассматривается зависимость среднего значения параметра порядка  $r_{av}$  (9) от числа осцилляторов  $N$ , который увеличивается в диапазоне  $N = 4, \dots, 100$  для трёх различных значений константы силы связи  $k = 50, 200, 500$ , то есть для сил связи с учетом затухания Гильберта  $\tilde{k} = 0.175, 0.7, 1.75$ . Результат представлен на рис. 4. Увеличение  $k$  приводит к обеспечению более сильной связи между осцилляторами и нахождению системы в синхронизации для большего числа осцилляторов системы  $N$ . На решётке увеличение числа осцилляторов оказывается меньше из-за того, что расстояние, которое вносит вклад в коэффициенты связи модели Курамото  $k_{ij}$ , увеличивается только между осцилляторами, которые находятся на гранях решётки, поэтому синхронизация в решётке сохраняется для большого числа осцилляторов. Для кольца увеличение числа  $N$  приводит к увеличению диаметра кольца, в котором расположены осцилляторы, а значит, происходит увеличение расстояния между диаметрально противоположными элементами ансамбля, что вносит значительный вклад в среднее значение параметра порядка  $r_{av}$ . Поэтому для кольца требуется большее значения константы силы связи

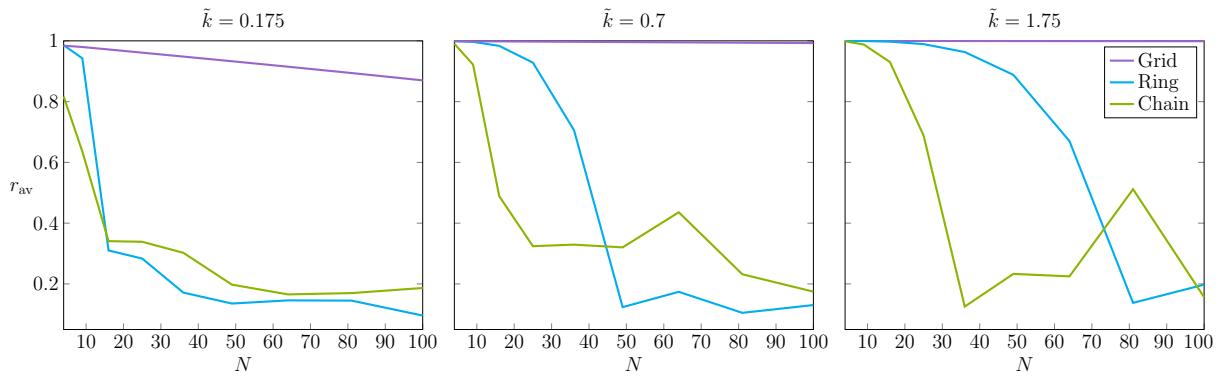


Рис. 4. Зависимость среднего значения параметра порядка  $r_{av}$  от количества осцилляторов в ансамбле для  $N = 4, \dots, 100$  и трёх значений силы связи с учетом затухания Гильберта  $\tilde{k} = 0.175, 0.7, 1.75$  при равномерных распределениях частот собственных колебаний осцилляторов  $\omega_j \in [1, 1.1]$  и фаз в начальный момент времени  $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$  для трёх рассматриваемых топологий: кольцо, решётка и цепочка (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the average value of the order parameter  $r_{av}$  on the number of oscillators in the ensemble for  $N = 4, \dots, 100$  and three values of the coupling strength taking into account the Hilbert attenuation  $\tilde{k} = 0.175, 0.7, 1.75$  with uniform distributions of the frequencies of the oscillators' natural oscillations  $\omega_j \in [1, 1.1]$  and phases at the initial time  $\varphi_{0j} \in [0, \pi]$  for the three topologies under consideration: ring, grid and chain (color online)

$k$  для сохранения состояния синхронизации в сравнении с решёткой. Наибольшим количеством отдалённых друг от друга осцилляторов в ансамбле характеризуется цепочка, на которую увеличение числа элементов сказывается наибольшим образом, а значит, достичь синхронизации можно только при больших значениях константы силы связи  $k$ , что ярко выражено на рис. 4.

## Заключение

В работе исследована задача синхронизации АФМ СХО, связанных общим дипольным полем и объединенных в 3 разные топологии: кольцо, решётку и цепочку. Дифференциальное уравнение (6), описывающее связь между попарно рассматриваемыми осцилляторами ансамбля, в результате математического вывода оказалось общим для трёх рассматриваемых топологий. Коэффициенты связи модели (1) определяются геометрическим расположением элементов внутри системы, а не непосредственным расчётом расстояний между выбранными осцилляторами ансамбля в отличие от модели Курамото (7), которая является общим случаем описания динамики связанных фазовых осцилляторов, где матрица связи представляет собой эквивалент коэффициентов связи, указанных в Таблице исходной модели. На примере модели Курамото была рассмотрена зависимость синхронизации различных ансамблей связанных осцилляторов от топологии, числа осцилляторов и силы связи  $k$ . Оценка синхронизации осуществлялась с помощью построения графиков параметра порядка  $r(t)$  и его среднего значения  $r_{av}$ . Численные эксперименты по изучению среднего значения параметра порядка от параметров рассматриваемых ансамблей показали, что изучаемые осцилляторы синхронизируются при увеличении константы силы связи. Решётка в данном эксперименте является преимущественной топологией в силу достижения синхронизации при наименьших значениях константы силы связи из трёх рассмотренных вариантов расположения осцилляторов. В данной топологии число соседних осцилляторов для каждого элемента варьируется от 2 до 4 в зависимости от расположения рассматриваемого осциллятора, причем для большого числа  $N$  превалирует именно 4, так как число осцилляторов, расположенных на гранях решётки, становится меньше относительно общего числа элементов ансамбля. Для такого же числа АФМ СХО, но расположенных в кольце или цепочке, число соседних осцилляторов не может составлять больше 2, чем вызвана более слабая связь в данных ансамблях.

Поэтому можем сделать вывод о том, что для кольца и цепочки значения константы силы связи должны быть выше, чем для случая решётки, что является недостатками данных топологий и связано с особенностями типа расположения осцилляторов в ансамбле. Тем не менее, если существует необходимость объединения осцилляторов именно в кольцо или цепочку, добиться синхронизации и функционирования массива как единой системы можно с помощью увеличения константы силы связи ансамбля. Тогда даже в случае большого числа элементов системы при  $k$ , обеспечивающем сильную связь ансамбля, синхронизация возможна.

## Список литературы

1. *Kim S. K., Beach G. S., Lee K. J., Ono T., Rasing T., Yang H.* Ferrimagnetic spintronics // *Nat. Mater.* 2022. Vol. 21, iss. 1. P. 24–34. DOI: 10.1038/s41563-021-01139-4.
2. *Kim K. W., Park B. G., Lee K. J.* Spin current and spin-orbit torque induced by ferromag-nets // *npj Spintronics.* 2024. Vol. 2, iss. 1. P. 8. DOI: 10.1038/s44306-024-00010-x.
3. *Gomonay O., Baltz V., Brataas A., Tserkovnyak Y.* Antiferromagnetic spin textures and dynamics // *Nature Phys.* 2018. Vol. 14, iss. 3. P. 213–216. DOI: 10.1038/s41567-018-0049-4.
4. *Han J., Cheng R., Liu L., Ohno H., Fukami S.* Coherent antiferromagnetic spintronics // *Nat Mater.* 2023. Vol. 22, iss. 6. P. 684–695. DOI: 10.1038/s41563-023-01492-6.
5. *Иванов Б. А.* Спиновая динамика антиферромагнетиков и сверхбыстрая спинtronика // *ЖЭТФ.* 2020. Т. 158, № 1(7). С. 103–123. DOI: 10.31857/S004445102007010X.
6. *Zhang W., Jungfleisch M. B., Jiang W., Pearson J. E., Hoffmann A., Freimuth F., Mokrousov Y.* Spin Hall effects in metallic antiferromagnets // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, iss. 19. P. 196602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.196602.
7. *Puliafito V., Khymyn R., Carpentieri M., Azzerboni B., Tiberkevich V., Slavin A., Finocchio G.* Micromagnetic modeling of terahertz oscillations in an antiferromagnetic material driven by the spin Hall effect // *Phys. Rev. B.* 2019. Vol. 99, iss. 2. P. 024405. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.024405.
8. *Cheng R., Xiao D., Brataas A.* Terahertz antiferromagnetic spin Hall nano-oscillator // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116, iss. 20. P. 207603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.207603.
9. *Safin A., Puliafito V., Carpentieri M., Finocchio G., Nikitov S., Stremoukhov P., Kirilyuk A. I., Tyberkevych V., Slavin A. N.* Electrically tunable detector of THz-frequency signals based on an antiferromagnet // *Appl. Phys. Lett.* 2020. Vol. 117, iss. 22. P. 222411. DOI: 10.1063/5.0031053.
10. *Sulymenko O., Prokopenko O., Lisenkov I., Åkerman J., Tyberkevych V., Slavin A. N., Khymyn R.* Ultra-fast logic devices using artificial “neurons” based on antiferromagnetic pulse generators // *J. Appl. Phys.* 2018. Vol. 124, iss. 15. P. 152115. DOI: 10.1063/1.5042348.
11. *Mitrofanova A. Yu., Safin A. R., Kravchenko O. V.* Neuromorphic computing based on an antiferromagnet-heavy metal hybrid structure under the action of laser pulses // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 2127, iss. 1. P. 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/2127/1/012023.
12. *Tsunegi S., Taniguchi T., Lebrun R., Yakushiji K., Cros V., Grollier J., Fukushima A., Yuasa S., Kubota H.* Scaling up electrically synchronized spin torque oscillator networks // *Sci. Rep.* 2018. Vol. 8, iss. 1. P. 13475. DOI: 10.1038/s41598-018-31769-9.
13. *Dieny B., Prejbeanu I. L., Garello K., Gambardella P., Freitas P., Lehndorff R., Raberg W., Ebels U., Demokritov S. O., Akerman J., Deac A., Pirro P., Adelmann C., Anane A., Chumak A. V., Hirohata A., Mangin S., Valenzuela S. O., Onbaşlı M. C., d’Aquino M., Prenat G., Finocchio G., Lopez-Diaz L., Chantrell R., Chubykalo-Fesenko O., Bortolotti P.* Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry // *Nat. Electron.* 2020. Vol. 3, iss. 8. P. 446–459. DOI: 10.1038/s41928-020-0461-5.
14. *Sulymenko O. R., Prokopenko O. V., Tiberkevich V. S., Slavin A. N., Ivanov B. A., Khymyn R. S.* Terahertz-frequency spin Hall auto-oscillator based on a canted antiferromagnet // *Phys. Rev. Applied.* 2017. Vol. 8, iss. 6. P. 064007. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.8.064007.

15. *Khymyn R., Lisenkov I., Tiberkevich V., Ivanov B. A., Slavin A.* Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like oscillator driven by spin current // *Sci. Rep.* 2017. Vol. 7, iss. 1. P. 43705. DOI: 10.1038/srep43705.
16. *Dyakonov M.* Magnetoresistance due to edge spin accumulation // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99, iss. 12. P. 126601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.126601.
17. *Hoffmann A.* Spin Hall effects in metals // *IEEE Trans. Magnetics.* 2013. Vol. 49, iss. 10. P. 5172–5193. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2262947.
18. *Taniguchi T.* Magnetoresistance originated from charge-spin conversion in ferromagnet // *AIP Advances.* 2018. Vol. 8, iss. 5. P. 055916. DOI: 10.1063/1.5003397.
19. *Сафин А. Р., Никитов С. А.* Нелинейная динамика антиферромагнитного спинtronного осциллятора // *Известия вузов. Радиофизика.* 2018. Т. 61, №. 11. С. 937–944.
20. *Hong H., Park H., Choi M. Y.* Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 72, iss. 3. P. 036217. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.036217.
21. *Moriya T.* Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism // *Phys. Rev.* 1960. Vol. 120, iss. 1. P. 91–98. DOI: 10.1103/PhysRev.120.91.
22. *Дзялошинский И. Е.* Термодинамическая теория «слабого» ферромагнетизма антиферромагнетиков // *ЖЭТФ.* 1957. Т. 32, №. 6. С. 1547–1563.
23. *Ozhogin V.I., Preobrazhenskii V.L.* Effective anharmonicity of elastic subsystem in antiferromagnets // *Physica B+C.* 1977. Vol. 86–88. P. 979–981. DOI: 10.1016/0378-4363(77)90768-9.
24. *Звездин А. К.* О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках // *Письма в ЖЭТФ.* 1979. Т. 29, № 10. P. 605–610.
25. *Иванов Б. А., Лапченко В. Ф., Сукстанский А. Л.* Поверхностные спиновые волны в антиферромагнетиках // *Физика твердого тела.* 1985. Т. 27, №. 1. С. 173–180.
26. *Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, iss. 1. P. 137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
27. *Rodrigues F. A., Peron T. K. D., Kurths P. J.* The Kuramoto model in complex networks // *Phys. Rep.* 2016. Vol. 610. P. 1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
28. *Garg N., Bhotla S. V. H., Muduli P. K., Bhowmik D.* Kuramoto-model-based data classification using the synchronization dynamics of uniform-mode spin Hall nano-oscillators // *Neuromorph. Comput. Eng.* 2021. Vol. 1, iss. 2. P. 024005. DOI: 10.1088/2634-4386/ac3258.
29. *Pikovsky A., Rosenblum M.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 101, iss. 26. P. 264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
30. *Митрофанова А. Ю., Сафин А. Р., Кравченко О. В., Никитов С. А.* Взаимная синхронизация антиферромагнитных спинtronных осцилляторов // *Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника.* 2022. Т. 25, №. 5. С. 80-90. DOI: 10.32603/1993-8985-2022-25-5-80-90.
31. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 447 с.
32. *Trees B. R., Saranathan V., Stroud D.* Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, iss. 1. P. 016215. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016215.
33. *Frank T. D., Richardson M. J.* On a test statistic for the Kuramoto order parameter of synchronization: An illustration for group synchronization during rocking chairs // *Physica D.* 2010. Vol. 239, iss. 23–24. P. 2084–2092. DOI: 10.1016/j.physd.2010.07.015.

## References

1. Kim SK, Beach GS, Lee KJ, Ono T, Rasing T, Yang H. Ferrimagnetic spintronics. *Nat. Mater.* 2022;21(1):24–34. DOI: 10.1038/s41563-021-01139-4.
2. Kim KW, Park BG, Lee KJ. Spin current and spin-orbit torque induced by ferromagnets. *npj Spintronics.* 2024;2(1):8. DOI: 10.1038/s44306-024-00010-x.
3. Gomonay O, Baltz V, Brataas A, Tserkovnyak Y. Antiferromagnetic spin textures and dynamics. *Nature Phys.* 2018;14(3):213–216. DOI: 10.1038/s41567-018-0049-4.
4. Han J, Cheng R, Liu L, Ohno H, Fukami S. Coherent antiferromagnetic spintronics. *Nat. Mater.* 2023;22(6):684–695. DOI: 10.1038/s41563-023-01492-6.
5. Ivanov BA. Spin dynamics for antiferromagnets and ultrafast spintronics. *J. Exp. Theor. Phys.* 2020;131(1):95–112. DOI: 10.1134/S1063776120070079.
6. Zhang W, Jungfleisch MB, Jiang W, Pearson JE, Hoffmann A, Freimuth F, Mokrousov Y. Spin Hall effects in metallic antiferromagnets. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113(19):196602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.196602.
7. Puliafito V, Khymyn R, Carpentieri M, Azzerboni B, Tiberkevich V, Slavin A, Finocchio G. Micromagnetic modeling of terahertz oscillations in an antiferromagnetic material driven by the spin Hall effect. *Phys. Rev. B.* 2019;99(2):024405. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.024405.
8. Cheng R, Xiao D, Brataas A. Terahertz antiferromagnetic spin Hall nano-oscillator. *Phys. Rev. Lett.* 2016;116(20):207603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.207603.
9. Safin A, Puliafito V, Carpentieri M, Finocchio G, Nikitov S, Stremoukhov P, Kirilyuk AI, Tyberkevych V, Slavin AN. Electrically tunable detector of THz-frequency signals based on an antiferromagnet. *Appl. Phys. Lett.* 2020;117(22):222411. DOI: 10.1063/5.0031053.
10. Sulymenko O, Prokopenko O, Lisenkov I, Åkerman J, Tyberkevych V, Slavin AN, Khymyn R. Ultra-fast logic devices using artificial “neurons” based on antiferromagnetic pulse generators. *J. Appl. Phys.* 2018;124(15):152115. DOI: 10.1063/1.5042348.
11. Mitrofanova AYu, Safin AR, Kravchenko OV. Neuromorphic computing based on an antiferromagnet-heavy metal hybrid structure under the action of laser pulses. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;2127(1):012023. DOI: 10.1088/1742-6596/2127/1/012023.
12. Tsunegi S, Taniguchi T, Lebrun R, Yakushiji K, Cros V, Grollier J, Fukushima A, Yuasa S, Kubota H. Scaling up electrically synchronized spin torque oscillator networks. *Sci. Rep.* 2018;8(1):13475. DOI: 10.1038/s41598-018-31769-9.
13. Dieny B, Prejbeanu IL, Garello K, Gambardella P, Freitas P, Lehndorff R, Raberg W, Ebels U, Demokritov SO, Akerman J, Deac A, Pirro P, Adelmann C, Anane A, Chumak AV, Hirohata A, Mangin S, Valenzuela SO, Onbaşlı MC, d’Aquino M, Prenat G, Finocchio G, Lopez-Diaz L, Chantrell R, Chubykalo-Fesenko O, Bortolotti P. Opportunities and challenges for spintronics in the microelectronics industry. *Nat. Electron.* 2020;3(8):446–459. DOI: 10.1038/s41928-020-0461-5.
14. Sulymenko OR, Prokopenko OV, Tiberkevich VS, Slavin AN, Ivanov BA, Khymyn RS. Terahertz-frequency spin Hall auto-oscillator based on a canted antiferromagnet. *Phys. Rev. Applied.* 2017;8(6):064007. DOI: 10.1103/PhysRevApplied.8.064007.
15. Khymyn R, Lisenkov I, Tiberkevich V, Ivanov BA, Slavin A. Antiferromagnetic THz-frequency Josephson-like oscillator driven by spin current. *Sci. Rep.* 2017;7(1):43705. DOI: 10.1038/srep43705.
16. Dyakonov M. Magnetoresistance due to edge spin accumulation. *Phys. Rev. Lett.* 2007;99(12):126601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.126601.
17. Hoffmann A. Spin Hall effects in metals. *IEEE Trans. Magnetics.* 2013;49(10):5172–5193. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2262947.
18. Taniguchi T. Magnetoresistance originated from charge-spin conversion in ferromagnet. *AIP Advances.* 2018;8(5):055916. DOI: 10.1063/1.5003397.

19. Safin AR, Nikitov SA. Nonlinear Dynamics of an Antiferromagnetic Spintronic Oscillator. *Radiophys. Quantum Electron.* 2019;61(11):834–840. DOI: 10.1007/s11141-019-09940-7.
20. Hong H, Park H, Choi MY. Collective synchronization in spatially extended systems of coupled oscillators with random frequencies. *Phys. Rev. E.* 2005;72(3):036217. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.036217.
21. Moriya T. Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism. *Phys. Rev.* 1960; 120(1):91–98. DOI: 10.1103/PhysRev.120.91.
22. Dzyaloshinskiy IE Thermodynamical Theory of “Weak” Ferromagnetism in Antiferromagnetic Substances. *Sov. Phys. JETP.* 1957;5(6):1259–1272.
23. Ozhogin VI, Preobrazhenskii VL. Effective anharmonicity of elastic subsystem in antiferromagnets. *Physica B+C.* 1977;86–88:979–981. DOI: 10.1016/0378-4363(77)90768-9.
24. Zvezdin AK. Dynamics of domain walls in weak ferromagnets. *JETP Lett.* 1979;29:553–557.
25. Ivanov BA, Lapchenko VF, Sukstanskii AL. Surface spin waves in antiferromagnets. *Sov. Phys. Solid State.* 1985;27:101.
26. Acebrón JA, Bonilla LL, Pérez Vicente CJ, Ritort F, Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(1):137–185. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.137.
27. Rodrigues FA, Peron TKD, Kurths PJ. The Kuramoto model in complex networks. *Phys. Rep.* 2016;610:1–98. DOI: 10.1016/j.physrep.2015.10.008.
28. Garg N, Bhotla SVH, Muduli PK, Bhowmik D. Kuramoto-model-based data classification using the synchronization dynamics of uniform-mode spin Hall nano-oscillators. *Neuromorph. Comput. Eng.* 2021;1(2):024005. DOI: 10.1088/2634-4386/ac3258.
29. Pikovsky A, Rosenblum M. Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2008;101(26):264103. DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.264103.
30. Mitrofanova AYu, Safin AR, Kravchenko OV, Nikitov SA. Mutual synchronization of antiferromagnetic spintronic oscillators. *Journal of the Russian Universities. Radioelectronics.* 2022;25(5): 80–90 (in Russian). DOI: 10.32603/1993-8985-2022-25-5-80-90.
31. Shakhgildyan VV, Lyakhovkin AA. Phase-Locked Frequency Control Systems. M.: Svyaz; 1972. 447 p. (in Russian).
32. Trees BR, Saranathan V, Stroud D. Synchronization in disordered Josephson junction arrays: Small-world connections and the Kuramoto model. *Phys. Rev. E.* 2005;71(1):016215. DOI: 10.1103/PhysRevE.71.016215.
33. Frank TD, Richardson MJ. On a test statistic for the Kuramoto order parameter of synchronization: An illustration for group synchronization during rocking chairs. *Physica D.* 2010;239(23–24): 2084–2092. DOI: 10.1016/j.physd.2010.07.015.



Самойленко Кристина Дмитриевна — студент магистратуры кафедры твердотельной электроники, радиофизики и прикладных информационных технологий Московского физико-технического института. Работает инженером в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — физика магнитных явлений и спинtronика.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7  
 Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
 E-mail: kris\_samoylenko@mail.ru  
 ORCID: 0009-0008-9943-4103  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1260171



*Митрофанова Анастасия Юрьевна* — аспирант кафедры твердотельной электроники, радиофизики и прикладных информационных технологий Московского физико-технического института. Научный сотрудник Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Научные интересы — нелинейная динамика, нейроморфные вычисления и спинtronика.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7  
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: nastyu\_mitrofanova\_2000@mail.ru  
ORCID: 0000-0003-4662-9632  
AuthorID (eLibrary.Ru): 1035175



*Сафин Ансар Ризаевич* — доктор физико-математических наук (2023). Руководитель лаборатории «Антиферромагнитная спинtronика» Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры формирования и обработки радиосигналов Национального исследовательского университета «МЭИ». Автор более 50 научных публикаций. Научные интересы — радиофизика и электроника, физика магнитных явлений и спинtronика.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7  
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: arsaфин@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6507-6573  
AuthorID (eLibrary.Ru): 525831



*Никитов Сергей Аполлонович* — академик РАН (2022), профессор (1995), доктор физико-математических наук (1991). Директор Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор МФТИ. Автор более 400 научных работ. Научные интересы — радиофизика и физическая электроника, физика магнитных явлений, спинtronика и магноника.

Россия, 125009 Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7  
Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН  
E-mail: nikitov@cplire.ru  
ORCID: 0000-0002-2413-7218  
AuthorID (eLibrary.Ru): 121644