



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Научная статья
УДК 537.86

DOI: 10.18500/0869-6632-003131
EDN: HSXIUA

Реконструкция автоколебательных систем с модуляцией времени запаздывания

В. И. Пономаренко[✉], М. Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 7.07.2024, принята к публикации 18.07.2024,
опубликована онлайн 22.10.2024, опубликована 31.01.2025

Аннотация. Цель работы — исследование возможности реконструкции по временным рядам автоколебательных систем с переменным временем запаздывания, демонстрирующих режимы турбулентного и ламинарного хаоса. **Методы.** Объектом исследования в работе являются автоколебательные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием, в которых время задержки модулируется внешним периодическим сигналом. Рассмотрена возможность оценки параметров систем с модуляцией времени запаздывания по их временным рядам с помощью известного метода реконструкции систем с постоянным временем задержки, который основан на статистическом анализе временных интервалов между всеми возможными парами экстремумов временного ряда. Предложен новый метод оценки параметров систем с переменным временем запаздывания, основанный на статистическом анализе временных интервалов между двумя последовательными экстремумами временного ряда. **Результаты.** Показано, что в некоторых случаях известные методы реконструкции систем с постоянным временем запаздывания эффективны и для реконструкции систем с изменяющимся временем задержки. С их помощью можно оценить среднее время запаздывания и восстановить нелинейную функцию системы. Предложенный метод реконструкции, ориентированный на применение к системам с запаздыванием с модуляцией времени задержки, позволяет оценить частоту и амплитуду модуляции времени запаздывания. **Заключение.** Полученные результаты представляют интерес для различных научных дисциплин, исследующих системы с переменным временем запаздывания по их временным рядам.

Ключевые слова: системы с модуляцией запаздывания, ламинарный хаос, реконструкция систем по временным рядам, статистика экстремумов.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

Для цитирования: Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Реконструкция автоколебательных систем с модуляцией времени запаздывания // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 27–37. DOI: 10.18500/0869-6632-003131. EDN: HSXIUA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Reconstruction of self-oscillating systems with delay time modulation

V.I. Ponomarenko✉, M.D. Prokhorov

Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: ✉ponomarenkovi@gmail.com, mdprokhorov@yandex.ru

Received 7.07.2024, accepted 18.07.2024, available online 22.10.2024, published 31.01.2025

Abstract. The aim of our research is to study the possibility of reconstruction from time series the self-oscillating systems with variable time delay, demonstrating regimes of turbulent and laminar chaos. *Methods.* The object of study is self-oscillating systems described by delay-differential equations, in which the delay time is modulated by an external periodic signal. The possibility of estimating the parameters of systems with delay time modulation from their time series is considered using the known method for reconstructing systems with constant delay time, which is based on statistical analysis of time intervals between all possible pairs of extrema in time series. A new method for estimating the parameters of systems with variable delay time is proposed, based on statistical analysis of time intervals between two successive extrema in time series. *Results.* It is shown that in some cases the known methods for reconstructing systems with constant delay time are also effective for reconstructing systems with varying delay time. With their help, one can estimate the mean delay time and recover the nonlinear function of the system. The proposed method, aimed at application to time-delay systems with delay time modulation, allows one to estimate the frequency and amplitude of delay time modulation. *Conclusion.* The obtained results are of interest to various scientific disciplines that study systems with variable delay times based on their time series.

Keywords: systems with delay time modulation, laminar chaos, reconstruction of systems from time series, statistics of extrema.

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state task of Saratov Branch of the Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences.

For citation: Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Reconstruction of self-oscillating systems with delay time modulation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(1):27–37. DOI: 10.18500/0869-6632-003131

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Системы с запаздывающей обратной связью могут генерировать хаотические колебания с очень высокой размерностью даже в том случае, если они описываются дифференциальным уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом при постоянном времени запаздывания [1–3]. Модуляция времени запаздывания приводит к появлению новых, как правило, более сложных режимов [4–6]. Сравнительно недавно в системах с модуляцией времени запаздывания было открыто новое явление, названное ламинарным хаосом [7], при котором ламинарные фазы с почти постоянным значением динамической переменной периодически прерываются беспорядочными всплесками, переводящими систему из одной ламинарной фазы в другую, имеющую другое постоянное значение динамической переменной.

Ламинарный хаос наблюдается в некоторых областях плоскости параметров частота – амплитуда внешнего гармонического воздействия, модулирующего время запаздывания системы, в которых период модулирующего сигнала кратен среднему значению времени запаздывания [7,8]. Вид этих областей напоминает языки синхронизации в автоколебательных системах под внешним воздействием. За пределами этих областей система с запаздыванием демонстрирует так называемый турбулентный хаос, который подробно описан в [9]. Явление ламинарного хаоса было исследовано в различных системах [10] не только теоретически и численно, но было обнаружено также в физическом эксперименте [8, 11–14].

Проблема реконструкции систем с постоянным временем запаздывания по хаотическим временным рядам поднималась многими авторами и представляет интерес не только в чисто теоретическом плане, но и для практических приложений [15–17]. Открытие режимов ламинарного

хаоса в системах с модуляцией времени запаздывания ставит вопрос о возможности оценки их параметров с помощью известных методов восстановления систем с постоянным временем запаздывания и требует развития новых методов реконструкции, ориентированных на класс систем с переменным временем запаздывания.

В данной работе разрабатываются методы реконструкции систем, описываемых дифференциальным уравнением первого порядка с модуляцией времени запаздывания, в области управляющих параметров, в которой может наблюдаться ламинарный хаос. Предложены методы реконструкции для режимов ламинарного и турбулентного хаоса.

1. Исследуемая система и методы

Объектом исследования является система, представляющая собой уравнение первого порядка с запаздыванием, описываемая уравнением (1):

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau(t))), \quad (1)$$

где x — динамическая переменная, ε — параметр инерционности, $\tau(t)$ — переменное время запаздывания, $f(x)$ — нелинейная функция, имеющая вид $f(x) = \lambda - x^2$, где λ — параметр нелинейности. Величина $\tau(t)$ изменяется по периодическому закону $\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin(2\pi \nu t)$, где τ_0 — среднее значение времени запаздывания, τ_1 — амплитуда (глубина) модуляции, а ν — частота модуляции времени τ_0 .

Рассмотрим для сравнения две группы качественно различающихся режимов работы генератора. К первой группе относятся режимы, в которых система демонстрирует ламинарный хаос при различных соотношениях периода модуляции времени запаздывания $T_m = 1/\nu$ и среднего времени запаздывания $\tau_0 = 100$. Рассмотрены три качественно различающихся режима с разными частотами модуляции $\nu = 0.011$, $\nu = 0.0185$ и $\nu = 0.0275$ при $\tau_1 = 15$ и $\tau_1 = 10$. Во второй группе режимов — вне областей ламинарного хаоса — рассмотрены два режима при $\nu = 0.013$ и $\nu = 0.024$ при $\tau_1 = 15$. Параметр нелинейности λ во всех случаях равен 1.89, $\varepsilon = 1$.

В режиме ламинарного хаоса будем анализировать уровни x_i горизонтальных полок на временной реализации динамической переменной, которые могут дать информацию о виде нелинейной зависимости динамической переменной от ее задержанной копии. При этом в некоторых случаях мы ожидаем увидеть гладкую зависимость уровня одной полки от уровня другой во временном ряде. Время запаздывания в этом случае определяется приблизительно. Для оценки среднего времени запаздывания будем использовать разработанный нами ранее метод реконструкции систем с постоянным временем задержки, который основан на анализе статистики экстремумов временного ряда [18].

В режиме турбулентного хаоса для оценки среднего времени запаздывания также попробуем процедуру построения статистики экстремумов [18], а для оценки частоты модуляции времени τ_0 в рамках работы предложена новая процедура, основанная на анализе изменения расстояний между экстремумами во времени.

2. Результаты

На рис. 1, а представлен временной ряд системы с запаздыванием (сплошная линия), находящейся в режиме ламинарного хаоса при $\nu = 0.011$, и переменная часть запаздывания $\tau_m = \tau_1 \sin(2\pi \nu t)$, где $\tau_1 = 15$. Остальные управляющие параметры фиксированы. На временном ряде видны горизонтальные участки (полки), прерываемые «берстами» (резкими изменениями динамической переменной $x(t)$ при переходе от одной полки к другой). Таким образом, можно ввести дискретное время и обозначить как x_i величину динамической переменной на уровне полки, где i — порядковый номер полки. Длины полок одинаковые, они равны периоду колебаний

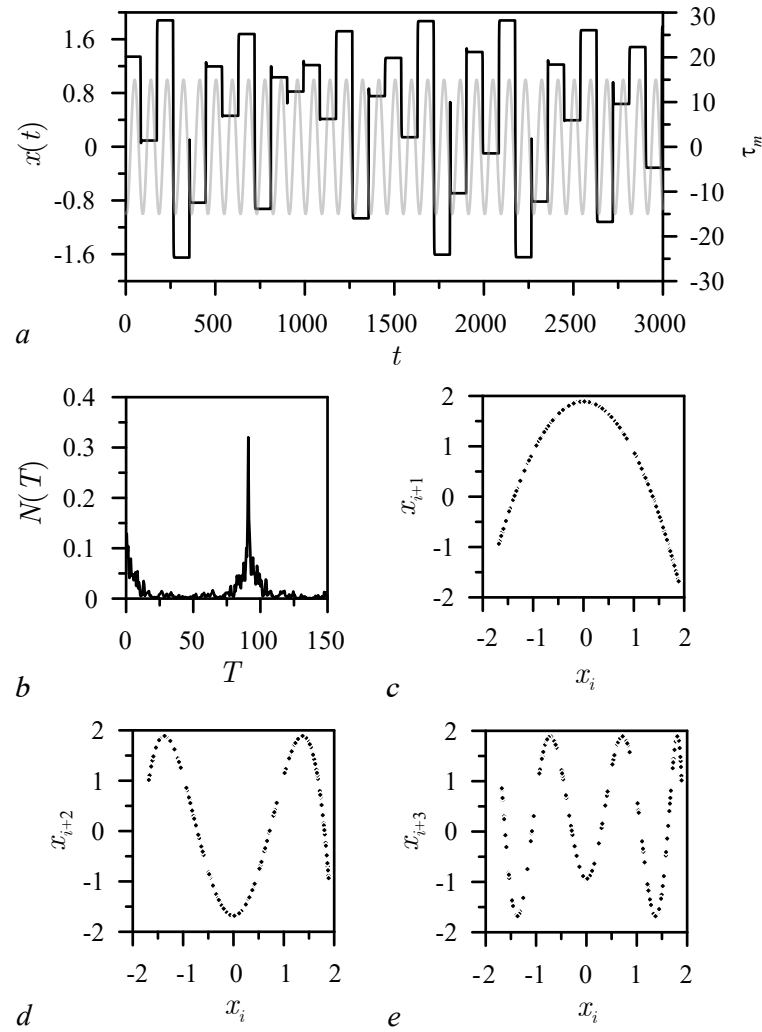


Рис. 1. Временной ряд системы (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) (a), статистика экстремумов временного ряда (b), зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (c), $n = 2$ (d), $n = 3$ (e). Управляющие параметры $\nu = 0.011$, $\tau_1 = 15$, $\tau_0 = 100$

Fig. 1. Time series of the system (black) and variation of the delay time τ_m (gray) (a), statistics of extrema of the time series (b), dependencies $x_{i+n}(x_i)$ for $n = 1$ (c), $n = 2$ (d), and $n = 3$ (e). Control parameters are as follows: $\nu = 0.011$, $\tau_1 = 15$, and $\tau_0 = 100$

времени запаздывания τ_m (см. рис. 1, a), но при этом их длина не равна в точности времени запаздывания τ_0 . Если частоту модуляции ν времени запаздывания немного варьировать, длины полки будут изменяться в соответствии с периодом внешнего сигнала. Этот эффект напоминает синхронизацию автоколебательных систем внешним сигналом. При этом полки ограничены слева и справа резкими перепадами, по которым определяется начало и конец полки. Если длина полки примерно равна периоду T_m внешнего сигнала, это можно поставить в соответствие синхронизации на основной гармонике. Если на времени запаздывания уместится две полки, этому соответствует синхронизация на второй гармонике и т. д. При сильном изменении частоты внешнего воздействия (частоты модуляции ν) наблюдается переход к режиму турбулентного хаоса. Экспериментально этот эффект исследован в [8, 19].

На рис. 1, b представлена мера статистики экстремумов, которая показывает, сколько во временном ряде переменной x встречается экстремумов с расстоянием T между ними [18].

Отметим, что поскольку значения динамической переменной являются практически постоянными на горизонтальных полках зависимости $x(t)$, мы не учитывали экстремумы на полках (даже если они есть) при построении рис. 1, *b*. Учитываются только экстремумы, наблюдающиеся между полками на участках временного ряда, на которых имеются резкие всплески динамической переменной. Мера $N(T)$ нормирована на общее число экстремумов во временном ряде. Максимум $N(T)$ наблюдается при $T = 91$, что соответствует периоду изменения времени запаздывания, а также дает грубую оценку среднего времени запаздывания $\tau_0 = 100$. На рис. 1, *c–e* представлены зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). На рис. 1, *c* точки временного ряда, построенные на плоскости (x_i, x_{i+1}) , ложатся на нелинейную функцию $f(x)$, соответствующую преобразованию в обратной связи. Рис. 1, *d, e* представляют вторую и третью итерации функции $f(x)$.

На рис. 2 представлены результаты исследований при $\nu = 0.0185$ и $\tau_1 = 15$. Этот режим соответствует случаю, в котором горизонтальные полки на временной реализации динамической

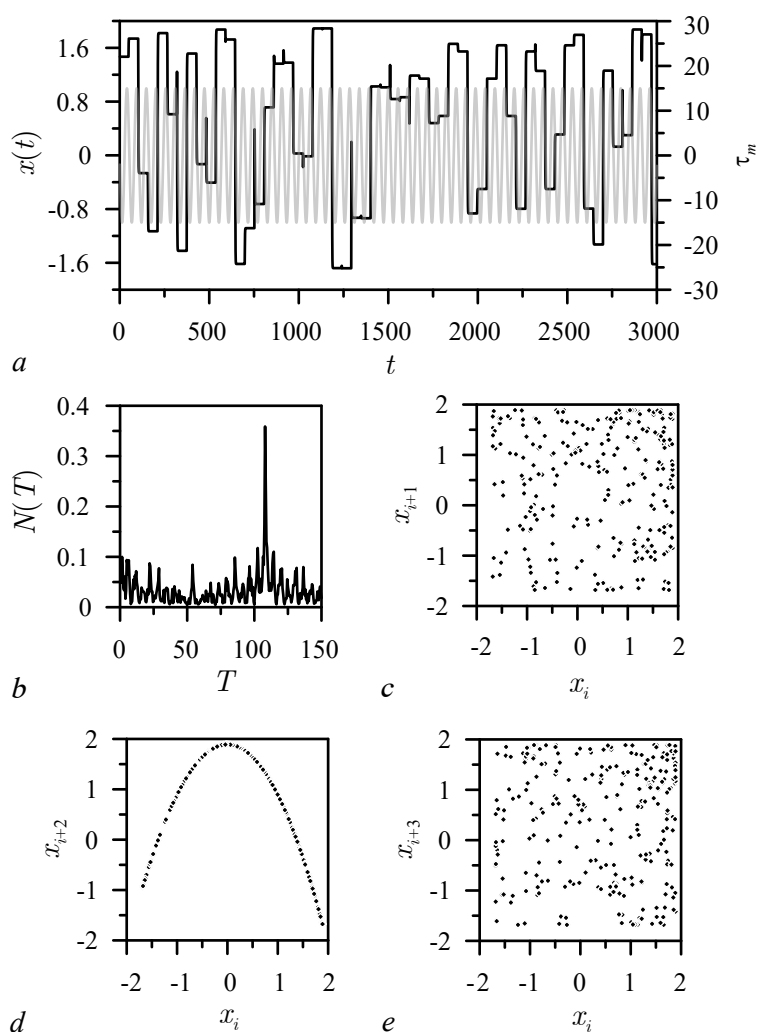


Рис. 2. Временной ряд системы (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) (*a*), статистика экстремумов (*b*), зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). Управляющие параметры $\nu = 0.0185$, $\tau_1 = 15$, $\tau_0 = 100$

Fig. 2. Time series of the system (black) and variation of delay time τ_m (gray) (*a*), statistics of extrema (*b*), dependencies $x_{i+n}(x_i)$ for $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), and $n = 3$ (*e*). Control parameters are as follows: $\nu = 0.0185$, $\tau_1 = 15$, and $\tau_0 = 100$

переменной примерно в 2 раза короче, чем в рассмотренном выше примере. При этом на периоде колебаний времени запаздывания τ_m также уместается одна полка, но на времени, примерно соответствующем времени запаздывания τ_0 , их уже уместается две (рис. 2, а).

Величина $N(T)$ на рис. 2, б имеет глобальный максимум при $T = 108$, что соответствует удвоенному периоду внешнего воздействия $T_m = 1/\nu$ и примерно соответствует среднему времени запаздывания τ_0 . Рис. 2, с–е демонстрирует зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (с), $n = 2$ (д), $n = 3$ (е). При их анализе становится очевидным, что среднее время запаздывания τ_0 примерно соответствует длине двух полок временного ряда, поскольку $x_{i+2}(x_i)$ демонстрирует четкую зависимость преобразования $f(x)$ в обратной связи. На рис. 3, а представлены временные ряды при $\nu = 0.0275$ и $\tau_1 = 10$. Этот режим соответствует случаю, в котором на времени, примерно соответствующем времени запаздывания τ_0 , уместается три горизонтальные полки на графике $x(t)$. Таким образом, длина полок на графике $x(t)$ на рис. 3, а примерно в 3 раза меньше, чем на рис. 1, а. При этом на периоде колебаний времени запаздывания τ_m по-прежнему уместается только одна полка.

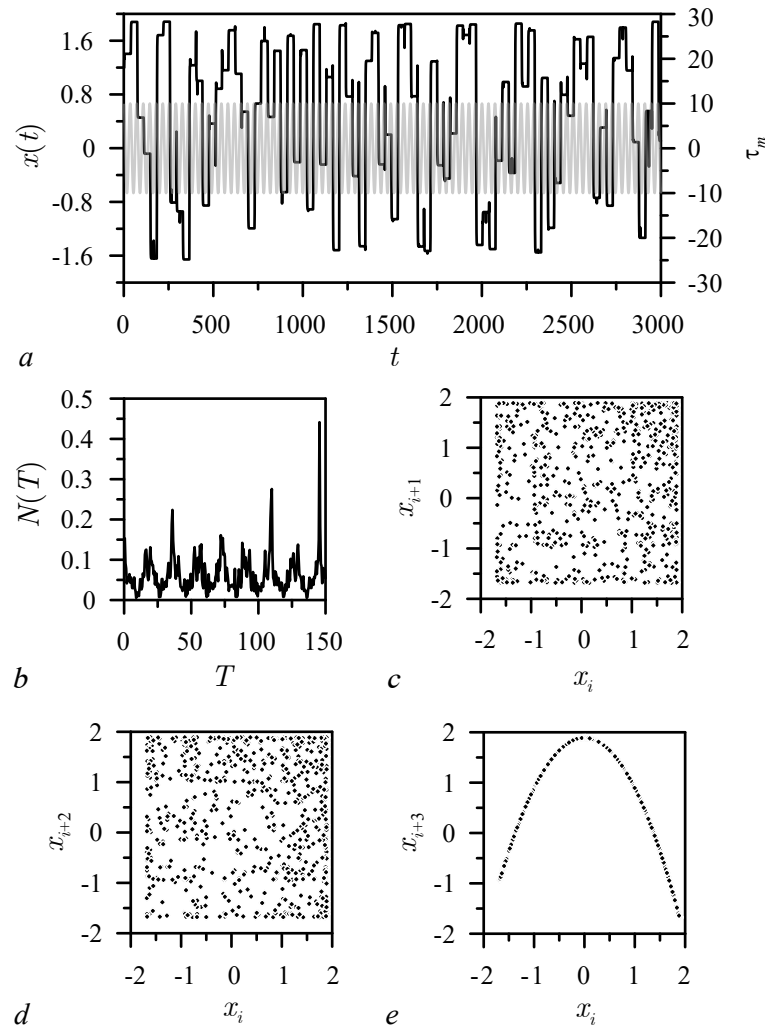


Рис. 3. Временной ряд системы (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) (а), статистика экстремумов (б), зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (с), $n = 2$ (д), $n = 3$ (е). Управляющие параметры $\nu = 0.0275$, $\tau_1 = 10$, $\tau_0 = 100$

Fig. 3. Time series of the system (black) and variation of delay time τ_m (gray) (a), statistics of extrema (b), dependencies $x_{i+n}(x_i)$ for $n = 1$ (c), $n = 2$ (d), and $n = 3$ (e). Control parameters are as follows: $\nu = 0.0275$, $\tau_1 = 10$, and $\tau_0 = 100$

Величина $N(T)$ на рис. 3, *b* демонстрирует максимум на времени $T = 109$. Это примерно соответствует среднему времени запаздывания τ_0 . На рис. 3, *c–e* представлены зависимости $x_{i+n}(x_i)$ при $n = 1$ (*c*), $n = 2$ (*d*), $n = 3$ (*e*). На рис. 3, *c* и *d* отображение демонстрирует хаотический набор точек, а для $n = 3$ на рис. 3, *e* точки реконструируют нелинейную функцию $f(x)$. Это также подтверждает, что среднее время запаздывания τ_0 в системе примерно соответствует суммарной длине трех полук на временной реализации динамической переменной x .

Рассмотрим теперь возможности реконструкции в областях турбулентного хаоса (за пределами областей ламинарного хаоса). Временной ряд переменной x имеет при этом вид неупорядоченного сигнала, в целом похожий на сигнал системы с запаздыванием без модуляции времени задержки (см. рис. 4). На этом рисунке представлен временной ряд при $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$.

Разработанный нами ранее метод реконструкции времени задержки в системах с постоянным временем запаздывания, основанный на статистическом анализе временных интервалов между всеми возможными парами экстремумов временного ряда [18], применим к временным рядам системы (1) с переменным временем запаздывания, находящейся в режиме турбулентного хаоса. На рис. 5, *a, b* построены зависимости $N(T)$ для случаев, когда частота модуляции среднего времени запаздывания τ_0 принимает значения $\nu = 0.013$ и $\nu = 0.024$.

По классической статистике экстремумов [18] легко определяется частота модуляции ν среднего времени запаздывания τ_0 . Она соответствует самым высоким пикам на графике $N(T)$. Так, на рис. 5, *a* основной максимум $N(T)$ наблюдается при $T = 76$, что близко к $T_m = 1/\nu = 1/0.013 = 77$. На рис. 5, *b* в зависимости $N(T)$ наблюдаются один глобальный максимум при $T = 125$ и два максимума поменьше при $T = 42$ и $T = 83$. Максимум на $T = 42$ соответствует $T_m = 1/\nu = 1/0.024 = 42$. Максимум на $T = 83$ на рис. 5, *b* соответствуют удвоенному периоду модуляции, а максимум на $T = 125$ — утроенному периоду.

Глобальный минимум $N(T)$ на рис. 5, *a, b*, соответствующий времени запаздывания τ_0 , виден существенно хуже, чем для систем без модуляции времени запаздывания, но некоторые следы его видны на графиках. Если ограничить область поиска времени запаздывания диапазоном 70...130 (как правило, такие оценки делаются из более общих соображений при исследовании), в обоих рассмотренных случаях глобальный минимум зависимости $N(T)$ наблюдается при $T = 100$, соответствующем среднему времени запаздывания $\tau_0 = 100$.

Можно обратить внимание, что на рис. 4 экстремумы во временном ряде переменной x расположены более часто при положительных значениях времени запаздывания τ_m , чем при отрицательных значениях τ_m . Таким образом, расположение экстремумов может дать информацию об амплитуде τ_1 и периоде модуляции $T_m = 1/\nu$ времени запаздывания τ_0 . Оценим эти параметры с использованием предложенной нами новой статистики экстремумов, которая строится по

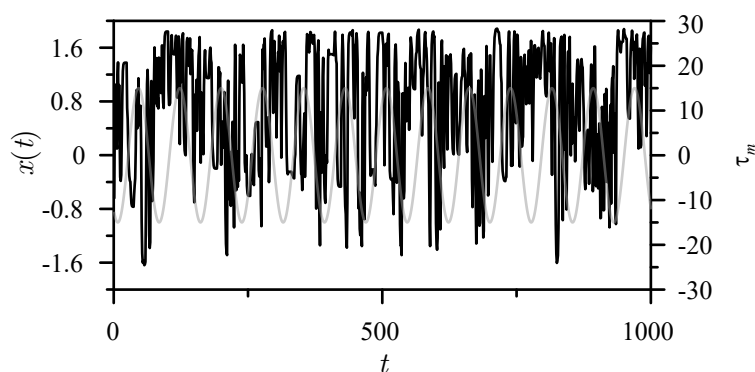


Рис. 4. Временной ряд турбулентного хаоса в системе (1) (черным) и вариация времени запаздывания τ_m (серым) при $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$

Fig. 4. Time series of turbulent chaos in system (1) (black) and variation of delay time τ_m (gray) at $\nu = 0.013$ and $\tau_1 = 15$

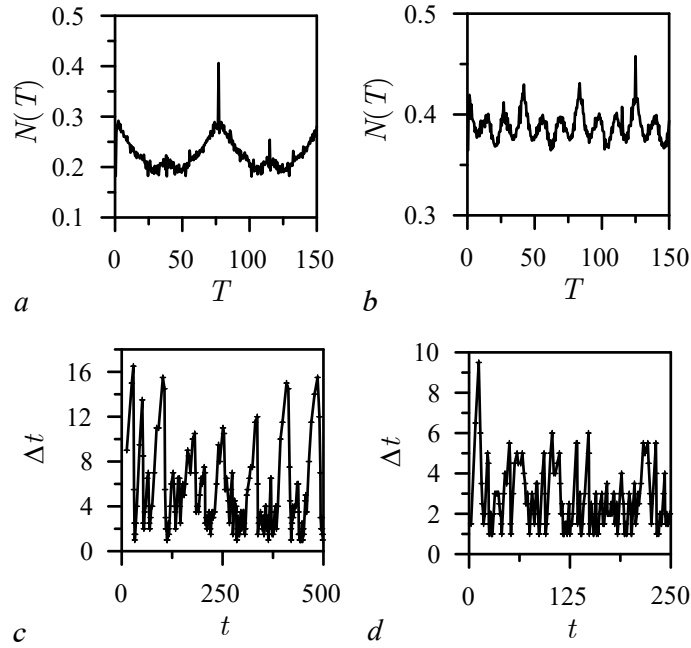


Рис. 5. Классическая статистика экстремумов при $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$ (a) и $\nu = 0.024$, $\tau_1 = 10$ (b) и новая статистика при $\nu = 0.013$ (c) и $\nu = 0.024$ (d)

Fig. 5. Classic statistics of extrema at $\nu = 0.013$, $\tau_1 = 15$ (a) and $\nu = 0.024$, $\tau_1 = 10$ (b) and new statistics at $\nu = 0.013$ (c) and $\nu = 0.024$ (d)

следующему правилу: по оси абсцисс откладываем момент времени t , в который во временном ряде $x(t)$ наблюдается экстремум. По оси ординат откладываем расстояние по времени Δt между текущим экстремумом и предыдущим. В результате получаем маленькие значения Δt в тех местах временного ряда, где экстремумы расположены плотно и большие значения Δt в тех местах, где экстремумы разрежены. Это фактически некоторая частотная модуляция, где в качестве управляющего сигнала выступает модуляция времени запаздывания.

Новая статистика $\Delta t(t)$ приведена на рис. 5, c, d для тех же значений параметров, что на рис. 5, a, b. Точки полученной зависимости $\Delta t(t)$ обозначены крестиками, которые соединены между собой прямыми линиями для наглядности. Клювы, направленные вниз, соответствуют более сильному уплотнению экстремумов во временном ряде $x(t)$. По этой характеристике можно оценить период внешнего сигнала T_m , который равен среднему расстоянию между минимумами зависимости $\Delta t(t)$. На рис. 5, c за время $t = 500$ можно выделить 6 глубоких минимумов (клювов) на зависимости $\Delta t(t)$ от $t = 30$ до $t = 490$. Следовательно, период модуляции T_m времени запаздывания τ_0 составляет примерно $T_m = 460/6 = 77$. Эта оценка совпадает с истинным периодом модуляции $T_m = 1/\nu = 1/0.013 = 77$. По рис. 5, d можно также оценить период модуляции, который составляет примерно $T_m = 500/12 = 42$, что практически совпадает с истинным периодом модуляции. Амплитуда модуляции τ_1 грубо соответствует размаху колебаний $\Delta t(t)$ на рис. 5, c, d.

Выводы

Таким образом, в данной статье исследована возможность реконструкции автоколебательных систем с переменным временем запаздывания с помощью известного метода реконструкции систем с постоянным временем задержки, который основан на статистическом анализе временных интервалов между всеми возможными парами экстремумов временного ряда. Предложен

новый метод реконструкции в применении к системам с запаздыванием с модуляцией времени запаздывания, в которых могут наблюдаться качественно различающиеся режимы колебаний. Предложенный метод основан на статистическом анализе временных интервалов между двумя последовательными экстремумами временного ряда.

В случае, когда в системе существует ламинарный хаос, можно реконструировать нелинейную функцию. Нелинейная функция строится как зависимость $x_{i+n}(x_i)$ значения динамической переменной на горизонтальном участке (полке) временной реализации $x(t)$ с номером $i + n$ от значения переменной на полке с номером i , где $n = 1, 2$ или 3 . Номер n дает информацию о том, в какой области существования ламинарного хаоса находится система. Так, если период модуляции T_m примерно равен среднему времени запаздывания τ_0 , то нелинейная функция реконструируется при $n = 1$, а среднее время запаздывания можно оценить как длину полки на временной реализации $x(t)$.

В случае, когда период модуляции времени запаздывания примерно вдвое меньше среднего времени запаздывания, нелинейная функция восстанавливается при $n = 2$, а среднее время запаздывания равно примерно длительности двух полок на временной реализации $x(t)$.

В случае, когда период модуляции времени запаздывания примерно втрое меньше среднего времени запаздывания, нелинейная функция восстанавливается при $n = 3$, а среднее время запаздывания равно примерно длительности трех полок на временной реализации $x(t)$. При этом глубину модуляции определить не удастся.

В случае если в системе есть модуляция времени запаздывания, но ламинарного хаоса нет, в некоторых случаях в режимах турбулентного хаоса время запаздывания можно оценить с использованием обычной статистики экстремумов, описанной в [18]. При этом частота и амплитуда модуляции времени запаздывания может быть оценена при помощи новой статистики, показывающей расстояние по времени между текущим и предыдущим экстремумом временного ряда.

Список литературы

1. Erneux T. Applied Delay Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 2009. 204 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.
2. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 398 p.
3. Farmer J. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1982. Vol. 4, iss. 3. P. 366–393. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90042-2.
4. Senthilkumar D. V., Lakshmanan M. Delay time modulation induced oscillating synchronization and intermittent anticipatory/lag and complete synchronizations in time-delay nonlinear dynamical systems // Chaos. 2007. Vol. 17, iss 1. 013112. DOI: 10.1063/1.2437651.
5. Lazarus L., Davidow M., Rand R. Dynamics of an oscillator with delay parametric excitation // Int. J. Nonlinear Mech. 2016. Vol. 78. P. 66-71. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.005.
6. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Квазипериодические и хаотические релаксационные колебания в модели лазера с переменным запаздыванием в цепи обратной связи // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 474, № 2. С. 159-163. DOI: 10.7868/S0869565217140043.
7. Müller D., Otto A., Radons G. Laminar chaos // Phys. Rev. Lett. 2018. Vol. 120. 084102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.084102.
8. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Ламинарный хаос в генераторе с запаздывающей обратной связью // Письма в журнал технической физики. 2020. Т. 46, вып. 9. С. 16-19. DOI: 10.21883/PJTF.2020.09.49366.18218.
9. Müller-Bender D., Otto A., Radons G. Resonant Doppler effect in systems with variable delay // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019. Vol. 377, iss. 2153. 20180119. DOI: 10.1098/rsta.2018.0119.
10. Müller-Bender D., Radons G. Laminar chaos in systems with quasiperiodic delay // Physical Review E. 2023. Vol. 107, iss. 1. 014205. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.014205.

11. Hart J. D., Roy R., Müller-Bender D., Otto A., Radons G. Laminar chaos in experiments: Nonlinear systems with time-varying delays and noise // *Physical Review Letters*. 2019. Vol. 123, iss. 15. 154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.154101.
12. Jüngling T., Stemler T., Small M. Laminar chaos in nonlinear electronic circuits with delay clock modulation // *Phys. Rev. E*. 2020. Vol. 101, iss. 1. 012215. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.012215.
13. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Ламинарный хаос в связанных системах с запаздыванием // *Письма в ЖТФ*. 2022. Т. 48, № 4. С. 11-14. DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52077.19044.
14. Пономаренко В. И., Лапшева Е. Е., Курбако А. В., Прохоров М. Д. Ламинарный хаос в экспериментальной системе с квазипериодической модуляцией времени запаздывания // *Письма в ЖТФ*. 2024. Т. 50, вып. 11. С. 34-37.
15. Büchner M. J., Ciofini M., Giaquinta A., Hegger R., Kantz H., Meucci R., Politi A. Reconstruction of systems with delayed feedback: II. Application // *Eur. Phys. J. D*. 2000. Vol. 10. P. 177–187. DOI: 10.1007/s100530050539.
16. Udaltsov V. S., Goedgebuer J.-P., Larger L., Cuenot J.-B., Levy P., Rhodes W. T. Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations // *Phys. Lett. A*. 2003. Vol. 308, iss. 1. P. 54–60. DOI: 10.1016/S0375-9601(02)01776-0.
17. Prokhorov M. D., Ponomarenko V. I., Karavaev A. S., Bezruchko B. P. Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // *Physica D*. 2005. Vol. 203, no. 3–4. P. 209–223. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.013.
18. Bezruchko B. P., Karavaev A. S., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, iss. 5. 056216. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056216.
19. Müller-Bender D., Otto A., Radons G., Hart J. D., Roy R. Laminar chaos in experiments and nonlinear delayed Langevin equations: A time series analysis toolbox for the detection of laminar chaos // *Physical Review E*. 2020. Vol. 101, iss. 3. 032213. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.032213.

References

1. Erneux T. *Applied Delay Differential Equations*. New York: Springer-Verlag; 2009. 204 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74372-1.
2. Kuang Y. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Boston: Academic Press; 1993. 398 p.
3. Farmer J. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1982;4(3):366-393. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90042-2.
4. Senthilkumar DV, Lakshmanan M. Delay time modulation induced oscillating synchronization and intermittent anticipatory/lag and complete synchronizations in time-delay nonlinear dynamical systems. *Chaos*. 2007;17(1):013112. DOI: 10.1063/1.2437651.
5. Lazarus L, Davidow M, Rand R. Dynamics of an oscillator with delay parametric excitation. *Int. J. Nonlinear Mech.* 2016;78:66-71. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.10.005.
6. Grigorieva EV, Kashchenko SA. Quasi-periodic and chaotic relaxation oscillations in a laser model with variable delayed optoelectronic feedback. *Doklady mathematics*. 2017;95(3):282-286. DOI: 10.1134/S1064562417030073.
7. Müller D, Otto A, Radons G. Laminar chaos. *Phys. Rev. Lett.* 2018;120:084102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.084102.
8. Kul'minskii DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Laminar chaos in a delayed-feedback generator. *Technical Physics Letters*. 2020;46(5):423-426. DOI: 10.1134/S1063785020050090.
9. Müller-Bender D, Otto A, Radons G. Resonant Doppler effect in systems with variable delay. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2019;377(2153):20180119. DOI: 10.1098/rsta.2018.0119.

10. Müller-Bender D, Radons G. Laminar chaos in systems with quasiperiodic delay. *Physical Review E*. 2023;107(1):014205. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.014205.
11. Hart JD, Roy R, Müller-Bender D, Otto A, Radons G. Laminar chaos in experiments: Nonlinear systems with time-varying delays and noise. *Physical Review Letters*. 2019;123(15):154101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.154101.
12. Jüngling T, Stemler T, Small M. Laminar chaos in nonlinear electronic circuits with delay clock modulation. *Phys. Rev. E*. 2020;101(1):012215. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.012215.
13. Kul'minskii DD, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Laminar chaos in coupled time-delay systems. *Technical Physics Letters*. 2022;48(2):53-56. DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52077.19044.
14. Ponomarenko VI, Lapsheva EE, Kurbako AV, Prokhorov MD. Laminar chaos in an experimental system with quasiperiodic delay time modulation. *Technical Physics Letters*. 2024;50(11):34-37 (in Russian).
15. Bünner MJ, Ciofini M, Giaquinta A, Hegger R, Kantz H, Meucci R, Politi A. Reconstruction of systems with delayed feedback: II. Application. *Eur. Phys. J. D*. 2000;10:177–187. DOI: 10.1007/s100530050539.
16. Udaltsov VS, Goedgebuer J-P, Larger L, Cuenot J-B, Levy P, Rhodes WT. Cracking chaos-based encryption systems ruled by nonlinear time delay differential equations. *Phys. Lett. A*. 2003;308(1):54–60. DOI: 10.1016/S0375-9601(02)01776-0.
17. Prokhorov MD, Ponomarenko VI, Karavaev AS, Bezruchko BP. Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series. *Physica D*. 2005;203(3–4):209–223. DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.013.
18. Bezruchko BP, Karavaev AS, Ponomarenko VI, Prokhorov MD. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series. *Physical Review E*. 2001;64(5):056216. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.056216.
19. Müller-Bender D, Otto A, Radons G, Hart JD, Roy R. Laminar chaos in experiments and nonlinear delayed Langevin equations: A time series analysis toolbox for the detection of laminar chaos. *Physical Review E*. 2020;101(3):032213. DOI: 10.1103/PhysRevE.101.032213.



Пономаренко Владимир Иванович — родился в Саратове (1960). Окончил Саратовский государственный университет (1982). Доктор физико-математических наук (2008). Ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии СГУ. Область научных интересов — статистическая радиофизика, анализ временных рядов, нелинейная динамика и ее приложения. Автор более 130 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: ponomarenkovi@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-1579-6465
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39986



Прохоров Михаил Дмитриевич — родился в Саратове (1968). Окончил Саратовский государственный университет (1992). Доктор физико-математических наук (2008). Заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН. Область научных интересов: нелинейная динамика и ее приложения, математическое моделирование, анализ временных рядов. Имеет более 200 научных публикаций.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
 им. В. А. Котельникова РАН
 E-mail: mdprokhorov@yandex.ru
 ORCID: 0000-0003-4069-9410
 AuthorID (eLibrary.Ru): 39985