



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Редакторская заметка

DOI: 10.18500/0869-6632-003143  
EDN: YFTKVA

## Научное наследие Л. П. Шильникова: к 90-летию юбилею

*С. В. Гонченко, М. И. Малкин*

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия  
E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, malkin@unn.ru

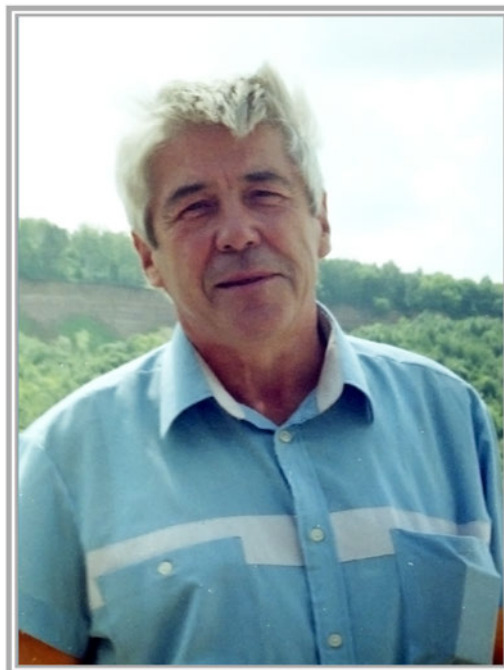
*Поступила в редакцию 24.10.2024, опубликована 29.11.2024*

**Для цитирования:** Гонченко С. В., Малкин М. И. Научное наследие Л. П. Шильникова: к 90-летию юбилею // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 713–721. DOI: 10.18500/0869-6632-003143. EDN: YFTKVA

**For citation:** Gonchenko SV, Malkin MI. Scientific heritage of L. P. Shilnikov: to the 90th anniversary. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):713–721. DOI: 10.18500/0869-6632-003143

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

В этом году мы отмечаем 90-летний юбилей Леонида Павловича Шильникова (1934–2011), выдающегося российского математика и одного из основоположников математической теории динамического хаоса и теории глобальных бифуркаций многомерных систем. Достаточно перечислить лишь часть полученных им фундаментальных результатов — создание теории глобальных бифуркаций многомерных динамических систем, открытие спирального хаоса, создание современной математической теории синхронизации, теории аттракторов лоренцевского типа, теории аттракторов типа «тор–хаос» (переход к хаосу через разрушение двумерных инвариантных торов), развитие теории гомоклинического хаоса и многое другое — чтобы представить высочайший уровень его математического таланта и то значение его научного вклада, который он внес в современную науку — Нелинейную Динамику. Научные труды Л. П. Шильникова широко известны специалистам во всем мире,



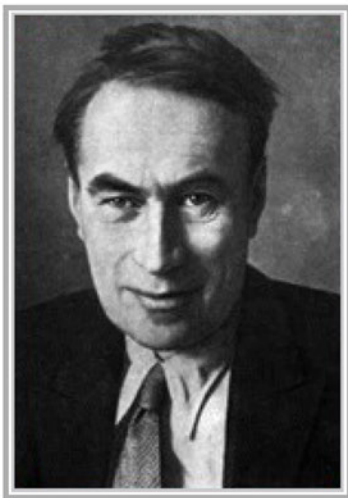
а его результаты, признанные ныне классическими, включены практически во все современные учебники по динамическим системам.

Леонид Павлович родился 17 декабря 1934 г. в городе Котельниче Кировской области. Окончив среднюю школу в 1952 г., он поступил на физико-математический факультет Горьковского государственного университета, который окончил в 1957 г. В 1957–1960 гг. он был аспирантом Горьковского университета, а затем стал научным сотрудником Горьковского исследовательского физико-технического института. С 1963 г. основным местом работы Леонида Павловича стал только что образовавшийся при ГГУ Институт прикладной математики и кибернетики (НИИ ПМК), где он занимал должности старшего научного сотрудника, заведующего лабораторией (с 1967 г.) и заведующего отделом с 1982 г. до конца жизни. Он преподавал в университете, читал как регулярные, так и специальные курсы (вплоть до последнего года он читал курс «Бифуркации многомерных динамических систем»). Студенты, живо интересующиеся наукой, высоко ценили его лекции и семинары.

Л. П. Шильников был блестящим представителем знаменитой школы Андронова по нелинейной динамике и, по сути, создал собственное направление, которое сейчас известно как школа Шильникова по динамическим системам. Научные результаты Л. П. Шильникова впечатляют одновременно своей широтой охвата темы и глубиной проникновения в ее суть.

Л. П. Шильников является основоположником теории глобальных бифуркаций многомерных систем. Основные бифуркации систем на плоскости были исследованы А. А. Андроновым, Е. А. Леонтович и А. Г. Майером еще в 1930-е годы двадцатого столетия, в том числе и бифуркации гомоклинических петель сепаратрис состояний равновесия. В самом начале 1960-х годов Шильников изучил многомерные аналоги этих нелокальных бифуркаций и нашел общие условия, при которых из петли рождается только одна периодическая траектория.

Однако вскоре после этого Шильниковым (в работе 1965 г.) было открыто совершенно неожиданное и принципиально новое явление, коренным образом изменившее представление о динамике многомерных систем. Он обнаружил, что наличие гомоклинической петли у состояния равновесия типа седло–фокус влечет при выполнении определенных условий (которые сейчас называются условиями Шильникова) существование бесконечного множества периодических траекторий. При этом в любой окрестности гомоклинической петли лежит нетривиальное гиперболическое множество, что свидетельствует о хаотической динамике с весьма богатой структурой.



А. А. Андронов



Е. А. Леонтович

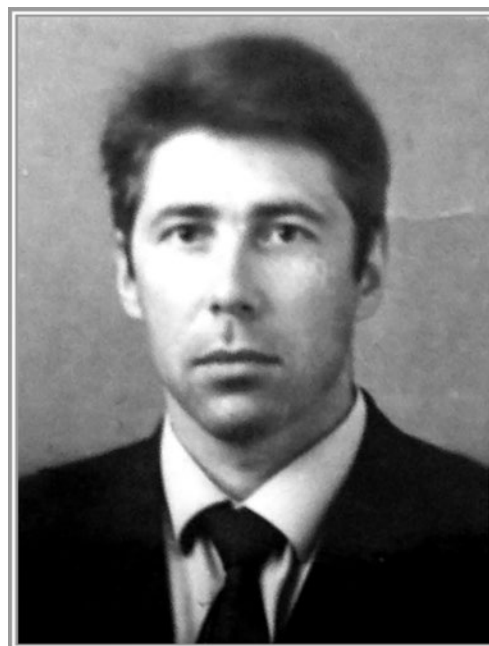


А. Г. Майер

К настоящему времени открытый Шильниковым спиральный хаос обнаружен во многих моделях, вне зависимости от их происхождения, будь то физика, химия или биология. А тогда, в 1965 году, никто даже не подозревал, что такая простая на первый взгляд структура приводит к столь сложному поведению траекторий. Для самого Леонида Павловича это открытие стало определяющим моментом его научной жизни, и последующие десятилетия он посвятил исследованию основных гомоклинических структур, ответственных за различные типы хаотического поведения многомерных систем.

К этой теме в первую очередь следует отнести важнейшие работы Л. П. Шильникова, в которых им была решена задача о структуре множества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности грубой (трансверсальной) гомоклинической траектории Пуанкаре. Шильников показал, что данное множество равномерно гиперболично и допускает полное описание в терминах топологической схемы Бернулли из двух символов.<sup>1</sup> Шильников считал этот результат принципиально важным и не устал подчеркивать, что существование грубой гомоклинической траектории Пуанкаре является универсальным критерием хаоса. Для преодоления технических трудностей, возникающих при исследовании поведения нелинейной системы в окрестности седловых состояний равновесия и периодических траекторий, Шильников создает новую технику «краевой задачи», которая потом была развита и использована им во многих других ситуациях. Таким путем были изучены структура множества траекторий вблизи гомоклинической трубы инвариантного тора и (вместе с Л. М. Лерманом) вблизи гомоклинических траекторий в бесконечномерных и неавтономных системах. Эти результаты в совокупности намного опередили свое время. Так, еще в своей работе 1968 г. Шильников писал, что гомоклинические трубы к инвариантным торах важны в задаче о диффузии Арнольда. И действительно, в последние годы конструкция Шильникова стала активно применяться в подобных задачах.

К этому же времени (конец 60-х) относится еще одно удивительное его открытие нового класса бифуркаций, которые сейчас называются гомоклиническим  $\Omega$ -взрывом. Имеется в виду ситуация, когда у системы до момента бифуркации была простая динамика (система Морса–Смейла), а сразу после бифуркации ее динамика мгновенно становится сложной, хаотической. Шильников привел пример такой бифуркации системы на границе систем Морса–Смейла,



Л. П. Шильников в 1960-е годы

<sup>1</sup> Гомоклинические траектории были открыты Пуанкаре еще в конце 19-го века при исследовании им задачи трех тел. Такие траектории лежат в пересечении устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий седловой периодической траектории. Когда соответствующее пересечение является трансверсальным, гомоклиническая траектория называется грубой. Еще Пуанкаре понимал, что в окрестности грубой гомоклинической траектории имеет место сложное хаотическое поведение траекторий. Однако только лишь в работе 1935 г. Биркгоф показал, что в случае аналитического сохраняющего площадь отображения здесь существует счетное множество периодических траекторий. Через 30 лет, в 1965 г., Смейл установил, что в типичном случае (когда есть гладкая линеаризация вблизи седла) в этой окрестности также существует нетривиальное гиперболическое подмножество траекторий, аналогичное подкове Смейла. В 1967 г. Л. П. Шильников дал окончательное решение этой задачи (которую он называл задачей Пуанкаре–Биркгофа), получив полное описание всех траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической траектории Пуанкаре.



А. Д. Морозов, М. И. Малкин, Л. П. Шильников и Л. М. Лерман на банкете, посвященном 90-летию ННГУ (2006)

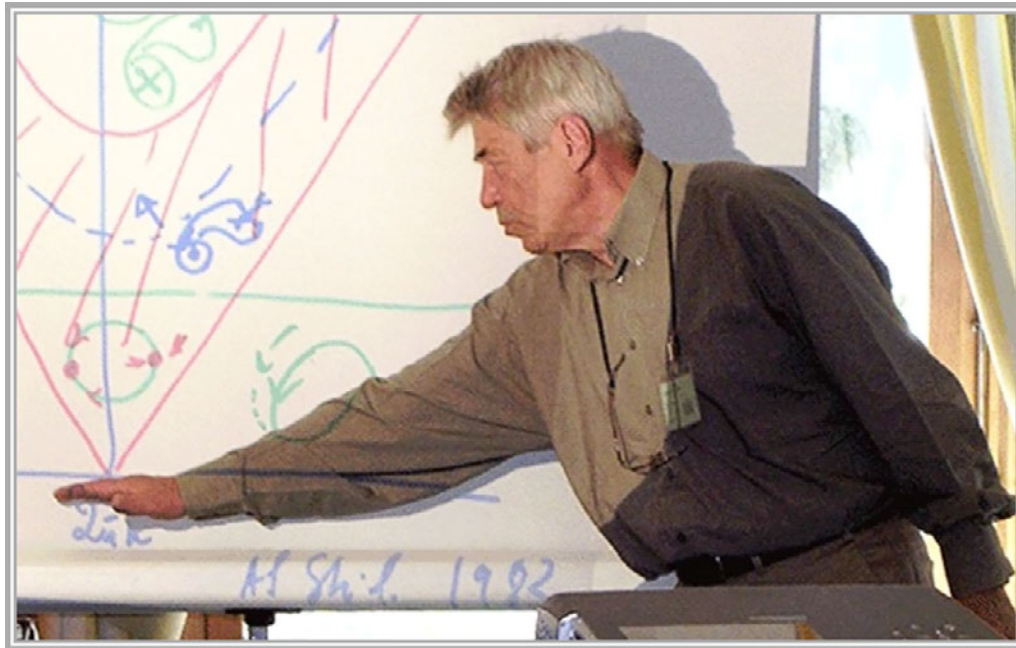
имеющей несколько гомоклинических петель состояния равновесия типа седло–седло (это всегда условие коразмерности один, независимо от числа петель). В этом случае при исчезновении равновесия на месте букета гомоклинических петель возникает нетривиальное гиперболическое инвариантное множество. По простоте конструкции этот сценарий гомоклинического  $\Omega$ -взрыва, предложенный Шильниковым, превосходит все известные на сегодня, и до сравнительно недавнего времени он был единственным, в котором возникающее сложное множество является равномерно гиперболическим.<sup>2</sup>

Уже эти первые результаты 60-х годов сделали имя Л. П. Шильникова известным в научном мире. А с начала 70-х годов вокруг Леонида Павловича стал образовываться научный коллектив учеников и единомышленников. В течение многих лет Шильников был заведующим лабораторией в руководимом Е. А. Леонтович-Андроновой отделе дифференциальных уравнений НИИ ПМК, а с 1982 г. он стал заведующим этим отделом. Первыми учениками Леонида Павловича были Н. К. Гаврилов, В. С. Афраймович, Л. М. Лерман, А. Д. Морозов, Л. А. Беляков и В. В. Быков. Затем их круг расширился, в отдел пришли А. Н. Баутин, В. И. Лукьянов, С. В. Гонченко, М. И. Малкин, Д. В. Тураев, А. Л. Шильников и др. В результате сформировалась мощная научная группа, которая составила костяк известной сейчас во всем мире школы динамических систем Шильникова.

В работах шильниковской школы в 1970–1980-х годах был, по существу, создан новый раздел теории многомерных динамических систем — теория глобальных бифуркаций, а также заложены теоретические основы современной теории математической синхронизации. Одной из важнейших тем этих исследований стала фундаментальная проблема бифуркационных сценариев перехода к хаосу от систем с простой структурой. Первоначально были выделены две такие большие группы сценариев: переход к хаосу через гомоклинические касания и через разрушение двумерных инвариантных торов.

<sup>2</sup>Еще один сценарий такого типа был описан в работе Тураева и Шильникова (1995), в которой был представлен пример бифуркации «катастрофы голубого неба» с рождением гиперболического аттрактора.





Л. П. Шильников на лекции по математической теории синхронизации

Основные бифуркации гомоклинических касаний были изучены в работах Н. К. Гаврилова и Л. П. Шильникова (1972–1973). Впоследствии эти исследования активно продолжались. Было получено много интересных результатов, а главным открытием, как считал сам Шильников, явилось то, что бифуркации систем с квадратичными касаниями приводят к появлению гомоклинических касаний сколь угодно высокого порядка (Гонченко–Тураев–Шильников). Таким образом, было явно показано, что традиционная логика исследования бифуркаций по степени увеличения коразмерности, идущая от теории особенностей, не работает при изучении многих классов систем со сложной динамикой. В частности, если система зависит от конечного числа параметров и при некотором их значении имеется гомоклиническое касание, то полное описание динамики и бифуркаций системы получить в принципе невозможно! Эти результаты в совокупности с теорией Ньюхауса<sup>3</sup> составляют в настоящее время фундамент теории гомоклинического хаоса.

Несомненно, к одному из самых главных научных достижений Л. П. Шильникова нужно с полным правом также отнести его вклад в развитие современной математической теории синхронизации. Классическая теория, восходящая к известным работам А. А. Андронова и А. А. Витта, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и др., имела дело с изучением влияния периодических возмущений малой амплитуды либо на автоколебательную систему, либо на систему, близкую к линейной консервативной. В работах 1970-х годов Л. П. Шильникова и А. Д. Морозова соответствующие задачи были впервые рассмотрены для систем, близких к нелинейным консервативным системам. В те же годы в работах Л. П. Шильникова, написанных совместно с В. С. Афраймовичем, были разработаны новые качественные и аналитические методы исследования многомерных автоколебательных систем с периодическими (вообще говоря, не малыми) возмущениями, в том числе были указаны и исследованы их бифуркации, приводящие к сложной хаотической динамике. В частности, были исследованы глобальные бифуркации, связанные с исчезновением

<sup>3</sup>В своих работах 70-х годов Ньюхаус показал, что системы с гомоклиническими касаниями плотно заполняют области в пространстве динамических систем (области Ньюхауса). Первоначально этот результат был представлен Ньюхасом как некоторый контрпример к гипотезе Смейла о плотности грубых многомерных систем. Однако, конечно, более важным оказалось то значение, которое имеет открытие Ньюхауса для нелинейной динамики в целом.



Л. П. Шильников с учениками и коллегами на Международной конференции по динамическим системам, посвященной его 70-летию (Нижний Новгород, 2005). Слева направо: В. С. Гонченко (аспирант), А. Ю. Жиров, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников, Е. А. Сатаев, Р. В. Плыкин

седло-узловой периодической траектории в многомерной системе в случае, когда ее неустойчивое многообразие возвращается в устойчивую область. До этих работ считалось, что такая бифуркация должна обязательно приводить к появлению гладкого двумерного (квазипериодического) инвариантного тора по аналогии с известной бифуркацией Андронова–Витта возникновения устойчивого предельного цикла (автоколебания) при исчезновении седло-узла с гомоклинической петлей. Поэтому совершенно неожиданным оказалось сделанное в работах Афраймовича и Шильникова открытие того, что еще до момента бифуркации резонансный тор может стать негладким, а после бифуркации (когда седло-узел исчезает) тор разрушается, и на его месте возникает хаотическое множество. Фактически здесь был открыт и исследован новый универсальный механизм перехода к хаосу через разрушение двумерного тора. К настоящему времени, в связи с развитием компьютерной техники, этот сценарий является «общим местом» в прикладных исследованиях и часто наблюдается в конкретных моделях.

В конце 70-х годов системами со сложной динамикой заинтересовались физики и ученые из других областей науки. Вопрос о том, насколько открытый математиками динамический хаос нужен для естествознания, обсуждался весьма широко, и Шильников принимал в дискуссиях активное участие. И здесь поворотным моментом, а по сути, доказательством того, что динамический хаос является одним из фундаментальных явлений природы, стало открытие странного аттрактора в системе Лоренца. В то время в теории динамических систем были известны только гиперболические странные аттракторы. Однако в системах из приложений они тогда не наблюдались, и физики относились к ним с недоверием, как к чисто математическому объекту. Шильников понимал, что исследование системы Лоренца неминуемо приведет к совершенно новому взгляду на природу динамического хаоса. Он немедленно начал серию замечательных работ по аттрактору Лоренца, выполненных совместно с В. С. Афраймовичем и В. В. Быковым.

Его идея состояла в том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием так называемой геометрической модели, которая позволяла дать детальное описание

структуры аттрактора Лоренца. Кроме того, было показано, что аттрактор Лоренца всегда негрубый: в нем при малых возмущениях возникают и исчезают петли сепаратрис. Что особенно важно, были исследованы бифуркации аттрактора Лоренца, приводящие к его рождению, образованию лакун и разрушению аттрактора.<sup>4</sup> Независимо и практически одновременно на Западе появилось большое число статей по аттрактору Лоренца. Тем не менее, по сравнению с другими подходами, теория Афраймовича–Быкова–Шильникова до сих пор остается наиболее полной и удобной для анализа структуры и эволюции аттракторов лоренцевского типа в различных системах.

Л. П. Шильников очень гордился этими результатами, и тематика с аттракторами Лоренца оставалась для него приоритетной вплоть до конца жизни. В первую очередь его занимал вопрос о бифуркационных механизмах возникновения и разрушения аттрактора Лоренца. В частности, он предложил эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях (1981), а позднее в его работе с Д. Тураевым и А. Шильниковым (1993) были построены также эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при локальных бифуркациях.

Еще при работе над первыми статьями по аттрактору Лоренца было замечено, что он может разрушаться при образовании гомоклинических касаний и в нем появляются устойчивые периодические траектории больших периодов и с настолько узкими областями притяжения, что сам аттрактор при компьютерном моделировании продолжает оставаться хаотическим. Это послужило непосредственным толчком для формирования концепции квазиаттрактора — притягивающего множества, которое наряду с гиперболическими подмножествами может содержать и устойчивые периодические траектории больших периодов. Шильников считал, что идея квазиаттрактора дает наиболее адекватный математический образ динамического хаоса, наблюдаемого во многих прикладных задачах.

В дальнейшем этой теме — исследованию глобальных бифуркаций, приводящих к рождению устойчивых периодических траекторий — было посвящено немало работ Шильникова и его учеников. При этом были найдены не только условия появления таких траекторий, но также были построены критерии их отсутствия (как у самой системы, так и у всех близких). Впоследствии это привело к открытию в его работе с Тураевым (1998) нового класса псевдогиперболических аттракторов, которые, так же как и гиперболические, сохраняют свою хаотичность при всех малых гладких возмущениях, но, в отличие от последних, допускают гомоклинические касания. Сейчас теория псевдогиперболических аттракторов активно развивается в основном в работах учеников Л. П. Шильникова, и уже известно немало примеров таких аттракторов в конкретных моделях.



Рыбалка была настоящей страстью для Леонида Павловича (за любимым занятием на берегу озера в Атланте, 2007)

<sup>4</sup>При этом важную роль в исследовании динамических свойств аттрактора Лоренца и его бифуркаций играла конструкция инвариантного слоения для отображения Пуанкаре. Она позволила свести анализ топологических свойств динамики на аттракторе к изучению одномерного разрывного фактор-отображения. В свою очередь, это позволило провести полную классификацию таких отображений с помощью нидинг-инвариантов (М. И. Малкин).



В области приложений Л. П. Шильников опубликовал ряд работ по математическим проблемам возникновения турбулентности, вызвавшим большой интерес у физиков. В частности, он описал несколько феноменологических сценариев возникновения странных аттракторов в многомерных потоках и отображениях, в том числе гиперхаотических спиральных аттракторов, которые сейчас называются аттракторами Шильникова. Он также интересовался структурой уединенных волн (солитонов и фронтов), поскольку они естественно описываются гомоклиническими и гетероклиническими решениями. В основном работы по солитонной тематике проводились в сотрудничестве с группой физиков из Москвы, возглавляемой В. М. Елеонским. В частности, в этих работах был открыт новый тип солитонов, математическим образом которых являются так называемые супергомоклиники (двойкоасимптотические траектории к гомоклиническим петлям).

Леонид Павлович Шильников был выдающимся специалистом в теории динамических систем, обладавшим широким кругозором и особенной интуицией. Как истинный большой ученый, он умел «волшебным образом» увидеть связь между, казалось бы, несвязанными вещами, найти единственно правильную постановку задачи, предложить подход, который неожиданно становился актуальным годы спустя. Это было одной из основных причин, почему многие специалисты из различных областей науки поддерживали и ценили тесные контакты с Л. П. Шильниковым.

За более чем полувековой период научной деятельности Л. П. Шильников опубликовал более 200 работ, в том числе несколько монографий. Работы Л. П. Шильникова получили широкое признание в мировом научном сообществе. Подтверждением этого является присуждение ему премии А. М. Ляпунова Российской академии наук (1998) и премии М. А. Лаврентьева Национальной академии наук Украины (2005). В 2001 г. ему была присуждена премия фонда А. Гумбольдта. Л. П. Шильников был несомненным лидером нижегородской математической жизни, одним из инициаторов создания Нижегородского математического общества (1995) и его первым президентом. В его честь был организован ряд международных конференций по динамическим системам как у нас, так и за рубежом. В Нижегородском университете стало хорошей традицией ежегодно, начиная с 2012 года, проводить конференцию по динамическим системам «Shilnikov WorkShop», посвященную памяти Л. П. Шильникова. Эту конференцию мы проводим всегда в декабре:



Л. П. Шильников с супругой Людмилой Ивановной (Флорида, 2007)



даты ее проведения приурочены к 17 декабря — дню рождения Л. П. Шильникова. В 2022 году в ННГУ была проведена первая межвузовская студенческая олимпиада по математике имени Л. П. Шильникова. Она прошла с большим успехом и собрала большое число талантливой молодежи. Теперь эта олимпиада стала ежегодной.

7 ноября 2016 года в Нижегородском университете была открыта мемориальная доска в честь Леонида Павловича Шильникова. В 2017 году в издательстве Нижегородского университета вышла из печати книга Л. П. Шильникова «Избранные труды», в которой были представлены, в частности, его классические работы по теории бифуркаций, относящиеся к 1960–1970-м годам. Как показало время, они намного опередили общий уровень мировых исследований и сохраняют свою актуальность и по сей день.



Мемориальная доска Л. П. Шильникову на стене учебного корпуса № 6 университетского городка ННГУ