



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья  
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003111  
EDN: EYKFOY

## Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети

*А. В. Шабунин*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, Россия  
E-mail: [shabuninav@info.sgu.ru](mailto:shabuninav@info.sgu.ru)

*Поступила в редакцию 15.01.2024, принята к публикации 3.03.2024,  
опубликована онлайн 20.06.2024, опубликована 30.09.2024*

**Аннотация.** Цель — разработка и исследование алгоритма определения структуры связей ансамбля хаотических автоколебательных систем. Метод основан на определении причинности по Грэнджеру и использовании искусственных нейронных сетей прямого распространения, обучаемых с регуляризацией. Результаты. Рассмотрен метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений, использующий принцип причинности по Грэнджеру и аппарат искусственных нейронных сетей. Алгоритм показал свою работоспособность на примере небольших ансамблей отображений с диффузионными связями. Помимо определения топологии сети, он может быть использован для оценки величины коэффициента связи. Точность метода критически зависит от наблюдаемого колебательного режима: он эффективно работает только в случае однородного пространственно-временного хаоса. Обсуждение. Метод показал свою эффективность для простых математических моделей. Однако возможность его использования для реальных систем будет зависеть от ряда факторов, таких как чувствительность к шуму, искажения формы сигналов, наличие перекрестных наводок и внешних воздействий, нестационарность и т. п. Эти вопросы требуют дополнительных исследований.

**Ключевые слова:** динамический хаос, искусственные нейронные сети, ансамбли отображений, определение структуры связей.

**Для цитирования:** Шабунин А. В. Определение структуры связей в ансамбле хаотических отображений при помощи нейронной сети // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111. EDN: EYKFOY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks

*A. V. Shabunin*

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 15.01.2024, accepted 3.03.2024,

available online 20.06.2024, published 30.09.2024

**Abstract.** The purpose of this work is development and research of an algorithm for determining the structure of couplings of an ensemble of chaotic self-oscillating systems. The method is based on the determination of causality by Granger and the use of direct propagation artificial neural networks trained with regularization. Results. We have considered a method for recognition structure of couplings of a network of chaotic maps based on the Granger causality principle and artificial neural networks approach. The algorithm demonstrates its efficiency on the example of small ensembles of maps with diffusion couplings. In addition to determining the network topology, it can be used to estimate the magnitude of the couplings. Accuracy of the method essentially depends on the observed oscillatory regime. It effectively works only in the case of homogeneous space-time chaos. Discussion. Although the method has shown its effectiveness for simple mathematical models, its applicability for real systems depends on a number of factors, such as sensitivity to noise, to possible distortion of the waveforms, the presence of crosstalks and external noise etc. These questions require additional research.

**Keywords:** dynamical chaos, artificial neural networks, ensembles of maps, couplings structure identification.

**For citation:** Shabunin AV. Searching the structure of couplings in a chaotic maps ensemble by means of neural networks. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5):636–653. DOI: 10.18500/0869-6632-003111

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

### Введение

Одной из задач математического моделирования является идентификация динамических систем (ДС), то есть реконструкция уравнений, описывающих динамику системы по генерируемым ею сигналам [1–6]. Возможность ее решения основана на теореме Такенса [7]. Если ДС представляет собой сеть из взаимодействующих подсистем, сигналы от которых доступны для наблюдения, то в задачу идентификации войдет также выявление структуры связей сети. Для ее решения используется ряд методов, один из которых основан на определении причинности по Грэнджеру (ПГ) [8,9]. Метод ПГ позволяет выявить влияние одной системы (Active) на другую (Reserient) посредством построения временного прогноза поведения последней при учете динамики  $A$  и без такового. Очевидно, что учет  $A$  должен либо улучшать прогноз  $R$ , то есть уменьшать ошибки предсказания, если  $A$  влияет на  $R$ , либо оставлять точность прогноза без изменения в противном случае. Таким образом, для определения ПГ строятся два фильтра-предсказателя:

$$\mathbf{R}(n+1) = f(\mathbf{R}(n), \mathbf{A}(n)) \quad (1)$$

$$\mathbf{R}(n+1) = g(\mathbf{R}(n)).$$

Вводя в качестве меры качества предсказания усредненную среднеквадратичную ошибку  $\varepsilon = \sqrt{|\mathbf{R}(n+1) - \mathbf{R}(n)|^2}$ , можно определить степень влияния  $A$  на  $R$  как  $PI = (\varepsilon_g^2 - \varepsilon_f^2) / \varepsilon_g^2$  [10].

Метод ПГ, а также его модификации используются для определения зависимостей между системами живой и неживой природы [11–17], а его достоверность и особенность применения тестировались на множестве моделей нелинейной динамики [18–20]. Несмотря на кажущуюся

простоту алгоритма, его практическая применимость зависит от ряда факторов: зашумленности наблюдаемых сигналов, их разреженности по времени, задержки между генерируемыми и наблюдаемыми сигналами, наличия «скрытых» источников, воздействующих одновременно на обе анализируемые подсистемы и т.п. Существенную роль могут играть такие факторы, как размерность анализируемой системы, сложность ее топологии, а также выбор алгоритма предсказания.

В качестве инструмента для определения структуры связей ансамбля хаотических генераторов можно использовать искусственную нейронную сеть (ИНС) [21, 22]. Способность нейронной сети работать в качестве фильтра-предсказателя хаотической динамики хорошо известна [23–25]. Соответственно, ИНС могут использоваться в качестве функций  $f$  и  $g$  в уравнениях (1), реализуя тем самым описанный выше алгоритм. В работе [26] была предложена идея иного подхода, которая представляется нам интересной — воспользовавшись тем, что сама ИНС обладает сетевой структурой, заставить ее в ходе обучения подстроить собственную структуру синаптических связей под структуру связей ансамбля, выявляя тем самым последнюю. Данную задачу можно рассматривать как задачу структурной оптимизации. Как известно, в исходном состоянии необученная ИНС является полносвязной. Такая архитектура может оказаться избыточной для успешного предсказания динамики анализируемой системы. Можно ли заставить нейронную сеть в ходе обучения «убрать» лишние связи? Подобный метод известен и давно используется, правда, для других целей — борьбы с переобучением сети. Он основан на введении «штрафа за сложность», который обеспечивает максимальное упрощение структуры сети при приемлемом уровне ее эффективности. Этот способ называется *обучением с регуляризацией* [21]. Метод регуляризации был впервые предложен А. Н. Тихоновым [27] и получил широкое применение в задачах оптимизации.

При использовании структурной оптимизации, происходящей в ходе обучения ИНС предсказанию хаотической динамики ансамбля, интенсивность синаптических коэффициентов принимает минимально необходимые значения, достаточные для успешного предсказания. Эти величины, должным образом нормированные, могут использоваться для оценки наличия связей между элементами ансамбля и их интенсивности. Такой метод является альтернативой использованию стандартного критерия в форме PI-фактора.

В данной работе мы предлагаем алгоритм оценки структуры связей ансамбля хаотических отображений, основанный на методе [26]. Алгоритм тестируется на нескольких простых примерах — цепочках идентичных одномерных отображений с однонаправленными и взаимными диффузионными связями, для которых показывается его работоспособность. В работе также определяется чувствительность метода к выбору параметра регуляризации и исследуется возможность его использования для оценки величины связей.

## 1. Исследуемые ансамбли

Пусть автоколебательная система задана отображением последования  $x(n+1) = f(x(n))$ , где  $x$  — вещественная динамическая переменная, описывающая состояние системы в момент времени  $n$ ;  $f$  — функция, задающая его изменение на одном шаге дискретного времени. Рассмотрим ансамбль из  $N$  идентичных взаимодействующих систем:

$$x_i(n+1) = f(x_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij} (f(x_j) - f(x_i)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь нижний индекс представляет собой номер (идентификатор) элемента ансамбля, а матрица  $\hat{C}$  задает топологию и интенсивности связей между отображениями. Слагаемое в скобках

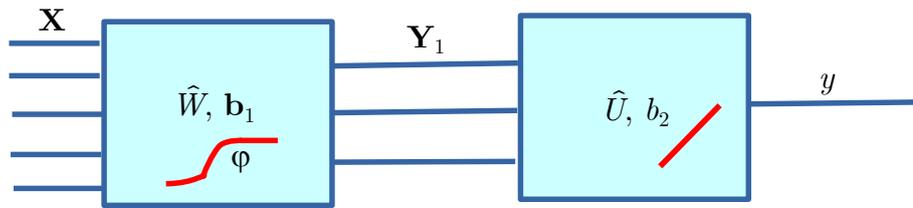


Рис. 1. Схема двухслойной нейронной сети  
 Fig. 1. The scheme of a two-layer neural network

представляет собой дискретный аналог оператора  $\nabla$ , поэтому данный тип связей называется *диффузионным* (см. [28,29]). В целях упрощения задачи будем полагать силы всех связей одинаковыми. В этом случае матрица  $\hat{C}$  принимает вид  $\gamma\hat{L}$ , где  $\gamma$  — общий для всех элементов коэффициент связи, а матрица смежности  $\hat{L}$  задает их структуру: элемент  $L_{ij}$  принимает значение 1, если узел  $j$  воздействует на узел  $i$ , и значение 0, если такое воздействие отсутствует.

Систему уравнений (2) удобно переписать в матрично-векторной форме. Для этого определим вектор-столбец  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ , где верхний индекс  $T$  означает транспонирование. Тогда получим уравнение

$$\mathbf{x}(n+1) = \hat{M}\mathbf{f}(\mathbf{x}(n)), \quad (3)$$

где  $N \times N$  матрица  $\hat{M}$  — общая матрица связей ансамбля. Она учитывает как взаимные воздействия осцилляторов друг на друга, так и самовоздействия: диагональные элементы  $M_{ii} = 1 - q\gamma$ , где  $q \in [0, N - 1]$  — число других узлов, действующих на  $i$ -й, а недиагональные  $M_{ij} = \gamma L_{ij}$ . Определение матрицы  $\hat{M}$ , исходя из наблюдений за динамикой ансамбля, и является задачей настоящего исследования.

Выберем в качестве элемента ансамбля (2) логистическое отображение, задаваемое уравнением

$$x(n+1) = \alpha x(n)(1 - x(n)), \quad (4)$$

где  $\alpha \in [0 : 4[$  — параметр. Отображение (4) является одной из базовых моделей нелинейной динамики, поведение которой хорошо известно. В зависимости от  $\alpha$  оно может демонстрировать различные регулярные и хаотические режимы: неподвижную точку (периодические колебания) с периодом один, колебания с периодом  $2^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), слабый (когерентный) хаос в виде многолучевых хаотических аттракторов, развитый некогерентный хаос. Последний режим ( $\alpha = 3.95$ ) и выбран нами в качестве исходного.

При объединении отображений (4) в ансамбль, режим колебаний, помимо  $\alpha$ , определяется также параметром  $\gamma$  и матрицей  $\hat{L}$ . Соответственно, при определенных связях он может смениться с хаотического на регулярный. Такие случаи будут исключаться из рассмотрения.

## 2. Использование ИНС для оценки матрицы связей ансамбля

Определение структуры связей ансамбля тесно связано с задачей идентификации систем, для решения которой применяются многослойные нейронные сети прямого распространения, обучаемые с учителем [21]. Наиболее простой вариант такой сети — двухслойная сеть с нелинейной и монотонной функцией активации первого слоя и линейным выходным слоем (см. рис. 1), уравнение которой имеет вид

$$\mathbf{Y}_1 = \boldsymbol{\Phi}(\hat{W}\mathbf{X} + \mathbf{b}_1), \quad y = \hat{U}\mathbf{Y}_1 + b_2. \quad (5)$$

Здесь  $y$  – скалярный сигнал на выходе сети,  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T$  –  $N$ -мерный вектор входного сигнала,  $\mathbf{Y}_1 = [Y_1, Y_2, \dots, Y_M]^T$  –  $M$ -мерный вектор выходного сигнала первого слоя,  $\hat{W}$  и  $\hat{U}$  –  $M \times N$  и  $1 \times M$  матрицы весовых коэффициентов (*синаптических весов*) нейронов первого и второго слоев соответственно, а  $M \times 1$  вектор  $\mathbf{b}_1$  и  $b_2$  – значения их порогов;  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_M(\mathbf{x})]^T$  – векторная сигмоидная функция активации первого слоя в виде гиперболического тангенса, действующая поэлементно на каждую компоненту своего аргумента согласно правилу  $\varphi_i(\mathbf{x}) = \tanh(x_i)$ . Так как ИНС используется в качестве фильтра-предсказателя для системы (2), ее входная размерность ( $N$ ) должна быть равна размерности ансамбля, в то время как промежуточная размерность ( $M$ ) может быть выбрана произвольной и определяется сложностью задачи и точностью аппроксимации. В данном исследовании используется значение  $M = 10$ .

Для идентификации системы (2, 4) будем использовать метод обучения *с учителем*, где в качестве входного сигнала берется вектор  $\mathbf{x}(n)$  в текущий момент времени, а в качестве целевого значения – скалярный сигнал от  $i$ -го узла  $x_i(n+1)$ . Таким образом, целью обучения является предсказание динамики  $i$ -го отображения на один шаг вперед. Суть обучения заключается в оптимизации параметров сети, минимизирующей целевую функцию  $\Phi(\hat{W}, \mathbf{b}_1, \hat{U}, b_2)$ . В качестве последней выбирается, как правило, средний квадрат ошибок предсказания  $\varepsilon(n) = y(n) - x_i(n+1)$ :

$$\Phi_{\text{ош}} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K \varepsilon^2(n), \quad (6)$$

где  $K \gg 1$  – число обучающих векторов, то есть длительность наблюдения за динамикой ансамбля.

При успешном исходе обучения, то есть при  $\Phi_{\text{ош}} \simeq 0$ , нейронная сеть правильно предсказывает динамику соответствующего ( $i$ -го) отображения ансамбля по предыдущим данным, полученным от всех отображений. Означает ли это, что структура связей внутри нейронных слоев следует структуре связей между осцилляторами в ансамбле? Как будет показано далее, такого соответствия не наблюдается. Причина заключается в том, что используемая при обучении целевая функция ошибок (6) оценивает лишь точность аппроксимации системы (2, 4), однако никак не связана со структурой самой нейронной сети. Для того чтобы ИНС при обучении подстраивалась под структуру ансамбля, необходимо дополнительно к существующей цели обучения – уменьшению ошибок предсказания – потребовать также и одновременного упрощения структуры самой нейронной сети, то есть удаления из нее («обнуления») ненужных для успешной аппроксимации синаптических коэффициентов. Для решения этой задачи, следуя рекомендациям работы [26], добавим к целевой функции (6) «штраф за сложность», представляющий собой сумму квадратов синаптических коэффициентов всей сети:

$$\Phi_{\text{шс}} = \sum_{k=1}^2 \sum_{ij} W_{ij,k}^2, \quad (7)$$

где  $k$  – номер слоя,  $i, j$  – номера строк и столбцов соответствующих матриц. Новая целевая функция будет представлять собой взвешенную сумму (6) и (7):

$$\Phi = \Phi_{\text{ош}} + r\Phi_{\text{шс}}, \quad (8)$$

где весовой коэффициент  $r \geq 0$  называется *коэффициентом регуляризации* (КР). КР определяет соотношение между обеими целями обучения: умением предсказывать динамику ансамбля и уменьшением требующихся для этого синаптических коэффициентов ИНС.

Таким образом, метод диагностирования структуры связей ансамбля отображений заключается в следующем:

1. Создается ИНС, структура которой изображена на рис. 1, со входной размерностью, равной числу элементов ансамбля  $N$ , и числом нейронов скрытого слоя  $M = 10$ .
2. Коэффициенты сети инициализируются случайными значениями, равномерно выбираемыми из интервала  $[-1, 1]$ .
3. Для обучения ИНС формируется обучающее множество из  $K = 5000$  векторов  $\{\mathbf{X}^{(n)}\}_{n=0}^{K-1}$ , каждый из которых представляет собой отображение всего ансамбля в  $n$ -й момент времени:  $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}(n)$ .
4. Формируется множество целевых значений  $\{y_i^{(n)}\}_{n=0}^{K-1}$ , т.ч.  $y_i^{(n)} = x_i(n+1)$ .
5. Проводится обучение сети с регуляризацией, основанной на целевой функции (8). Обучение может проводиться при помощи метода обратного распространения ошибки с использованием градиентных методов. В работе для более быстрой сходимости использовался квазиньютонов алгоритм, относящийся к методам второго порядка. Значения рабочих параметров алгоритма выбирались следующими: минимальное значение целевой функции  $\Phi_{\min} = 10^{-6}$ ; минимальное значение модуля градиента целевой функции  $|\nabla\Phi|_{\min} = 10^{-6}$ ; максимальное число эпох обучения составляло 3000.
6. Для идентификации связей используется матрица синаптических коэффициентов первого слоя  $\hat{W}$ , столбцы которой соответствуют номерам входов сети (то есть номерам осцилляторов ансамбля). Для количественного определения степени влияния  $j$ -го осциллятора на предсказание динамики  $i$ -го рассчитывается среднеквадратичное значение коэффициентов  $j$ -го столбца

$$w_{ij} = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{k=1}^M W_{kj}^2},$$

которое затем нормируется на сумму таких значений для всех столбцов:

$$S_{ij} = \frac{w_{ij}}{\sum_{l=1}^N w_{il}}. \quad (9)$$

Полученные величины  $S_{ij}$  будем называть *коэффициентами влияния*  $j$ -го узла на  $i$ -й, а составленную из них матрицу  $\hat{S}$  — *матрицей влияния*. Последняя будет использоваться для выявления структуры связей ансамбля.

### 3. Определение структуры связей ансамбля логистических отображений

Используя описанный в предыдущем разделе алгоритм, оценим структуру связей в ансамбле (4), постепенно усложняя задачу.

**3.1. Два отображения с однонаправленной связью.** Рассмотрим сначала простейший случай — два отображения с однонаправленной связью

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f(x_1(n)) \\ x_2(n+1) &= f(x_2(n)) + \gamma(f(x_1(n)) - f(x_2(n))). \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица связей для (10) имеет вид

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}. \quad (11)$$

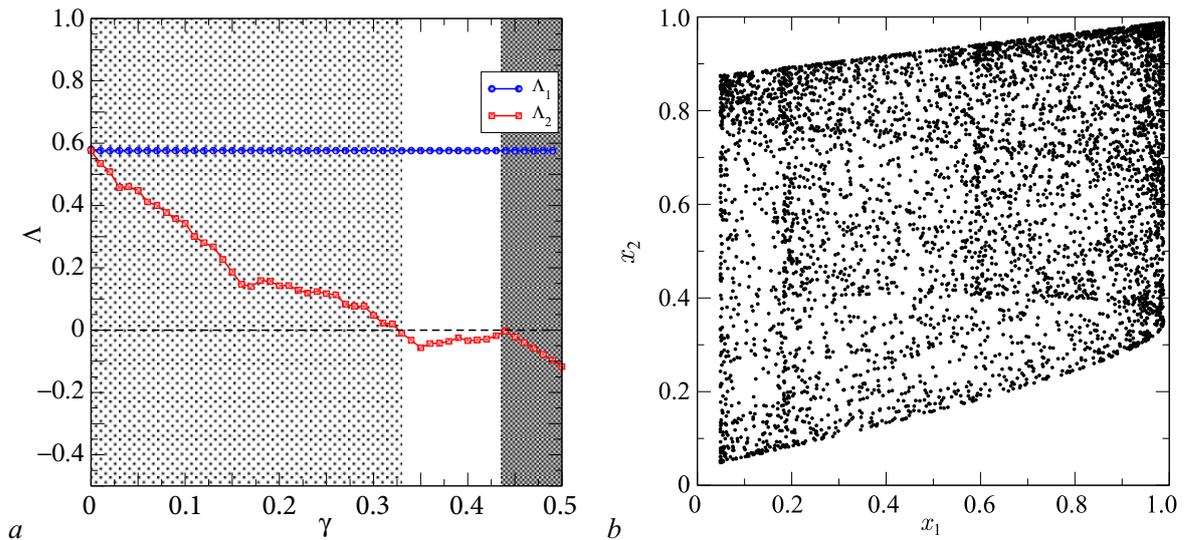


Рис. 2. Динамика системы (10) при  $\alpha = 3.95$ :  $a$  — графики показателей Ляпунова в зависимости от  $\gamma$ ;  $b$  — фазовый портрет при  $\gamma = 0.12$  (цвет онлайн)

Fig. 2. System dynamics (10) at  $\alpha = 3.95$ :  $a$  — plots of Lyapunov exponents in dependence of  $\gamma$ ;  $b$  — phase portrait at  $\gamma = 0.12$  (color online)

При выбранном параметре  $\alpha = 3.95$  ансамбль демонстрирует режим развитого хаоса во всем рассматриваемом интервале  $0 \leq \gamma \leq 0.5$ , что подтверждается значениями показателей Ляпунова (см. рис. 2,  $a$ ). При этом в области  $0 \leq \gamma < 0.33$  (отмечена светло-серым цветом) наблюдается режим гиперхаоса, а при  $\gamma > 0.436$  — режим полной хаотической синхронизации (отмечена серым цветом).

Выберем значение  $\gamma = 0.12$ , соответствующее несинхронному хаотическому режиму, фазовый портрет которого изображен на рис. 2,  $b$ , и проведем обучение ИНС предсказанию динамики первого осциллятора. Сначала проведем обучение без регуляризации, то есть при  $r = 0$ . Обучение сети проходит успешно, о чем свидетельствует малость среднеквадратичной ошибки  $\Phi_{\text{ош}} < 10^{-6}$ . Полученные в результате обучения значения синаптических коэффициентов первого и второго слоев ИНС отображены в табл. 1а.

Для анализа связанности будем использовать матрицу коэффициентов первого слоя, то есть векторы  $\mathbf{W}_1$  и  $\mathbf{W}_2$ . Из табл. 1а видно, что они не соответствуют матрице связей (11), поскольку значения коэффициентов второго столбца ( $\mathbf{W}_2$ ), определяющих влияние второго входа сети на выходной сигнал, отнюдь не малы, а сравнимы по величине с коэффициентами первого столбца ( $\mathbf{W}_1$ ): среднеквадратичные значения коэффициентов для обоих входов равны 3.12 и 2.36 соответственно. Аналогичные результаты получаются при обучении ИНС предсказанию динамики второго отображения (см. табл. 1б). В этом случае среднеквадратичные значения коэффициентов для обоих входов оказываются почти равны: 2.68 и 2.62. Таким образом, при отсутствии регуляризации мы не видим существенной разницы между значениями коэффициентов  $\mathbf{W}_1$  и  $\mathbf{W}_2$ . Это означает, что ИНС не подстраивает собственную структуру связей под структуру ансамбля и ее нельзя использовать для оценки последней.

Рассмотрим теперь обучение ИНС с регуляризацией. Выберем достаточно малое значение КР,  $r = 10^{-4}$ , и проведем обучение сети заново. Полученные новые значения синаптических коэффициентов обученной ИНС для первого и второго отображений представлены в табл. 2а и 2б соответственно. Рассмотрим табл. 2а. Здесь коэффициенты первого и второго столбцов различаются на два порядка: для первого слоя средний квадрат коэффициентов составляет 0.99,

Таблица 1. Матрицы синаптических коэффициентов первого ( $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ ) и второго ( $\mathbf{U}_1^{(T)}$ ) слоев ИНС, обученных предсказанию динамики первого отображения (а) и второго отображения (б); параметр регуляризации  $r = 0$

Table 1. Matrices of synaptic coefficients of the first ( $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ ) and second ( $\mathbf{U}_1^{(T)}$ ) ANN layers trained to predict the dynamics of the first (a) and the second maps (b); the regularization parameter  $r = 0$

|   | $\mathbf{W}_1$ | $\mathbf{W}_2$ | $\mathbf{U}_1^{(T)}$ |   | $\mathbf{W}_1$ | $\mathbf{W}_2$ | $\mathbf{U}_1^{(T)}$ |
|---|----------------|----------------|----------------------|---|----------------|----------------|----------------------|
| a | -2.0798        | 0.0027         | 2.1324               | b | 0.1227         | -2.1740        | 1.6062               |
|   | 2.4799         | -3.4474        | 0.2769               |   | 2.3330         | 1.0260         | -0.2417              |
|   | -0.8994        | 4.3298         | -0.2313              |   | -3.3696        | -1.4181        | -0.0895              |
|   | 2.6254         | 0.0041         | 0.9538               |   | -0.6316        | 4.2700         | -2.6671              |
|   | -3.8335        | -1.8255        | -0.0099              |   | 0.1671         | -2.4699        | -1.1406              |
|   | -4.4584        | 0.0720         | -1.2758              |   | -2.8242        | -3.2945        | -0.5918              |
|   | -4.2626        | -1.1638        | -0.1892              |   | -3.025         | -2.0144        | -0.7058              |
|   | -2.8823        | -3.3587        | -0.0315              |   | 4.197          | 1.4731         | -0.0585              |
|   | 3.5911         | -2.4527        | 0.0782               |   | 3.9470         | 1.9978         | 0.1933               |
|   | 2.3295         | -1.7919        | -2.4551              |   | 2.0082         | 3.9453         | 0.4832               |

Таблица 2. Матрицы синаптических коэффициентов первого ( $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ ) и второго ( $\mathbf{U}_1^{(T)}$ ) слоев ИНС, обученных предсказанию динамики первого отображения (а) и второго отображения (б); параметр регуляризации  $r = 0.0001$

Table 2. Matrices of synaptic coefficients of the first ( $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ ) and second ( $\mathbf{U}_1^{(T)}$ ) ANN layers trained to predict the dynamics of the first (a) and the second map (b); the regularization parameter  $r = 0.0001$

|   | $\mathbf{W}_1$ | $\mathbf{W}_2$ | $\mathbf{U}_1^{(T)}$ |   | $\mathbf{W}_1$ | $\mathbf{W}_2$ | $\mathbf{U}_1^{(T)}$ |
|---|----------------|----------------|----------------------|---|----------------|----------------|----------------------|
| a | 0.0285         | -0.0023        | -0.3762              | b | 0.2392         | 0.0040         | -0.5196              |
|   | 0.0298         | 0.0097         | -0.1169              |   | -0.2426        | 0.0160         | 0.5004               |
|   | 2.1769         | -0.0007        | -1.8684              |   | 0.2493         | -0.0322        | -0.6014              |
|   | 0.0065         | -0.0068        | -0.3424              |   | 0.0018         | -2.0389        | 1.7979               |
|   | -0.0279        | 0.0041         | 0.2610               |   | 0.0029         | -2.1686        | -1.4956              |
|   | -2.2665        | -0.0008        | -1.6906              |   | -0.2423        | 0.0182         | 0.5939               |
|   | -0.0241        | -0.0096        | 0.3830               |   | -0.2463        | 0.0208         | 0.4664               |
|   | -0.0218        | 0.0190         | 0.3879               |   | 1.3376         | 0.0094         | 0.8936               |
|   | -0.0323        | -0.0087        | 0.4603               |   | 0.2419         | -0.0103        | -0.4914              |
|   | 0.0299         | 0.0099         | -0.4659              |   | 0.2449         | -0.0157        | -0.4937              |

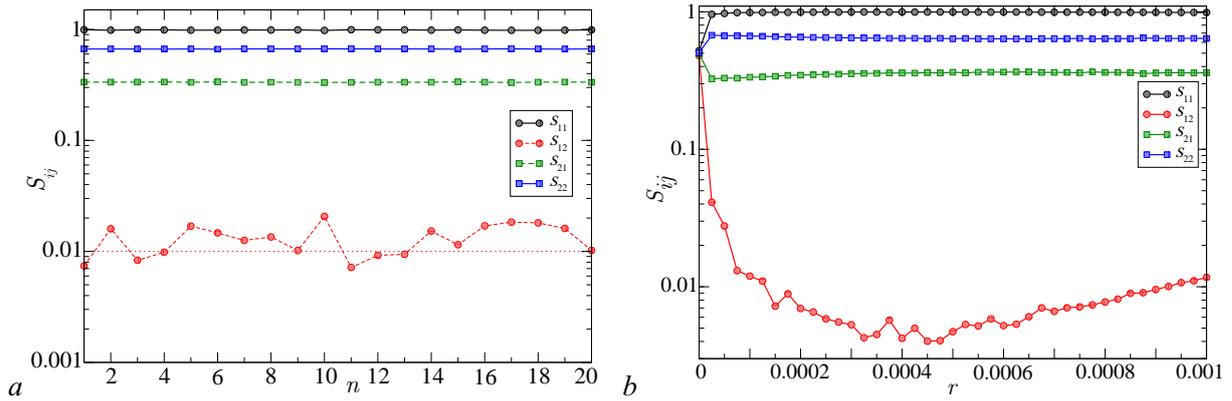


Рис. 3. Зависимость коэффициентов влияния  $S_{ij}$  от номера попытки обучения  $n$  (a) и от параметра регуляризации  $r$  (b) (цвет онлайн)

Fig. 3. The dependence of the influence coefficients  $S_{ij}$  on the number of the training attempt  $n$  (a) and on the regularization parameter (b) (color online)

тогда как для второго только 0.009. По величинам коэффициентов  $\mathbf{W}_2$  можно сделать вывод о том, что влияние второго отображения на динамику первого либо очень мало, либо отсутствует вовсе. При обучении ИНС предсказанию динамики второго отображения различие в величинах коэффициентов  $\mathbf{W}_1$  и  $\mathbf{W}_2$ , как видно из табл. 2b, не столь существенно. Полученные результаты воспроизводятся и при повторных обучении, о чем свидетельствует представленная на рис. 3, a серия коэффициентов  $S_{ij}$ , полученных по двадцати отдельным обучением. В ходе каждого из испытаний нейронная сеть заново инициализировалась, после чего происходило ее повторное обучение на том же обучающем множестве. Из графиков видно, что (a) результаты повторяются с точностью порядка процента; (б) влияние второго осциллятора на динамику первого ( $S_{12}$ ) во всех случаях остается около одного процента, тогда как влияние первого на второй ( $S_{21}$ ) составляет около 34%.

Оценим влияние коэффициента регуляризации на величины  $S_{ij}$ . Для этого проведем обучение ИНС при разных значениях  $r$  и построим графики зависимостей  $S_{ij}(r)$ . Результаты расчетов приведены на рис. 3, b в логарифмическом по оси ординат масштабе. Их анализ удобнее проводить на примере  $S_{12}$ , так как точным значением для него является нулевое. Из проведенных расчетов следует, что при  $r \in [0.0001, 0.001]$  значение коэффициента  $S_{12}$  не выходит за пределы одного процента. Зависимость  $S_{12}(r)$  достигает минимума при  $r \simeq 0.00045$ , составляя здесь около 0.5 процента. Значения остальных коэффициентов влияния при  $r > 0.000025$  почти не меняются и в рассмотренном диапазоне принимают значения  $S_{11} \simeq 1$ ,  $S_{22} \simeq 0.64$ ,  $S_{21} \simeq 0.36$ . Исходя из анализа, можно заключить, что любые значения КР в интервале от 0.0001 до 0.001

являются допустимыми для расчета коэффициентов влияния. В дальнейших расчетах мы будем использовать  $r = 0.0003$ .

Таблица 3. Матрица  $\hat{S}$  для системы (10), полученная по итогам обучения ИНС с параметром регуляризации  $r = 0.0003$

Table 3. The matrix  $\hat{S}$  for system (10), obtained from the results of training the ANN with the regularization parameter  $r = 0.0003$

|       |       |
|-------|-------|
| 0.996 | 0.004 |
| 0.36  | 0.64  |

Таким образом, процедура обучения ИНС с регуляризацией позволяет получить матрицу коэффициентов влияния, представленную в табл. 3, которая качественно соответствует матрице связей ансамбля (11). Что касается количественного соответствия, то оно будет рассмотрено далее.

#### 4. Сравнение решетки ВКА с моделью среднего поля

**4.1. Ансамбль из шести отображений.** Рассмотрим теперь аналогичную по структуре систему, но большей размерности — ансамбль из шести одинаково связанных отображений:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f(x_1(n)), \\ x_i(n+1) &= f(x_i(n)) + \gamma(f(x_{i-1}(n)) - f(x_i(n))), \\ i &= 2 \dots 6 \end{aligned} \quad (12)$$

с матрицей связей

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & 1 - \gamma & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \gamma & 1 - \gamma \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Динамика данного ансамбля схожа с динамикой двух отображений. При выбранном  $\alpha$  в нем наблюдается режим развитого временного хаоса, который при  $\gamma \geq 0.436$  становится синхронным. Подтверждением служат графики характеристических показателей Ляпунова, приведенные на рис. 4.

Из их сопоставления с графиками на рис. 2, а хорошо видно сходство в поведении обеих систем.

Выберем то же, что и для системы (10), значение параметра связи  $\gamma = 0.12$  и проведем обучение ИНС при  $r = 0.0003$ . Полученные в результате обучения коэффициенты влияния

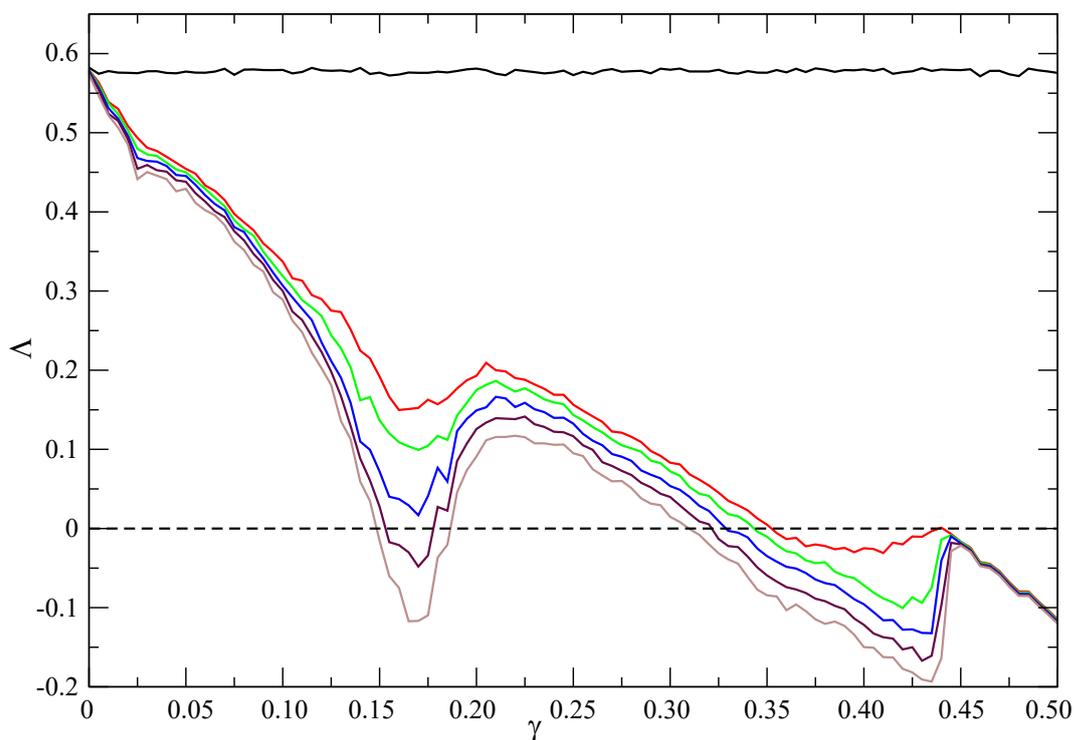


Рис. 4. Зависимость характеристических показателей Ляпунова от  $\gamma$  для системы (12) (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of Lyapunov exponents on  $\gamma$  for system (12) (color online)

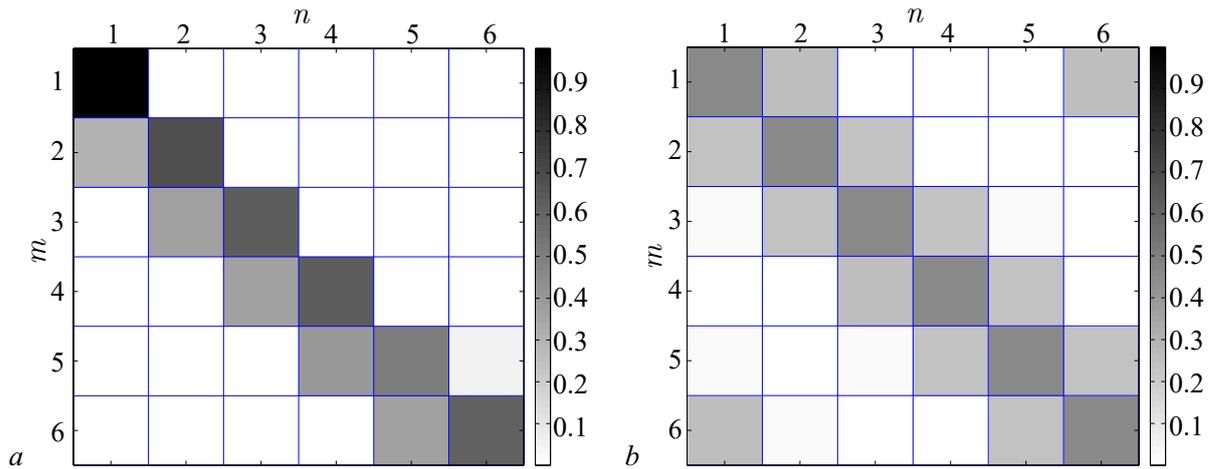


Рис. 5. Визуальное представление матрицы влияния  $\hat{S}$  в виде карты для ансамбля (12) (a) и ансамбля (14) (b)  
 Fig. 5. Visual representation of  $\hat{S}$  influence matrix as a map for ensemble (12) (a) and ensemble (14) (b)

Таблица 4. Матрица  $\hat{S}$  для системы (12), полученная по итогам обучения ИНС с параметром регуляризации  $r = 0.0003$   
 Table 4. Matrix  $\hat{S}$  for system (12), obtained from the results of training the ANN with the regularization parameter  $r = 0.0003$

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.9617 | 0.0090 | 0.0067 | 0.0073 | 0.0079 | 0.0073 |
| 0.3256 | 0.6264 | 0.0117 | 0.0102 | 0.0154 | 0.0108 |
| 0.0055 | 0.3350 | 0.6245 | 0.0097 | 0.014  | 0.0113 |
| 0.0053 | 0.0068 | 0.3426 | 0.6283 | 0.0083 | 0.0087 |
| 0.0077 | 0.0096 | 0.0081 | 0.3423 | 0.6251 | 0.0071 |
| 0.0080 | 0.0083 | 0.0124 | 0.0074 | 0.3404 | 0.6235 |

$S_{ij}$  приведены в табл. 4 и представлены в виде карты на рис. 5, a. Как видно из рисунка, структура матрицы  $\hat{S}$  для ансамбля (12), так же, как и для более простой системы (10), качественно соответствует матрице  $\hat{M}$ . Так, белые клетки на карте 5, a соответствуют нулевому, черная — единичному, а серые — остальным коэффициентам матрицы (13). Таким образом, увеличение размерности ансамбля не привело к ухудшению работы метода, который по-прежнему уверенно распознает структуру связей системы.

**4.2. Ансамбль с симметричными связями.** Перейдем теперь к случаю, когда у элемента ансамбля может быть несколько связей. Одной из таких систем является кольцо из шести осцилляторов с симметричными связями:

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \gamma(f(x_{i-1}(n)) + f(x_{i+1}(n)) - 2f(x_i(n))) \quad (14)$$

$$i = 1 \dots 6.$$

Матрица связей кольца имеет вид

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & \dots & \gamma \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ \gamma & 0 & \gamma & 1 - 2\gamma \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Система (14) демонстрирует гораздо большее разнообразие режимов, чем ансамбли с однонаправленными связями. В частности, при выбранном  $\alpha$  здесь, в зависимости от интенсивности связей, можно наблюдать как хаотические, так и регулярные режимы. Подтверждением могут

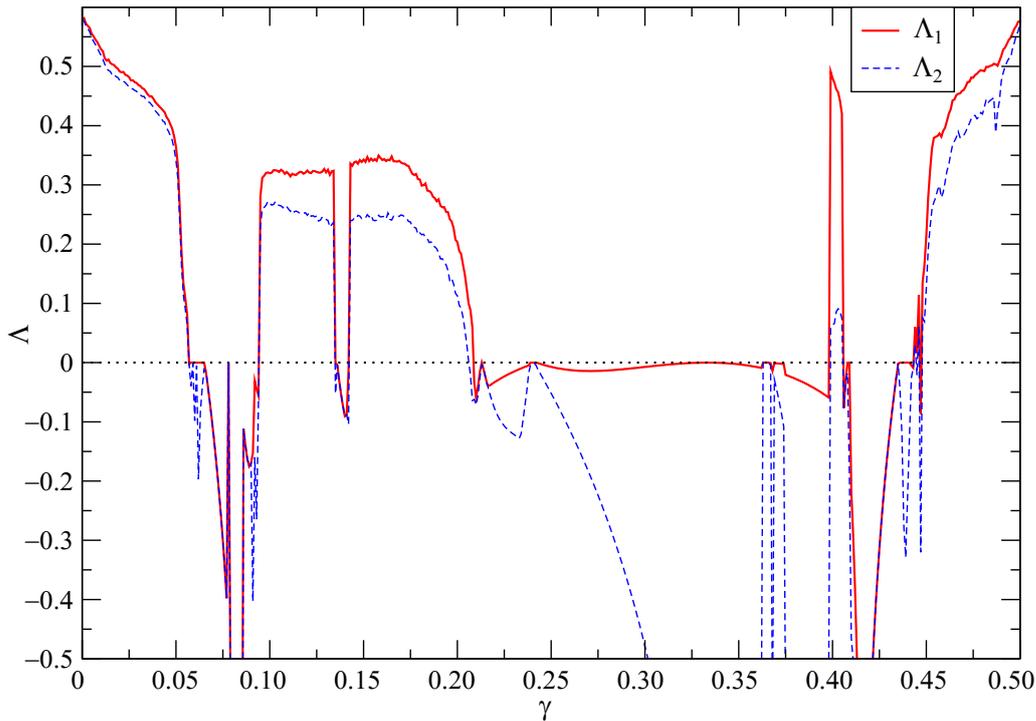


Рис. 6. Зависимость двух старших характеристических показателей Ляпунова от  $\gamma$  в системе (14) (цвет онлайн)  
 Fig. 6. The dependence of the two largest Lyapunov exponents from  $\gamma$  in system (14) (color online)

служить графики двух старших показателей Ляпунова (см. рис. 6), которые были рассчитаны для  $\alpha = 3.95$ . Выбранное ранее значение  $\gamma = 0.12$  здесь также соответствует режиму хаотических колебаний, поэтому может использоваться при анализе связанности. Кроме того, при небольших  $\gamma$  ансамбль (14) демонстрирует мультистабильность, поэтому при проведении исследований, помимо параметров, требуется контролировать и начальные условия. Последние были выбраны в малой окрестности симметричного подпространства:  $x_0 = 0.1 + 0.001\xi$ , где  $\xi$  — случайный вектор единичной длины.

Проведем расчет коэффициентов влияния согласно той же методике, что и ранее. В результате были получены коэффициенты  $S_{ij}$ , которые отображены в табл. 5, а также представлены на рис. 5, b в виде карты. Из сравнения полученной матрицы  $\hat{S}$  с матрицей связей  $\hat{M}$  (15) хорошо видно их качественное соответствие.

Таким образом, ИНС, обучаемые предсказанию динамики ансамбля хаотических отображений, подстраивают, при условии регуляризации, значения синаптических коэффициентов под структуру связей ансамбля, позволяя тем самым определить последнюю. Метод работает для небольших ансамблей как с однонаправленными, так и с взаимными связями.

Таблица 5. Матрица  $\hat{S}$  для системы (14), полученная по итогам обучения ИНС с параметром регуляризации  $r = 0.0003$

Table 5. Matrix  $\hat{S}$  for system (14), obtained from the ANN training with the regularization parameter  $r = 0.0003$

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.4628 | 0.2506 | 0.0123 | 0.0085 | 0.0150 | 0.2509 |
| 0.2488 | 0.4654 | 0.2494 | 0.0118 | 0.0093 | 0.0152 |
| 0.0182 | 0.2437 | 0.4644 | 0.2447 | 0.0166 | 0.0124 |
| 0.0088 | 0.0133 | 0.2509 | 0.4645 | 0.2495 | 0.0130 |
| 0.0176 | 0.0099 | 0.0165 | 0.2486 | 0.4595 | 0.2480 |
| 0.2497 | 0.0164 | 0.0090 | 0.0152 | 0.2464 | 0.4633 |

## 5. Оценка значений коэффициента связи

В предыдущих разделах рассматривался вопрос об определении топологии сети. Может ли предлагаемый метод также использоваться и для оценки величины коэффициента связи? Для ответа на этот вопрос проведем расчет коэффициентов влияния в зависимости от параметра связи  $\gamma$  и проанализируем полученные зависимости.

Рассмотрим сначала простейший случай — систему двух отображений (10) — и рассчитаем для нее графики  $S_{ij}(\gamma)$ . Результаты расчетов представлены на рис. 7, а. Проанализируем полученные зависимости. Прежде всего, заметим, что во всем интервале от  $\gamma \simeq 0$ , вплоть до значения  $\gamma \simeq 0.436$ , величины коэффициентов  $S_{11}$  и  $S_{12}$  близки к значениям единица и ноль соответственно. Таким образом, в этом интервале  $S_{11} \simeq M_{11}$  и  $S_{12} \simeq M_{12}$ . При  $\gamma \simeq 0.436$  в системе (10) происходит переход к режиму полной синхронизации хаоса, одновременно с которым коэффициенты влияния, как видно из графиков, скачкообразно меняют свои значения до  $S_{11} \simeq S_{12} \simeq 0.5$ . Соответственно, при переходе в зону хаотической синхронизации, которая на рис. 7, а отмечена серым цветом, алгоритм перестает работать.

Перейдем теперь к двум оставшимся коэффициентам. Поскольку они связаны соотношением  $S_{21} + S_{22} = 1$ , ограничимся анализом одного из них —  $S_{21}$ . Из рис. 7, а хорошо видно, что в области несинхронного хаоса  $S_{21}(\gamma)$  представляет собой плавную монотонно возрастающую функцию связи, форма которой напоминает степенную зависимость  $S_{21} \sim A\gamma^p$  при  $p < 1$ . Для проверки данной гипотезы построим график  $S_{21}(\gamma)$  в логарифмическом масштабе (рис. 7, б), при котором степенные функции выглядят как прямые линии. Действительно, из вида графика можно заключить, что в диапазоне  $0.01 < \gamma < 0.436$  зависимость  $S_{21}(\gamma)$  близка к степенной функции. Подбор коэффициентов  $A$  и  $p$ , осуществленный по методу наименьших квадратов, приводит к соотношению

$$S_{21} \simeq 0.57\sqrt[4]{\gamma}, \quad (16)$$

которое отображено на рис. 7, а и 7, б пунктирной линией. Необходимо отметить, что само наличие однозначной взаимосвязи между  $S_{21}$  и  $\gamma$  выглядит достаточно тривиальным. Однако ее простой вид представляется интересным результатом, причины которого на данный момент не вполне ясны. Тем не менее для рассматриваемой системы выражение (16) позволяет производить оценку коэффициента связи исходя из значений синаптических коэффициентов обученной нейронной сети.

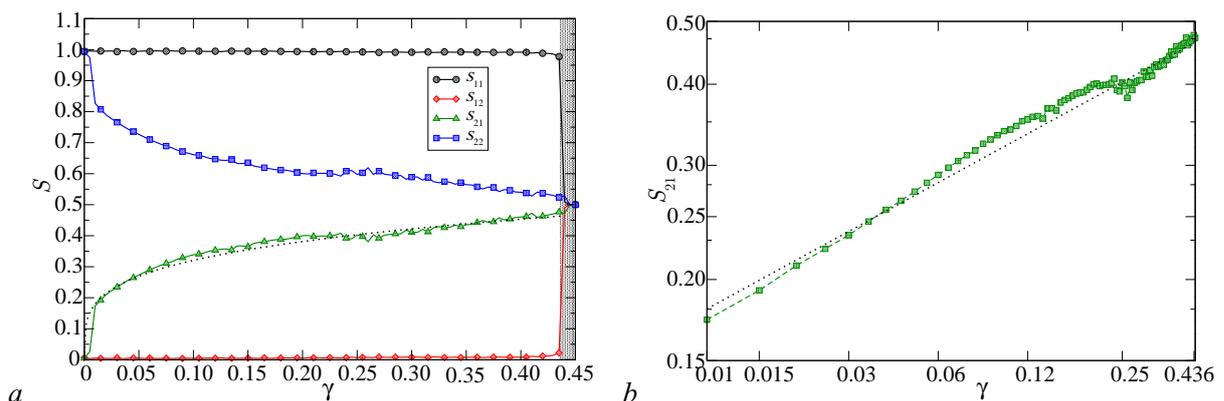


Рис. 7. Зависимость коэффициентов влияния от  $\gamma$  для системы (10) в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабах (цвет онлайн)

Fig. 7. The dependence of the coefficients of influence on  $\gamma$  for the system (10) in linear (a) and logarithmic (b) scales (color online)

Рассмотрим теперь случай ансамбля более высокой размерности (13), построив те же графики, что и в предыдущем случае. Результаты расчетов приведены на рис. 8, *a*, где для сравнения штриховыми линиями приведены графики для двумерной системы. Как видно из сопоставления, налицо существенное сходство зависимостей  $S_{ij}(\gamma)$  наряду с небольшими отличиями. Так, при  $\gamma \lesssim 0.13$  график  $S_{21}(\gamma)$  почти совпадает с аппроксимирующей кривой (16), тогда как в диапазоне  $0.15 \lesssim \gamma < 0.436$  отстает от нее на величину  $\sim 0.1$ . Причина этого различия не вполне ясна, можно лишь предположить, что оно связано с изменением структуры хаотического аттрактора, которое происходит при  $\gamma \simeq 0.15$ ; последнее можно заметить по резкому уменьшению величины трансверсальных показателей Ляпунова (см. рис. 4). Если эта гипотеза верна, то она означает, что точность оценки величины связей должна быть связана со степенью хаотичности динамики подсистем и ухудшаться в случаях, когда колебания отображений становятся более регулярными.

Перейдем теперь к оценке коэффициентов связи для ансамбля с симметричными связями (14), которая является существенно более трудной. Помимо большего числа связей, основным препятствием является богатство динамики системы, заключающееся в многообразии колебательных режимов, сменяющих друг друга при изменении  $\gamma$ , мультистабильности и существовании диссипативных структур [30].

Проведем измерение  $S_{ij}(\gamma)$  при том же  $\alpha = 3.95$ . Поскольку система (14) обладает трансляционной симметрией, все строки матрицы  $\hat{M}$  отличаются лишь циклическим сдвигом. Поэтому достаточно ограничиться измерением коэффициентов только первой строки. Полученные в результате расчетов графики  $S_{1i}(\gamma)$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) приведены на рис. 8, *b*. Их вид свидетельствует о существенной неоднородности зависимостей, качественно различающихся в разных диапазонах параметра связи.

Проведем анализ графиков на рис. 8, *b*. Прежде всего, разделим интервал на зоны с хаотическим и регулярным поведением, для чего используем характеристические показатели Ляпунова (см. рис. 6). Выявленные таким образом интервалы регулярной динамики отмечены на рис. 8, *b* серым цветом (II, IV, VII и IX). Очевидно, что в этих зонах измерение направленности используемым методом невозможно. Однако и в хаотических областях качественное соответствие между коэффициентами матриц  $\hat{S}$  и  $\hat{M}$  наблюдается не везде. Критерием здесь может служить малость «нулевых» коэффициентов  $S_{13}$ ,  $S_{14}$  и  $S_{15}$ . Согласно ему, хорошее соответствие наблюдается в зонах I и III, где величина этих коэффициентов не превосходит 1–2 процента, и несколько

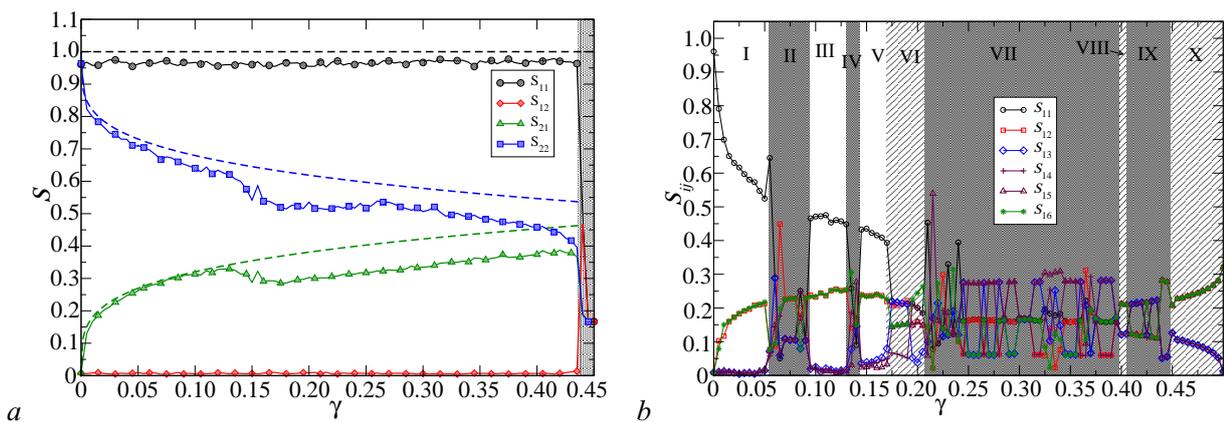


Рис. 8. Графики  $S_{ij}(\gamma)$  для системы (12) (*a*) и системы (14) (*b*) (цвет онлайн)

Fig. 8. Plots  $S_{ij}(\gamma)$  for system (12) (*a*) and system (14) (*b*) (color online)

худшее — в интервале  $V$ , где данные коэффициенты «подрастают» до  $\sim 5$  процентов. В остальных хаотических зонах (отмечены штриховкой) соответствия между коэффициентами влияния и матрицей связи  $\hat{M}$  не наблюдается вовсе. Очевидно, в этих интервалах метод не работает. Причина этому, вероятно, кроется в особенностях динамики системы, а именно, в пространственной неоднородности хаотических колебаний и перемежаемости, наблюдающихся при больших значениях симметричной диффузионной связи, что было отмечено в работе [30]. Проверка этой гипотезы требует дополнительных исследований.

### Заключение

Рассмотрен метод выявления структуры связей в сети хаотических отображений, использующий аппарат искусственных нейронных сетей, предложенный ранее в статье [26]. Он заключается в обучении ИНС предсказанию динамики ансамбля с одновременной регуляризацией, в ходе которой нейронная сеть подстраивает собственную структуру синаптических связей под структуру связей ансамбля. На основании данного подхода разработан алгоритм, позволяющий оценивать влияние отдельных узлов сети на ее динамику в целом, который был протестирован на примерах небольших ансамблей одномерных хаотических отображений, для которых он продемонстрировал свою эффективность. Помимо определения топологии сети, данный подход позволяет также оценивать и величину коэффициента связи.

Проведенные исследования показали, что применимость метода критически зависит от наблюдаемого колебательного режима. Он хорошо работает для режима развитого пространственно-однородного хаоса, неприменим для регулярных колебаний и режима синхронизации хаоса, а также при формировании в ансамбле пространственных структур.

Эффективность предлагаемого алгоритма для анализа связей между реальными системами требует дополнительного исследования. Она определяется такими факторами, как его чувствительность к шуму, искажения формы сигналов, наличие перекрестных наводок, внешние воздействия, нестационарность и т. п.

### Список литературы

1. *Cremers J., Hübler A.* Construction of differential equations from experimental data // *Zeitschrift für Naturforschung A.* 1987. Vol. 42, no. 8. P. 797–802. DOI: 10.1515/zna-1987-0805.
2. *Crutchfield J. P., McNamara B. S.* Equations of motion from a data series // *Complex Systems.* 1987. Vol. 1, no. 3. P. 417–452.
3. *Павлов А. Н., Янсон Н. Б.* Применение методики реконструкции математической модели к кардиограмме // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1997. Т. 5, № 1. С. 93–108.
4. *Anishchenko V. S., Pavlov A. N.* Global reconstruction in application to multichannel communication // *Physical Review E.* 1998. Vol. 57, no. 2. P. 2455–2457. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2455.
5. *Mukhin D. N., Feigin A. M., Loskutov E. M., Molkov Y. I.* Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series // *Physical Review E.* 2006. Vol. 73, no. 3. P. 036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
6. *Безручко Б. П., Смирнов Д. А., Зборовский А. В., Сидак Е. В., Иванов Р. Н., Беспятов А. Б.* Реконструкция по временному ряду и задача диагностики // *Технологии живых систем.* 2007. Т. 4, № 3. С. 49–56. EDN: ICFWEN
7. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence (Lecture Notes in Mathematics).* 1980. Vol. 898. P. 366–381. DOI: 10.1007/BFB0091924.
8. *Granger C. W. J.* Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica.* 1969. Vol. 37, no. 3. P. 424–438. DOI: 10.2307/1912791.

9. *Granger C. W. J.* Testing for causality. A personal viewpoint // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1980. Vol. 2. P. 329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
10. *Сысоев И. В.* Диагностика связанности по хаотическим сигналам нелинейных систем: решение обратных задач. Саратов: КУБиК, 2019. 46 с. EDN: UJVGGO
11. *Hesse R., Molle E., Arnold M., Schack B.* The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies // *Journal of Neuroscience Methods*. 2003. Vol. 124, no. 1. P. 27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
12. *Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А.* Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *Успехи физических наук*. 2008. Т. 178, № 3. С. 323–329. DOI: 10.3367/UFN.0178.200803h.0323.
13. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Диагностика причинно-следственной связи солнечной активности и глобальной приповерхностной температуры Земли // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2008. Т. 44, № 3. С. 283–293. DOI: 10.1134/S0001433808030018.
14. *Мохов И. И., Смирнов Д. А.* Эмпирические оценки воздействия естественных и антропогенных факторов на глобальную приповерхностную температуру // *Доклады Академии наук*. 2009. Т. 426, № 5. С. 679–684. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.
15. *Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И.* Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2010. Т. 18, № 4. С. 81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
16. *Сысоева М. В., Сысоев И. В.* Математическое моделирование динамики энцефалограммы во время эпилептического припадка // *Письма в ЖТФ*. 2012. Т. 38, № 3. С. 103–110. EDN: RCVQZD.
17. *Sysoev I. V., Sysoeva M. V.* Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015. Vol. 309. P. 9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
18. *Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M.* Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality // *Physics Letters A*. 2004. Vol. 324, no. 1. P. 26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
19. *Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S.* Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Physical Review E*. 2006. Vol. 73, no. 6. P. 066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
20. *Корнилов М. В., Сысоев И. В.* Реконструкция архитектуры связей в цепочке из трех однонаправленно связанных систем методом причинности по Грейнджеру // *Письма в ЖТФ*. 2018. Т. 44, no. 10. С. 86–95. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.
21. *Хайкин С.* Нейронные сети. М: Вильямс, 2006. 1104 с.
22. *Галушкин А. И.* Нейронные сети. Основы теории. Телеком, 2012. 496 с. EDN: RBAWYZ
23. *de Oliveira K. A., Vannucci A., Da Silva E. C.* Using artificial neural networks to forecast chaotic time series // *Physica A*. 2000. Vol. 284, no. 1–4. P. 393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
24. *Антипов О. И., Неганов В. А.* Прогнозирование и фрактальный анализ хаотических процессов дискретно-нелинейных систем с помощью нейронных сетей // *Доклады Академии наук*. 2011. Т. 436, № 1. С. 34–37. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
25. *Шабунин А. В.* Нейронная сеть как предсказатель динамики дискретного отображения // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2014. Т. 22, no. 5. С. 58–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.

26. *Tank A., Covert I., Foti N., Shojaie A., Fox E.* Neural granger causality for nonlinear time series // arXiv preprint arXiv:1802.05842. 2018.
27. *Тихонов А. Н.* О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 163, № 3. С. 591–594.
28. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 69, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
29. *Fujisaka H., Yamada T.* Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. The mapping approach // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 70, no. 5. P. 1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.
30. *Shabunin A.* Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 7. P. 073132. DOI: 10.1063/5.0054510.

## References

1. Cremers J, Hübler A. Construction of differential equations from experimental data. *Zeitschrift für Naturforschung A*. 1987;42(8):797–802. DOI: 10.1515/zna-1987-0805.
2. Crutchfield JP, McNamara BS. Equations of motion from a data series. *Complex Systems*. 1987;1(3):417–452.
3. Pavlov AN, Yanson NB. Application of reconstruction method to a cardiogram. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 1997;5(1):93–108 (in Russian).
4. Anishchenko VS, Pavlov AN. Global reconstruction in application to multichannel communication. *Physical Review E*. 1998;57(2):2455–2457. DOI: 10.1103/PhysRevE.57.2455.
5. Mukhin DN, Feigin AM, Loskutov EM, Molkov YI. Modified Bayesian approach for the reconstruction of dynamical systems from time series. *Physical Review E*. 2006;73(3):036211. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.036211.
6. Bezruchko BP, Smirnov DA, Zborovsky AV, Sidak EV, Ivanov RN, Bespyatov AB. Reconstruction from time-series and a task of diagnostics. *Technologies of living systems*. 2007;4(3):49–56 (in Russian).
7. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lect. Notes in Math*. 1980;898:366–381. DOI: 10.1007/BFB0091924.
8. Granger CWJ. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. 1969;37(3):424–438. DOI: 10.2307/1912791.
9. Granger CWJ. Testing for causality. A personal viewpoint. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1980;2:329–352. DOI: 10.1016/0165-1889(80)90069-X.
10. Sysoev IV. Diagnostics of connectivity by chaotic signals of nonlinear systems: solving reverse problems. *Saratov: Kubik*; 2019. 46 p. (in Russian).
11. Hesse R, Molle E, Arnold M, Schack B. The use of time-variant EEG Granger causality for inspecting directed interdependencies of neural assemblies. *Journal of Neuroscience Methods*. 2003;124(1):27–44. DOI: 10.1016/S0165-0270(02)00366-7.
12. Bezruchko BP, Ponomarenko VI, Prohorov MD, Smirnov DA, Tass PA. Modeling nonlinear oscillatory systems and diagnostics of coupling between them using chaotic time series analysis: applications in neurophysiology. *Physics-Uspekhi*. 2008;51:304–310. DOI: 10.1070/PU2008v051n03ABEH006494.
13. Mokhov II, Smirnov DA. Diagnostics of a cause-effect relation between solar activity and the Earth's global surface temperature. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2008;44(3): 263–272. DOI: 10.1134/S0001433808030018.
14. Mokhov II, Smirnov DA. Empirical estimates of the influence of natural and anthropogenic factors on the global surface temperature. *Doklady Earth Sciences*. 2009;427(1):798–803. DOI: 10.1134/S1028334X09050201.

15. Sysoev IV, Karavaev AS, Nakonechny PI. Role of model nonlinearity for Granger causality based coupling estimation for pathological tremor. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2010;18(4):81–90. DOI: 10.18500/0869-6632-2010-18-4-81-90.
16. Sysoeva MV, Sysoev IV. Mathematical modeling of encephalogram dynamics during epileptic seizure. *Technical Physics Letters*. 2012;38(2):151–154. DOI: 10.1134/S1063785012020137.
17. Sysoev IV, Sysoeva MV. Detecting changes in coupling with Granger causality method from time series with fast transient processes. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2015;309:9–19. DOI: 10.1016/j.physd.2015.07.005.
18. Chen Y, Rangarajan G, Feng J, Ding M. Analyzing Multiple Nonlinear Time Series with Extended Granger Causality. *Physics Letters A*. 2004;324(1):26–35. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.02.032.
19. Marinazzo D, Pellicoro M, Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series. *Physical Review E*. 2006;73(6):066216. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.066216.
20. Kornilov MV, Sysoev IV. Recovering the Architecture of Links in a Chain of Three Unidirectionally Coupled Systems Using the Granger-Causality Test. *Technical Physics Letters*. 2018;44(5):445–449. DOI: 10.21883/PJTF.2018.10.46103.17201.
21. Haykin S. *Neural Networks*. New Jersey: Prentice Hall; 1999. 938 p.
22. Galushkin AI. *Neural Networks. The theory basics*. Telekom; 2012. 496 p. (in Russian).
23. de Oliveira KA, Vannucci A, Da Silva EC. Using artificial neural networks to forecast chaotic time series. *Physica A*. 2000;284(1–4):393–404. DOI: 10.1016/S0378-4371(00)00215-6.
24. Antipov OI, Neganov VA. Neural network prediction and fractal analysis of the chaotic processes in discrete nonlinear systems. *Doklady Physics*. 2011;56(1):7–9. DOI: 10.1134/S1028335811010034.
25. Shabunin AV. Neural network as a predictor of discrete map dynamics. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2014;22(5):58–72. DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-5-58-72.
26. Tank A, Covert I, Foti N, Shojaie A, Fox E. Neural granger causality for nonlinear time Series. arXiv preprint arXiv:1802.05842. 2018.
27. Tihonov AN. On incorrect linear algebra problems and a stable solution method. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1965;163(3):591–594.
28. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics*. 1983;69(1):32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
29. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. The mapping approach. *Progress of Theoretical Physics*. 1983;70(5):1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.
30. Shabunin A. Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos. *Chaos*. 2021;31(7):073132. DOI: doi.org/10.1063/5.0054510.

*Шабунин Алексей Владимирович* — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук по специальности «Радиофизика» (2007, СГУ). С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 100 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского  
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru  
 ORCID: 0000-0002-3495-9418  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 34839

