

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2022;30(1)

Научная статья

УДК 519.9, 621.372

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-109-124

Селекция пространственных мод в ансамбле хаотических отображений с дальнедействующими связями

А. В. Шабунин

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: shabuninav@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 14.08.2021, принята к публикации 05.10.2021,
опубликована 31.01.2022

Аннотация. Цель настоящего исследования — выявление закономерностей формирования пространственных структур в ансамбле хаотических систем с нелокальными диффузионными связями; влияния на эти структуры волновой характеристики цифрового фильтра, образованного связями между элементами ансамбля. **Методы.** Исследование проводилось посредством численного моделирования ансамбля логистических отображений, расчета типичных колебательных режимов и их спектрального анализа. При этом система связей ансамбля рассматривалась как цифровой фильтр с частотной характеристикой, зависящей от параметров связей. Рассматривалась корреляция между пространственными спектрами и амплитудно-частотной характеристикой фильтра связей и взаимная когерентность колебаний при изменении параметров связи. **Результаты.** Показано, что система связей между хаотическими отображениями ведет себя как волновой фильтр, обладающий селективными свойствами, позволяя существовать пространственным модам с определенными длинами волн и подавляя другие. Селекция пространственных мод происходит на основе волновой характеристики фильтра связей, вид которой определяется радиусом действия и величиной связей между элементами ансамбля. В области сильной связи волновые характеристики для ансамблей с локальными и нелокальными связями качественно отличаются, что ведет для них к принципиально разному поведению. **Обсуждение.** Использование спектральных методов для анализа динамики систем со сложной топологией связи представляется перспективным направлением, в том числе и для исследования синхронизации и мультистабильности в хаотических осцилляторах и отображениях. Обнаруженные закономерности обобщают результаты, известные для ансамблей осцилляторов с локальными связями. Они в значительной части могут быть применены к ансамблям автоколебательных систем с непрерывным временем.

Ключевые слова: пространственно-временной хаос, ансамбли отображений, синхронизация, пространственная фильтрация.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-52-12004.

Для цитирования: Шабунин А. В. Селекция пространственных мод в ансамбле хаотических отображений с дальнедействующими связями // Известия вузов. ПНД. 2022. Т. 30, № 1. С. 109–124.

DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-109-124

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Selection of spatial modes in an ensemble of non-locally coupled chaotic maps

A. V. Shabunin

Saratov State University, Russia

E-mail: ✉shabuninav@info.sgu.ru

Received 14.08.2021, accepted 05.10.2021, published 31.01.2022

Abstract. *Purpose* of this work is to determine regularities of formation of spatial structures in an ensemble of chaotic systems with non-local diffusion couplings and to study how these structures depend on the wave response of the digital filter formed by the ensemble couplings structure. *Methods.* The study was carried out by numerical simulation of an ensemble of logistic maps, calculation of its typical oscillatory regimes and their spectral analysis. The network was considered as a digital filter with a frequency response depending on the coupling parameters. Correlation between the spatial spectra and the amplitude-frequency response of the coupling filter and the mutual coherence of oscillations when the coupling parameters change were considered. *Results.* The system of couplings between chaotic maps behaves like a wave filter with selective properties, allowing spatial modes with certain wavelengths to exist and suppressing others. The selection of spatial modes is based on the wave characteristic of the coupling filter, the type of which is determined by the radius and the magnitude of couplings. At strong coupling the wave characteristics for ensembles with local and non-local couplings are qualitatively different, therefore they demonstrate essentially different behavior. *Discussion.* Using spectral methods for dynamics analysis systems with complex network topologies seems to be a promising approach, especially for research of synchronization and multistability in ensembles of chaotic oscillators and maps. The found regularities generalize the results known for ensembles of maps with local couplings. They also can be applied to ensembles of self-sustained oscillators.

Keywords: spatiotemporal chaos, ensembles of maps, synchronization, spatial filtering.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Foundation for Basic Research and DFG, grant No 20-52-12004.

For citation: Shabunin AV. Selection of spatial modes in an ensemble of non-locally coupled chaotic maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2022;30(1):109–124. DOI: 10.18500/0869-6632-2022-30-1-109-124

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Ансамбли колебательных систем представляют значительный интерес для физики и других естественных наук, поскольку служат моделями пространственно распределенных сред, позволяя выявлять механизмы явлений кооперации, конкуренции и самоорганизации. Особый интерес представляют ансамбли осцилляторов с хаотическим поведением [1, 2] поскольку в подобных системах может наблюдаться широкий круг явлений, например: синхронизация хаотических колебаний [2–6], бегущие волны [7, 8], образование диссипативных пространственных структур [9–11], развитая мультистабильность [12–17].

В последние годы, наряду с изучением ансамблей с локальными связями между узлами, значительный интерес привлекают к себе сети с более сложной топологией. Одним из примеров таких сетей можно считать системы с *дальнодействующими связями* (ДС), когда взаимодействуют не только ближайшие соседи, но и удаленные друг от друга элементы ансамбля. Интерес к ансамблям с ДС подогревается развитием современных инфокоммуникационных технологий, а также исследованиями в области биологии, нейрофизиологии и социологии. Интерес к динамике ансамблей с ДС проявляется также в связи с обнаружением в них особого вида кластерных структур, получивших название *химер* [18–22].

Системы высокой размерности, как правило, демонстрируют большое разнообразие сосуществующих режимов, поэтому их трудно анализировать, используя методы бифуркационного

анализа, применяемые для более простых систем. В таких случаях удобно использовать интегральные характеристики, позволяющие предсказывать типичное поведение ансамбля при стандартных начальных условиях. Одним из таких подходов является спектральный анализ, основанный на расчете временных и пространственных спектров. Переход от временного описания к частотному является традиционным как для физики, так и для техники. Он позволяет, например, диагностировать синхронизацию между осцилляторами ансамбля и количественно оценить ее величину [23]. Для некоторых типов связи (например, диффузионной) использование спектрального метода позволяет определить условия для синхронизации хаотических колебаний в ансамбле в зависимости от величины связей [6].

В данном исследовании мы предлагаем рассматривать связи между осцилляторами сети как пространственный цифровой фильтр, свойства которого характеризуются волновой характеристикой. Ранее метод цифрового фильтра был использован для анализа закономерностей формирования мультистабильности периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями [24] и для анализа пространственных мод в ансамбле с локальными диффузионными связями [25]. В настоящем исследовании мы рассматриваем селекцию пространственных мод в ансамбле с нелокальными связями, находящемся в режиме пространственно-временного хаоса. Такой режим объединяет в своем составе множество метастабильных пространственно-временных состояний и его свойства зависят от связей между элементами ансамбля.

1. Пространственная селекция в ансамблях с дальнедействующей связью

Рассмотрим ансамбль из N отображений с симметричной связью, замкнутый в кольцо

$$x_i(n+1) = F(x_i(n)) + \frac{\gamma}{2L} \sum_{j=-L}^L [F(x_{i+j}(n)) - F(x_i(n))]. \quad (1)$$

Здесь $x_i(n)$ — динамическая переменная, зависящая от дискретного времени n и пространственной координаты i , заданной на отрезке $[1 : N]$; $F(x)$ — функция, задающая динамику одиночного отображения; γ — сила связей между элементами ансамбля, $L = 1, 2, \dots, N/2$ — их максимальное дальнедействие (радиус связей). Вследствие кольцевой топологии сети все операции с нижними индексами выполняются по модулю N .

Система связей в сети (1) представляет собой линейный фильтр, обладающий селективными свойствами. Чтобы убедиться в этом, перепишем уравнение (1) в виде

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j F(x_{i+j}(n)), \quad (2)$$

где $h_0 = 1 - \gamma$, $h_j = \gamma/(2L)$ ($j = \pm 1, \dots, \pm L$) — положительные константы. Формулу (2) можно представить как суперпозицию нелинейного отображения

$$y_i(n) = F(x_i(n))$$

и линейной свертки по пространственной координате

$$x_i(n+1) = \sum_{j=-L}^L h_j y_{i+j}(n).$$

Последнее уравнение совпадает по форме с уравнением линейного цифрового фильтра с импульсной характеристикой \mathbf{h} , действующего на пространственную траекторию \mathbf{y} . Как известно,

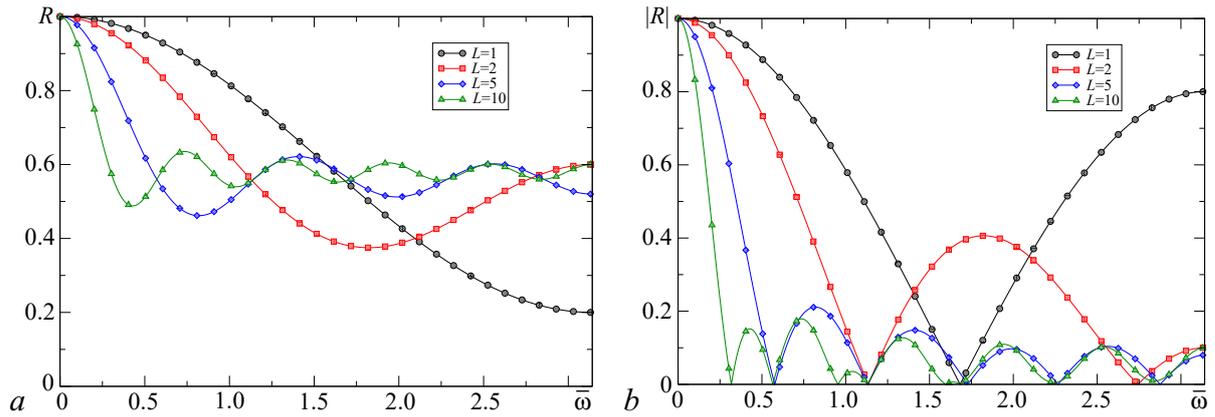


Рис. 1. Графики коэффициента передачи фильтра связей при $\gamma = 0.4$ (a) и его АЧХ при $\gamma = 0.9$ (b)

Fig. 1. Plots of the frequency response of the coupling filter at $\gamma = 0.4$ (a) and its amplitude-frequency response at $\gamma = 0.9$ (b)

частотная (волновая) характеристика такого фильтра есть преобразование Фурье от его импульсной характеристики; для указанных выше значений коэффициентов h_j она примет вид:

$$R(\bar{\omega}) = 1 - \gamma + \frac{\gamma}{L} \sum_{l=1}^L \cos(l\bar{\omega}). \quad (3)$$

Здесь R – коэффициент передачи фильтра, $\bar{\omega} \in [0 : \pi]$ – нормированная пространственная частота (волновое число)¹.

Рассмотрим свойства R , определяемые формулой (3). Прежде всего отметим, что $R(\bar{\omega})$ – вещественная величина, что является следствием симметрии связей в ансамбле². График функции $R(\bar{\omega})$ определяется радиусом связей и для значений $L = 1, 2, 5, 10$, которые рассматриваются в данном исследовании, он представлен на рис. 1, a. Хорошо видно, что при $L > 1$ коэффициент передачи имеет *лепестковую* структуру с выраженным максимумом в окрестности нуля (*основной лепесток*) и осциллирующими «хвостами» (*боковыми лепестками*) на периферии. Такая форма напоминает хорошо известную в радиотехнике функцию sinc. Данное сходство не случайно, поскольку выражение для R является дискретным аналогом выражения для спектра прямоугольного импульса, и при больших L соотношение (3) хорошо аппроксимируется формулой

$$R(\bar{\omega}) \simeq 1 - \gamma + \gamma \operatorname{sinc}((L + 0.5)\bar{\omega}). \quad (4)$$

«Хвосты» частотной характеристики приподняты над осью абсцисс на некоторую постоянную величину ΔR , которая при $L \gg 1$ близка к значению $1 - \gamma$. Поэтому значение силы связей определяет интенсивность селективных свойств фильтра. Существенно влияет на форму $R(\bar{\omega})$ также радиус связей. С увеличением L число боковых лепестков растет, а их ширина уменьшается (при $L \gg 1$ ширина лепестков обратна радиусу связей). Таким образом, в диапазоне значений связи $0 < \gamma \leq 1$ основной лепесток всегда приподнят над боковыми, величина которых тем меньше, чем выше их номер. При слабой связи фильтр является прозрачным для любых длин волн; при этом с увеличением связи селективные свойства усиливаются в сторону подавления коротковолновых режимов.

Из выражения (3) легко получить фазочастотную (ФЧХ) и амплитудно-частотную (АЧХ) характеристики фильтра связей.

¹Для отличия пространственных частот от обычных будем их помечать чертой сверху.

²Для ансамблей с несимметричными связями R будет комплексным.

Фазочастотная характеристика. Поскольку коэффициент передачи является вещественным числом, фазовый сдвиг пространственного фильтра $\phi = \arg(R)$ либо равен нулю при положительном R , либо π – при отрицательном. Таким образом, ФЧХ является либо постоянной, либо кусочно-постоянной функцией волнового числа $\bar{\omega}$. Последний случай реализуется, если параметр связи превосходит некоторое критическое значение

$$\gamma_c = \frac{2}{4 - \arctan(L - 1)}. \quad (5)$$

Амплитудно-частотная характеристика. Вид амплитудно-частотной характеристики $A(\bar{\omega}) = |R(\bar{\omega})|$ также будет отличаться для $\gamma < \gamma_c$ и $\gamma > \gamma_c$. В первом случае АЧХ совпадает с соответствующим графиком $R(\bar{\omega})$, изображенным на рис. 1, а. Поскольку максимальное значение коэффициента передачи достигается на нулевой частоте, форма АЧХ будет соответствовать фильтру нижних частот (ФНЧ); при этом основной лепесток можно считать *полосой пропускания*, а боковые – *полосой заграждения* фильтра. С ростом γ средний уровень полосы заграждения понижается, соответственно селективные свойства фильтра усиливаются. При $\gamma > \gamma_c$ форма АЧХ становится более сложной, что можно увидеть на примере графиков на рис. 1, б, но при $L > 1$ она продолжает соответствовать ФНЧ. Исключением является случай локальных связей, при котором переход γ через критическое значение приводит к смене типа фильтра с НЧ на заграждающий (см. [25]).

Таким образом, система симметричных дальнедействующих связей при $L > 1$ ведет себя как пространственный фильтр нижних частот, ширина полосы пропускания которого определяется радиусом действия связей, а селективные свойства (отношение коэффициентов передачи в полосе пропускания и заграждения) – силой связей γ . Как известно, связи между отображениями оказывают влияние на их временную и пространственную динамику. При этом изменение величины параметра связи может приводить к формированию в ансамбле различных пространственных структур. Интересно выяснить, насколько эти изменения коррелируют с изменением формы волновой характеристики фильтра связей, рассмотренной выше, и возможно ли предсказать пространственные свойства наблюдаемых режимов по виду этой характеристики. Данные вопросы и будут рассмотрены в ходе численного исследования.

2. Рассматриваемая система и алгоритм исследования

В качестве объекта исследования выберем наиболее простую систему, демонстрирующую развитый пространственно-временной хаос: кольцо из N логистических отображений, уравнение которого соответствует (1) при $F(x) = \alpha x(1 - x)$, где α – параметр, управляющий динамикой одиночного отображения.

Логистическое отображение является базовой системой нелинейной динамики. Его поведение хорошо известно: с ростом α оно демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периодических орбит, завершающийся переходом к хаосу; в закритической области наблюдается развитие хаотической динамики через каскад обратных бифуркаций удвоения. При $3.68 \leq \alpha < 4$ в отображении реализуется режим развитого хаоса, который для слабых связей ($\gamma \simeq 0$) сохраняется и при объединении отображений в ансамбль. В этом случае в ансамбле реализуется режим однородного пространственно-временного хаоса. В ансамбле с локальными связями в диапазоне $0 < \gamma \leq 1$ наблюдается множество пространственно-временных режимов, включая диссипативные структуры [26].

Исследование системы (1) проводится методом численного эксперимента при фиксированном $\alpha = 3.98$ и меняющихся значениях γ и L . В ходе численного эксперимента определяется предельная траектория при случайных начальных условиях, равномерно распределенных в

диапазоне $]0 : 1[$, по которой строятся фазовые портреты и пространственные снимки колебаний, рассчитываются функция взаимной когерентности и пространственные амплитудные спектры

$$Sp\left(\bar{\omega}_k = \frac{2\pi k}{N}\right) = \sqrt{\langle X_k(n)X_k^*(n) \rangle}, \quad (6)$$

где $X_k(n) = \sum_{i=1}^N x_i(n) \exp(-j2\pi ki/N)$ — дискретное преобразование Фурье (ДПФ) пространственного снимка колебаний в момент времени n , k — номер пространственной гармоники.

3. Влияние связей на взаимную когерентность колебаний

При нулевой связи каждое из отображений ансамбля (1) демонстрирует независимую динамику, поэтому колебания в разных ячейках сети являются некогерентными³, и ансамбль в целом демонстрирует режим однородного пространственно-временного хаоса. Однако с ростом связи колебания синхронизируются, в результате чего в ансамбле могут реализоваться разные типы пространственного и временного поведения.

Рассмотрим, как меняется когерентность колебаний в ансамбле с ростом связи для разных L . Для ее измерения мы воспользуемся формулой, полученной в работе [23]:

$$S_{i,j} = \frac{\int_0^\infty C_{i,j}(\omega) (P_i(\omega) + P_j(\omega)) d\omega}{\int_0^\infty (P_i(\omega) + P_j(\omega)) d\omega}. \quad (7)$$

Здесь $C_{i,j}(\omega)$ — функция взаимной когерентности между динамикой i -го и j -го отображений, P_i и P_j — соответствующие спектры мощности. Величина $S_{i,j}$, являющаяся интегральной мерой когерентности колебаний по всем частотам, определяет отношение мощности когерентной части сигналов подсистем i и j к их общей мощности. Она является безразмерной величиной, принимающей значения от нуля (для полностью некогерентных сигналов) до единицы (для полностью когерентных).

В настоящем исследовании мы рассматриваем когерентность между соседними осцилляторами $S_{i,i+1}$, обозначаемую в дальнейшем как $S(i)$. Будет ли она одинаковой в разных частях ансамбля или же будет меняться от точки к точке? Исследования показывают, что может наблюдаться

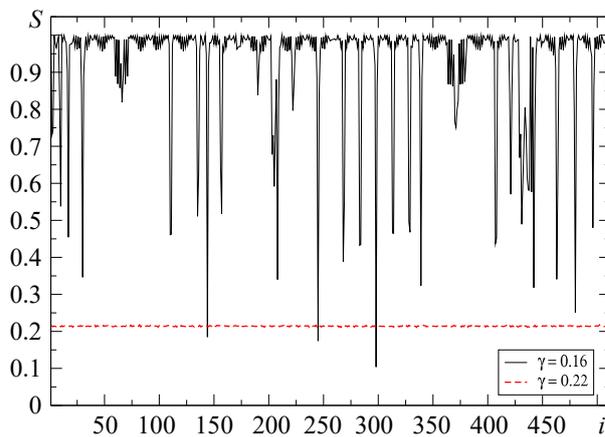


Рис. 2. Графики $S(i)$ для ансамбля с локальными связями при $\gamma = 0.16$ и $\gamma = 0.22$

Fig. 2. Plots $S(i)$ for an ensemble with local couplings at $\gamma = 0.16$ and $\gamma = 0.22$

и тот и другой случай. Соответствующие примеры приведены на рис. 2, где построены графики $S(i)$ для двух значений параметра локальной связи: $\gamma = 0.16$ и $\gamma = 0.22$. Как видно из первого графика, в ансамбле могут сосуществовать кластеры как с высоким, так и с низким уровнем когерентности. В этом случае, для оценки когерентности колебаний ансамбля в целом целесообразно взять среднее: $S_{\text{mean}} = \langle S(i) \rangle$, а для оценки неоднородности в распределении — максимальное и минимальное значения: $S_{\text{max}} = \max\{S(i)\}$, $S_{\text{min}} = \min\{S(i)\}$. Очевидно, что в случае неоднородного распределения когерентности будет выполняться соотношение $S_{\text{min}} \ll \ll S_{\text{mean}} \ll S_{\text{max}}$. Противоположный случай

³Под когерентностью здесь понимается взаимный захват фаз в спектрах колебаний подсистем.

реализуется при $\gamma = 0.22$ (штриховая линия на рис. 2). Здесь $S(i)$ практически является константой, а потому $S_{\text{mean}} \simeq S_{\text{max}} \simeq S_{\text{min}}$.

Рассмотрим, как S_{mean} , S_{max} и S_{min} меняются с ростом γ . Результаты расчетов приведены на рис. 3, *a* ($L = 1$), рис. 3, *b* ($L = 2$), рис. 3, *c* ($L = 5$) и рис. 3, *d* ($L = 10$). Для всех рассмотренных случаев зависимость когерентности от связи можно разделить на две характерные зоны: область однородной когерентности (I и III) и область неоднородной когерентности (II). Неоднородная когерентность означает, что в ансамбле присутствуют интервалы как с высокой ($S(i) \simeq S_{\text{max}}$), так и с низкой ($S(i) \simeq S_{\text{min}}$) когерентностью, то есть формируются стационарные пространственные структуры (в нелинейной динамике их принято называть *диссипативными структурами*). Зона диссипативных структур располагается в узком диапазоне значений параметра связи при $\gamma \gtrsim 0.1$ и ее ширина незначительно увеличивается с ростом L . Соответственно, зона однородности занимает оставшиеся диапазоны значений γ : область слабых связей (зона I), в которой когерентность близка к нулю, и область средних и сильных связей (зона III), в которой когерентность принимает существенные значения и может достигать единицы. Для последней характерны две типичные зависимости $S_{\text{mean}}(\gamma)$: монотонный рост при $L > 1$ и унимодальный характер: вначале рост, а затем падение при $L = 1$. Разное поведение функции $S_{\text{mean}}(\gamma)$ свидетельствует о качественном различии в поведении ансамблей с локальным и нелокальным взаимодействием, которое наблюдается при сильной связи. Рассмотрим поведение системы (1) в разных зонах более детально, сравнивая его с изменением АЧХ фильтра связей (3).

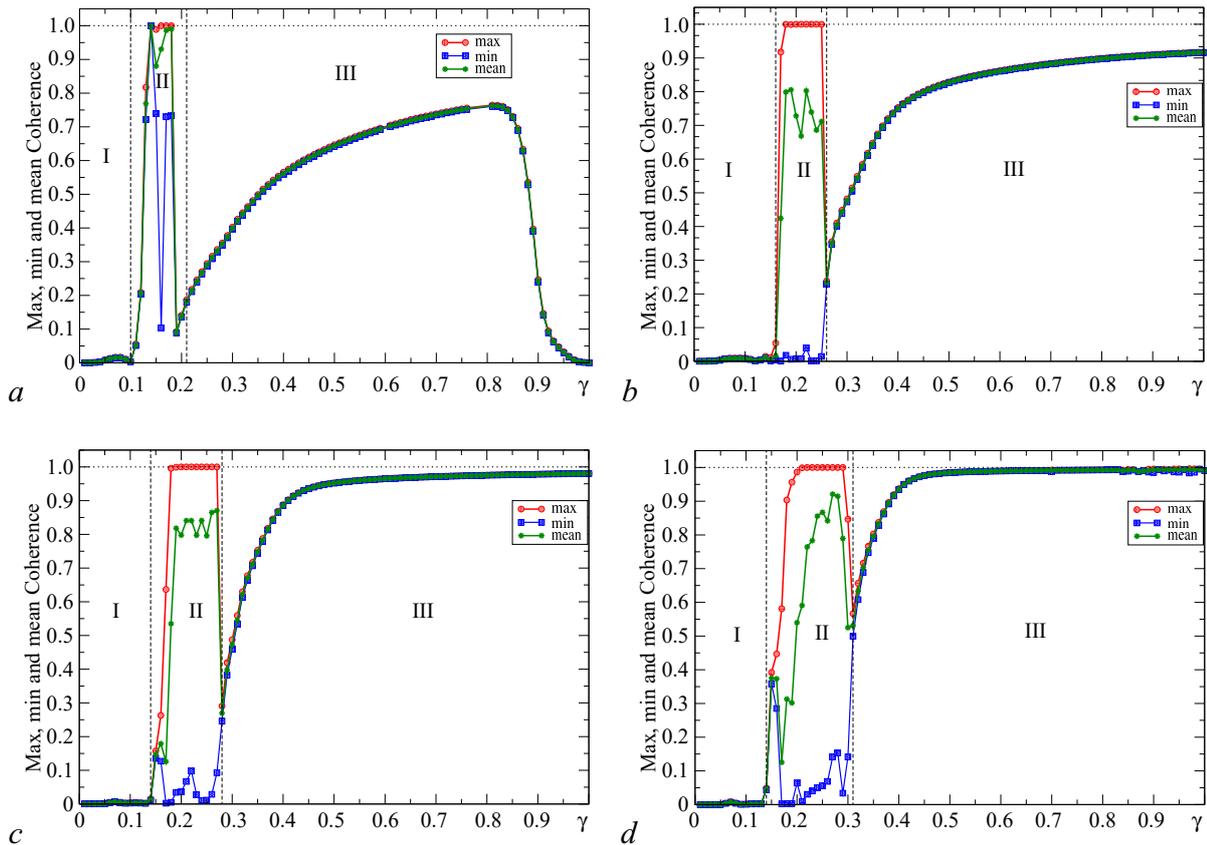


Рис. 3. Графики зависимостей когерентности от γ при разных радиусах связи: $L = 1$ (a), 2 (b), 5 (c) и 10 (d)

Fig. 3. Plots of coherence from γ at different radii: $L = 1$ (a), 2 (b), 5 (c) and 10 (d)

4. Зона пространственно однородных колебаний

Рассмотрим сначала область параметра связи, где когерентность не зависит от координаты, то есть интервалы I и III. Однородность $S(i)$ является следствием пространственной однородности колебаний, то есть отсутствия стационарных пространственных структур.

Интервал I. При малой связи селективные свойства сети, определяемые формулой (3), выражены слабо, и пространственный фильтр является всеволновым. Поэтому пространственное распределение должно содержать моды всех длин волн и результирующий режим будет представлять собой развитый пространственно-временной хаос. Проведенные расчеты подтверждают эти предположения. Как показали исследования, временная динамика ансамбля (1) в области I соответствует одноленточному хаотическому аттрактору, а пространственная динамика представляет собой однородный пространственный хаос. Типичные фазовые портреты и пространственные снимки для режима в данной области приведены на рис. 4, *a* (для $L = 2$) и рис. 4, *b* (для $L = 10$). Аналогичные портреты существуют и для других значений L . Визуально они почти не различаются. Однако расчет пространственных спектров показывает, что количественные различия между ними существуют. Рассмотрим графики $Sp(\bar{\omega})$, приведенные на рис. 5, *a*. Как видно из рисунка, с ростом L доля коротковолновых мод в пространственном хаосе уменьшается. Заметно сходство формы пространственных спектров с формой АЧХ (3): они имеют подобную АЧХ лепестковую

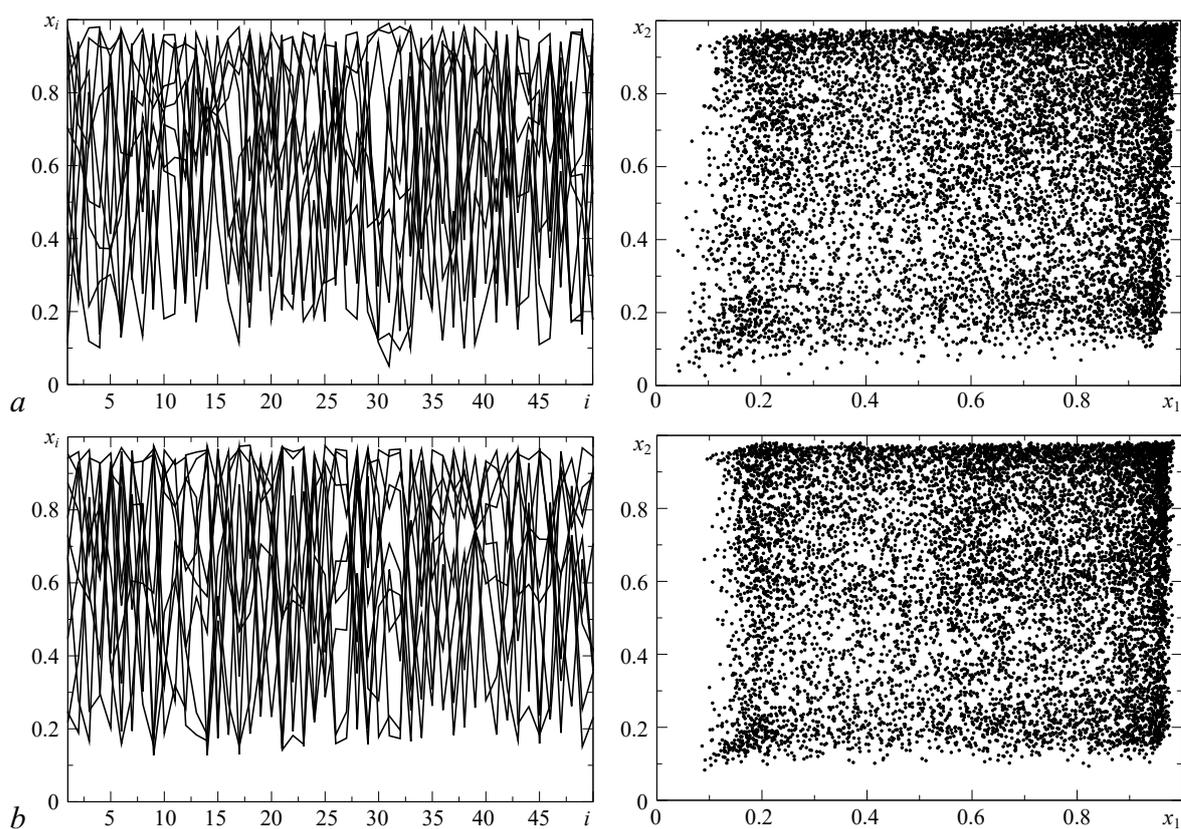


Рис. 4. Динамика системы в области I: пространственные снимки (слева) и перекрестные фазовые портреты (справа) при $\gamma = 0.08$ и $L = 2$ (*a*), 10 (*b*)

Fig. 4. System dynamics in region I: spatial snapshots (left) and cross phase-portraits (right) at $\gamma = 0.08$ and $L = 2$ (*a*), 10 (*b*)

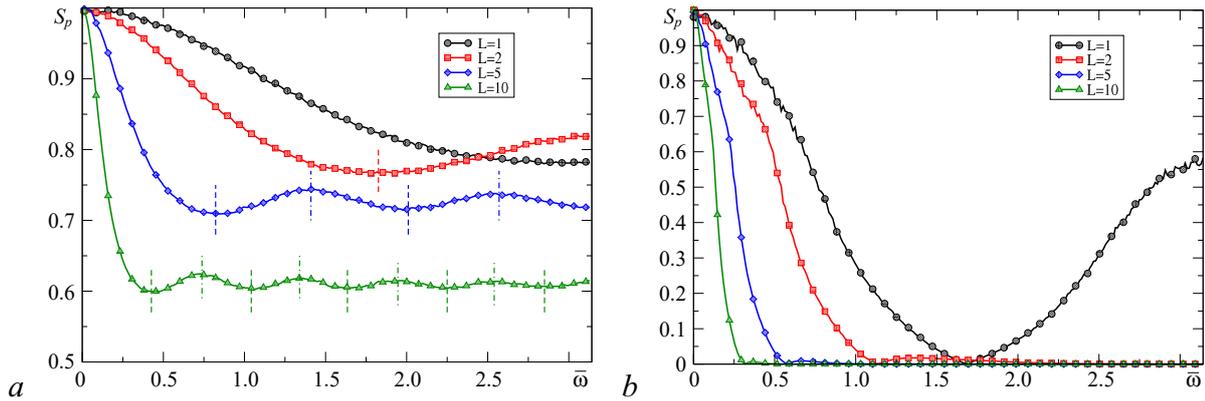


Рис. 5. Пространственные спектры (а) в зоне I при $\gamma = 0.08$ и (b) в зоне III при $\gamma = 0.9$; вертикальные штриховые линии на рисунке (а) отмечают положение минимумов АЧХ, штрихпунктирные — ее максимумов

Fig. 5. Spatial spectra (a) in zone I at $\gamma = 0.08$ and (b) in zone III at $\gamma = 0.9$; on figure (a) vertical dashed and dashed-dotted lines mark minima and maxima of the frequency response plot, correspondently

структуру; причем число и расположение экстремумов и там и там идентично (для наглядности расположение экстремумов соответствующих АЧХ отмечено вертикальными линиями). В то же время, между ними существуют количественные различия: уровень боковых лепестков спектров существенно ниже, чем это следует из формы АЧХ, то есть селективные свойства в ансамбле (1) проявляются сильнее, чем в соответствующем линейном фильтре (3).

Интервал III. В области сильной связи наблюдается качественное расхождение в поведении ансамблей с локальными и нелокальными связями: при $L > 1$ наблюдается монотонный рост когерентности с ростом γ (см. рис. 3, b, c и d), при $L = 1$ когерентность вначале растет, а затем, при $\gamma \geq 0.8$ начинает уменьшаться; при $\gamma \simeq 1$ она становится близкой к нулю (см. рис. 3, a). Данное расхождение объясняется качественным различием АЧХ фильтров. Как уже было отмечено в разделе 1, в то время как нелокальные связи сохраняют свойства ФНЧ во всем диапазоне значений γ , система локальных связей при $\gamma > 0.5$ начинает приобретать свойства заграждающего фильтра, что отражается на поведении ансамбля. Как было показано в работе [25], начиная с $\gamma = 0.5$ снижение доли коротковолновых режимов сменяется их ростом с максимумом в окрестности $\bar{\omega} = \pi$. Этот процесс резко усиливается при $\gamma \geq 0.8$. Поэтому при сильной локальной связи в пространственном спектре наряду с длинноволновыми модами присутствуют и коротковолновые. Пространственная динамика представляет собой сосуществование метастабильных кластеров «длинных» и «коротких» мод, как это показано на рис. 6, a. Переменяемость между этими кластерами и является причиной ослабления когерентности.

Иное поведение характерно для ансамблей с нелокальными связями. Здесь низкочастотный характер пространственного фильтра сохраняется и при сильной связи (см. рис. 1, b), поэтому рост связи приводит к дальнейшему понижению доли коротковолновых мод в ансамбле. Это хорошо видно по пространственным снимкам колебаний, построенных на рис. 6, b для $L = 2$ и особенно на рис. 6, c для $L = 10$. В результате, при сильной дальнедействующей связи ансамбль постепенно переходит к режиму, близкому к хаотической синхронизации, что видно по перекрестным фазовым портретам (см. рис. 6, c).

Как и в зоне I, в области сильной когерентности наблюдается качественное совпадение между пространственными спектрами колебаний (рис. 5, b) и формой АЧХ (см. рис. 1, b). Как видно из рисунков, во всех спектрах, кроме $L = 1$, присутствуют лишь длинноволновые компоненты.

Однако, как и при слабой связи, селективные свойства ансамбля выражены гораздо сильнее, чем соответствующего линейного фильтра, так что величина боковых лепестков становится настолько малой, что в спектрах остаются лишь те компоненты, которые соответствуют основному лепестку.

Таким образом, в областях I и III динамика системы (1) представляет собой пространственно-временной хаос, форма пространственного спектра которого качественно схожа с амплитудно-частотной характеристикой системы связей ($|R(\bar{\omega})|$), но не повторяет ее.

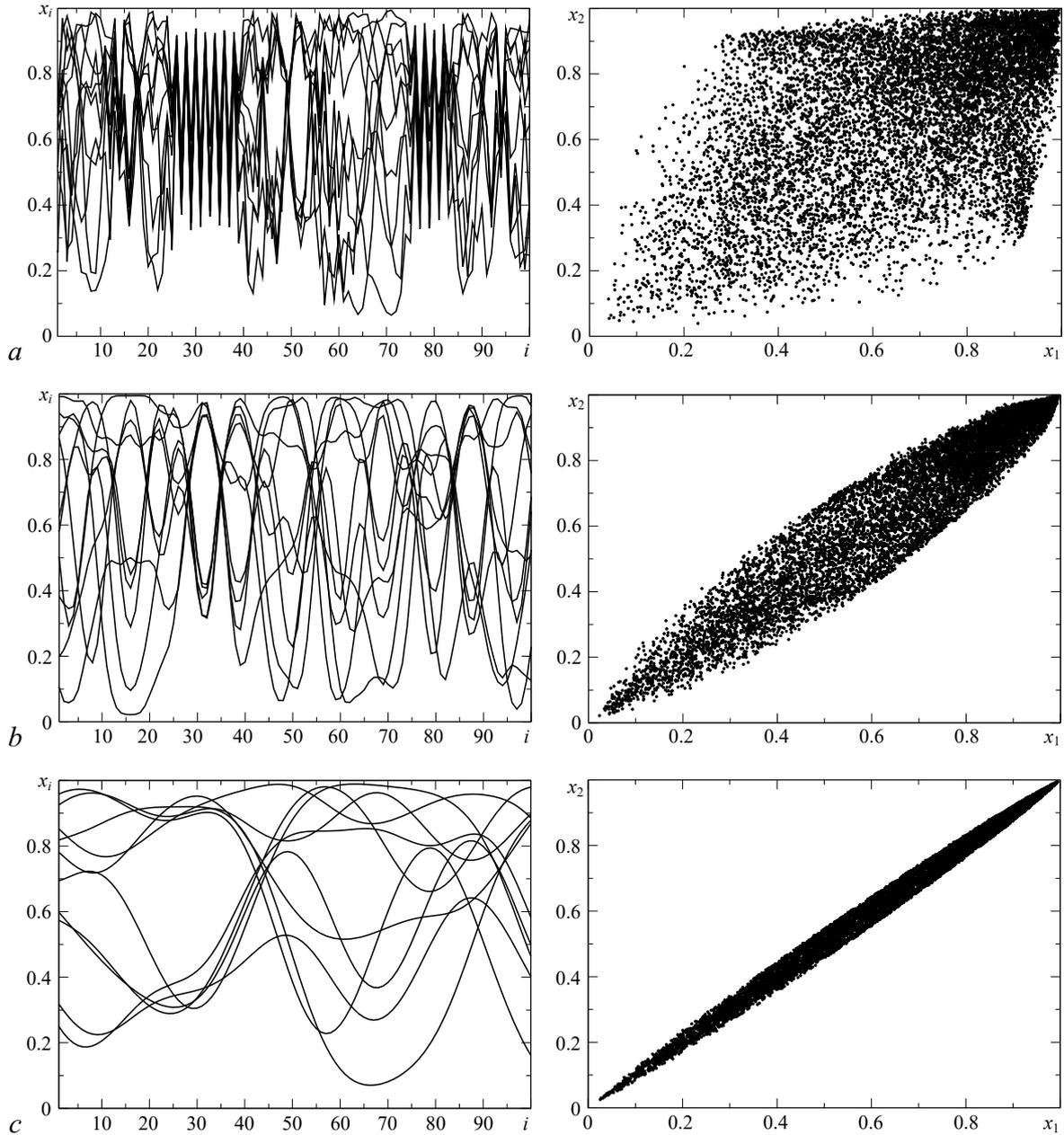


Рис. 6. Динамика системы в области III: пространственные снимки (слева) и перекрестные фазовые портреты (справа) при $\gamma = 0.9$ и $L = 1$ (a), 2 (b), 10 (c)

Fig. 6. The system dynamics in region III: spatial snapshots (left) and cross phase-portraits (right) at $\gamma = 0.9$ and $L = 1$ (a), 2 (b), 10 (c)

5. Зона диссипативных структур

Как было отмечено выше, в большей части диапазона $\gamma \in [0 : 1]$ колебания в ансамбле (1) представляют собой однородный пространственно-временной хаос. Рассмотрим теперь динамику в оставшемся интервале значений γ , обозначенном на рис. 3 как зона II. В этой области когерентность меняется вдоль ансамбля, так что в нем сосуществуют как участки с полной ($S(i) = 1$), так и со слабой ($S(i) \ll 1$) когерентностью. Такая неоднородность предполагает существование стационарных пространственных структур. Каков вид этих структур и будут ли они как-то связаны с коэффициентом передачи фильтра R ?

Для ответа на данные вопросы рассмотрим типичные пространственные снимки колебаний в ансамбле при разных L , приведенные на рис. 7. Как видно из рисунков, образующиеся структуры представляют собой нерегулярные сочетания кластеров с разными характерным масштабами, соответствующими преимущественно коротковолновым модам. Так, в случае локальных связей основной модой являются противофазные колебания, пространственный спектр которых представляет собой δ -импульс на частоте $\bar{\omega} = \pi$. При $\gamma = 0.14$ противофазные колебания распространяются на весь ансамбль, в остальной части интервала II они перемежаются с короткими кластерами иной структуры, как это показано на рис. 7, *a*. При дальнедействующих связях набор

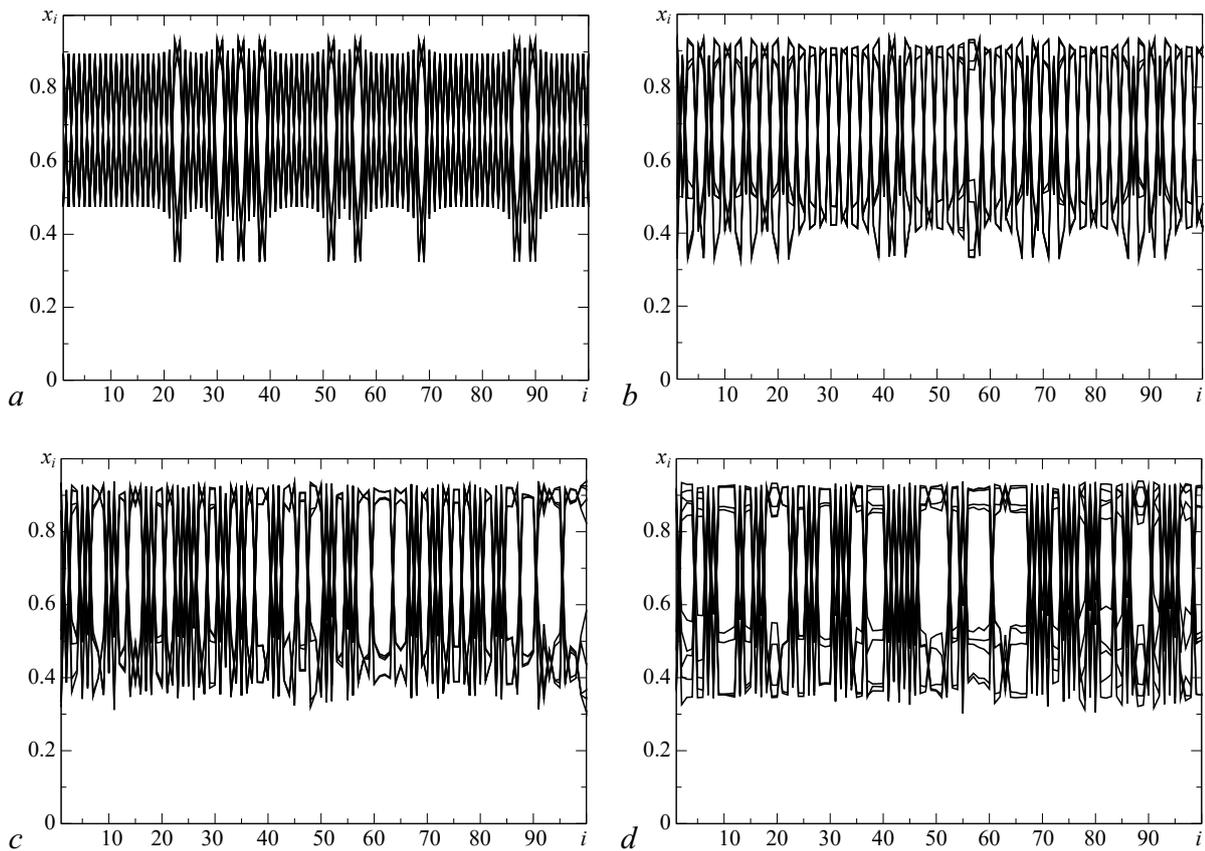


Рис. 7. Пространственные снимки в зоне II при: $L = 1$, $\gamma = 0.16$ (*a*); $L = 2$, $\gamma = 0.18$ (*b*); $L = 5$, $\gamma = 0.2$ (*c*) $L = 10$, $\gamma = 0.2$ (*d*)

Fig. 7. The spatial snapshots in zone II at: $L = 1$, $\gamma = 0.16$ (*a*); $L = 2$, $\gamma = 0.18$ (*b*); $L = 5$, $\gamma = 0.2$ (*c*) $L = 10$, $\gamma = 0.2$ (*d*)

чередующихся кластеров является более разнообразным, но и в этих случаях, очевидна высокая доля коротковолновых мод.

Колебательные режимы, показанные на рис. 7, не единственные для данных значений параметров. Очевидно, что вследствие трансляционной симметрии системы (1) любые пространственные структуры, полученные из изображенных посредством сдвига на произвольное число ячеек вправо или влево, будут также сосуществовать в ансамбле. Кроме того, существует множество и других похожих структур. Таким образом, в зоне II в системе наблюдается развитая мультистабильность.

Для определения количественного состава волновых мод, присутствующих в ансамбле, обратимся к пространственным спектрам рассматриваемых колебательных режимов. Каждому из аттракторов будет соответствовать свой спектр, который будет характеризовать пространственные свойства данного режима. Но, поскольку таких аттракторов множество, для того чтобы характеризовать систему в целом, при расчете спектров по формуле (6) мы будем проводить усреднение не только по времени, как для пространственно-однородных режимов, но и по начальным условиям. Построенные таким образом спектры приведены на рис. 8.

Из анализа спектров можно заметить, прежде всего, «провал» на нулевой частоте, означающий подавление длинноволновых мод, характерное для данной зоны. Кроме того, очевидно, что спектры обладают лепестковой структурой, подобно тому, как это имеет место в зоне I. Однако здесь эта структура имеет дуальный характер по отношению к форме АЧХ пространственного фильтра связей: легко убедиться, что максимумы в спектрах соответствуют минимумам характеристики и наоборот. Для большей наглядности на рис. 8 построены вертикальные штриховые линии, отмечающие положения минимумов функции $R(\bar{\omega})$ для разных L . Дуальность спектра по отношению к АЧХ особенно заметна на примере ансамбля с локальными связями, где максимум оказывается строго на пространственной частоте $\bar{\omega} = \pi$, но она проявляется и для дальнедействующих связей.

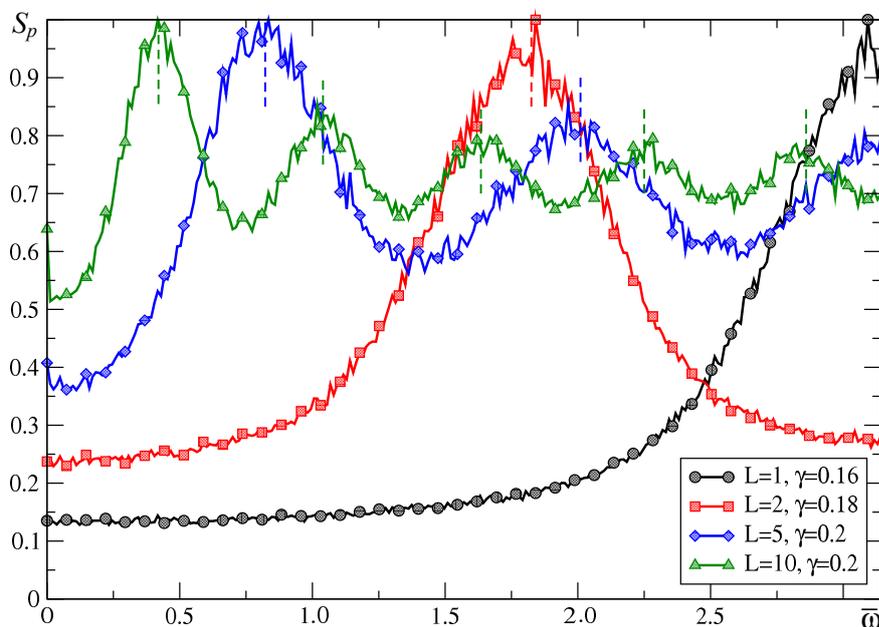


Рис. 8. Пространственные спектры в зоне диссипативных структур

Fig. 8. Spatial spectra in the zone of dissipative structures

Таким образом, в зоне диссипативных структур, так же, как и в зоне однородного пространственно-временного хаоса, наблюдается селекция пространственных мод сетевым фильтром. Однако эта селекция происходит противоположным образом: если в областях I и III пространственные спектры колебаний оказываются качественно схожи с АЧХ фильтра связей, в результате чего с ростом γ подавляются коротковолновые моды (за исключением случая локальных связей), то в зоне II, наоборот, подавляются преимущественно длинноволновые моды, а длины волн, соответствующие минимумам АЧХ, сохраняются.

Заключение

Проведенные исследования показали, что система связей между хаотическими отображениями представляет собой линейный волновой фильтр, обладающий пространственно-селективными свойствами, позволяя существовать пространственным модам с определенными длинами волн и подавляя другие. Селекция пространственных структур происходит на основе волновой характеристики фильтра связей, вид которой определяется радиусом действия и величиной связей между элементами ансамбля. Селективные свойства наглядно проявляются в режиме развитого пространственно-временного хаоса. В этом случае пространственный спектр колебаний качественно соответствует волновой характеристике фильтра связей. Между спектром и формой волновой характеристики существует также и количественное соответствие: расположение минимумов и максимумов в пространственных спектрах приходится на те же длины волн, что и соответствующие экстремумы волновой характеристики. Тем не менее полное соответствие между ними не наблюдается: селективные свойства в нелинейной системе проявляются существенно сильнее, чем в соответствующем линейном фильтре связей.

В ходе численного моделирования ансамбля логистических отображений выяснилось, что между динамикой ансамблей с локальными и нелокальными связями существует характерное качественное различие. Оно проявляется в области сильной связи. В этом случае рост силы нелокальных связей ведет к подавлению коротких волн и постепенному переходу к режиму полной синхронизации, а рост локальных связей ведет к пространственно-временной перемежаемости между длинноволновыми и коротковолновыми кластерами. При этом переход к синхронизации не происходит.

Помимо однородного пространственно-временного хаоса в небольшом интервале связи в ансамбле наблюдаются диссипативные структуры. Здесь также проявляются селективные свойства сети, но «в обратную сторону»: максимумам в характеристике фильтра связей соответствуют минимумы в распределении энергии колебаний по длинам волн. Поэтому в области диссипативных структур доминирующими становятся моды с малой длиной волны.

Список литературы

1. Анищенко В. С., Постнов Д. Э., Сафонова М. А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, № 24. С. 1505–1509.
2. Анищенко В. С., Арансон И. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И. Пространственная синхронизация и развитие бифуркаций в цепочке связанных осцилляторов // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120–1124.
3. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 69, no. 1. P. 32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
4. Yamada T., Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II: The mapping approach // Progress of Theoretical Physics. 1983. Vol. 70, no. 5, P. 1240–1248. DOI: 10.1143/PTP.70.1240.

5. *Anishchenko V. S., Vadivasova T. E., Postnov D. E., Safonova M. A.* Synchronization of chaos // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, no. 3. P. 633–644. DOI: 10.1142/S0218127492000756.
6. *Heagy J. F., Carroll T. L., Pecora L. M.* Synchronous chaos in coupled oscillator systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 50, no. 3. P. 1874–1884. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.1874.
7. *Ren L., Ermentrout B.* Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators // *Physica D*. 2000. Vol. 143, no. 1–4. P. 56–73. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00096-8.
8. *Шабунин А. В., Акопов А. А., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е.* Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде // *Известия вузов. ПНД*. 2005. Т. 13, № 4. С. 37–55. DOI: 10.18500/0869-6632-2005-13-4-37-55.
9. *Kuramoto Y.* *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
10. *Cross M. C., Hohenberg P. C.* Pattern formation outside of equilibrium // *Rev. Mod. Phys.* 1993. Vol. 65, no. 3. P. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
11. *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*. Singapore: World Scientific, 2002. 440 p. DOI: 10.1142/4845.
12. *Arecchi F. T., Meucci R., Puccioni G., Tredicce J.* Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49, no. 17. P. 1217–1220. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1217.
13. *Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. П., Селезнев Е. П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // *Письма в ЖТФ*. 1989. Т. 15, № 3. С. 60–65.
14. *Астахов В. В., Безручко Б. П., Пудовочкин О. Б., Селезнев Е. П.* Фазовая мультистабильность и установление колебаний в нелинейных системах с удвоением периода // *Радиотехника и электроника*. 1993. Т. 38, № 2. С. 291–295.
15. *Prengel F., Wacker A., Schöll E.* Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50, no. 3. P. 1705–1712. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.1705.
16. *Sun N. G., Tsironis G. P.* Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B*. 1995. Vol. 51, no. 16. P. 11221–11224. DOI: 10.1103/PhysRevB.51.11221.
17. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76, no. 4. P. 708–711. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.708.
18. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera states for coupled oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
19. *Omelchenko I., Maistrenko Y., Hövel P., Schöll E.* Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 106, no. 23. P. 234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102.
20. *Hagerstrom A. M., Murphy T. E., Roy R., Hövel P., Omelchenko I., Schöll E.* Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices // *Nature Physics*. 2012. Vol. 8, no. 9. P. 658–661. DOI: 10.1038/nphys2372.
21. *Богомолов С. А., Стрелкова Г. И., Schöll E., Анищенко В. С.* Амплитудные и фазовые химеры в ансамбле хаотических осцилляторов // *Письма в ЖТФ*. 2016. Т. 42, № 14. С. 103–110.
22. *Gopal R., Chandrasekar V. K., Venkatesan A., Lakshmanan M.* Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 89, no. 5. P. 052914. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.052914.
23. *Shabunin A., Astakhov V., Kurths J.* Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 72, no. 1. P. 016218. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016218.

24. Шабунин А. В. Мультистабильность периодических орбит в ансамбле отображений с дальнедействующими связями // Известия вузов. ПНД. 2018. Т. 26, № 2. С. 5–23.
DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23.
25. Shabunin A. Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 7. P. 073132. DOI: 10.1063/5.0054510.
26. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency // Physica D. 1989. Vol. 34, no. 1–2. P. 1–41.
DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.

References

1. Anishchenko VS, Postnov DE, Safonova MA. Dimension and physical properties of chaotic attractors in a chain of coupled oscillators. *Sov. Tech. Phys. Lett.* 1985;11(12):621.
2. Anishchenko VS, Aranson IS, Postnov DE, Rabinovich MI. Spatial synchronization and development bifurcations in a chain of coupled oscillators. *Soviet Physics. Doklady.* 1986;31(2):169.
3. Fujisaka H, Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Progress of Theoretical Physics.* 1983;69(1):32–47. DOI: 10.1143/PTP.69.32.
4. Yamada T, Fujisaka H. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II: The mapping approach. *Progress of Theoretical Physics.* 1983;70(5):1240–1248.
DOI: 10.1143/PTP.70.1240.
5. Anishchenko VS, Vadivasova TE, Postnov DE, Safonova MA. Synchronization of chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 1992;2(3):633–644. DOI: 10.1142/S0218127492000756.
6. Heagy JF, Carroll TL, Pecora LM. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Phys. Rev. E.* 1994;50(3):1874–1884. DOI: 10.1103/PhysRevE.50.1874.
7. Ren L, Ermentrout B. Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. *Physica D.* 2000;143(1–4):56–73. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00096-8.
8. Shabunin AV, Akopov AA, Astakhov VV, Vadivasova TE. Running waves in a discrete anharmonic self-oscillating medium. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2005;13(4):37–55 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2005-13-4-37-55.
9. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Berlin: Springer; 1984. 158 p. DOI: 10.1007/978-3-642-69689-3.
10. Cross MC, Hohenberg PC. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* 1993;65(3):851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851.
11. Mosekilde E, Maistrenko Y, Postnov D. *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems.* Singapore: World Scientific; 2002. 440 p. DOI: 10.1142/4845.
12. Arecchi FT, Meucci R, Puccioni G, Tredicce J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser. *Phys. Rev. Lett.* 1982;49(17):1217–1220. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1217.
13. Astakhov VV, Bezruchko BP, Gulyaev YV, Seleznev EP. Multistable states in dissipative coupled Feigenbaum's systems. *Tech. Phys. Lett.* 1989;15(3):60–65 (in Russian).
14. Astakhov VV, Bezruchko BP, Pudovochkin OB, Seleznev EP. Phase multistability and setting of the oscillations in nonlinear systems with period-doublings. *Journal of Communications Technology and Electronics.* 1993;38(2):291–295 (in Russian).
15. Prengel F, Wacker A, Schöll E. Simple model for multistability and domain formation in semiconductor superlattices. *Phys. Rev. B.* 1994;50(3):1705–1712. DOI: 10.1103/PhysRevB.50.1705.
16. Sun NG, Tsironis GP. Multistability of conductance in doped semiconductor superlattices. *Phys. Rev. B.* 1995;51(16):11221–11224. DOI: 10.1103/PhysRevB.51.11221.
17. Foss J, Longtin A, Mensour B, Milton J. Multistability and delayed recurrent loops. *Phys. Rev. Lett.* 1996;76(4):708–711. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.708.

18. Abrams DM, Strogatz SH. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2004;93(17):174102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.174102.
19. Omelchenko I, Maistrenko Y, Hövel P, Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.* 2011;106(23):234102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.234102.
20. Hagerstrom AM, Murphy TE, Roy R, Hövel P, Omelchenko I, Schöll E. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices. *Nature Physics.* 2012;8(9):658–661. DOI: 10.1038/nphys2372.
21. Bogomolov SA, Strelkova GI, Schöll E, Anishchenko VS. Amplitude and phase chimeras in an ensemble of chaotic oscillators. *Tech. Phys. Lett.* 2016;42(7):765–768. DOI: 10.1134/S1063785016070191.
22. Gopal R, Chandrasekar VK, Venkatesan A, Lakshmanan M. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling. *Phys. Rev. E.* 2014;89(5):052914. DOI: 10.1103/PhysRevE.89.052914.
23. Shabunin A, Astakhov V, Kurths J. Quantitative analysis of chaotic synchronization by means of coherence. *Phys. Rev. E.* 2005;72(1):016218. DOI: 10.1103/PhysRevE.72.016218.
24. Shabunin AV. Multistability of periodic orbits in ensembles of maps with long-range couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2018;26(2):5–23 (in Russian). DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-2-5-23.
25. Shabunin A. Selective properties of diffusive couplings and their influence on spatiotemporal chaos. *Chaos.* 2021;31(7):073132. DOI: 10.1063/5.0054510.
26. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. *Physica D.* 1989;34(1–2):1–41. DOI: 10.1016/0167-2789(89)90227-3.



Шабунин Алексей Владимирович — родился в Саратове (1966). Окончил с отличием физический факультет Саратовского государственного университета по направлению «Радиофизика и электроника» (1990). Защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (1998, СГУ) и доктора физико-математических наук (2007, СГУ) по специальности «Радиофизика». С 1990 года работает на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета, в настоящее время — в должности профессора. Научные интересы — нелинейная динамика, синхронизация, мультистабильность, клеточные автоматы, искусственные нейронные сети. Опубликовал свыше 80 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский
 государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: shabuninav@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0002-3495-9418
 AuthorID: 34839