

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023;31(5)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003067
EDN: ZKVTFL

Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов

А. А. Ростунцова^{1,2,3}✉, Н. М. Рыскин^{1,3}

¹Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

²Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, Нижний Новгород, Россия

³Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉rostuncova@mail.ru, ryskinm@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 14.07.2023, принята к публикации 4.09.2023,
опубликована онлайн 19.09.2023, опубликована 29.09.2023

Аннотация. В данной работе рассматривается взаимодействие монохроматической электромагнитной волны со встречным прямолинейным пучком электронов, движущихся в продольном магнитном поле. Цель работы — исследовать условия возникновения модуляционной неустойчивости (МН) в такой системе и определить, при каких параметрах волны МН является абсолютной, а при каких — конвективной. Методы. Теоретический анализ характера МН проводится на основе исследования асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала. Аналитические результаты также верифицируются при помощи численного моделирования. Результаты. Теоретически определена граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала (амплитуда — частотная отстройка от циклотронного резонанса). Численное моделирование подтверждает, что с увеличением частоты сигнала режимы автомодуляции, соответствующие абсолютной МН, сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала, что соответствует конвективной МН. Численные результаты совпадают с аналитическими для системы, согласованной на границе. Согласование обеспечивается плавным нарастанием магнитного поля в области влета электронного пучка. Заключение. Определение аналитических условий реализации абсолютной МН представляет практический интерес, поскольку возникающая при этом автомодуляция может приводить к генерации последовательностей импульсов со спектром в виде частотных гребенек.

Ключевые слова: модуляционная неустойчивость, абсолютная/конвективная неустойчивость, нелинейные волны, микроволновые солитоны, циклотронный резонанс.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-12-00291.

Для цитирования: Ростунцова А. А., Рыскин Н. М. Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 5. С. 597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067. EDN: ZKVTFL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Study of character of modulation instability in cyclotron resonance interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating rectilinear electron beam

A. A. Rostuntsova^{1,2,3}✉, N. M. Ryskin^{1,3}

¹Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

²A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, Nizhny Novgorod, Russia

³Saratov State University, Russia

E-mail: ✉rostuncova@mail.ru, ryskinm@info.sgu.ru

Received 14.07.2023, accepted 4.09.2023, available online 19.09.2023, published 29.09.2023

Abstract. In this paper, the interaction of a monochromatic electromagnetic wave with a counterpropagating electron beam moving in an axial magnetic field is considered. The *purpose* of this study is to investigate the conditions for occurrence of modulation instability (MI) in such a system and to determine at which parameters of the incident wave the MI is absolute or convective. *Methods.* Theoretical analysis of the MI character is carried out by studying the asymptotic form of unstable perturbations using the saddle-point analysis. The analytical results are verified by numerical simulations. *Results.* Theoretically, the boundary of change in the character of MI on the plane of input signal parameters (amplitude and detuning of the frequency from the cyclotron resonance) is determined. Numerical simulations confirm that as the signal frequency increases, the regime of self-modulation, which corresponds to the absolute MI, is replaced by the stationary single-frequency transmission corresponding to the convective MI. The numerical results coincide with the analytical ones for the system, which is matched at the end. The matching is implemented by smooth increasing of the guiding magnetic field in the region of electron beam injection. *Conclusion.* Determining the analytical conditions for the implementation of the absolute MI is of practical interest, since the emerging self-modulation can lead to the generation of trains of pulses with the spectrum in the form of frequency combs.

Keywords: modulation instability, absolute/convective instability, nonlinear waves, microwave solitons, cyclotron resonance.

Acknowledgements. This work was supported by Russian Science Foundation under Grant No. 23-12-00291.

For citation: Rostuntsova AA, Ryskin NM. Study of character of modulation instability in cyclotron resonance interaction of an electromagnetic wave with a counterpropagating rectilinear electron beam. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2023;31(5):597–609. DOI: 10.18500/0869-6632-003067

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Одним из фундаментальных эффектов, приводящих к возникновению сложной динамики в нелинейных средах с дисперсией, является модуляционная неустойчивость (МН) [1–6]. МН — это неустойчивость монохроматической волны с несущей частотой ω относительно медленных пространственно-временных модуляций на боковых частотах $\omega \pm \Omega$, $\Omega \ll \omega$. МН может наблюдаться в системах различной природы и играет важную роль в нелинейной оптике, физике плазмы, гидродинамике и др.

При наличии МН гармонический сигнал, распространяющийся в нелинейной среде с дисперсией, обогащается новыми независимыми спектральными компонентами. Вместо стационарного распространения волны наблюдается автомодуляция, то есть осцилляции амплитуды волны, которые могут быть как регулярными, так и хаотическими. Процесс развития МН, как правило, завершается образованием солитонов огибающей. Наиболее известным примером таких солитонов являются солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [2–6].

В среде с конечной протяженностью, возбуждаемой гармоническим сигналом на одной из границ, процесс распространения волны существенным образом зависит от того, является

МН конвективной или абсолютной [6, 7]. В работах [8, 9] исследовались различия между конвективной и абсолютной МН на примере относительно простых модельных систем, которые описываются НУШ или нелинейным уравнением Клейна–Гордона. При конвективной неустойчивости нестационарные возмущения сносятся вдоль системы и покидают ее. Таким образом, после переходного процесса устанавливается режим стационарного распространения волны. Нестационарные режимы автомодуляции наблюдаются только в случае абсолютной МН, когда неустойчивые возмущения непрерывно генерируются по всей длине системы.

В работе [10] нами была исследована МН при циклотронном резонансном взаимодействии электромагнитной волны (ЭМВ) со встречным, изначально прямолинейным потоком электронов, движущихся в продольном магнитном поле. Поток выступает в качестве нелинейной среды, состоящей из неизохронных электронов-осцилляторов. Неизохронность обусловлена релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии электронов. Когда частота падающей монохроматической ЭМВ находится в пределах полосы циклотронного поглощения, а мощность сигнала достаточно мала, волна затухает и одновременно происходит раскачка поперечных колебаний электронов. Однако с увеличением амплитуды сигнала за счет неизохронности колебаний электронов полоса поглощения смещается в область более низких частот. В результате становится возможным распространение ЭМВ без затухания. При этом за счет развития МН входной сигнал может трансформироваться в последовательность микроволновых солитонов. Отметим, что аналогичный эффект был впервые предсказан в [11], где он был назван нелинейным или солитонным туннелированием (см. также [3]). Применительно к системе, которая рассматривается в данной работе, он был обнаружен и исследован в работах [12–14]. Реализация указанного эффекта в микроволновой электронике представляет очевидный интерес с точки зрения генерации последовательностей коротких микроволновых импульсов со спектром в виде частотных гребенок, что актуально для ряда практических приложений, например, в спектроскопии [15, 16].

Теоретический анализ нелинейных стационарных решений в виде солитонов позволил определить аналитическое условие для амплитуды и частоты падающей ЭМВ, при котором циклотронное поглощение сменяется автомодуляцией, причем найденное условие хорошо согласуется с результатами численного моделирования [10]. Помимо этого, было обнаружено, что с увеличением частоты входного сигнала нестационарный режим автомодуляции сменяется стационарным прохождением волны. В данной работе показано, что этот эффект связан со сменой характера МН с абсолютного на конвективный. Представлены результаты теоретического анализа характера МН, в частности, проведено строгое исследование асимптотической формы неустойчивых возмущений методом перевала. В результате определена аналитическая граница перехода от абсолютной МН к конвективной на плоскости параметров входного сигнала. Теоретические выводы подтверждаются результатами численного моделирования.

1. Модель и основные уравнения

Схема рассматриваемой модели приведена на рис. 1, а. Трубочатый поток электронов, направляемый однородным продольным магнитным полем B_0 , взаимодействует с обратной волной в цилиндрическом волноводе в условиях циклотронного резонанса

$$\omega_r + h_r V_z \approx \omega_H, \quad (1)$$

где ω_r и $h_r = h_r(\omega_r)$ — частота и постоянная распространения волны, соответственно, V_z — продольная скорость электронов, $\omega_H = eB_0/(m_e\gamma)$ — циклотронная частота, e и m — заряд и масса покоя электрона, γ — фактор Лоренца. Электроны, вращающиеся в продольном магнитном поле, являются циклотронными осцилляторами, которые неизохронны в силу релятивистской

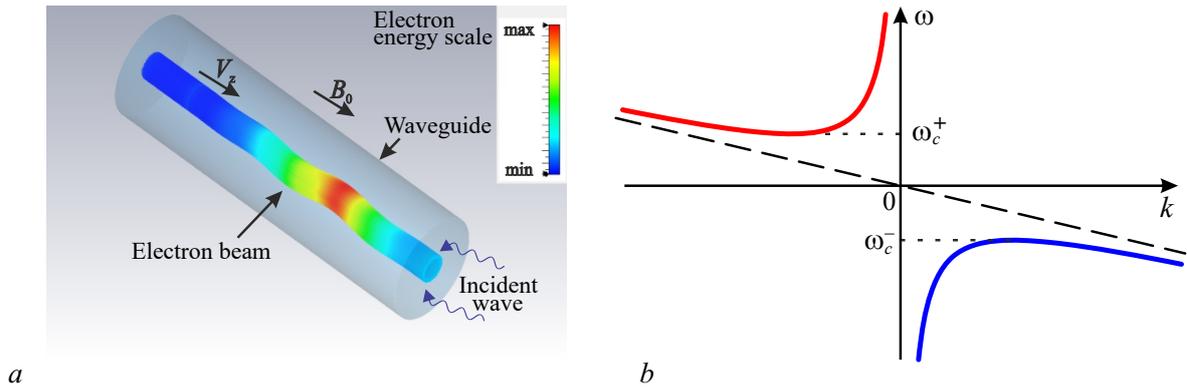


Рис. 1. *a* – схематическая модель резонансного циклотронного взаимодействия излучения со встречным прямолинейным электронным пучком; *b* – дисперсионная диаграмма $\omega(k)$ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* – scheme of the resonance cyclotron interaction of radiation with a counterpropagating rectilinear electron beam; *b* – dispersion diagram $\omega(k)$ (color online)

зависимости циклотронной частоты вращения от энергии $\omega_H = \omega_H(\gamma)$. Предполагается, что у электронов отсутствует поперечная скорость на входе в пространство взаимодействия. Такой поток формирует пассивную среду из неизохронных циклотронных электронов-осцилляторов в отличие от мазеров на циклотронном резонансе, где в электродинамическую систему встраивается поток вращающихся электронов, являющийся активной средой [17]. ЭМВ, распространяющаяся навстречу потоку невозбужденных электронов-осцилляторов, при выполнении условия (1) начинает поглощаться, вызывая поперечные колебания электронов. С ростом амплитуды этих колебаний условие циклотронного резонанса (1) нарушается, и поглощение насыщается.

Электронно-волновое взаимодействие в рассматриваемой модели описывается системой уравнений, хорошо известной из литературы [10, 12–14]:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} - \frac{\partial a}{\partial Z} = -p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i|p|^2 p = a. \quad (3)$$

Здесь (2) есть уравнение возбуждения волны электронным пучком, а (3) – уравнение движение электронов в поле волны, усредненное по периоду циклотронных осцилляций. В уравнениях (2), (3) a – нормированная медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля волны, $p = p_x + ip_y$ – нормированный поперечный импульс электронов, $Z \sim z$ и $\tau \sim (t - z/V_z)$ – безразмерные независимые переменные, x, y – поперечные координаты, z – продольная координата, а t – время. Все переменные в (2) являются безразмерными, подробнее см. [10, 12–14]. Поскольку электронный поток при $Z = 0$ обладает нулевой скоростью вращения, имеет место граничное условие

$$p(Z = 0) = 0. \quad (4)$$

На правую границу системы, при $Z = L$, где L – безразмерная длина, подаётся внешний гармонический сигнал, то есть

$$a(Z = L) = A_0 e^{i\omega\tau}, \quad (5)$$

где A_0 и ω – нормированные амплитуда и отстройка частоты сигнала от частоты циклотронного резонанса, соответственно.

2. Нелинейное дисперсионное соотношение

Рассмотрим решения уравнений (2), (3) в виде монохроматической волны с постоянной амплитудой: $a = A_0 e^{i(\omega\tau - kZ)}$, $p = P_0 e^{i(\omega\tau - kZ)}$. В [10] для этих решений было получено нелинейное дисперсионное соотношение

$$(\omega + k) (k - |P_0|^2) = -1, \quad (6)$$

причем комплексные амплитуды волн A_0 и P_0 связаны соотношением

$$|P_0|^2 = |A_0|^2 (\omega + k)^2. \quad (7)$$

Анализ соотношения (6) показывает, что имеется полоса непропускания $\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$, границы которой $\omega_c^\pm = \pm 2 - |A_0|^2$ смещаются в область более низких частот при увеличении амплитуды волны. Качественный вид дисперсионной диаграммы представлен на рис. 1, b. Для волн с $\omega > \omega_c^+$, соответствующих верхней ветви дисперсионной характеристики, выполняется критерий Лайтхилла [2–6]

$$\chi\beta > 0, \quad (8)$$

свидетельствующий о наличии МН. Здесь $\chi = \partial^2\omega/\partial k^2$ – параметр дисперсии групповой скорости, а $\beta = -\partial\omega/\partial|A_0|^2$ – параметр нелинейности. С учётом (6) нетрудно найти выражения для этих параметров:

$$\chi = -\frac{2}{(k - |P_0|^2)^3}, \quad \beta = \frac{1}{(k - |P_0|^2)^4}. \quad (9)$$

Если выбрать частоту входного гармонического сигнала в полосе непропускания и начать увеличивать его амплитуду, то рано или поздно эта частота сравняется с критической ω_c^+ . Вместо циклотронного поглощения станет возможным распространение незатухающих волн (нелинейное туннелирование). Однако анализ нелинейного дисперсионного соотношения проводится для безграничной среды, тогда как рассматриваемая система принципиально ограничена в пространстве, поскольку граничные условия (4), (5) ставятся на разных концах пространства взаимодействия. Как показано в [10], критическое значение частоты, при котором начинается распространение ЭМВ, отличается от ω_c^+ и определяется соотношением

$$\omega = 2 - \frac{1}{2}|A_0|^2. \quad (10)$$

Отметим, что (10) в точности соответствует связи между частотой и амплитудой точного решения в виде солитона [10, 12–14]. Действительно, МН приводит к тому, что туннелирующая волна разбивается на бегущие солитоны огибающей (см. [10]).

3. Анализ характера модуляционной неустойчивости

Чтобы определить характер неустойчивости (абсолютная или конвективная), будем исследовать асимптотическую форму неустойчивых возмущений на бесконечно больших временах [7, 18, 19]. Поскольку МН есть неустойчивость монохроматической волны относительно медленных модуляций с частотами, лежащими в небольшом интервале вблизи несущей частоты, зададим малые возмущения монохроматического решения

$$\begin{aligned} a &= (A_0 + \tilde{a}(Z, \tau)) e^{i(\omega\tau - kZ)}, \\ p &= (P_0 + \tilde{p}(Z, \tau)) e^{i(\omega\tau - kZ)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $|\tilde{a}(Z, \tau)| \ll |A_0|$, $|\tilde{p}(Z, \tau)| \ll |P_0|$, а ω и k связаны дисперсионным соотношением (6). Следуя [6–9], будем искать решение в виде пары сателлитов, равноотстоящих от несущей частоты:

$$\begin{aligned}\tilde{a} &= a_+ e^{i(\Omega\tau - KZ)} + a_- e^{-i(\Omega\tau - KZ)}, \\ \tilde{p} &= p_+ e^{i(\Omega\tau - KZ)} + p_- e^{-i(\Omega\tau - KZ)}.\end{aligned}\quad (12)$$

После подстановки (11) и (12) в исходные уравнения (2), (3) и линеаризации системы получим дисперсионное соотношение для частоты Ω и волнового числа K малого возмущения. Корни этого уравнения можно записать в явном виде:

$$\Omega(K) = -K + \frac{K(\omega + k)^2}{1 + (\omega + k)^2(K^2 - K_0^2)} \pm \frac{K(\omega + k)^2 \sqrt{(\omega + k)^2(K^2 - K_0^2)}}{1 + (\omega + k)^2(K^2 - K^2)}, \quad (13)$$

где введено обозначение $K_0^2 = 2|P_0|^2/(\omega + k)$. Напомним, что мы рассматриваем верхнюю ветвь дисперсионной характеристики, где имеет место МН (см. рис. 1, b). При этом $(\omega + k) > 0$ и $K_0^2 > 0$.

Если считать K вещественным, в области волновых чисел $K^2 < K_0^2$ корни $\Omega(K)$ будут комплексными. Для инкремента неустойчивости $\lambda = -\text{Im}[\Omega(K)]$ получим следующее выражение:

$$\lambda(K) = |K| \frac{(\omega + k)^3 \sqrt{K_0^2 - K^2}}{1 + (\omega + k)^2(K^2 - K^2)}. \quad (14)$$

Из соотношения (14) следует, что на верхней ветви дисперсионной характеристики действительно имеет место МН, что соответствует выводам, основанным на критерии Лайтхилла (см. раздел 2). На рис. 2 приведена зависимость инкремента неустойчивости от K и $|P_0|$. Видно, что с ростом амплитуды волны область волновых чисел, в которой имеет место МН, расширяется.

Для более строгого анализа будем считать и Ω , и K комплексными. Следуя [7, 18, 19], представим общее решение для малого возмущения поля в виде интеграла Фурье

$$\tilde{a}(Z, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_K e^{i(\Omega(K)\tau - KZ)} dK. \quad (15)$$

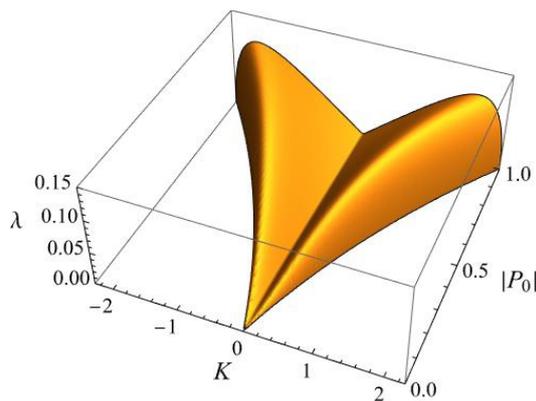


Рис. 2. Инкремент МН $\lambda(K)$ как функция K и $|P_0|$ при $\omega = 2$

Fig. 2. Increment of the MI $\lambda(K)$ as a function of K and $|P_0|$ at $\omega = 2$

Асимптотическая форма интеграла (15) при условии $\tau \rightarrow \infty$ оценивается методом перевала. При этом

$$\tilde{a}(Z, \tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\text{Im}[\Omega(K_s)]\tau}, \quad (16)$$

где K_s — точка перевала или седловая точка, в которой $d\Omega(K_s)/dK - Z/\tau = 0$ [7, 18, 19].

Неустойчивость является абсолютной, если в любой фиксированной точке Z при $\tau \rightarrow \infty$ возмущение неограниченно нарастает во времени. В соответствии с оценкой (16) это условие соответствует неравенству

$$\text{Im}[\Omega(K_s)] < 0. \quad (17)$$

Точка перевала в пределе $Z/\tau \rightarrow 0$ определяется из условия нулевой комплексной групповой скорости

$$\frac{d\Omega}{dK} = 0. \quad (18)$$

При этом контур интегрирования в (15) деформируется таким образом, чтобы проходить через точку перевала по линии наискорейшего спуска.

Уравнение (18) решается численно совместно с дисперсионным соотношением (13). Всего существует 6 точек перевала K_s^i , которым соответствуют корни $\Omega_i(K_s)$, $i = 1, \dots, 6$. Занумеруем их как показано на рис. 3, где приведен пример зависимостей $\text{Re}\Omega_i$ и $\text{Im}\Omega_i$ от несущей частоты ω при некотором фиксированном значении $|P_0|$. Корни обладают симметрией $\Omega_{1,2,3} = -\Omega_{6,5,4}$, что, очевидно, обусловлено выбором возмущения в виде пары симметричных сателлитов (см. (12)).

При любой фиксированной амплитуде $|P_0|$ существует некоторое критическое значение несущей частоты $\omega = \omega_{cr}$, такое, что при $\omega > \omega_{cr}$ все точки перевала K_s лежат на вещественной оси. Соответствующие корни дисперсионного соотношения (13) при этом также являются вещественными, то есть $\text{Im}[\Omega(K_s)] = 0$. Это означает, что при $\omega > \omega_{cr}$ условие (17) не выполняется, следовательно, МН является конвективной.

Когда частота ω становится ниже критического значения, в K -плоскости появляются две пары седловых точек с ненулевой мнимой частью. Соответствующие им корни Ω_i становятся комплексно сопряженными: $\Omega_2 = \Omega_3^*$, $\Omega_4 = \Omega_5^*$ (см. рис. 3). Корни Ω_1, Ω_6 остаются действительными. Очевидно, что в каждой паре комплексно-сопряженных корней для одного из них выполняется условие (17), следовательно МН является абсолютной.

Рис. 4 иллюстрирует изменение положения корней в комплексной плоскости при изменении ω . С уменьшением ω вещественные части комплексных корней уменьшаются по абсолютному значению, а мнимые, наоборот, возрастают. Когда несущая частота становится меньше частоты отсечки ω_c^+ , волна становится затухающей и говорить о МН, очевидно, не имеет смысла.

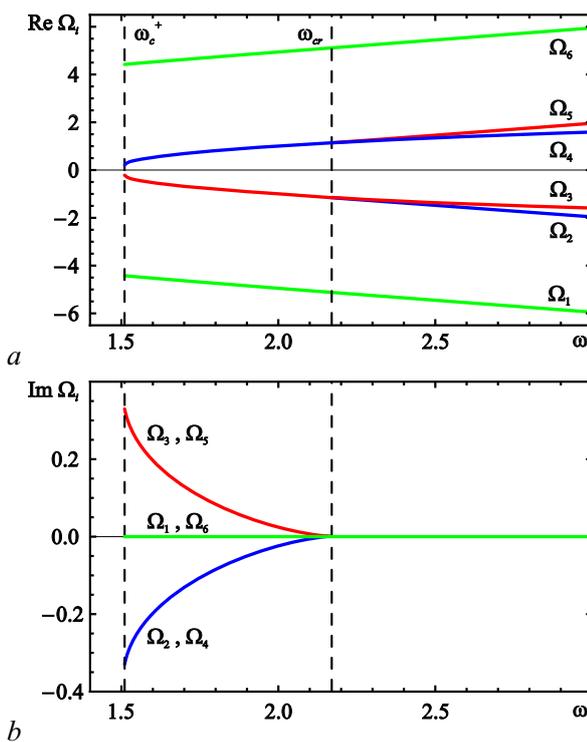


Рис. 3. Зависимости вещественных (a) и мнимых (b) частей корней характеристического уравнения Ω_i от несущей частоты ω при $|P_0| = 0.7$. Критическое значение $\omega_{cr} = 2.18$ соответствует смене характера МН (цвет онлайн)

Fig. 3. Dependences of the real (a) and imaginary (b) parts of the roots of the characteristic equation Ω_i on the carrier frequency ω at $|P_0| = 0.7$. The critical value $\omega_{cr} = 2.18$ corresponds to the change of the character of MI (color online)

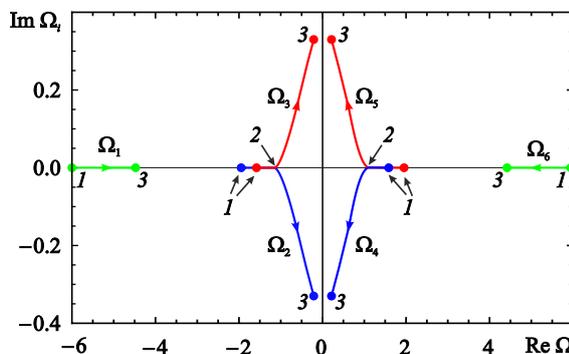


Рис. 4. Изменение положения корней Ω_i в комплексной плоскости при уменьшении частоты от значения $\omega = 3.00$ (точки 1) до частоты отсечки $\omega_c^+ = 1.51$ (точки 3) при $|P_0| = 0.7$. Критическое значение $\omega_{cr} = 2.18$ (точки 2) соответствует смене характера МН (цвет онлайн)

Fig. 4. Positions of the roots Ω_i in the complex plane as the frequency decreases from $\omega = 3.00$ (points 1) to the cutoff frequency $\omega_c^+ = 1.51$ (points 3) at $|P_0| = 0.7$. The critical value $\omega_{cr} = 2.18$ (points 2) corresponds to the change of the character of MI (color online)

4. Численное моделирование

Сопоставим результаты теоретического анализа характера МН с численным моделированием. Уравнения (2), (3) с граничными условиями (4), (5) интегрировались с использованием явной конечно-разностной схемы второго порядка точности по обоим независимым переменным.

На рис. 5 представлено разбиение плоскости параметров $(\omega, |A_0|)$ на области различных динамических режимов. Штриховой линией показана граница полосы непропускания, ниже которой, в области 1, происходит затухание входного сигнала. Эта граница полностью согласуется с теоретической формулой (10). Выше нее, в области 2, распространение волны носит нестационарный характер, то есть наблюдаются режимы автомодуляции. В этой области МН является абсолютной. Отметим, что вблизи границы генерируются близкие к периодическим последовательности бегущих солитонов, однако по мере удаления от границы форма генерируемого сигнала начинает носить сложный, нерегулярный характер (подробнее см. [10]).

В области 3, где МН становится конвективной, по окончании некоторого переходного процесса устанавливается режим стационарного распространения волны. Установившиеся зависимости $|a(Z)|$ и $|p(Z)|$ являются периодическими. Соответствующие аналитические решения были найдены в [10]. Сплошная линия на рис. 5 соответствует аналитической границе смены характера МН. Для ее построения рассчитывались критические значения ω_{cr} при различных амплитудах $|P_0|$ и далее с помощью соотношений (6) и (7) находилась соответствующая зависимость $\omega_{cr}(|A_0|)$. Однако следует заметить, что найденная численно граница смены характера МН достаточно сильно отличается от теоретической. Это, очевидно, объясняется тем, что теоретический анализ в разделе 3 был проведен для безграничной системы, тогда как система с граничными условиями (4) и (5) является принципиально ограниченной и имеет конечную длину L . Отражение волны от левой границы препятствует сносу возмущений вдоль системы в случае конвективной МН.

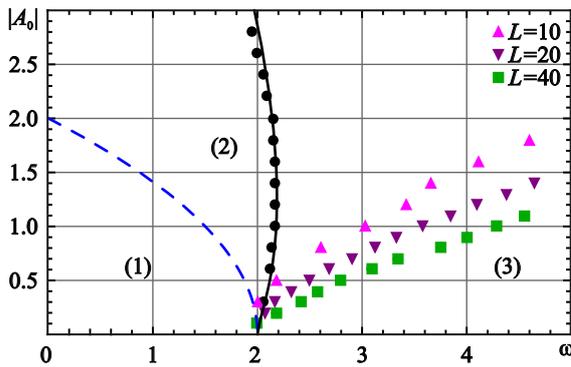


Рис. 5. Области циклотронного поглощения (1), автомодуляции (2) и стационарного распространения сигнала (3) на плоскости параметров $(\omega, |A_0|)$. Штриховая линия – граница непропускания (10). Сплошная линия – теоретическая граница смены характера МН. Треугольники и квадраты – численные границы смены характера МН для несогласованной системы при различной длине L , кружки – для согласованной системы (цвет онлайн)

Fig. 5. Domains of non-transmission (1), self-modulation regimes (2), and steady-state transmission (3) on the $(\omega, |A_0|)$ parameter plane. The dashed line is the boundary of non-transmission (10). The solid line is the theoretical boundary of the change in the nature of MI. Triangles and squares correspond to numerical boundaries of the change in the nature of MI for the unmatched system at different lengths L , circles correspond to the matched system (color online)

Соответственно, граница установления стационарного режима существенно сдвигается в область более высоких частот, причем, чем больше длина системы, тем сильнее выражен этот эффект (см. рис. 5).

Представляет интерес исследование смены характера МН для системы, которая согласована на левой границе, что позволяет избавиться от отражений. Этого можно добиться с помощью плавного изменения магнитного поля вдоль системы. Конкретно в численную модель добавлялся участок согласования длиной $Z_0 < L$, на котором в уравнение движения вводилась зависящая от Z частотная расстройка:

$$\frac{\partial p}{\partial Z} + i(\Delta(Z) + |p|^2)p = a, \quad (19)$$

которая выбиралась в виде

$$\Delta(Z) = \begin{cases} \Delta_{\max}(Z_0 - Z)^2/Z_0^2, & 0 \leq Z \leq Z_0, \\ 0, & Z_0 \leq Z \leq L. \end{cases} \quad (20)$$

Зависимость (20) моделирует плавное нарастание магнитного поля вдоль направления влета электронов в пространство взаимодействия

в области $0 \leq Z \leq Z_0$. При $Z = Z_0$ магнитное поле достигает значения, соответствующего циклотронному резонансу, и далее остается постоянным. При этом расстройка обращается в нуль.

Моделирование согласованной системы показывает, что при достаточно протяженном участке согласования отражения практически не наблюдаются. Численная граница смены характера МН, показанная на рис. 5 кружками, хорошо согласуется с теоретической, причем результаты моделирования практически не зависят от параметров, входящих в (20). Конкретно представленные результаты получены при $\Delta_{\max} = 2$, $Z_0 = 10$ и $L = 23$, то есть длина однородной части системы равна 13.

Рис. 6 иллюстрирует пространственно-временную динамику поля при различных значениях частоты входного сигнала для несогласованной (a, c, e) и согласованной (b, d, f) системы. Для согласованной системы показан только однородный участок, $Z_0 \leq Z \leq L$. Рисунки 6, a, b

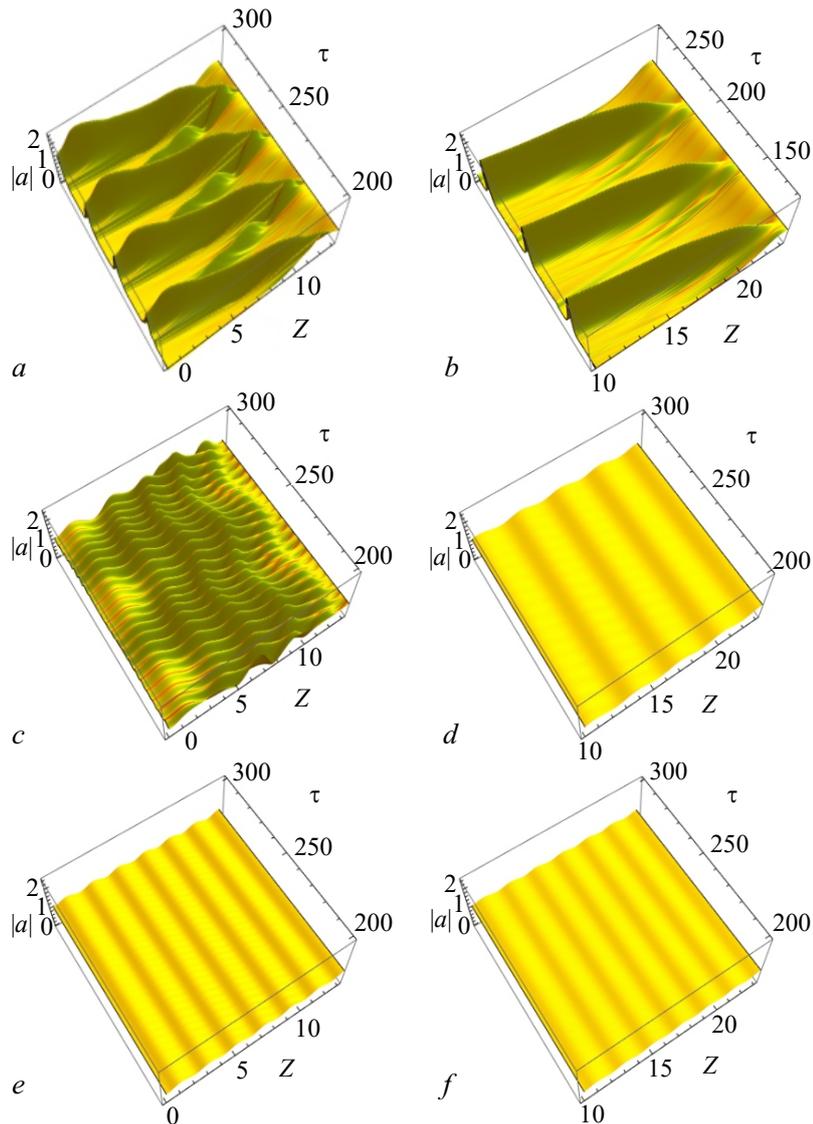


Рис. 6. Пространственно-временные диаграммы амплитуды поля при $|A_0| = 1.0$ и различных значениях частоты входного сигнала: $\omega = 1.5$ (a, b), 2.5 (c, d), 3.5 (e, f). Рисунки (a, c, e) соответствуют несогласованной системе, (b, d, f) — согласованной (цвет онлайн)

Fig. 6. Spatiotemporal diagrams of the field amplitude at $|A_0| = 1.0$ and different values of the input signal frequencies: $\omega = 1.5$ (a, b), 2.5 (c, d), 3.5 (e, f). Figures (a, c, e) correspond to the unmatched system (color online)

построены при $|A_0| = 1.0$ и $\omega = 1.5$, что соответствует точке, лежащей несколько выше границы пропускания на рис. 5. В обоих случаях развитие МН приводит к генерации периодической последовательности солитонов. Однако в несогласованной системе происходит частичное отражение солитона от левой границы и его распространение в направлении, попутном электронному потоку, что хорошо видно на рис. 6, *a*. В случае согласованной системы (см. рис. 6, *b*) видно, как вблизи правой границы происходит формирование солитонов, которые затем распространяются вдоль системы с постоянной скоростью.

При увеличении частоты до $\omega = 2.5$ мы попадаем в область конвективной МН (см. рис. 5). Однако в несогласованной системе из-за влияния отраженной волны стационарный режим не устанавливается. Образование солитонов при этом не происходит, а колебания амплитуды поля носят сложный, нерегулярный характер (см. рис. 6, *c*). В согласованной системе устанавливается стационарный режим (см. рис. 6, *d*). При этом амплитуда периодически зависит от координаты, что свидетельствует о наличии отраженного сигнала, однако его влияние невелико. Коэффициент стоячей волны (КСВ), который определяется как отношение максимального значения амплитуды к минимальному, равен 1.28.

При $\omega = 3.5$ стационарный режим устанавливается как для согласованной, так и для несогласованной системы (см. рис. 6, *e, f*). В обоих случаях амплитуда периодически зависит от координаты, однако для согласованной системы эта зависимость выражена слабее: для несогласованной системы КСВ равен 1.22, для согласованной — 1.13.

Заключение

В данной работе исследована МН при взаимодействии электромагнитной волны со встречным, изначально прямолинейным потоком электронов в условиях циклотронного резонанса. Нелинейный характер зависимости циклотронной частоты от энергии электронов приводит к сдвигу полосы циклотронного поглощения и проявлению эффекта нелинейного туннелирования при увеличении мощности или частоты падающей волны. Проведен строгий анализ характера МН. Путем анализа асимптотической формы возмущений, вычисленной методом перевала, найдены условия, при которых МН является абсолютной или конвективной, и построена граница смены характера МН на плоскости параметров входного сигнала.

Численное моделирование показывает, что с увеличением частоты входного сигнала нестационарные автомодуляционные режимы, которые соответствуют абсолютной МН, сменяются стационарным одночастотным прохождением сигнала, обусловленным конвективной МН. Однако принципиальное влияние отражений в пространственно-ограниченной системе осложняет сопоставление с теоретическими выводами. Проведено моделирование системы, согласованной на границе, через которую встраивается электронный поток. В этом случае граница смены характера МН хорошо согласуется с теоретической зависимостью, полученной из анализа характера МН. В согласованной системе облегчается генерация периодических последовательностей солитонов. Подобные режимы представляют интерес с точки зрения генерации частотных гребенок в микроволновом диапазоне.

Список литературы

1. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems // Proc. R. Soc. Lond. A. 1967. Vol. 299, no. 1456. P. 59–76. DOI: 10.1098/rspa.1967.0123.
2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 696 с.
3. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 328 с.
4. Островский Л. А., Потапов А. И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 398 с.

5. Zakharov V. E., Ostrovsky L. A. Modulation instability: The beginning // *Physica D*. 2009. Vol. 238, no. 5. P. 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
6. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: URSS, 2021. 312 с.
7. Рыскин Н. М. Колебания и волны в нелинейных активных средах. Саратов: Издательство Саратовского университета, 2017. 102 с.
8. Балякин А. А., Рыскин Н. М. Смена характера модуляционной неустойчивости вблизи критической частоты // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30, № 5. С. 6–13.
9. Balyakin A. A., Ryskin N. M. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 34–42.
10. Rostuntsova A. A., Ryskin N. M., Zotova I. V., Ginzburg N. S. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption // *Phys. Rev. E*. 2022. Vol. 106, no. 1. P. 014214. DOI: 10.1103/PhysRevE.106.014214.
11. Newell A. C. Nonlinear tunnelling // *J. Math. Phys.* 1978. Vol. 19, no. 5. P. 1126–1133. DOI: 10.1063/1.523759.
12. Зотова И. В., Гинзбург Н. С., Железнов И. В., Сергеев А. С. Модуляция интенсивного СВЧ-излучения при резонансном взаимодействии со встречным потоком невозбужденных циклотронных осцилляторов // *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40, № 12. С. 1–10.
13. Zotova I. V., Ginzburg N. S., Sergeev A. S., Kocharovskaya E. R., Zaslavsky V. Y. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2014. Vol. 113, no. 14. P. 143901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.143901.
14. Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Кочаровская Е. Р., Сергеев А. С., Железнов И. В., Заславский В. Ю. Солитоны самоиндуцированной прозрачности и диссипативные солитоны в системах микроволновой электроники // *Известия вузов. Радиофизика*. 2020. Т. 63, № 9. С. 796–824.
15. Benirschke D. J., Han N., Burghoff D. Frequency comb ptychography // *Nat. Commun.* 2021. Vol. 12, no. 1. P. 4244. DOI: 10.1038/s41467-021-24471-4.
16. Hagmann M. J. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy // *AIP Advances*. 2018. Vol. 8, no. 12. P. 125203. DOI: 10.1063/1.5047440.
17. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. Индуцированное излучение возбужденных классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике // *Известия вузов. Радиофизика*. 1967. Т. 10, № 9. С. 1414–1453.
18. Кузелев М. В., Рухадзе А. А. Методы теории волн в средах с дисперсией. М.: Физматлит, 2007. 272 с.
19. Barletta A., Celli M. Convective to absolute instability transition in a horizontal porous channel with open upper boundary // *Fluids*. 2017. Vol. 2, no. 2. P. 33. DOI: 10.3390/fluids2020033.

References

1. Benjamin TB. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1967;299(1456):59–76. DOI: 10.1098/rspa.1967.0123.
2. Dodd RK, Eilbeck JC, Gibbon JD, Morris HS. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London: Academic Press; 1982. 630 p.
3. Newell AC. *Solitons in Mathematics and Physics*. Philadelphia: SIAM; 1985. 260 p. DOI: 10.1137/1.9781611970227.
4. Ostrovsky LA, Potapov AI. *Modulated Waves: Theory and Applications*. Baltimore, MD, USA: The Johns Hopkins University Press; 1999. 369 p.

5. Zakharov VE, Ostrovsky LA. Modulation instability: The beginning. *Physica D*. 2009;238(5): 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
6. Ryskin NM, Trubetskov DI. *Nonlinear Waves*. Moscow: URSS; 2021. 312 p. (in Russian).
7. Ryskin NM. *Oscillations and Waves in Nonlinear Active Media*. Saratov: Saratov University Publishing; 2017. 102 p. (in Russian).
8. Balyakin AA, Ryskin NM. A change in the character of modulation instability in the vicinity of a critical frequency. *Tech. Phys. Lett.* 2004;30(3):175–177. DOI: 10.1134/1.1707158.
9. Balyakin AA, Ryskin NM. Modulation instability in a nonlinear dispersive medium near cut-off frequency. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2004;7(1):34–42.
10. Rostuntsova AA, Ryskin NM, Zotova IV, Ginzburg NS. Modulation instability of an electromagnetic wave interacting with a counterpropagating electron beam under condition of cyclotron resonance absorption. *Phys. Rev. E*. 2022;106(1):014214.
11. Newell AC. Nonlinear tunnelling. *J. Math. Phys.* 1978;19(5):1126–1133. DOI: 10.1063/1.523759.
12. Zotova IV, Ginzburg NS, Zheleznov IV, Sergeev AS. Modulation of high-intensity microwave radiation during its resonant interaction with counterflow of nonexcited cyclotron oscillators. *Tech. Phys. Lett.* 2014;40(6):495–498. DOI: 10.1134/S1063785014060285.
13. Zotova IV, Ginzburg NS, Sergeev AS, Kocharovskaya ER, Zaslavsky VY. Conversion of an electromagnetic wave into a periodic train of solitons under cyclotron resonance interaction with a backward beam of unexcited electron-oscillators. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113(14):143901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.143901.
14. Ginzburg NS, Zotova IV, Kocharovskaya ER, Sergeev AS, Zheleznov IV, Zaslavsky VY. Self-induced transparency solitons and dissipative solitons in microwave electronic systems. *Radio-physics and Quantum Electronics*. 2021;63(9–10):716–741. DOI: 10.1007/s11141-021-10092-w.
15. Benirschke DJ, Han N, Burghoff D. Frequency comb ptychography. *Nat. Commun.* 2021;12(1):4244. DOI: 10.1038/s41467-021-24471-4.
16. Hagemann MJ. Scanning frequency comb microscopy—A new method in scanning probe microscopy. *AIP Advances*. 2018;8(12):125203. DOI: 10.1063/1.5047440.
17. Gaponov AV, Petelin MI, Yulpatov VK. The induced radiation of excited classical oscillators and its use in high-frequency electronics. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1967;10(9–10): 794–813. DOI: 10.1007/BF01031607.
18. Kuzelev MV, Rukhadze AA. *Methods of Wave Theory in Dispersive Media*. Singapore: World Scientific; 2009. 272 p. DOI: 10.1142/7231.
19. Barletta A, Celli M. Convective to absolute instability transition in a horizontal porous channel with open upper boundary. *Fluids*. 2017;2(2):33. DOI: 10.3390/fluids2020033.



Ростунцова Алёна Александровна — родилась в Саратове (1998). Окончила с отличием магистратуру Института физики СГУ (2021). В настоящее время обучается в аспирантуре СГУ (с 2021). Младший научный сотрудник Саратовского филиала ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ-электроника, генерация коротких микроволновых импульсов.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 603950 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46
 Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: rostuncova@mail.ru
 ORCID: 0000-0002-6795-2108
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1055913



Рыскин Никита Михайлович — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Доктор физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
E-mail: ryskinm@info.sgu.ru
ORCID: 0000-0001-8501-6658
AuthorID (eLibrary.Ru): 29838