

УДК 621.391 : 519.872.6

© 2023 г. Б.Я. Лихтциндер, А.Ю. Привалов

**ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ ДЛЯ МОМЕНТОВ ОЧЕРЕДИ
ПРИ НЕОРДИНАРНОМ ПУАССОНОВСКОМ ПОТОКЕ
ДЛЯ ОЧЕРЕДЕЙ ПАКЕТОВ В СИСТЕМАХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ**

Предлагается подход для обобщения полученных авторами ранее формул для первого и второго моментов очереди в системе массового обслуживания с неординарным пуассоновским входным потоком, одним прибором и постоянным временем обслуживания на случай переменного времени обслуживания. Время обслуживания предполагается случайной величиной с конечным множеством значений. Эта модель адекватна для широкого класса систем пакетной передачи информации, так как в реальных системах время передачи пакета может принимать только конечное число значений.

Ключевые слова: система массового обслуживания, неординарный входной поток, моменты очереди, интервальный метод анализа очередей, пакетная передача информации.

DOI: 10.31857/S0555292323040046, **EDN:** YRRRNC

§ 1. Введение

Неординарный (групповой) пуассоновский поток [1, 2] может являться простой в анализе альтернативой более сложным моделям телетрафика с долговременными зависимостями, в частности, самоподобным (см., например, [3–6]), если речь идет о приближении статистических характеристик очереди, создаваемой трафиком для передачи в узле связи.

В предлагаемой статье выводятся формулы для первого и второго моментов очереди в системе массового обслуживания (СМО) с одним прибором и неординарным пуассоновским входным потоком для случая, когда время обслуживания заявки является случайной величиной с конечным числом значений. Предлагаемые формулы являются обобщением полученных ранее авторами статьи формул для случая, когда время обслуживания постоянно. При этом использовался интервальный метод (см. [1]).

Интервальный метод основан на определении чисел заявок, поступающих в течение интервалов времени, равных времени обслуживания одной заявки. Вводится понятие мгновенного коэффициента загрузки. Вместо анализа использовавшихся ранее двух вероятностных распределений анализируется одна характеристика – распределение вероятностей мгновенных коэффициентов загрузки. При этом учитывается, что среднее число событий, поступающих за постоянный интервал времени, не зависит от вида закона распределения потока событий.

Заметим, что при моделировании систем пакетной передачи информации, использующих в имеющемся канале конечный набор сигнально-кодовых конструкций, битовая скорость принимает конечное число возможных значений. А поскольку информационный пакет состоит из целого числа байт и при этом максимальный размер

пакета ограничен, то время передачи пакета (моделируемое временем обслуживания заявки) может принимать конечный набор значений.

Обобщение интервального метода на случай такого переменного времени обслуживания нуждается в обосновании, которое и приводится ниже.

§ 2. Обоснование интервального метода для переменного времени обслуживания и пуассоновского входного потока

Уравнение эволюции очереди в системе с одним обслуживающим прибором во время периода занятости прибора может быть записано в виде

$$q_i = q_{i-1} + m(\tau_i) - \delta_i, \quad \text{где} \quad \delta_i = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1} = m(\tau_i) = 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь q_i – очередь в момент ухода из системы i -й заявки, τ_i – интервал времени обслуживания i -й заявки, $m(\tau_i)$ – количество пришедших за этот интервал заявок из входного потока. Нетрудно видеть, что в период простоя прибора это уравнение тоже справедливо, причем для любой величины τ_i , а q_{i-1} и q_i – это нулевые очереди на интервалах простоя.

Для постоянного времени обслуживания заявки τ это позволяет рассматривать всю ось времени разделенной на временные окна размера τ , и в каждом таком окне эволюция очереди описывается уравнением (1). Далее в интервальном методе обе части уравнения возводятся в нужную степень, и полученное уравнение, в предположении эргодичности соответствующих случайных процессов и существования стационарного состояния системы, усредняется по реализации для получения уравнения относительно нужных статистических характеристик.

Но для переменного времени обслуживания такой подход встречает трудности при интерпретации уравнения (1) в периоды простоя прибора. Для формулировки подхода в этом случае сделаем несколько достаточно очевидных замечаний:

1. Вероятность для очереди принять какое-то значение при усреднении по реализации – это отношение времени, в течение которого очередь имеет данное значение, к общему времени, на котором рассматривается реализация, при устремлении этого общего времени к бесконечности.
2. Поэтому, если внутри этого большого интервала взять какой-либо период занятости, окруженный с обеих сторон периодами простоя, и менять длины этих периодов простоя так, чтобы их сумма оставалась неизменной (т.е. двигать период занятости по оси времени), то распределение очереди при этом не изменится.
3. Из некоррелированности и стационарности входного пуассоновского потока нетрудно видеть, что при любом таком сдвиге будет получаться возможная для рассматриваемой СМО реализация поведения очереди.

На основании этого перед тем как проводить усреднение по какой-либо реализации, взяв большой интервал времени, определим суммарную продолжительность всех периодов простоя на нем и разделим ее на интервалы, имеющие такое же распределение, как и распределение времени обслуживания. Далее в произвольном порядке расставим эти части между периодами занятости (при необходимости и периоды занятости можно ставить друг за другом, и периоды простоя тоже). Очевидно, что в общем случае только один из получившихся промежутков времени простоя может быть не равен требуемому значению. Но поскольку он будет один и имеет конечную величину по предположению о распределении времени обслуживания, то при устремлении интервала усреднения к бесконечности это не окажет влияния на результат.

Таким образом, мы можем считать, что уравнение (1), в котором τ_i имеет распределение времени обслуживания, справедливо на всей оси времени, и вычислять статистические характеристики очереди в этом предположении.

Далее можно уже действовать аналогично случаю постоянного времени обслуживания. А именно нетрудно видеть, что для δ_i справедливы следующие свойства:

$$(\delta_i)^k = \delta_i, \quad \delta_i m(\tau_i) = m(\tau_i), \quad \delta_i q_{i-1} = q_{i-1}, \quad \overline{m(\tau_i)} = \overline{\delta_i}, \quad (2)$$

где все равенства, кроме последнего, прямо следуют из (1), а усреднение в последнем равенстве берется в стационарном состоянии системы и представляет собой глобальное уравнение статистического баланса. Заметим, что в стационарном состоянии $\overline{m(\tau_i)} = \rho$, где ρ – коэффициент загрузки прибора.

Далее мы кратко приведем некоторые этапы последующих преобразований. Для вывода формулы средней очереди возведем обе части (1) в квадрат, используя при этом свойства (2):

$$(q_i)^2 = (q_{i-1})^2 + m^2(\tau_i) + \delta_i + 2q_{i-1}m(\tau_i) - 2q_{i-1} - 2m(\tau_i).$$

Теперь усредним обе части данного равенства, предполагая стационарное состояние системы, используя последнее равенство в (2), а также то, что в стационарном состоянии $\overline{(q_i)^2} = \overline{(q_{i-1})^2}$, так что эти члены сокращаются:

$$\overline{m^2(\tau_i)} - \overline{m(\tau_i)} + 2\overline{q_{i-1}m(\tau_i)} = 2\overline{q_{i-1}}.$$

Так как при пуассоновском входном потоке $\overline{q_{i-1}m(\tau_i)} = \overline{q_{i-1}} \cdot \overline{m(\tau_i)}$ вследствие независимости текущей очереди и следующих прибытий из входного потока, то

$$2\overline{q_{i-1}}(1 - \overline{m(\tau_i)}) = \overline{m^2(\tau_i)} - \overline{m(\tau_i)}.$$

Отсюда

$$\overline{q_{i-1}} = \frac{\overline{m^2(\tau_i)} - \overline{m(\tau_i)}}{2(1 - \overline{m(\tau_i)})}.$$

Если в числителе правой части вычесть и прибавить $\overline{m^2(\tau_i)}$ и использовать стандартное обозначение для дисперсии, то формула для средней очереди примет вид

$$\overline{q} = \frac{\mathbf{D}(m(\tau))}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2}. \quad (3)$$

Для получения формулы для второго момента очереди обе части уравнения (1) надо возвести в третью степень:

$$(q_i)^3 = (q_{i-1})^3 + 3(q_{i-1})^2(m(\tau_i) - \delta_i) + 3q_{i-1}(m(\tau_i) - \delta_i)^2 + (m(\tau_i) - \delta_i)^3.$$

После раскрытия скобок, применения свойств (2) и выделения общих множителей получим

$$(q_i)^3 = (q_{i-1})^3 + 3(q_{i-1})^2(m(\tau_i) - 1) + 3q_{i-1}(m^2(\tau_i) - 2m(\tau_i) + 1) + m^3(\tau_i) - 3m^2(\tau_i) + 3m(\tau_i) - \delta_i.$$

Усредняя это равенство в стационарном состоянии, учитывая, что в этом случае $(q_i)^3 = (\overline{q_{i-1}})^3$, и применяя последнее равенство в (2), получаем

$$3\overline{(q_{i-1})^2 m(\tau_i)} - 3\overline{(q_{i-1})^2} + 3\overline{q_{i-1} m^2(\tau_i)} - 6\overline{q_{i-1} m(\tau_i)} + 3\overline{q_{i-1}} + \overline{m^3(\tau_i)} - 3\overline{m^2(\tau_i)} + 2\overline{m(\tau_i)} = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю, пользуясь независимостью текущей очереди и будущих прибытий из входного пуассоновского потока, получаем

$$\overline{(q_{i-1})^2} (1 - \overline{m(\tau_i)}) = \overline{q_{i-1}} (\overline{m^2(\tau_i)} - 2\overline{m(\tau_i)} + 1) + \frac{\overline{m^3(\tau_i)} - 3\overline{m^2(\tau_i)} + 2\overline{m(\tau_i)}}{3}.$$

Добавляя и вычитая $\overline{m^2(\tau_i)}$ в скобках в правой части, несложно получить формулу

$$\overline{q^2} = \frac{\overline{q}}{(1 - \overline{m(\tau_i)})} (\mathbf{D}(m(\tau_i)) + (1 - \overline{m(\tau_i)})^2) + \frac{\overline{m^3(\tau_i)} - 3\overline{m^2(\tau_i)} + 2\overline{m(\tau_i)}}{3(1 - \overline{m(\tau_i)})},$$

и после подстановки выражения для $\overline{q}$ выражение для второго момента очереди примет вид

$$\overline{q^2} = \frac{\overline{m^2(\tau_i)} - \rho}{2} \left(\frac{\mathbf{D}(m(\tau_i))}{(1 - \rho)^2} + 1 \right) + \frac{\overline{m^3(\tau_i)} - 3\overline{m^2(\tau_i)} + 2\rho}{3(1 - \rho)}. \quad (4)$$

Таким образом, моменты размеров очереди зависят только от моментов чисел заявок, приходящих в систему в течение случайных интервалов времени обслуживания с заданным распределением вероятностей.

В следующем параграфе найдем необходимые моменты чисел заявок, приходящих в течение случайного интервала времени обслуживания.

§ 3. Моменты количества заявок, приходящих за интервал обслуживания

Рассмотрим пуассоновский поток с параметром λ независимых событий, i -е из которых ($i = 1, 2, \dots$) есть одновременное прибытие пачки пакетов для передачи, где размеры пачек B_i – независимые одинаково распределенные случайные величины с заданным распределением $\Pr(B_i = k) = f_k$, $k = 1, 2, \dots$. Все пакеты поступают в буфер, где образуют очередь для передачи. Времена передачи τ_i каждого пакета являются независимыми одинаково распределенными дискретными случайными величинами с заданным распределением $\Pr(\tau_i = t_k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots, K$.

Для применения формул (3) и (4) вычислим моменты $m(\tau_i)$ с помощью производящих функций. Пусть $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k$ – производящая функция размера пачки. Тогда для производящей функции случайной величины $m(\tau_i)$ имеем

$$G_{m(\tau_i)}(z) = \sum_{k=1}^K \Pr(\tau_i = t_k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_k)^n}{n!} e^{-\lambda t_k} (f(z))^n = \sum_{k=1}^K p_k e^{\lambda t_k (f(z) - 1)},$$

где использовалась пуассоновость потока пачек. Тогда

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_{m(\tau_i)}(z)}{\partial z} \right|_{z=1} &= \sum_{k=1}^K p_k \lambda t_k f'(z) e^{\lambda t_k (f(z) - 1)} \Big|_{z=1} = \lambda \overline{B} \sum_{k=1}^K p_k t_k = \\ &= \lambda \overline{\tau B} = \overline{m(\tau_i)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\overline{B}$ и $\overline{\tau}$ – математические ожидания соответствующих случайных величин. Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{m(\tau_i)}(z)}{(\partial z)^2} \Big|_{z=1} &= \sum_{k=1}^K p_k (\lambda t_k f''(z) + (\lambda t_k f'(z))^2) e^{\lambda t_k (f(z)-1)} \Big|_{z=1} = \\ &= \lambda \overline{\tau} (\overline{B^2} - \overline{B}) + \overline{\tau^2} (\lambda \overline{B})^2 = \overline{m^2(\tau_i)} - \overline{m(\tau_i)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\overline{m^2(\tau_i)} = \lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + \overline{\tau^2} (\lambda \overline{B})^2, \quad (6)$$

$$\mathbf{D}(m(\tau_i)) = \lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 (\overline{\tau^2} - (\overline{\tau})^2) = \lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \mathbf{D}(\tau). \quad (7)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 G_{m(\tau_i)}(z)}{(\partial z)^3} &= \sum_{k=1}^K p_k (\lambda t_k f'''(z) + 3(\lambda t_k)^2 f'(z) f''(z) + (\lambda t_k f'(z))^3) \times \\ &\times e^{\lambda t_k (f(z)-1)} \Big|_{z=1} = \lambda \overline{\tau} (\overline{B^3} - 3\overline{B^2} + 2\overline{B}) + 3\lambda^2 \overline{\tau^2} \overline{B} (\overline{B^2} - \overline{B}) + (\lambda \overline{B})^3 \overline{\tau^3} = \\ &= \overline{m^3(\tau_i)} - 3\overline{m^2(\tau_i)} + 2\overline{m(\tau_i)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \overline{m^3(\tau_i)} &= \lambda \overline{\tau} (\overline{B^3} - 3\overline{B^2} + 2\overline{B}) + 3\lambda^2 \overline{\tau^2} \overline{B} (\overline{B^2} - \overline{B}) + (\lambda \overline{B})^3 \overline{\tau^3} + \\ &+ 3(\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + \overline{\tau^2} (\lambda \overline{B})^2) - 2\lambda \overline{\tau} \overline{B} = \lambda \overline{\tau} \overline{B^3} + 3\lambda^2 \overline{\tau^2} \overline{B} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^3 \overline{\tau^3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (5)–(8) в (3) и (4), получим

$$\overline{q} = \frac{\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \mathbf{D}(\tau)}{2(1 - \lambda \overline{\tau} \overline{B})} - \frac{\lambda \overline{\tau} \overline{B}}{2} = \frac{\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \mathbf{D}(\tau)}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \overline{q^2} &= \frac{(\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \overline{\tau^2} - \rho)(\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \mathbf{D}(\tau) + (1 - \rho)^2)}{2(1 - \rho)^2} + \\ &+ \frac{\lambda \overline{\tau} (\overline{B^3} - 3\overline{B^2} + 2\overline{B}) + 3\lambda^2 \overline{\tau^2} \overline{B} (\overline{B^2} - \overline{B}) + (\lambda \overline{B})^3 \overline{\tau^3}}{3(1 - \rho)} = \\ &= \frac{(\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \mathbf{D}(\tau))^2 - (1 - \rho)(\lambda \overline{\tau} \overline{B^2} + (\lambda \overline{B})^2 \mathbf{D}(\tau) - \rho(1 - \rho)^2)}{2(1 - \rho)^2} + \\ &+ \frac{\lambda \overline{\tau} (\overline{B^3} - 3\overline{B^2} + 2\overline{B}) + 3\lambda^2 \overline{\tau^2} \overline{B} (\overline{B^2} - \overline{B}) + (\lambda \overline{B})^3 \overline{\tau^3}}{3(1 - \rho)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если в формулах (5)–(8) положить $\tau_i = \text{const}$, то получатся соответствующие формулы из [1], при этом (9) и (10) также превратятся в их аналоги из [1].

А если при случайном τ_i положить $B = 1$, т.е. перейти от группового пуассоновского входного потока к ординарному, то (9) и (10) превратятся в формулы Поллачека – Хинчина для первого и второго начальных моментов очереди в системе $M/G/1$.

§ 4. Заключение

В статье представлены формулы для первых двух моментов очереди в системе с одним прибором, неординарным пуассоновским потоком на входе и временем обслуживания, являющимся случайной величиной с конечным числом значений. При

переходе к постоянному времени обслуживания или к ординарному пуассоновскому потоку представленные формулы превращаются в известные формулы для этих случаев. Предложенный подход в принципе может быть использован для вывода формул моментов очереди и более высоких порядков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лихтциндер Б.Я., Привалов А.Ю., Моисеев В.И.* Неординарные пуассоновские модели трафика мультисервисных сетей // Пробл. передачи информ. 2023. Т. 59. № 1. С. 71–79. <https://www.mathnet.ru/ppi2392>
2. *Лихтциндер Б.Я.* Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Науч.-тех. изд-во «Горячая линия – Телеком», 2019.
3. *Yunhua R.* Evaluation and Estimation of Second-Order Self-similar Network Traffic // Comput. Commun. 2004. V. 27. № 9. P. 898–904. <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2004.02.003>
4. *Privalov A.Yu., Tsarev A.* Analysis and Simulation of WAN Traffic by Self-similar Traffic Model with OMNET // Proc. 10th Int. Wireless Communications and Mobile Computing Conf. (IWCMC'2014). Nicosia, Cyprus. Aug. 4–8, 2014. P. 629–634. <https://doi.org/10.1109/IWCMC.2014.6906429>
5. *Millán Naveas G., San Juan Urrutia E., Vargas Guzmán M.* A Simple Multifractal Model for Self-similar Traffic Flows in High-Speed Computer Networks // Comp. y Sist. 2019. V. 23. № 4. P. 1517–1521. <https://doi.org/10.13053/cys-23-4-2831>
6. *Вишневский В.М., Дудин А.Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автомат. и телемех. 2017. № 8. С. 3–59. <https://www.mathnet.ru/rus/at14562>

Лихтциндер Борис Яковлевич

Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара
b.lihtcinder@psuti.ru

Привалов Александр Юрьевич

Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара
privalov1967@gmail.com

Поступила в редакцию

17.01.2024

После доработки

03.02.2024

Принята к публикации

08.02.2024