

УДК 621.391 : 519.224.24 : 519.725.2

© 2023 г. А.Ю. Угловский, И.А. Мельников, И.А. Алексеев, А.А. Куреев

ОЦЕНКА НИЗКОГО УРОВНЯ ОШИБОК С ПОМОЩЬЮ ВЫБОРКИ ПО ЗНАЧИМОСТИ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ¹

Основной проблемой анализа кодов с малой плотностью проверок на четность является оценка чрезвычайно низкого уровня ошибок, возникающего при высоком отношении сигнал/шум. Популярным подходом к решению этой проблемы является метод выборки по значимости. В существующих работах в качестве выборочного распределения метода выборки по значимости используется нормальное распределение со смещенным средним значением, что приводит к большой дисперсии оценки. В свою очередь, равномерное распределение имеет равновероятные выборки во всем диапазоне, что может снизить дисперсию, но приведет к смещенной оценке. Мы предлагаем модифицированный метод выборки по значимости, который позволяет рассматривать равномерное распределение в качестве выборочного, и показываем, что эта оценка лучше, чем традиционная, основанная на нормальном распределении. Также показано, что существующие критерии невозможно применить для оценки точности метода выборки по значимости с равномерным распределением во всем диапазоне отношений сигнал/шум. Для решения этой проблемы предложена новая метрика, которая использует только скорость сходимости и не зависит от истинных данных.

Ключевые слова: коды с малой плотностью проверок (МПП-коды), тупиковые множества, выборка по значимости, низкий уровень ошибок.

DOI: 10.31857/S0555292323040010, **EDN:** PFOWBX

§ 1. Введение

Коды с малой плотностью проверок (МПП-коды) широко используются в системах связи, включая волоконно-оптические линии связи (ВОЛС), сети Wi-Fi и системы 5G. Эффективность МПП-кодов во многом определяется положением низкого уровня ошибки (НУО) – области значений отношения сигнал/шум (ОСШ), в которой вероятность ошибки на блок практически не изменяется [1]. Однако оценка вероятности ошибки на блок в НУО является сложной задачей, поскольку требует длительного моделирования. В частности, для ВОЛС требуется [2] НУО порядка 10^{-12} , который можно оценить с помощью метода Монте-Карло (МК) за чрезвычайно большое время ввиду необходимости проведения большого количества испытаний.

Для уменьшения количества испытаний можно использовать метод выборки по значимости (ВЗ). ВЗ является распространенным методом оценки характеристик случайной величины с заданным распределением с помощью использования выборок из другого распределения [3, 4]. В частности, ВЗ является одним из методов

¹ Исследование выполнено в рамках Госзадания № FFNU-2022-0035 ИППИ РАН.

уменьшения дисперсии оценки, который используется для улучшения сходимости метода МК. Обычно начальное распределение величин неизвестно и может быть только оценено, в то время как плотность выборки задана. Однако в задаче оценки НУО МПП-кода исходная плотность хорошо известна, но оцениваемая функция слишком сложна и равна нулю в наиболее вероятной области определения случайной величины. Поэтому для МПП-кодов ВЗ широко используется для изучения очень редких ошибок передачи [5–8]. Как показано в [7], это существенно ускоряет применение метода МК.

В существующих исследованиях используется нормальная выборка со смещенным средним значением. Нормальное распределение сосредоточено в области среднего значения, что приводит к значительному сдвигу выборочной плотности распределения и большой дисперсии оценки. В свою очередь, равномерное распределение не концентрируется вблизи среднего значения, что гарантирует небольшую дисперсию оценки при такой же частоте появления ошибок, как и при использовании нормального распределения. Однако использование равномерного распределения в общей системе оценки ВЗ приводит к смещенной оценке. В данной статье разработан модифицированный метод ВЗ, использующий выборку по значимости с равномерным распределением (ВЗ-Р).

Точность оценки НУО можно измерить с помощью среднеквадратической ошибки (СКО), что может занять много времени, если НУО мал. В литературе [9] известен подход, использующий нормализованную дисперсию, который можно применять только в том случае, если доверительные интервалы линейно зависят от стандартного отклонения. К сожалению, данное условие не выполняется при использовании равномерного распределения. В данной статье предложена новая метрика, которая применима при использовании ВЗ-Р.

Таким образом, в данной статье, во-первых, предложен метод ВЗ-Р для оценки НУО МПП-кодов, который основан на использовании выборки по значимости из равномерного распределения, а также показано его преимущество перед существующими подходами. Во-вторых, предложена новая метрика для оценки точности метода ВЗ-Р, которая явно не зависит от вида доверительного интервала и не зависит от истинного значения математического ожидания исследуемой функции.

Статья организована следующим образом. В § 2 вводятся основные понятия, используемые в статье. В § 3 описывается разработанный метод ВЗ-Р. В § 4 представлена новая метрика для оценки точности ВЗ-Р. В § 5 приводятся численные результаты, и § 6 завершает статью.

§ 2. Оценка низкого уровня ошибок с помощью выборки по значимости

2.1. Выборка по значимости. Суть метода ВЗ заключается в замене исходной плотности новой плотностью, которая позволяет сосредоточить внимание на событиях, представляющих интерес. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ – наблюдаемая случайная величина с плотностью распределения $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, и пусть $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция от $\mathbf{x}$, математическое ожидание которой $\mathbf{E}_\rho f(X) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ необходимо оценить. При применении метода ВЗ для вычисления $\mathbf{E}_\rho f(X)$ используется другая случайная величина Y с плотностью распределения $\rho^*(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Если для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ плотность распределения $\rho^*(\mathbf{y}) \neq 0$, тогда

$$\mathbf{E}_\rho f(X) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) \frac{\rho(\mathbf{y})}{\rho^*(\mathbf{y})} \rho^*(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \mathbf{E}_{\rho^*} [f(Y)w(Y)],$$

где $w(\mathbf{y}) = \frac{\rho(\mathbf{y})}{\rho^*(\mathbf{y})}$ – весовая функция.

Соответствующая несмещенная эмпирическая оценка принимает вид

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\rho} f(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Y_i) w(Y_i), \quad (1)$$

где $\{Y_i\}$ является последовательностью независимых случайных величин с одинаковым распределением и плотностью $\rho^*(\mathbf{y})$. Стоит отметить, что в качестве ρ^* нельзя взять произвольную плотность распределения, поскольку оценка (1) должна обладать конечной дисперсией для построения доверительных интервалов требуемой точности. Для улучшения сходимости оценку (1) можно разделить на математическое ожидание весовой функции:

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\rho} f(X) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Y_i) w(Y_i)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(Y_i)} = \frac{\sum_{i=1}^N f(Y_i) w(Y_i)}{\sum_{i=1}^N w(Y_i)}. \quad (2)$$

Поскольку $\rho^*(\mathbf{y}) \neq 0$ для всех $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, то

$$\mathbf{E}_{\rho^*} w(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\rho^*(\mathbf{y})} \rho^*(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1.$$

Таким образом, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\rho} f(X)$ сходится почти наверное к истинному значению $\mathbf{E}_{\rho} f(X)$.

В МПП-кодах ВЗ часто используется для оценки экстремально низкой вероятности отказа от декодирования в канале с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ-канале) $f(x) \equiv \mathbb{I}_{\mathbb{A}}(x)$, где x – логарифм отношения правдоподобия (ЛОП), $\mathbb{A}$ – множество значений ЛОП, которые приводят к ошибкам при декодировании, и $\mathbb{I}_{\mathbb{A}}$ – индикаторная функция множества $\mathbb{A}$. Поскольку множество $\mathbb{A}$ имеет сложную структуру, в общем случае не представляется возможным найти f аналитическими методами. Для сокращения количества испытаний необходимо найти $\rho^*(\mathbf{y})$, которое удовлетворяет двум условиям: $\Pr(Y \in \mathbb{A}) \sim 1$ и $\text{Var } w(Y) \sim 0$. Второе условие обеспечивает быструю сходимость весовой функции. Стоит отметить, что случай $\Pr(Y \in \mathbb{A}) \approx 1$ приводит к чрезвычайно высокой дисперсии w . Случай $\text{Var } w(Y) \approx 0$ является методом МК.

2.2. Тупиковые множества. МПП-коды можно представить в виде сильно разреженной проверочной матрицы $H \in \mathbb{F}_2^{m \times n}$ ($m < n$) с n столбцами и m строками. Кодовое слово представляется таким вектором-строкой $\mathbf{c}$, который удовлетворяет условию $H\mathbf{c}^T = 0$, где операции умножения и сложения выполняются в поле $\mathbb{F}_2$. Проверочную матрицу H МПП-кода можно представить в виде двудольного графа Таннера с проверочными и символьными вершинами, при этом строки матрицы соответствуют проверочным вершинам, а столбцы – символьным. Количество столбцов матрицы H равно длине кодового слова. Символьная вершина i и проверочная вершина j соединены тогда и только тогда, когда элемент h_{ij} матрицы H равен единице. Тупиковое множество (англ.: trapping set) (a, b) представляет собой набор из a символьных вершин и смежных с ними проверочных вершин в графе Таннера, b из которых имеют нечетное число вхождений в данное тупиковое множество. Известно, что тупиковые множества являются основными причинами ошибок декодирования при высоком ОСШ [10], что позволяет использовать их для нахождения $\rho^*(\mathbf{y})$. Этот факт использован в работе [11], которая описывает метод выборки по значимости со сдвигом среднего (СС-ВЗ). В ней рассматриваются тупиковые множества в проверочной матрице МПП-кода, и затем распределение ЛОП изменяется

в местах, где расположены символьные вершины выбранных тупиковых множеств. Таким образом, ошибки декодирования происходят чаще.

2.3. Метрики точности оценки. В литературе используются две основных метрики для сравнения точности различных оценок с помощью метода ВЗ. Первой метрикой является СКО для логарифмов вероятности ошибки на блок:

$$\text{СКО} = \sum_{\text{ОШ}} (\log \tilde{\mathbf{E}}_{\rho^*} \mathbb{I}_{\mathbb{A}}(X) - \log \mathbf{E}_{\rho} \mathbb{I}_{\mathbb{A}}(X))^2. \quad (3)$$

Данную метрику можно использовать только в том случае, если известны истинные значения вероятности ошибки на блок. К сожалению, для МПП-кодов с высокой корректирующей способностью истинные значения вероятности ошибки на блок можно вычислить только до некоторого порога, определяемого вычислительной мощностью устройств и временем, затраченным на получение этого истинного значения.

Известно, что каждая статистическая оценка характеризуется доверительными интервалами: чем меньше доверительный интервал, тем точнее результат оценки. Именно поэтому в качестве альтернативы в литературе предложена метрика γ , основанная на доверительных интервалах [6]:

$$\gamma(\rho^*) = \frac{1}{N} \left(\frac{\hat{\mathbf{E}}_{\rho^*} \mathbb{I}_{\mathbb{A}}^2(X)}{\hat{\mathbf{E}}_{\rho^*}^2 \mathbb{I}_{\mathbb{A}}(X)} - 1 \right).$$

Чем меньше γ , тем точнее оценка. Данную метрику можно использовать для оценки $\hat{\mathbf{E}}_{\rho^*}$, поскольку зависимость доверительных интервалов от стандартного отклонения является линейной. Для $\hat{\mathbf{E}}_{\rho^*}$ структура доверительного интервала становится неизвестной, что приводит к трудностям в получении точности оценки вероятности ошибки на блок. Тем не менее, в § 5 данная метрика также используется для оценки эффективности разработанного метода ВЗ-Р.

В свою очередь, метрика СКО является универсальной и может применяться для оценки $\tilde{\mathbf{E}}_{\rho^*}$ без изменений.

§ 3. Оценка низкого уровня ошибок

Рассмотрим распределение $Y \in \mathbb{R}^n$ с плотностью

$$\rho^*(\mathbf{y}) = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \prod_{i \in t} p_{IS}(\mathbf{y}_i) \prod_{j \notin t} p_{MC}(\mathbf{y}_j), \quad (4)$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, T – набор тупиковых множеств, i и j являются индексами символьных вершин, $p_{IS}(\cdot)$ – рассматриваемая плотность (равномерная или нормальная), и $p_{MC}(\cdot)$ – плотность ЛОП, полученная при передаче сигнала с помощью двоичной фазовой манипуляции по АБГШ-каналу, которая соответствует нормальному распределению с известной дисперсией канала:

$$p_{MC}(x) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} (x - 2/\sigma^2)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, для всех ненулевых кодовых слов каждая компонента вектора ЛОП, которая не принадлежит тупиковому множеству, имеет нормальное распределение со средним $\frac{2}{\sigma^2}$ и дисперсией $\frac{4}{\sigma^2}$.

В качестве выборочной плотности рассмотрим равномерное распределение $p_{IS}(x)$ в интервале $[a, b]$. Стоит отметить, что для данного распределения использование формулы (2) вместо (1) необходимо для получения несмещенной оценки.

Процедура оценки НУО с помощью ВЗ-Р разделена на три основных этапа: (i) поиск наиболее опасных тупиковых множеств, (ii) выбор параметров для каждого из распределений в выбранном диапазоне ОСШ, и (iii) сама оценка ВЗ. Рассмотрим подробнее каждый из этапов.

На первом этапе по заданному H выбираются потенциально опасные тупиковые множества, представляющие собой циклы и объединения двух циклов (см. [12]). Для нерегулярного кода также необходимо добавить к нумерованным тупиковым множествам столбцы единичного веса. Затем с помощью метода СС-ВЗ из всех тупиковых множеств исключаются менее опасные. Для этого выберем некоторый действительный параметр $\varepsilon < 1$ и порог $\theta \in (0, 1)$. Далее, для любого фиксированного тупикового множества t используется метод СС-ВЗ со следующей выборочной плотностью:

$$\rho^*(y) = \prod_{i \in t} p_{MC}\left(y_i - \frac{2\varepsilon}{\sigma^2}\right) \prod_{j \notin t} p_{MC}(y_j),$$

т.е. выборочная плотность также отвечает нормальному распределению со средним значением $\frac{2(1-\varepsilon)}{\sigma^2}$ и дисперсией $\frac{4}{\sigma^2}$. Если оценка $\Pr(Y \in A) < \theta$, то тогда тупиковое множество считается незначительным и может быть исключено из рассмотрения.

Параметр ε выбирается таким образом, чтобы более трети тупиковых множеств были незначительными. В рассматриваемом случае $\varepsilon = -5$, $\theta = 5 \cdot 10^{-2}$. Конечно, при использовании такого жадного алгоритма останется часть тупиковых множеств, которые не влияют на НУО, однако данный подход оставляет все опасные тупиковые множества и является быстрым.

На втором этапе после выбора тупиковых множеств происходит выбор параметров равномерного распределения для заданного ОСШ. Рассмотрим случайную величину $Y \in \mathbb{R}^n$ с плотностью

$$\rho^*(y) = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \prod_{i \in t} p_U(y_i) \prod_{j \notin t} p_{MC}(y_j),$$

где

$$p_U(x) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{4(1-k)}, & x \in \left[\frac{2k}{\sigma^2}, \frac{2(2-k)}{\sigma^2}\right], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad k < 0.$$

Для заданного порога $\theta_1 \in (0, 1)$ выберем наибольшее $k < 0$, при котором выполняется условие $\Pr(Y \in A) > \theta_1$.

На третьем этапе производится метод ВЗ с использованием формул (2) и (4).

§ 4. Новая метрика точности оценки низкого уровня ошибок

Основным недостатком СКО в качестве метрики точности оценки НУО является необходимость наличия истинных значений вероятности ошибки на блок, в то время как метрика γ требует линейной зависимости доверительного интервала от стандартного отклонения. В данном параграфе предложена новая метрика, которая не обладает вышеуказанными недостатками.

Известно, что аддитивные доверительные интервалы для математического ожидания имеют следующий вид:

$$(p - CN^{-\alpha}, p + CN^{-\alpha})$$

с некоторой константой $C > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. В данном выражении p – истинное значение статистики, а N – количество испытаний.

Введем метрику точности оценки α : чем выше α , тем более точные доверительные интервалы могут быть достигнуты, начиная с N испытаний. Это приводит к следующей теореме.

Теорема. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, а f_N – функция N переменных. Если существуют вещественные числа α , p и абсолютно непрерывная случайная величина η , такие что

$$N^\alpha (f_N(X_1, \dots, X_N) - p) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \eta, \quad (5)$$

то

$$\frac{\ln |f_N(X_1, \dots, X_N) - f_N(X_{N+1}, \dots, X_{2N})|}{-\ln N} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \alpha.$$

Доказательство. Для простоты будем писать f_N, f'_N вместо $f_N(X_1, \dots, X_N)$ и $f_N(X_{N+1}, \dots, X_{2N})$ соответственно. Легко видеть, что из (5) следует, что

$$N^\alpha (f_N - p) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \eta \quad \text{и} \quad N^\alpha (f'_N - p) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \eta',$$

где η' – независимая копия η . Тогда

$$N^\alpha |(f_N - p) - (f'_N - p)| = N^\alpha |f_N - f'_N| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} |\eta - \eta'|,$$

и для каждого вещественного числа x

$$\Pr\left(-\frac{\ln |f_N - f'_N|}{\ln N} < x\right) = \Pr\left(N^\alpha |f_N - f'_N| > N^{\alpha-x}\right).$$

Поскольку η является абсолютно непрерывной случайной величиной, то $W = |\eta - \eta'|$ и

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \Pr\left(N^\alpha |f_N - f'_N| > y\right) - \Pr(W > y) \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что $x < \alpha$, и значит, $\alpha - x > 0$ и

$$\begin{aligned} & \left| \Pr\left(-\frac{\ln |f_N - f'_N|}{\ln N} < x\right) \right| \leq \\ & \leq \left| \Pr\left(N^\alpha |f_N - f'_N| > N^{\alpha-x}\right) - \Pr(W > N^{\alpha-x}) \right| + \Pr(W > N^{\alpha-x}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Аналогично, если $x > \alpha$, то можно показать, что

$$\left| 1 - \Pr\left(-\frac{\ln |f_N - f'_N|}{\ln N} < x\right) \right| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0. \quad \blacktriangle$$

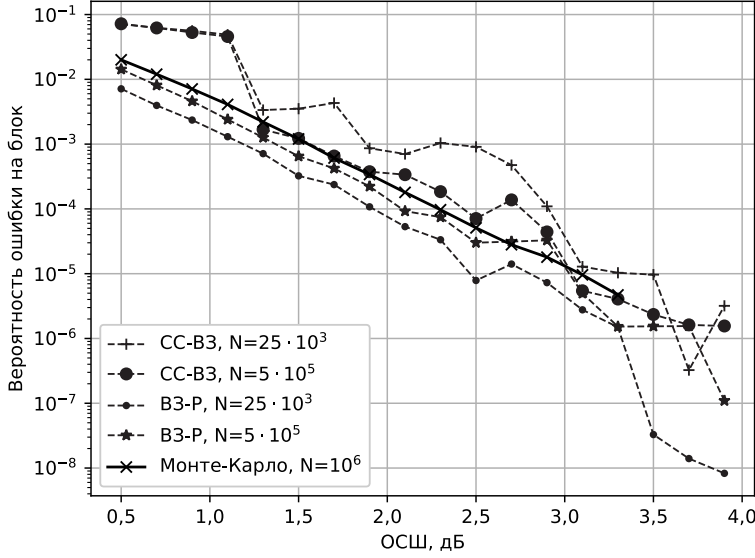


Рис. 1. Сравнение вероятности ошибки на блок для методов Монте-Карло, выборки по значимости со сдвигом среднего (СС-ВЗ) и предложенного метода выборки по значимости с равномерным распределением (ВЗ-Р)

Таким образом, α можно получить следующим образом:

$$\alpha = -\frac{1}{\ln N} \ln \left| \tilde{\mathbf{E}}_{\rho^*} \mathbb{I}_A(X) - \tilde{\mathbf{E}}'_{\rho^*} \mathbb{I}_A(X) \right|,$$

где $\tilde{\mathbf{E}}_{\rho^*} \mathbb{I}_A(X)$ и $\tilde{\mathbf{E}}'_{\rho^*} \mathbb{I}_A(X)$ – две независимые оценки вероятности ошибки на блок для метода ВЗ.

§ 5. Численные результаты

Для оценки эффективности метода ВЗ-Р, описанного в § 3, используется АБГШ-канал, в котором передается сигнал с двоичной фазовой манипуляцией, также используется Min-Sum декодер [13] и одна из наиболее широко используемых регулярных матриц МПП-кодов размера (96, 48) (см. [14]).

На рис. 1 представлены графики зависимости вероятности ошибки на блок от ОСШ для разных методов оценки НУО. Результаты показывают, что в некоторых точках СС-ВЗ немного ближе к истинным значениям, полученным с помощью метода МК, но в среднем ВЗ-Р демонстрирует более высокую точность оценки. Таким образом, область, в которой существуют значения, посчитанные с помощью метода МК (ОСШ $\in [0,5, 3,3]$), для $N = 25 \cdot 10^3$ испытаний метрика СКО равна 9,2 для СС-ВЗ и 3,8 для ВЗ-Р. В свою очередь, для $N = 5 \cdot 10^5$ испытаний метрика СКО равна 3,56 для СС-ВЗ и 0,87 для ВЗ-Р.

На рис. 2 изображена метрика γ для методов СС-ВЗ и ВЗ-Р. Стоит отметить, что оценка НУО с помощью СС-ВЗ по метрике γ лучше, чем ВЗ-Р, поскольку для СС-ВЗ величина γ ниже, чем для ВЗ-Р. Данный результат противоречит результатам, показанным на рис. 1. Причиной этого является тот факт, что метрика γ основывается на стандартном отклонении, связь которого с доверительными интервалами не является тривиальной. Поэтому $\gamma(\rho^*)$ невозможно применять к $\tilde{\mathbf{E}}_{\rho^*}$.

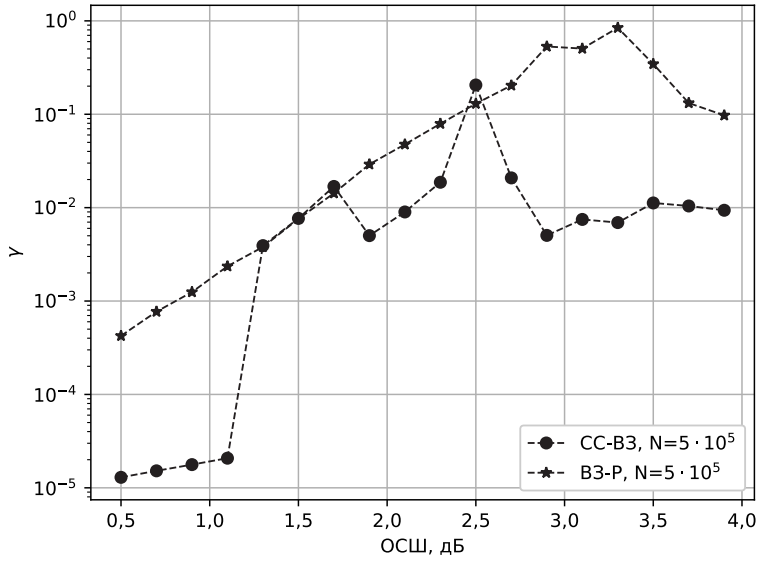


Рис. 2. Нормализованная дисперсия γ для методов CC-B3 и B3-P в зависимости от ОСШ

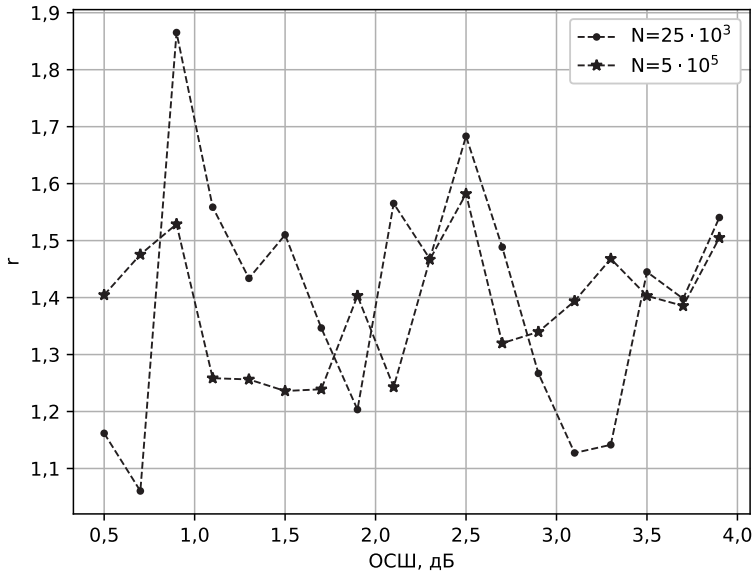


Рис. 3. Отношение $r = \alpha_{B3-P}/\alpha_{CC-B3}$ в зависимости от ОСШ

Рассмотрим применение новой метрики α к полученным результатам. На рис. 3 показано отношение r двух статистик α , т.е. $r = \alpha_{B3-P}/\alpha_{CC-B3}$, для $N = 25 \cdot 10^3$ и $N = 5 \cdot 10^5$ и для различных значений ОСШ.

Значения r превышают единицу при всех значениях ОСШ. Более того, с увеличением количества испытаний статистика r стабилизируется и стремится к своему

среднему арифметическому значению 1,4. Отсюда следует, что оценка НУО с помощью метода ВЗ-Р превосходит СС-ВЗ, что также показано с помощью СКО.

§ 6. Заключение

В данной статье разработан новый метод быстрой оценки низкого уровня ошибок МПП-кодов, который основан на выборке по значимости с равномерным распределением. Среднеквадратичная ошибка разработанного метода в три раза меньше ошибки метода на основе выборки по значимости с нормальным распределением. Для высоких значений ОСШ, при которых истинные значения вероятности ошибки на блок невозможно получить за разумное время, разработана новая метрика точности оценки, которая не требует ни истинных данных, ни явной формы доверительных интервалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kruglik S.A., Potapova V.S., Frolov A.A.* A Method for Constructing Parity-Check Matrices of Quasi-Cyclic LDPC Codes over $GF(q)$ // J. Commun. Technol. Electron. 2018. V. 63. № 12. P. 1524–1529. <https://doi.org/10.1134/S1064226918120112>
2. *Smith B.P., Kschischang F.R.* Future Prospects for FEC in Fiber-Optic Communications // IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. 2010. V. 16. № 5. P. 1245–1257. <https://doi.org/10.1109/JSTQE.2010.2044749>
3. *Kloek T., van Dijk H.K.* Bayesian Estimates of Equation System Parameters: An Application of Integration by Monte Carlo // Econometrica. 1978. V. 46. № 1. P. 1–19. <https://doi.org/10.2307/1913641>
4. *Kloek T., van Dijk H.K.* Experiments with Some Alternatives for Simple Importance Sampling in Monte Carlo Integration // Report 8326/E, Erasmus Univ. Rotterdam, The Netherlands, 1983. <https://doi.org/10.22004/ag.econ.272281>
5. *Dolecek L., Zhang Z., Wainwright M., Anantharam V., Nikolić B.* Evaluation of the Low Frame Error Rate Performance of LDPC Codes Using Importance Sampling // Proc. 2007 IEEE Information Theory Workshop (ITW'2007). Tahoe City, CA, USA. Sept. 2–6, 2007. P. 202–207. <https://doi.org/10.1109/ITW.2007.4313074>
6. *Neshaastegaran P., Banihashemi A.H., Gohary R.H.* Error Floor Estimation of LDPC Coded Modulation Systems Using Importance Sampling // IEEE Trans. Commun. 2021. V. 69. № 5. P. 2784–2799. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2021.3057625>
7. *Cavus E., Haymes C.L., Daneshrad B.* Low BER Performance Estimation of LDPC Codes via Application of Importance Sampling to Trapping Sets // IEEE Trans. Commun. 2009. V. 57. № 7. P. 1886–1888. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2009.07.050060>
8. *Sakai T., Shibata K.* A Study on Quick Simulation for Estimation of Low FER of LDPC Codes // Proc. 2009 IEEE 9th Malaysia Int. Conf. on Communications (MICC'2009). Kuala Lumpur, Malaysia. Dec. 15–17, 2009. P. 468–473. <https://doi.org/10.1109/MICC.2009.5431553>
9. *Ferrari M., Bellini S.* Importance Sampling Simulation of Concatenated Block Codes // IEE Proc. Commun. 2000. V. 147. № 5. P. 245–251. <https://doi.org/10.1049/ip-com:20000662>
10. *Johnson S.J.* Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat Accumulate Codes. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2010. <https://doi.org/10.1017/CB09780511809354>
11. *Cole C., Wilson S., Hall E., Giallorenzi T.* A General Method for Finding Low Error Rates of LDPC Codes. <https://doi.org/10.48550/arXiv.cs/0605051> [cs.IT], 2006.
12. *Kim K.-J., Myung S., Jeong H.* Lowering Error Floors by Removing Dominant Trapping Sets of Low-Density Parity-Check Codes for Broadcasting Systems // Proc. 2015 IEEE Int. Symp. on Broadband Multimedia Systems and Broadcasting (BMSB'2015). Ghent, Belgium. June 17–19, 2015. P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/BMSB.2015.7177241>

13. *Chen J., Fossorier M.P.C.* Density Evolution for Two Improved BP-Based Decoding Algorithms of LDPC Codes // IEEE Commun. Lett. 2002. V. 6. № 5. P. 208–210. <https://doi.org/10.1109/4234.1001666>
14. *MacKay D.J.C.* Encyclopedia of Sparse Graph Codes (online database). <http://www.inference.org.uk/mackay/codes/EN/C/96.33.964>

Угловский Артем Юрьевич
Мельников Игнат Алексеевич
Алексеев Иван Алексеевич
Куреев Алексей Андреевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва
uglovski@iitp.ru
melnikov@iitp.ru
alexeev@iitp.ru
kureev@wireless.iitp.ru

Поступила в редакцию
31.01.2024
После доработки
13.02.2024
Принята к публикации
13.02.2024