ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 59 **2023** **Вып. 2**

УДК 621.391 : 517.938 : 519.722

© 2023 г. **Г.Д. Дворкин**

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЭНТРОПИИ СОФИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается геометрический подход к понятию метрической энтропии. Обоснована возможность такого подхода для класса борелевских вероятностных инвариантных эргодических мер на софических системах, что является первым результатом такой общности для немарковских систем.

Ключевые слова: метрическая энтропия, локальная скорость деформации границ, символическая система, синхронизованная система, софическая система, инвариантная эргодическая мера, производное пространство, марковская граница.

DOI: `10.31857/S0555292323020043`, **EDN:** PPWQAP

Памяти Бориса Марковича Гуревича

§ 1. Введение

Данная статья является продолжением работ автора [1, 2], посвященных геометрическому подходу к определению энтропии Колмогорова – Синая. Такой подход был впервые предложен в физической литературе [3], после чего был строго формализован и обоснован для класса марковских систем Б.М. Гуревичем в [4]. Дальнейшее развитие идей работы [4] Гуревичем и С.А. Комечем в [5, 6] позволило распространить геометрическую интерпретацию энтропии на широкий класс синхронизованных систем, но с наложением дополнительного ограничения – условия Комеча (более подробно история вопроса описана в [1]). В работе [1] достигнуты новые продвижения в двух смыслах:

1) Для синхронизованных систем ослаблено дополнительное ограничение (движение вглубь – усиление результатов для уже рассмотренных систем);

2) Впервые получены результаты для несинхронизованных систем – сдвигов Дика (движение вширь – рассмотрение новых классов систем).

Работа [2] полностью посвящена второму подходу, и в ней получен достаточно общий результат. Исследования же в первом направлении ограничиваются одним параграфом в [1]. Полученная в этом параграфе теорема ослабляет условие Комеча и позволяет рассмотреть некоторые случаи, в которых это условие не выполняется, но при этом все описанные примеры использования данной теоремы либо тривиальны, либо искусственны (хотя и интересны). Кроме того, после ослабления дополнительное ограничение становится в некотором смысле неявным (см. далее), и его проверка представляет отдельную проблему. Таким образом, результаты в описываемом направлении выглядят незавершенными, и возникает естественная задача

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

нахождения значимых примеров, в которых возможна явная проверка ослабленного условия. Решению этой задачи, а также развитию первого направления в целом и посвящена данная статья.

Очевидной программой-максимум первого направления является полное избавление от дополнительного условия и получение результата для любой борелевской вероятностной инвариантной эргодической меры, т.е. в общности, изначально предложенной в [4], но после [4] ни одного результата в указанной общности получено не было. В этой статье такой результат получен для софических систем, а именно показано, что результаты [1] позволяют полностью избавится от условия Комеча в софическом случае. Более того, для синхронизованных систем получено новое достаточное условие, являющееся более общим, чем условие Комеча, и явно проверяемым.

§ 2. Определения и обозначения

В этом параграфе вводятся только базовые определения и обозначения. Понятия, относящиеся к теории производных пространств Томсена (являющейся основным инструментом доказательства), будут введены отдельно.

Пусть A – конечное множество, и пусть $A^{\mathbb{Z}}$ – пространство бесконечных двусторонних последовательностей символов из A.

Множество A будем называть алфавитом, любую конечную последовательность символов (букв) из A – (конечным) словом этого алфавита. Количество букв в слове w называют его длиной и обозначают $|w|$. Слово нулевой длины называют пустым.

Элементы $A^{\mathbb{Z}}$ будем называть бесконечными словами, при этом в данной терминологии бесконечные слова словами не являются.

Определение 1. Назовем *полным сдвигом* пару $(A^{\mathbb{Z}},\, T)$, где A – конечное множество, а T – сдвиг на шаг вправо в пространстве последовательностей $A^{\mathbb{Z}}$.

Для $x \in A^{\mathbb{Z}}$ и целых a и b, таких что $a \leqslant b$, обозначим слово $(x(a), x(a{+}1), \ldots, x(b))$ через $x_{[a;b]}$. Если слово w равно $x_{[a;b]}$ для некоторых a и b, то будем говорить, что w является *подсловом* бесконечного слова x (аналогично определяется подслово конечного слова). Вместо $x_{[a;a]}$ будем писать $x_{[a]}$.

Введем метрику d на $A^{\mathbb{Z}}$: примем $d(x,x) = 0$, а для несовпадающих точек x и y положим $d(x,y) = (1/2)^m$, где $m = m(x,y)$ – целое неотрицательное число, равное нулю, если $x_{[0]} \neq y_{[0]}$, и удовлетворяющее условиям

$$x_{[-(m-1);m-1]} = y_{[-(m-1);m-1]}, \quad x_{[-m;m]} \neq y_{[-m;m]}$$

в противном случае. Эта метрика порождает топологию Θ, которая далее считается фиксированной.

Определение 2. Будем называть *символической системой* пару $(X,\, T)$, где X – замкнутое T-инвариантное подмножество $A^{\mathbb{Z}}$ с топологией, индуцированной топологией Θ, а также первый элемент этой пары, считая сдвиг и топологию заданными по умолчанию.

Пусть далее в этом параграфе X – символическая система.

Множество всех подслов всех $x \in X$ называется *языком* символической системы X и обозначается $W(X)$, кроме того, обозначим через $W_n(X)$ множество всех слов из языка длины n. Слова алфавита системы, которые не входят в $W(X)$, будем называть *запрещенными*.

Префикс слова – любое его подслово, начинающееся с начала этого слова. *Суффикс* слова – любое его подслово, заканчивающееся в конце этого слова. Через a^ℓ обозначим конкатенацию ℓ букв или слов a (a^0 считаем пустым словом).

Определение 3. Множество

$$\{w\}_c^X := \{x \in X :\ x_{[c;c+|w|-1]} = w\}$$

называется *цилиндром* в X с *основанием* $w \in W(X)$. Всюду далее

$$\{w\}_c := \{w\}_c^X, \quad \{x_{[a;b]}\} := \{x_{[a;b]}\}_a.$$

Рассмотрим T-инвариантную борелевскую вероятностную меру μ на X. Под мерой $\mu(w)$ слова $w \in W(X)$ понимаем меру цилиндра $\{w\}_0$ (из T-инвариантности меры очевидно, что $\mu(\{w\}_a) = \mu(\{w\}_0)$ для любого целого a).

Введем следующие обозначения:

$k(\varepsilon) := \min\ \{\ell \in \mathbb{Z} :\ (1/2)^{(\ell+1)} \leqslant \varepsilon\}$ (часто будем писать просто k);

$O_\varepsilon^X(x)$ – открытая ε-окрестность точки x в пространстве X;

$O_\varepsilon^X(C)$ – открытая ε-окрестность множества C в пространстве X.

В случаях, когда рассматриваемое пространство фиксировано, верхний индекс будем опускать.

Определение 4. *Метрическая энтропия* (энтропия Колмогорова–Синая) символической динамической системы (X, T) с инвариантной мерой μ может быть определена как средняя условная энтропия настоящего при условии прошлого (общее определение для произвольной динамической системы см. в [7, 8]):

$$h_\mu(X, T) = \lim_{n\to\infty} H_\mu(x_0 \mid x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-n}).$$

Определение 5. Для $x \in X$ определим *локальную скорость деформации границ* (ЛСДГ):

$$P_{X,T,\mu}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{n(\varepsilon)} \log\left(\frac{\mu\left(O_\varepsilon\left(T^{n(\varepsilon)}\left(O_\varepsilon(x)\right)\right)\right)}{\mu\left(O_\varepsilon(x)\right)}\right),$$

где $n(\varepsilon)$ – положительная целочисленная функция со свойствами

$$n(\varepsilon) \to \infty \quad \text{и} \quad n(\varepsilon) = o(|\log(\varepsilon)|) = o(k(\varepsilon)) \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

(часто будем писать просто n). Такие функции n будем называть *медленными*. Допредельное выражение будем обозначать через $P^\varepsilon_{X,T,\mu}(x)$ и называть *ε-ЛСДГ*.

Далее нам понадобятся понятия марковской, софической (софика) и синхронизованной системы.

Определение 6. Символическая система $X \subseteq A^\mathbb{Z}$ называется *марковской* (subshift of finite type), если существует конечное множество слов $Z \subset W(A^\mathbb{Z})$, такое что $x \in A^\mathbb{Z}$ принадлежит X тогда и только тогда, когда ни один элемент из Z не является подсловом x.

Определение 7. Множество

$$P_w = \{v \in W(X) :\ wv \in W(X)\}$$

будем называть *продолжением* слова $w \in W(X)$, а также для каждого $v \in W(X)$, такого что $vw \in W(X)$, введем *v-продолжение* слова w как $P_w(v) = P_{vw}$. Множество

$$\{P_w :\ w \in W(X)\}$$

назовем *множеством продолжений* слов языка $W(X)$.

Определение 8. Символическая система X называется *софической*, если множество продолжений слов ее языка конечно.

Замечание 1. Несложно понять (см. [9]), что система X софична тогда и только тогда, когда для каждого $w \in W(X)$ образ $P_w(v)$ (как функции v) конечен.

Определение 9. Система X *транзитивна*, если в ней есть точка со всюду плотной орбитой.

Замечание 2. Для символической системы X транзитивность эквивалентна тому, что для любой упорядоченной пары слов $u, v \in W(X)$ существует $w \in W(X)$, такое что $uwv \in W(X)$.

Определение 10. Будем называть слово $w \in W(X)$ *волшебным*, или *синхронизующим*, если для любых $u, v \in W(X)$, таких что $uw, wv \in W(X)$, выполнено $uwv \in W(X)$.

Определение 11. Символическая система X *синхронизована*, если она транзитивна и в ее языке есть волшебное слово.

Укажем соотношение между классами марковских, софических и синхронизованных систем.

Замечание 3. Любая марковская система софична. Любая софическая система имеет волшебное слово, в частности, любая транзитивная софическая система синхронизована (см. [10]). Далее софиком будем называть только транзитивный софик.

§ 3. Мотивационная часть и предварительные результаты

Пусть $M(X)$ – некоторый подкласс класса борелевских вероятностных инвариантных эргодических мер на символической динамической системе (X, T) (весь этот класс будем обозначать $M_0(X)$). Во всех случаях, когда из контекста будет ясно, что такое X, будем писать просто M и M_0.

Связь между энтропией и ЛСДГ в разных системах может быть различной и формально выражаться одним из следующих утверждений:

Точечная гипотеза (ТГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, любого $x \in X$.*

Обобщенная точечная гипотеза (ОТГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$, любой медленной функции $n(\varepsilon)$, μ-почти любого $x \in X$.*

Основная гипотеза (ОГ). *$P_{X,T,\mu}(x) = h(\mu, X, T)$ для всех $\mu \in M(X)$ и любой медленной функции $n(\varepsilon)$, где выражение в левой части понимается как предел в $L_1(X, \mu)$.*

Замечание 4. Далее, если один из перечисленных видов сходимости имеет место для конкретной меры, то будим говорить, что соответствующая гипотеза верна для этой меры и отвечающей ей измеримой системы.

ТГ очевидным образом влечет ОТГ и ОГ, при этом ОТГ и ОГ друг из друга, вообще говоря, не вытекают и не влекут ТГ.

Точечная и обобщенная точечная гипотезы верны для многих важных систем (ТГ, например, выполняется для автоморфизмов тора с мерой Лебега, а утверждения, близкие к ОТГ, верны для существенно более общих диффеоморфизмов Аносова с мерой Синая – Рюэлля – Боуэна, подробнее см. [6]), но, как показано в [1], эти гипотезы неверны даже для класса бернуллиевских мер на полном сдвиге (контрпримером может служить любая несимметричная бернуллиевская мера при достаточно медленном росте функции $n(\varepsilon)$).

Основная гипотеза, в отличие от двух других, подтверждается для многих символических систем. Базовый результат в этом направлении получен в [5].

Определение 12. Будем говорить, что мера $\mu \in M_0(X)$ на синхронизованной системе X удовлетворяет *условию Комеча*, если существует волшебное слово w, такое что $\mu(w) > 0$.

Основная теорема (ОТ). *Пусть символическая динамическая система (X,T) синхронизована, и пусть борелевская T-инвариантная эргодическая вероятностная мера μ на X удовлетворяет условию Комеча, тогда для (X,μ,T) верна основная гипотеза.*

В [1] условие Комеча ослаблено и получено более сильное утверждение.

Обобщенная основная теорема (ООТ). *Пусть символическая динамическая система (X,T) и борелевская T-инвариантная эргодическая вероятностная мера μ на X удовлетворяют следующему условию: в X имеется синхронизованный подсдвиг L (T-инвариантное замкнутое подмножество) полной меры, обладающий хотя бы одним волшебным словом положительной меры. Тогда для (X,μ,T) верна основная гипотеза.*

Отступление (теорема наследования). Свойство, позволяющее перейти от ОТ к ООТ, можно сформулировать в общем виде, в котором оно верно для произвольной символической системы. Оказывается, что равенство энтропии и ЛСДГ наследуется большей системой от меньшей.

Теорема 1. *Пусть (X,T,μ_X) и (Y,T,μ_Y) – измеримые символические системы над алфавитом A, причем $X\subseteq Y$ и мера $\mu_Y\in M_0$ индуцирована мерой $\mu_X\in M_0$, т.е. $\mu_Y(B)=\mu_X(B\cap X)$ для любого борелевского $B\in 2^Y$. Тогда, если в системе (X,T,μ_X) ЛСДГ и энтропия равны (в смысле ОГ), то они равны и в (Y,T,μ_Y).*

Доказательство. Рассмотрим также систему $(A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}})$, где $\mu_{A^{\mathbb{Z}}}$ – индуцированная μ_X мера:

$$\mu_{A^{\mathbb{Z}}}(B)=\mu_X(B\cap X)$$

для любого борелевского $B\subseteq A^{\mathbb{Z}}$. Очевидно, все три рассматриваемые системы метрически изоморфны (изоморфизм – тождественное отображение), а значит, их метрические энтропии равны:

$$h(\mu_{A^{\mathbb{Z}}},A^{\mathbb{Z}},T)=h(\mu_Y,Y,T)=h(\mu_X,X,T):=h.$$

Понятно, что для любого $\varepsilon>0$ ε-ЛСДГ в каждой точке не убывает при индуцировании меры на большее множество (см. доказательство теоремы 1 в [1]), т.е. для любого $x\in X$

$$P^{\varepsilon}_{X,T,\mu_X}(x)\leqslant P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x)\leqslant P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x).$$

Кроме того, $P^{\varepsilon}_{X,T,\mu_X}$ сходится в среднем к h по условию теоремы, а $P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}$ сходится в среднем к h по ОТ (любая мера из M_0 на полном сдвиге удовлетворяет ОТ). С учетом этого такая же сходимость для $P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}$ непосредственно следует из теоремы о пределе промежуточной функции. Более подробно, зафиксируем $\delta>0$ и найдем такое $\varepsilon_0>0$, что для любого положительного $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ выполнено

$$\|P^{\varepsilon}_{X,T,\mu_X}-h\|_{L_1}<\delta/2 \quad \text{и} \quad \|P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}-h\|_{L_1}<\delta/2.$$

Для каждого такого ε рассмотрим два измеримых множества

$$E^{\varepsilon}_{-}=\{x\in X:\ P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x)\leqslant h\} \quad \text{и} \quad E^{\varepsilon}_{+}=\{x\in X:\ P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x)>h\}.$$

Очевидно, что

$$Y=E^{\varepsilon}_{-}\sqcup E^{\varepsilon}_{+}\sqcup Y\setminus X,$$

причем $\mu_Y(Y \setminus X) = 0$, тогда

$$\|P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y} - h\|_{L_1} = \int\limits_{E^{\varepsilon}_+} |P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x) - h| + \int\limits_{E^{\varepsilon}_-} |P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x) - h| =$$

$$= \int\limits_{E^{\varepsilon}_+} (P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x) - h) + \int\limits_{E^{\varepsilon}_-} (h - P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}(x)) \leqslant \int\limits_{E^{\varepsilon}_+} (P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x) - h) +$$

$$+ \int\limits_{E^{\varepsilon}_-} (h - P^{\varepsilon}_{X,T,\mu_X}(x)) = \int\limits_{E^{\varepsilon}_+} |P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x) - h| + \int\limits_{E^{\varepsilon}_-} |h - P^{\varepsilon}_{X,T,\mu_X}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A^{\mathbb{Z}}} |P^{\varepsilon}_{A^{\mathbb{Z}},T,\mu_{A^{\mathbb{Z}}}}(x) - h| + \int\limits_{X} |h - P^{\varepsilon}_{X,T,\mu_X}(x)| < \delta.$$

Таким образом, для любого положительного $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполнено

$$\|P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y} - h\|_{L_1} < \delta,$$

т.е. $P^{\varepsilon}_{Y,T,\mu_Y}$ сходится в среднем к h, что и требовалось. ▲

Возникает естественный вопрос: возможно ли полностью избавиться от условия Комеча и получить результат для любой меры из M_0:

a) для всего класса синхронизованных систем?

b) сузив рассмотрение на некоторый подкласс, если ответ на a) отрицателен или неясен?

В этом параграфе будет показано, что синхронизованность в общем случае не несет никакой информации об энтропии и ЛСДГ, что исключает получение ответа на вопрос a) на основании собственных свойств класса синхронизованных систем, делает саму постановку первого вопроса бесперспективной и показывает логичность перехода к вопросу b). Вопрос b) будет рассмотрен в § 4.

Сначала введем необходимые определения.

Определение 13. Пусть X – синхронизованная система. Множество

$$dX = \{x \in X : \text{ любое подслово } x \text{ не волшебное}\}$$

будем называть *производным пространством* X, а множество $S(X) = X \setminus dX$ – *синхронизующей частью* X.

Несложно понять, что dX – символическая система, а $S(X)$ – T-инвариантное (но не обязательно замкнутое) множество.

Определение 14. Меру μ на синхронизованной системе X будем называть *синхронизованной*, если $\mu(S(X)) = 1$.

Определение 15. Синхронизованную систему X будем называть *синхронизованной первообразной* символической системы Y, если $Y = dX$.

Теорема 2. *Любая транзитивная несинхронизованная система имеет синхронизованную первообразную.*

Доказательство. Пусть $Y \subset A^{\mathbb{Z}}$ – транзитивная несинхронизованная система, т.е. язык $W(Y)$ не содержит волшебных слов. Введем "разделитель" – новый символ $\{|\}$, не принадлежащий A, и определим систему X ее языком $W(X)$. Язык $W(X)$ над алфавитом $A \cup \{|\}$ построим следующим образом: $w \in W(X)$ тогда и только тогда, когда оно пусто или имеет вид

$$|^{k_0} w_1 |^{k_1} w_2 |^{k_2} w_3 |^{k_3} \ldots . w_n |^{k_n},$$

где

$$n, k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{N}, \quad k_0, k_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad w_1, w_2, \ldots, w_n \in W(Y).$$

Таким образом, $W(X)$ состоит из всех слов $W(Y)$ и любых их конечных последовательностей, разделенных одним или несколькими разделителями. Нетрудно понять, что $W(X)$ действительно язык, так как он продолжаем и факторизуем (см. [11, предложение 1.3.4]). Система X транзитивна, так как любые два слова из $W(X)$ можно написать через разделитель ($u, v \in W(x)$, тогда $u \,|\, v \in W(X)$), и транзитивность следует из замечания 1. Более того, система X синхронизована, так как разделитель является волшебным словом по построению (а значит, и любые слова, его содержащие).

С другой стороны, любые слова, не содержащие разделитель, неволшебные. Действительно, пусть $w \in W(X)$ и w не содержит символа $|$, тогда по построению $w \in W(Y)$, но Y по условию не содержит волшебных слов, а значит, w неволшебно в Y, т.е. для некоторых $u, v \in W(Y)$, таких что $uw, wv \in W(Y)$, слово $uvw \notin W(Y)$. При этом uvw, очевидно, не содержит разделителей, а значит, не является и словом языка $W(X)$. С учетом того, что $W(Y) \subseteq W(X)$, получаем, что $uw, wv \in W(X)$, но $uvw \notin W(X)$, т.е. w неволшебно в X. Таким образом, волшебные слова в X – это в точности те, что содержат разделитель. Отсюда непосредственно следует $dX = Y$, т.е. X – искомая синхронизованная первообразная Y. ▲

Т е о р е м а 3. *Для любой измеримой транзитивной символической системы существует измеримая синхронизованная система с той же энтропией и ЛСДГ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если система синхронизована, то искомой является она сама. Если же она не синхронизована, то искомой является ее синхронизованная первообразная с перенесенной на нее мерой исходной системы. Действительно, пусть (Y, T, μ_Y) – исходная система, (X, T) – ее синхронизованная первообразная. Определим меру на X следующим образом:

$$\mu_X(A) = \mu_Y(A \cap Y)$$

для любого борелевского множества A. Очевидно, что (Y, T, μ_Y) и (X, T, μ_X) метрически изоморфны, а значит,

$$h(\mu_Y, Y, T) = h(\mu_X, X, T).$$

Рассмотрим теперь ε-ЛСДГ этих систем и покажем их равенство для фиксированного ε и $x \in Y$. Так как

$$\mu_X\big(O_\varepsilon^X(x)\big) = \mu_Y\big(O_\varepsilon^X(x) \cap Y\big) = \mu_Y\big(O_\varepsilon^Y(x)\big),$$

то достаточно показать, что

$$O_1 := O_\varepsilon^X\big(T^{n(\varepsilon)}\big(O_\varepsilon^X(x)\big)\big) \cap Y$$

и

$$O_2 := O_\varepsilon^Y\big(T^{n(\varepsilon)}\big(O_\varepsilon^Y(x)\big)\big)$$

совпадают. Включение $O_2 \subseteq O_1$ очевидно. Пусть $y \in O_1$, тогда существует $z \in$ $\in O_\varepsilon^X(x)$, такое что

$$(T^{n(\varepsilon)}(z))_{[-k;k]} = y_{[-k;k]},$$

т.е.

$$z_{[-k-n;k-n]} = y_{[-k;k]}. \tag{1}$$

Кроме того,

$$z_{[-k;k]} = x_{[-k;k]}. \tag{2}$$

Так как $x, y \in Y$, то из (1), (2) получаем

$$z_{[-k;k]}, z_{[-k-n;k-n]} \in W(Y),$$

т.е. эти слова не содержат разделителей, но тогда и $z_{[-k-n;k]} \in W(X)$ их не содержит, т.е. $z_{[-k-n;k]} \in W(Y)$, а значит, существует $w \in Y$, такое что

$$z_{[-k-n;k]} = w_{[-k-n;k]}. \tag{3}$$

Из (1)–(3) получаем $w \in O_\varepsilon^Y(x)$ и

$$(T^{n(\varepsilon)}(w))_{[-k;k]} = y_{[-k;k]},$$

что и означает $y \in O_2$. Таким образом, $O_1 \subseteq O_2$, т.е. $O_1 = O_2$, что влечет равенство числителей выражений под логарифмом ε-ЛСДГ, и по отмеченному выше – самих ε-ЛСДГ. Итак,

$$P^\varepsilon_{X,T,\mu_X}(x) = P^\varepsilon_{Y,T,\mu_Y}(x)$$

для любого $x \in Y$, а значит, для μ_X-почти любого $x \in X$, т.е.

$$P^\varepsilon_{X,T,\mu_X} = P^\varepsilon_{Y,T,\mu_Y}$$

в $L_1(X, \mu_x)$, а значит, ЛСДГ, как пределы в среднем этих функций, совпадают (в том числе существуют и не существуют одновременно). Таким образом, у систем X и Y совпадают энтропии и ЛСДГ. ▲

Теорема 2 означает, что если не налагать на измеримые синхронизованные системы никаких дополнительных ограничений, то некоторые такие системы (синхронизованные первообразные транзитивных несинхронизованных систем) окажутся синхронизованными лишь формально, и с точки зрения интересующих нас величин будут полностью эквивалентны своим несинхронизованным производным, причем производные могут быть любыми несинхронизованными транзитивными системами. Таким образом, для получения какого-либо результата, основанного на синхронизованности системы, нужно исключить из рассмотрения, как минимум, синхронизованные первообразные транзитивных несинхронизованных систем.

§ 4. Теория производных пространств Томсена и геометрическая интерпретация энтропии софических систем

Несмотря на то что рассуждения предыдущего параграфа показывают невозможность использования свойства синхронизованности без наложения дополнительных условий на меру в общем случае, эти рассуждения не исключают возможности применения данного свойства без дополнительных ограничений на меру в некотором подклассе (не содержащем "плохих" систем, описанных выше). В этом параграфе будет предложен подход, который позволяет обойти условие Комеча и дает полное решение вопроса, как минимум, для софических систем.

Сначала изложим идею подхода неформально. Пусть имеется измеримая синхронизованная система. Если в ней есть волшебное слово положительной меры, то применяем ОТ, и задача решена. Если же все волшебные слова имеют нулевую меру, то логично избавиться от всех элементов системы, содержащих волшебные слова, т.е. от синхронизующей части, и рассмотреть получившуюся после этого систему (производное пространство) полной меры. Если она удовлетворяет условию Комеча, то применима ООТ и задача решена, если же нет, то избавиться от волшебных слов новой системы и снова перейти к производному пространству и продолжать так далее, пока не получим систему, в которой имеется хотя бы одно волшебное слово положительной меры.

При реализации данного алгоритма могут возникнуть следующие очевидные проблемы:

1) Система, получившаяся на очередном шаге, не имеет волшебных слов;
2) На каждом шаге система имеет волшебные слова, но не удовлетворяет условию Комеча, т.е. процесс никогда не завершится.

В реальности ситуация оказывается еще более сложной, так как на некотором шаге мы можем получить не транзитивную систему, которая даже при наличии волшебных слов не будет синхронизованной. Тем не менее К. Томсену в [9] (при изучении вопросов, не связанных с геометрической интерпретацией энтропии) удалось построить теорию, реализующую приведенную выше идею.

Суть метода Томсена состоит в следующем: оказывается, что все вышеописанные проблемы реализации алгоритма могут быть сформулированы в терминах сосредоточения меры на некоторых "плохих" частях системы. В частности, проблемы 1) и 2) вызваны тем, что мера сосредоточена на пересечении производных пространств всех уровней (производные пространства высших уровней определяются рекурсивным применением определения 13 с некоторой предварительной регуляризацией в нетранзитивном случае, см. ниже), которое далее обозначено через $d^\infty X$ (в первом случае это пересечение совпадает со всеми производными пространствами достаточно высокого уровня, во втором – является собственным подмножеством любого из них). Обозначенная в предыдущем абзаце проблема нетранзитивности стандартно решается выделением транзитивных компонент $(\overline{X_c})$, причем по построению эти компоненты автоматически оказываются синхронизованными системами. Предварительно на каждом шаге производится регуляризация – удаление из рассмотрения "плохой" (апериодической) части системы, которая не может быть отнесена ни к одной компоненте, после чего рассматриваемая система оказывается (с некоторыми нюансами) дизъюнктным объединением синхронизующих частей компонент $\overline{X_c}$ (на самом деле некоторых подмножеств $\widetilde{X}_c$ синхронизующих частей) и производного пространства следующего уровня.

Таким образом, следуя алгоритму, мы фактически разбиваем исследуемую синхронизованную систему на (возможно, пустой) неанализируемый центр $d^\infty X$ и не более чем счетное количество слоев, каждый из которых, в свою очередь, разбивается на не более чем счетное число инвариантных компонент $\widetilde{X}_c$ и "плохую" апериодическую часть (см. разложение (7)). Ключевым оказывается тот факт, что все вышеописанные "плохие" (не поддающиеся анализу) части оказываются подмножествами некоторого подсдвига $d_M X$, который имеет удобное для наших целей комбинаторное описание и вырождается в софическом случае, что позволяет получить достаточно сильные результаты без исследования этих частей.

Теперь перейдем к формальному изложению. Начнем с основных определений. Пусть X – произвольная символическая система. Пусть $\mathrm{Per}(X)$ – множество ее периодических точек, а $R(X)$ – замыкание этого множества. Через $\mathrm{Rec}(X)$ обозначим множество бирекуррентных точек в X, т.е. множество таких $x \in X$, что для любого натурального n множество

$$\{i : x_{[i;i+2n]} = x_{[-n;n]}\}$$

не ограничено ни сверху, ни снизу. Понятно, что множества $R(X)$ и $\mathrm{Rec}(X)$ являются T-инвариантными, более того, $R(X)$ – подсдвиг. По теореме Пуанкаре о возвращении $\mu(\mathrm{Rec}(X)) = 1$ для любой инвариантной меры.

Введем понятия марковской границы и производного пространства.

Определение 16. Введем множество

$$W_\infty(X) = \{w \in W(X) :\ \text{образ функции } P_w(\cdot) \text{ бесконечен}\}.$$

Это множество является языком (см. [9]), а значит, определяет некоторый подсдвиг $d_M X \subseteq X$, который назовем *марковской границей* X.

Замечание 5. Из замечания 2 понятно, что марковская граница пуста тогда и только тогда, когда X – софик. Кроме того, в [9] показано, что $d_M X \neq X$ тогда и только тогда, когда X синхронизована.

Определение 17. Множество

$$dX = \{x \in R(X) :\ x \text{ не содержит волшебных слов } R(X) \text{ в качестве подслов}\}$$

будем называть *производным пространством* X.

Замечание 6. Для синхронизованных систем X известно (см. [12]), что $R(X) = X$, а значит, определение 15 обобщает определение 12 на произвольные символические системы.

Несложно видеть, что dX – подсдвиг, а значит, для него тоже определено производное пространство, которое логично назвать вторым производным пространством X.

Определение 18. Для любого $k \in \mathbb{N}$ индуктивно определим

$$d^0 X = X, \quad d^k X = d(d^{k-1} X),$$

а также положим

$$d^\infty X = \bigcap_{k=0}^{\infty} d^k X.$$

Число k будем называть *уровнем* производного пространства $d^k X$, а величину

$$\mathrm{dp}(X) = \sup\{k :\ d^k X \neq \varnothing\}$$

– *глубиной* системы X.

Наша цель – получить разложение X на не более чем счетное число компонент, одна из которых – марковская граница, а остальные имеют подходящую для наших целей структуру. Из определения производных пространств понятно, что выполнено равенство

$$X = \bigsqcup_{k=0}^{\infty} (d^k X \setminus d^{k+1} X) \sqcup d^\infty X. \tag{4}$$

В [9] показано, что

$$d^\infty X \subseteq d_M X, \tag{5}$$

а "апериодические" части производных пространств $d^k X \setminus R(d^k X)$ лежат в марковской границе $\bmod 0$, т.е.

$$\mu\big(d^k X \setminus R(d^k X) \setminus d_M X\big) = 0 \tag{6}$$

для любой T-инвариантной меры μ. Теперь для фиксированного целого неотрицательного k рассмотрим

$$S_k(X) := R(d^k X) \setminus d^{k+1} X.$$

Из определения видно, что $S_k(X)$ содержится в замыкании своих периодических точек и что любая точка $S_k(X)$ содержит некоторое волшебное слово $R(d^kX)$ как подслово. Эти свойства позволяют покрыть $S_k(X)$ счетным множеством синхронизованных систем.

Определим отношение $\sim$ на множестве V_k волшебных слов $R(d^kX)$ следующим образом: $u \sim v$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $x, y \in W(R(d^kX))$, что $uxv, vyu \in W(R(d^kX))$. Из плотности множества периодических точек в $R(X)$ следует, что отношение $\sim$ рефлексивно, симметричность очевидна, а транзитивность обеспечивается волшебностью рассматриваемых слов. Таким образом, $\sim$ является отношением эквивалентности. Положим $C_k = V_k/\sim$. Для каждого класса эквивалентности $c \in C_k$ определим

$$X_c = \left\{x \in R(d^kX) : \sup_{i\in\mathbb{Z}} \inf(j - i > 0 : \, x_{[i;j]} \in c) < \infty\right\},$$

т.е. X_c – это множество элементов $R(d^kX)$, содержащих волшебные слова из класса c с ограниченными промежутками между ними. Множества X_c – инвариантные подмножества S_k, но не обязательно замкнутые. Легко видеть, что каждая периодическая точка $y \in S_k(X)$ лежит в некотором X_c, а значит, объединение всех X_c плотно в $S_k(X)$.

Рассмотрим замыкание $\overline{X_c}$ – это символическая система, которая транзитивна (любое слово его языка является подсловом некоторого элемента из X_c и поэтому является частью некоторого волшебного слова из класса c, а эти волшебные слова отвечают критерию транзитивности из замечания 1 по построению отношения $\sim$), а слова из c являются ее волшебными словами. Таким образом, $\overline{X_c}$ – синхронизованная система. Более того, из плотности объединения X_c следует, что

$$\bigcup_{c\in C_k} \overline{X_c} \supseteq S_k(X).$$

При этом ни X_c, ни $\overline{X_c}$ не подходят для разбиения $S_k(X)$. Множества X_c совокупно плотны в $S_k(X)$, но их объединение может быть "мало" с точки зрения меры, а $\overline{X_c}$ образуют покрытие $S_k(X)$ синхронизованными системами, но не обязательно лежат в $S_k(X)$ и могут пересекаться; более того, с точки зрения основного вопроса этой статьи для меры $\mu \in M_0(X)$, сосредоточенной на $\overline{X_c}$, не гарантируется выполнение условия Комеча в $\overline{X_c}$. Поэтому введем более подходящие T-инвариантные множества $\widetilde{X}_c$.

Пусть C_v – множество точек в X, содержащих слово $v \in W(X)$. Положим

$$\widetilde{X}_c = \bigcup_{v\in c} \mathrm{Rec}(\overline{X_c} \cap C_v)$$

(напомним, что c обозначает класс эквивалентности волшебных слов). Легко видеть, что различные $\widetilde{X}_c$ не пересекаются (иначе получаем эквивалентность элементов из различных классов C_k), а также что $\widetilde{X}_c \subseteq S_k(X)$ для любого $c \in C_k$. Более того, в [9] показано, что $\widetilde{X}_c$ покрывают все рекуррентные точки $S_k(X)$, а значит, по теореме Пуанкаре о возвращении и все $S_k(X)$, кроме некоторого множества M_k, такого что $\mu(M_k) = 0$ для любой T-инвариантной меры μ. Таким образом, множества

$$\{\widetilde{X}_c, \; c \in C_k\}$$

образуют $\bmod 0$ разбиение $S_k(X)$. Отсюда с учетом (4)–(6), обозначив множества из равенства (6) через I_k, а $M_k \setminus d_M X$ – через N_k, получаем, что

$$[b]X = \bigsqcup_{k=0}^{\infty}(d^k X \setminus d^{k+1}X) \sqcup d^{\infty}X =$$

$$= \bigsqcup_{k=0}^{\infty}\Big(\big(d^k X \setminus R(d^k X)\big) \sqcup \big(R(d^k X) \setminus d^{k+1}X\big)\Big) \sqcup d^{\infty}X =$$

$$= d_M X \bigsqcup_{k=0}^{\infty}\left(\bigsqcup_{c\in C_k}(\widetilde{X}_c \setminus d_M X) \sqcup N_k \sqcup I_k\right) = d_M X \sqcup \bigsqcup_{c\in C}(\widetilde{X}_c \setminus d_M X) \sqcup N, \tag{7}$$

где

$$C = \bigsqcup_{k=0}^{\mathrm{dp}(X)} C_k,$$

а множество

$$N = \bigsqcup_{k=0}^{\infty}(N_k \sqcup I_k)$$

имеет меру ноль для любой T-инвариантной меры.

Разложение (7) дает возможность сформулировать достаточное условие выполнения ОГ в терминах марковской границы.

Теорема 4. *Пусть X – синхронизованная система, и пусть $\mu \in M_0(X)$ сосредоточена вне марковской границы X (т.е. $\mu(d_M X) = 0$), тогда в (X, T, μ) имеет место сходимость в среднем ε-ЛСДГ к энтропии.*

Доказательство. Из разложения (7) и эргодичности ясно, что мера ровно одного множества из $\widetilde{X}_c$ и $d_M X$ равна 1, а мера остальных 0. По условию мера марковской границы нулевая, а значит, существует $c \in C$, такое что $\mu(\widetilde{X}_c) = 1$. Из определения $\widetilde{X}_c$ получаем, что это множество лежит в

$$A_c := \bigcup_{v\in c} C_v = \bigcup_{v\in c}\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{v\}_i,$$

значит, $\mu(A_c) = 1$. Если мера всех цилиндров $\{v\}_i$ равна нулю, то $\mu(A_c) = 0$ – противоречие, т.е. существуют $i \in \mathbb{Z}$ и $v \in c$, такие что $\mu(\{v\}_i) > 0$, т.е. $\mu(v) > 0$. Таким образом, μ отвечает условию Комеча на $\overline{X_c}$, и применяя ООТ, мы получаем желаемое. ▲

Замечание 7. Теорема 3 тривиально верна и для несинхронизованных систем (вся система является своей марковской границей, и множество рассматриваемых мер пусто).

Замечание 8. Так как для волшебных слов w системы X образ функции $P_w(\cdot)$ одноточечен, любое такое слово лежит вне языка марковской границы, а значит, условие Комеча (в смысле ОТ) влечет неполномерность марковской границы и по эргодичности ее нулевую меру. Таким образом, теорема 3 влечет ОТ и, как показывают нижеследующее следствие и финальная ремарка, сильнее ОТ. С другой стороны, теорема 3 слабее ООТ, следствием которой является (так как ООТ дает нетривиальные результаты и для несинхронизованных систем, см. [1]), но в отличие от ООТ теорема 3 задает условия выполнения ОГ явно.

С л е д с т в и е (геометрическая интерпретация энтропии софических систем). *Пусть* X *– софическая система и* $\mu \in M_0(X)$, *тогда в* (X, T, μ) *справедлива ОГ без каких-либо дополнительных условий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По замечанию 3 марковская граница X пуста (кроме того, глубина X и мощность множества C конечны, см. [12]), а значит, условия теоремы 3 выполнены автоматически. ▲

Финальная ремарка (нетривиальность главного результата). У читателя может возникнуть подозрение, что главный заявленный результат данной статьи тривиален в том смысле, что в софическом случае любая мера из M_0 автоматически отвечает условию Комеча на всей системе. Именно так происходит в более узком марковском случае (см. [4]). Тем не менее с помощью теории Томсена легко показать, что в случае немарковских софиков дело обстоит иначе. Действительно, для того чтобы мера из класса M_0 не отвечала условию Комеча на синхронизованной системе X, очевидно, достаточно (и необходимо), чтобы эта мера была сосредоточена на dX. С другой стороны, в [12] показано, что (транзитивный) софик имеет нулевую глубину тогда и только тогда, когда он является марковской системой, т.е. у любого немарковского софика X производное пространство dX непусто, и любая мера, сосредоточенная на нем, не будет удовлетворять условию Комеча. Существование такой меры гарантируется теоремой Крылова – Боголюбова. В качестве конкретных примеров можно взять построенные Томсеном софические системы любой конечной глубины [12, замечание 6.12].

Таким образом, главный результат данной статьи нетривиален.

Автор благодарен своему научному руководителю Б.М. Гуревичу за постановку задачи геометрической интерпретации энтропии и дальнейшее содействие в научном поиске. К сожалению, за несколько месяцев до публикации Бориса Марковича не стало, поэтому статья посвящается его памяти.

Также автор благодарит С.А. Комеча за плодотворное обсуждение вопроса и полезные комментарии, М. Гайсинского за ценные советы на финальном этапе подготовки статьи и фонд "Базис" за поддержку данной работы.

Отдельно хотелось бы поблагодарить Ефима Наумовича Малкина за многолетнюю поддержку интереса автора к научной деятельности, которая сыграла важную роль в появлении этой и двух предыдущих публикаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дворкин Г.Д.* Геометрическая интерпретация энтропии: новые результаты // Пробл. передачи информ. 2021. Т. 57. № 3. С. 90–101. `https://doi.org/10.31857/S0555292321030062`
2. *Дворкин Г.Д.* Геометрическая интерпретация энтропии для систем Дика // Пробл. передачи информ. 2022. Т. 58. № 2. С. 41–47. `https://www.mathnet.ru/ppi2367`
3. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
4. *Gurevich B.M.* Geometric Interpretation of Entropy for Random Processes // Sinai's Moscow Seminar on Dynamical Systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 81–87.
5. *Комеч С.А.* Скорость искажения границы в синхронизованных системах: геометрический смысл энтропии // Пробл. передачи информ. 2012. Т. 48. № 1. С. 15–25. `http://mi.mathnet.ru/ppi2065`
6. *Гуревич Б.М., Комеч С.А.* Скорость деформации границ в системах Аносова и близких к ним // Тр. МИАН. 2017. Т. 297. С. 211–223. `https://doi.org/10.1134/S037196851702011X`
7. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768–771.
8. *Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

9. *Thomsen K.* On the Ergodic Theory of Synchronized Systems // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2006. V. 26. № 4. P. 1235–1256. https://doi.org/10.1017/S0143385706000290
10. *Fiebig D., Fiebig U.-R.* Covers for Coded Systems // Symbolic Dynamics and Its Applications (New Haven, CT, 1991). Contemp. Math. V. 135. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. P. 139–180.
11. *Lind D., Marcus B.* An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
12. *Thomsen K.* On the Structure of a Sofic Shift Space // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356. № 9. P. 3557–3619. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03437-3

Дворкин Григорий Дмитриевич
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра математической статистики и случайных процессов
grisha230531415@gmail.com

Поступила в редакцию
10.04.2023
После доработки
18.07.2023
Принята к публикации
24.07.2023