

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ



<https://ras.jes.su>



Российская академия наук

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Том 59 № 2 2023

Журнал основан в январе 1964 г.
Выходит 4 раза в год
ISSN 0424-7388

*Журнал издается под руководством
Отделения общественных наук РАН*

Главный редактор

В.Е. Дементьев

Редакционная коллегия:

А.А. Афанасьев, С.А. Афонцев, А.Р. Бахтизин (зам. главн. ред.), В.А. Волконский,
Н.А. Волчкова, Ю.Н. Гаврилец, И.У. Зулькарнай, В.Л. Квинт, Г.Б. Клейнер, М. Кубонива,
А.М. Либман, В.Н. Лившиц, В.Л. Макаров, П.А. Минакир, В.В. Окрепилов,
В.М. Полтерович, А.В. Савватеев, Н.М. Светлов, Е.В. Устюжанина (зам. главн. ред.),
И.С. Шитова (зам. главн. ред.)

Заведующая редакцией Н.С. Виноградова

Журнал «Экономика и математические методы»
входит в Перечень ВАК, базы данных РИНЦ,
Web of Science (Emerging Sources Citation Index)

Адрес редакции:

117418, г. Москва, Нахимовский просп., 47, ком. 305
Тел.: 8(499) 129-39-33, 8(916) 139-27-26
e-mail: emm@cemi.rssi.ru

Москва

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, № 2, 2023

Теоретические и методологические проблемы

- Wu J., Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Wu Z. Analysis of marginalism. Part 1 5
- Karmalita V.A. Recovering the actual trajectory of economic cycles 19
- Торопцев Е.Л., Кандохова М.М., Гудиева Н.Г. Оптимизация структурной динамики экономики в рамках методологии «затраты–выпуск» 26

Народнохозяйственные проблемы

- Усманов Д.И., Дудин М.Н. Моделирование социально-экономического развития России с использованием больших данных и данных результатов натуральных экспериментов 39

Региональные проблемы

- Голованов О.А., Тырсин А.Н., Васильева Е.В. Влияние пандемии COVID-19 на социально-экономическое развитие региона 54

Математический анализ экономических моделей

- Зак Ф.Л. Рационирование и рынок: структура и устойчивость равновесий 68
- Курочкин С.В., Родина В.А. Оптимальное решение задачи иммунизации потока множественных платежей произвольной структуры 87
- Светлов Н.М. Компьютерные испытания прототипа непараметрической модели частичного равновесия 100

Экологические проблемы

- Фальцман В.К. Вопросы балансирования экономического роста с состоянием среды обитания 112
- Ассаул В.Н., Погодин И.Е. Об упрощениях решения транспортных задач с экологическим критерием 122

Критика и библиография

- Дементьев В.Е. О монографии Макарова В.Л., Окрепилова В.В., Бахтизина А.Р. «Научные решения сложных экономических и социальных задач с помощью суперкомпьютеров» М.: URSS. 2023. 416 с. ISBN 978-5-9710-6284-4 128

* * *

- А.И. Ставчикову — 85 131

Russian Academy of Sciences

**ECONOMICS
AND MATHEMATICAL
METHODS**

Volume 59 No. 2 2023

Founded in January 1964

4 issues a year

ISSN 0424-7388

*The Journal is run under the supervision
of the Department of Social Sciences at RAS*

Editor-in-Chief

V.E. Dementiev

Editorial Board:

Afanasiev A.A., Afontsev S.A., Bakhtizin A.R. (Deputy Editor-in-Chief),
Gavrilets Yu.N., Kleiner G.B., Kuboniwa M., Kvint V.L., Libman A.M., Livshits V.N.,
Makarov V.L., Minakir P.A., Okrepilov V.V., Polterovich V.M., Savvateev A.V.,
Shitova I.S. (Deputy Editor-in-Chief), Svetlov N.M.,
Ustyuzhanina E.V. (Deputy Editor-in-Chief), Volchkova N.A., Volkonskiy V.A., Zulkarnay I.U.

Secretary of Editorial Staff N.S. Vinogradova

The journal "Economics and Mathematical Methods"
is included in the list of the Higher Attestation Commission (HAC)
and indexed in Russian Index of Scientific Citation,
Web of Science (Emerging Sources Citation Index)

Editorial Address

Nakhimovskiy Prospect, 47, Office 305, Moscow, Russia, 117418

Tel.: +7(499) 129-39-33; +7(916) 139-27-26;

e-mail: emm@cemi.rssi.ru

Moscow

CONTENTS

Volume 59, no. 2, 2023

Theoretical and methodological problems

- Wu J., Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Wu Z.** Analysis of Marginalism. Part 1 5
- Karmalita V.A.** Recovering the actual trajectory of economic cycles 19
- Toroptsev E.L., Kandokhova M.M., Gudieva N.G.** Optimization of structural dynamics of the economy in the framework of the “input-output” methodology 26

Problems of national economy

- Usmanov D.I., Dudin M.N.** Modeling the socio-economic development of Russia using big data and data from field experiments 39

Regional problems

- Golovanov O.A., Tyrsin A.N., Vasilyeva E.V.** Impact of the COVID-19 pandemic on the socio-economic development of the region 54

Mathematical analysis of economic models

- Zak F.L.** Rationing and market: Structure and stability of equilibria 68
- Kurochkin S.V., Rodina V.A.** Optimal solution for immunizing arbitrarily scheduled multiple liabilities 87
- Svetlov N.M.** Computer testing of a non-parametric partial equilibrium model prototype 100

Ecological problems

- Fal'tsman V.K.** Issues of balancing economic growth and the state of the environment 112
- Assaul V.N., Pogodin I.E.** On simplification of the transport problem solution with ecological criterion 122

Criticism and bibliography

- Dementiev V.E.** On the monograph by Makarov V.L., Okrepilov V.V., Bakhtizin A.R. “Scientific decisions of the complex economic and social problems using the supercomputers” Moscow, URSS. 2023. 416 p. ISBN 978-5-9710-6284-4 128

* * *

- A.I. Stavchikov — 85** 131

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

Analysis of marginalism. Part 1

© 2023 J. Wu, V.L. Makarov, A.R. Bakhtizin, Z. Wu

J. Wu,

Guangzhou Milestone Software Co., Ltd.; Researcher at the Institute of Shandong Development, Shandong University; Researcher at the Center for Economic and Social Integration and Prediction, the Chinese Academy of Social Sciences; Visiting Professor at the Guangdong Academy of Social Sciences; Consultant at the National Supercomputer Center of China, China; e-mail: jw@gzmss.com

V.L. Makarov,

Scientific director at the Central Institute of Economics and Mathematics, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), president of the Russian Academy of Economics, president of the National School of Administration of the Moscow State University, named after M.V. Lomonosov, Academician of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; e-mail: makarov@cemi.rssi.ru

A.R. Bakhtizin,

Director at the Central Institute of Economics and Mathematics, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Correspondent Member of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; e-mail: albert.bakhtizin@gmail.com

Z. Wu,

Vice-Chairman at Guangzhou Milestone Software Co., Ltd., China; e-mail: wzl@gzmss.com

Received 13.01.2023

Abstract. In recent years, based on the traditional theory of value — the labor theory of value and the theory of surplus value, as well as the hypothesis of Jevons, Tesla and Foley, — Chinese and Russian scholars have further adopted the mathematical paradigm of theoretical mechanics for reference to establish a mathematical model system for economics, which is called the new theory of value. Compatible with the traditional theory of value, the new theory of value puts forward that the value depends on the force of labor expended in the process of commodity production. While the value appreciation depends on the labor gravitational force generated by the improving dexterity of workmen. That is to say, during the process of production, constant capital and variable capital as kinetic energy and potential energy of value, convert into each other under the value conservation theorem, playing a dominate role in generating value and surplus value of products. In addition, the law of diminishing marginal utility is not an axiom, but a special economic law under unbalanced supply and demand. Obviously, these theoretical conclusions are of great significance, which not only make the traditional theory of value a self-consistent logical system, but also complete the new theory of value by absorbing the rational components from both the classical economics based on the labor theory of value and the theory of surplus value, and neoclassical economics based on the law of diminishing marginal utility. In this paper, we will analyze this problem by investigating the origin of the law of diminishing marginal utility.

Keywords: new theory of value; force of labor; labor gravitational force; law of value equilibrium; law of diminishing marginal utility; self-consistency.

JEL Classification: C62, D46, D58.

For reference: **Wu J., Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Wu Z.** (2023). Analysis of marginalism. Part 1. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 5–18. DOI: 10.31857/S042473880025858-2

1. INTRODUCTION

In the history of economic theory, the marginal revolution is the watershed of mainstream economics from the traditional theory of value to neoclassical economics. The former refers to Smith's labor theory of value (Smith, 1776) and Marx's theory of surplus value (Marx, 1867), which proposed that the value of commodities is determined by the average amount of labor necessary consumed in the commodity production, and in capitalist society, the capital composed of living labor — variable capital — will create surplus value. The latter refers to the marginal utility theory of value founded by (Walras, 1874; Jevons, 1871; Menger, 1871), then supplemented and improved by (Wieser, 1889; Marshall, 1890; Hicks, 1939; Arrow,

1951; Debreu, 1959) and so on. These researches proposed that the value and price of commodities were determined by the marginal utility value under the supply and demand in the market.

Obviously, there are fundamental differences in almost all the basic theoretical problems between the traditional theory of value and neoclassical economics, including but not limited to:

- whether the value of commodities can be measured: the former is positive, while the latter is negative;
- how are the value and price of commodities reflected by the quantity: the former holds that the value and price of commodities are equivalent under the supply–demand balance, while the latter holds that the price of commodities is its marginal utility in any case, reflected by the law of diminishing marginal utility;
- how is the spontaneous adjustment mechanism of the market formed. The former believes that the value of commodities is determined by the labor amount consumed in the production process. The price of commodities deviates from its value due to the market supply and demand, and then enterprises will suffer loss in oversupply and earn extra profits in short supply. And the pursuit of profit maximization will lead to the spontaneous adjustment mechanism of the market. The latter believes that any kind of commodities have the equilibrium price, as long as the commodities in the market keep changing, there must be an equilibrium price that makes the supply equal to the demand, i.e. the difference between supply and demand of this type of commodities is zero.

Therefore, there are great differences in the basic axioms and corresponding theoretical conclusions between them, which divide the modern economics into polarized lineups. Especially, after the marginal revolution, the traditional theory of value were gradually marginalized, and the general equilibrium theory of neoclassical economics became the *mainstream economics*. The key reason is that marginalism has put forward a new basic axiom, and accordingly has established a new economic theoretical system that is different from the traditional theory of value, thus changing the historical process of economics around the world. Clearly, the theoretical conflict between the traditional theory of value and neoclassical economics starts from the divergence of basic axioms.

There is an old saying in China: a slight discrepancy leads to a great error. In the history of human science, if there are differences in axioms for the same problem by different groups, it must be an essential question of what is right or wrong. Like the difference in the assumptions that «the Earth rotates from West to East» by Kopernik’s heliocentric theory and «the Sun rises from the East» by Ptolemy’s geocentric theory, it turns out to be such a question. Obviously, the traditional theory of value and neoclassical economics face the same question in the history of economic theory.

In fact, the marginal revolution was caused by a theoretical misunderstanding, that is, the law of diminishing marginal utility is a theoretical conclusion rather than a basic axiom. To be specific, according to the traditional theory of value, the value of commodities is composed of the force of labor¹ expended in the production process, and due to human intelligence, the acting force of improving dexterity of workmen — labor gravitational force — creates the absolute value appreciation one after another in every period of producing the same kind of products without expending more force of labor (Wu et al., 2020). Then the value with appreciation makes the exchange value, which is the ratio of the unit value of this commodity to the unit value of other commodities, i.e. the general equivalent in value of commodities. The price is the monetary expression of the exchange value (Marx, 1867, ch. 1, sec. 3). In particular, according to the new theory of value, as long as the quality of any commodity is determined, there must be a rational demand in the market. In the process of commodity production, the market price of the commodity is equal to its exchange value under the supply–demand balance, and deviates from the exchange value when supply and demand are unbalanced — higher than the value in short supply and lower than the value in oversupply.

Here, the reasonable price of a commodity refers to its value. Thus, the reasonable price is not always same with the market price. If the unit value of commodities, i.e. the value per unit quantity commodity, refers to the value divided by the actual production quantity. In this case, we can define the market value function of a commodity: under the supply–demand balance the unit value is divided by the production quantity. Obviously, if the commodity quality remains unchanged, the rational demand for each commodity is limited. Also, if the labor productivity of the commodity remains unchanged, and the average force of labor necessary consumed in producing unit quantity commodity is a constant quantity, then the market value function of the commodity will be strictly decreasing (Wu J., Wu Z., 2021, Appendix, Fig. A3). Also,

¹ According to Marx’s theory of surplus value, this is a process of producing absolute surplus value by the “living labor power” (Marx, 1867, ch. 10). Here, Marx did not regard the living labor power that constitutes variable capital as the “force of labor” (Wu et al., 2020), which can be analogous with “force” in theoretical mechanics.

the market price function, as the monetary expression of the market value, will be strictly decreasing (see Fig. 1 below). Clearly, the marginal decreasing property of commodity price function is not a basic axiom, but a special economic theorem based on labor theory of value, i.e. an inevitable law of motion of commodity market price under the imbalance of commodity supply and demand. Therefore, the law of diminishing marginal utility as a basic axiom is actually a misunderstanding, like the geocentric theory that the Sun rises from the East.

There is a long history of economic theory for discussion on the law of diminishing marginal utility. In 1776 A. Smith wrote: “The things which have the greatest value in use have frequently little or no value in exchange; and, on the contrary, those which have the greatest value in exchange have frequently little or no value in use. ... A diamond, on the contrary, has scarce any value in use; but a very great quantity of other goods may frequently be had in exchange for it. ... The value of any commodity, ... is equal to the quantity of labour which it enables him to purchase or command. Labour, therefore, is the real measure of the exchangeable value of all commodities” (Smith, 1776, p. 16). He observed the phenomenon that the scarcity assumption is easy to cause misunderstanding, because “scarcity” is not a factor that determines the exchange value. It is the amount of labor that determines the exchange value of commodities, which laid the foundation of labor theory of value. As for the relationship between the supply and demand and the market price, Smith noticed that there is an “effectual demand” (Smith, 1776, p. 30) in the market. When the supply exceeds the effectual demand, the market price will sink more or less below the natural price (reasonable price); when the supply falls short of the effectual demand, the market price will rise more or less above the natural price. However Smith did not explore further and more clearly — the reason, why the supply and demand deviate the price from the value.

On what determines the value, there was a heated debate between J.-B. Say and D. Ricardo. Say (Say, 1803, p. 290) believed that the price is in ratio to the supply and demand², while Ricardo (Ricardo, 1817, p. 207) believed that the price depends on the exchange value instead of the market supply and demand. Here, K. Marx supported Ricardo: “Whenever two forces operate equally in opposite directions, they balance one another, ... hence scientifically = 0, ... political economy assumes that supply and demand coincide with one another” (Marx, 1894, vol. III, ch. 10). Thus, the value is the average amount of labor necessary to produce the commodity under the supply-demand balance. If the supply and demand is unbalanced, the market price will deviate from its labor value (Marx, 1894, vol. III, ch. 9)³. We summarize Marx’s above opinion as **Marx’s first law**.

When the marginalism was first founded by L. Walras, W. Jevons and C. Menger, Smith’s analysis on the «scarcity» of diamond was regarded as an important argument for the law of diminishing marginal utility (Walras, 1874, ch. 1–3). In fact, this law was originally raised by H. Gossen (Gossen, 1854), which once was overlooked but gradually recognized by economists. First in 1879, Jevons wrote about Gossen in the second edition of his celebrated “*Theory of Political Economy*” (Jevons, 1879), clarifying the originality of Gossen’s law that provides a more accurate interpretation on the law of diminishing marginal utility. Later in 1885, Walras also wrote about Gossen, and recognized his work (Walras, 1885). Finally, F. Wieser, the successor of Menger, put forward the subjective utility theory of value (Wieser, 1889), and then mainstream economics acknowledged Gossen’s law as the main expression of the law of diminishing marginal utility. According to Gossen’s Law (Gossen, 1854), the want is of different strength varying according to the degree in which the want has been satisfied through the employment of goods. That is to say, as the quantity of every commodity brought to the market increases, its unit value decreases, so that the law of diminishing marginal utility is rooted at the strength of subjective want. Therefore, the marginal revolution broke out and deviated from the traditional theory of value due to their completely different basic axioms and corresponding theoretical conclusions. Henceforth, economics split into two irreconcilable lineups.

How to evaluate the “marginal revolution”? It is not only a question of right or wrong in the history of economic theory, but also a direction of right or left of the development of modern economics. In fact, there is always only one truth — traditional theory of value *or* marginalism? It is the principle question that should be answered in modern economics, by attaching more attention to value transformation, as well as

² Ricardo criticized that Say’s “opinion that the price of commodities depends solely on the proportion of supply to demand, or demand to supply, has almost become almost an axiom in political economy, and has been the source of much error in this science” (Ricardo, 1817, p. 279).

³ For specific mathematical analysis, see Theorems 1–3 (Wu, 1999a), Theorems 4–6 (Wu, 1999b) related to abstract algebra and category theory, and Theorems 5.1 and 5.2 (Wu J., Wu Z., 2021).

mathematizing the traditional theory of value. Then with such a scientific theoretical paradigm, the error of marginalism will be erased.

In this regard, based on the traditional theory of value, as well as the hypothesis of W. Jevons, N. Tesla and D. Foley⁴, in recent years, some Chinese and Russian scholars have further adopted the mathematical paradigm of theoretical mechanics for reference to establish a mathematical model system for economics, which is called the new theory of value (Wu et al., 2020). Compatible with the traditional theory of value, there are five basic axioms:

Axiom 1. The natural wealth obtained without labor has no value.

Axiom 2. The force of labor determines the value of commodities.

Axiom 3. The force of labor is equivalent to the reaction force of labor.

Axiom 4. There must be a labor gravitational force in the labor process, which creates the value appreciation.

Axiom 5. On the premise that the quality of commodities remains unchanged, there is an upper limit (saturation or bliss point) for the demand amount for useful things required by people.

Based on the above, it is easy to further deduce the conclusion that in case of oversupply, the total value of products will be a constant, then, as the quantity of products increases, the unit value of commodities will be strictly decreasing. Obviously, the diminishing utility is a special law in oversupply, rather than a basic axiom. Marginalism mistakenly regards a part — the law of diminishing marginal utility — as a whole — a basic axiom for the entire neoclassical economic system, so that it can only prove theoretical rationality through the deductive analysis, which turns to be just a branch of the traditional theory of value. However, the traditional theory of value can accommodate neoclassical economics to promote modern economics a big step forward.

In this paper, based on the above discussion, we will adopt the paradigm of mathematical economics to objectively analyze the errors of marginalism, absorb its rational components and discard its dross.

2. CRITICAL ASSESSMENT OF MARGINALISM

In order to develop further, the key for modern economics is to critically evaluate marginalism by digging out the theoretical roots and weakening the influence of such errors of marginalism.

2.1. The root of marginalism errors

1. The law of diminishing marginal utility originated from life experience that “scarcity makes things expensive”, price rises or sinks due to short-supply or oversupply. These life experiences really happened, but not that convincing. Just as in the age of barbarism, superstitious explanations were given from life experience to many natural phenomena, it may be wrong for marginalism to regard the law of diminishing marginal utility as a principle axiom by subjective feelings.

2. Walras’s general equilibrium theory is known as one of the main achievements of marginalism. In the general equilibrium equations, it is assumed that there are two men producing m consumer goods with n production factors, given the prices of m consumer goods and n production factors and mn technical coefficients, they produce goods and exchange equivalently in the market. In order to ensure the solution to the equilibrium price of the equations, we assume that this is a special case of linear equations; there are $(2m + 2n + mn)$ unknown variables. If one of the goods is selected as the standard and serves as the general equivalent, then its price is normalized to 1, and the price of all other commodities will be represented by it. (Walras, 1874, Appendix I, part III) Then, the unknown variables to be solved are $2m + 2n + mn - 1$, that is same with the number of independent equations. L. Walras believed that the equilibrium price of the equation has a unique solution, which is correct according to the Clem’s law of linear programming. This is so called “Walras’ law”.

3. However, from the perspective of the general equilibrium linear equations, Walras’ law is not original. After the exchange value defined by Smith and Ricardo (Smith, 1776, ch. 3; Ricardo, 1817, ch. 1, sec. 3; Marx, 1867, ch. 1, sec. 1–3) further provided a systematic and in-depth analysis on exchange value

⁴ W. Jevons (Jevons, 1871, p. 21) proposed that the utility theory of value may be regarded as “the mechanics of utility and self-interest”, and its research method is just as “that of kinematics or statics”. Later, it was summarized by Tesla (Tesla, 1935): “the general laws governing movement in the realm of mechanics are applicable to humanity”. More clearly, Foley said: “... the labor theory of value under the New Interpretation plays a role in political economy analogous to the role played by Newton’s laws in mechanics. The definition of the monetary expression of labor time is analogous to the stipulation in Newtonian mechanics that force is equal to mass multiplied by acceleration” (Foley, 2000).

in particular the form of value. It is not difficult to prove that the exchange value is convex set if expressed in mathematical language according to Ricardo's and Marx's statements. Also, the continuous value function defined on the exchange value convex set must have a unique solution (Wu J., Wu Z., 2021, Theorem 3.1) Therefore, in a strict sense, Walras' general equilibrium theory originated from the study of exchange value by Ricardo and Marx, which had been ignored intentionally or unintentionally by Walras⁵. In addition, Walras took the law of diminishing marginal utility as the basic axiom of his general equilibrium theory, so that the according theoretical conclusions are quite different from those of the traditional theory of value. Obviously this is a major difference that the law of diminishing marginal utility is regarded as the source of Walras' law based on the general equilibrium theory, rather than a theorem deduced from the basic axiom based on the traditional theory of value.

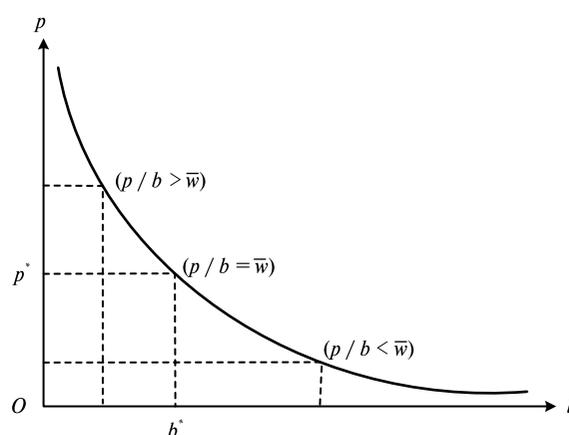


Fig. 1. Curve of market price under Marx's first law

Specifically, Marx's first law and Walras' law differs in understanding of the market equilibrium point of commodities. According to Marx (Marx, 1894, vol. III, ch. 10), the value of commodities is determined by the labor value — the average labor necessary consumed in production. If the supply and demand are unbalanced, the market price will deviate from the labor value⁶: lower in oversupply and higher in short supply (Marx, 1894, vol. III, ch. 9) (as shown in Fig. 1), where p is the market price, b is the market supply, b^* is the rational demand, and \bar{w} is the unit value. According to Marx's first law, if the commodity price is a strictly decreasing function, the market supply and demand will not be in equilibrium. Also, Marx's first law shows that if and only if the supply and demand are in equilibrium, the market price will be the same with its value. That is, the equilibrium point of supply and demand is the fixed point of the market price function (Wu J., Wu Z., 2021, Theorems 3.1, 3.2).

Here, the market price depends on the exchange value. That is to say, according to Marx, the exchange value of any commodity is equal to the proportion of the unit value of that commodity in the total value of all commodities in the whole society. If there are n types of commodities, the unit value of any α -th type of commodity is recorded as \bar{w}_α , so as to distinguish it from the total value of that type of commodity $w_\alpha = \bar{w}_\alpha b_\alpha$. If the n -th type of commodities is selected as the general equivalent, through which the exchange value of other commodities can be expressed⁷. In particular, under the gold standard, let the value of commodities w_n be the money supply, and then the exchange value of the commodity will be the reasonable price. Given the unit value of n types of commodities, the reasonable price of $n-1$ types of commodities will be

$$p_1 = \left(\bar{w}_1 / \sum_{\alpha=1}^n \bar{w}_\alpha b_\alpha \right) w_n; \dots; p_{n-1} = \left(\bar{w}_{n-1} / \sum_{\alpha=1}^n \bar{w}_\alpha b_\alpha \right) w_n. \quad (1)$$

Therefore, according to Marx's first law, the value, exchange value and reasonable price of any commodity are generated under the supply–demand balance. If the supply and demand are unbalanced, the market price will deviate from the value. Here, the economic meaning of Marx's first law is clear and unambiguous. In particular, it is not difficult to prove that the reasonable price equation is equivalent to the simplified form of the finished product part of Walras' general equilibrium linear equations. That is to say, assuming that after production, the commodities are brought into the market circulation, since the equations of the supply and demand sides are equivalent, it only needs to examine the reasonable price of one side.

However, Walras did not admit that his general equilibrium linear equations originated from Marx's general equivalent form, instead, he attributed to that the price is proportional to scarcity (Walras, 1874, ch. 3).

⁵ Walras' definition of exchange value (Walras, 1874, ch. 5) is completely consistent with those by Ricardo and Marx. However, for unknown reasons, Walras did not explain this in his works.

⁶ For specific mathematical analysis, see Theorems 1–3 (Wu, 1999a), Theorem 4–6 (Wu, 1999b) where the mathematical analysis related to abstract algebra and category theory is given by Hao Zhifeng (Vice Secretary of the Party Committee and President of Shantou University, China, <http://english.stu.edu.cn/info/1024/1192.htm>), and Theorems 5.1 and 5.2 (Wu J., Wu Z., 2021).

⁷ This conclusion can be obtained from Marx's analysis of the form of value (Marx, 1867, vol. I). For specific mathematical expressions see (Wu J., Wu Z., 2021, Theorem 4.1; Wu, Qin, 2008).

Thus, Walras denied that the value is determined by the amount of labor consumed in the production process, and defined the commodity utility function with the supply price (or sales price) as the independent variable, the market commodity supply (or demand) as the dependent variable, and the strictly decreasing marginal utility as the corresponding law. Therefore, if Walras' Law holds, the sum of the market prices multiplied by the quantity, including supply and demand, must be constant at zero (Walras, 1874, preface). Further, from the utility function, the conclusion will be that as the price declines, the supply will increase; as the price increases, the supply will decline. That is, no matter how the market commodity price changes, the sum of supply and demand will be always zero counted by the total supply and sales. This is the so-called Walras' law, which can be represented by Hicks indifference curve (Hicks, 1939): where $u(\cdot)$ is the utility function (Fig. 2). When there are n types of commodities, for the equilibrium point solution $b^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$, when $b_i^* > 0$, there is $\partial u(b^*) / \partial b_i = \lambda p_i$. The slope of the equivalent utility curve $u(b_1, b_2) = u(b_1^*, b_2^*)$ at $b^* = (b_1^*, b_2^*)$ is

$$db_2 / db_1 = (\partial u(b^*) / \partial b_1) / (\partial u(b^*) / \partial b_2) = -MRS_{12}(b^*) < p_1 / p_2.$$

Therefore, according to Walras' law, as long as the Hicks indifference curve is a continuous function, or the market price can adjust spontaneously, there will not be any disequilibrium.

Clearly, for the same economic phenomenon expressed as a function of declining commodity price, Marx's first law and Walras' law have completely different interpretations:

According to marginalism and Walras' law, the commodity demand can be expressed as a function with the first derivative less than zero and the second derivative greater than zero; the supply as a function of utility value with the first derivative greater than zero and the second derivative less than zero (see Appendix, Fig. A1). The supply and demand functions satisfying the law of diminishing marginal utility and Walras' law are simple, clear and easy to understand.

According to the new theory of value and Marx's first law, the phenomenon of declining commodity price hides complex economic laws. Specifically, under the gold standard and while the quality maintains unchanged, the factors affecting the market price include: the force of labor consumed in the production process, the functional relationship between the consumed force of labor and production quantity, and the relationship between production quantity and rational demand. All this will determine the following concepts of a commodity:

- the reasonable price (or equilibrium price) is the proportion of the exchange value of commodities to the total amount of money (see Formula (1));
- the market price is the reasonable price of a commodity divided by the quantity (see Fig. 1);
- the value is a piece-wise function, which is strictly increasing linear when the production quantity is less than the rational demand, then a constant when the production quantity is the same with or larger than the rational demand (see Appendix, Fig. A2);
- the unit value is the value divided by the production quantity, which is a strictly decreasing function (see Appendix, Fig. A3);

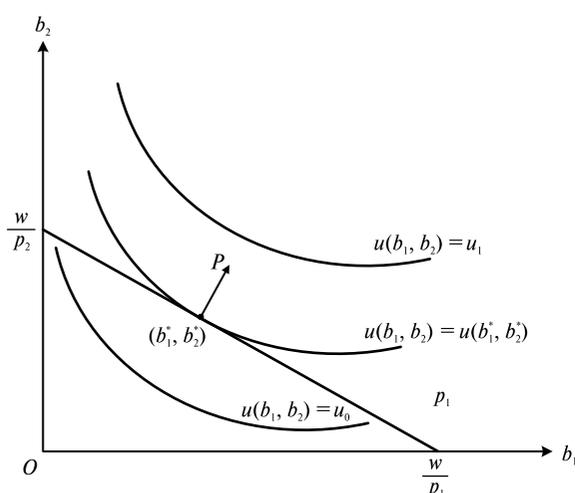


Fig. 2. Curve of market price under Walras' law

- the excess surplus-value of commercial capital in the commodity circulation is also a strictly decreasing function, which is equal to the market value minus the unit value under the unbalanced supply and demand (see Appendix, Fig. A4);

- the production cost is equal to the quantity multiplied by the average social force of labor necessary consumed for per unit product, which is a linear function of quantity (see Appendix, Fig. A5);

- the surplus value of capital is equal to the kinetic energy minus the potential energy of capital value, that is, the Lagrange function of capital, which can be converted into the Brachistochrone line of capital by the Lagrange function of capital (Wu et al., 2020; see Fig. A.6), or can be shown as the length of the optimal projection curve of capital minus the length of the production cost curve of commodities (see Appendix, Fig. A7).

As interpreted above, it seems simple by marginalism and Walras' law, but complex by the new theory of value and Marx's first law. In fact, there are abstract and complex economic laws behind the seemingly simple phenomenon. Generally, there are at least two laws for the decline of marginal value function: one is hidden in the decline of function caused by the supply and demand in the commodity market (see Fig. 1 above and Appendix, Fig. A2–A4). The other is under the joint impact of capital kinetic energy and potential energy (see Appendix, Fig. A5–A7).

To sum up, the fundamental differences between Marx's first law and Walras' law lies in:

1) according to Marx, at the point of supply–demand balance can the price of commodities be determined by the exchange value. However, according to Walras, the equilibrium price always exists no matter in what ratio of supply and demand;

2) according to Marx, as the supply and demand are in balance, the total supply and sales of commodities are equal. However, the equal total supply and sales will not indicate the supply–demand balance (Wu J., Wu Z., 2021, Theorems 5.1, 5.2), like the balance sheet (which is always in balance), but there are still product backlog and losses. However, according to Walras, the supply and demand will be always in balance as long as the price can adjust spontaneously;

3) according to Marx, the market price of commodities is a strict monotone decreasing function under unbalanced supply and demand (Wu J., Wu Z., 2021, Theorems 5.1, 5.2), which is a theorem deduced from the axiomatic system. However, the marginalism regarded the law of diminishing marginal utility as an axiom, which is taking one part as the whole.

2.2. Influence of marginalism errors

The objective economic laws are not transferred by human will, as Engels (Engels, 1878, ch. 10) said: “Social forces are completely like natural forces. They play a blind, coercive and destructive role when we have not yet recognized and considered them”. There is only one truth, if the traditional theory of value is correct, the prevalence of the wrong marginalism will bring serious harms to the development of modern economy.

2.2.1. Resulting in the split of neoclassical economics

After Walras' law came into being, a puzzling problem arose: the law of diminishing marginal utility is a nonlinear function. Although A. Cournot (Cournot, 1838) and L. Walras (Walras, 1874) proved the existence and stability of equilibrium in the single market, yet the strict proof of which can only be completed under the linear condition, instead of the nonlinear condition (Arrow, Intriligator, 1981, p. 3).

In order to justify itself, the general equilibrium school has made great efforts. Early in the 1930s and 1940s, J. Hicks (Hicks, 1939) and P. Samuelson (Samuelson, 1941) used a special ordinal theory to prove the existence of solutions to general equilibrium equations under nonlinear conditions. Later by 1959, G. Debreu (Debreu, 1959) who is the first economist in the history of economic theory to use the standard mathematical paradigm for economic research successfully gave an accurate proof in his book *The Theory of Value*. In the study of the general equilibrium theory, Debreu first gave the mathematical definitions for the basic economic concepts, including quantity, time, velocity, commodity vector space, Euclidean metric of value in commodity vector space, topological manifold in commodity Euclidean metric space, and based on which defined the price, value, utility function, individual preference order structure, commodity utility convex set and etc. Second, in addition to the law of diminishing marginal utility, Debreu added rigid theoretical assumptions, including: the continuity of utility value; information symmetry; market clearing; constant or decreasing returns to scale; no externality in production and consumption; strict convex of consumer preference and enterprise production set; complete substitution and etc., which give the necessary and sufficient conditions for the existence and stability of solutions to general equilibrium equations under nonlinear conditions. Finally, Debreu introduced Kakutani theorem to prove the existence of the “fixed point” — the existence and stability of the solution to general equilibrium equations under general conditions, including nonlinear conditions.

Obviously, as for methodology, Debreu made great contributions to the mathematization of neoclassical economics. However, in the history of scientific development, Debreu has therefore brought neoclassical economics into a difficult predicament. To be specific, Debreu's new axiomatic system restricted the general equilibrium theory to a special and narrow field, so that the general equilibrium theory has been still not complete — unable to explain all economic phenomena with one same axiomatic system. Hence Arrow and Debreu further constructed a logically rigorous model (Arrow, Debreu, 1954). So afterwards neoclassical economics involuntarily entered an era of disintegration when various schools (in addition to the mainstream general equilibrium theory, like Keynesian economics, monetarist economics, institutional economics, econometrics, system dynamics and so on) emerged being incompatible with each other. It shows that

the marginalism has neither completeness nor compatibility, leading to conflicts, debates and repeated trials and errors within various schools of neoclassical economics.

2.2.2. *Triggering incurable cyclical economic crisis*

According to the new theory of value, from Axiom 2 comes theorem of inverse ratio between product quality and labor productivity. From Axiom 5, when the quality is constant, there is always an upper bound of demand for any commodity. Also under the acting force of improving dexterity of workmen, as the time for producing the same commodity goes, the labor productivity will always keep growing. In this case, there are the following economic laws:

– when there is overproduction, under the theorem of inverse ratio between product quality and labor productivity by enlarging the production of high-quality products, it will help to avoid overcapacity and rebalance the supply and demand at a higher quality level. If not, it will lead to overcapacity, and as this situation goes, product surplus will become more and more serious and eventually lead to economic crisis. (Wu J., Wu Z., 2021, Theorem 4.1);

– when demand exceeds supply, under the theorem of inverse ratio between product quality and labor productivity by reducing the production of high-quality products and shifting the improving labor productivity to increase the production of lower quality of products, so as to help rebalancing the supply and demand at a lower quality level. This is effective particularly in severe natural disasters and wartime;

– among countries with different comparative advantages, reasonable international trade or capital transfer will help the balanced development of different countries. That is, if developed countries are in a state of overcapacity, then transferring overcapacity to developing countries through international trade or capital export will help to eliminate its overcapacity and improve the living standards of developing countries⁸.

The above three are the general economic laws of realizing the supply–demand balance of both quantity and quality in the commodity production, expressed by the total differential equations. Actually they are different manifestations of the theorem of inverse ratio between quality and labor productivity.

Obviously, various schools of neoclassical economics have not recognized the above “laws of supply–demand balance of both quantity and quality”, so that they were helpless to deal with overcapacity and resorted to various wrong solutions. For example, by Liberalism, based on general equilibrium theory, the spontaneous price adjustment mechanism was proposed, leading to disorderly competition and continuous overproduction, then more vicious competition, wider gap between the rich and the poor, and more frequent periodic economic crises. By Keynesianism, mistakenly the quantitative easing policy was implemented with hope to create demand, stimulate consumption and regain market equilibrium, yet leading to more excess capacity, over-consumption, and repeated trials and errors. By Welfarism, Sismondi’s leisure strategy⁹ was advocated to reduce working hours, leading to slackness and slow economic development; and etc. Clearly, these were all caused by the errors of marginalism.

Since 2017, the Chinese government proposed a strategy for high-quality development to consume excess capacity and strengthen economic internal circulation, which is in line with the theorem of inverse ratio between quality and labor productivity¹⁰. China accomplished remarkable fruits in the past five years, and expects to achieve a rapid development in the next five years. Compared with various macroeconomic policies by neoclassic economics, it is more scientific and beneficial by China’s strategy for high-quality development, which shows great significance of correct theoretical guidance to the development of various economies.

⁸ When analyzing the international capital export according to Ricardo’s theory of comparative advantage based on the labor theory of value, it can reasonably explain the transfer of global capital from North to South in the modern global economy. Here the theory of comparative advantage can also be explained by the theorem of inverse ratio between quality and labor productivity: the decline of quality leads to the release of energy, which transforms the excess capacity of developed countries to the wealth value of developing countries. The two theories are compatible with each other.

⁹ According to J. Sismondi (Sismondi, 1819), wants are not insatiable, so it is not that the more products are supplied, the better. In overcapacity, man should reduce labor time for more leisure activities, so as to rebalance the supply and demand of commodities in the market.

¹⁰ In 2010 T. Wang, J. Wu (Wang, Wu, 2014) and other researchers put forward a proposal for quality-oriented development during overcapacity in the age of globalization, supported by a special project of the Ministry of Science and Technology of the People’s Republic of China, “Analysis of the Effect of Applying the SED Model on China’s Four Trillion Fiscal Investment under the International Financial Crisis” (Wang, Wu, 2015; Wang et al., 2022), based on the theorem of inverse ratio between quality and labor productivity. In the past decade, the Chinese government has regarded high-quality development as one of the major macroeconomic policies.

Utility value functions based on the law of diminishing marginal utility and the new theory of value

In order to make it easier for understanding the difference between the utility theory of value under the law of diminishing marginal utility and the new theory of value, we compare their main functional relationships. To be consistent with the law of diminishing marginal utility, we exchange the order of independent and dependent variables — supply and demand — of the equilibrium price function defined by Walras' theory of general equilibrium, shown as Fig. A1 where b is the quantity of products, b^* is the equilibrium quantity, p is the market price, S is the supply, D is the demand. Walras (1874) first proved that under first-order homogeneous quasilinear conditions there is a solution of equilibrium price for the function of commodity utility value. However, the solution is unsatisfactory since that the commodity utility value function is not linear if it satisfies the law of diminishing marginal utility, also there are individual preferences according to subjective utility theory of value, therefore the values cannot “furnish any data for absolute calculations” (Say, 1803, p. xxvi), that is, there cannot be a unified measure of value.

Then according to Hicks (Hicks, 1939), the utility value function cannot obtain the extremum solution of the continuous function based on the cardinal theory with the total order in the real number domain, but can only use the ordinal theory for value calculation. Latter, Debreu (Debreu, 1959, ch. 5–7) proved the existence and stability of the extremum solutions of the continuous function based on the ordinal theory under special upper semicontinuous or lower semicontinuous conditions with the partial order in the real number domain. Also, Arrow and Debreu (Arrow, Debreu, 1954) proved the impossibility theorem that a measure of value for commodity utility value based on global optimum does not exist, that is, the value cannot be measured.

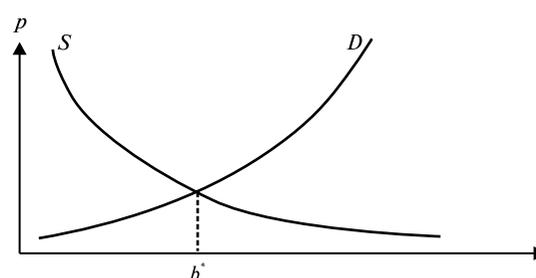


Fig. A1. General supply and demand curve

According to the new theory of value and the traditional labor theory of value and the theory of surplus-value, we make a comprehensive study on the utility theory of value under the law of diminishing marginal utility. In our opinion, the law of diminishing marginal utility in fact is only a special theorem of the use value function within the commodity value function under non-equilibrium supply and demand. That is to say, the value is composed of labor value and use value, which are determined by the function of the force of labor composed of the basic quantities of value — time, quantity and quality. In this case, with time as the dependent variable, and the forces of labor for both quality and quantity as unknown functions, the commodity value is a complex variable function, where the labor value function is the real part, and the value function is the imaginary part (Wu J., Wu Z., 2021). If considering only the labor value function, i.e. the process of realizing the labor value of commodities in production, we will find that when the quality and use value in the commodity value function are constant quantities, then the commodity value function of a commodity is linear in the real number domain with production quantity as the independent variable and the labor value of the commodity as the dependent variable. If considering comprehensively the commodity value function under supply and demand balance, oversupply and short-supply, there will be a series of corresponding functional relationships and relevant theoretical conclusions.

1. The total value function of a commodity

According to the new theory of value, there is Axiom 2 that force of labor determines value and Axiom 5 that in the case of quality is constant, the rational demand of any commodity has an upper bound point. Also, according to Marx's first law, it's assumed that the value of a commodity is determined by the average labor necessary consumed per unit quantity in the production process, the total value of any commodity will be a price-wise function. That is, the total value is a strictly monotonically increasing linear function when production quantity is smaller than the rational demand, then when production quantity is beyond the rational demand, the total value is a constant.

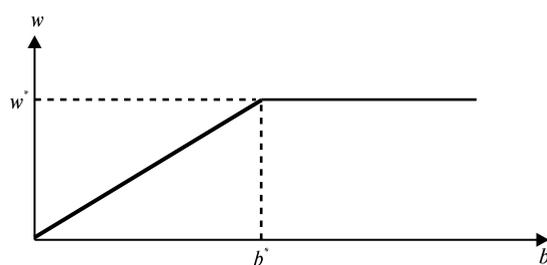


Fig. A2. Total value of a commodity

In Fig. A2 b is the production quantity, b^* is the rational demand and w is the total value. Then, let \bar{f} be the force of labor consumed for unit quantity, b be the independent variable, w be the dependent variable, b^* be the exogenous parameter, and \bar{f} as the corresponding rule, the value function of a commodity will be piecewise:

$$w = \bar{f}(b) = \begin{cases} \bar{f} \times b, & b \leq b^* \\ \bar{f} \times b^*, & b > b^*. \end{cases}$$

2. The unit value function of a commodity

The unit value of a commodity refers to the total value of the commodity divided by its production quantity. Let \bar{w} be the unit value of the commodity, then $\bar{w} = w/b$. Obviously, under the balance of supply and demand, the unit value is $\bar{w}^* = w/b^*$, and the total value is $w^* = \bar{w}^* b^*$. While under unbalanced supply and demand, the unit value \bar{w} of a commodity is shown as below Fig. A3 which is also the market value of the commodity, i.e. the value of the commodity per unit quantity is $\bar{w} = w/b$.

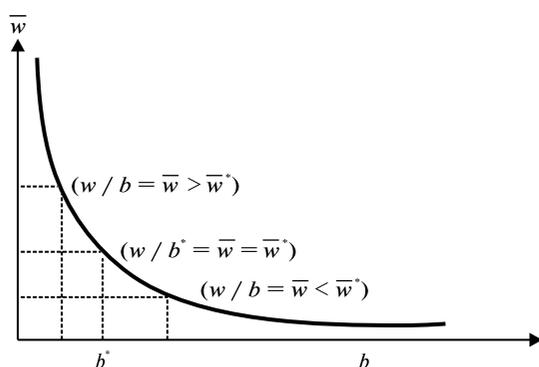


Fig. A3. Unit value of a commodity

Apparently, it is a strictly monotonic decreasing function. When the production quantity of the commodity is smaller than the rational demand, its market value is greater than its unit value and total value in the equilibrium state, i.e. $\bar{w} > \bar{w}^* > w^*$. When the production quantity exceeds the rational demand, the market value is greater than the unit value in the equilibrium state, i.e. $\bar{w} < \bar{w}^* < w^*$. Obviously, the market value function of the commodity has the same property as the market price function, yet differs only in the form of expression. The former indicates the unit value of the commodity in relation to the production quantity (Fig. A3), and the latter shows the monetary expression of the market value of the commodity (see Fig. 1).

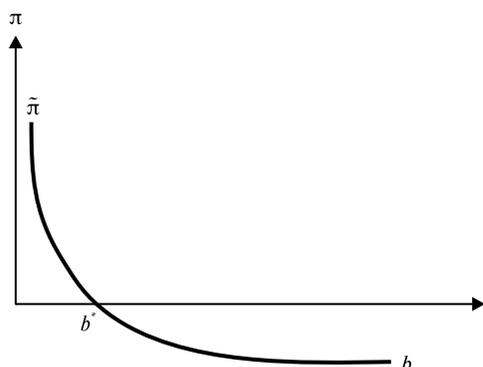


Fig. A4. Surplus-value of a commodity

3. The market excess surplus-value function of a commodity

This function refers to the excess surplus value of commercial capital related to the circulation of a commodity in the market. Here, the market excess surplus value of a commercial capital refers to the difference between the market value caused by the non-equilibrium state and the unit value in the equilibrium state, which is equal to the product of the unit value in the equilibrium state of supply and demand and the rational demand minus the product of the unit value in the equilibrium state

and the actual production quantity. Then, the function of the market excess surplus value of commercial capital can be expressed as $\tilde{\pi} = F(\bar{w}^*, b) = \bar{w}^* \times b^* - \bar{w}^* \times b$ (see Fig. A3)¹¹: where π is the surplus value of commercial capital, and $\tilde{\pi}$ is the change curve of the dependent variable of the surplus value function of commercial capital.

4. The cost function of a commodity

According to Marx's first law, the commodity cost refers to the average force of labor necessary consumed in the process of commodity production. Then, the function of commodity cost indicates the force of labor consumed for products per unit quantity. Let f be the force of labor, d be the cost, \bar{f} be the force of labor consumed per unit product, and then the cost function is $d = \bar{f} \times b$ (Fig. A5).

Note that the cost curve Z is an effective cost before reaching the point (b^*, f^*) equal to the value of the commodity. However, after the point (b^*, f^*) it is the ineffective cost, and the force of labor consumed is doing extra work.

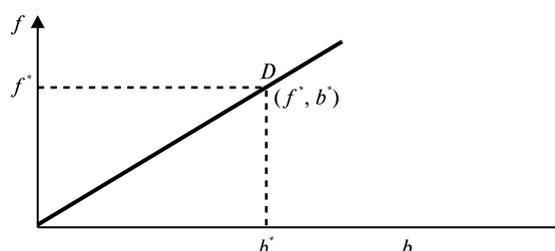


Fig. A5. Cost of a commodity

5. The optimal trajectory function of industrial capital related to the production process of a commodity¹²

The optimal trajectory of industrial capital is an economic phenomenon that considers the joint action of the force of labor and the labor gravitational force. Here, the greatest difficulty is to understand the value conservation theorem. For example, under the influence of labor gravitational force, skilled workers and unskilled workers expend the same force of labor but achieve different labor effects, which do not change the value of commodities.

Assuming that producing unit quantity and unit quality spend the same force of labor, it can deduce the capital Brachistochrone line B based on the quality acceleration surplus value and the capital optimal ejection curve M based on the quantity acceleration surplus value. It is a complicated deduction, which will be discussed in another paper.

6. The surplus-value function of industrial capital related to the production process of a commodity

First, according to Marx's second law, "the value created by living labor" exceeds "the value of the force of labor", then the difference of these two is the so-called surplus value. Second, according to Marx's first law, the value of commodities is determined by the average force of labor necessary consumed under the balance of supply and demand, and the production cost of commodities is a linear function. Finally, according to the new theory of value, the optimal trajectory of capital is a projection equation. Therefore, we can further define the surplus-value function of industrial capital that refers to the total income of industrial capital minus its cost. It is shown in Fig. A6 that the optimal trajectory of industrial capital is the Brachistochrone line of industrial capital or the optimal ejection curve of industrial capital. Therefore, the value change in the operation process of industrial capital can be expressed as the integral of the value function of industrial capital, or the length of the optimal trajectory of industrial capital. In this case, the surplus value

¹¹ There was a heated debate between J.-B. Say and D. Ricardo over the determination of value. Say denied Smith's labor theory of value, and believed that the value of commodities is determined by supply and demand, because supply creates its own demand, and "the rise of price is in direct ratio to the demand, and inverse ratio to the supply" (Say, 1803, p. 290). Ricardo analyzed in detail all kinds of logical errors of Say's opinion, and pointed out that the root of Say's error was to confuse different concepts of value, wealth and utility, and he "constantly overlooks the essential difference that there is between value in use, and value in exchange" (Ricardo, 1817, p. 207). Following D. Ricardo, K. Marx further explained that, when supply and demand are in balance, labor determines value, otherwise the relationship between supply and demand will cause the market price of commodities to deviate from the value. Unfortunately, marginalism has followed Say's opinion and continued this error to today. In this regard, this figure reproduces Marx's law as a function of the excess surplus value of commercial capital, with hope to help economics recognize the error of Say and marginalism.

¹² According to the new theory of value (Wu et al., 2020), the optimal trajectory of capital motion can be expressed as a Lagrangian function, from which the Brachistochrone line of a particle can be deduced with theoretical mechanics background.

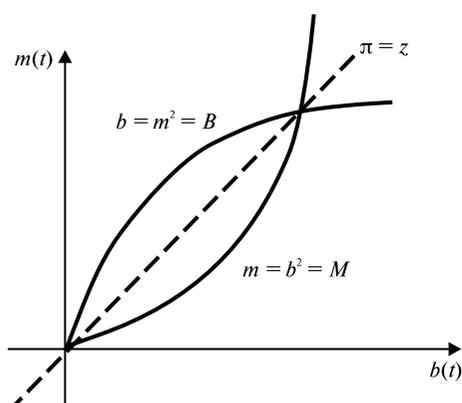


Fig. A6. Optimal trajectories of industrial capital

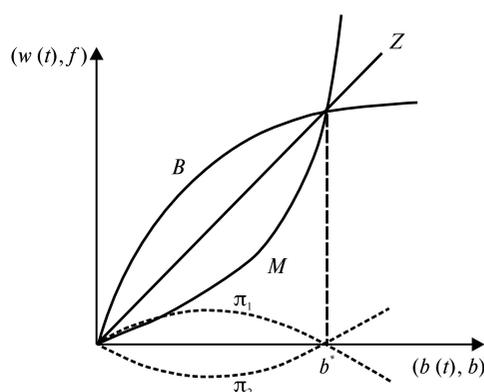


Fig. A7. Surplus values of industrial capital

of industrial capital is the length of optimal trajectory of industrial capital minus the length of the curve of production cost, shown as below Fig. A7, which is obtained by merging Fig. A5 and A6.

According to the new theory of value and Marx's first and second laws, we can draw a conclusion that the surplus value of industrial capital is the lengths of industrial capital B and M minus the length of cost curve Z . Assuming that producing the quantity per unit and the quality per unit expend the same force of labor, π is the surplus value of industrial capital, then $\pi_1 = K_1 - Z$ and $\pi_2 = K_2 - Z$, the trajectories of which are shown as the dotted lines in Fig. A6. Here, the trajectories of π_1 and π_2 prove the theorem that quality is inversely proportional to labor productivity. To be specific, π_1 shows that as the force of labor increases production quantity, industrial capital surplus-value per unit quantity (hereafter unit quantity of surplus value) is a parabola, which is positive when the quantity is smaller than the rational demand, and turns to be negative when the quantity goes larger than the rational demand; π_2 shows that as the force of labor improves the quality, capital surplus value per unit quality (hereafter unit quality of surplus value) is a negative parabola, which decreases although it expends more force of labor and increases the quantity, then turns to be positive when the quantity exceeds the rational demand. That is to say, under oversupply, the improvement of quality will help the excess capacity convert into commodity value, and increase the surplus value of industrial capital per unit quantity (Wu J., Wu Z., 2021, Theorem 5.1, 5.2).

REFERENCES / СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Arrow K.J.** (1951). *Social choice and individual values*. 2nd ed. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Arrow K.J., Debreu G.** (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. *Econometrica*, 22, 3, 265–290.
- Arrow K.J., Intriligator M.D.** (eds.) (1981). *Handbook of mathematical economics*. Vol. 1. Amsterdam, N.Y.: North Holland.
- Cournot A.** (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Paris: L. Hachette. (English edition in 1897: *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth*. Ed. by N. Bacon. N.Y.: Macmillan.)
- Debreu G.** (1959). *Theory of value: An axiomatic study of economic equilibrium*. N.Y.: John Wiley & Sons.
- Engels F.** (1878). *Anti-Duhring: Herr Eugen Duhring's revolution in science*. Published in German in Vorwärts.
- Foley D.K.** (2000). Recent developments in the labor theory of value. *Review of Radical Political Economics*, 32, 1, 1–39.
- Gossen H.H.** (1854). *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs, und der daraus fließenden Regeln für menschliches Handeln*. Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn. (Translated from the German by Rudolph C. Blitz with an introductory essay by Nicholas Georgescu-Roegen. The laws of human relations and the rules of human action derived therefrom. Cambridge: M.I.T. Press in 1983.)
- Hicks J.R.** (1939). *Value and capital*. N.Y.: Oxford University Press.
- Jevons W.S.** (1871). *The theory of political economy*. London: MacMillan and Co. (Reprinted by N.Y.: Augustus M. Kelley Pubs in 1965, 5th ed.)
- Jevons W.S.** (1879). *The theory of political economy*. 2nd ed. London: Macmillan.
- Marshall A.F.** (1890). *Principles of economics*. London: Macmillan. (Reprinted by N.Y.: Prometheus Books in 1997).

- Marx K.** (1867). *Das Kapital*. Vol. I. Hamburg: Verlag von Otto Meissner. (Translated from the German. In: “*Marx and Engels. Collected works (Vol. I)*”. Vol. 35. London: Lawrence & Wishart in 1996.)
- Marx K.** (1894). *Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie*. Vol. III. (Translated from the German, in: “*Marx and Engels. Collected works (Vol. III)*”. Vol. 37. London: Lawrence & Wishart in 1996.)
- Menger C.** (1871). *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*. Braumüller. (Translated and reprinted from the German by J. Dingwall, B.F. Hoselitz. “*Principles of economics*”. Auburn: Ludwig von Mises Institute in 2007).
- Ricardo D.** (1817). *On the principles of political economy and taxation*. London: John Murray. (Reprinted by Kitchener: Batoche Books in 2001).
- Samuelson P.** (1941). The stability of equilibrium: Comparative statics and dynamics. *Econometrica*, 9, 97–120.
- Say J.-B.** (1803). *Traité D'économie Politique*. (Translated and reprinted from the French by C.R. Prinsep. “*A treatise on political economy; or, The production, distribution and consumption of wealth*”. N.Y.: Augustus M. Kelley Publishers in 1971).
- Sismondi L.J.C.** (1819). *Nouveaux principes d'économie politique, ou de la richesse dans ses rapports avec la population*. Paris: Delaunay. (Translated and reprinted from the French “*The new principles of political economy*”. London: Transaction Publishers in 1991.)
- Smith A.** (1776). *An inquiry into the nature and causes of the wealth of nations*. London: W. Strahan and T. Cadell. (Reprinted by N.Y.: Random House in 1994.)
- Tesla N.** (1935). A machine to end war, as told to George Sylvester Viereck. *Liberty*, February.
- Walras L.** (1874). *Éléments d'Économie Politique Pure, ou Théorie de la richesse sociale*. Lausanne: L. Corbaz. (Translated and reprinted from the French by W. Jaffe. “*Elements of pure economics: Or, The theory of social wealth*”. London: Allen and Unwin in 1954.)
- Walras L.** (1885). Un économiste inconnu: Hermann-Henri Gossen. *The Journal des Economistes*, April–May.
- Wang T., Wu J.** (2014). An economic model based on classical economics: Its establishment and applications. In: *78th International Atlantic economic conference, Savannah*. International advances in economic research processing. October 12–15, 2014, Savannah, USA.
- Wang G., Wu J., Shi Y., Wu Z.** (2015). *Application effects analysis on large-scale computation for social and economic systems: Application case from China*. Reported in Special session A09: Meta-synthesis and complex systems, systems science & engineering, IEEE International conference on systems, man, and cybernetics 2015. Hong Kong, China. ISBN: 978-1-4799-8697-2. DOI: 10.1109/SMC.2015.107
- Wang J., Wang T., Shi Y., Xu D., Chen Y., Wu J.** (2022). *Metaverse, SED model and new theory of value*. Complexity, vol. 2022. Article ID4771516, 26 p. DOI: 10.1155/2022/4771516
- Wieser F.** (1889). *Der Natürliche Wert*. Vienna. (Translated from the German by C.A. Malloch. “*Natural value*”. N.Y.: Augustus M. Kelley Publishers in 1971.)
- Wu J.** (1999a). On the causes of commodity price and market equilibrium at the critical point of price (I). *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 7, 21–28.
- Wu J.** (1999b). On the causes of commodity price and market equilibrium at the critical point of price (II). *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 8, 40–47.
- Wu J., Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Wu Z.** et al. (2020). The new theory of Value. *Economics and Mathematical Methods*, 56 (4), 5–19. [Wu J., Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Wu Z. et al. (2020). The new theory of Value // Экономика и математические методы. Т. 56. № 4. С. 5–19.]
- Wu J., Qin Y.** (2008). Commodity exchange model based on Marxist economics. *The Journal of Quantitative & Technical Economics*, 2, 149–160.
- Wu J., Wu Z.** (2021). Analysis of market equilibrium based on the new theory of value. *SCIREA Journal of Economics*, 6 (4), 71–113. DOI: 10.54647/economics79260

Анализ маржинализма. Часть 1

© 2023 г. Ц. Ву, В.Л. Макаров, А.Р. Бахтизин, З. Ву

Ц. Ву,

Председатель правления компании Guangzhou Milestone Software Co., Ltd.; исследователь в Институте развития провинции Шаньдун, Шаньдунский университет; исследователь Центра экономической и социальной интеграции и прогнозирования Академии общественных наук КНР; приглашенный профессор Академии социальных наук провинции Гуандун, консультант Национального суперкомпьютерного центра КНР, КНР; e-mail: jw@gzmss.com

В.Л. Макаров,

Научный руководитель ЦЭМИ РАН, президент Российской экономической школы, директор Высшей школы государственного администрирования МГУ имени М.В. Ломоносова, академик РАН, Москва; e-mail: makarov@cemi.rssi.ru

А.Р. Бахтизин,

Директор Центрального экономико-математического института РАН, член-корреспондент РАН, Москва; e-mail: albert.bakhtizin@mail.ru

З. Ву,

Заместитель председателя правления Guangzhou Milestone Software Co., Ltd., КНР; e-mail: wzl@gzmss.com

Поступила в редакцию 13.01.2023

Аннотация. В последние годы китайские и российские ученые, сохраняя в качестве основы традиционную теорию стоимости, — трудовую теорию стоимости и теорию прибавочной стоимости, а также гипотезу Джевонса, Теслы и Фоули — использовали математическую парадигму теоретической механики для создания системы математических моделей экономики, которую назвали новой теорией стоимости. Совместимая с традиционной теорией, новая теория стоимости выдвигает идею о том, что потребляемая в процессе производства рабочая сила определяет стоимость товара, а сила притяжения рабочей силы определяет оценку ее самой. В то же время оценка стоимости зависит от гравитационной силы, созданной путем усовершенствования навыков работников. В процессе производства постоянный и переменный виды капитала и потенциальная энергия стоимости, переходящая одна в другую, согласно теореме преобразования стоимости, играет ведущую роль в создании стоимости и прибавочной стоимости. Кроме того, закон убывающей предельной полезности не является аксиомой, а специальным экономическим законом при дисбалансе спроса и предложения. Эти теоретические положения имеют большое значение, поскольку превращают традиционную теорию стоимости в самодостаточную логическую систему в виде новой теории стоимости, которая вобрала рациональные элементы как из классической экономики, основанной на трудовой теории стоимости и теории прибавочной стоимости, так и из неоклассической экономики с ее законом убывающей предельной полезности. В первой части статьи мы обращаемся к этой проблематике, исследуя происхождение закона убывающей предельной полезности.

Ключевые слова: новая теория стоимости, рабочая сила, гравитационный параметр рабочей силы, закон равновесия стоимости, закон убывающей маржинальной полезности, непротиворечивость.

Классификация JEL: C62, D46, D58.

Для цитирования: Wu J., Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Wu Z. (2023). Analysis of marginalism. Part 1 // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 5–18. DOI: 10.31857/S042473880025858-2

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

Recovering the actual trajectory of economic cycles

© 2023 V.A. Karmalita

V.A. Karmalita,

Private consultant, Canada; e-mail: karmalita@videotron.ca

Received 16.03.2022

Abstract. The paper deals with the development of a method for restoring the trajectory of economic cycles from estimates of the gross domestic product (GDP). The proposed approach to solve this problem is based on the interpretation of cycles in the form of random oscillations of the income with a certain natural frequency, also called a narrowband random process. The operators (Fourier transforms, filtering, etc.) used to recover the cycle trajectory are linear. Their inherent associativity property allows changing the sequence of implementation of the linear operators above. As a result, it is proposed to start the recovery with bandpass filtering of the GDP function, and after that to parry the influence of the inertia property of the GDP estimator. Taking the qualities of a narrowband random process into consideration made it possible to create a simplified procedure to recover the cycle trajectory. In the example of the Kuznets swing, the acceptability of this procedure is demonstrated for the practical econometrics. The developed method is applicable in problems that require knowledge of the trajectory of the considered cycle.

Keywords: economic cycle, random oscillations, cycle trajectory, Fourier transforms, frequency response characteristics.

JEL Classification: C02, C15, C22.

For reference: **Karmalita V.A.** (2023). Recovering the actual trajectory of economic cycles. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 19–25. DOI: 10.31857/S042473880024867-2

1. INTRODUCTION

The model of economic cycles, as proposed in reference (Karmalita, 2020), is based on a probabilistic description of the investment function and the perception of the economic system as a material object with certain inherent properties. As for the system model itself, it represents the economic cycle as random oscillations generated by a linear elastic system with the natural frequency $f_0 = 1/T_0$ and a damping coefficient h under the influence of the Gaussian white noise $E(t)$ (Bolotin, 1984). Mathematically, the cycle model is represented by an ordinary differential equation of the second order:

$$\ddot{\Xi}(t) + 2h\dot{\Xi}(t) + (2\pi f_0)^2 \Xi(t) = E(t),$$

where $\Xi(t)$ represents random oscillations (cycle under consideration) of the income function $X(t)$, and $E(t)$ — fluctuations of investments. The values of random oscillations $\Xi(t)$ are determined mainly by harmonics in the frequency band $f_1 = 0.7f_0 \leq f \leq f_2 = 1.4f_0$. This fact explains another name for random oscillations — a narrowband random process.

In econometric studies, to quantify the income function $X(t)$ the gross domestic product (GDP), hereinafter $G(t)$, is usually used. Recall that the value of GDP is a monetary estimate of manufactured goods and provisioned services for a certain period ΔT . In the above reference, $G(t)$ is mathematically described by the convolution equation:

$$G(t) = \int_{t-\Delta T}^t X(t) dt = \int_0^t h(\tau) X(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

In other words, the GDP function can be interpreted as the result of measuring the income function using an estimating means (estimator) whose inertial properties are described by the impulse response (*IR*) function $h(\tau)$:

$$h(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq \Delta T; \\ 0, & \tau < 0; \tau > \Delta T. \end{cases}$$

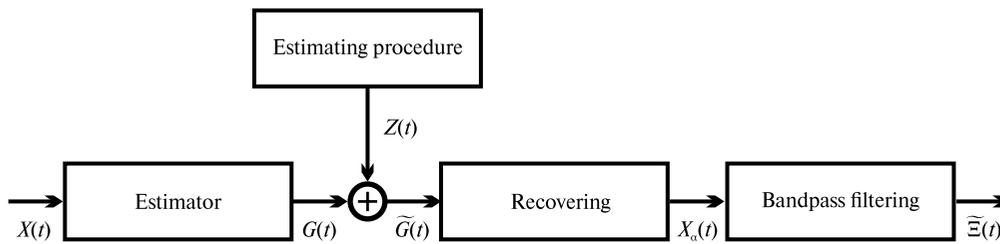


Fig. 1. Forming the cycle trajectory

The reference above shows that the concept of the frequency (period) of the income function is quite applicable to the analysis of economic systems. If we consider equation (1) in the frequency domain, then it is transformed into the multiplication of the corresponding Fourier images:

$$G(f) = H(f)X(f), \quad (2)$$

where $G(f)$, $H(f)$, and $X(f)$ are the Fourier images of the GDP, impulse response and income functions, respectively. Therefore, knowledge of $h(t)$ and $G(t)$ provides an opportunity to solve equation (2) with respect to $X(f) = G(f)/H(f)$. The author (Karmalita, 2020) demonstrates that this problem is ill-posed and offers an approximate solution $X_\alpha(t)$ using the regularization method (Tikhonov, Arsenin, 1997). After recovering $X_\alpha(t)$, the trajectory of the concerned cycle $\Xi(t)$ with a natural frequency f_0 is formed by a bandpass filter (Schlichtharle, 2011).

Let us turn to the recovery procedure with a sample diagram represented in Fig. 1.

This diagram shows the error $Z(t)$ describing the imperfect performance of the estimation procedure. This error arises due to unreliable statistical data, its incompleteness, the performer's skill, etc. Therefore, the available data related to the values of GDP are the estimates $\tilde{G}(t)$ determined as $\tilde{G}(t) = G(t) + Z(t)$.

The function $Z(t)$ is called the measurement (instrumental) noise, which is usually wideband and is often modeled as "white" noise.

The above approach has some features that complicate its application in econometric practice. In particular, the solution of the ill-posed problem of recovering the income function requires a few subjective decisions. The latter include, for example, the assumption about the nature of the smoothness of an unknown multicomponent income function. Another informal decision relates to establishing the range of the regularization parameter α , in which its optimum is sought. The absence of formal justifications of the above decisions requires a certain skill (a kind of art) to successfully solve the ill-posed problem. The specified influence of subjective factors on the recovery procedure determines the purpose of this article — the development of a formal method to obtain the trajectory of the cycle of interest while avoiding an ill-posed formulation of the problem. This method is presented in the second section of the article. Its third section illustrates the developed method with the example of recovering the Kuznets swing.

2. FORMING CYCLE VALUES

In the frequency domain, the estimator is characterized by its frequency response (FR) function, denoted $H(f)$, which is the Fourier transform of the IR function (Pavleino, Romadanov, 2007):

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \Delta t \operatorname{sinc}(\pi \Delta T f) e^{-j\pi \Delta T f} = A_h(f) e^{j\Phi_h(f)}, \quad (3)$$

where $A_h(f)$ and $\Phi_h(f)$ are the amplitude and phase frequency (AF and PhF) characteristics of the estimator, while

$$\operatorname{sinc}(\pi \Delta T f) = \begin{cases} 1, & f = 0; \\ (\sin \pi \Delta T f) / \pi \Delta T f, & f \neq 0. \end{cases}$$

Views of the above-mentioned AF and PhF characteristics are shown in Fig. 2.

$A_h(f)$ determines the ratio of the amplitudes of the input and output harmonics of the estimator. $\Phi_h(f)$ is the difference between their phases, which is equivalent to the time delay of the output process with respect to the input process. It follows from the expression (2) that $H(f)$ only change the amplitude and phase of the harmonics

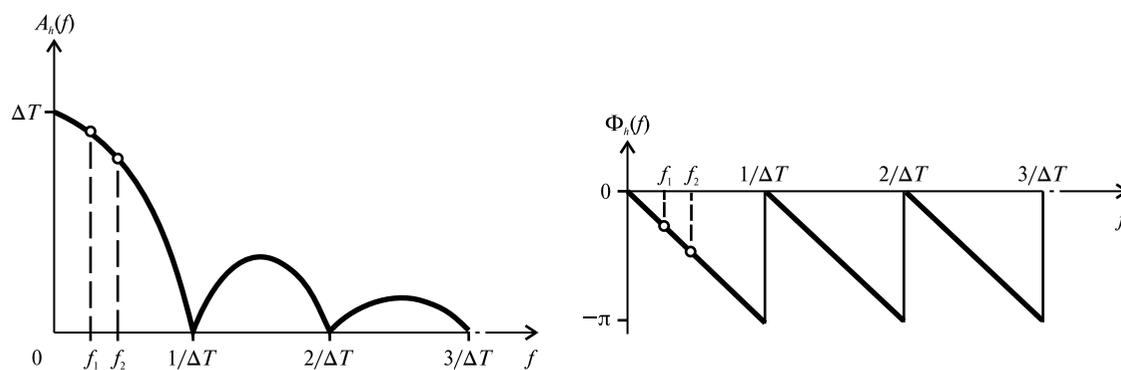


Fig. 2. The frequency characteristics of the estimator

that make up $X(t)$. Despite this, the spectral composition of GDP and income functions is similar. Recall that the intensity (amplitude) of the income's oscillations with the natural frequency f_0 is determined by the frequency range in the vicinity of f_0 . This fact led to the use of the bandpass filtering to extract the data of the cycle of interest from the recovered income function. Such filtering allows signals to pass unaltered within the frequency range $f_1 \leq f \leq f_2$ while suppressing all the others. Amplitude spectrum $A_c(f)$ of the income random oscillations and AF characteristics $A_h(f)$ of the bandpass filter are shown in Fig. 3.

In principle, extracting some cycle $\Xi(t)$ with natural frequency f_0 does not require a complete recovery of the income function. The associativity inherent in linear convolution and filtering operators allows changing the sequence of operations. Namely, one can first form the GDP function corresponding to the considered cycle, and then recover only the values of the latter (Fig. 4).

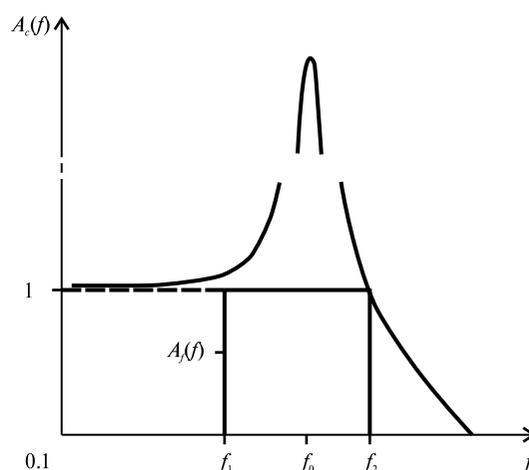


Fig. 3. Amplitude spectrum of the cycle oscillations and AF characteristics of the bandpass filter

It should be noted that in addition to the extract function, this filtering will suppress the noise $Z(t)$ that accompanies the realization $\tilde{G}(t)$.

The presence of filtered realization $G_f(t)$ makes it possible to recover the values of income oscillations in the form of estimates $\tilde{\Xi}(t)$. Using expression (2), the Fourier image $\tilde{\Xi}(f)$ can be represented in terms of AF and PhF characteristics in the following form:

$$\tilde{\Xi}(f) = G_f(f) / H(f) = \frac{A_{G_f}(f) e^{j\Phi_{G_f}(f)}}{\tilde{A}_h(f) e^{j\tilde{\Phi}_h(f)}} = \frac{A_{G_f}(f)}{\tilde{A}_h(f)} e^{j[\Phi_{G_f}(f) - \tilde{\Phi}_h(f)]}.$$

Here $\tilde{A}_h(f)$ and $\tilde{\Phi}_h(f)$ include the fragments of corresponding AF and PhF characteristics in the range $f_1 \leq f \leq f_2$ (see Fig. 3), having the following values:

$$\tilde{A}_h(f) = \begin{cases} A_h(f_1), & f < f_1; \\ A_h(f), & f_1 \leq f \leq f_2; \\ A_h(f_2), & f > f_2, \end{cases} \quad \tilde{\Phi}_h(f) = \begin{cases} \Phi_h(f_1), & f < f_1; \\ \Phi_h(f), & f_1 \leq f \leq f_2; \\ \Phi_h(f_2), & f > f_2. \end{cases}$$

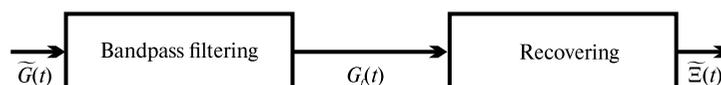


Fig. 4. Proposed recovery approach

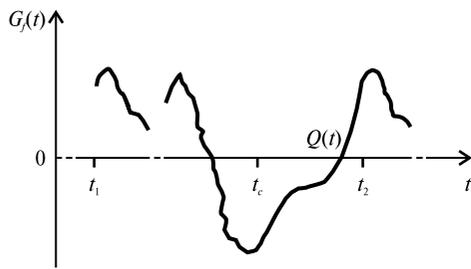


Fig. 5. Fragment of filtered realization $G_f(t)$

The inverse Fourier transform of $\tilde{\Xi}(f)$ will provide the actual trajectory of the considered cycle:

$$\tilde{\Xi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Xi}(f) e^{j2\pi ft} df.$$

The reconstruction of the time domain processes from its Fourier images has its own specifics. As a rule, the initial and final values of the filtered GDP realization presented on the time interval t_1, \dots, t_c are different. The Fourier transform of $G_f(t)$ assumes the periodic nature of this fragment. The specified inequality $G_f(t_1) \neq G_f(t_c)$ leads to the appearance of a gap (discontinuity) between the last value $G_f(t_c)$ and

the first one of the realization $G_f(t)$ with its hypothetical continuation. Therefore, the values of the recovered $\tilde{\Xi}(t)$ will oscillate in the regions adjacent to break points (t_1 and t_c) of the recovered trajectory. In (Karmalita, 2020) the following technique is proposed to eliminate the gap in the periodicity of the realization $G_f(t)$. Its endpoint is complemented by a cubic parabola $Q(t)$ in the time interval t_c, \dots, t_2 , as shown in Fig. 5.

$Q(t)$ is a polynomial of the form: $Q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2 + q_3t^3$. Its coefficients q_l ($l = 0, \dots, 3$) are completely determined by the following boundary requirements:

$$Q(t_c) = G_f(t_c); Q(t_2) = G_f(t_1);$$

$$\left. \frac{dQ(t)}{dt} \right|_{t_c} = \left. \frac{dG_f(t)}{dt} \right|_{t_c}; \left. \frac{dQ(t)}{dt} \right|_{t_2} = \left. \frac{dG_f(t)}{dt} \right|_{t_1}.$$

Such a “loopback” of realization of $G_f(t)$ practically excludes the Gibbs’ phenomenon under the inverse Fourier transform.

Let us recall that accepted model of economic cycles considers them to be the processes which values are determined by harmonics in the vicinity of the natural frequency f_0 . This fact allows the simplification of the above recovery procedure based on considering the influence of the estimator only on the following harmonic — $\xi(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$. The influence of the estimator lies in its transformation to the following form:

$$g(t) = A_h(f_0) A \sin[2\pi f_0 t + \Phi_h(f_0)] = A_h(f_0) A \sin(2\pi f_0 t - \pi f_0 \Delta T) =$$

$$= A_h(f_0) A \sin[2\pi f_0 (t - \Delta T/2)] = A_h(f_0) \xi(t - \Delta T/2).$$

In other words, the estimator changes the amplitude of the harmonic and shifts it in time towards the delay. This fact simplifies the procedure for recovering the business cycle, since only bandpass filtering of the GDP function can provide estimates of the cycle trajectory with an accuracy acceptable for practical econometrics.

3. RECOVERING A FRAGMENT OF THE KUZNETS SWING

Now consider the approach above in the case of recovering the Kuznets swing from quarterly GDP estimates of the USA economy. Such estimates for the time period 2000–2021 are shown in Fig. 6 (Federal Reserve Economic Data, 2022).

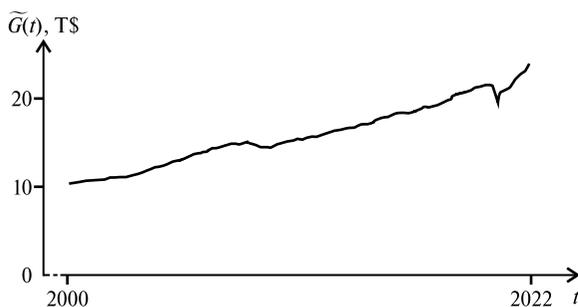


Fig. 6. Real GDP estimates of the US economy

In the case of quarterly GDP estimates, the sampling interval is $\Delta t = \Delta T \approx 0.25$ year. The non-equi-distance of $G_i = G(i\Delta t)$ readings is related to the different duration of quarters during the year. For the first quarter, Δt_1 is equal to 90 or 91 (leap year) days, $\Delta t_2 = 91$, $\Delta t_3 = 92$, and $\Delta t_4 = 92$. Hence, the additional contribution to the measurement noise $Z(t)$ due to fluctuations in the sampling interval yield an additional randomization of considered processes. Such a randomization leads to a bias (increase) in the estimates of the damping coefficient h . For example, it transforms a harmonic process ($h = 0$) into a narrowband random process.

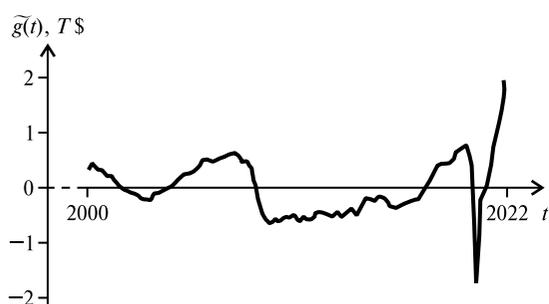


Fig. 7. Fragment of GDP oscillations

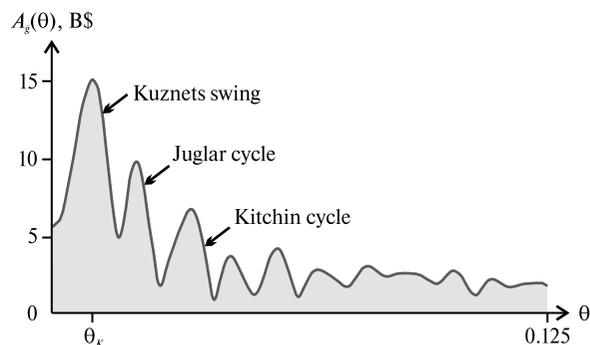


Fig. 8. Spectrogram of GDP oscillations

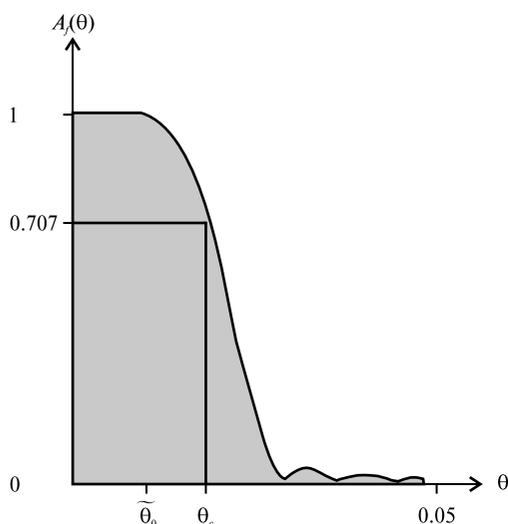


Fig. 9. The AF and PhF characteristics of the LP filter

To increase the representativeness of the empirical data (number of samples), additional terms were calculated via linear interpolation of quarterly GDP estimates. Thus, the sampling interval was reduced to a value of 0.125 years, and the samples number increased to $n = 175$. Subsequently, oscillations \tilde{g}_i of GDP estimates (Fig. 7) were evaluated relative to the regression $\tilde{G}_i = 71.242i + 9609.753$, obtained by the least squares method (Brandt, 2014).

If we proceed to the dimensionless interval of sampling $\Delta t = 1$, then it will correspond to the range of the relative natural frequency $0 \leq \theta_0 \leq 0.5$. The value of θ_0 of the cycle of interest can be determined through Fourier analysis (Cho, 2018) of oscillations \tilde{g}_i (Fig. 8).

Spectral analysis of oscillations \tilde{g}_i for the period 1871–2007 (Korotaev, Tsirel, 2010) determined that the duration of the Kondratiev cycle is 52–53 years. In that instance, the Kuznets swing was interpreted there as the third harmonic of the Kondratiev cycle with a relative natural frequency $\theta_0 \approx 3/(52 \times 8) \approx 0.0072$. From the above spectrogram the estimate $\tilde{\theta}_K \approx 0.01$.

The low pass (LP) filtering of the Kuznets swing may be performed by the FIR filter $\tilde{g}_{Ki} = \sum_{l=1}^{128} c_l \tilde{g}_{i+l-128}$ ($i = 128, \dots, 175$) with the cut off frequency $\tilde{\theta}_0 = 0.018$ (Fig. 9).

It follows from the figure above that the amplitude of oscillations $S(t) = 2\pi\tilde{f}_0 t$ ($\tilde{f}_K = 0.125\tilde{\theta}_K$) does not change in the bandpass of the filter. However, the phase of the filtered process $S_f(t)$ modified as shown in Fig.10.

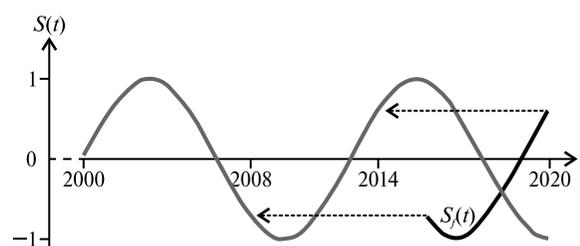


Fig. 10. Effect of filtering a harmonic process

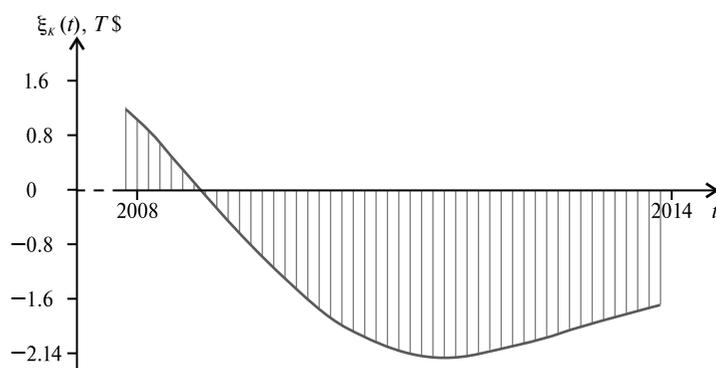


Fig. 11. Estimates of the Kuznets swing trajectory

Due to quarterly ($\Delta T \approx 0.25$) estimates G_i , the value $A_h(\tilde{\theta}_0) = 0.25 \sin(0.01\pi) / 0.01\pi \approx 0.25$. Thus, the recovered trajectory of the Kuznets swing is $\tilde{\xi}_K(t - 0.125) \approx 4\tilde{g}_K(t)$, and in the case of a discrete representation of data is reduced to the form $\tilde{\xi}_{K(i-1)} \approx 4\tilde{g}_{Ki}$ (Fig. 11).

4. CONCLUSION

A method for recovering the trajectory of the economic cycle, represented by the GDP function, was developed. It is based on the interpretation of cycles in the form of random oscillations in income with a certain natural frequency, which is also referred to as a narrowband random process. The method consists of bandpass filtering of the GDP function and subsequently parrying the influence of the estimator in the passband of the filter. The peculiarities of narrowband processes made it possible to create a simplified procedure for recovering the cycle trajectory. In the example of the Kuznets swing, the feasibility of this approach is demonstrated.

The developed method can be used in the problems where the solution requires knowledge of the trajectory of the cycle under consideration. An example of such a problem is predicting the trajectory of a cycle (Karmalita, 2022).

REFERENCES / СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Bolotin V.V.** (1984). *Random vibrations of elastic systems*. Heidelberg: Springer. 468 p.
- Brandt S.** (2014). *Data analysis: Statistical and computational methods for scientists and engineers*. 4th ed. Cham, Switzerland: Springer. 523 p.
- Cho S.** (2018). *Fourier transform and its applications using Microsoft EXCEL®*. San Rafael: Morgan & Claypool. 123 p.
- Karmalita V.** (2020). *Stochastic dynamics of economic cycles*. Berlin: De Gruyter. 106 p.
- Karmalita V.A.** (2022). Predicting the trajectory of economic cycles. *Economics and Mathematical Methods*, 58 (2), 140–144. [Karmalita V.A. (2022). Predicting the trajectory of economic cycles // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 2. С. 140–144.]
- Korotaev A.V., Tsirel S.V.** (2010). Spectral analysis of world GDP dynamics: Kondratieff waves, Kuznets swings, Juglar and Kitchin cycles. In: *Global economic development, and the 2008–2009 economic crisis. Structure and Dynamics*, 4 (1), 3–57.
- Pavleino M.A., Romadanov V.M.** (2007). *Spectral transforms in MATLAB®*. St.-Petersburg: SPbSU. 160 p. (in Russian). [Павлейно М.А., Ромаданов В.М. (2007). Спектральные преобразования в MATLAB. Учебно-методическое пособие. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет. 160 с.]
- Schlichtharle D.** (2011). *Digital filters: Basics and design*. 2nd ed. Berlin: Springer–Verlag. 527 p.
- Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.** (1997). *Solution of ill-posed problems*. Washington: Winston & Sons. 258 p.

Восстановление фактической траектории экономических циклов

© 2023 г. В.А. Кармалита

В.А. Кармалита,*Частный консультант, Канада; e-mail: karmalita@videotron.ca*

Поступила в редакцию 16.03.2022

Аннотация. Работа посвящена разработке метода восстановления значений экономических циклов по оценкам совокупного валового продукта (СВП). Предложенный подход к решению этой задачи базируется на интерпретации цикла в виде случайных колебаний функции доходов с некоторой собственной частотой, именуемых также узкополосным случайным процессом. Используемые при восстановлении траектории цикла операторы (преобразования Фурье, фильтрация и пр.) являются линейными, которым присуще свойство ассоциативности, позволяющее изменять их последовательность. Вследствие чего предложено начинать процедуру восстановления значений колебаний доходов с полосовой фильтрации функции СВП, а затем противодействовать эффекту инерционности оператора, формирующего оценки СВП. Учет особенностей узкополосного случайного процесса позволил создать упрощенную процедуру восстановления траектории цикла. На примере цикла Кузнеца показана ее приемлемость для задач практической эконометрики. Разработанный метод применим в задачах, требующих знания траектории рассматриваемого цикла.

Ключевые слова: экономический цикл, случайные колебания, траектория цикла, преобразование Фурье, амплитудная и фазовая частотные характеристики.

Классификация JEL: C02, C15, C22.

Для цитирования: **Karmalita V.A.** (2023). Recovering the actual trajectory of economic cycles // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 19–25. DOI: 10.31857/S042473880024867-2

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

**Оптимизация структурной динамики экономики
в рамках методологии «затраты–выпуск»**

© 2023 г. Е.Л. Торопцев, М.М. Кандохова, Н.Г. Гудиева

Е.Л. Торопцев,

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь; e-mail: eltoroptsev@yandex.ru

М.М. Кандохова,

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик; e-mail: mrkand@mail.ru

Н.Г. Гудиева

Научно-образовательный математический центр «Северо-Кавказский центр математических исследований», Ставрополь; e-mail; gudieva82@bk.ru

Поступила в редакцию 28.12.2022

Аннотация. Модель динамического межотраслевого баланса в виде системы дифференциальных уравнений, оцифрованная в соответствии с уже опубликованной авторской методикой, позволяет ставить и решать широкий круг задач структурной статической устойчивости экономических систем. Оптимизация структурной динамики может быть выполнена при включении в вектор варьируемых параметров любых, а в пределе — всех элементов модели. В настоящей работе для этого выбраны межотраслевые инерционности и предложен метод, который на шаге поиска использует вектор параметров произвольной (допускаемой самой моделью) длины. Это отличает предлагаемый метод от существующих, делая его уникальным. Указанная уникальность заключается в снятии так называемого «проклятия размерности», присущего классическим задачам оптимизации (численного поиска) с применением методов от покоординатного спуска до богатых инструментов ньютоновского типа. В этом смысле метод является конкурентом оптимизации на основе машинного обучения искусственных нейронных сетей. При этом не важно, как именно формализована задача: в ней должны быть выделены целевые показатели и вектор варьируемых параметров. Можно поставить и решить массу оптимизационных задач, изменяя содержание вектора варьируемых параметров по соответствующему плану вычислительного эксперимента. В работе же представлен только один пример и один шаг оптимизации. Ограничивающим и функциональным условием работы метода является сохранение линейной зависимости между желаемыми приращениями вещественных частей собственных значений матрицы состояния модели и их чувствительностей к параметрам управления. Такие «малые» шаги оптимизации представляют собой самостоятельные задачи, численное решение которых можно повторять.

Ключевые слова: динамический межотраслевой баланс, оцифровка, оптимизация, чувствительности, сингулярное разложение матрицы.

Классификация JEL: B41, C02, C61, C68.

Для цитирования: **Торопцев Е.Л., Кандохова М.М., Гудиева Н.Г.** (2023). Оптимизация структурной динамики экономики в рамках методологии «затраты–выпуск» // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 26–38. DOI: 10.31857/S042473880025859-3

1. МОДЕЛЬНЫЙ БАЗИС ИССЛЕДОВАНИЯ

Неудовлетворительные структурные (собственные, внутренние) динамические свойства (СДС) являют собой источник системных проблем экономического развития и роста в любой экономике (Дужински, Торопцев, Мараховский, 2017). Указанная «системность проблем» говорит об их многоплановости, объединяющей и материально-техническую базу, и кадровый потенциал (Гринберг, 2015). Сюда же примыкают многочисленные недофинансирования, связанные как с пресловутой «ограниченностью финансовых ресурсов», так и с масштабной коррупцией, которая является компонентой общей современной эрозии человеческого капитала (Гринберг, Рубинштейн, 2008). В этих условиях процессы модернизации, реструктуризации, перехода к новому технологическому

укладу и т.п. рискуют иметь черепаший темпы, и это — в лучшем случае (Глазьев, 2016). Запрос на такие высокие (требуемые, желаемые) показатели СДС, как степень экономического роста, наблюдаемость составляющих движения, управляемость ими, их возбуждаемость в отраслях и иные характеристики, представляется существующим, но неосознанным со стороны рядовых членов общества и естественным, первоочередным — для лиц, принимающих экономические и политические решения (Широв, Янговский, 2017).

В конце концов, высокие характеристики экономической динамики важны не «для галочки» (Светульников, Абдуллаев, 2009), а как факторы достижения страной лидирующих позиций в мире по всем измеряемым координатам: от обороноспособности до привлекательности для проживания и экономической активности в любых регионах.

Показатели СДС вычислимы, а их носителем является динамическая модель межотраслевого баланса (МОБ), формализованная в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$X(t) = \hat{B} dX(t)/dt + AX(t) + Y(t), \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

содержащей традиционные обозначения, введенные еще В. Леонтьевым, например из (Леонтьев, 1990, с. 68), где A — матрица коэффициентов прямых материальных затрат; $Y(t)$ — вектор конечного спроса (потребления); $X(t)$ — вектор валовых выпусков по видам экономической деятельности (ВЭД), а вектор $\hat{B} dX(t)/dt$ характеризует динамику накопления/сокращения всех видов «капитала» в разрезе ВЭД. Матрица B с традиционным названием «матрица коэффициентов приростных фондоемкостей» у нас изменилась на «матрицу межотраслевых инерционностей» (о чем — ниже). Здесь следует заметить, что все коэффициенты модели не могут быть безразмерными — это очевидно из уравнения (1), когда его проверка по размерностям коэффициентов и переменных заканчивается неудачей. Такие модели невозможны нигде. В (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б) мы показали, что элементы матрицы B из модели (1) представляют собой межотраслевые инерционности формирования основного капитала в экономике и имеют размерность времени. Эта матрица имеет нулевые элементы, но вырожденной не бывает никогда, если инвестиции следуют во все виды экономической деятельности (ВЭД): связанные звенья экономики инерционны, режимы функционирования отраслей не меняются внезапно, скачком, т.е. все переменные интегрируемы, алгебраических уравнений модель не содержит — все они дифференциальные. В наших работах (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б) решена и проблема оцифровки модели (1). А если линейно связать валовое производство и конечный спрос соотношением $Y(t) = LX(t)$, где L — матрица, элементы которой определяются нормами потребления и трудоемкости, то модель (1) замыкается по потреблению¹. Тогда нормальная форма Коши имеет вид:

$$dX(t)/dt = GX(t), \quad G = \hat{B}^{-1}(E - A - L), \quad X(0) = X_0, \quad (2)$$

где E — единичная матрица.

Модель (1) представляет динамический МОБ, записанный по строкам соответствующей таблицы, когда акселератором формализован инвестиционный блок. Можно записать уравнения и по столбцам таблицы баланса, как это делают при получении ценовой модели, представив акселератором блок формирования добавленной стоимости:

$$X(t) = A^T X(t) + B dX(t)/dt, \quad X(0) = X_0, \quad (3)$$

где B — невырожденная матрица межотраслевых инерционностей формирования добавленной стоимости; T — символ транспонирования. Следующая формула сообщает форму Коши для модели (3):

$$dX(t)/dt = GX(t), \quad G = B^{-1}(E - A^T), \quad X(0) = X_0. \quad (4)$$

Вектор валового производства $X(t)$ в разрезе отраслей ВЭД представлен в (1) и (3), однако его элементы в (1) отличны от соответствующих им элементов в (3) (различия составляют от долей до примерно десятка процентов). Это видно, например, из данных «Таблиц формирования выпуска товаров и услуг», содержащихся в доступных для скачивания статистических сборниках «Национальные счета России в ... годах», где на месте многоточия указывается временной интервал в годах². Указанное выше дает основание для различения произведенного ($X_{prod}(t)$ в модели (1))

¹ Технология последовательных согласованных вычислений такой матрицы представлена нами в статье по ссылке в (Дужински, Торопцев, Мараховский, 2018).

² <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13221>

и использованного ($X_{used}(t)$ в модели (3)) выпуска. Здесь ничего нового: аналогично различают произведенный и использованный ВВП.

Отсылка рассматриваемой модели Леонтьева в семейство «чисто теоретических конструкций» (Суворов, Трещина, Белецкий, 2017) была обусловлена тотальным отсутствием матриц инерционностей из (1) и (3), т.е. невозможностью оцифровки моделей. В противном случае они имели бы хождение в практике межотраслевого анализа. Преодолеть эту ситуацию позволяет обоснованная в (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б) идея введения в обе модели так называемой базовой матрицы BM (basic matrix). По сути BM является матрицей коэффициентов формирования выпуска товаров и услуг и очевидным образом вычисляется из упомянутой выше одноименной таблицы «затраты—выпуск» далее представлены матрицами. BM обладает тем свойством, что вектор выпуска X является ее собственным вектором, которому соответствует единичное собственное значение, т.е. выполняется равенство $BM \times X = X$. Присутствие BM вместо единичной матрицы E в формулах (2) и (4) исключает появление отрицательных b_{ij} , а это могло бы обеспечить обсуждаемым моделям экономический смысл, вычислимость и, соответственно, ведущие роли в задачах анализа и оптимизации структурной макроэкономической динамики (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б).

Преодолеть эту ситуацию позволяют идеи, высказанные в (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б), а также матричные преобразования того же направления, но уже на основе данных симметричной таблицы «затраты—выпуск» и коэффициентов полных затрат. Этот вопрос не является предметом данной статьи, поэтому его рассмотрение здесь опустим, считая модель оцифрованной, т.е. вычислимой.

И последнее во вступительной части. Разработка и применение методов оптимизации в экономике имеют давнюю историю. Многочисленные усилия науки в этом направлении во многом объединяет дисциплина «Исследование операций в экономике». Примером здесь может быть научная монография (Хемди, 2005). Можно начать с фундаментальной работы (Смирнов, Крылов, Канторович, 1933) и перейти от нее к (Канторович, 2011). Исследование Канторовича (Канторович, 2011) объединяет работы автора, посвященные оптимизационным задачам и проблемам экономики.

Большой пласт составляют задачи оптимизации на основе метода множителей Лагранжа и его многочисленных модификаций. Здесь сохраняет актуальность классика, представленная монографией (Bertsekas, 1982), переведенной на русский язык в 1987 г. (Бертсекас, 1987), и библиографией, приведенной в ней. Развивают данное направление идеи, изложенные в (Moḥajan, 2012; Moḥajan, Islam, Moolio, 2013; Moḥajan, 2017), принадлежащие одному автору и представляющие результаты комплексирования методов теории множителей Лагранжа и мультипликативных производственных функций. Хорошо представить себе методы оптимизации ньютоновского типа можно с помощью монографии (Dennis, Schnabel, 1983), также переведенной на русский язык в 1988 г. (Деннис, Шнабель, 1988). Частные вопросы поиска оптимальных решений и учета ограничений решаются в работах типа (Касимов, Богатырев, 2009), выход на программные реализации оптимизационных процедур легко находят при обращении к вычислительным математическим средам MathCAD и MATLAB. Отдельно можно использовать программные модули алгоритма Левенберга—Маркварда на языке Python (Madsen, Nielsen, Tingleff, 2004; Brunet, 2011).

Наша оптимизация выполняется в рамках методологии «затраты—выпуск» и на основе динамических моделей МОБ (1) и (3). Проблемы межотраслевого анализа оставались актуальными в экономической науке большую часть XX в., сохранив актуальность и в веке текущем (Колемаев, 2005; Zhang, Chen, 2008; Chen, Guo, Yang, 2004). Повышение интереса к данной тематике обусловило и возобновление разработки «Росстатом» базовых таблиц «затраты—выпуск» российской экономики, начиная с 2011 г. При этом основная масса публикаций обеспечивается усилиями академических структур (ИНП РАН (Баранов, 2017; Ксенофонтов и др., 2018), ЦЭМИ РАН (Андрукович, 2020; Клейнер, 2020; Зарук, Галкин, Светлов, 2019), ИЭОПП СО РАН (Баранов, Широков, 2020; Баранов, Квактун, 2020; Крюков и др., 2020)), ведущими вузами (Миролюбова, Карлина, Николаев, 2020; Доценко, 2019; Петрикова, 2011) и международной группой ИНФОРУМ под руководством Клоппера Алмона (Алмон, 2021; Almon, Grassini, 2010). Ряд материалов обобщающего характера представлен в научном докладе В.В. Ивантера на Международной конференции «Прогнозирование экономического роста» (Ивантер, 2017), проведенной ИНП РАН в 2017 г. в связи с 80-летним юбилеем акад. Ю.В. Яременко. Пример постановки оптимизационной задачи в равновесном моделировании содержится в работе (Ашимов, Айсакова, Алшанов, 2014). Пример анализа динамизма изменения выпусков и экспортно-импортного сальдо можно видеть в (Баранов, Елсакова, Корнева, 2015). Данное сальдо отражает результативность внешнеэкономических связей, взаимодействия которых со структурными трансформациями и инвестиционными процессами исследуют авторы (Суворов, Трещина, Белецкий, 2017).

2. ОПИСАНИЕ КРИТЕРИЯ И МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ

Первая сложность, сопровождающая постановку задач оптимизации, заключается в определении критерия качества решения таких задач. Невозможно представить, что макроэкономике, объективную реальность экономической жизни можно снабдить единым критерием оптимизации и оптимальности, который согласует все интересы. Вторая сложность, являющаяся особенностью нашей задачи, состоит в определении метода оптимизации (численного поиска) в условиях огромного числа варьируемых параметров. Теоретически любые (возможно, и все сразу) элементы матриц и векторов наших моделей могут составить вектор варьируемых параметров. Вариации отображают результаты воздействия на экономику инвестиционных процессов, прогресса технологий и прочих слагаемых смены технологических укладов (по С.Ю. Глазьеву) (Глазьев, 2012; Кондратьев, Яковец, Абалкин, 2002).

В нашем случае наиболее естественным является критерий качества структуры экономики, формируемый на основе спектра собственных значений матрицы состояния G . Цель оптимизации может заключаться в том, чтобы структурные динамические свойства обеспечивали устойчивый и сбалансированный экономический рост, который также называется магистральным. Возможны иные критерии, но тоже на основе алгебраического подхода. Например, при работе с моделью (1) в качестве критерия оптимальности можно, подобно (Позамантис, 2014), выбрать показатель «полезность», который будет равен суммарному откорректированному конечному потреблению. Последнее получается, если элементы конечного потребления умножаются на корректирующие коэффициенты — отношения общественной полезности продукта к его рыночной цене. Но такие коэффициенты предстоит еще как-то получить, желательно единственным, обоснованным, понятным способом. В нашем же случае, так или иначе, оптимальность связана с заданным или желаемым расположением на комплексной плоскости собственных значений матрицы G , которая определяется производственными затратами, инерционностями, конечным спросом и разностью между выпуском товаров и услуг и промежуточным потреблением (валовой добавленной стоимостью, ВДС). Сказанное означает, что если выполненный шаг оптимизации приводит к улучшению асимптотики переходного процесса в смысле роста производства, то мы на правильном пути — присутствует оптимальность.

В условиях неприемлемо длинного (для стандартных методов оптимизации типа покоординатного или градиентного спуска, ньютоновских методов, а также процедур, основанных на методе наименьших квадратов (МНК) и его вариантов или на построении линейно-квадратичного регулятора (Крутько, Максимов, Скворцов, 1988)) вектора варьируемых параметров следует, по-видимому, ограничиться рассмотрением варианта процесса оптимизации СДС при малых приращениях варьируемых параметров, сохраняющих линейную связь вида

$$S\Delta z = \Delta\alpha, \quad (5)$$

где S — матрица чувствительностей с элементами $\partial\alpha_i / \partial z_j$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$. Следует сделать здесь оговорку о том, что в работе не рассматриваются варианты оптимизации на основе искусственных нейронных сетей, алгоритмов машинного обучения — это следующий и относительно самостоятельный этап наших исследований.

Матрица S является составляющей из группы показателей СДС экономики в том смысле, что чувствительности, наряду с наблюдаемостями, управляемостями и т.п., есть вычисляемые компоненты СДС. Здесь m — длина вектора варьируемых параметров z ; Δz — вектор приращений этих параметров; α_i — вещественные части собственных значений матрицы состояния модели, в общем случае — это $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\omega_i$, $j = \sqrt{-1}$. Пусть α_i^* — их текущие значения, тогда $\alpha_i = \alpha_i^* + \Delta\alpha_i$ — желаемые значения после оптимизации. Сама оптимизация выполняется за один шаг сразу по всем параметрам. Этими параметрами могут быть либо назначенные, либо все элементы массивов исследуемой модели. Итераций в предлагаемом методе как таковых нет. Они могут выполняться только для установления таких желаемых сдвигов вещественных частей спектра собственных чисел, которые сохраняют линейность связей (5). Формула (5) возникает как часть ряда Тейлора при удержании в ней слагаемого с первыми производными.

Даже интуитивно ясно, что вопросы управляемости СДС связаны с их чувствительностью к параметрам модели. Эти параметры включаются в вектор z . Нам сейчас важны функции чувствительности α_i от z . Учитывая, что матрица состояния G может изначально приниматься как диагональной, так и содержать клетки Жордана для описания циклов деловой активности (Торопцев, Маратовский, 2022а, 2022б), будем относиться к ней как к матрице общего вида. Описывать возможные варианты формирования G , как и сам процесс оцифровки модели, мы здесь не станем — статья

имеет иное назначение. В таком рассмотрении линейная алгебра сообщает нам следующие связи для правых и левых собственных векторов U_i и V_i матрицы G соответственно (Уилкинсон, 1970):

$$GU_i = \lambda_i U_i; \quad G^T V_i = \lambda_i V_i, \text{ или } V_i^T G = \lambda_i V_i^T. \quad (6)$$

Дифференцирование первого уравнения из (6) дает

$$\frac{\partial G}{\partial z_j} U_i + G \frac{\partial U_i}{\partial z_j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} U_i + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial z_j}. \quad (7)$$

Умножение (7) справа на V_i^T , перенос второго слагаемого правой части в левую и очевидная группировка приводят к уравнению

$$V_i^T \frac{\partial G}{\partial z_j} U_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} V_i^T U_i + (\lambda_i V_i^T - V_i^T G) \frac{\partial U_i}{\partial z_j}. \quad (8)$$

Так как второе слагаемое правой части (8), с учетом третьего равенства из (6), равно нулю, то для вычисления чувствительностей получим:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial z_j} = \left(V_i^T \frac{\partial G}{\partial z_j} U_i \right) / V_i^T U_i, \quad \frac{\partial G}{\partial z_j} \approx \frac{G(z_j + \Delta z_j) - G(z_j)}{\Delta z_j}. \quad (9)$$

Для формирования матрицы чувствительностей $S = \{\partial \alpha_i / \partial z_j\}$ размерности $(n \times m)$ надо взять действительные части от (9), ведь именно расположением вещественных частей корней характеристического уравнения на комплексной плоскости определяется асимптотика структурной динамики экономики. Таким образом, матрица S из (5) вычислится, а мы имеем возможность построить процедуру оптимизации СДС на основе формулы (5).

После определения линейного прогноза собственных значений в соответствии с $\alpha_i = \alpha_i^* + \Delta \alpha_i$ мы можем вычислить новую (оптимизированную) матрицу инерционностей B , отвечающую новым значениям параметров управления из вектора z . Техника таких вычислений изложена нами в (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б). Следует заметить, что при решении уравнений прогноза (5) в самых разных прикладных задачах чаще всего возникают ситуации, когда $m > n$ и $n > m$ и матрица S является прямоугольной. Численное решение недоопределенной и переопределенной систем может быть найдено с минимальной нормой, для чего давно и успешно используется сингулярное разложение (процедура SVD с одноименным программным модулем из вычислительных математических сред). Важно, что сингулярное разложение выполняется на основе преобразований, характеризующихся в алгебре тремя определениями: элементарные, устойчивые, ортогональные. Их уникальность состоит в том, что компьютерные реализации не накапливают вычислительных погрешностей. Исторически первое отечественное детальное описание процедуры SVD можно видеть в (Воеводина, 1968). Для широкого круга специалистов надежность и фундаментальность SVD доказана в (Уилкинсон, 1970), а также подтверждена еще в 1970-е годы работами по Национальной программе тестирования математического обеспечения США и такими грандами прикладной математики в целом и линейной алгебры в частности, как Р. Беллман, Д.Х. Голуб, У.М. Кахан, Р. Лоусон Воот, С. Райнш, Х. Рутисхаузер, И. Стюарт, Ш.М. Хенсон, Д.М. Френсис, В.Н. Кублановская, Д.К. Фаддеев, Ф.Р. Гантмахер и др.

Решение с минимальной нормой обеспечивает в уравнении (5) минимальную невязку $r = S\Delta z - \Delta \alpha$, т.е. $(r, r) \rightarrow \min$ с точки зрения МНК. Часто данная невязка вообще нулевая. Требование минимума нормы решения всегда присутствует в нашем случае еще и потому, что с уменьшением длины вектора Δz растет точность модели линейного приближения (5). Дальнейшее уменьшение длины Δz для поддержания линейности связи (5) возможно ценой некоторого роста невязки r . Заметим, что матрица S в общем случае имеет как указанную размерность, так и ранг k — в качестве еще одной характеристики. Тогда для рассмотрения предлагаются следующие случаи:

$$\begin{aligned} 1) k = n = m; \quad 2) k < n = m; \quad 3) k = m < n; \\ 4) k < m < n; \quad 5) k = n < m; \quad 6) k < n < m. \end{aligned} \quad (10)$$

Сингулярное разложение матрицы S имеет канонический вид (Голуб, Лоун, 1999):

$$S = U \Sigma V^T, \quad (11)$$

где U и V — унитарные в общем случае матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(m \times m)$ соответственно, содержащие левые и правые сингулярные векторы S ; $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ размерности $(n \times m)$, где на диагонали расположены сингулярные числа S , равные неотрицательным квадратным корням собственных

значений матрицы $S^T S$. Вычисленные сингулярные числа σ_j представляются упорядоченными в порядке убывания в одномерном массиве для $1 \leq j \leq k$, а для $k < j \leq \min(n, m)$ σ_j равны нулю. Здесь мы должны опереться на достижения алгебры, чтобы не отсылать читателя к первоисточникам.

С учетом разложения (11) вектор невязки определяется следующим уравнением:

$$r = S\Delta z - \Delta\alpha = (U\Sigma V^T)\Delta z - \Delta\alpha. \quad (12)$$

Для дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\overline{\Delta z} = V^T \Delta z; \quad \overline{r} = U^T r; \quad \overline{\Delta\alpha} = U^T \Delta\alpha. \quad (13)$$

С учетом обозначений (13) уравнение (12) принимает вид:

$$\overline{r} = \Sigma \overline{\Delta z} - \overline{\Delta\alpha}. \quad (14)$$

Линейная алгебра доставляет нам сведения о таких характеристиках векторов, как их длины и углы между ними. Умножение ортогональных матриц на эти векторы указанных характеристик не меняет. Поэтому для нижеследующих скалярных произведений имеем:

$$(\overline{r}, \overline{r}) = (r, r); \quad (\overline{\Delta\alpha}, \overline{\Delta\alpha}) = (\Delta\alpha, \Delta\alpha); \quad (\overline{\Delta z}, \overline{\Delta z}) = (z, z). \quad (15)$$

Зная структуру матрицы Σ , распишем результаты ее участия в (14) для различных k, n, m :

$$\overline{r}_j = \sigma_j \overline{\Delta z}_j - \overline{\Delta\alpha}_j, \quad 1 \leq j \leq k; \quad (16)$$

$$\overline{r}_j = 0 \times \overline{\Delta z}_j - \overline{\Delta\alpha}_j, \quad k \leq j \leq \min(n, m); \quad (17)$$

$$\overline{r}_j = -\overline{\Delta\alpha}_j; \quad \min(n, m) \leq j \leq n. \quad (18)$$

Анализ случая 1) из (10) позволяет убедиться в том, что решение определяется из уравнений (16), а вот группы уравнений (17) и (18) в данном случае отсутствуют. Для проверки можно воспользоваться непосредственной подстановкой. Невязки здесь точно будут нулевыми, а приращения варьируемых параметров находятся очевидным образом:

$$\overline{\Delta z}_j = \overline{\Delta\alpha}_j / \sigma_j, \quad j = 1, \dots, k; \quad \Delta z = V \overline{\Delta z}. \quad (19)$$

Решение (18) соответствует обычному решению невырожденной системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

Для случая 3) из формулы (10) задача определения Δz также имеет единственное решение. Только здесь реализация идеи МНК требует участия уравнений (16) и (18). Последнее очевидным образом приводит к ненулевому вектору невязок, однако подавляющее число вариантов оптимизации очевидно ограничивается случаем 5) из формулы (10) с участием (16). Случаи 2), 4) и 6) из формулы (10) с маленьким рангом при поиске решения требуют использования групп уравнений (16) и (17). Однако в этих случаях решение может быть неоднозначным, потому что при рангах меньших m или n для известной части компонент $\overline{\Delta z}_j$ из уравнений (17) устанавливается произвол выбора значений, и это не влияет на величины невязок. С точки зрения МНК и минимизации нормы решения эти составляющие для уравнений (17) должны приниматься нулевыми. Можно заметить дополнительно, что в случаях 5) и 6) из формулы (10) неоднозначность решения возникает при $n < j \leq m$. Значения $\overline{\Delta z}_j$ при выполнении последнего неравенства также не влияют на величины невязок и должны приниматься равными нулю.

Формула (19) предусматривает деление на сингулярные числа. Чем меньше их величина, тем больше результат деления $\overline{\Delta z}_j$. Наконец, величины σ_j могут войти в конфликт с требованием к точности расчета. Это произойдет тогда, когда величины σ_j и статистические ошибки исходных данных станут достаточно близки. Если вычисленные с большой долей шума составляющие решения $\overline{\Delta z}_j$ и Δz_j будут использоваться при его формировании, то можно получить эффект развала решения — настолько сильно зашумлены его компоненты.

Численный анализ такой задачи предполагает ее декомпозицию, нацеленную на исключение составляющих движения, отвечающих малым σ_j . Для этого необходимо установить границу τ . Обычно это некоторая малая величина, ориентирующаяся на точность данных используемой статистики (Форсайт, Малькольм, Моулер, 1980). Сопоставление данной границы со значениями σ_j позволяет обнулить зашумленные составляющие решения $\overline{\Delta z}_j$ по правилу:

- если $\sigma_j \geq \tau$, то $\overline{\Delta z}_j = \overline{\Delta\alpha}_j / \sigma_j$;
- если $\sigma_j < \tau$, то $\overline{\Delta z}_j = 0$, $j = 1, \dots, m$,

что предотвращает развал решения.

Таким образом, выполняется регуляризация задачи, и определение решения по формуле (19) осуществляется в подпространстве сингулярных чисел, отвечающих условию $\sigma_j \geq \tau$. Уменьшается эффективное число обусловленности матрицы S . Если изначально оно определялось отношением σ_{max} к σ_{min} , то в условиях декомпозиции задачи эффективное число обусловленности уменьшается, становясь равным отношению σ_{max} к τ . Тогда эффективный ранг матрицы чувствительностей S будет равен числу σ_j , для которых выполняется неравенство $\sigma_j \geq \tau$. Приближенные начальные суждения о значении границы τ могут стать основанием для проведения повторных расчетов с целью ее эмпирического уточнения. В этом случае следует стремиться к достижению компромисса между сохранением линейности связей (5) (т.е. надежностью определения вектора Δz) и растущей невязкой r . При этом сохранение модели линейного приближения (при изначально нелинейной задаче МНК) важнее малости невязки.

По завершении декомпозиции задачи решение модели (5) в пространстве оставленных в расчете сингулярных чисел для компоненты с номером j будет иметь вид:

$$\Delta z_j = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^n u_{i,l} \Delta \alpha_i / \sigma_l \right) v_{j,l}. \quad (20)$$

Наши рассуждения и доводы согласуются с общей нелинейностью связей между желаемыми приращениями из вектора $\Delta \alpha$ и удовлетворяющими такие желания элементами из вектора Δz . В нашем случае вычисляемые Δz_j при задаваемых $\Delta \alpha_j$ являются только линейным прогнозом на основе модели (5). Корректность такого прогноза нуждается в проверке и подтверждении, являясь справедливой только для «достаточно малых» Δz_j . «Достаточную малость» следует устанавливать в ходе вычислительного эксперимента. Ясно, что большие приращения $\Delta \alpha$ могут повлечь за собой большие приращения Δz . Их подстановка в модели (1) или (3) может вызвать появление спектра собственных значений G , далеких от ожидаемого, что станет свидетельством сильного нарушения линейности (5). Факт такого нарушения легко проверяется прямым расчетом матрицы G . Изначально экзогенно задаваемые приращения $\Delta \alpha_j$ и так не должны быть большими из-за физических и экономических ограничений достижимости роста валового производства. Более того, интервалы $\Delta \alpha_j$ можно разбить, например, на 10 участков и рассчитать векторы Δz в этих контрольных точках. Таким образом, получится таблица прогнозов, из которой можно будет выбрать приемлемый из математических и инженерно-экономических соображений вариант. Осталось только заметить, что для моделей высокой размерности в оптимизации могут принимать участие не все $\Delta \alpha_j$, а только назначенные. При этом возможен нежелательный эффект встречного движения участвующих и не участвующих в процессе оптимизации $\Delta \alpha_j$. Это значит, что у одних составляющих движения показатель степени роста будет увеличиваться, а у других — снижаться. Если это так, то сделавшиеся отрицательными приращения $\Delta \alpha_j$ целесообразно включить в рассмотрение (5), задав им нулевые значения ($\Delta \alpha_j = 0$).

И еще одно соображение. Околонулевая чувствительность к вариации собственных чисел позволяет исключить из рассмотрения соответствующие элементы матрицы инерционностей, уменьшая столбцовую размерность матрицы S модели (5), порой значительно.

Некоторый практический интерес может представлять задача введения и учета ограничений на варьируемые параметры, которыми в данной работе остаются элементы матрицы межотраслевых инерционностей. Для такого учета можно предложить следующую технологию. Положим, что мы выполняем последовательность одношаговых оптимизаций в соответствии с моделью (5) и на таком шаге/итерации с номером p вычислили вектор приращений параметров $\Delta z^{(p)}$. Инженерно-экономические экспертные соображения практически всегда позволяют с достаточной обоснованностью указать для элементов вектора $z^{(p)}$ минимально и максимально возможные значения по сравнению с текущими значениями. Тогда по отношению к последним максимально допустимые (permissible) вариации параметров оптимизации определяются следующим образом:

$$\Delta z_j^{per} = z_j^{max} - z_j, \Delta z_j^{(p)} > 0; \Delta z_j^{per} = z_j - z_j^{min}, \Delta z_j^{(p)} < 0. \quad (21)$$

Далее по данным расчета (21) вычисляются частные вида $q_j = |\Delta z_j^{(p)} / \Delta z_j^{per}|$ и находится их максимальное значение q^{max} . Ясно, что при $q^{max} < 1$ условие

$$z_j^{min} < z_j < z_j^{max} \quad (22)$$

выполняется. Когда это не так, то имеются составляющие вектора приращений, покинувшие диапазон ограничений. В этом случае вектор приращений $\Delta z^{(p)}$ можно разделить на q^{max} , выполнив их масштабирование. В дополнение к сказанному отметим: ничто не мешает обсуждаемым

параметрам вернуться в диапазон (22) на следующих шагах оптимизации. Если же возврата не происходит, то их значения на шаге j фиксируются и они исключаются из оптимизации. Вычисленный вектор Δz модели (5) позволяет сформировать новую матрицу инерционностей B , вычислить с ее участием матрицу состояния G и рассчитать ее собственные числа. Расчет собственных значений позволяет проверить наш прогноз их перемещения в комплексной плоскости и внести коррективы, если они потребны. Таким образом, цикл замкнулся, можно вычислять новые элементы матрицы чувствительностей S из (5) и продолжать оптимизацию.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычислительный эксперимент, подтверждающий работоспособность предложенной процедуры оптимизации, выполнялся на основе данных статистического сборника «Национальные счета России в 2014–2018 годах» (Росстат, 2019). Мы брали статистику 2016 г., для того чтобы потом можно было сравнить результаты моделирования при размерности массивов (20×20) с таковыми же при размерности (98×98) в базовых таблицах «затраты–выпуск» с сайта «Росстата». Нами использовались таблицы формирования выпуска товаров и услуг и авторская техника последовательных согласованных преобразований и расчетов, представленная в работах (Торопцев, Мараховский, 2022а, 2022б). Построение матрицы чувствительностей S по формуле (9), при том что все элементы B вошли в вектор варьируемых параметров, показало, что сколь-нибудь существенное сокращение ее размерности по столбцам возможно, но нецелесообразность этого надо всякий раз обосновывать результатами анализа S . В данной работе мы не будем этим заниматься. Сообщим только, что наша S не содержит столбцов, все элементы которых были бы близки к машинному нулю. За сокращение размерности придется заплатить большими приращениями (Δb_{ij}) оставшихся для участия в оптимизации элементов B для достижения от нее того же эффекта.

Матрица межотраслевых инерционностей B в результате выполнения шага оптимизации получила приращения ΔB , сформированные в виде матрицы (20×20) из вектора решения Δz модели (5) длиной 400 элементов. Для лучшей обзримости приращения представлены на рисунке. Наиболее значимые отрицательные приращения естественным образом расположены на диагонали. Они играют ведущую роль при оптимизации СДС, уменьшая инерционности формирования добавленных стоимостей профильной для отраслей продукции, тогда как инерционности создания этих стоимостей при производстве непрофильной продукции оказывают значительно меньшее влияние на результат оптимизации.

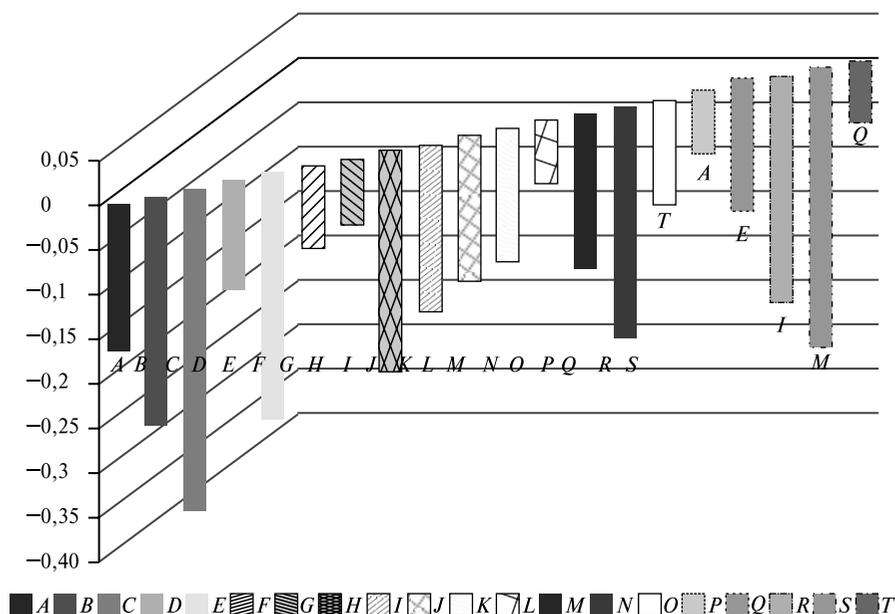


Рисунок. Графическое представление приращений межотраслевых инерционностей на шаге оптимизации

Таблица. Собственные значения матрицы состояния до и после шага оптимизации

До оптимизации	После оптимизации	Разность $\Delta\lambda$
0,1310	0,1380	0,0070
0,1255	0,1337	0,0082
0,1250	0,1322	0,0072
0,1230	0,1319	0,0089
0,1020	0,1111	0,0091
0,1000	0,1084	0,0084
0,0990	0,1071	0,0081
0,0960	0,1022	0,0062
0,0940	0,0976	0,0036
0,0935	0,0961	0,0026
0,0930	0,0955	0,0025
0,0890	0,0917	0,0027
0,0850	0,0877	0,0027
0,0840	0,0854	0,0014
0,0810	0,0814	0,0004
0,0740	0,0745	0,0005
0,0700	0,0705	0,0005
0,0660	0,0668	0,0008
0,0650	0,0655	0,0005
0,0580	0,0595	0,0015
$\Sigma\lambda = 1,584$	$\Sigma\lambda = 1,937$	$\Sigma\Delta\lambda = 0,083$

Источник: расчеты авторов.

Приращения собственных значений задавались на основе анализа чувствительностей, но с ориентацией на уровень 10^{-3} . Малые приращения обусловлены необходимостью гарантировать линейность модели (5), а результат шага такой оптимизации представлен в таблице. Контрольные суммы спектра суммы собственных значений матрицы состояния межотраслевой модели, приведенные в таблице, свидетельствуют о склонности к росту валового производства уже при малом шаге оптимизации. Выполненный шаг легко позволяет определить, что полученные приращения инерционностей увеличивают валовое производство на 1,1%. Выполнение следующих шагов позволяет идти по пути увеличения роста, однако увлечение оптимизацией непременно приведет к результатам, не имеющим отношения к экономической жизни. Завершение этого процесса находится в руках исследователя. Здесь следует обратить внимание на актуальность постановки и решения задачи перевода элементов Δb_{ij} в термины инвестиционного проектирования, в интерпретации этих элементов в плоскости анализа и оценки влияния инвестиционных проектов на рост валового производства, валовой добавленной стоимости, на экономический рост. Но это задача — вне рамок нашей статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Завершая данное изложение, отметим, что в настоящей работе предложен метод оптимизации/повышения собственных динамических свойств экономических систем, формализованных динамическим межотраслевым балансом в виде системы дифференциальных уравнений. При этом оптимизация выполняется за один шаг решением модели (5), а длина вектора варьируемых параметров модели ограничена только ее размерностью и в этом смысле может быть произвольной при сохранении высокой работоспособности метода. Такой вычисленный или модельный рост структурной эффективности экономики предоставляет только некоторые необходимые условия общего экономического роста. Достаточные условия этого роста создаются контуром управления, в котором формируется экономическая политика и принимаются экономические решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Алмон К. (2021). Искусство экономического моделирования. М.: ИНП РАН, МАКС Пресс. [Almon K. (2021). *The Art of economic modeling*. Moscow: INP RAS, MAX Press (in Russian).]
- Андрукович П.Ф. (2020). Заметки о принципах построения моделей прогноза экономических показателей (на примере прогнозной системы «prognose») // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 66–76. [Andrukovich P.F. (2020). Notes on the principles of constructing models for forecasting economic

- indicators (on the example of the forecast system “prorosec”). *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 66–76 (in Russian).]
- Ашимов А.А., Айсакова Б.А., Алшанов Р.А.** (2014). Параметрическое регулирование экономического роста на базе неавтономных вычислимых моделей общего равновесия // *Автоматика и телемеханика*. Вып. 6. С. 69–85. [Ashimov A.A., Aisakova B.A., Alshanov R.A. (2014). Parametric regulation of economic growth based on non-autonomous computable general equilibrium models. *Automation and Remote Control*, 6, 69–85 (in Russian).]
- Баранов А.О.** (2017). Выход из кризиса и перспективы экономического роста в России в 2018–2019 гг. // *ЭКО*. № 12. С. 5–17. [Baranov A.O. (2017). Recovery from the crisis and prospects for economic growth in Russia in 2018–2019. *ECO Journal*, 12, 5–17 (in Russian).]
- Баранов А.О., Квактун М.И.** (2020). Прогнозирование ускоренного обновления основного капитала в России с использованием динамической межотраслевой модели // *Проблемы прогнозирования*. № 2. С. 48–59. [Baranov A.O., Kvaktun M.I. (2020). Forecasting accelerated renewal of fixed capital in Russia using a dynamic intersectoral model. *Studies on Russian Economic Development*, 2, 48–59 (in Russian).]
- Баранов А.О., Широков А.А.** (2020). Экономическая политика России в межотраслевом и пространственном измерении: материалы 2-й конференции ИМП РАН и ИЭОПП СО РАН по межотраслевому и региональному анализу и прогнозированию. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН. [Baranov A.O., Shirov A.A. (2020). *Economic policy of Russia in the intersectoral and spatial dimension: Materials of the 2nd conference of INP RAS and IEPP SB RAS on intersectoral and regional analysis and forecasting*. Novosibirsk: Publishing House of IEOPP SB RAS (in Russian).]
- Баранов Э.Ф., Елсакова А.В., Корнева Е.С.** (2015). Декомпозиционный анализ на основе таблиц «затраты–выпуск» из базы данных WIOD. М.: Изд. дом Высшей школы экономики. [Baranov E.F., Elsakova A.V., Korneva E.S. (2015). *Decomposition analysis based on input-output tables from the WIOD database*. Moscow: Publishing House of the Higher School of Economics (in Russian).]
- Бертсекас Д.** (1987). Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь. 400 с. [Bertsekas D. (1987). *Constrained optimization and lagrange multiplier methods*. Transl. from the English. Moscow: Radio i Svjaz'. 400 p. (in Russian). Originally published by Academic Press, 1982.]
- Воеводина В.В.** (1968). Ошибки округления в алгебраических процессах. М.: ВЦ МГУ. [Vojvodina V.V. (1968). *Rounding errors in algebraic processes*. Moscow: VC MSU (in Russian).]
- Глазьев С.Ю.** (2012). Современная теория длинных волн в развитии экономики // *Экономическая наука современной России*. № 2 (57). С. 8–27. [Glazyev S.Yu. (2012). The modern theory of long waves in the development of the economy. *Economics of Contemporary Russia*, 2 (57), 8–27 (in Russian).]
- Глазьев С.Ю.** (2016). Прикладные результаты теории мирохозяйственных укладов // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 3. С. 3–21. [Glazyev S.Yu. (2016). Applied results of the theory of world economic patterns. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 3, 3–21 (in Russian).]
- Голуб Дж., Лоун Ч.В.** (1999). Матричные вычисления. М.: Мир. [Golub J., Lone C.W. (1999). *Matrix calculations*. Moscow: Mir (in Russian).]
- Гринберг Р.С.** (2015). Экономика современной России: состояние, проблемы, перспективы. Общие итоги системной трансформации // *Век глобализации*. № 1 (15). С. 166–182. [Grinberg R.S. (2015). The economy of modern Russia: Status, problems, prospects. Overall results of the system transformation. *Journal of Globalization Studies*, 1 (15), 166–182 (in Russian).]
- Гринберг Р.С., Рубинштейн А.Я.** (2008). Основания смешанной экономики. Экономическая социодинамика. М.: ИЭ РАН. [Grinberg R.S., Rubinstein A. Ya. (2008). *The foundations of a mixed economy. Economic sociodynamics*. Moscow: IE RAS (in Russian).]
- Деннис Дж., Шнабель Р.** (1988). Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир. 440 с. [Dennis J.E., Schnabel R.B. (1988). *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations* (Prentice-Hall, 1983). Moscow: Mir (in Russian).]
- Доценко Е.Ю.** (2019). Структурная инерция как методологический инструмент исследования структурных сдвигов в экономике // *Научно-практический журнал «Экономика и управление инновациями»*. № 1. С. 4–17. [Dotsenko E.Yu. (2019). Structural inertia as a methodological tool for the study of structural shifts in the economy. *Economics and Innovation Management. Scientific & Practical Journal*, 1, 4–17 (in Russian).]
- Дужински Р.Р., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С.** (2017). Системные проблемы экономического роста в современной России // *Экономический анализ: теория и практика*. Т. 16. Вып. 2. С. 204–220. [Duszynski R.R., Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S. (2017). Systemic problems of economic growth in modern Russia. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 16, 2, 204–220 (in Russian).]
- Дужински Р.Р., Торопцев Е.Л., Мараховский А.С.** (2018). Объединение информационно-аналитических возможностей равновесных и динамических межотраслевых моделей // *Экономический анализ: теория и прак-*

- тика. Т. 17. № 4. С. 736–753. DOI: 10.24891/ea.17.4.736 [Duszynski R.R., Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S. (2018). Integration of information and analytical opportunities of equilibrium and dynamic input-output models. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 17, 4, 736–753. DOI: 10.24891/ea.17.4.736 (in Russian).]
- Зарук Н.Ф., Галкин М.С., Светлов Н.М.** (2019). Методика анализа инвестиционной привлекательности с использованием экономико-математических методов: межотраслевой аспект // *Экономика, труд, управление в сельском хозяйстве*. № 11. С. 63–76. [Zaruk N.F., Galkin M.S., Svetlov N.M. (2019). Methodology of investment attractiveness analysis using economic and mathematical methods: Intersectoral aspect. *Economy, Labor, Management in Agriculture*, 11, 63–76 (in Russian).]
- Ивантер В.В.** (2017). Структурно-инвестиционная политика в целях устойчивого роста и модернизации экономики. М.: ИНП РАН. [Ivanter V.V. (2017). *Structural and investment policy for sustainable growth and modernization of the economy*. Moscow: INP RAS (in Russian).]
- Канторович Л.В.** (2011). Избранные труды. Экономико-математические работы. Ин-т математики им. С.Л. Соболева, СО РАН. [Kantorovich L.V. (2011). *Selected works. Economic and mathematical works*. S.L. Sobolev Institute of Mathematics, SB RAS (in Russian).]
- Касимов А.А., Богатырев А.В.** (2009). Оптимизация ресурсной политики предприятия // *Российское предпринимательство*. Т. 10. № 4. С. 46–50. [Kasimov A.A., Bogatyrev A.V. (2009). Optimization of the resource policy of the enterprise. *Russian Journal of Entrepreneurship*, 10, 4, 46–50 (in Russian).]
- Клейнер Г.Б.** (2020). Интеллектуальная экономика цифрового века // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 1. С. 18–33. [Kleiner G.B. (2020). The intellectual economy of the digital age. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 1, 18–33 (in Russian).]
- Колемаев В.А.** (2005). Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. М.: ЮНИТИ-ДАНА. [Kolemaev V.A. (2005). *Economic and mathematical modeling. Modeling of macroeconomic processes and systems*. Moscow: UNITY-DANA (in Russian).]
- Кондратьев Н.Д., Яковец Ю.В., Абалкин Л.И.** (2002). Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды. М.: Экономика. [Kondratiev N.D., Yakovets Yu. V., Abalkin L.I. (2002). *Large cycles of conjuncture and the theory of foresight. Selected works*. Moscow: Ekonomika (in Russian).]
- Крутько П.Д., Максимов А.И., Скворцов Л.М.** (1988). Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем. М.: Радио и связь. [Krutko P.D., Maksimov A.I., Skvortsov L.M. (1988). *Algorithms and programs for designing automatic systems*. Moscow: Radio i Svjaz' (in Russian).]
- Крюков В.А., Баранов А.О., Павлов В.Н., Суслов В.И., Суслов Н.И.** (2020). Проблемы развития единого комплекса средств макроэкономического межрегионального межотраслевого анализа и прогнозирования // *Экономика региона*. Т. 16. Вып. 4. С. 1072–1086. [Kryukov V.A., Baranov A.O., Pavlov V.N., Suslov V.I., Suslov N.I. (2020). Problems of development of a single set of tools for macroeconomic interregional intersectoral analysis and forecasting. *Economy of Region*, 16, 4, 1072–1086 (in Russian).]
- Ксенофонтов М.Ю., Широков А.А., Ползиков Д.А., Янговский А.А.** (2018). Оценка мультипликативных эффектов в российской экономике на основе таблиц «затраты–выпуск» // *Проблемы прогнозирования*. № 2 (167). С. 3–13. [Ksenofontov M. Yu., Shirov A.A., Polzikov D.A., Yantovsky A.A. (2018). Estimation of multiplicative effects in the Russian economy based on input-output tables. *Studies on Russian Economic Development*, 2 (167), 3–13 (in Russian).]
- Леонтьев В.В.** (1990). Экономические эссе. Теории, исследования, факты и политика. М.: Политическая литература. [Leontiev V.V. (1990). *Economic essays. Theory, research, facts and policies*. Moscow: Politicheskaja literatura (in Russian).]
- Миролюбова Т.В., Карлина Т.В., Николаев Р.С.** (2020). Цифровая экономика: проблемы идентификации и измерений в региональной экономике // *Экономика региона*. Т. 16. Вып. 2. С. 377–390. [Mirolyubova T.V., Karlina T.V., Nikolaev R.S. (2020). Digital economy: Problems of identification and measurement in the regional economy. *Economics of Region*, 16, 2, 377–390 (in Russian).]
- Петрикова Е.М.** (2011). Взаимосвязь показателей платежного и межотраслевого балансов // *Вопросы статистики*. № 7. С. 59–68. [Petricova E.M. (2011). Interrelation of indicators of payment and intersectoral balances. *Voprosy Statistiki*, 7, 59–68 (in Russian).]
- Позамантир Э.И.** (2014). Вычислимое общее равновесие экономики и транспорта (Транспорт в динамическом межотраслевом балансе). М.: Поли Принт Сервис. [Pozamantir E.I. (2014). *Computable general equilibrium of the economy and transport (transport in a dynamic intersectoral balance)*. Moscow: Poli Print Servis (in Russian).]
- Светульников С.Г., Абдуллаев И.С.** (2009). Экономическая динамика и производственные функции // *Вестник Оренбургского государственного университета*. № 5 (99). С. 110–114. [Svetunkov S.G., Abdullaev I.S. (2009). Economic dynamics and production functions. *Vestnik of the Orenburg State University*, 5 (99), 110–114 (in Russian).]

- Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В.** (1933). Вариационное исчисление. Ленинград: Кубуч. [Smirnov V.I., Krylov V.I., Kantorovich L.V. (1933). *Calculus of variations*. Leningrad: Kubuch (in Russian).]
- Суворов Н.В., Трещина С.В., Белецкий Ю.В.** (2017). Балансовые и факторные модели как инструмент анализа и прогнозирования структуры экономики. М.: МАКС Пресс. [Suvorov N.V., Crack S.V., Beletsky Yu.V. (2017). *Balance and factor models as a tool for analyzing and forecasting the structure of the economy*. Moscow: MAKS Press (in Russian).]
- Торопцев Е.Л., Мараховский А.С.** (2022а). Анализ макроструктурной динамики в рамках методологии «затраты–выпуск» // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 1 (53). С. 12–30. [Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S. (2022a). Analysis of macrostructural dynamics within the framework of the input-output methodology. *Journal of the New Economic Association*, 1 (53), 12–30 (in Russian).]
- Торопцев Е.Л., Мараховский А.С.** (2022б). Структурные инерционности экономических систем // *Экономика и математические методы*. Т. 58. № 1. С. 38–47. [Toroptsev E.L., Marakhovsky A.S. (2022b). Structural inertia of economic systems. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 1, 38–47 (in Russian).]
- Уилкинсон Дж.** (1970). Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука. [Wilkinson J. (1970). *Algebraic problem of eigenvalues*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** (1980). Машинные методы математических вычислений. М.: Мир. [Forsythe J., Malcolm M., Moulser K. (1980). *Machine methods of mathematical calculations*. Moscow: Mir (in Russian).]
- Хемди А.Т.** (2005). Введение в исследование операций. 6-е издание. Пер. с англ. М.: Вильямс. [Hemdi A.T. (2005). *Introduction to operations research*. 6th ed. Trans. from the English. Moscow: Williams (in Russian).]
- Широв А.А., Янговский А.А.** (2017). Межотраслевая макроэкономическая модель RIM — развитие инструментария в современных российских условиях // *Проблемы прогнозирования*. Т. 162. № 3. С. 3–19. [Shirov A.A., Yantovsky A.A. (2017). Inter-industry macroeconomic model of RIM — development of tools in modern Russian conditions. *Studies on Russian Economic Development*, 162, 3, 3–19 (in Russian).]
- Almon Cl., Grassini M.** (2010). The changing structure of employment in Italy 1980–2010: Can investment affect the outcome? *INFORUM Working Papers*.
- Bertsekas D.** (1982). *Constrained optimization and multiplier methods*. New York, London: Academic Press, Inc.
- Brunet F.** (2011). *Basics on Continuous Optimization*. Available at: <https://www.brnt.eu/phd/node10.html>
- Chen X., Guo J., Yang C.** (2004). Chinese economic development and input-output extension. *International Journal of Applied Economics and Econometrics*, 12, 1, 43–88.
- Dennis J.E., Schnabel R.B.** (1983). *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. New Jersey: Prentice Hall Inc.
- Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O.** (2004). *Methods for non-linear least squares problems*. 2nd ed. Informatics and Mathematical Modelling (IMM), Technical University of Denmark (DTU), Lyngby.
- Mohajan H.K.** (2012). *Aspects of mathematical economics, social choice and game theory*. PhD Dissertation, Lambert Academic Publishing, Germany.
- Mohajan H.K.** (2017). Optimization models in mathematical economics. *Journal of Scientific Achievements*, 2 (5), 30–42.
- Mohajan H.K., Islam J.N., Moolio P.** (2013). *Optimization and social welfare in economics*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, Germany.
- Zhang H., Chen X.** (2008). An extended input-output model on education and the shortfall of human capital in China. *Economic Systems Research*, 20, 2, 205–221.

Optimization of structural dynamics of the economy in the framework of the “input-output” methodology

© 2023 E.L. Toroptsev, M.M. Kandokhova, N.G. Gudieva

E.L. Toroptsev,

Digital Business Technologies and Accounting Systems, North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia; e-mail: eltoroptsev@yandex.ru

M.M. Kandokhova,

Center for Sustainable Development, Kabardino-Balkar State University, Nalchik, Russia; e-mail: mrkand@mail.ru

N.G. Gudieva,

Scientific and educational mathematical center “North-Caucasus Center for Mathematical Research”, Stavropol, Russia; e-mail; gudieva82@bk.ru

Received 28.12.2022

Abstract. The dynamic input-output balance model in the form of a system of differential equations, being digitized by the already published authors' methodology, allows solving a wide range of problems of static structural stability of economic systems. Structural dynamics can be optimized by including any variable parameters in the vector and the limit of all model elements. In this paper, inter-sectoral inertias are chosen, and a method is proposed that uses a vector of parameters of an arbitrary (allowed by the model itself) length at the step of the search process. This distinguishes the proposed method from existing ones, making it unique. The uniqueness specified here lies in the removal of the so-called “curse of dimensionality” inherent in the classical optimization problems (numerical search problems) using methods from the coordinate-wise descent to the rich Newtonian-type tools. In this sense, the method is a competitor to machine learning-based optimization of artificial neural networks. At the same time, it does not matter how exactly the task is formalized: it should highlight the target indicators and the vector of variable parameters. It is possible to define and solve many optimization problems by changing the content of the vector of variable parameters according to the corresponding plan of the computational experiment. The paper presents only one example and one optimization stage. The limiting and functional conditions for operation of the method preserve a linear relationship between the desired increments of the fundamental parts of the eigenvalues of the model state matrix and their sensitivities to control parameters. Such “small” optimization steps are separate and independent problems, the numerical solution of which can be repeated.

Keywords: dynamic input-output balance, digitization, optimization, sensitivities, singular value decomposition of a matrix.

JEL Classification: B41, C02, C61, C68

For reference: **Toroptsev E.L., Kandokhova M.M., Gudieva N.G.** (2023). Optimization of structural dynamics of the economy in the framework of the “input-output” methodology. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 26–38. DOI: 10.31857/S042473880025859-3

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Моделирование социально-экономического развития России с использованием больших данных и данных результатов натуральных экспериментов

© 2023 г. Д.И. Усманов, М.Н. Дудин

Д.И. Усманов,

ИПР РАН, Департамент экономической теории при Финансовом университете при Правительстве РФ, Москва; e-mail: us.dali@mail.ru

М.Н. Дудин,

ИПР РАН, Москва

Поступила в редакцию 05.12.2022

Статья подготовлена в рамках государственного задания ИПР РАН, 2023 год, тема НИР «Моделирование процессов обеспечения устойчивого и сбалансированного социально-экономического и пространственного развития России и стран ближнего зарубежья в целях формирования Большого евразийского партнерства».

Аннотация. Цель статьи заключается в исследовании перспектив социально-экономического развития России с точки зрения перехода к экономической автаркии. Исследование включает кластерный анализ тенденций и закономерностей социально-экономического развития России, а также стран ближнего зарубежья (СНГ). В качестве базы сравнения были использованы данные по странам, которые прошли (Южная Корея и Япония) или проходят (Иран) натуральный эксперимент экономической автаркии с различной степенью успешности. В качестве информационной базы исследования использованы статистически обработанные большие данные, отраженные в Индексе процветания стран (Legatum Prosperity Index) по итогам 2021 г. Также в исследовании проведено моделирование социально-экономического развития России с учетом накопленного потенциала на основе таксономического метода, относимого к группе экономико-математических методов принятия решений по множеству атрибутов (Multiple Attribute Decision Making, MADM). Результаты исследования показывают, что Россия не обладает необходимым потенциалом развития для перехода на успешные модели экономической автаркии, которые были реализованы в свое время в Южной Корее и Японии. Россия способна реализовывать и далее инерционную модель социально-экономического развития, а также перейти к экономической автаркии по иранскому типу. В равной степени этот же вывод относится и к странам ближнего зарубежья (СНГ). Полученные результаты могут быть использованы в качестве информационной базы для принятия решений в области государственного управления и регулирования социально-экономических и общественно-политических процессов.

Ключевые слова: экономика, общество, институты, развитие, социально-экономические модели, моделирование, экономическая автаркия, экономический уклад.

Классификация JEL: C40, R15.

Для цитирования: **Усманов Д.И., Дудин М.Н.** (2023). Моделирование социально-экономического развития России с использованием больших данных и данных результатов натуральных экспериментов // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 39–53. DOI: 10.31857/S042473880023483-0

ВВЕДЕНИЕ

Геополитические события февраля–марта 2022 г. кардинальным образом повлияли на структуру и динамику глобальной экономики. Изменения, не слишком заметные сейчас (замедление экономического роста, реструктуризация энергетических рынков и рынков технологий, стартовавшая трансформация глобальных логистических потоков и др.), имеют отложенные долгосрочные последствия, которые, вероятно, могут выразиться в установлении нового экономического, а значит, и социально-экономического уклада, поскольку одно без другого невозможно.

События сентября–октября 2022 г. не столько повлияли на глобальную экономику, сколько сформировали новые негативные стимулы сохранения и углубления рецессии российской экономики, но позитивные стимулы для роста получили экономики стран ближнего зарубежья.

Так, например, Казахстан и Узбекистан смогли привлечь в свои финансовые системы дополнительные российские деньги через открытие счетов для граждан Российской Федерации¹. Аналогичное преимущество получила и финансовая система Кыргызстана. Кроме этого, рынок труда Кыргызстана впервые за долгие годы (если не считать форс-мажорные эпидемические причины 2020 и 2021 г.) демонстрировал не отток рабочей силы в другие республики (в первую очередь — в Россию), но ее приток (в первую очередь — из России), включая трудовых мигрантов, имеющих и востребованную специализацию, и высокую квалификацию. До этого, стоит напомнить, страны ближнего зарубежья, и в первую очередь Центральной Азии, были поставщиками неквалифицированной или низкоквалифицированной рабочей силы на российский рынок. Беларусь является исключением — она получает позитивные стимулы экономического роста, республика вовлечена в процессы геополитической трансформации, инициированные Россией на рубеже февраля–марта 2022 г.

Не следует забывать и о том, что страны ближнего зарубежья получают и прямые экономические выгоды в результате перестройки глобальной экономики, начиная от не в полной мере легитимных схем параллельного экспорта и импорта и заканчивая прямым выходом на европейские и азиатские рынки. Ранее страны ближнего зарубежья имели опосредованный Россией (по большей части) выход на эти рынки. Учитывая, что многие страны ближнего зарубежья, сохранившие с Россией после событий февраля–марта 2022 г. реальные дипломатические взаимодействия и экономическое сотрудничество, развиваются на основе рентной или рентно-сырьевой модели; они получают преимущества, которые имела российская экономика до переориентации своих ресурсно-энергетических поставок с единого европейского рынка на фрагментированные рынки некоторых азиатских стран (Индии, Китая) и Турции. Но на этих рынках российская экономика вступает в конкуренцию с иранской. Начиная с 1973 г., Иран, с одной стороны, выстраивает автаркию, а с другой стороны, встроился в глобальный рынок (Насирбеёв, 2019; Савинский, 2018; Hufbauer, Jung, 2021).

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

Иран — первое государство, национальная экономика которого до сих пор существует в режиме санкций и экономической изоляции. По всей видимости, российская экономика в этом смысле будет второй (Ильюхов, 2015; Торкановский, 2020; Хоминич, Самаира, 2021; Ларин, Соколов, 2021; Клейнер, 2022; Цветков, 2022). Мы не будем принимать во внимание северокорейскую экономику, поскольку последняя полностью административно-командная (директивная), в то время как российская и иранская экономики сохраняют в той или иной степени признаки рыночной и, безусловно, имеют свои конкурентные ниши в глобальной экономике. Аналогичный тезис о конкуренции и рыночной экономике можно сделать и в отношении некоторых стран ближнероссийского зарубежья. Мы не будем исключать из анализа, в частности, Казахстан, но примем во внимание, что его экономика, очевидно, развивается по иному геоэкономическому вектору и приоритетом здесь является экономическое сотрудничество с Европейским союзом, странами Северной и Южной Америки, Китаем. Также из анализа не следует исключать Беларусь, но нужно принять во внимание риск утраты политической субъектности вследствие неопределенности правового положения ее власти, что может на практике как привести к экономическому провалу, так и к экономическому взлету.

Соответственно, в общий перечень изучаемых социально-экономических моделей, помимо двух вышеупомянутых стран, мы включаем в качестве объектов исследования экономики: Азербайджана, Армении, Кыргызстана, Молдовы, Таджикистана, Узбекистана, России; в качестве базы сравнения будут использованы данные о текущем условно-натурном эксперименте экономической автаркии в Иране. В качестве альтернативной информационной базы мы будем использовать статистические данные тех стран, где условный эксперимент экономической автаркии можно считать успешно завершенным (Южная Корея и Япония). Основным аналитическим инструментом сравнения больших массивов данных, которые мы планируем изучить, будет кластерный анализ.

Описание социально-экономических моделей анализируемых стран и стран, которые принимаются за базу сравнения, дано в табл. 1. В качестве инструмента кластеризации мы будем использовать метод «ближайшего соседа» (Einav, Levin, 2014; Tvaronaviciene, Razminiene, Piccinetti, 2015; Пискун, Хохлов, 2019; Юрченко, 2019; Ситковский, 2021). В качестве информационного источника

¹ Едовина Татьяна. Центральная Азия смещается на восток // *Коммерсант*. № 208. 10.11.2022 (<https://www.kommersant.ru/doc/5653582>).

мы будем использовать данные Индекса процветания стран (Legatum Prosperity Index), который включает 167 стран, развитие которых оценивается по 12 переменным, распределенным по трем группам (институты, экономика, общество). Мы полагаем правильным использовать по каждой оценочной группе среднюю гармонизированную величину баллов за 2021 г. (табл. 2). Средняя гармонизированная величина — один из методов расчета среднего значения в наборе данных. Этот метод особенно полезен, когда необходимо вычислить среднее значение набора данных, в котором присутствуют значительные выбросы или аномальные значения (Айвазян, Мхитарян, 2001).

Для расчета средней гармонизированной величины баллов необходимо взять обратное значение каждого балла, затем найти среднее обратных значений и взять обратное значение результата. Формула для расчета средней гармонизированной величины баллов: $H = n / (1/b_1 + 1/b_2 + \dots + 1/b_n)$, где H — средняя гармонизированная величина баллов; b_1, \dots, b_n — баллы в наборе данных; n — число баллов в наборе данных.

Важно отметить, что среднее гармонизированное число баллов может быть меньше, чем среднее арифметическое значение баллов, особенно если в наборе данных есть низкие значения баллов.

В целом, средняя гармонизированная величина является полезным инструментом для учета влияния выбросов и аномальных значений в наборе данных, а также для учета веса каждого значения при расчете среднего.

Таблица 1. Перечень стран, включаемых в анализ, и описание их социально-экономических моделей

№ п/п	Страна	Краткое описание социально-экономических моделей развития
1	Азербайджан	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с индустриально-аграрным экономическим укладом. Имеет большие запасы углеводородов, на глобальный рынок поставляет преимущественно сырую нефть и природный газ (т.е. сырье) или, в крайнем случае, продукцию низких переделов. Социально-экономическое расслоение высокое, уровень жизни населения средний. До 30% экономически активного населения занято в государственном секторе, примерно столько же — в сфере сельского хозяйства. Малое и среднее предпринимательство традиционное, низкая инновационная активность, преимущественная сфера — торговля и услуги
2	Армения	<i>Де-юре</i> парламентская республика и светское государство с индустриально-аграрным экономическим укладом. Не имеет доказанных запасов углеводородов, специализируется на обрабатывающей промышленности (добыча и обработка строительных материалов, меди, некоторых других металлов, включая золото). Значимую роль играет «сельское хозяйство и пищевая промышленность», где основным продуктом производства являются вина и коньяки. На обрабатывающую промышленность и сельское хозяйство приходится почти половина занятости. Государственный сектор значительно меньше, чем в Азербайджане. Социально-экономическое расслоение среднее, уровень жизни средний. Малое и среднее предпринимательство традиционное, низкая инновационная активность, специализация — в сфере торговли и услуг
3	Беларусь	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с признаками <i>failed state</i> (квазигосударство) (последние президентские выборы 2020 г. не имеют международного признания). Беларусь, как Армения и Азербайджан, использует индустриально-аграрную модель развития. Основные экономические специализации: обрабатывающая промышленность (машиностроение, химическое производство, включая агрохимию) и сельское хозяйство, которые обеспечивают основную занятость. При этом доля государственного сектора в экономике Беларуси очень высокая, по различным оценкам, — от 40–50% до 60–70% и выше. Социально-экономическое расслоение среднее, уровень жизни — средний. Малое и среднее предпринимательство, согласно данным Белстата, демонстрирует устойчивое развитие и средний уровень инновационной активности. Проверить эти данные по независимым источникам не представляется возможным
4	Кыргызстан	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с аграрно-индустриальным экономическим укладом. Наиболее развита в экономике отрасль золотодобычи и сельское хозяйство, в них же — основная занятость. Доля государственного сектора составляет от 25 до 30%, основной государственный сектор — энергетика. Социально-экономическое расслоение — ближе к среднему, уровень жизни населения низкий. Малое и среднее предпринимательство представлено в основном крестьянским (фермерским) хозяйством и индивидуальными предпринимателями, занятыми преимущественно в розничной торговле и сфере персональных услуг
5	Молдова	<i>Де-юре</i> парламентская республика и светское государство с аграрно-индустриальным экономическим укладом. Наиболее развитая отрасль — сельское хозяйство, чему благоприятствует климат и плодородные почвы. На втором месте — электронная промышленность (некоторые виды оборудования, комплектующие), здесь же — основная занятость. Развитый сектор услуг, чему способствует динамичная туристическая отрасль. Социально-экономическое расслоение ближе к среднему уровню, уровень жизни населения невысокий. Малое и среднее предпринимательство в большей степени традиционное, но с признаками инновационной диверсификации

Окончание таблицы 1

№	Страна	Краткое описание социально-экономических моделей развития
6	Таджикистан	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с аграрно-индустриальным укладом. Наиболее развито сельское хозяйство и обрабатывающая промышленность. Ключевые экспортные товары — овощи, фрукты, хлопок, а также алюминий. <i>Де-факто</i> Таджикистан — самоизолировавшееся государство, поэтому уровень социально-экономического расслоения и уровень жизни населения неизвестен. Но по косвенным данным можно судить о том, что в Таджикистане бедное население, экономические свободы отсутствуют, малое и среднее предпринимательство не развивается
7	Узбекистан	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с аграрно-индустриальным укладом. Наиболее развиты сельское хозяйство и добывающая промышленность (золото), в них же — основная занятость. Узбекистан обладает запасами углеводородов, но добыча, производство и экспорт нефти, нефтепродуктов, газа полностью монополизированы государством. Узбекистан, как и Таджикистан, является закрытым государством. Но по косвенным данным можно судить о высоком социально-экономическом неравенстве, высоком уровне бедности населения, малое и среднее предпринимательство в экономике не развивается
8	Казахстан	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с индустриальным укладом и высокой динамикой перехода к постиндустриальному укладу. В Казахстане имеются запасы углеводородного сырья, что на практике приводит к доминированию добывающего сектора в экономике. Кроме этого, Казахстан обладает развитым сельским хозяйством и развитой сферой торговли и услуг. Занятость в экономике диверсифицирована, но доля государственного сектора остается значимой (по разным оценкам, от 25–30 до 50–60%). Уровень социально-экономического расслоения ближе к среднему, уровень жизни населения средний, малое и среднее предпринимательство в большей степени традиционное, но с признаками инновационной диверсификации
9	Россия	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с индустриальным укладом, но со средней динамикой перехода к постиндустриальному укладу. Наиболее развиты добывающая и обрабатывающая промышленности, но на внешний и внутренний рынок поставляется преимущественно продукция низких переделов. Доля государственного сектора в экономике очень высокая (по разным оценкам, от 50 до 60%; по итогам 2022 г. этот показатель может вырасти). Занятость населения диверсифицирована, но значимые доли сконцентрированы в торговле и услугах (по виду экономической деятельности) и в государственном секторе (по форме собственности). Социально-экономическое расслоение среднее, но с тенденцией к росту; уровень жизни средний, но с тенденцией к снижению. Малое и среднее предпринимательство преимущественно традиционное, но с признаками инновационной диверсификации
10	Иран	<i>Де-юре</i> исламская республика с периодически обновляемой светской исполнительной властью. Экономика характеризуется индустриальным укладом и признаками постиндустриального перехода. Экономическая специализация — добыча и переработка нефти на экспорт, а также природного газа. Экономика Ирана находится под санкциями, но вместе с тем, в том числе посредством параллельного импорта и экспорта, Иран включен в глобальную экономику. Социально-экономическое расслоение высокое, уровень жизни средний, но около 15–18% населения живут в бедности. Малое и среднее предпринимательство традиционное, но с признаками инновационной диверсификации в области производства продукции военного и двойного назначения. Такая продукция имеет высокий уровень спроса со стороны национальных сообществ с низким или отсутствующей легитимностью исполнительной и законодательной власти. Параллельный, а также теневой импорт и экспорт, наличие экономических санкций, усиление изоляции и внешнего давления позволяют утверждать, что Иран как исламская республика имеет латентные признаки <i>failed state</i> (квазигосударства)
11	Южная Корея / Республика Корея	<i>Де-юре</i> президентская республика и светское государство с постиндустриальным экономическим укладом. Экономика Южной Кореи высокотехнологична, она обеспечивает поставки электронного оборудования, цифровой техники и технологий, автомобилей по всему миру и т.п. Социально-экономическое расслоение среднее с тенденцией роста, уровень жизни населения высокий. Малое и среднее предпринимательство диверсифицировано (традиционное и инновационное), но развивается преимущественно в рамках концепции корпоративного предпринимательства (чеболи)
12	Япония	Конституционная монархия, <i>де-юре</i> — светское государство с постиндустриальным экономическим укладом. Экономика Японии, как и Южной Кореи, высокотехнологичная, но более диверсифицированная с точки зрения разнообразия отраслей, рынков и рыночных сегментов. Одной из возможных причин этого стоит назвать пренебрежимо малое участие государства в экономике и высокую инвестиционную привлекательность как сегмента малого/среднего предпринимательства, так и корпоративного сегмента. В последнем нет такой высокой концентрации капитала, как в Южной Корее, однако присутствуют аналоги чеболей. Социально-экономическое расслоение среднее, уровень жизни очень высокий

Источник: составлено авторами на основе данных (Lockwood, 2015; Haggard, Moon, 2018; Mandelbaum, 2019; Медведев, 2020; Мигранян, 2020; Abduvaliev, Bustillo 2020).

Таблица 2. Исходные данные и средняя гармонизированная величина переменных Индекса процветания стран, включаемых в анализ (по данным за 2021 г.)

Страна	Институты					Экономика					Общество				
	Надежность и безопасность	Личные свободы	Государственное управление	Социальный капитал	Average (Среднее)	Инвестиционный климат	Условия предпринимательства	Доступность инфраструктуры и рынков	Качество экономики	Average	Условия жизни	Охрана здоровья	Образование	Окружающая среда	Average
Азербайджан	64,60	35,37	36,86	51,44	44,29	59,36	64,99	59,26	47,28	56,93	79,34	73,38	62,74	44,52	61,89
Армения	74,18	60,54	52,90	51,47	58,54	59,87	62,10	58,91	48,44	56,80	77,65	74,47	68,98	53,67	67,30
Беларусь	74,91	36,94	41,07	47,86	46,69	51,22	53,08	569,37	58,20	69,81	86,05	75,33	80,73	56,52	72,76
Кыргызстан	72,43	53,49	41,98	53,00	53,20	48,40	49,37	44,20	44,74	46,57	75,65	73,40	61,89	55,18	65,44
Молдова	69,95	57,88	45,90	56,67	56,33	52,50	52,15	57,09	46,48	51,78	78,73	72,33	68,91	49,03	65,11
Таджикистан	69,33	34,66	32,64	63,02	44,55	43,96	51,58	37,00	43,08	43,30	66,29	76,28	62,65	40,30	58,00
Узбекистан	76,23	34,00	33,30	60,96	44,96	50,48	49,37	48,59	48,53	49,23	66,29	76,28	62,65	40,30	58,00
Казахстан	68,09	39,63	43,51	56,62	49,65	59,70	55,54	57,57	59,50	58,03	81,81	73,81	78,61	50,50	68,62
Россия	50,99	40,38	41,42	54,01	45,96	54,38	54,96	63,09	62,57	58,47	79,45	71,64	82,78	56,07	70,85
Иран	54,94	21,84	30,85	51,62	34,55	39,80	35,22	46,87	37,59	39,43	76,57	74,75	63,85	42,68	61,04
Южная Корея	82,60	69,73	71,69	43,98	63,36	75,72	63,40	79,24	73,81	72,53	91,26	84,06	88,34	58,43	77,99
Япония	92,73	74,84	81,25	44,27	67,75	78,12	79,45	82,25	65,79	75,84	93,21	86,63	85,54	68,57	82,40

Источник: составлено авторами на основе данных: индекс процветания — «Legatum Prosperity Index» за 2021 г. (<https://www.prosperity.com/rankings>).

При этом целесообразным будет провести двумерный кластерный анализ, где в качестве первой меры используются институты, а в качестве второй — сначала экономика, а затем общество, после этого следует сопоставить экономическое и социальное развитие.

Для моделирования социально-экономического развития России мы будем использовать сложносоставной подход, который предполагает:

1) исследование экспертного мнения по кратко- и среднесрочным перспективам, которые будут влиять на институциональную, экономическую и социальную (общественную) динамику. Последующее преобразование полученной от экспертов информации в количественные величины с использованием нечетко-логического вывода;

2) построение сценариев или альтернатив социально-экономического развития и тестирование альтернатив с использованием метода таксономии. Этот метод был разработан в конце XVIII в. и адаптирован в 1970-е годы для нужд макроэкономического анализа и моделирования (Hellwig, 1972). В настоящее время таксономический метод используется для исследования потенциала развития различных социально-экономических систем (Zavadskas, Turskis, Kildienė, 2014; Cheba, Szopik-Depczyńska, 2017).

В основе таксономического метода лежит матрица решений размерностью $m \times n$, содержащая r_{ij} элементы, где i — альтернатива для атрибута j (атрибуты — столбцы). На первом шаге анализа рассчитывается среднее значение и стандартное отклонение атрибутов (эти формулы хорошо известны, поэтому мы не будем приводить их здесь). Поскольку матрица решений изначально может содержать неунифицированные атрибуты (например, выраженные в абсолютных и относительных величинах), то на втором шаге проводится унификация атрибутов по формуле:

$$Z_{ij} = (r_{ij} - \bar{r}_j) / S_j; \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где Z_{ij} — унифицированная величина атрибута j в альтернативе i ; r_{ij} — текущее значение элемента матрицы решений; \bar{r}_j — средняя величина атрибута j ; S_j — стандартное отклонение атрибута j .

Далее формируется матрица расстояний C_{ab} для каждой альтернативы (альтернативы — строки) относительно других альтернатив по сравнению с каждым из атрибутов. Для этого используется формула Евклидова расстояния методом попарного сравнения альтернатив a и b :

$$C_{ab} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (z_{aj} - z_{bj})^2}. \quad (2)$$

Далее необходимо унифицировать и усреднить альтернативы, аналогично тому, как это было сделано на первом шаге с расчетом средней величины и стандартного отклонения. Кроме этого, необходимо рассчитать однородность диапазона HO матрицы расстояний с учетом усредненной величины альтернатив \bar{d} их стандартного отклонения S_o :

$$HO = \bar{d} \pm 2S_o. \quad (3)$$

В том случае если диапазон альтернатив неоднороден, т.е. минимальные значения каждой строки находятся вне расчетного диапазона, то их следует исключить и снова рассчитать среднюю величину и стандартное отклонение. Далее следует исчислить паттерн развития альтернативы (C_{io}) для каждого атрибута (4) аналогично представленной выше формуле (2):

$$C_{io} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (z_{ij} - z_{oj})^2}, \quad (4)$$

где z_{oj} — идеальное (желаемое или ожидаемое) атрибута j в альтернативе i .

Следующий шаг — расчет предела паттерна развития альтернатив (C_o); здесь используется формула (5), содержание которой подобно формуле

$$C_o = \bar{C}_{io} \pm 2S_{C_{io}}. \quad (5)$$

Далее исчисляется атрибут развития F_i , относимый, соответственно, к альтернативе i :

$$F_i = C_{io} / C_o; \quad 0 \leq F_i \leq 1. \quad (6)$$

Та альтернатива, которая имеет меньшее значение (близкое к нулю), получает самый высокий ранг, что означает высокий потенциал развития этой альтернативы по некоторому множеству заданных атрибутов. Мы полагаем правильным рассматривать три альтернативные модели социально-экономического развития России (A_1, A_2, A_3), в которых вариативно изменяются ключевые макроатрибуты (C_1, C_2, C_3).

Таким образом, общий методический подход к исследованию перспектив, возможностей и ограничений в социально-экономическом развитии России на основе сформированного к настоящему моменту исследования базиса процветания описывается в табл. 3.

Предложенные модели были сформулированы опрошенными экспертами (учеными-экономистами и практикующими специалистами), они же дали исходную оценку макроатрибутов.

Таблица 3. Альтернативные модели социально-экономического развития России

Наименование модели	Краткая характеристика модели
Инерционная модель (A_1)	Сохранение текущих трендов (при условии внешней и внутренней политической и экономической стабилизации) социально-экономического развития
Модель интенсификации экономического роста (A_2)	Увеличение интенсивности социально-экономического развития путем повышения инвестиционной и инновационной активности в реальном секторе, но с минимальными институциональными изменениями
Модель интенсификации институциональных изменений (A_3)	Институциональные реформы в обществе и в экономике, обуславливающие создание новых стимулов для повышения инвестиционной и инновационной активности в реальном секторе
Макроатрибуты моделей	Краткая характеристика макроатрибутов
Институциональная динамика (C_1)	Инерционная, опережающая или диверсифицированная динамика институализации экономики и общества
Экономическая динамика (C_2)	Достижимый (при условии внешней и внутренней политической и экономической стабилизации) экономический рост
Социальная динамика (C_3)	Инерционная, диверсифицированная или трансформирующая динамика социальных и политических процессов

Источник: составлено авторами.

Таблица 4. Лингвистическое описание функций принадлежности для макроатрибутов «Институциональная динамика» и «Социальная динамика»

Лингвистическая переменная	Функция принадлежности
Институциональная динамика	
Инерционная динамика	[0; 0; 1]
Опережающая динамика	[0; 1; 1,5]
Диверсифицированная динамика	[1; 1,5; 1,5]
Социальная динамика	
Инерционная динамика	[0; 0; 0,5]
Диверсифицированная динамика	[0; 0,5; 1]
Трансформирующая динамика	[0,5; 1; 1]

Источник: составлено авторами.

При этом для двух макроатрибутов (институциональная динамика и социальная динамика) использовался нечетко-логический вывод (Bellman, Zadeh, 1970; Zadeh, 1988) на основе следующих функций принадлежности (табл. 4).

Экономическая динамика оценивалась экспертами в процентах достижимого экономического роста при условии внешней и внутренней экономической и политической стабилизации в 2023 г., где минимум был установлен на уровне 2%, а максимум — на уровне 6% в год.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основании данных, представленных в табл. 1, мы можем предварительно сформировать четыре кластера стран по типу экономического уклада (табл. 5).

Итак, в кластер стран с постиндустриальным экономическим укладом закономерно попадают Южная Корея и Япония, которые одновременно являются базой сравнения в ином исследовании, где натурный эксперимент экономической автаркии и изоляции успешно завершен. Далее, в кластер стран с индустриальным экономическим укладом попадают Россия, Казахстан и Иран. В Иране натурный эксперимент экономической автаркии и изоляции продолжается. Все остальные страны распределяются на два оставшихся кластера:

1) аграрно-индустриальный (т.е. с доминированием аграрного сектора в экономике): Узбекистан, Молдова, Таджикистан, Кыргызстан;

2) индустриально-аграрный (т.е. с доминированием индустриального — промышленно-производственного сектора в экономике): Азербайджан, Армения, Беларусь.

В табл. 6 представлены результаты первой итерации кластерного анализа (принцип «ближайшего соседа») из 12 рассматриваемых стран. Здесь мы также выделяем четыре кластера с точки зрения соотношения институциональной и экономической динамики.

Таблица 5. Предварительная кластеризация стран по типу экономического уклада

Экономический уклад (номера стран п/п в странах)	Названия стран, имеющих данный экономический уклад
Постиндустриальный (11, 12)	Южная Корея / Республика Корея и Япония
Индустриальный (8, 9, 10)	Иран, Россия, Казахстан
Аграрно-индустриальный (4, 5, 6, 7)	Узбекистан, Таджикистан, Молдова, Кыргызстан
Индустриально-аграрный (1, 2, 3)	Азербайджан, Армения, Беларусь

Источник: составлено авторами.

Таблица 6. Результаты кластерного анализа (первая итерация) по переменным «Институты» и «Экономика»

Кластер	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1 , включает (1, 2, 4, 5, 7, 8, 9)	0,00	11,363	10,723	16,452
S_2 , включает (3)	11,363	0,00	32,716	16,891
S_3 , включает (10)	10,723	32,716	0,00	43,882
S_4 , включает (11, 12)	16,452	16,981	43,882	0,00

Источник: составлено авторами.

Первый, наиболее многочисленный, кластер включает практически все страны с индустриальным, аграрно-индустриальным и индустриально-аграрным экономическим укладами, за исключением Беларуси и Ирана, которые образуют два единичных кластера. Закономерно, Южная Корея и Япония образуют отдельный кластер. Россия в этом анализе входит в первый кластер, расстояние которого ближе к Ирану, чем к Беларуси, но более чем в полтора раза дальше от кластера постиндустриальных стран, рассматриваемых в качестве базы сравнения. Расстояние кластера Беларуси также далеко от постиндустриальных стран, как и кластера, в который входит Россия, но еще больше расстояние между кластерами Беларуси и Ирана. Кроме этого, Иран больше других стран отстоит от четвертого кластера (Япония и Южная Корея).

Таким образом, с точки зрения институциональной и экономической динамики уровень развития России находится далеко от постиндустриального уклада. Это позволяет заключить, что экономическая автаркия и экономическая изоляция в России в большей степени соответствуют модели Ирана, чем модели Южной Кореи или Японии. Большое расстояние между кластерами Беларуси и Ирана указывает на то, что социально-экономическое развитие первой из упомянутых стран до недавнего времени в большей степени было ориентировано на открытость и значительно более глубокую интеграцию в глобальную экономику. Экономическая автаркия по иранскому типу означает не только использование спорных — с юридической точки зрения — схем экспортно-импортных операций, но разработку ретро- и квазиинноваций, в том числе повторное изобретение уже существующих технологий, но на более низком уровне научной прогрессивности и технологичности.

Точечная диаграмма корреляции (рис. 1) на основе двух переменных («Институты» и «Экономика») показывает значительно выше средней тесноту связи ($R^2 = 0,7367$) и позволяет утверждать, что высокое качество институтов положительно коррелирует с высоким качеством экономики. Это подтверждается положением на точке кластера S_4 , которой противопоставлены кластеры S_1 и S_2 . Выходящее за рамки этого правила положение точки кластера S_3 объясняется тем, что белорусская экономика является дотационной и долговой, совокупный долг белорусской экономики только перед Россией составляет 8,5 млрд долл. США², что равно 12–13% белорусского ВВП. Вероятность увеличения долговой нагрузки на экономику Беларуси в краткосрочной перспективе следует оценивать как высокую, поскольку позиции этой страны в глобальной экономике будут сжиматься вследствие политических причин. И поскольку Россия является практически единственным союзником и стратегическим партнером Беларуси, то российские дотации и вложения в белорусскую экономику будут расти.

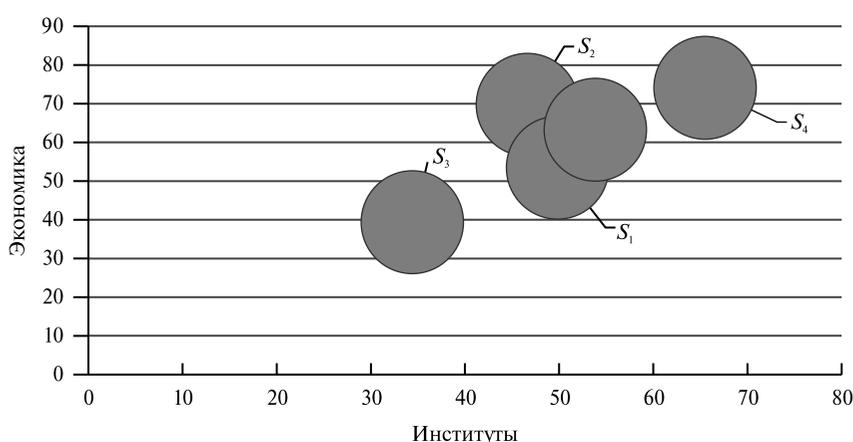


Рис. 1. Корреляция между переменными «Институты» и «Экономика» по четырем анализируемым кластерам

Источник: рассчитано авторами.

² Министерство финансов Республики Беларусь «Государственный долг» (2022 г.) (https://www.minfin.gov.by/ru/public_debt/).

Таблица 7. Результаты кластерного анализа (вторая итерация) по переменным «Институты» и «Общество»

Кластер	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1 , включает (1, 6, 7)	0,00	8,604	9,777	24,957
S_2 , включает (2–5, 8, 9)	8,604	0,00	15,047	11,726
S_3 , включает (10)	9,777	15,047	0,00	33,426
S_4 , включает (11, 12)	24,957	11,726	33,426	0,00

Источник: рассчитано авторами.

В табл. 7 представлены результаты второй итерации кластерного анализа, в рамках которой сопоставлялись институциональная и социальная динамики рассматриваемых стран.

Здесь очевидно иное распределение стран по кластерам, но исключение по-прежнему составляет Иран (единичный кластер) и страны с постиндустриальным экономическим укладом (Южная Корея и Япония). В первом кластере — три центральноазиатские страны (Азербайджан, Таджикистан и Узбекистан), институциональную и социальную динамику которых можно оценивать в большей степени по косвенным, чем по прямым данным из-за особенностей политического устройства этих стран. Россия попадает в данном случае во второй кластер с другими индустриальными, аграрно-индустриальными и индустриально-аграрными странами.

Второй кластер достаточно близок к первому кластеру, но расстояние от второго до четвертого кластера больше на 35%, чем от второго до первого. При этом расстояние от второго до третьего кластера почти в два раза больше, чем от второго до первого. Это позволяет утверждать, что существует большое различие между любым секулярным и любым религиозным обществом вне зависимости от типа экономического уклада. Вместе с тем, принимая во внимание близость первого и второго кластеров, следует подчеркнуть, что в кластере трех вышеупомянутых центральноазиатских стран качество формальных институтов очень низкое, и, вероятно, эти страны не обладают зрелыми демократическими институтами, которые в большей степени способствуют позитивной социальной динамике, росту морального и материального благосостояния граждан.

Таким образом, с точки зрения социальной и институциональной динамики состояние экономики России можно охарактеризовать как *рецессию*, обусловленную внутренними и внешними шоками. Несмотря на более близкое расположение к постиндустриальным, социально развитым и институционально зрелым странам, успешно завершившим натурный эксперимент экономической автаркии, Россия не может успешно использовать накопленный социальный капитал (хотя уровень в России существенно выше, чем в Южной Корее и в Японии), а также созданную социальную инфраструктуру. Наиболее вероятная причина этому — *низкое качество государственного управления*.

Кластер, в который входит Россия (S_2), располагается (рис. 2) выше кластера S_1 (центральноазиатские страны) и кластера S_3 (Иран), но ниже кластера S_4 .

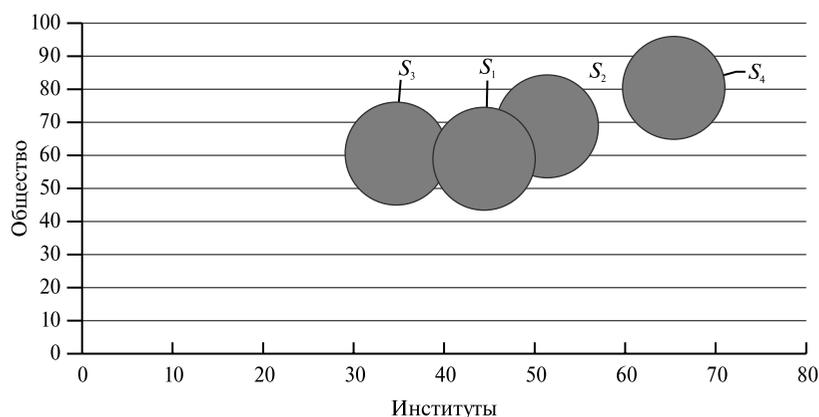


Рис. 2. Корреляция между переменными «Институты» и «Общество» по четырем анализируемым кластерам

Источник: рассчитано авторами.

Таблица 8. Результаты кластерного анализа (третья итерация) по переменным «Экономика» и «Общество»

Кластер	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1 , включает (1, 2, 4, 5, 8, 9)	0,000	11,500	8,127	7,553
S_2 , включает (3, 11, 12)	11,500	0,000	30,342	25,326
S_3 , включает (6, 10)	8,127	30,342	0,000	5,930
S_4 , включает (7)	7,553	25,326	5,930	0,000

Источник: рассчитано авторами.

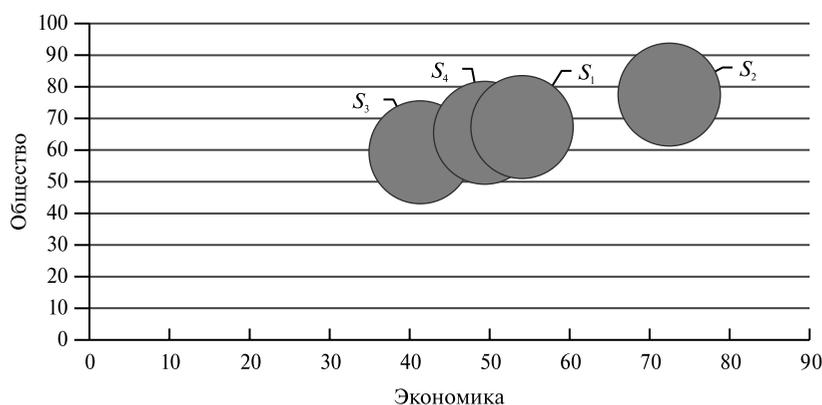
Очевидно, что качество институтов и институциональная динамика имеют большую тесноту связи с социальной динамикой ($R^2 = 0,9461$), чем с экономической. Это связано с тем, что экономическая динамика определяется не только внутренними процессами, но и внешними связями. В то время как социальная динамика, напротив, в большей степени зависит от внутреннего общественно-политического устройства; на этом основано понятие государственного суверенитета. Но при прочих равных условиях высокое качество институтов и их зрелость (каковая объективно наблюдается в странах с постиндустриальным экономическим укладом) положительно сказываются на социальном развитии, даже при низком уровне социального капитала.

Третья итерация кластерного анализа (табл. 8) позволила сопоставить социальную и экономическую динамики рассматриваемых стран и в целом подтвердила выводы, которые были сделаны выше.

Во-первых, кластерная локализация Россия по-прежнему относительно далека от стран с постиндустриальным экономическим укладом, и даже от Беларуси, если мы рассматриваем социально-экономическую динамику вне контекста институтов. И здесь Беларусь — ближе к Южной Корее и Японии, поскольку и социальное, и экономическое развитие до недавнего времени было больше ориентировано на полную интеграцию в глобальную экономику.

Во-вторых, с точки зрения общественного и экономического развития кластер, в который входит Россия (S_1), ближе к кластеру S_3 и S_4 . В два последних входят Таджикистан, Узбекистан и Иран.

Таким образом, если принимать во внимание данные завершенных (Южная Корея, Япония) и длящегося (Иран) натуральных экспериментов, то можно заключить, что экономическая автаркия в России, вероятнее всего, будет выстроена по тому же типу и той же модели, что и в Иране. Этот же вывод подтверждают точки, описывающие зависимость между переменными «Экономика» и «Общество» (рис. 3).

**Рис. 3.** Корреляция между переменными «Экономика» и «Общество» по четырем анализируемым кластерам

Источник: рассчитано авторами.

Таблица 9. Усреднение величин макроатрибутов матрицы решений (A/C) и стандартные отклонения величин

Стандартные отклонения	C_1	C_2	C_3
\bar{F}	1,16	4,97	0,40
S	0,40	0,91	0,30

Источник: рассчитано авторами.

Таблица 10. Параметры альтернатив социально-экономического развития России

Параметры развития (F_i)	$F_1 = 0,591$	$F_2 = 0,812$	$F_3 = 0,831$
Альтернативы, соответствующие атрибутам	Инерционная модель (A_1)	Модель интенсификации экономического роста (A_2)	Модель интенсификации институциональных изменений (A_3)
Неравенство для выбора альтернативы	$A_1 < A_2 < A_3$		

Источник: рассчитано авторами.

Полученные результаты кластерного анализа на основе больших данных о процветании стран и данных по естественно-натурным экспериментам экономической автаркии были положены в основу моделирования социально-экономического развития России. Результаты работы экспертов представлены матрицей решений:

$$A/C \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & 0,71 & 4,10 & 0,81 \\ A_2 & 1,34 & 5,92 & 0,74 \\ A_3 & 1,45 & 4,90 & 0,28 \end{bmatrix}.$$

Для этой матрицы решений были рассчитаны следующие усредненные величины макропараметров и их стандартные отклонения (табл. 9).

Результаты исчисления стандартной матрицы (макроатрибуты A/C) и матрицы расстояний (альтернативы D):

$$A/C \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & -1,14 & -0,96 & -0,72 \\ A_2 & 0,42 & 1,04 & 1,14 \\ A_3 & 0,73 & -0,08 & -0,41 \end{bmatrix}, D \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & -- & 3,15 & 2,09 \\ A_2 & 3,15 & -- & 1,95 \\ A_3 & 2,09 & 1,95 & -- \end{bmatrix}.$$

Далее были проведены операции по усреднению альтернатив и расчету паттерна развития, результатом которых стало получение значений параметров развития для каждой альтернативы (табл. 10).

Как было показано в разделе «Методы и материалы», моделирование социально-экономического развития на основе таксономии предполагает нахождение наименьшей величины параметра развития. В данном случае, как мы видим по результатам, представленным в табл. 10, наименьшая величина параметра развития F_1 , который соответствует инерционной модели социально-экономического развития.

В такой модели было предусмотрено, что экономический рост (при условии внешней и внутренней стабилизации) составит около 4% в год (без учета инфляции), при этом институциональная динамика будет также инерционной, т.е. без институциональных реформ в экономике и обществе. В свою очередь, социальная динамика будет диверсифицированной, т.е. одновременно направленной на процветание и — если принять во внимание терминологию World Value Survey (Haerpfeg et al., 2022) — на закрепление ценностей выживания.

Учитывая, что конечный результат вычисления матрицы решений, представленной в разделе «Методы и материалы», интерпретируется от обратного и варьирует от нуля до единицы, то его

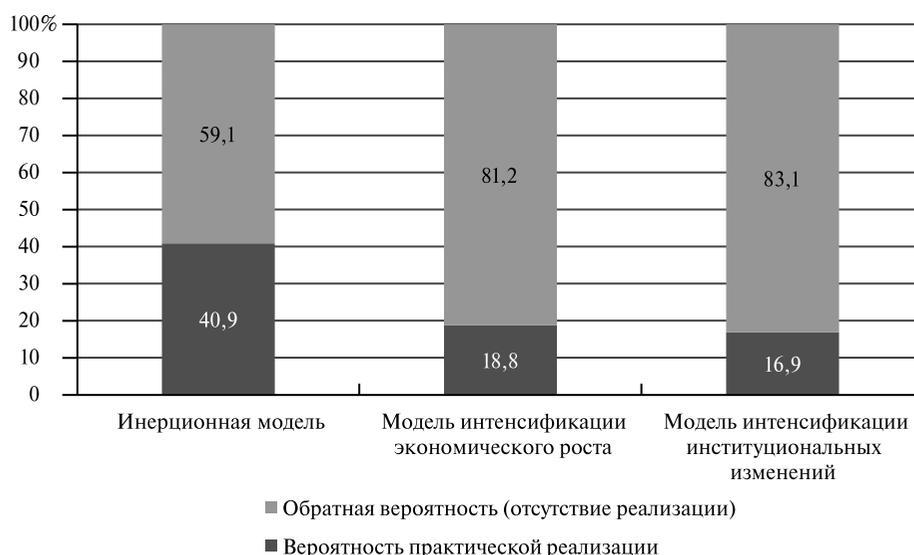


Рис. 4. Оценка вероятностей реализации моделей социально-экономического развития России

Источник: рассчитано авторами.

одновременно можно рассматривать как оценку вероятности успеха (или неуспеха) практической реализации каждой из моделей социально-экономического развития России (рис. 4).

В данном случае очевидно, что каждая из моделей имеет большое отклонение от нуля, но наименьшее значение этого отклонения — у инерционной модели. Следовательно, вероятность реализации этой модели на практике составит около 41%, но при обязательном условии геоэкономической и геополитической стабилизации в 2023 г. При несоблюдении этого условия вероятность того, что даже инерционный путь развития будет недоступен, составляет почти 60%.

Для двух остальных моделей социально-экономического развития России вероятность практической реализации представляется крайне низкой. Это позволяет согласиться с прогнозами Центрального банка России³, что при сохранении наблюдаемых в экономике и в обществе трендов кризис 2023 г. может быть сопоставим по своим масштабам и глубине с кризисом 2008–2010 гг., а при реализации самых негативных сценариев вероятный кризис может быть сопоставим с кризисными тенденциями 1998–2000 гг.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной статье мы рассмотрели результаты натуральных экспериментов по автаркии и изоляции национальных экономик. Два эксперимента следует признать успешно завершёнными (Япония и Южная Корея), в этих странах — постиндустриальный экономический уклад и высокий уровень и высокое качество жизни населения. Еще один натуральный эксперимент происходит в настоящее время — автаркия и изоляция экономики Ирана. На основе имеющихся данных нельзя признать третий эксперимент успешным — в экономике Ирана сохраняется индустриальный уклад с характерными для вынужденной экономической автаркии и изоляции ретро- и квазиинновациями и использованием спорных с правовой точки зрения схем экспортно-импортных операций и привлечения инвестиций.

Кроме этого, в статье были проанализированы результаты методико-статистической обработки больших данных о динамике и уровне процветания стран (данные Legatum Prosperity Index за 2021 г.). На основе этих больших данных был проведен страновой кластерный анализ (парное сравнение трех макроатрибутов «Институты», «Экономика», «Общество» по принципу

³ «Среднесрочный прогноз Банка России» (28.10.2022) (https://www.cbr.ru/Collection/Collection/File/43430/forecast_221028.pdf); Банк России: «Основные направления единой государственной денежно-кредитной политики на 2023 год и период 2024 и 2025 годов» (02.11.2022) (https://www.cbr.ru/about_br/publ/ondkp/on_2023_2025/).

«ближайшего соседа»), который показал, что тип социально-экономического развития России, которая уже некоторое время стремится к экономической автаркии, находится очень близко к Ирану и очень далеко от Южной Кореи и Японии. Это позволило сделать предварительный вывод о том, что если Россия осуществит переход на экономическую автаркию, то скорее всего он произойдет по иранскому сценарию.

Для подтверждения предварительных выводов с использованием метода таксономии было проведено исследование перспектив социально-экономического развития России на основе трех моделей и с привлечением квалифицированных экспертных мнений: инерционной, интенсификации экономического роста, интенсификации институциональных изменений.

Результаты показали, что при условии геоэкономической и геополитической стабилизации в 2023 г. российская экономика сохраняет вероятность инерционного развития, т.е. все тренды прошлого будут продолжаться в среднесрочной перспективе. Вместе с тем, если стабилизации не происходит, то вероятность перехода России от текущей рецессии и стагнации к системному внутриэкономическому кризису может быть оценена выше средней. Модели, описывающие интенсификацию в России экономического роста и интенсификацию институциональных изменений с учетом накопленного страной к началу 2022 г. потенциала процветания, имеют очень низкую вероятность реализации.

Полученные данные указывают на то, что кризисные тенденции в российской экономике, которые стали нарастать после 2013–2015 гг., перестают быть латентными. Это означает, что скорее всего сжатие российской экономики, внутреннего рынка и внутреннего спроса продолжится в 2023 г. и признаков восстановления национальной экономики в лучшем случае (если принять во внимание прогнозы и сценарии Центрального банка) следует ожидать не ранее 2024–2025 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Айвазян С.А., Мхитарян В.С.** (2001). Прикладная статистика. Основы эконометрики: Учебник для вузов. В 2 т. 2-е изд. Т. 1: «Теория вероятностей и прикладная статистика». М.: ЮНИТИ-ДАНА. 656 с. [Aivazian S.A., Mkhitarjan V.S. (2001). *Applied Statistics. Fundamentals of econometrics: Probability theory and applied statistics*. In 2 vol. 2nd ed. rev. Vol. 1. Moscow: UNITI–DANA. 656 p. (in Russian).]
- Ильюхов А.А.** (2015). Вынужденная автаркия: исторический опыт // *Russian Journal of Economics and Law*. № 1 (33). С. 26–31. [Ilyukhov A.A. (2015). Forced autarchy: Historical experience. *Russian Journal of Economics and Law*, 1 (33), 26–31 (in Russian).]
- Клейнер Г.Б.** (2022). Инклюзивный рост в экономике замкнутого цикла // *Экономическое возрождение России*. № 3 (73). С. 37–44. [Kleiner G.B. (2022). Inclusive growth in the circular economy. *Economic Revival of Russia*, 3 (73), 37–44 (in Russian).]
- Ларин С.Н., Соколов Н.А.** (2021). Анализ влияния санкционных ограничений на экономики Ирана и России // *Международный журнал гуманитарных и естественных наук*. № 9–1. С. 157–164. [Larin S.N., Sokolov N.A. (2021). Analysis of the impact of sanctions restrictions on the economies of Iran and Russia. *International Journal of Humanities and Natural Sciences*, 9–1, 157–164 (in Russian).]
- Медведев И.В.** (2020). Экономико-теоретические проблемы исследования экономических интеграционных процессов на постсоветском пространстве на примере СНГ // *Теоретическая экономика*. № 2 (62). С. 60–66. [Medvedev I.V. (2020). Economic and theoretical problems of the study of economic integration processes in the post-Soviet space on the example of the CIS. *Theoretical Economy*, 2 (62), 60–66 (in Russian).]
- Мигранян А.А.** (2020). Потенциал развития экономического сотрудничества России со странами ЕАЭС и СНГ // *Проблемы постсоветского пространства*. Т. 7. № 3. С. 327–346. [Migranyan A.A. (2020). The potential for the development of economic cooperation between Russia and the countries of the EAEU and the CIS. *Post-Soviet Issues*, 7, 3, 327–346 (in Russian).]
- Насирбейк А.И.** (2019). Этапы развития экономики Ирана // *Горизонты экономики*. № 6. С. 61–66. [Nasirbeyk A.I. (2019). Stages of development of the Iranian economy. *Economic Horizons*, 6, 61–66 (in Russian).]
- Пискун Е.И., Хохлов В.В.** (2019). Экономическое развитие регионов Российской Федерации: факторно-кластерный анализ // *Экономика региона*. Т. 15. № 2. С. 363–376. [Piskun E.I., Khokhlov V.V. (2019). Economic development of regions of the Russian Federation: Factor-cluster analysis. *Economics of Region*, 15, 2, 363–376 (in Russian).]
- Савинский А.В.** (2018). Западные санкции и диверсификация: опыт Ирана // *Геополитика и экогеодинамика регионов*. Т. 4. № 3. С. 5–13. [Savinsky A.V. (2018). Western sanctions and diversification: Iran's experience. *Geopolitics and Ecogeodynamics of Regions*, 4, 3, 5–13 (in Russian).]

- Ситковский А.М.** (2021). Моделирование многокритериальной оценки социо-эколого-экономического состояния и динамики территории // *Вопросы управления*. № 2 (69). С. 102–119. [Sitkovsky A.M. (2021). Modeling of a multi-criteria assessment of the socio-ecological and economic state and dynamics of the territory. *Management Issues*, 2 (69), 102–119 (in Russian).]
- Торкановский Е.П.** (2020). Автаркия 2.0: глобальная экологическая повестка, пандемия COVID-19 и новая нормальность // *Экономические отношения*. Т. 10. № 3. С. 663–682. [Torkanovskiy E.P. (2020). Autarky 2.0: The global environmental agenda, the COVID-19 pandemic and the new normal. *Journal of International Economic Affairs*, 10, 3, 663–682 (in Russian).]
- Хоминич И.П., Самира А.** (2021). Россия и Иран в условиях экономических санкций: антисанкционная политика и экономика сопротивления // *Вестник Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова*. Т. 18. № 2 (116). С. 5–12. [Hominich I.P., Samira A. (2021). Russia and Iran in the context of economic sanctions: anti-sanction policy and the economics of resistance. *Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics*, 18, 2 (116), 5–12 (in Russian).]
- Цветков В.А.** (2022). Экономический суверенитет России в условиях новой реальности // *Вестник Национального института бизнеса*. № 45. С. 25–30. [Tsvetkov V.A. (2022). Russia's economic sovereignty in the new reality. *Bulletin of the National Institute of Business*, 45, 25–30 (in Russian).]
- Юрченко Т.В.** (2019). Кластерный анализ как инструмент территориальных исследований // *Научное обозрение: теория и практика*. Т. 9. № 3. С. 385–396. [Yurchenko T.V. (2019). Cluster analysis as a tool for territorial research. *Scientific Review: Theory and Practice*, 9, 3, 385–396 (in Russian).]
- Abduvaliev M., Bustillo R.** (2020). Impact of remittances on economic growth and poverty reduction amongst CIS countries. *Post-Communist Economies*, 32, 4, 525–546.
- Bellman R.E., Zadeh L.A.** (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17, 4, B-141-B-164.
- Cheba K., Szopik-Depczyńska K.** (2017). Multidimensional comparative analysis of the competitive capacity of the European Union countries and geographical regions. *Oeconomia Copernicana*, 8, 4, 487–504.
- Einav L., Levin J.** (2014). Economics in the age of big data. *Science*, 346, 6210, 1243089.
- Haerpfer C., Inglehart R., Moreno A., Welzel C., Kizilova K., Diez-Medrano J., Lagos M., Norris P., Ponarin E., Puranen B.** (eds.). (2022). *World values survey: Round Seven — Country-Pooled Datafile Version 5.0*. Madrid, Spain & Vienna, Austria: JD Systems Institute & WWSA Secretariat. 747 p.
- Haggard S., Moon C.** (2018). *The state, politics, and economic development in postwar South Korea. State and society in contemporary Korea*. Cornell University Press, 51–94.
- Hellwig Z.** (1972). Procedure of evaluating high-level manpower data and typology of countries by means of the taxonomic method. In: *Towards a system of human resources indicators for less developed countries*, 115–134.
- Hufbauer G.C., Jung E.** (2021). Economic sanctions in the twenty-first century. *Research Handbook on Economic Sanctions*. London: Edward Elgar Publishing, 26–43.
- Lockwood W.W.** (2015). *Economic development of Japan*. Princeton: Princeton University Press. 704 p.
- Mandelbaum M.** (2019). The new containment: Handling Russia, China, and Iran. *Foreign Affairs*, 98, 123.
- Tvaronaviciene M., Razminiene K., Piccinetti L.** (2015). Approaches towards cluster analysis. *Economics & Sociology*, 8, 1, 19.
- Zadeh L.A.** (1988). Fuzzy logic. *Computer*, 21, 4, 83–93.
- Zavadskas E.K., Turskis Z., Kildiene S.** (2014). State of art surveys of overviews on MCDM/MADM methods. *Technological and Economic Development of Economy*, 20, 1, 165–179.

Modeling the socio-economic development of Russia using big data and data from field experiments

© 2023 D.I. Usmanov, [M.N. Dudin](#)

D.I. Usmanov,

Market Economy Institute of RAS, Department of Economic Theory at the Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia; e-mail: us.dali@mail.ru

[M.N. Dudin](#),

Market Economy Institute of RAS, Moscow, Russia

Received 05.12.2022

The article was prepared within the framework of the state task of the MEI RAS, 2023, subject R&D: “Modeling of the processes of ensuring sustainable and balanced socio-economic and spatial development of Russia and neighboring countries in order to form a Large Eurasian partnership”.

Abstract. The aim of the article is to investigate the prospects of socio-economic development of Russia in terms of transition to economic autarky. The study includes a cluster analysis of trends and patterns of socio-economic development of Russia, as well as the countries of the near abroad (CIS). The data on the countries that have passed (South Korea and Japan) or are undergoing (Iran) the full-scale experiment of economic autarky with varying degrees of success were used as a basis for comparison. The statistically processed big data reflected in the Legatum Prosperity Index at the end of 2021 was used as the information base of the study. Also in the study simulation of socio-economic development of Russia, taking into account the accumulated potential on the basis of taxonomic method, which belongs to the group of economic and mathematical methods of multiple attribute decision making (Multiple Attribute Decision Making, MADM) was conducted. The results of the study show that Russia does not have the necessary development potential for transition to successful models of economic autarky, which were implemented in their time in South Korea and Japan. Russia is capable of further implementing the inertial model of socio-economic development, as well as transitioning to economic autarky of the Iranian type. Equally, the same conclusion applies to the countries of the near abroad (CIS). The results can be used as an information base for decision-making in public administration and regulation of socio-economic and socio-political processes.

Keywords: economy, society, institutions, development, socio-economic models, modeling, economic autarky, economic structure.

JEL Classification: C40, R15.

For reference: **Usmanov D.I., Dudin M.N.** (2023). Modeling the socio-economic development of Russia using big data and data from field experiments. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 39–53. DOI: 10.31857/S042473880023483-0

РЕГИОНАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Влияние пандемии COVID-19 на социально-экономическое развитие региона

© 2023 г. О.А. Голованов, А.Н. Тырсин, Е.В. Васильева

О.А. Голованов,

Институт экономики УрО РАН, Екатеринбург; e-mail: golovanov.oa@uiec.ru

А.Н. Тырсин,

Институт экономики УрО РАН, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцин, Екатеринбург; e-mail: at2001@yandex.ru

Е.В. Васильева,

Институт экономики УрО РАН, Екатеринбург; e-mail: vasileva.ev@uiec.ru

Поступила в редакцию 20.10.2022

Статья выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Института экономики Уральского отделения РАН.

Аннотация. В статье представлен анализ последствий экономической нестабильности, вызванной пандемией COVID-19, для социально-экономического развития региона. Исследование проводилось на примере Свердловской области по данным Федеральной службы государственной статистики. В статье поставлены и решены три задачи исследования. Во-первых, оценить, насколько в общем изменилось социально-экономическое состояние региона в результате пандемии COVID-19. Во-вторых, выявить влияние пандемии COVID-19 на характер и структуру взаимосвязей между социально-экономическими показателями региона. В-третьих, проанализировать влияние пандемии COVID-19 на тенденции социально-экономических показателей региона с учетом их возможного запаздывания и сезонного колебания. Первая задача решается с помощью статистических методов распознавания образов, вторая задача — методами многомерного корреляционного анализа. Для решения третьей задачи использованы стохастические модели временных рядов. Наибольший вклад в разделение на кластеры оказало число родившихся, оборот общественного питания и объем товаров, работ и услуг, выполненных собственными силами; в их динамике наиболее явно прослеживается влияние пандемии COVID-19 в Свердловской области. Многомерный корреляционный анализ позволил установить, что в результате введения ограничительных и поддерживающих мер сформировались разнонаправленные тенденции динамики социально-экономических показателей региона, которые нарушили ранее сложившиеся взаимосвязи между ними. Исходя же из полученных коэффициентов авторегрессионной модели, можно обнаружить некоторую закономерность, заключающуюся в росте влияния краткосрочных (лаг 1 и 3 месяца) и в уменьшении влияния долгосрочных (лаг 12 месяцев) изменений показателей. Согласно полученным расчетам экономике Свердловской области за анализируемый период не удалось преодолеть дестабилизирующего влияния последствий пандемии COVID-19.

Ключевые слова: пандемия, COVID-19, социально-экономическое развитие, экономическая нестабильность, регион, дискриминантный анализ, многомерный корреляционный анализ, авторегрессия.

Классификация JEL: C10, O11, R11.

Для цитирования: Голованов О.А., Тырсин А.Н., Васильева Е.В. (2023). Влияние пандемии COVID-19 на социально-экономическое развитие региона // Экономика и математические методы. Т. 59. № 2. С. 54–67. DOI: 10.31857/S042473880022737-9

ВВЕДЕНИЕ

Пандемия COVID-19 стала серьезным испытанием для экономики России, падение объема производства в 2020 г. достигло 3%. Однако в результате сложившейся специализации отечественной промышленности и введения относительно мягких ограничительных мер произошла адаптация к текущим экономическим условиям (Цухло, 2021), и уже к концу 2020 г. ряд макроэкономических показателей вернулся к докоронавирусным значениям, а в 2021 г. экономика России продолжила постепенно выходить из кризиса. Во втором квартале 2021 г. индекс физического объема ВВП составил 110,5% относительно второго квартала 2020 г. (рис. 1). Но положительная динамика основных макроэкономических показателей не дает полной картины последствий пандемии COVID-19, поскольку она привела

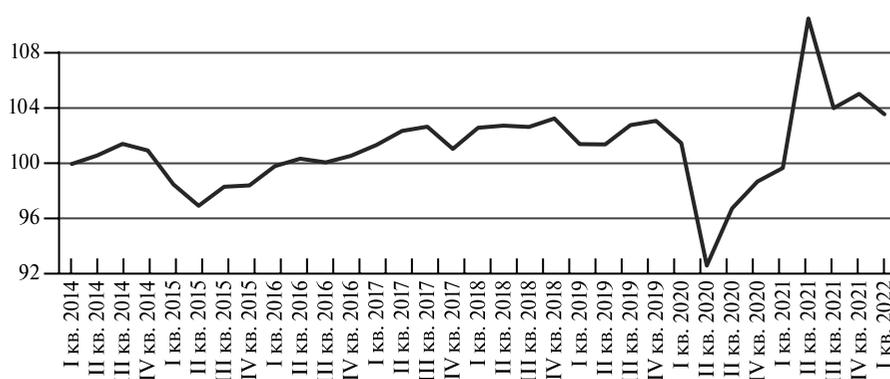


Рис. 1. Индексы физического объема ВВП России, % к соответствующему кварталу предыдущего года

Источник: Росстат.

к обострению экономической нестабильности, что отразилось на всех сторонах жизни общества. Пандемия оказывает дестабилизирующее влияние на экономику за счет факторов не только прямого воздействия, но и косвенного. В этой связи возвращение экономики к нормальному состоянию, как отмечают авторы в (Цветков, Дудин, 2020), представляется возможным только спустя много месяцев или даже лет. К тому же в ходе естественной эволюции возбудителя COVID-19 возникают доминирующие варианты, создающие новые волны заражения (Онищенко и др., 2022).

В результате широкого спектра влияния пандемии COVID-19 на экономику и общество оценка характера и масштаба ее последствий требует учета взаимосвязи социально-экономических показателей территории. Такой подход отвечает современной парадигме роста, предполагающей гармоничное социально-экономическое развитие (Шмат, 2022), когда общество может устойчиво повышать свое благополучие, не ограничиваясь только ростом ВВП (Ward et al., 2016). Целью данного исследования является анализ последствий экономической нестабильности, вызванной пандемией COVID-19, для социально-экономического развития региона.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Пандемия COVID-19 — не первая вспышка вируса, которая вызвала серьезные последствия для социально-экономической системы, причем не только за счет роста заболеваемости и смертности населения (Степанов, 2020, 2022), но и в результате ответных политических мер. К примеру, в исследовании экспертов Всемирного банка (Brahmbhatt, Dutta, 2008) доказано, что последствия вспышки эпидемии в Сурате в 1994 г. были вызваны главным образом не прямыми медицинскими расходами или относительно небольшим показателем заболеваемости и смертности. Основные экономические последствия возникли в результате несогласованных усилий, чрезмерных профилактических действий отдельных лиц и правительства, чтобы избежать заражения (ошибочные стратегии информирования общественности о рисках, ограничения на торговлю и передвижение и др.) и сокрыть информацию о вспышках инфекционных заболеваний.

Подобные примеры четко показывают, что стандартный подход анализа «стоимости болезни» к измерению ее социально-экономических последствий ограничен. Такой анализ предполагает расчет стоимости («экономического бремени») конкретной болезни с учетом прямых затрат на лечение заболевания, не прямых затрат, косвенно связанных с ведением пациентов, и неосязаемых затрат (потерь пациента) (Омельяновский и др., 2012), что значительно недооценивает последствия, вызванные эпидемиями и пандемиями. Поэтому в научных исследованиях предлагаются альтернативные подходы. Так, например, экономисты Европейской комиссии (Jonung, Roeger, 2006) предлагают рассчитывать затраты в виде потерь производства из-за болезней и смерти, измеряемые как сокращение темпов роста ВВП или снижение его уровня. В работе (Васиев и др., 2020) авторы оценили влияние COVID-19 на функционирование ключевых отраслей китайской промышленности и межрегиональных транспортных каналов поставок на основе данных региональных матриц «затраты–выпуск», показателей миграции и статистики распространения пандемии.

Однако в таких подходах сохраняется методологическая проблема формализации социально-экономических последствий, связанных с влиянием ухудшения эпидемиологической ситуации. Как справедливо отмечается в (Смирнов, 2020), прогнозы воздействий пандемий на экономику могут быть весьма противоречивыми, поскольку для них характерна высокая неопределенность, которая возрастает по мере роста их масштаба. В рамках данного исследования для решения этой проблемы рассматривается социально-экономическая система в целом.

МЕТОДОЛОГИЯ ПОДХОДА

Анализ влияния пандемии COVID-19 на социально-экономическую систему требует рассмотрения множества показателей. Таким образом, имеется вектор показателей. Одномерные методы статистического анализа часто оказываются малоэффективными при изучении сложных явлений (Эсбенсен, 2005). Поэтому необходимо использовать методы многомерного статистического анализа, которые позволяют одновременно рассматривать несколько показателей. Учитывая ранее полученную оценку влияния пандемии COVID-19 на тенденции изменения отдельных показателей региона (Голованов, Тырсин, Васильева, 2022), в рамках данного исследования поставлены три задачи, рассматривающие социально-экономическую систему региона в целом:

- 1) дать общую оценку, насколько изменилось социально-экономическое состояние региона в результате пандемии COVID-19;
- 2) выявить влияние пандемии COVID-19 на характер и структуру взаимосвязей между социально-экономическими показателями региона;
- 3) проанализировать влияние пандемии COVID-19 на тенденции социально-экономических показателей региона с учетом их возможного запаздывания и сезонного колебания.

Первая задача решается с помощью дискриминантного анализа (Айвазян и др., 1989; Hardle, Simar, 2019), вторая задача — методами многомерного корреляционного анализа (Вероятность и математическая статистика ..., 1999; Айвазян и др., 1985), и для третьей задачи рассмотрены стохастические модели авторегрессии (Лукашин, 2003; Vox et al., 2015).

ДАННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Информационной базой исследования являются ежемесячные данные, поддерживаемые Федеральной службой государственной статистики, за период с января 2017 г. по февраль 2022 г. Выбранный период обусловлен необходимостью иметь сопоставимые объемы выборок в периодах до и во время пандемии, наличием годичной цикличности многих социально-экономических показателей, а также ограничить санкционное влияние на результаты расчетов с марта 2022 г. В качестве примера исследования рассмотрена Свердловская область. В табл. 1 представлена используемая

Таблица 1. Система социально-экономических показателей для исследования

Обозначение	Показатель, единица измерения
Показатели «Демография»	
X_1	Число зарегистрированных умерших, человек
X_2	Число зарегистрированных родившихся, человек
Показатели «Социальная сфера»	
X_3	Уровень регистрируемой безработицы, %
X_4	Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников по полному кругу организаций в ценах февраля 2022 г., руб.
X_5	Всего зарегистрировано преступлений, ед.
X_6	Число дорожно-транспортных происшествий с пострадавшими, ед.
Показатели «Производство товаров и услуг»	
X_7	Отгружено товаров собственного производства, выполнено работ и услуг собственными силами в ценах февраля 2022 г., тыс. руб.
X_8	Объем работ, выполненных по виду деятельности «Строительство» в ценах февраля 2022 г., млн руб.
X_9	Производство продуктов животноводства в сельскохозяйственных организациях — скот и птица на убой в живом весе, тыс. т
Показатели «Рынки товаров и услуг»	
X_{10}	Оборот розничной торговли в ценах февраля 2022 г., млн руб.
X_{11}	Оборот общественного питания в ценах февраля 2022 г., млн руб.
X_{12}	Объем платных услуг населению в ценах февраля 2022 г., млн руб.

система социально-экономических показателей, которая разбита на четыре подсистемы (группы): 1 — демография (X_1, X_2); 2 — социальная сфера (X_3, \dots, X_6); 3 — производство товаров и услуг (X_7, X_8, X_9); 4 — рынки товаров и услуг (X_{10}, X_{11}, X_{12}).

Для сопоставления стоимостные показатели пересчитаны в ценах февраля 2022 г. с учетом индекса потребительских цен.

Задача 1. Общая оценка изменения социально-экономического состояния региона в результате пандемии COVID-19

Основным предположением является то, что система показателей, описывающая социально-экономическое состояние региона, представляет собой совокупность многомерных временных рядов, которые можно разделить на два кластера — «до» и «во время» пандемии соответственно:

- кластер 1 (*Clas.1*) — наблюдения 1–37, данные за период с января 2017 г. по январь 2020 г.,
- кластер 2 (*Clas.2*) — наблюдения 38–62, данные за период с февраля 2020 г. по февраль 2022 г.

Для двух кластеров уравнение гиперплоскости определяется как $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M a_j x_j$ (Сошникова и др., 1999), где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)^T$; M — число переменных (анализируемых социально-экономических показателей); C — константа дискриминации. При $f(\mathbf{x}) > C$ рассматриваемое наблюдение относим к первой группе, в противном случае — ко второй группе, тогда как уравнение $f(\mathbf{x}) = C$ будет являться разделяющей гиперплоскостью.

Вектор \mathbf{a} — вектор коэффициентов дискриминантной функции равен $\mathbf{a} = \mathbf{S}_*^{-1}(\bar{\mathbf{X}}_1 - \bar{\mathbf{X}}_2)$, где $\bar{\mathbf{X}}_k = (\bar{X}_{k1}, \dots, \bar{X}_{kM})^T$ — вектор средних значений показателей группы k ($k = 1, 2$); $\mathbf{S}_* = (n_1 + n_2 - 2)^{-1}(\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2)$ — объединенная ковариационная матрица; \mathbf{X}_k — матрица значений показателей группы k ; n_k — число наблюдений в группе k .

Константу дискриминации вычисляем по формуле $C = 0,5(\bar{f}_1 + \bar{f}_2)$, где $\bar{f}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f(\mathbf{x}_{ki})$.

Результаты линейного дискриминантного анализа в программе Statistica для двух кластеров значений показателей Свердловской области приведены в табл. 2–4. Был проведен пошаговый анализ с исключением. На каждом шаге из анализа исключалась переменная, вносящая минимальный вклад в результат классификации до тех пор, пока останутся только статистически значимые переменные. В табл. 2 были включены все статистически значимые (p -уровень меньше 0,05) показатели. Уровень статистической значимости основывается на значении F -критерия, который связан с исключением соответствующего показателя из анализа. Таким образом, если исключение показателя из анализа приводит к значимому изменению соотношения дисперсий, то показатель вносит важный вклад в дискриминацию групп. Согласно полученным результатам к таким информативным диагностическим показателям относятся число умерших (X_1), число родившихся (X_2), число преступлений (X_5), объем производства товаров и услуг (X_7), оборот общественного питания (X_{11}).

Оценка возможности и целесообразности проведения дискриминации на *Clas.1* и *Clas.2* имеющихся социально-экономических показателей выполняется на основе подсчета параметра *Wilks' lambda* (λ , лямбда Уилкса, статистика Уилкса). Она принимает значения от 0 до 1. Чем меньше *Wilks' lambda*, тем лучше разделяются данные на два кластера (если $\lambda = 1$, то полученная на основе дискриминантного анализа модель не может разделить массива значений социально-экономических показателей на соответствующие кластеры. Если $\lambda = 0$, то это свидетельствует об абсолютном разделении данных на выделенные два кластера). В данном случае $\lambda = 0,166$.

Таблица 2. Результаты дискриминантного анализа двух кластеров значений социально-экономических показателей Свердловской области

$N = 62$	<i>Wilks' Lambda</i>	<i>Partial Lambda</i>	F -критерий (1, 56)	p -уровень	<i>Toler</i>
X_1	0,189929	0,871398	8,26458	0,005705	0,678415
X_2	0,217189	0,762028	17,48808	0,000103	0,718902
X_5	0,188834	0,876453	7,89389	0,006819	0,696626
X_7	0,213138	0,776510	16,11755	0,000179	0,516636
X_{11}	0,354857	0,466397	64,06947	0,000000	0,559014

Примечание. $\lambda = 0,16550$; $F(5,56) = 56,472$; $p < 0,0000$.

В столбце табл. 2 «*Wilks' Lambda*» приведены значения статистика Уилкса с исключенной соответствующей переменной. Чем больше ее значение, тем желательнее присутствие переменной в процедуре дискриминации. Следует отметить, что исключение оборота общественного питания (X_{11}) в наибольшей степени ухудшает качество распознавания двух кластеров. Такой результат объясняется чуткой реакцией показателя на введение локдаунов в виде заметного спада и определенного восстановления и приспособления к экономической нестабильности за счет распространения использования новых моделей потребительского поведения (системы онлайн-заказов, доставки, дистанционных услуг и пр.). Практически идентичным образом отреагировал объем платных услуг населению (X_{12}), в связи с чем оказался сильно коррелирован с X_{11} и был убран из дальнейшего рассмотрения, несмотря на очевидные изменения вследствие появления пандемии.

В столбце «*Partial Lambda*» приведены значения частной лямбды Уилкса. Данная статистика описывает одиночный вклад соответствующей переменной в дискриминацию между совокупностями. Чем она меньше, тем больше вклад показателя в общую дискриминацию, и, как видно из полученных результатов, ни одна из переменных не позволяет разделить совокупности многомерных данных на две группы. В столбце «*F*-статистика» (*F-remove*) указаны значения дисперсионного анализа, а в столбце «*p*-уровень» — значения, характеризующие вклад каждой из переменных в различие двух групп. В соответствии с результатами наиболее значимым также был показатель X_{11} .

Значение толерантности (столбец «*Toler*») социально-экономического показателя вычисляется как $1 - R^2$, где R^2 — коэффициент детерминации линейной регрессии признака X_i на оставшуюся совокупность статистически значимых признаков, использованную в анализе. Значение толерантности показателя является мерой его избыточности в модели и, чем оно меньше, тем избыточнее показатель. Таким образом, наименее коррелированным показателем системы из табл. 2, а соответственно наименее избыточным, является показатель рождаемости X_2 . В свою очередь, если бы статистика была равной или меньше нижней границы толерантности (0,05), то соответствующий ей показатель в модель включать не стоит, так как он будет нести малую дополнительную информацию.

Рассчитанные значения коэффициентов функции детерминации и константы дискриминации приведены в табл. 3.

Согласно данным табл. 4 средняя вероятность правильного распознавания составила 0,984, что превосходит требуемый уровень надежности, равный 0,95. Это означает, что между значениями социально-экономических показателей до (*Clas.1*) и во время (*Clas.2*) пандемии существует статистически значимое различие. Неправильно классифицированным оказалось только наблюдение 38 (февраль 2020 г.). Отметим, что февраль 2020 г. можно считать начальным месяцем пандемии лишь условно, так как фактически вспышка вируса началась со второй половины месяца.

Таблица 3. Коэффициенты функции детерминации и константа дискриминации

Параметр	Значение
a_1	-0,002607
a_2	0,007515
a_5	-0,005088
a_7	-0,00008637
a_{11}	0,006956
C	-0,360003

Таблица 4. Результаты классификации двух кластеров

Кластер	Процент совпадений	G_1 : <i>Clas.1</i> ; $p = 0,59677$	G_2 : <i>Clas.2</i> ; $p = 0,40323$
G_1 : <i>Clas.1</i>	100,0000	37	0
G_2 : <i>Clas.2</i>	96,0000	1	24
Всего	98,3871	38	24

Таким образом, можно утверждать, что пандемия COVID-19 в целом существенно повлияла на социально-экономическое развитие Свердловской области, а ее начало стало катализатором экономической нестабильности, определившим кардинальные изменения, и тем водоразделом, разграничивающим рассматриваемый период на «до» и «во время».

Задача 2. Исследование влияния пандемии COVID-19 на характер и структуру взаимосвязей между социально-экономическими показателями

Для исследования характера и структуры взаимосвязей между социально-экономическими показателями применяется скалярная мера взаимосвязи между несколькими случайными векторами, предложенная в (Тырсин, 2022). Пусть имеем n непрерывных случайных векторов произвольных размерностей, у которых нет совпадающих компонент. Они обозначены как $\mathbf{Y}^{(1)} = (Y_1^{(1)}, \dots, Y_{m_1}^{(1)})$, ..., $\mathbf{Y}^{(n)} = (Y_1^{(n)}, \dots, Y_{m_n}^{(n)})$. Объединение этих векторов образует вектор \mathbf{Y} , т.е. $\mathbf{Y} = \bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}$. Таким образом, имеем общую систему показателей \mathbf{Y} , которая разбивается на несколько подсистем (векторов) $\mathbf{Y}^{(l)}$. Поскольку при малом размере выборки анализ не позволяет определить несоответствие нормальному закону распределения, рассмотрен частный случай, когда векторы $\mathbf{Y}^{(l)}$ имеют совместные нормальные распределения. В этом случае коэффициент тесноты взаимозависимости между случайными векторами $\mathbf{Y}^{(1)}$, ..., $\mathbf{Y}^{(n)}$ определяется через определители корреляционных матриц по формуле (Тырсин, 2022)

$$D_{e,n} \left(\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)} \right) = 1 - \left(\left| \mathbf{R}_{\bigcup_{j=1}^n \mathbf{Y}^{(j)}} \right| / \prod_{j=1}^n \left| \mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(j)}} \right| \right)^{n / \sum_{j=1}^n m_j}. \quad (1)$$

Для оценки тесноты корреляционной связи между компонентами одного случайного вектора $\mathbf{Y}^{(l)}$ применяется формула (Pena, Rodriguez, 2003)

$$D_e \left(\mathbf{Y}^{(l)} \right) = 1 - \left| \mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(l)}} \right|^{1/m_l}. \quad (2)$$

Также в целях исследования влияния интенсивности распространения пандемии на социально-экономические показатели введем частный коэффициент корреляции, который будет выступать в качестве меры измерения тесноты взаимосвязи между показателями и месячными данными заболеваемости в Свердловской области. Определяться коэффициент будет по формуле (Айвазян и др., 1985)

$$r_{ij \setminus 1, \dots, m} = -R_{ij} / \sqrt{R_{ii} R_{jj}}, \quad (3)$$

где R_{ij} , R_{ii} , R_{jj} — алгебраические дополнения соответствующих ij , ii , jj элементов дополненной корреляционной матрицы в табл. 5.

Для сравнения корреляционных матриц периодов «до» и «во время» пандемии воспользуемся тестом Вальда, предложенным в работе (Jennrich, 1970). Пусть m — число корреляционных матриц, тогда $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m$ — корреляционные матрицы, полученные из k -мерных выборок размером N_1, \dots, N_m , таким образом, $N = \sum_{i=1}^m N_i$. Тогда,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \left\{ 0,5 \operatorname{tr}(\mathbf{Z}_i^2) - \operatorname{diag}(\mathbf{Z}_i) \mathbf{S}^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{Z}_i) \right\}, \quad (4)$$

где $\mathbf{S} = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{R}}^{-1})$; $\bar{\mathbf{R}} = \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{R}_i N_i \right) / N$, $\mathbf{Z}_i = \sqrt{N_i} \bar{\mathbf{R}}^{-1} (\mathbf{R}_i - \bar{\mathbf{R}})$; « \bullet » — произведение Адамара; χ^2 имеет асимптотическое распределение с числом степеней свободы $(m-1)k(k-1)/2$.

Воспользуемся формулами (1)–(3). Согласно табл. 1 введем следующие множества показателей: $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{12})$ — система всех анализируемых показателей; $\mathbf{X}^{(1)} = (X_1, X_2)$ — подсистема показателей «Демография»; $\mathbf{X}^{(2)} = (X_3, X_4, X_5, X_6)$ — подсистема показателей «Социальная сфера»; $\mathbf{X}^{(3)} = (X_7, X_8, X_9)$ — подсистема показателей «Производство товаров и услуг»; $\mathbf{X}^{(4)} = (X_{10}, X_{11}, X_{12})$ — подсистема показателей «Рынки товаров и услуг».

В табл. 5 и 6 представлены матрицы частных коэффициентов корреляции для рассматриваемых показателей «до» и «во время» пандемии COVID-19 в Свердловской области, соответственно. Корреляционный анализ выявил логичные сильные взаимосвязи между отдельными социально-экономическими показателями региона, которые в период пандемии COVID-19 были нарушены. Так, сильная обратная взаимосвязь между уровнем регистрируемой безработицы (X_3) и объемом производства товаров и услуг (X_7) с ухудшением эпидемиологической ситуации ослабела вдвое. В то

Таблица 5. Корреляционная матрица для рассматриваемых социально-экономических показателей Свердловской области до пандемии

Показатель	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
X_1	1,00	0,31	0,11	-0,23	-0,19	-0,34	-0,43	-0,42	-0,28	-0,33	-0,42	-0,38
X_2	0,31	1,00	0,28	-0,46	0,39	-0,06	-0,31	-0,10	-0,37	-0,18	-0,15	-0,09
X_3	0,11	0,28	1,00	-0,39	-0,03	-0,74	-0,64	-0,56	-0,17	-0,46	-0,51	-0,51
X_4	-0,23	-0,46	-0,39	1,00	-0,02	0,37	0,75	0,60	0,67	0,78	0,53	0,40
X_5	-0,19	0,39	-0,03	-0,02	1,00	0,17	0,21	0,28	-0,32	0,11	0,36	0,35
X_6	-0,34	-0,06	-0,74	0,37	0,17	1,00	0,62	0,70	0,28	0,61	0,56	0,76
X_7	-0,43	-0,31	-0,64	0,75	0,21	0,62	1,00	0,86	0,54	0,86	0,78	0,54
X_8	-0,42	-0,10	-0,56	0,60	0,28	0,70	0,86	1,00	0,53	0,84	0,75	0,52
X_9	-0,28	-0,37	-0,17	0,67	-0,32	0,28	0,54	0,53	1,00	0,72	0,42	0,21
X_{10}	-0,33	-0,18	-0,46	0,78	0,11	0,61	0,86	0,84	0,72	1,00	0,75	0,50
X_{11}	-0,42	-0,15	-0,51	0,53	0,36	0,56	0,78	0,75	0,42	0,75	1,00	0,42
X_{12}	-0,38	-0,09	-0,51	0,40	0,35	0,76	0,54	0,52	0,21	0,50	0,42	1,00

Таблица 6. Корреляционная матрица для рассматриваемых социально-экономических показателей Свердловской области во время пандемии

Показатель	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
X_1	1,00	0,28	-0,01	0,28	-0,44	0,12	0,60	0,08	0,08	0,29	0,19	0,29
X_2	0,28	1,00	0,24	0,11	0,25	0,32	0,20	0,38	0,26	0,33	-0,09	0,03
X_3	-0,01	0,24	1,00	-0,20	0,28	0,19	-0,35	-0,26	0,07	-0,25	-0,33	-0,43
X_4	0,28	0,11	-0,20	1,00	-0,31	-0,17	0,59	0,27	0,73	0,59	0,27	0,29
X_5	-0,44	0,25	0,28	-0,31	1,00	0,22	-0,44	0,05	-0,30	-0,07	-0,19	-0,38
X_6	0,12	0,32	0,19	-0,17	0,22	1,00	0,01	0,53	-0,28	0,10	0,05	-0,03
X_7	0,60	0,20	-0,35	0,59	-0,44	0,01	1,00	0,24	0,31	0,54	0,55	0,67
X_8	0,08	0,38	-0,26	0,27	0,05	0,53	0,24	1,00	0,22	0,34	0,12	0,15
X_9	0,08	0,26	0,07	0,73	-0,30	-0,28	0,31	0,22	1,00	0,44	0,15	0,18
X_{10}	0,29	0,33	-0,25	0,59	-0,07	0,10	0,54	0,34	0,44	1,00	0,56	0,54
X_{11}	0,19	-0,09	-0,33	0,27	-0,19	0,05	0,55	0,12	0,15	0,56	1,00	0,92
X_{12}	0,29	0,03	-0,43	0,29	-0,38	-0,03	0,67	0,15	0,18	0,54	0,92	1,00

время как снижались темпы производства по Свердловской области, наблюдался всплеск регистрируемой безработицы в ответ на рост размера пособия и упрощение процедуры его назначения.

Аналогичные изменения произошли со следующими парами показателей:

«Отгружено товаров собственного производства, выполнено работ и услуг собственными силами» (X_7) — «Объем работ, выполненных по виду деятельности «Строительство»» (X_8). В промышленном производстве снизились только темпы роста, а в строительстве значительно сократились его объемы (за сентябрь—декабрь 2020 г. — с 28,4 до 3,1 млрд руб.), что связано, в частности, с дефицитом рабочей силы из-за закрытия границ;

«Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников по полному кругу организаций» (X_4) — «Оборот розничной торговли» (X_{10}). В Свердловской области сохранился планомерный рост оплаты труда с некоторым снижением его уровня в 2021 г., а сфере розничной торговли пришлось существенно адаптироваться к новым условиям, в том числе за счет потерь в обороте.

Нарушения этих связей являются реакцией на регулирующие меры по борьбе с распространением COVID-19, что сформировало такие разнонаправленные тенденции по этим показателям. В то же время в Свердловской области сохранилась значимая прямая взаимосвязь между заработной платой (X_4)

и производством продуктов животноводства (X_9). Такая ситуация объясняется, с одной стороны, принятыми политическими мерами, направленными на поддержание доходов и занятости населения (списание кредитной задолженности, при поддержании списочной численности сотрудников, «нерабочие дни» с сохранением зарплаты и др.) и, с другой стороны, — отсутствием ограничительных мер в отношении предприятий животноводства как предприятий непрерывного цикла.

Кроме того, введение ограничительных мер закономерно повлияло на усиление взаимосвязи между такими парами показателей:

– «Среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников по полному кругу организаций» (X_4) — «Производство продуктов животноводства в сельскохозяйственных организациях» (X_9);

– «Уровень регистрируемой безработицы» (X_3) — «Всего зарегистрировано преступлений» (X_5);

– «Оборот розничной торговли» (X_{10}) — «Объем платных услуг населению» (X_{12}), что связано с введением локдаунов;

– «Оборот общественного питания» (X_{11}) — «Объем платных услуг населению» (X_{12}), строгие санитарно-эпидемиологические ограничения по перемещению граждан.

Введем в рассмотрение дополнительный показатель, отражающий интенсивность распространения пандемии в Свердловской области — число заражений коронавирусной инфекцией в Свердловской области, человек в месяц (X_{13}). Рассчитаем частные коэффициенты корреляции показателей X_1 — X_{12} с X_{13} (табл. 7).

Данные результаты свидетельствуют о фактическом отсутствии значимого прямого влияния пандемии на изменения исследуемых показателей, следовательно, именно принятые меры по ограничению распространения коронавируса повлекли за собой эти изменения. Однако это не дает оснований утверждать о неэффективности принятых ограничений, так как последствия свободного распространения коронавирусной инфекции могли быть более тяжелыми. Таким образом, говоря о влиянии пандемии на социально-экономические показатели, следует иметь в виду влияние совокупности факторов, среди которых как сама пандемия COVID-19, так и соответствующие ей ограничительные меры.

Результаты расчета коэффициентов корреляционной связи между различными группами социально-экономических показателей Свердловской области «до» и «во время» пандемии COVID-19 по формулам (1) и (2) приведены в табл. 8.

Таблица 7. Частные коэффициенты корреляционной связи между социально-экономическими показателями Свердловской области и интенсивностью распространения пандемии

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0,094	-0,244	-0,096	-0,164	-0,031	-0,002
X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
0,176	0,046	0,094	-0,044	-0,152	0,124

Таблица 8. Коэффициенты корреляционной связи между различными группами социально-экономических показателей Свердловской области «до» и «во время» пандемии COVID-19

Коэффициент	Период до пандемии	Период во время пандемии	Изменение
$D_e(X^{(1)})$	0,050	0,040	-0,010
$D_e(X^{(2)})$	0,226	0,068	-0,158
$D_e(X^{(3)})$	0,433	0,059	-0,374
$D_e(X^{(4)})$	0,313	0,533	0,221
$D_e(X)$	0,616	0,545	-0,072
$D_{e,2}(X^{(1)} \cap X^{(2)})$	0,260	0,195	-0,066
$D_{e,2}(X^{(1)} \cap X^{(3)})$	0,194	0,233	0,039
$D_{e,2}(X^{(1)} \cap X^{(4)})$	0,106	0,168	0,062
$D_{e,2}(X^{(2)} \cap X^{(3)})$	0,516	0,515	-0,001
$D_{e,2}(X^{(2)} \cap X^{(4)})$	0,512	0,274	-0,238
$D_{e,2}(X^{(3)} \cap X^{(4)})$	0,536	0,282	-0,254
$D_{e,4}(X^{(1)} \cap X^{(2)} \cap X^{(3)} \cap X^{(4)})$	0,919	0,890	-0,029

Как видно из данных в табл. 8, во время пандемии ослабела взаимосвязь как между подсистемами, так и внутри подсистем и всей системы показателей. Это может свидетельствовать о снижении согласованности и некоторой хаотизации социально-экономической системы региона. Исключение наблюдается только в следующих случаях:

– в период пандемии значительно (с 0,313 до 0,533) вырос коэффициент корреляционной связи между показателями подсистемы «Рынки товаров и услуг»,

– менее значительно выросла взаимосвязь между подсистемами «Демография» и «Производство товаров и услуг», а также подсистемами «Демография» и «Рынки товаров и услуг».

Также следует обратить внимание на то, что практически остались неизменными коэффициенты корреляционной связи между подсистемой «Социальная сфера» с подсистемой «Производство товаров и услуг».

Сравним корреляционные матрицы, воспользовавшись критерием Вальда (4). Нулевой гипотезой в данном случае будет являться предположение об их равенстве, которая будет выполнена в случае если вычисленная статистика будет меньше критической. В результате расчетов при числе степеней свободы, равном $df = 66$, χ^2 будет равен 340,02 при $\chi_{крит}^2 = 107,26$. Следовательно, вероятность выполнения нулевой гипотезы $p \ll 0,05$, и мы ее отклоняем; а это свидетельствует о наличии статистически значимых различий между сравниваемыми корреляционными матрицами для периодов «до» и «во время» пандемии.

Задача 3. Анализ влияния пандемии COVID-19 на тенденции социально-экономических показателей

Имеем набор из 12 социально-экономических показателей Свердловской области (X^1, \dots, X^{12}) за период с марта 2016 г. по июнь 2021 г. Для анализа влияния пандемии на тенденции показателей использована модель временных рядов в форме авторегрессии (AR), предполагающая линейную зависимость показателя в текущий момент времени от его предыдущих значений. Для учета сезонности показателей рассмотрен авторегрессионный процесс, определяющийся формулой

$$X_t^k = \sum_{i=1}^3 a_i^k X_{t-p_i}^k + \varepsilon_t, \quad (5)$$

где a_i^k — коэффициенты авторегрессии; ε_t — случайная ошибка (белый шум); $p = \{1, 3, 12\}$ — временной лаг в 1 месяц, 1 квартал и 1 год; k — номер показателя.

Отметим, что некоторые показатели являются коррелированными. Однако выяснение причинно-следственных связей между показателями требует проведения отдельных исследований. Модель (5) основана на предположении: совокупное влияние факторов X_t^i формирует внутренние закономерности в развитии процесса X_t^k , что дает возможность применить для его описания математическую модель из специфического класса моделей временных рядов (Тихомиров, Дорохина, 2003, с. 184). Это позволяет обойтись без рассмотрения в модели других переменных в виде регрессоров. Авторегрессионные модели из-за этого проигрывают в точности прогнозирования многофакторным моделям, но нас здесь интересует прежде всего исследование характера динамики рассматриваемых показателей.

Таким образом, рассмотрено влияние временного лага для 1, 3 и 12 месяцев. Выбор числа временных лагов и соответствующих им временных промежутков обусловлен характером сезонности исследуемых показателей и поставленной задачей в виде сравнения поведения показателей в периоды «до» и «во время» пандемии, в рамках которой отсутствует необходимость определения оптимального числа лагов на основе информационных критериев.

Стандартным методом оценивания коэффициентов является метод наименьших квадратов (МНК), который для получения состоятельных и несмещенных оценок требует выполнения ряда предпосылок, называемых условиями Гаусса–Маркова (Демиденко, 1981).

Однако исходные временные ряды показателей, как показано в (Голованов и др., 2022), имеют резкие скачки, вызванные как эффектом сезонности, так и принятыми антиковидными ограничениями. В этой ситуации использование МНК может привести к значительным отклонениям от истинных значений искомых параметров (Вучков, Бояджиева, Солаков, 1987). Поэтому с целью достижения большей устойчивости в условиях стохастической неоднородности данных при проведении регрессионного анализа вместо МНК был использован метод наименьших модулей (МНМ)

(Мудров, Кушко, 2022). Статистические свойства МНМ-оценок исследованы в ряде публикаций (Болдин, Симонова, Тюрин, 1998; Basset, Koenker, 1978; Pollard, 1991).

Нахождение параметров модели (5) выполнено с помощью алгоритма градиентного спуска по узловым прямым (Тырсин, Голованов, 2021).

Пусть $\Omega: \{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ будет множеством всех гиперплоскостей вида

$$\Omega_i = \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{x}_i, y_i) = y_i - \mathbf{a}, \mathbf{x}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда узловая точка будет представлять собой точку пересечения m независимых гиперплоскостей $\mathbf{u} = \bigcap_{s \in M} \Omega_s$, $M = \{k_1, \dots, k_m\}$, $k_1 < \dots < k_m$, $k_i \in \{1, \dots, n\}$.

Обозначим U — множество всех узловых точек. Назовем *узловой* такую прямую, которая будет являться пересечением $(m-1)$ независимых гиперплоскостей $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})} : \bigcap \Omega_i, i \in \{k_1, \dots, k_{m-1}\}$, $k_i \in \{1, \dots, n\}$.

Метод основывается на использовании геометрических особенностей целевой функции в МНМ и нахождении ее точного минимума в одной из узловых точек. Алгоритм градиентного спуска по узловым прямым позволяет найти этот минимум за конечное число шагов.

В табл. 9 приведены полученные коэффициенты авторегрессии для показателей (X^1, \dots, X^{12}) «до» и «во время» пандемии COVID-19.

Для всех случаев суммы коэффициентов авторегрессии оказались практически равными 1 (лежат в диапазоне от 0,9 до 1,1), т.е. все рассматриваемые показатели, как «до», так и «во время» пандемии, являются нестационарными. Поскольку это может свидетельствовать о наличии стохастических трендов (случайное блуждание без дрейфа и с дрейфом), то оценка статистической значимости коэффициентов не имеет смысла (Nelson, Kang, 1984; Лукашин, 2003, с. 271). Поэтому ограничимся лишь сравнением значений коэффициентов авторегрессии «до» и «во время» пандемии.

Полученные в табл. 9 результаты дополняют выводы, сделанные ранее в работе (Голованов и др., 2022), согласно которым пандемия не оказала или оказала минимальное влияние на характер трендов следующих показателей: число зарегистрированных родившихся (X_2); среднемесячная заработная плата работников (X_4); число преступлений (X_5); количество ДТП (X_6); объем строительных работ (X_8); производство продуктов животноводства в сельскохозяйственных организациях (X_9). Согласно полученным результатам коэффициенты авторегрессии изменились незначительно — в пределах 0,2, что, в свою очередь, может свидетельствовать о сохранении формы их тренда. Разумеется, это не говорит об отсутствии различий средних значений этих показателей в рассматриваемых периодах.

Таблица 9. Коэффициенты авторегрессионной модели для временных лагов в 1, 3 и 12 месяцев «до» и «во время» пандемии COVID-19

Показатель	Коэффициент			Показатель	Коэффициент		
	$t-1$	$t-3$	$t-12$		$t-1$	$t-3$	$t-12$
X_1	0,196	0,176	0,599	X_7	0,531	0,344	0,161
	0,435	0,009	0,624		0,748	0,135	0,146
X_2	0,092	0,117	0,718	X_8	0,161	0,042	0,913
	-0,026	0,312	0,681		0,147	0,070	0,845
X_3	0,888	-0,302	0,397	X_9	0,012	-0,006	1,002
	1,312	-0,352	0,023		0,023	0,063	0,898
X_4	0,023	-0,002	1,022	X_{10}	0,003	0,032	0,978
	0,050	0,034	0,946		0,456	0,130	0,395
X_5	0,404	0,160	0,419	X_{11}	0,133	0,028	0,838
	0,420	0,011	0,543		0,952	-0,050	0,107
X_6	0,418	0,023	0,560	X_{12}	0,153	-0,112	0,991
	0,309	0,037	0,620		1,059	-0,198	0,130

Примечание. Коэффициенты «до» и «во время» пандемии — верхняя и нижняя строка для каждого показателя соответственно.

Исходя из полученных результатов, видна некоторая закономерность: у показателей возросло влияние краткосрочных (лаг 1 и 3 месяца) и сократилось влияние долгосрочных (лаг 12 месяцев) изменений. Это демонстрирует резкие изменения во время пандемии и отход от уже устоявшегося общего тренда показателей, а также об их попытке подстроиться под текущую хаотичную ситуацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование представляет собой анализ последствий экономической нестабильности, вызванной пандемией COVID-19, на социально-экономическое развитие Свердловской области. В рамках данной статьи поставлены и решены три задачи, и их решения позволяют проанализировать социально-экономическую систему региона в целом. Во-первых, проведена оценка общих изменений в социально-экономическом состоянии региона в результате пандемии COVID-19 и введения ограничительных мер.

В результате проведения дискриминантного анализа удалось статистически значимо разделить совокупность социально-экономических показателей «до» и «во время» пандемии на два кластера. Наибольший вклад в разделение на кластеры внесли число родившихся, оборот общественного питания и объем товаров, работ и услуг, выполненных собственными силами. В их динамике наиболее явно прослеживается влияние пандемии COVID-19 в Свердловской области. Эти социально-экономические показатели в наибольшей степени отреагировали на изменения и в то же время быстро адаптировались к ним. Такую динамику можно объяснить тем, что первый показатель в долгосрочной перспективе все же определяется сложившимися репродуктивными установками в обществе, а два других показателя приспособились к новым условиям за счет быстрого изменения потребительского поведения населения, для которого сформировалась соответствующая инфраструктура (службы доставки, онлайн-сервисы и пр.).

Во-вторых, выявлено влияние пандемии COVID-19 на характер и структуру взаимосвязей между социально-экономическими показателями региона. Многомерный корреляционный анализ установил, что в результате введения ограничительных и поддерживающих мер сформировались разнонаправленные тенденции по социально-экономическим показателям региона, которые нарушили ранее сложившиеся взаимосвязи между ними. Так, например, в Свердловской области, с одной стороны, сохранился планомерный рост оплаты труда, рост промышленного производства только замедлился, а, с другой стороны, произошел спад в строительстве и резкий рост регистрируемой безработицы. Разрыв этих взаимосвязей является реакцией на регулирующие меры борьбы с распространением COVID-19 — только отдельные сферы получили существенную поддержку со стороны государства, а другие без его внимания испытали значительный спад. Только при возобновлении этих взаимосвязей можно рассчитывать на восстановление социально-экономической ситуации в Свердловской области.

В-третьих, для того чтобы учесть отложенный эффект влияния на текущие значения показателей, проведен анализ последствий пандемии COVID-19 на тенденции социально-экономических показателей региона с учетом возможного их запаздывания и сезонного колебания. Для этого для каждого показателя были получены авторегрессионные уравнения «до» и «во время» пандемии COVID-19, где каждый показатель зависит от собственных значений в предыдущий месяц, три месяца и год назад. Согласно полученным значениям коэффициентов авторегрессии пандемия вызвала взрывные изменения в динамике уровня регистрируемой безработицы, оборота общественного питания и объема платных услуг населению.

Результаты авторегрессионного анализа выявили определенную закономерность: на социально-экономические показатели Свердловской области возросло влияние краткосрочных изменений (лаг в 1 и 3 месяца), но сократилось влияние условно долгосрочных изменений (лаг в 1 год). Выявленная закономерность свидетельствует о резких и значительных изменениях во время пандемии и об отклонении от уже устоявшихся трендов, а также об их попытке подстроиться под текущую хаотичную ситуацию.

Важно отметить, что представленное исследование проводилось не по отдельным социально-экономическим показателям Свердловской области, а по их совокупности, что позволило представить целостный анализ последствий экономической нестабильности, вызванной пандемией COVID-19.

Процесс выхода из экономической нестабильности, вызванной последствиями пандемии COVID-19, наложился на социально-экономическое потрясение, обусловленное усилением

в 2022 г. санкционного давления. Как отмечают многие эксперты, «пандемийный кризис» выступил своего рода репетицией текущего кризиса, подготовив российскую экономику к экономической изоляции. Поэтому в современных российских реалиях при совершенствовании экономической политики, в том числе на региональном уровне, требуется учесть опыт государственного управления в период пандемии и успешные практики адаптации к новым условиям бизнес-структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.** (1989). Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика. 607 с. [Ayvazyan S.A., Bukhstaber V.M., Enyukov I.S., Meshalkin L.D. (1989). *Applied statistics: Classification and dimension reduction*. Moscow: Finansy i Statistika. 607 p. (in Russian).]
- Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.** (1985). Прикладная статистика: Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика. 487 с. [Ayvazyan S.A., Enyukov I.S., Meshalkin L.D. (1985). *Applied statistics: Dependency research*. Moscow: Finansy i Statistika, 487 p. (in Russian).]
- Болдин М.В., Симонова Г.И., Тюрин Ю.Н.** (1997). Знаковый статистический анализ линейных моделей. М.: Наука, Физматлит. 288 с. [Boldin M.V., Simonova G.I., Tyurin Yu.N. (1997). *Sign statistical analysis of linear models*. Moscow: Nauka, Fizmatlit. 288 p. (in Russian).]
- Васиев М., Би К., Денисов А., Бочарников В.** (2020). Влияние пандемии Covid-19 на устойчивость экономики Китая // *Форсайт*. Т. 14. № 2. С. 7–22. [Vasiev M., Bi K., Denisov A., Bocharnikov V. (2020). The impact of the covid-19 pandemic on the sustainability of the Chinese economy. *Foresight and STI Governance*, 14, 2, 7–22 (in Russian).]
- Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия (1999). Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия. 910 с. [Probability and mathematical statistics: Encyclopedia (1999). Yu.V. Prokhorov (Editor-in-chief). Moscow: Bolshaya Rossijskaya Enciklopediya. 910 p. (in Russian).]
- Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е.** (1987). Прикладной линейный регрессионный анализ. Пер. с болг. М.: Финансы и статистика. 239 с. [Vuchkov I., Boyadzhieva L., Solakov E. (1987). *Applied linear regression analysis*. Transl. from the Bolg. Moscow: Finansy i Statistika. 239 p. (in Russian).]
- Голованов О.А., Тырсин А.Н., Васильева Е.В.** (2022). Оценка влияния пандемии COVID-19 на тренды социально-экономического развития региона России: кейс Свердловской области // *Journal of Applied Economic Research*. Т. 21. № 2. С. 257–281. DOI: 10.15826/vestnik.2022.21.2.010. [Golovanov O.A., Tyrsin A.N., Vasilyeva E.V. (2022). Assessing the impact of the COVID-19 pandemic on the trends in socio-economic development of an industrial region in Russia. *Journal of Applied Economic Research*, 21, 2, 257–281. DOI: 10.15826/vestnik.2022.21.2.010 (in Russian).]
- Демиденко Е.З.** (1981). Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика. 302 с. [Demidenko E.Z. (1981). *Linear and nonlinear regression*. Moscow: Finansy i Statistika. 302 p. (in Russian).]
- Лукашин Ю.П.** (2003). Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика. 416 с. [Lukashin Yu.P. (2003). *Adaptive methods of short-term forecasting of time series*. Moscow: Finansy i Statistika. 416 p. (in Russian).]
- Мудров В.И., Кушко В.Л.** (2022). Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки. Изд. стереотип. М.: URSS. 304 с. [Mudrov V.I., Kushko V.L. (2022). *Measurement processing methods: Quasi-plausible estimates*. Ed. stereotype. Moscow: URSS. 304 p. (in Russian).]
- Омельяновский В.В., Авксентьева М.В., Деркач Е.В., Свешникова Н.Д.** (2011). Анализ стоимости болезни, проблемы и пути решения // *Педиатрическая фармакология*. Т. 8. № 3. С. 6–12. [Omelyanovsky V.V., Avksentieva M.V., Derkach E.V., Sveshnikova N.D. (2011). Cost analysis of the disease, problems and solutions. *Pediatric Pharmacology*, 8, 3, 6–12 (in Russian).]
- Онищенко Г.Г., Сизикова Т.Е., Лебедев В.Н., Борисевич С.В.** (2022). Вариант “омикрон” вируса SARS-COV-2 как доминантный агент нового подъема заболевания в условиях пандемии COVID-19 // *Вестник Российской академии наук*. Т. 92. № 7. С. 636–646. DOI: 10.31857/S0869587322070131 [Onishchenko G.G., Sizikova T.E., Lebedev V.N., Borisevich S.V. (2022). The “omicron” variant of the SARS-COV-2 virus as the dominant agent of a new rise in the disease in the COVID-19 pandemic. *Herald of the Russian Academy of Sciences*, 92, 7, 636–646. DOI: 10.31857/S0869587322070131 (in Russian).]
- Смирнов Е.Н.** (2020). «Мировая экономика коронавируса»: поиск оптимальных путей преодоления последствий кризиса // *Вестник МГИМО-Университета*. № 13 (3). С. 243–266 DOI: 10.24833/2071-8160-2020-3-72-243-266. [Smirnov E.N. (2020). “The world economy of coronavirus”: The search for optimal ways to overcome the consequences of the crisis. *MGIMO Review of International Relations*, 13 (3), 243–266. DOI: 10.24833/2071-8160-2020-3-72-243-266 (in Russian).]

- Сошникова Л.А., Тамашевич В.Н., Уебе Г., Шефер М.** (1999). Многомерный статистический анализ в экономике. М.: Финансы и статистика. 598 с. [Soshnikova L.A., Tamashevich V.N., Uebe G., Shefer M. (1999). *Multivariate statistical analysis in economics*. Moscow: Finansy i Statistika. 598 p. (in Russian).]
- Степанов В.С.** (2020). Зависимость уровня смертности в регионах от распространенности активных носителей SARS-CoV-2 и ресурсов организаций здравоохранения // *Анализ риска здоровью*. № 4. С. 12–22. DOI: 10.21668/health.risk/2020.4.02 [Stepanov V.S. (2020). Dependence of the mortality rate in the regions on the prevalence of active carriers of SARS-CoV-2 and the resources of healthcare organizations. *Health Risk Analysis*, 4, 12–22. DOI: 10.21668/health.risk/2020.4.02 (in Russian).]
- Степанов В.С.** (2022). Оценка уровня смертности, обусловленной SARS-CoV-2, в регионах России, на основе эконометрической модели // *Инфекция и иммунитет*. Т. 12. № 4. С. 783–789. DOI: 10.15789/2220-7619-ASR-1846 [Stepanov V.S. (2022). Estimation of the level of mortality caused by SARS-CoV-2 in the regions of Russia, based on an econometric model. *Russian Journal of Infection and Immunity*, 12, 4, 783–789. DOI: 10.15789/2220-7619-ASR-1846 (in Russian).]
- Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю.** (2003). Эконометрика. М.: Экзамен. 512 с. [Tihomirov N.P., Dorohina E. Yu. (2003). *Econometrics*. Moscow: Ekzamen. 512 p. (in Russian).]
- Тырсин А.Н.** (2022). Скалярная мера взаимосвязи между несколькими случайными векторами // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. Т. 88. № 3. С. 73–80. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-3-73-80 [Tyrsin A.N. (2022). Scalar measure of the relationship between several random vectors. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*, 88, 3, 73–80. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-3-73-80 (in Russian).]
- Тырсин А.Н., Голованов О.А.** (2021). Динамическое регрессионное моделирование на основе градиентного спуска по узловым прямым // *Современные наукоемкие технологии*. № 10. С. 88–93. DOI: 10.17513/snt.38859. [Tyrsin A.N., Golovanov O.A. (2021). Dynamic regression modeling based on gradient descent along nodal straight lines. *Modern High Technologies*, 10, 88–93. DOI: 10.17513/snt.38859 (in Russian).]
- Цветков В.А., Дудин М.Н.** (2020). Пандемия COVID-19 как угроза продовольственной и экономической безопасности страны // *Экономика и управление*. № 26 (4). С. 334–344. DOI: 10.35854/1998-1627-2020-4-334-344 [Tsvetkov V.A., Dudin M.N. (2020). The COVID-19 pandemic as a threat to the country's food and economic security. *Economics and Management*, 26 (4), 334–344. DOI: 10.35854/1998-1627-2020-4-334-344 (in Russian).]
- Цухло С.В.** (2021). Адаптация российской промышленности к кризису 2020 г. // *Экономическое развитие России*. Т. 28, № 10. С. 16–18. [Tsukhlo S.V. (2021). Adaptation of Russian industry to the crisis of 2020. *Russian Economic Development*, 28, 10, 16–18 (in Russian).]
- Шмат В.** (2022). Экономический рост или гармоничное социально-экономическое развитие? Часть I. Теоретико-методический взгляд // *ЭКО*. № 52 (6). С. 89–110. DOI: 10.30680/ECO0131-7652-2022-6-89-110 [Shmat V. (2022). Economic growth or harmonious socio-economic development? Part I. Theoretical and methodological view. *ECO Journal*, 52 (6), 89–110. DOI: 10.30680/ECO0131-7652-2022-6-89-110 (in Russian).]
- Эсбенсен К.** (2005). Анализ многомерных данных. Избранные главы: пер. с англ. Черногловка: Изд-во Института проблем химической физики (ИПХФ) РАН. 160 с. [Esbensen K. (2005). *Analysis of multidimensional data. Selected chapters*. Transl. from the English. Chernogolovka: Publisher of the Institute of Problems of Chemical Physics of the RAS (IPCP) RAS. 160 p. (in Russian).]
- Basset G.W., Koenker R.** (1978). Asymptotic theory of least absolute error. *Journal of the American Statistical Association*, 73, 618–622.
- Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., Ljung G.M.** (2015). *Time series analysis: Forecasting and control*. 5th ed. Hoboken: Wiley. 712 p.
- Brahmbhatt M., Dutta A.** (2008). On SARS type economic effects during infectious disease outbreaks. *World Bank Policy Research Working Paper*, 4466. Available at: <https://ssrn.com/abstract=1081740>
- Hardle W.K., Simar L.** (2019). *Applied multivariate statistical analysis*. 5th ed. Berlin Heidelberg: Springer. 558 p.
- Jennrich R.I.** (1970). An asymptotic χ^2 test for the equality of two correlation matrices. *Journal of the American Statistical Association*, 65 (330), 904–912. DOI: 10.2307/2284596
- Jonung L., Roeger W.** (2006). The Macroeconomic Effects of a Pandemic in Europe — a model-based assessment. DOI: 10.2139/ssrn.920851
- Nelson C.R., Kang H.** (1984). Pitfalls in the use of time as explanatory variable in regression. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, 73–82.
- Pena D., Rodriguez J.** (2003). Descriptive measures of multivariate scatter and linear dependence. *Journal of Multivariate Analysis*, 85, 2, 361–374. DOI: 10.1016/S0047-259X(02)00061-1
- Pollard D.** (1991). Asymptotics for least absolute deviation regression estimators. *Econometrics Theory*, 7, 186–199.
- Ward J.D., Sutton P.C., Werner A.D., Costanza R., Mohr S.H., Simmons C.T.** (2016). Is decoupling GDP growth from environmental impact possible? *PLoS ONE*, 11 (10), e0164733. DOI: 10.1371/journal.pone.0164733

Impact of the COVID-19 pandemic on the socio-economic development of the region

© 2023 O.A. Golovanov, A.N. Tyrsin, E.V. Vasilyeva

O.A. Golovanov,

*Institute of Economics, The Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia;
e-mail: golovanov.oa@uiec.ru*

A.N. Tyrsin,

*Institute of Economics, The Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Ural Federal University named
after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia; e-mail: at2001@yandex.ru*

E.V. Vasilyeva,

*Institute of Economics, The Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia;
e-mail: vasileva.ev@uiec.ru*

Received 20.10.2022

The article was prepared according to the Research Plan of the Institute of Economics, The Ural Branch of RAS.

Abstract. The article presents an analysis of the consequences of economic instability caused by the COVID-19 pandemic for the socio-economic development of the region. The study was carried on the example of the Sverdlovsk region according to the Federal State Statistics Service. The article sets and solves three research problems. First, to assess how the overall socio-economic condition of the region has changed because of the COVID-19 pandemic. Second, to identify the impact of the COVID-19 pandemic on the nature and structure of the relationship between the socio-economic indicators of the region. Third, to analyze the impact of the COVID-19 pandemic on the trends in the socio-economic indicators of the region, considering their possible delay and seasonal fluctuations. The first task is solved using statistical methods of pattern recognition, the second task — by methods of multivariate correlation analysis, and for the third task stochastic time series models are used. The largest contribution to the division into clusters was made by the number of births, the turnover of public catering and the volume of goods, works and services performed on their own; their dynamics most clearly traces the impact of the COVID-19 pandemic in the Sverdlovsk region. Multidimensional correlation analysis established that because of the introduction of restrictive and supportive measures, multidirectional trends in the socio-economic indicators of the region were formed, which violated the previously established relationships between them. Based on the obtained coefficients of the autoregressive model, one can find a certain pattern consisting in the growth of the influence of short-term (lag 1 and 3 months) and the decrease of the long-term influence (lag 12 months) change in indicators. According to the calculations obtained, the economy of the Sverdlovsk region during the analyzed period failed to overcome the destabilizing effect of the consequences of the COVID-19 pandemic.

Keywords: pandemic, COVID-19, socioeconomic development, economic instability, region, discriminant analysis, multivariate correlation analysis, autoregression.

JEL Classification: C10, O11, R11.

For reference: **Golovanov O.A., Tyrsin A.N., Vasilyeva E.V.** (2023). Impact of the COVID-19 pandemic on the socio-economic development of the region. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 54–67. DOI: 10.31857/S042473880022737-9

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рационирование и рынок: структура и устойчивость равновесий

© 2023 г. Ф.Л. Зак

Ф.Л. Зак,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: zak@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию 15.12.2022

Аннотация. В последнее время в различных странах усиливается государственное регулирование экономики. Ряд государств пытается воздействовать на цены в ключевых областях экономики, в частности путем продажи ресурсов по твердым ценам в пределах установленных квот, однако в реальной экономике не удается предотвратить перепродажу котируемых товаров на свободном рынке. Исследование воздействия рационаирования на рыночные цены является актуальной и весьма сложной задачей. В настоящей статье предложена модель экономического равновесия, в которой часть товаров в пределах выделенных квот распределяется государством по фиксированным ценам, после чего все товары, включая выкупленные в пределах квот, поступают на свободный рынок, на котором обмениваются уже по рыночным ценам. Параметрами модели являются товарные запасы, начальные денежные средства участников, квоты и фиксированные цены. При определенных значениях параметров рассматриваемая модель в качестве частных случаев содержит модель чистого обмена и модель с фиксированными доходами и, в некотором смысле, является их комбинацией. Основываясь на известных свойствах этих частных случаев и используя технику элементарной дифференциальной топологии, мы исследуем условия существования и свойства состояний равновесия в рассматриваемой модели. Равновесие существует не для всех экономик. В зависимости от значений параметров в (достаточно общей) экономике может существовать конечное (четное или нечетное) число равновесий. В важном частном случае, когда котируются все товары, а суммарная стоимость выделенных квот совпадает с совокупными денежными средствами участников, равновесия образуют одномерное многообразие. Исследована сходимость обобщенного вальрасовского процесса регулирования цен (*tâtonnement*). Показано, что в нашей ситуации достижение баланса спроса и предложения может сопровождаться ростом цен (эндогенной инфляцией).

Ключевые слова: дефицит, рационаирование, квоты, функции спроса, рынок, равновесие, соответствие Вальраса, ценообразование, инфляция.

Классификация JEL: C02, C62, C65, D31, D45, D47, D52, D61.

Для цитирования: Зак Ф.Л. (2023). Рационаирование и рынок: структура и устойчивость равновесий // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 68–86. DOI: 10.31857/S042473880025860-5

1. ВВЕДЕНИЕ

Сорок лет назад в своей знаменитой книге (Kornai, 1980) Я. Корнаи указал на *дефицит* как главную характеристику социалистической экономики. В одной из последних своих книг (Kornai, 2013) Корнаи охарактеризовал (современную) капиталистическую экономику как *экономику избытка*, подчеркивая тем самым противоположность двух экономических систем. Можно было бы ожидать, что с крахом социалистической системы такие понятия, как «дефицит», «рационаирование» и «квоты», исчезнут из экономического лексикона. Однако ситуация развивалась по-другому и *конец истории* Ф. Фукуямы оказался иллюзией. Возрастающее во многих странах неравенство в доходах и человеческом капитале, массовая иммиграция, бедность, безработица, неуверенность в будущем, социальная и политическая поляризация привели к необходимости государственного регулирования, которое осуществлялось в разных странах по-разному (продовольственные карточки, субсидированное жилье для бедных, субсидии на образование, медицинскую помощь и транспорт). Показателем важности поисков новых форм государственного регулирования является растущая популярность концепции *универсального базисного дохода* (УБД), интенсивно обсуждающейся в последние десятилетия в ряде стран (см., например, (Togry, 2022)). Относительно успешные эксперименты с (ограниченным) введением УБД проводились и продолжают проводиться как в развитых, так и в развивающихся странах; в поддержку УБД выступают многие знаменитости (включая

нобелевских лауреатов по экономике), а некоторые популярные политические партии в разных частях света сделали УБД частью своих программ (Merrill, Neves, Lain, 2022).

Однако несмотря на возрастающее число проблем, с которыми приходится сталкиваться правительствам западных стран, до недавнего времени понятия дефицита, рационарования и квот могли быть применены лишь к небольшой части экономик этих стран. Ситуация изменилась с нашествием коронавируса. Пандемия выявила неадекватность большинства систем здравоохранения, и эксперты до сих пор спорят о методах борьбы с эпидемией, использованных в большинстве развитых стран. Пандемия нанесла тяжелый урон как бизнесу, так и потребителям, выросла безработица, многие предприятия и офисы закрывались на карантин, нарушились логистические цепочки, международная торговля пришла в упадок. С целью смягчить эти проблемы богатые страны потратили триллионы «вертолетных» долларов на помощь бизнесу и прямые выплаты населению (что напоминает нам о *мягких бюджетных ограничениях* Корнаи). Все эти обстоятельства привели к нарушению поставок и дефициту, но говорить о сколько-нибудь широком распространении рационарования и квот оснований еще не было.

Ситуация усугубилась в 2022 г. с началом специальной военной операции на Украине и массовым введением санкций и ограничений. По словам главного экономиста ОЭСР А.С. Перейры (Hannon, 2022), ущерб глобальной экономике от военных действий на Украине оценивается в 2,8 трлн долл., и эта оценка непрерывно возрастает. Результатом этой череды потрясений (разумеется, в настоящее время мы можем рассматривать только промежуточный результат) явились частичная деглобализация, усиление тренда на деиндустриализацию ряда стран, непривычно высокий уровень инфляции, а также нехватка нефти, газа, бензина, электричества, минеральных удобрений, некоторых видов сельскохозяйственной продукции и многих других промышленных и потребительских товаров. В этих обстоятельствах, столкнувшись с общественным недовольством и опасаясь политических беспорядков, многие правительства ввели те или иные формы централизованного распределения и потолков цен (или субсидированных цен) на дефицитные продукты.

Детали принятых мер варьируются от страны к стране, но общим является вмешательство центра в распределение ресурсов и ценообразование. Согласно (Checherita-Westphal, Freier, Muggenthaler, 2022) две трети расходов Европейского союза, выделенных на преодоление последствий украинского кризиса, направлены на решение проблем, связанных с энергетикой, и почти треть этих средств расходуется на субсидии. В разных европейских странах на разных условиях, иногда в пределах определенных квот, субсидируются цены на бензин, различные виды топлива для отопления, электроэнергию. Кроме того, в ряде стран практикуется ограничение и регулирование цен на некоторые пищевые продукты (например, подсолнечное масло), определенные виды минеральных удобрений для фермеров и т.д., а также субсидированные цены на жилье и медикаменты (по поводу общих подходов ЕС к этой проблеме см. (ЕС, 2022)). Санкции и внешнеторговые ограничения приводят к дисбалансу на рынках подсанкционных стран и заставляют их частично возвращаться к экономике дефицита. Наконец, хорошо известно (хотя точные данные недоступны), что в условиях санкций и ограничений резко возросли теневые поставки подсанкционных товаров, а также нелегальные поставки оружия посредникам по заниженным ценам с целью последующей перепродажи. Масштабы этих операций таковы, что ими уже нельзя пренебречь при анализе рынков соответствующих товаров.

В условиях преобладания рыночной экономики такие методы регулирования неизбежно приводят к тому, что экономические агенты начинают перепродавать продукты по рыночным ценам. Эта ситуация чем-то напоминает положение, сложившееся полвека назад в странах социалистического лагеря, хотя, разумеется, причины возникновения и величина этого сектора экономики различны. Неудивительно, что первые попытки моделировать это явление были предприняты в СССР В.Л. Макаровым и его сотрудниками (Макаров и др., 1982, 1986). Модель, рассмотренная в этих работах, является очень общей, и даже существование равновесия доказано авторами при чрезмерно ограничительных предположениях. Существование равновесия для значительно более общего класса моделей было доказано в (Полтерович, 1990).

Поскольку мы в первую очередь интересуемся распределением товаров в смешанной экономике, мы рассматриваем вариант модели Макарова, в котором отсутствует производство. Математический аппарат, используемый в настоящей работе и ведущий происхождение из элементарной дифференциальной топологии, был впервые введен в математическую экономику Ж. Дебре (Debreu, 1970) и развит в работах И. Баласко, Э. Диркера, А. Мас-Колелла и др. (подход, близкий к нашему, использовался в статьях (Balasko, 1975; Зак, 1981)). Для нас представляет интерес не только структура множества равновесий, но и его поведение при вариации параметров, использовании

квот и фиксированных цен в качестве инструментов государственного управления, а также особая роль экономик, находящихся на *гиперповерхности спроса*, разбивающей все экономики на два класса с весьма различными свойствами (см. ниже).

Перейдем к описанию нашей модели. Имеется l продуктов и m экономических агентов с функциями спроса $f_i(p, w_i)$, $i = 1, \dots, m$, где $p \in \mathbb{R}_+^l$ — вектор цен, а w_i — денежные средства (полный доход) агента i .

Мы предполагаем, что функции спроса порождены строго монотонными строго вогнутыми трижды непрерывно дифференцируемыми функциями полезности u_i , так что f_i однородны степени ноль и, по теореме Дебре (Debreu, 1972), дважды непрерывно дифференцируемы, а агрегированная функция спроса $f = \sum_{i=1}^m f_i$ удовлетворяет условию желательности (Balasko, 1975) (см. разд. 2). Это означает, что если цены на некоторые из товаров стремятся к нулю, то спрос неограниченно возрастает.

Пусть $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^1$ — начальный доход участника i и государство предлагает ему купить товары в пределах квоты $x_i \in \mathbb{R}_+^l$ по фиксированным ценам $q \in \mathbb{R}_+^l$. Это означает, что если экономический агент i имеет желание и деньги, он может купить любое количество продукта j , не превышающее x_i^j , по цене q^j , $j = 1, \dots, l$. Отметим, что мы не исключаем важных случаев, когда $x_i^j = 0$ (участнику i не выделена квота для покупки продукта j по фиксированной цене q^j) и $q^j = 0$ (такие товары, как жилье, медицинское обслуживание и т.д., которые — до определенного уровня — оплачиваются из социальных фондов, относятся к этой категории).

Пусть $y \in \mathbb{R}_+^l$ — вектор всех товаров в нашей экономике. Мы не предполагаем, что $x \leq y$, поскольку на практике распределение квот нередко предшествует реальному производству или импорту продуктов, и если планы не будут выполнены, то государство не сможет выполнить своих обязательств по поставке некоторых товаров (т.е. $x^j > y^j$ для некоторых $1 \leq j \leq l$). Оставшиеся товары (т.е. не выкупленные по твердым ценам) продаются на свободном рынке по ценам $p \in \mathbb{R}_+^l$. Участники также могут перепродать на свободном рынке (по тем же ценам p) некоторые из товаров, ранее купленных ими у государства, по твердым ценам q .

Экономические агенты станут выкупать свои квоты на товар j если и только если рыночная цена этого товара выше, чем фиксированная, т.е. $p^j > q^j$. Поэтому для исследования состояний равновесия можно считать, что экономический агент i выходит на рынок с денежными средствами $w_i = \alpha_i + \langle (p - q)^+, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$ (где $\langle a, b \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов a и b , а для $r \in \mathbb{R}^l$ мы полагаем $(r^+)^j = \max\{r^j, 0\}$, $j = 1, \dots, l$), складывающимися из начального дохода α_i и денег, вырученных от перепродажи на рынке продуктов, купленных у государства по фиксированным ценам q , при условии что они ниже рыночных цен p . Соответствующий совокупный спрос $f(p; w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p - q)^+, x_i \rangle)$, и цена p называется *равновесной*, если спрос равен предложению, т.е. $f(p; w_1, \dots, w_m) = y$.

Описанная модель включает в качестве частных случаев модель чистого обмена (когда $x = \sum_{i=1}^m x_i = y$, $\alpha_i = \langle q, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$; см. предложение 2) и модель с фиксированными доходами (например, когда $x_i = 0$, $i = 1, \dots, m$ или $x \leq y$ и цены q^j , $j = 1, \dots, l$ достаточно велики; см. предложение 1) и получается комбинированием этих двух моделей (точнее говоря, обе эти модели входят в непрерывное семейство экономик, рассматриваемых в настоящей статье). Благодаря этому, в частности, используя известные свойства модели чистого обмена, удастся вывести неизвестные ранее свойства модели с фиксированными доходами (например, количество равновесных цен в общей экономике с фиксированными доходами нечетно; см. следствие 4). Однако представляется более важным выявить свойства равновесий, специфические для данной модели.

В отличие от модели чистого обмена и модели с фиксированными доходами, в нашей модели равновесие существует не всегда. Действительно, из закона Вальраса нетрудно вывести, что $\alpha = \langle p \wedge q, y \rangle + \langle (p - q)^+, y - x \rangle$, где $x = \sum_{i=1}^m x_i$, $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i$ — совокупный доход, $(p \wedge q)^j = \min\{p^j, q^j\}$, $j = 1, \dots, l$ (см. доказательство формулы (5) в предложении 1). Поэтому если, например, $y \leq x$, $\alpha > \langle q, x \rangle$, то равновесия нет.

Чтобы решить проблему существования равновесия, мы рассматриваем *гиперповерхность спроса* Ω_0 (см. предложение 3) в пространстве параметров $\Omega = \{\omega = (x_i^j, y_i^j, \alpha_i, q^j), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l$, замечаемую экономикой ω , для которых $y = \sum_{i=1}^m f_i(p, x_i)$, когда цены p варьируются в \mathbb{R}_+^l (или, что эквивалентно, в единичном симплексе). Гиперповерхность Ω_0 параметризует возможный совокупный спрос агентов, наделенных товарами в размере выделенных им квот (доходы α_i и цены q^j не участвуют в определении Ω_0). Из теоремы Эрроу–Дебре следует, что Ω_0 содержит все экономики, для которых $x = y$.

Гиперповерхность Ω_0 разбивает Ω на несколько связных областей, одна из которых, обозначаемая Ω_- , содержит подмножество $\{x \leq y\}$, в котором котируется только часть имеющихся товаров, а другая, обозначаемая Ω_+ , содержит подмножество $\{x \geq y\}$, в котором имеющихся запасов недостаточно для обеспечения квот. При этом в окрестности экономики ω , для которой $x = y$, $\alpha_i = \langle q, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$ (т.е. все товары ратионируются, причем квоты устанавливаются в соответствии с доходами), а распределение $\{x_i\}$ оптимально по Парето, Ω_0 разбивает Ω в точности на эти две области Ω_- и Ω_+ . Мы показываем, что для общей экономики $\omega \in \Omega_-$ число равновесных цен нечетно, а для общей экономики $\omega \in \Omega_+$ число равновесных цен четно (см. теорему 3). Отсюда, в частности, следует, что для всех экономик $\omega \in \Omega_-$ (а значит, и для всех ω , для которых $x \leq y$) равновесие существует. Как мы уже отмечали, из этого вытекает существование (и нечетность числа) равновесий в экономике чистого обмена (что впервые было доказано Э. Диркером) и экономике с фиксированными доходами (что, по-видимому, до сих пор не было известно).

Особый интерес представляет проблема существования равновесий для экономик $\omega \in \Omega_0$. В этом случае ответ зависит от цен q^j и доходов α_i . Казалось бы, что поскольку гиперповерхность Ω_0 имеет меру ноль, исследованием таких экономик можно было бы пренебречь. Однако случай $y = x$ (полное ратионирование) заслуживает специального рассмотрения. Возможная интерпретация этого случая — полная централизация: государство выплачивает каждому участнику i фиксированную сумму α_i (которую можно интерпретировать как базисный доход; α_i может зависеть или не зависеть от участника) и распределяет весь запас продуктов y , выделяя участнику i квоту x_i , $x = \sum_{i=1}^m x_i = y$, в пределах которой он может покупать товары по ценам q . Затем участники обмениваются товарами, купленными в пределах квот, уже по рыночным ценам в соответствии со своими функциями спроса.

Возможна и другая интерпретация случая, когда $y = x$, $\alpha = \langle q, x \rangle$. Пусть y_i — начальный запас продуктов экономического агента i . Государство обязывает его поставить экономическому агенту k определенный набор продуктов y_{ik} , $k = 1, \dots, m$ по фиксированным ценам q (при условии, что агент k согласен купить эти продукты по заданным ценам). После этого участники выходят на свободный (или, в зависимости от точки зрения, теневой) рынок, на котором торгуют как остатками своих начальных запасов, так и продуктами, приобретенными в рамках гарантированных поставок, по рыночным ценам p . Нетрудно убедиться в том, что эта интерпретация эквивалентна предыдущей с $\alpha_i = \langle q, y_i \rangle$, $x_i = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki} - y_{ik})$.

В случае когда $y = x$, равновесие существует если и только если $\alpha \leq \langle q, x \rangle$. При этом для почти всех экономик с $\alpha < \langle q, x \rangle$ число равновесий конечно (нечетно, см. теорему 2), а для почти всех экономик с $\alpha = \langle q, x \rangle$ многообразие равновесных цен диффеоморфно объединению нечетного числа лучей (вдоль которых цены на все продукты стремятся к бесконечности) и конечного числа дуг (см. теорему 1).

При исследовании нашей модели естественно считать квоты x_i^j , цены q^j , а при некоторых интерпретациях и доходы α_i управляющими параметрами, используя которые государство осуществляет свою экономическую политику. Но какие цели преследует государство, и в чем преимущество управления квотами x_i^j по сравнению с использованием финансовых инструментов α_i и q^j ? Наиболее распространенные неприятные явления в теории экономического равновесия — это множественные и неустойчивые состояния равновесия (в нашей модели все состояния равновесия в экономике ω могут быть устойчивыми, только если равновесие единственно). Поэтому естественно потребовать, чтобы, варьируя управляющие параметры, государство могло перевести экономику в состояние, для которого существует единственный равновесный вектор цен, устойчивый по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования (*tâtonnement*).

Следующий результат (см. теоремы 4 и 5) напоминает результаты статьи (Balasko, 1975), но в то время как в модели Баласко квоты x_i просто выдаются участникам, в нашей модели им предлагается выкупить квоты по фиксированным ценам q .

Пусть $\omega \in \Omega_-$ — экономика, близкая к экономике ω_0 , для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ — оптимально по Парето, и пусть $y(\omega_0) = x(\omega_0)$, $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0) \rangle$, $k = 1, \dots, m$. Тогда при достаточно общих предположениях в экономике ω существует единственное равновесие, устойчивое по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования.

Этот результат не является очевидным, поскольку в самой экономике ω_0 и в некоторых близких к ней экономиках из Ω_0 множество равновесных цен неограничено. Более того, равновесные цены в ω не ограничены: для подходящих доходов цены стремятся к бесконечности, когда $\omega \rightarrow \omega_0$ (если $(y - x) = \alpha(\alpha - \langle q, x \rangle)$, то неограниченность цен очевидна — слишком высокие доходы ведут к инфляции).

Разумеется, для того чтобы привести экономику в состояние, описываемое в теореме 4, государство должно иметь некоторое представление о предпочтениях и доходах, но точного знания не требуется.

В теореме 6 мы исследуем проблему единственности и устойчивости равновесия для экономик $\omega \in \Omega_-$ и некоторых экономик из Ω_0 в случае (разных вариантов) нормального спроса и валовой заменимости.

В то время как свойства экономик из Ω_- трудно назвать неожиданными, ситуация в Ω_+ (в частности в случае, когда квоты x превышают предложение y) необычна и представляет интерес. Пусть $\omega \in \Omega_+$ — экономика, близкая к оптимальной по Парето экономике ω_0 . В теореме 7 (см. также замечание 11) мы показываем, что если доходы участников не слишком велики, то в экономике ω существуют два равновесных вектора цен: один «маленький» и устойчивый, а второй «большой» и неустойчивый (по отношению к вальрасовскому процессу ценообразования).

Как мы уже отмечали, множество равновесных цен в общей экономике ω , для которой $x = y$ и $\langle q, x \rangle = \alpha$, является объединением нечетного числа лучей, вдоль которых цены на все товары стремятся к бесконечности, и конечного числа дуг. Если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному, то равновесный луч единственен, а если к тому же стоимости предписанных нетто-поставок по фиксированным ценам $|\langle q, \Delta y_k \rangle|$, $k = 1, \dots, m$ малы, то равновесные дуги отсутствуют (см. теорему 1).

Распределяя квоты, государство пытается перевести экономику в состояние, близкое к оптимальному по Парето, но результирующее равновесное распределение (также Парето-оптимальное) варьируется вдоль равновесного луча и может отклониться от запланированного распределения $\{x_k\}$. Однако по мере того как равновесные цены неограниченно растут, соответствующее равновесное распределение стремится к равновесию в экономике чистого обмена с начальными запасами $\{x_k\}$, которое (при наших предположениях) единственно и мало отличается от $\{x_k\}$. Ясно, что при этом некоторые участники выигрывают от возрастания цен вдоль равновесного луча, а другие проигрывают.

В теореме 8 мы показываем, что в нашей модели вальрасовский процесс ценообразования локально устойчив, если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному и либо все $|\langle q, \Delta y_i \rangle|$ малы, либо начальный вектор цен p_0 велик, и глобально стабилен, если избыточный спрос удовлетворяет условию валовой заменимости. Однако в то время как стандартный вальрасовский процесс устойчив к инфляции, поскольку, в силу закона Вальраса, $d\langle p(t), p(t) \rangle / dt = 2\langle dp(t) / dt, p(t) \rangle = 0$, в нашей ситуации можно надеяться на сходимость процесса, только если начальный вектор цен достаточно велик.

В то время как в модели чистого обмена естественно предположить, что ценообразующий орган беспристрастен, в нашей модели государство осуществляет активную распределительную политику, и правдоподобным выглядит предположение, что оно приписывает индивидуальным функциям избыточного спроса некоторые веса. Это приводит к системе дифференциальных уравнений $dp / dt = E_\mu(p) = \sum_{i=1}^m \mu_i E_i(p)$, где $\mu_i > 0$, а $E_i(p) = f_i(p, \langle p, x_i \rangle) - \langle q, \Delta y_i \rangle - x_i$ ($p \geq q$) — функция избыточного спроса участника i по завершении плановых поставок. Представляется разумным выбрать веса μ_i в зависимости от взаимных поставок, а именно вес нетто-потребителя ($\langle q, \Delta y_i \rangle > 0$) должен быть меньше, чем нетто-поставщика ($\langle q, \Delta y_i \rangle < 0$). В общей ситуации можно предположить, что веса μ_i монотонно убывают по мере возрастания стоимости поставок $\langle q, \Delta y_i \rangle$.

При указанных выше условиях для функции $E_\mu(p)$ соотношение Вальраса не выполняется и на траекториях нашего процесса ценообразования цены растут. В общем случае линейная система $dp / dt = E_\mu(p)$ не имеет устойчивых решений в окрестности равновесных цен, но если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному, а p — достаточно большой равновесный вектор цен, то $\|E_\mu(p)\|$ мало. В теореме 9 мы показываем, что если все участники имеют нормальный спрос, удовлетворяющий условию валовой заменимости, то описанный выше процесс ценообразования глобально устойчив, длина вектора $p(t)$ неограниченно возрастает, а нормализованный вектор цен сходится к решению системы уравнений $\sum_{i=1}^m \mu_i (f_i(p, \langle p, x_i \rangle) - x_i) = 0$. Если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному или все веса близки к 1, то предельный нормализованный вектор цен близок к равновесному вектору цен в модели чистого обмена с начальными запасами $\{x_i\}$, который, в свою очередь, является пределом нормализованных векторов цен в нашей модели. Отличие от модели чистого обмена в том, что в последней индивидуальные функции избыточного спроса удовлетворяют закону Вальраса, и для взвешенной функции избыточного спроса $d\|p(t)\|^2 / dt = 2\langle p(t), E_\mu(p(t)) \rangle = 0$. В нашей же модели разумный выбор весов приводит к «эндогенной инфляции», связанной с процессом ценообразования, темп которой зависит от весов и нетто-поставок по твердым ценам. Наш результат показывает, что при определенных условиях этот тип инфляции может играть положительную роль, помогая (хотя бы приблизительно) сбалансировать рынок.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В модели имеется m экономических агентов, между которыми распределяется имеющийся в наличии набор продуктов $y \in \mathbb{R}_+^l$. Поведение экономического агента i определяется функцией спроса $f_i : \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^l$, а именно при рыночных ценах $p \in \mathbb{R}_+^l$ и доходах $w_i \in \mathbb{R}_+^m$ спрос составляет $f_i(p, w_i)$. Из экономических соображений естественно считать, что f_i однородна степени ноль, т.е.

$$f_i(\lambda p, \lambda w_i) = f_i(p, w_i), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^1, \quad i = 1, \dots, m \tag{1}$$

и удовлетворяет закону Вальраса

$$\langle p, f_i(p, w_i) \rangle = w_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

т.е. каждый экономический агент тратит весь доход на приобретение необходимых продуктов. Кроме того, естественно считать, что

$$f_i(p, 0) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что функция совокупного спроса $f(p, w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, w_i)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие желательности (Balasko, 1975). Если $p_n \rightarrow \bar{p}$, $p_n \in \mathbb{R}_+^l$, $\bar{p}^j = 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$, $\liminf w_n > 0$, $w_n = \sum_{i=1}^m (w_i)_n$, то $\|f(p_n; (w_i)_n, \dots, (w_m)_n)\| \rightarrow \infty$.

Условие желательности означает, что если совокупный доход ограничен снизу положительной константой, то безудержное удешевление некоторых товаров ведет к неограниченному росту совокупного спроса. Условия такого рода неоднократно обсуждались в литературе (Balasko, 1975; Зак, 1981) и представляются довольно реалистичными для больших экономик, допускающих многоцелевое использование ресурсов.

Хотя эти требования можно было бы ослабить, мы будем предполагать, что функции спроса f_i порождены строго монотонными строго вогнутыми трижды непрерывно дифференцируемыми функциями полезности $u_i : \mathbb{R}_+^l \rightarrow \mathbb{R}^1$: $f_i(p, w_i) = \operatorname{argmax}_{\langle p, x \rangle \leq w_i} u_i(x)$. В этом случае функции f_i удовлетворяют условиям (1)–(3) и дважды непрерывно дифференцируемы (Debreu, 1972).

В нашей модели экономический агент i располагает доходом $\alpha_i \in \mathbb{R}_+^1$, и ему выделены квоты $x_i \in \mathbb{R}_+^l$ для закупки по твердым («государственным» или субсидированным) ценам $q \in \mathbb{R}_+^l$. Это означает, что — при желании и наличии денег — он может купить по цене q^j любое количество продукта j , не превосходящее x_i^j , $j = 1, \dots, l$ (мы не исключаем из рассмотрения важные случаи $x_i^j = 0$ (квоты не выделены) и $q^j = 0$ (к этой категории относятся такие товары, как жилье, медицинское обслуживание и т.д., которые — до определенного уровня — оплачиваются из социальных фондов). Подчеркнем, что *a priori* мы не устанавливаем никаких ограничений на соотношение между вектором доступных товаров y и вектором котируемых товаров $x = \sum_{i=1}^m x_i$, в то время как казалось бы естественным предположить, что $x \leq y$. Дело в том, что на практике распределение квот нередко предшествует реальному производству или импорту продуктов, и если планы не будут выполнены, то государство не сможет выполнить свои обязательства по поставке некоторых товаров (т.е. $x^j > y^j$ для некоторых j , $1 \leq j \leq l$).

Оставшиеся товары (т.е. не выкупленные по ценам q) продаются на свободном рынке по ценам $p \in \mathbb{R}_+^l$. Участники также могут перепродать по рыночным ценам p некоторые из товаров, ранее купленных ими у государства по твердым ценам q .

Экономические агенты станут выкупать свои квоты на товар j , если и только если рыночная цена этого товара выше, чем фиксированная, т.е. $p^j > q^j$. Поэтому для исследования состояний равновесия можно считать, что экономический агент i выходит на рынок с денежными средствами $w_i = \alpha_i + \langle (p - q)^+, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$ (где для $r \in \mathbb{R}^l$ мы полагаем $(r^+)^j = \max\{r^j, 0\}$, $j = 1, \dots, l$), складывающимися из начального дохода α_i и денег, вырученных от перепродажи на рынке продуктов, купленных у государства по фиксированным ценам q при условии, что они ниже рыночных цен p . Соответствующий совокупный спрос равен $f(p, w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p - q)^+, x_i \rangle)$, а цена p называется *равновесной*, если спрос равен предложению, т.е.

$$f(p, w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p - q)^+, x_i \rangle) = y. \tag{4}$$

Отметим, что здесь мы не касаемся механизмов краткосрочного кредитования, позволяющих экономическим агентам выкупать свои квоты, даже если у них не хватает денег, — важно, что в результате функционирования рынка при равновесных ценах их задолженности погашаются.

2.1. Частные случаи

Описанная модель включает в качестве частных случаев модели равновесия в экономике с фиксированными доходами и в экономике чистого обмена. В частности, модель с фиксированными доходами α_i получается, если $x_i = 0, i = 1, \dots, m$ (квоты не выделены). Однако на самом деле экономики с фиксированными доходами встречаются в нашей модели гораздо чаще.

Предложение 1.

А. Предположим, что $x = \sum_{i=1}^m x_i \leq y$, а твердые цены q^j настолько велики, что $q^j y^j > \alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i, j = 1, \dots, l$. Тогда равновесные цены в нашей модели такие же, как в модели с распределяемыми ресурсами y и фиксированными доходами $\alpha_i, i = 1, \dots, m$. В частности, если фиксированные цены достаточно высоки, то в экономике обязательно существует равновесие (см. следствие 4).

Б. Для произвольных $y > 0, \alpha_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ существует вектор цен \bar{q} такой, что при $q > \bar{q}$ множество равновесных цен p в нашей модели с товарными запасами y , доходами α_i , квотами x_i и фиксированными ценами q , удовлетворяющих условию $p < q$, совпадает с множеством равновесных цен в модели с распределяемыми ресурсами y и фиксированными доходами $\alpha_i, i = 1, \dots, m$.

Доказательство.

А. Суммируя (2) с учетом (4), получаем следующий закон Вальраса для нашей модели:

$$\alpha = \langle p \wedge q, y \rangle + \langle (p - q)^+, y - x \rangle, \quad (5)$$

где p — произвольная равновесная цена, а « \wedge » обозначает минимум. В условиях предложения $q > p$, поскольку если бы было $p^j \geq q^j$, то из (5) вытекало бы, что $\alpha \geq q^j y^j$. Поэтому условие равновесия (4) переписывается в виде

$$f(p, \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i) = y, \quad (6)$$

т.е. всякая равновесная цена в нашей модели является равновесной ценой в модели с фиксированными доходами. Обратно, если p удовлетворяет (6), то из (2) следует, что $\alpha = \langle p, y \rangle$, так что $p^j y^j < \alpha$ и $p^j < \alpha / y^j < q^j, j = 1, \dots, l$, т.е. p удовлетворяет (4) и является равновесием в нашей модели. ■

Б. Пусть $P \subset \mathbb{R}_+^l$ — множество равновесных цен в описанной в Б) модели с фиксированными доходами. Из условия желательности следует, что P компактно и существует вектор \bar{q} такой, что $p < \bar{q}$ для всякого $p \in P$. Поскольку участники станут выкупать свои квоты на товар j , если и только если $p^j > q^j > \bar{q}^j$, для всякого $p \in P$ выполнено неравенство $p < q$ (т.е. $p^j < q^j$ для всех $j, 1 \leq j \leq m$). Наше утверждение теперь немедленно вытекает из условия равновесия (4). ■

Замечание 1. Предложение 1 показывает, что экономики с фиксированными доходами встречаются в нашей модели достаточно часто (из параметризации, введенной в следующем разделе, следует, что они образуют открытое подмножество в пространстве всех экономик), и из свойств нашей модели мы можем выводить неизвестные ранее свойства модели с фиксированными доходами (см. разд. 4, следствие 4).

Замечание 2. Согласно следствию 4 для общей экономики с фиксированными доходами число равновесных цен нечетно. С другой стороны, теорема 3 показывает, что при $x > y$ число равновесий в общей экономике четно. Поэтому в условиях предложения 1 Б для общей экономики существует равновесный вектор цен p , для которого $p \not< q$.

Замечание 3. Рассуждение из доказательства предложения 1 Б доказывает и следующий более общий факт. Пусть $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ — произвольное подмножество товаров. Для произвольных $y > 0, \alpha_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ существуют цены $\bar{q}^{j_1}, \dots, \bar{q}^{j_r}$ такие, что если $q^j > \bar{q}^j$ при всех $j \in J$, то множество равновесных цен p в нашей модели с товарными запасами y , доходами α_i , квотами x_i и фиксированными ценами q , удовлетворяющими условию $p^j < q^j$ при $j \in J$, не зависит от квот на товары из J (в частности, при изучении таких равновесных цен можно считать, что товары из J не ратионируются).

Наш подход к исследованию описанной выше модели основан на том, что она включает в качестве частного случая хорошо исследованные модели чистого обмена.

Предложение 2. Предположим, что $x = y$, и пусть $\alpha_i = \langle q, x_i \rangle, i = 1, \dots, m$. Тогда равновесные цены в нашей модели имеют вид $\lambda \bar{p}$, где \bar{p} произвольная (нормированная) равновесная цена в экономике чистого обмена с начальными запасами x_i , а $\lambda \in \mathbb{R}_+^1$ таково, что $\lambda \bar{p} \geq q$.

Доказательство. Из (4) вытекает, что указанные в формулировке предложения цены являются равновесными. Обратно, если p равновесная цена в нашей модели, то из условия

предложения и закона Вальраса (5) вытекает, что $p \wedge q = q$, т.е. $p \geq q$. Но тогда из (4) и условия предложения вытекает, что p равновесная цена в модели чистого обмена. ■

Замечание 4. В отличие от экономик с фиксированными доходами экономики чистого обмена встречаются в нашей модели редко (образуют замкнутое подмножество меньшей размерности в пространстве параметров Ω , подробно рассматриваемом в следующем разделе), а множество равновесных цен в них по меньшей мере одномерно (выдерживает умножение на произвольное вещественное число $t \geq 1$).

3. СООТВЕТСТВИЕ ВАЛЬРАСА

Состояние экономики в нашей модели определяется $lm + 2l + m$ параметрами, а именно квотами x_i^j , установленными государством ценами q^j , доходами участников α_i и ресурсами y^j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$. Таким образом, экономика задается точкой ω в многообразии (с границей) $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}_+^{lm+2l+m}}$, $\omega = (x_i^j, q^j, \alpha_i, y^j)$, $x_i^j \geq 0$, $q^j \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $y^j > 0$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$. Изучение состояний равновесия сводится к исследованию многообразия (с границей)

$$W = \left\{ (\omega, p) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^l \mid \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle) - y = 0 \right\},$$

называемого *многообразием Вальраса*. Обозначим через $\pi: W \rightarrow \Omega$ проектирование $W \subset \Omega \times \mathbb{R}_+^l$ в первый сомножитель. Тогда точки слоя $\pi^{-1}(\omega)$ взаимно однозначно соответствуют равновесным ценам в экономике ω . Важную роль в исследовании нашей модели играет описание точек, в которых отображение π является собственным (т.е. прообраз компакта компакт).

Лемма 1. Пусть $\omega \in \Omega$ — экономика, для которой $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i > 0$. Тогда в некоторой окрестности U точки ω в Ω равновесные цены отделены от нуля, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что при $\omega' \in U$ для всякого равновесного вектора цен p в ω' выполнено неравенство $p^j > C$, $j = 1, \dots, l$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют последовательность экономик $\omega_n \rightarrow \omega$ и последовательность равновесных цен p_n в ω_n такие, что $p_n^j \rightarrow 0$ для некоторого $1 \leq j \leq l$. Но из условия желательности вытекает, что в этом случае $\|f(p_n, \omega_n)\| \rightarrow \infty$ вопреки тому, что $f(p_n, \omega_n) \rightarrow y$ (здесь и далее $f(p, \omega) = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle)$). ■

Замечание 5. Отметим, что в граничных точках Ω , исключенных нами из рассмотрения, равновесных цен, как правило, не существует. Так, если $\alpha = 0$, закон Вальраса (5) показывает, что при $x \leq y$ (котируется только часть имеющихся продуктов) обязательно $x = y$ и $q = 0$, и при этом наша модель сводится к модели чистого обмена с ненормированными ценами.

Лемма 2. Пусть $\omega, \omega_n \in \Omega$, $\omega_n \rightarrow \omega$, и пусть p_n — последовательность равновесных цен в ω_n такая, что, для некоторого j , $1 \leq j \leq l$, $p_n^j \rightarrow \infty$. Тогда $p^r = O(p^s)$ для всех $1 \leq r, s \leq l$, т.е. существуют константы $0 < c_1^{r,s}, c_2^{r,s} < \infty$ такие, что $c_1^{r,s} < p_n^r / p_n^s < c_2^{r,s}$, и в частности $p_n^r \rightarrow \infty$ для всех $1 \leq r \leq l$.

Доказательство. Предположим противное. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $p_n^s \rightarrow \infty$, $p_n^r / p_n^s \rightarrow 0$. Тогда из (1) следует, что

$$f(p_n, \omega_n) = \sum_{i=1}^m f_i \left(\frac{p_n}{p_n^s}, \frac{(\alpha_i)_n}{p_n^s} + \left\langle \frac{(p_n - q_n)^+}{p_n^s}, (x_i)_n \right\rangle \right),$$

причем $(\alpha_i)_n / p_n^s \rightarrow 0$, $p_n^r / p_n^s \rightarrow 0$. Из условия желательности следует, что

$$w_n = \frac{\alpha_n}{p_n^s} + \left\langle \frac{(p_n - q_n)^+}{p_n^s}, x_n \right\rangle \rightarrow 0.$$

Однако закон Вальраса (5) дает

$$w_n = \frac{\alpha_n}{p_n^s} + \left\langle \frac{(p_n - q_n)^+}{p_n^s}, x_n \right\rangle = \left\langle \frac{p_n}{p_n^s}, y_n \right\rangle \geq y_n^s.$$

Поскольку $y_n^s \rightarrow y^s > 0$, получаем противоречие. ■

Следствие 1. Пусть $W^M = W \cap \left\{ \sum_{j=1}^l \gamma_j p^j = M \right\}$, где $0 \leq \gamma_j$, $\gamma = \sum_{j=1}^l \gamma_j > 0$, $M > 0$, т.е. цены нормированы произвольным линейным (хотя это несущественно) способом. Тогда $\pi^M = \pi|_{W^M}: W^M \rightarrow \Omega$ — собственное отображение.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что в прообразе любого компакта из Ω равновесные цены ограничены. Остается проверить, что они отделены от нуля. В случае когда $\lim \alpha_n > 0$, это сделано в лемме 1. Если же $\alpha_n \rightarrow 0$, $p_n^j \rightarrow 0$, то из условия желательности вытекает, что $w_n = \langle (p_n - q_n)^+, x_n \rangle \rightarrow 0$. Закон Вальраса (5) показывает, что $\langle p_n, y_n \rangle = \langle (p_n - q_n)^+, x_n \rangle + \alpha_n \rightarrow 0$. Но $y_n \rightarrow y > 0$, и следовательно $p_n \rightarrow 0$ вопреки условию нормировки $\sum_{j=1}^l \gamma_j p_n^j = M$. ■

Предложение 3. Существует гиперповерхность $\Omega_0 \subset \Omega$ такая, что для экономики $\omega \in \pi(W) \subset \Omega$, для которой $\alpha(\omega) \neq 0$, отображение π является собственным в окрестности ω , если и только если $\omega \notin \Omega_0$.

Доказательство. Предположим, что π не является собственным в окрестности ω . Согласно леммам 1 и 2 можно считать, что существуют последовательность экономик $\omega_n \rightarrow \omega$ и последовательность равновесных цен p_n в ω_n такие, что $p_n^l \rightarrow \infty$, $p_n / p_n^l \rightarrow p \in \mathbb{R}_+^l$. Поскольку, в очевидных обозначениях, $\sum_{i=1}^m f_i(p_n, (\alpha_i)_n + \langle (p_n - q_n)^+, (x_i)_n \rangle) = y_n$, используя (1) и переходя к пределу, получаем

$$\sum_{i=1}^m f_i(p, \langle p, x_i \rangle) = y. \quad (7)$$

Из (3) и (7) следует, что $\omega \in \Omega_0$, где

$$\Omega_0 = \overline{\mathbb{R}_+^m} \times \overline{\mathbb{R}_+^l} \times \Omega'_0, \quad (8)$$

причем $\overline{\mathbb{R}_+^m}$ параметризует доходы α_i , $i=1, \dots, m$, $\overline{\mathbb{R}_+^l}$ параметризует цены q^j , $j=1, \dots, l$, $\Omega'_0 = \{(x_1, \dots, x_m, y) \mid 0 < y = f(p, \langle p, x_1 \rangle, \dots, \langle p, x_m \rangle) \exists p \in \mathbb{R}_+^l\}$. Ясно, что Ω'_0 открыто и всюду плотно в образе собственного отображения $\varphi: \overline{\mathbb{R}_+^m} \times \overline{\mathbb{R}_+^l} \rightarrow \Omega'_0$, $\varphi(x_1, \dots, x_m, p) = (x_1, \dots, x_m, f(p, \langle p, x_1 \rangle, \dots, \langle p, x_m \rangle))$, где $p \in \mathbb{R}_+^l \subset \mathbb{R}^l$, $p = (p^1, \dots, p^{l-1}, 1)$ — нормированный вектор цен. Из подсчета дифференциала отображения φ (см., например, (Зак, 1981, предложение 1.8)) немедленно вытекает, что Ω'_0 (а, следовательно, и Ω_0) — гиперповерхность. Осталось проверить, что если $\omega \in \pi(W) \cap \Omega_0$, то π не является собственным в окрестности ω . Действительно, пусть $f(p, \langle p, x_1 \rangle, \dots, \langle p, x_m \rangle) = y$. Положим $p_n = np$, $q_n = q$, $y_n = y$, $(\alpha_i)_n = \alpha_i$,

$$(x_i)_n = \begin{cases} (1 + \varepsilon_{in})x_i, & x_i \neq 0; \\ 0, & x_i = 0; \end{cases} \quad i=1, \dots, m, \quad \text{где } \varepsilon_{in} = \frac{\langle q, x_i \rangle - \alpha_i}{n \langle p, x_i \rangle - \langle q, x_i \rangle}.$$

Тогда $\omega_n = ((x_1)_n, \dots, (x_m)_n, q_n^1, \dots, q_n^l, (\alpha_1)_n, \dots, (\alpha_m)_n, y_n^1, \dots, y_n^l) \rightarrow \omega$, $p_n \rightarrow \infty$, и при достаточно больших n цены p_n равновесны в ω_n , что и доказывает несобственность π . ■

Следствие 2. Ограничение отображения π на $\Omega_< = \{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) \neq 0, x(\omega) \leq y(\omega)\}$ и $\Omega_> = \{\omega \in \Omega \mid \alpha(\omega) \neq 0, x(\omega) \geq y(\omega)\}$ собственны.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\Omega_< \cap \Omega_0 = \Omega_> \cap \Omega_0 = \emptyset$. Но при $x \leq y$ (соответственно $x \geq y$) $f(p, \langle p, x_1 \rangle, \dots, \langle p, x_m \rangle) \neq y$ ни для какого $p > 0$, поскольку, очевидно, $\langle p, x \rangle < \langle p, y \rangle$ (соответственно $\langle p, x \rangle > \langle p, y \rangle$). ■

Замечание 6. Из условия желательности вытекает, что гиперповерхность Ω_0 разбивает Ω на несколько связных областей, среди которых $\Omega_- \supset \Omega_<$ и $\Omega_+ \supset \Omega_>$. Заметим, что если $\omega \in \Omega_0$, $x(\omega) = y(\omega)$ и распределение $\{x_i(\omega)\}$ оптимально по Парето, то для малой окрестности $U \ni \omega$ выполнено соотношение $U = U_- \cup U_0 \cup U_+$, где $U_0 = U \cap \Omega_0$, $U_- = U \cap \Omega_-$, $U_+ = U \cap \Omega_+$. Действительно, в этом случае отображение φ , построенное при доказательстве предложения 3, является диффеоморфизмом в окрестности ω (Зак, 1981, предложения 1.8, 1.9), и из теоремы Жордана–Брауэра вытекает, что гиперповерхность $\Omega_0 \cap U$ разбивает U на две компоненты, общей границей которых она является.

С экономической точки зрения особый интерес представляет случай, когда $x = y$, т.е. нормируется распределение всех имеющихся продуктов. В этом случае нам потребуется более тонкий анализ собственности π .

Следствие 3. Предположим, что $\alpha(\omega) > 0$, $x(\omega) = y(\omega)$ (так что, в частности, $\omega \in \Omega_0$). Тогда при $\alpha < \langle q, x \rangle$ (соответственно $\alpha > \langle q, x \rangle$) ограничение π на $\Omega_< = \overline{\Omega_<} = \{\omega' \in \Omega \mid x(\omega') \leq y(\omega')\}$ (соответственно $\Omega_> = \overline{\Omega_>} = \{\omega' \in \Omega \mid x(\omega') \geq y(\omega')\}$) — собственны в окрестности ω . При этом $\pi(W) \cap \Omega_< \subset \{\omega' \in \Omega_< \mid \alpha(\omega') \leq \langle q, x \rangle\}$. В частности, если $\omega \in \Omega_< = \Omega_< \cap \Omega_> = \{\omega' \in \Omega \mid x(\omega') = y(\omega')\}$, то $\pi(W) \cap \Omega_< \subset \{\omega' \in \Omega_< \mid \alpha < \langle q, x \rangle\}$ и ограничение π на $\{\omega' \in \Omega_< \mid \alpha < \langle q, x \rangle\}$ собственны.

Доказательство. Предположим, что $\pi|_{\Omega_<} (\pi|_{\Omega_>})$ не является собственным в ω . Тогда из лемм 1 и 2 вытекает, что существуют последовательность экономик $\omega_n \in \Omega_<$ ($\omega_n \in \Omega_>$) и последовательность равновесных векторов цен p_n в ω_n такие, что $\omega_n \rightarrow \omega$, $\sum_{i=1}^m f_i(p_n, (\alpha_i)_n + \langle (p_n - q_n)^+, (x_i)_n \rangle) = y_n$

и $p_n^j \rightarrow \infty, j=1, \dots, l$. Поэтому для достаточно больших n закон Вальраса (5) приобретает вид $\alpha_n - \langle q_n, x_n \rangle = \langle p_n, y_n - x_n \rangle$, откуда и вытекает первое утверждение следствия. Из (5) также следует, что если $\omega' \in \pi(W) \cap \Omega_{\geq}$, то

$$\alpha \leq \langle p \wedge q, y \rangle \leq \langle q, y \rangle \leq \langle q, x \rangle. \quad \blacksquare \quad (9)$$

Замечание 7. Из наших последующих результатов (см. теоремы 1 и 2 в разд. 4) вытекает, что достаточные условия в формулировке следствия 3 являются также необходимыми и что $\Omega_{\leq} \subset \pi(W)$, $\pi(W) \cap \Omega_{\leq} = \{\omega' \in \Omega_{\leq} \mid \alpha \leq \langle q, x \rangle\}$.

Одной из наших основных целей является исследование поведения равновесных цен при вариации экономики ω . Введем координаты $x_i^j, q^j, \alpha_i, y^j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l$ в Ω и координаты $x_i^j, q^j, \alpha_i, p^j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l$ в W . В этих координатах отображение π задается формулой

$$y = \sum_{i=1}^m f_i(p, \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle).$$

Матрица Якоби π имеет вид

$$d\pi = \begin{pmatrix} \text{id}^{lm+l+m} & * \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где id — матрица тождественного преобразования; $*$ — матрица порядка $(lm+l+m) \times l$; J — $l \times l$ -матрица, для которой

$$J_{jr} = \sum_{k=1}^r \left[\frac{\partial f_k^r(p, \alpha_k + \langle (p-q)^+, x_k \rangle)}{\partial p^j} + \frac{\partial f_k^r(p, \alpha_k + \langle (p-q)^+, x_k \rangle)}{\partial w_k} x_k^j \delta_j \right], \quad (11)$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & p^j > q^j, \\ 0, & p^j \leq q^j. \end{cases}$$

В частности, если $x = y, \alpha_k = \langle q, x_k \rangle, k=1, \dots, m$ и $p > q$ (из (5) вытекает, что при этих условиях всегда $p \geq q$), то $J = \partial \zeta(p, x_1, \dots, x_m) / \partial p$, где $\zeta = f(p, \langle p, x_1 \rangle, \dots, \langle p, x_m \rangle) - x$, и если распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, то матрица J отрицательно полуопределена, $\text{rk } J = l-1$ и $\text{Ker } J = \mathbb{R}p$ (где, как обычно, $\text{rk } J$ и $\text{Ker } J$ обозначают соответственно ранг и ядро матрицы J , а равенство $(\partial \zeta / \partial p)p = 0$ не что иное, как формула Эйлера), см. (Зак, 1981, предложение 1.8).

Помимо исследования свойств отображения π , нам потребуется изучить свойства его ограничения π_{\leq} на подмножестве $W_{\leq} = \pi^{-1}(\Omega_{\leq})$. Пусть $1 \leq i \leq m$. В качестве координат в Ω_{\leq} можно взять $x_k^j, \alpha_k, q^j, x_i^j, \alpha_i$, а в качестве координат в $W_{\leq} - x_k^j, \alpha_k, q^j, w_i = \alpha_i + \langle (p-q)^+, x_i \rangle, p^j, 1 \leq k \leq m, k \neq i, 1 \leq j \leq l$. В этих координатах отображение π_{\leq} является произведением проекции на отображение $W_{\leq} \rightarrow \mathbb{R}_+^{l+1}$, задаваемое формулами

$$x_i = \sum_{k \neq i} f_k(p, \alpha_k + \langle (p-q)^+, x_k \rangle) + f_i(p, w_i) - \sum_{k \neq i} x_k, \quad \alpha_i = w_i - \langle (p-q)^+, x_i \rangle \quad (12)$$

(где во вторую формулу x_i подставляется из первой). Дифференцируя (12), получаем матрицу Якоби π_{\leq} , которая элементарными преобразованиями приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \text{id}^{lm+m} & * \\ 0 & J \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Таким образом, матрицы дифференциалов $d\pi_{\leq}$ и $d\pi$ устроены по существу одинаково, и их свойства определяются свойствами матрицы J (см. (11)).

4. РАВНОВЕСНЫЕ ЦЕНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Начнем с исследования равновесий в случае когда котируются все имеющиеся продукты, т.е. с изучения отображения $\pi_{\leq} : W_{\leq} \rightarrow \Omega_{\leq}$. Как мы уже отмечали в следствии 3, из закона Вальраса следует, что $\pi_{\leq}(W_{\leq}) \subset \{\omega \in \Omega_{\leq} \mid \alpha \leq \langle q, x \rangle\}$, причем если $\Omega_{\leq} = \{\omega \in \Omega_{\leq} \mid \alpha = \langle q, x \rangle\}$, $\Omega_{\leq}^< = \{\omega \in \Omega_{\leq} \mid 0 < \alpha < \langle q, x \rangle\}$, то

$$W_{\leq}^= = \pi_{\leq}^{-1}(\Omega_{\leq}^=) = W_{\leq} \cap \{p \geq q\} \quad (14)$$

и $\pi_{\leq}^< = \pi_{|W_{\leq}^<} : W_{\leq}^< = \pi_{\leq}^{-1}(\Omega_{\leq}^<) = (W_{\leq} \setminus W_{\leq}^=) \rightarrow \Omega_{\leq}^<$ — собственное отображение.

Теорема 1. $\pi(W_{\leq}^=) = \Omega_{\leq}^=$, т.е. для всякой экономики $\omega \in \Omega_{\leq}^=$ существует равновесная цена. При этом для почти всех экономик $\omega \in \Omega_{\leq}^=$ множество состояний равновесия (или равновесных цен) $\pi_{\leq}^{-1}(\omega)$

диффеоморфно объединению нечетного числа лучей (замкнутых при $\alpha > 0$ и открытых при $\alpha = q = 0$), вдоль которых все компоненты равновесных цен p стремятся к бесконечности, и конечного числа дуг окружностей. Если вдобавок экономика ω близка к экономике ω_0 , для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k = \langle q, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$, то $\pi^{-1}(\omega)$ — диффеоморфно лучу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha = 0$, то $q = 0$ и модель сводится к модели чистого обмена, так что $\pi_{\Omega}^{-1}(\omega) = \cup_r \mathbb{R}_+^1 p_r$, где $\{p_r\}$ — (нормированные) равновесные цены в модели чистого обмена. Предположим поэтому, что $\alpha > 0$. Обозначим через ∂W_{Ω}^{-} границу W_{Ω}^{-} в W_{Ω} , так что

$$\partial W_{\Omega}^{-} = \cup_{j=1}^l \{(\omega, p) \in W_{\Omega}^{-} \mid p \geq q, p^j = q^j\}. \quad (15)$$

Поскольку $\alpha > 0$, из лемм 1 и 2 следует, что $\pi_{|\partial W_{\Omega}^{-}} : \partial W_{\Omega}^{-} \rightarrow \Omega_{\Omega}^{-} \setminus \{\alpha = 0\}$ — собственное отображение (сравни со следствием 1). Из (14) вытекает, что $\dim \partial W_{\Omega}^{-} = \dim W_{\Omega}^{-} - 1 = \dim \Omega_{\Omega}^{-} - 1 = \dim \Omega_{\Omega}^{-}$ и ∂W_{Ω}^{-} является топологическим многообразием, причем гладкая структура W_{Ω}^{-} индуцирует на ∂W_{Ω}^{-} гладкую структуру вне подмножества

$$\partial_b W_{\Omega}^{-} = \bigcup_{\substack{j,r=1 \\ j \neq r}}^l \{(\omega, p) \in \partial W_{\Omega}^{-} \mid p^j = q^j, p^r = q^r\}.$$

Пусть $\omega \in \Omega_{\Omega}^{-} \setminus \pi(\partial_b W_{\Omega}^{-})$ — экономика, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето. Из теории экономик чистого обмена (см., например, (Balasko, 1975)) известно, что $\pi^{-1}(\omega) = (\omega, \mathbb{R}_+^1 p)$, где p — нормированная равновесная цена. Следовательно, $(\pi_{|\partial W_{\Omega}^{-}})^{-1}(\omega)$ — одна точка, и из подсчета якобиана $d\pi_{\Omega}^{-}$ в конце разд. 3 вытекает, что в окрестности ω отображение $\pi_{|\partial W_{\Omega}^{-}}$ является диффеоморфизмом. Из стандартных фактов о степени собственных отображений (см., например, (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, № 5)) вытекает, что $\deg \pi_{|\partial W_{\Omega}^{-}} = \pm 1$, а, следовательно, $\pi_{\Omega}^{-}(\partial W_{\Omega}^{-}) = \Omega_{\Omega}^{-} \setminus \{\alpha = 0\}$ и отображение $\pi_{W_{\Omega}^{-}} : W_{\Omega}^{-} \rightarrow \Omega_{\Omega}^{-}$ сюръективно. Из леммы Сарда (см., например, (Хирш, 1979, гл. 3, § 1)) следует, что, для почти всех экономик $\omega \in \Omega_{\Omega}^{-}$, $\pi^{-1}(\omega)$ — одномерное многообразие, край которого содержится в $\partial_b W_{\Omega}^{-}$. Поскольку число точек края нашего одномерного многообразия нечетно, соответствующее утверждение теоремы вытекает из классификации одномерных многообразий (Милнор, Уоллес, 1972, Приложение). Наконец, если распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, $\alpha_k = \langle q, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$, а p_0 — минимальная равновесная цена в ω_0 , для которой $p_0 \geq q$, то, рассуждая как и выше и используя следствие 1, мы видим, что ограничение π на подмногообразии W_{Ω}^{-} , задаваемое уравнением $p^1 = \lambda p_0^1$, где $\lambda > 1$ — некоторый скаляр, является диффеоморфизмом в окрестности ω_0 . Следовательно, для $\omega \in \Omega_{\Omega}^{-}$, близких к ω_0 , $\pi^{-1}(\omega)$ — луч. ■

Перейдем к исследованию собственного отображения $\pi_{\Omega}^{-} = \pi_{|W_{\Omega}^{-}} : W_{\Omega}^{-} \rightarrow \Omega_{\Omega}^{-}$. Ясно, что в W_{Ω}^{-} имеем $\partial W_{\Omega}^{-} = \partial W_{\Omega}^{-}$ (см. (15)).

Теорема 2. *Отображение π_{Ω}^{-} сюръективно, т.е. для всякой экономики $\omega \in \Omega_{\Omega}^{-}$ существует равновесная цена. Более того, $\deg \pi_{\Omega}^{-} = \pm 1$ и почти для всех экономик $\omega \in \Omega_{\Omega}^{-}$ существует нечетное число состояний равновесия (и равновесных цен). Если экономика $\omega \in \Omega_{\Omega}^{-}$ близка к экономике $\omega_0 \in \Omega_{\Omega}^{-}$, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k = \langle q, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$, то в ω существует единственная равновесная цена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что W_{Ω}^{-} и Ω_{Ω}^{-} — многообразия с границей размерности $lm + l + m$, причем $\partial \Omega_{\Omega}^{-} = \Omega_{\Omega}^{-} \cup \{\alpha = 0\}$ и в W_{Ω}^{-} выполнено равенство $\partial W_{\Omega}^{-} = \partial W_{\Omega}^{-}$ (см. (15)). Пусть $\omega_0 \in \Omega_{\Omega}^{-} \setminus \pi(\partial_b W_{\Omega}^{-})$ — экономика, для которой распределение $\{x_k\}$ оптимально по Парето и $\alpha_k = \langle q, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$. Из теоремы 1 вытекает, что в (единственном) прообразе (ω_0, p_0) точки ω_0 в ∂W_{Ω}^{-} отображение $d_{(\omega_0, p_0)}(\pi_{|\partial W_{\Omega}^{-}})$ является изоморфизмом. Дифференциал $d\pi_{\Omega}^{-}$ непрерывен в окрестности (ω_0, p_0) в W_{Ω}^{-} , и мы можем по непрерывности доопределить $d\pi_{\Omega}^{-}$ в (ω_0, p_0) . В частности, из (12) следует, что

$$d\pi_{\Omega}^{-} \left(\frac{\partial}{\partial q^t} \right) = \frac{\partial}{\partial q^t} - \left\langle p_0 - q_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t} \right\rangle \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^l \frac{\partial x_i^j}{\partial q^t} \frac{\partial}{\partial x_i^j}, \quad (16)$$

где t — (единственный) товар, для которого $p_0^t = q_0^t$. Обозначим через v (внешнюю) нормаль в точке ω_0 к гиперповерхности Ω_{Ω}^{-} , задающейся в Ω_{Ω}^{-} уравнением $\langle q, x \rangle - \alpha = 0$. Тогда из (12) и (16) получаем

$$\left\langle v, d\pi_{\Omega}^{-} \left(\frac{\partial}{\partial q^t} \right) \right\rangle = x_0^t + \left\langle p_0 - q_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t} \right\rangle + \left\langle q_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t} \right\rangle = x_0^t + \left\langle p_0, \frac{\partial x_i}{\partial q^t} \right\rangle = x_0^t > 0. \quad (17)$$

Следовательно, в окрестности ω_0 в Ω_{Ω}^{-} отображение π_{Ω}^{-} является диффеоморфизмом. Из теоремы 1 и свойств степени (см., например, (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, № 5)) следует, что $\deg \pi_{\Omega}^{-} = \pm 1$.

Отсюда уже вытекают сюръективность π_{\leq} и нечетность числа состояний равновесия. Заметим, что это же рассуждение доказывает единственность равновесной цены в окрестности ω_0 , если $\omega_0 \notin \pi(\partial_b W_{\leq}^=)$. Пусть теперь $\omega_0 \in \pi(\partial_b W_{\leq}^=)$, так что $p_0^j = q_0^j$ при $j \in J$, $\text{card } J > 1$, $p_0^j > q_0^j$ при $j \notin J$ ($\text{card } J$ обозначает число элементов множества J). Тогда окрестность точки (ω_0, p_0) в $\bar{W}_{\leq}^<$ разбивается на $2^{\text{card } J} - 1$ полиэдральных подмножеств вида $p^j \geq q^j, j \in J_+ \subsetneq J, p^j \leq q^j, j \in J_- \subset J, J_+ \cup J_- = J$, причем отображение $\pi_{\leq}^<$ продолжается до гладкого собственного отображения каждого из этих замкнутых подмножеств в $\bar{\Omega}_{\leq}^<$ (последнее из подмножеств, для которого $J_+ = J$, т.е. $p \geq q$ целиком отображается в $\Omega_{\leq}^<$). Ясно, что равенство (17) имеет место в точности для $t \in J_-$, а для $t \in J_+$ имеем $\langle v, d\pi_{\leq}^<(\partial / \partial q^t) \rangle = 0$. Более того, из (16) и вычисления якобиана в конце разд. 3 вытекает, что векторные поля $d\pi_{\leq}^<(\partial / \partial q^t + \partial / \partial p^t)$ гладки в окрестности ω_0 при всех $t \in J$, причем $\left\langle v, d\pi_{\leq}^<\left(\frac{\partial}{\partial q^t} + \frac{\partial}{\partial p^t}\right) \right\rangle = 0$. При этом

$$\left\langle v, d\pi_{\leq}^<\left(\frac{\partial}{\partial q^t} - \frac{\partial}{\partial p^t}\right) \right\rangle = \begin{cases} 0, & t \in J_+, \\ 2x_0^t > 0, & t \in J_-. \end{cases} \quad (18)$$

В частности, из (18) следует, что при $t \in J_-$ вектор $d\pi_{\leq}^<(\partial / \partial q^t)$ не лежит в $d\pi_{\leq}^<(T_{\{p^t=q^t\}})$ (здесь T обозначает касательное пространство). Проведя индукцию по $\text{card } J_-$ (случай $\text{card } J_- = 1$ фактически совпадает со случаем $\omega_0 \notin \pi(\partial_b W_{\leq}^=)$), мы видим, что ограничение π на каждое из построенных выше замкнутых полиэдральных подмножеств в $\bar{W}_{\leq}^<$ является диффеоморфизмом в окрестности ω_0 . Кроме того, из (18), (16) и аналогичной формулы для $d\pi_{\leq}^<(\partial / \partial p^t)$ следует, что ограничения $\pi_{\leq}^<$ на соседние полиэдральные подмножества (т.е. подмножества I и II такие, что $J_-(\text{II}) = J_-(\text{I}) \cup \{t\}$ и $J_+(\text{II}) = J_+(\text{I}) \setminus \{t\}$ для некоторого $t \in J_+(\text{I})$) имеют одинаковые степени. Следовательно, ограничение $\pi_{\leq}^<$ на каждое из наших подмножеств имеет одну и ту же степень d и $\text{deg } \pi_{\leq}^< = k(\omega)d$, где $k(\omega)$ — число прообразов экономики ω , близкой к ω_0 . Поскольку уже доказано, что $\text{deg } \pi_{\leq}^< = \pm 1$, отсюда следует, что $k(\omega) = 1, d = \pm 1$ и $\pi_{\leq}^<$ взаимно однозначен в окрестности ω_0 в $\Omega_{\leq}^<$. ■

Теорема 3. *Собственное отображение $\pi_- : W_- \rightarrow \Omega_-$ (где $W_- = \pi^{-1}(\Omega_-)$), — сюръективно, т.е. для всякой экономики $\omega \in \Omega_-$ существует равновесная цена. Более того, $\text{deg } \pi_- = \pm 1$ и для почти всех экономик $\omega \in \Omega_-$ существует нечетное число равновесий. С другой стороны, собственное отображение $\pi_+ : W_+ \rightarrow \Omega_+$ ($W_+ = \pi^{-1}(\Omega_+)$) не является сюръективным, так что $\text{deg } \pi_+ = 0$ и для почти всех экономик $\omega \in \Omega_+$ существует четное число равновесий. В частности, утверждения теоремы справедливы и для собственных отображений $\pi_{<} : W_{<} \rightarrow \Omega_{<} (W_{<} = \pi^{-1}(\Omega_{<}))$ и $\pi_{>} : W_{>} \rightarrow \Omega_{>} (W_{>} = \pi^{-1}(\Omega_{>}))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\omega_0 \in \Omega_{\leq}^< \subset \Omega_{\leq} \subset \Omega_0$ — экономика, для которой отображение $\pi_{\leq}^<$ является диффеоморфизмом и в окрестности ω_0 в $\Omega_{\leq}^<$ имеем $\pi^{-1}(\omega_0) = (\omega_0, p_0)$ (см. теорему 2). Из вычисления якобианов в конце разд. 3 вытекает, что обратимость $d\pi$ эквивалентна обратимости $d\pi_{\leq}^<$ (и обратимости матрицы J , см. (10) и (13)). Следовательно, π также является диффеоморфизмом в окрестности (ω_0, p_0) в W . Из следствия 3 вытекает, что ограничение π на подмножество $\{x \leq y\}$ существенно. Рассмотрим в Ω подмногообразие Ω_J , задаваемое равенствами $x^j = y^j$ при $j \in J \subset \{1, \dots, l\}$. Ясно, что $\dim \Omega_J = lm + 2l + m - \text{card } J$, а те из формул (12), для которых $j \in J$, показывают, что $W_J = \pi^{-1}(\Omega_J)$ подмногообразии W той же размерности $lm + 2l + m - \text{card } J$ (в частности, при $J = \{1, \dots, l\}$ имеем $\Omega_J = \Omega_{\leq}, W_J = W_{\leq}$; эти многообразия являются наименьшими из всех Ω_J, W_J). Воспользовавшись индукцией по $l - \text{card } J$ и свойствами степени (Рохлин, Фукс, 1977, гл. 4, § 6, № 5), мы видим, что в окрестности ω_0 в Ω_{\leq} ограничение π на W_J является диффеоморфизмом. В частности, при $J \neq \emptyset$ получаем $\text{deg } \pi_{W_{<}} = \pm 1$. Поскольку $\Omega_{<} \text{ и } W_{<} — открытые подмножества связанных многообразий } \Omega_{\leq} \text{ и } W_{\leq}$ соответственно, мы заключаем, что $\text{deg } \pi_{W_{\leq}} = \text{deg } \pi_{<} = \pm 1$, отображение π_{\leq} сюръективно, и для общей экономики $\omega \in \Omega_{\leq}$ число равновесных цен нечетно.

Рассмотрим теперь собственное отображение $\pi_+ : W_+ \rightarrow \Omega_+$. Пусть $\omega \in \Omega_{>} \subset \Omega_+$ — экономика, для которой

$$\alpha(\omega) > \langle q(\omega), y(\omega) \rangle. \quad (19)$$

Закон Вальраса (5) показывает, что

$$\alpha = \langle p \wedge q, y \rangle - \langle (p - q)^+, x - y \rangle \leq \langle q, y \rangle \quad (20)$$

для всякой равновесной цены p в ω . Противоречие между (19) и (20) означает, что в экономике ω не существует равновесных цен. Следовательно, $\text{deg } \pi_{>} = \text{deg } \pi_+ = 0$, и для почти всех экономик существует четное число равновесных цен. ■

Следствие 4. При $\alpha > 0$ в экономике с фиксированными доходами ($x = 0$) существует равновесная цена. При этом для почти всех экономик с фиксированными доходами число равновесных цен нечетно.

Доказательство. Следствие немедленно вытекает из теоремы 3 и предложения 1. ■

Замечание 8. Существование равновесия в экономиках с фиксированными доходами давно и хорошо известно (см., например, более общий результат (Полтерович, 1990, теорема 2, гл. 2)). Однако нечетность числа равновесных цен в общей экономике с фиксированными доходами до сих пор не была известна.

Замечание 9. Пусть $\omega \in \Omega_{\leq}$ (т.е. $x(\omega) \leq y(\omega)$, $\alpha > 0$; ср. следствие 3), и пусть p — равновесный вектор цен в ω , для которого $p \geq q$. Тогда $\alpha \geq \langle q, y \rangle \geq \langle q, x \rangle$, причем если $\alpha = \langle q, y \rangle$, то $p^j = q^j$ при $y^j > x^j$. В частности, если $\alpha = \langle q, y \rangle$, $x < y$, то $p = q$, а если $\alpha = \langle q, x \rangle$, то $x = y$.

Доказательство. Согласно закону Вальраса (5) $\alpha = \langle p \wedge q, y \rangle + \langle (p - q)^+, y - x \rangle = \langle q, y \rangle + \langle p - q, y - x \rangle$. Из условия вытекает, что $\langle p - q, y - x \rangle \geq 0$, причем равенство имеет место, если и только если $p^j = q^j$ при $y^j > x^j$. Если $\alpha = \langle q, x \rangle$, то $\langle q, x \rangle = \langle q, y \rangle$, т.е. $q^j = 0$ при $y^j > x^j$. Поскольку для таких j выполнено равенство $p^j = q^j$, отсюда следует, что $y = x$. ■

Следствие 5. Предположим, что экономика $\omega \in \Omega_{\leq}$ близка к экономике $\omega_0 \in \Omega_{\leq}^-$, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0) \rangle$, $k = 1, \dots, m$, причем $\alpha < \langle q, y \rangle$. Тогда в ω существует единственный равновесный вектор цен p , причем $p \not\geq q$ и цены p^j ограничены, $j = 1, \dots, l$.

Доказательство. Существование вытекает из теоремы 3. При $x = y$ единственность была доказана в теореме 2. Следствие 5 вытекает из доказательства этой теоремы, следствия 3 и замечания 9. ■

Замечание 10. Более общо доказательство следствия 4.7 показывает, что для каждой экономики $\omega \in \Omega$ из достаточно малой окрестности экономики $\omega_0 \in \Omega_{\leq}^-$, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0) \rangle$, $k = 1, \dots, m$, существует не более одного равновесного вектора цен p такого, что $p \not\geq q$. При этом знак якобиана $\det d_{(\omega, p)} \pi$ отображения π в точке p (совпадающий со знаком $\det J$, см. (13)) такой же, как знак $\deg \pi_{\pm}$ (напомним, что, по теореме 3, $\deg \pi_{\pm} = \pm 1$).

Теорема 4. $\deg \pi_{\pm} = (-1)^l$. Более того, пусть $\omega \in \Omega_{\leq}$ — экономика, близкая к экономике $\omega_0 \in \Omega_{\leq}^-$, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, а $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0) \rangle$, $k = 1, \dots, m$. Тогда при $\alpha - \langle q, x \rangle \leq 0$ в ω существует единственный равновесный вектор цен p , причем $p \not\geq q$. Если выполнено одно из условий:

- а) $x \leq y$;
- б) $\alpha_k \geq \langle q, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$,

то в ω существует единственный равновесный вектор цен p .

Доказательство. Предположим, что $p \geq q$ — равновесный вектор цен в ω , и пусть $\bar{\omega} \in \Omega_{\leq}^-$ — экономика, для которой $q(\bar{\omega}) = q$, $x_k(\bar{\omega}) = y_k = f_k(p, \alpha_k + \langle p - q, x_k \rangle)$, $\alpha_k(\bar{\omega}) = \langle q, y_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$. Тогда $\bar{\omega}$ близка к ω_0 , p — (единственный с точностью до множителя) равновесный вектор цен в $\bar{\omega}$, $\langle p, y_k \rangle = \alpha_k + \langle p - q, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, m$ и матрица

$$\bar{J}_{jr}^* = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_k^j}{\partial p^r} + \frac{\partial f_k^j}{\partial w_k} y_k^r \right)$$

(сравни с (11)) симметрична и полуотрицательно определена в точке $(p, \langle p, y_1 \rangle, \dots, \langle p, y_m \rangle)$, причем $\text{Ker } \bar{J}^* = \{p\}$ (тождество Эйлера). Таким образом, 0 — собственное значение матрицы \bar{J}^* кратности один. Пусть

$$J_{jr}^* = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f_k^j}{\partial p^r} + \frac{\partial f_k^j}{\partial w_k} x_k^r \right)$$

(производные берутся в точке $(p, \alpha_1 + \langle p - q, x_1 \rangle = \langle p, y_1 \rangle, \dots, \alpha_m + \langle p - q, x_m \rangle = \langle p, y_m \rangle)$, сравни с (10) и (11)). Тогда J^* получается малой деформацией из \bar{J}^* , а $\det_{(\omega, p)} d\pi$ равен детерминанту J^* . Знак $\det J^*$ определяется знаком вещественного собственного значения λ матрицы J^* , деформирующегося в 0 и, следовательно, близкого к 0, причем кратность λ равна единице. Пусть e — собственный вектор J^* , соответствующий собственному значению λ ; мы можем считать, что e близок к p . Тогда

$$\langle J^* e, p \rangle = \langle e, Jp \rangle = \langle e \bar{J}, p \rangle - \langle e, \Delta p \rangle, \quad (21)$$

где $\Delta_{jr} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k^r}{\partial w_k} (y_k^j - x_k^j)$, и следовательно

$$Jp = -\Delta p = -\sum_{k=1}^m \left\langle \frac{\partial f_k}{\partial w_k}, p \right\rangle (y_k - x_k) = -(y - x) \quad (22)$$

(последнее равенство вытекает из условия агрегации Энгеля). Поскольку \bar{J} симметричная матрица, $\bar{J}p = 0$ (это условие агрегации Курно). Из (21) и (22) следует, что

$$\langle J^* e, p \rangle = -\langle e, \Delta p \rangle = -\langle e, y - x \rangle. \quad (23)$$

Поскольку e близко к p и, следовательно, $e > 0$, при выполнении условия а) из (23) вытекает, что $\lambda = \langle J^* e, p \rangle / \langle e, p \rangle < 0$. Далее, если e' — собственный вектор J , близкий к p и соответствующий собственному значению λ (это общее собственное значение J и J^*), то

$$\begin{aligned} \lambda \langle e', p \rangle &= \langle J e', p \rangle = \langle e', J^* p \rangle = \langle e', \bar{J}^* p - \Delta^* p \rangle = -\langle e', \Delta^* p \rangle = \\ &= -\sum_{k=1}^m \left\langle e', \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \right\rangle \langle p, y_k - x_k \rangle = -\sum_{k=1}^m \left\langle e', \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \right\rangle (\alpha_k - \langle q, x_k \rangle). \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) и условия агрегации Энгеля вытекает, что при выполнении условия б) $\lambda = \langle J e', p \rangle / \langle e', p \rangle < 0$. Итак, если выполнено условие а) или условие б), то во всех прообразах ω , для которых $p \geq q$, якобиан π имеет один и тот же знак $(-1)^l$. Из теоремы 3, следствия 5 и замечания 10 теперь вытекает, что при выполнении условия а) и/или условия б) в ω существует единственная равновесная цена. Кроме того (уже без всяких дополнительных предположений), мы доказали, что

$$\deg \pi = (-1)^l \quad (25)$$

(в теореме 3 было показано только, что $\deg \pi = \pm 1$).

Для доказательства теоремы 4 осталось проверить, что если $\alpha - \langle q, x \rangle \leq 0$, то $p \not\geq q$. Предположим противное. Из закона Вальраса вытекает, что

$$\langle Jp, p \rangle = -\langle p, y - x \rangle = -(\alpha - \langle q, x \rangle). \quad (26)$$

Если $\alpha - \langle q, x \rangle < 0$, то (26) показывает, что $\langle Jp, p \rangle > 0$, и следовательно $\langle J e', e' \rangle > 0$ и $\lambda > 0$. Если $\alpha - \langle q, x \rangle = 0$, то $\langle Jp, p \rangle = 0$, и следовательно $\langle J e', e' \rangle \geq 0$ и $\lambda \geq 0$. Докажем, что и в этом случае $\lambda > 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $\langle J e', e' \rangle = \langle Jp, p \rangle = 0$, и из теоремы инерции вытекает, что мы можем считать, что $e' = p$. Из (22) следует, что

$$0 = J e' = Jp = -(y - x). \quad (27)$$

Другими словами, (27) означает, что если $\alpha - \langle q, x \rangle = \lambda = 0$, то $y = x$ вопреки тому, что $\omega \in \Omega_-$. Итак, если $\alpha - \langle q, x \rangle \leq 0$, то

$$\lambda > 0, \quad \text{sign}(\det J) = (-1)^{l-1}, \quad (28)$$

что противоречит замечанию 10 и уже доказанному равенству (25). Итак, если $p \geq q$, то $\alpha - \langle q, x \rangle > 0$. ■

Стандартный вальрасовский процесс регулирования цен (*tâtonnement*) заключается в повышении цен на дефицитные товары и понижении на избыточные. Этот процесс описывается дифференциальным уравнением

$$dp / dt = E(p), \quad (29)$$

где t — время, а $E(p) = \sum_{k=1}^m f_k(p, \alpha_k + \langle (p - q)^+, x_k \rangle) - y$ — функция избыточного спроса. Сходится ли процесс (29) к равновесной цене, зависит как от функций спроса f_i и экономики $\omega \in \Omega$, так и от начального вектора цен p_0 . Если сходимость имеет место при p_0 , достаточно близком к равновесной цене, то процесс ценообразования называется *локально асимптотически устойчивым*, если же процесс сходится независимо от выбора p_0 , то говорят о *глобальной асимптотической устойчивости*.

Теорема 5. *В условиях теоремы 4 или теоремы 2 единственное равновесие в экономике ω локально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Если выполнено условие а) или б) теоремы 4, то $p \geq q$ и из доказательства этой теоремы вытекает, что все собственные значения матрицы $J = \partial E / \partial p$ имеют отрицательные вещественные части (в обозначениях доказательства теоремы 4 выполнено неравенство $\lambda < 0$, а для остальных собственных значений этот факт вытекает из условия Слуцкого и непрерывности). Таким образом, в этом случае утверждение теоремы вытекает из теоремы Ляпунова. Аналогично,

если $p \not\geq q$, $J_- = \{j | p^j \leq q^j\}$, $\text{card } J_- \geq 1$ (см. доказательство теоремы 2), то достаточно установить отрицательность вещественных частей собственных значений матрицы $J = \partial E / \partial p$. Сделать это можно воспользовавшись индукцией по $\text{card } J_-$ (этот метод уже был использован при доказательстве теоремы 2), тем обстоятельством, что в ω_0 для произвольной равновесной цены матрица J имеет $l-1$ отрицательных собственных значений, и теоремой 4, согласно которой $\text{sign det } J = (-1)^l$, поскольку при переходе через грань любого из полиэдральных подмножеств разбиения, рассмотренного в доказательстве теоремы 2, изменяется не более чем одно собственное значение матрицы J . ■

Поскольку наша модель включает в качестве частных случаев модель экономики с фиксированными доходами и модель чистого обмена, в общем случае нельзя ожидать единственности равновесной цены или устойчивости процесса ценообразования. Однако, как и в упомянутых выше частных случаях, наша модель обладает указанными выше свойствами для некоторых специальных функций спроса.

Теорема 6. Пусть все участники имеют (нестрого) нормальный спрос (т.е. $\partial f_k / \partial w_k \geq 0$, $k=1, \dots, m$), а функция совокупного спроса удовлетворяет условию (слабой) валовой заменимости (т.е. $\partial f^j(p, w_1, \dots, w_m) / \partial p^r \geq 0$ при $j \neq r$). Предположим, что для экономики $\omega \in \Omega_-$ выполнено одно из условий:

а) $x < y$;

б) $\alpha_k > \langle q, x_k \rangle$, $k=1, \dots, m$, а спрос хотя бы одного из участников строго нормален (т.е. $\partial f_i / \partial w_i > 0$ для некоторого i , $1 \leq i \leq m$);

а') $x \leq y$ и имеет место сильная валовая заменимость (т.е. $\partial f^j / \partial p^r > 0$ при $j \neq r$);

б') $\alpha_k \geq \langle q, x_k \rangle$, $k=1, \dots, m$ и имеет место сильная валовая заменимость (условие сильной валовой заменимости в а'), б') можно заменить условием неразложимости матрицы $(\partial f / \partial p + \lambda \text{id})$ при $\lambda \gg 0$). Тогда в экономике ω существует единственное равновесие, являющееся к тому же глобально асимптотически устойчивым.

Если вдобавок $\alpha < \langle q, x \rangle$, то утверждение теоремы в случае а') остается справедливым и при $y = x$.

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично (Зак, 1981, теорема 4.11). Как мы уже отмечали при доказательстве теоремы 4, для каждой равновесной цены p в экономике ω имеем:

$$(-Jp)^r = y^r - \delta_r x^r, \quad (30)$$

$$(-J^* p) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial w_k} \left(\alpha_k - \sum_{j=1}^l q^j x_k^j \delta_j \right), \quad (31)$$

где δ_j определено в конце разд. 3. По условию $(-J)_{jr} \leq 0$ при $j \neq r$, и в случае а) формула (30) показывает, что $(-J)_{rr} > 0$ и $-J$ — матрица с доминирующей диагональю, удовлетворяющая условию Хоккинса–Саймона. Следовательно,

$$J^{-1} \leq 0, \quad (-1)^l \det J > 0 \quad (32)$$

(см. (Никайдо, 1972, гл. II, теорема 6.1)). Совершенно аналогично доказывается, что (32) имеет место также при выполнении условия б). Докажем, что соотношение (32) выполняется и в случаях а') и б'). Действительно, предположим, что матрица J необратима. Тогда из теоремы Перрона–Фробениуса вытекает, что существуют положительные векторы e и e' такие, что $J^* e = J e' = 0$, так что $\langle e, Jp \rangle = \langle e', J^* p \rangle = 0$ вопреки (30) и (31). Таким образом, мы доказали, что в условиях теоремы б) имеют место соотношения (32). Из (25) вытекает, что при наших предположениях существует единственное равновесие. Теорема Перрона–Фробениуса показывает, что все собственные значения матрицы J имеют отрицательные вещественные части, а следовательно, единственное состояние равновесия в ω устойчиво. ■

Теорема 3 показывает, что какие бы ограничения ни накладывались на функции спроса, при $\omega \in \Omega_+$ нельзя, вообще говоря, ожидать существования равновесия. Тем не менее, для некоторых экономик ω равновесие все же существует, и мы даже можем подсчитать количество равновесных векторов цен.

Теорема 7. Пусть $\omega \in \Omega_-^<$ — регулярная экономика, в которой существует $2n+1$ равновесных цен ($n \geq 0$; см. теорему 2), и пусть U — достаточно малая окрестность ω в Ω . Тогда при $\omega' \in \Omega_+ \cap U$ в ω' существует $2n+1$ равновесных векторов цен $p_r(\omega') \not\geq q(\omega')$, $r=1, \dots, 2n+1$ и, по меньшей мере, один равновесный вектор цен $p(\omega') \geq q(\omega')$, причем, если $\omega' \rightarrow \omega$, то для каждого равновесного вектора цен $p(\omega') \geq q(\omega')$ имеем $p^j(\omega') \rightarrow \infty$, $j=1, \dots, l$.

Если $\omega_0 \in \Omega_-^=$ — экономика, для которой распределение $\{x_k(\omega_0)\}$ оптимально по Парето, $\alpha_k(\omega_0) = \langle q(\omega_0), x_k(\omega_0) \rangle$, $\omega \in \Omega_-^<$ — экономика, близкая к ω_0 , а ω' — экономика, близкая к ω , то при $\omega' \in \Omega_-$ в ω' существует единственный равновесный вектор цен $p(\omega') \not\geq q(\omega')$, близкий к $p(\omega)$, а при $\omega' \in \Omega_+$ в ω' существуют два равновесных вектора цен, а именно $p_-(\omega') \not\geq q(\omega')$, близкий к $p(\omega)$, и $p_+(\omega') > q(\omega')$, все компоненты которого велики.

Доказательство. Из (10) и (13) вытекает, что ω — регулярная экономика в Ω , а из замечания 9 — что в ω не существует равновесных цен $p \geq q$. Из леммы 2 следует, что, для достаточно большого вектора P , в окрестности ω отображение $\pi_{|W \cap \{p \leq P\}}$ является неразветвленным $(2n+1)$ -листным накрытием. В частности, $(\pi_{|W \cap \{p \leq P\}})^{-1}(\omega) = \pi^{-1}(\omega)$, и если ω' достаточно близка к ω , то $\text{card}(\pi_{|W \cap \{p \leq P\}}^{-1}(\omega')) = 2n+1$ и соответствующие равновесные цены $p_r(\omega')$ удовлетворяют соотношению $p_r(\omega') \not\geq q(\omega')$, $r=1, \dots, 2n+1$. Поскольку $\deg \pi_+ = 0$ (см. теорему 3), ценами $p_r(\omega')$, $r=1, \dots, 2n+1$ не исчерпываются равновесные цены в экономике ω' , т.е. существует равновесный вектор цен $p(\omega') \geq q(\omega')$. Из замечания 9 и леммы 2 вытекает, что при $\omega' \rightarrow \omega$ имеем $p^j(\omega') \rightarrow \infty$, $j=1, \dots, l$.

Предположим теперь, что ω близка к ω_0 . Из теоремы 2 вытекает, что в ω' существует единственный равновесный вектор цен $p_-(\omega')$, удовлетворяющий соотношению $p_-(\omega') \not\geq q(\omega')$, а из (25) следует, что знак соответствующего якобиана равен $(-1)^l$. Пусть $p_+(\omega') \geq q(\omega')$ — равновесный вектор цен в ω' . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, мы видим, что из условия $\alpha(\omega') - \langle q(\omega'), x(\omega') \rangle < 0$ вытекает, что знак якобиана в точке (ω', p_+) равен $(-1)^{l-1}$ (см. (28)). Из теоремы 3 вытекает, что при $\omega' \in \Omega_+$ существует единственный вектор p_+ , а при $\omega' \in \Omega_-$ такого p_+ не существует.

Замечание 11. Очевидно, что равновесие p_- устойчиво, а равновесие p_+ неустойчиво.

До сих пор мы исследовали устойчивость процесса ценообразования для экономики $\omega \in \Omega$ в случае, когда в ω существует единственная равновесная цена. Мы уже отмечали, что особый интерес представляют экономики $\omega \in \Omega_-^=$, т.е. экономики, для которых $y = x$, $\alpha = \langle q, x \rangle$. Согласно теореме 1 для общей экономики $\omega \in \Omega_-^=$ множество равновесных цен одномерно.

Ниже мы приведем результаты об устойчивости процессов ценообразования для таких экономик (доказательства аналогичны доказательствам теорем 5 и 6). При этом мы будем пользоваться интерпретацией таких экономик, данной во введении: государство обязывает участника i , обладающего начальным запасом y_i , предложить участнику k набор продуктов y_{ik} , $i, k=1, \dots, m$ по фиксированным ценам q , после чего происходит торгующая всеми товарами по рыночным ценам p . Положим $\alpha_i = \langle q, y_i \rangle$, $x_i = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = \sum_{k=1}^m (y_{ki} - y_{ik})$.

Согласно теореме 1, если распределение $\{x_i\}$ близко к оптимальному по Парето, то множество равновесных цен состоит из подмногообразия, диффеоморфного лучу, и нескольких дуг, а если к тому же стоимости предписанных государством поставок по фиксированным ценам $|\langle q, \Delta y_i \rangle|$, $i=1, \dots, m$ невелики, то множество равновесных цен диффеоморфно лучу. Естественно считать, что, распределяя квоты, государство пытается перевести экономику в состояние, близкое к Парето-оптимальному, но результирующее равновесное распределение (также Парето-оптимальное) варьируется вдоль равновесного луча и может отклониться от запланированного распределения $\{x_i\}$. Однако по мере того как равновесные цены неограниченно растут, соответствующее равновесное распределение стремится к равновесию в экономике чистого обмена с начальными запасами $\{x_k\}$, которое, при наших предположениях, единственно и мало отличается от $\{x_k\}$. Ясно, что при этом некоторые участники выигрывают от повышения цен вдоль равновесного луча, а другие проигрывают.

Теорема 8. Предположим, что распределение $\{x_i\} = \{y_i + \Delta y_i\}$ близко к Парето-оптимальному и выполнено одно из следующих условий:

а) начальный вектор цен p_0 достаточно велик;

б) стоимости предписанных государством поставок по фиксированным ценам $|\langle q, \Delta y_i \rangle|$, $i=1, \dots, m$ достаточно малы.

Тогда стандартный процесс ценообразования (*tâtonnement*) локально асимптотически устойчив, а если функция избыточного спроса $E(p)$ удовлетворяет условию валовой заменимости, то и глобально устойчив.

Напомним, что стандартный вальрасовский процесс (*tâtonnement*) устойчив к инфляции, поскольку, в силу закона Вальраса, $d \langle p(t), p(t) \rangle / dt = 2 \langle dp(t) / dt, p(t) \rangle = 0$. Поэтому в нашей ситуации можно надеяться на сходимость этого процесса, только если начальный вектор цен достаточно велик. Но если в модели чистого обмена естественно предположить, что ценообразующий орган

беспристрастен, в нашей модели государство осуществляет активную распределительную политику и правдоподобным выглядит предположение, что оно приписывает индивидуальным функциям избыточного спроса некоторые веса. Это приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dt} = E_{\mu}(p) = \sum_{i=1}^m \mu_i E_i(p), \quad (33)$$

где $\mu_i > 0$, а $E_i(p) = f_i(p, \langle p, x_i \rangle) - \langle q, \Delta y_i \rangle - x_i$, ($p \geq q$) — функция избыточного спроса участника i по завершении плановых поставок. Представляется разумным выбрать веса μ_i в зависимости от взаимных поставок, а именно вес нетто-потребителя ($\langle q, \Delta y_i \rangle > 0$) должен быть меньше, чем у нетто-поставщика ($\langle q, \Delta y_i \rangle < 0$). Более общо, можно предположить, что вес — убывающая функция от $\langle q, \Delta y \rangle$, т.е. если

$$\langle q, \Delta y_{i_1} \rangle \leq \langle q, \Delta y_{i_2} \rangle \leq \dots \leq \langle q, \Delta y_{i_k} \rangle \leq 0 < \langle q, \Delta y_{i_{k+1}} \rangle \leq \dots \leq \langle q, \Delta y_{i_m} \rangle,$$

то $\mu_{i_1} \geq \mu_{i_2} \geq \dots \geq \mu_{i_m} > 0$ и $\mu_{i_a} \neq \mu_{i_b}$ при $\langle q, \Delta y_{i_a} \rangle \neq \langle q, \Delta y_{i_b} \rangle$.

При указанных выше условиях для функции $E_{\mu}(p)$ соотношение Вальраса не выполняется, и на траекториях нашего процесса ценообразования цены растут: $d\langle p(t), p(t) \rangle / dt > 0$. В общем случае линейная система $dp/dt = E_{\mu}(p)$ не имеет устойчивых решений в окрестности равновесных цен, но если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному, а p достаточно большой равновесный вектор цен, то $\|E_{\mu}(p)\|$ мало.

Теорема 9. *Предположим, что все участники имеют нормальный спрос, удовлетворяющий условию валовой заменимости. Тогда процесс ценообразования (33) глобально устойчив, длина вектора $p(t)$ неограниченно возрастает, а нормализованный вектор цен сходится к решению системы уравнений $\sum_{i=1}^m \mu_i (f_i(p, \langle p, x_i \rangle) - x_i) = 0$. Если распределение $\{x_i\}$ близко к Парето-оптимальному или все веса μ_i близки к 1, то предельный нормализованный вектор цен близок к равновесному вектору цен в модели чистого обмена с начальными запасами $\{x_i\}$, который, в свою очередь, является пределом нормализованных равновесных векторов цен в нашей модели.*

Отметим, что поскольку функции спроса однородны степени ноль, наши результаты в случае $x = y$, $\langle q, x \rangle = \alpha$ было бы более естественно формулировать, используя проективное пространство цен, в котором бесконечно удаленная гиперплоскость параметризует равновесные цены в экономиках чистого обмена.

Отличие нашей модели от модели чистого обмена состоит в том, что в последней индивидуальные функции избыточного спроса $E_i(p)$ удовлетворяют закону Вальраса, и для взвешенной функции избыточного спроса $d\|p(t)\|^2/dt = 2\langle p, E_{\mu}(p) \rangle = 0$, т.е. евклидова длина вектора цен постоянна вдоль траектории. В нашей же модели разумный выбор весов приводит к эндогенной инфляции, связанной с процессом ценообразования, темп которой зависит от весов μ_i и нетто-поставок Δy_i по твердым ценам. Теорема 9 показывает, что при определенных условиях этот тип инфляции может играть положительную роль, помогая (хотя бы приблизительно) сбалансировать рынок.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

События последнего времени поубавили рыночного оптимизма у экономистов. На фоне ужесточающихся социальных, экономических, экологических и политических ограничений во многих странах возрастает государственное вмешательство в ценообразование и распределение ресурсов. В настоящей работе исследована модель, в которой часть товаров в пределах квот распределяется по жестким ценам, а оставшиеся товары продаются по рыночным ценам, по которым можно также перепродать котируемые товары. При определенных значениях параметров эта модель включает классические модели чистого обмена и фиксированных доходов, причем в последнем случае удается получить и новый результат. Подробное исследование существования и свойств равновесий в зависимости от параметров модели показывает, что пространство параметров разбивается на области, в некоторых из которых модель ведет себя по классическому сценарию (в общей экономике нечетное число равновесных цен, в окрестности Парето-оптимального распределения имеется единственное равновесие, устойчивое к *tâtonnement*, и т.д.), а в других свойства равновесий необычны (в общей экономике число равновесий четно, а в окрестности Парето-оптимальной имеется два равновесия, одно из которых устойчиво, а второе нет). Необычны также свойства равновесий в случае полного рационирования с учетом доходов потребителей — в этой ситуации множество равновесий в общей экономике одномерно, а при некоторых

предположениях процесс ценообразования сходится, но приводит к неограниченному росту цен (эндогенной инфляции).

В данной работе мы сосредоточились только на распределении продуктов, производство не рассматривалось. Кроме того, модель статична. С одной стороны, эти ограничения позволили довольно полно исследовать качественные свойства равновесий, но с другой — удалили модель от реальной экономики. Учитывая возрастающий дефицит ряда ресурсов и распространяющиеся попытки ввести рационирование и ограничить цены, а также необычные свойства состояний равновесия, выявленные в настоящей работе, представляется целесообразным продолжить исследование этого круга вопросов как на модельном уровне, так и на основе изучения опыта использования инструментов рационирования и ограничения или субсидирования цен в разных странах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Зак Ф.Л.** (1981). Устойчивость экономического равновесия. Методы теории экстремальных задач в экономике. В.Л. Левин (ред.). М.: Наука. С. 72–106. [**Zak F.L.** (1981). *Stability of economic equilibrium. Methods of the theory of extreme problems in economics*. Moscow: Nauka, 72–106 (in Russian). English translation: **Zak F.L.** (2006). *Stability of economic equilibrium. Methods of the theory of extreme problems in economics*. In: *Russian contributions to game theory and equilibrium theory*. Berlin–Heidelberg: Springer, 181–216.]
- Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев Н.А., Маракулин В.М.** (1982). О некоторых проблемах и результатах в современной математической экономике // *Оптимизация*. № 30 (47). С. 5–86. [**Makarov V.L., Vasil'ev V.A., Kozyrev N.A., Marakulin V.M.** (1982). On some problems and results in modern mathematical economics. *Optimization*, 30 (47), 5–86 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Васильев В.А., Козырев Н.А., Маракулин В.М.** (1986). Равновесие, рационирование и устойчивость // *Оптимизация*. № 38 (55). С. 7–120. [**Makarov V.L., Vasil'ev V.A., Kozyrev N.A., Marakulin V.M.** (1986). Equilibrium, rationing, and stability. *Optimization*, 38 (55), 7–120 (in Russian).]
- Милнор Дж., Уоллес А.** (1972). Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир. [**Milnor J., Wallace A.** (1972). *Differential topology. Beginner's course*. Moscow: Mir (in Russian).]
- Никайдо Х.** (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. Пер. с англ. М.: Мир. [**Nikaido H.** (1972). *Convex structures and economic theory*. Moscow: Mir. First published in English in 1969 as: *Mathematics in Science and Engineering*, 51. New York: Academic Press.]
- Полтерович В.М.** (1990). Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. Москва: Наука. [**Polterovich V.M.** (1990). *Economic equilibrium and economic mechanism*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Рохлин В.А., Фукс Д.Б.** (1977). Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука. [**Rokhlin V.A., Fuks D.B.** (1977). *Beginner's course in topology. Geometric chapters*. Moscow: Nauka (in Russian). English translation as: **Fuks D., Rokhlin V.** (1984). *Beginner's course in topology*. Berlin–Heidelberg–N.Y. — Tokyo: Springer Verlag.]
- Хирш М.** (1979). Дифференциальная топология. Пер. с англ. М.: Мир. [**Hirsch M.** (1979). *Differential topology*. Moscow: Mir. First published in English in 1976 as: *Differential topology. Graduate Texts in Mathematics*, 33. N.Y.: Springer Verlag.]
- Balasko Y.** (1975). Some results on uniqueness and on stability of equilibrium in general equilibrium theory. *J. Math. Economics*, 2, 2, 95–118.
- Checherita-Westphal C., Freier M., Muggenthaler Ph.** (2022). Euro area fiscal policy response to the war in Ukraine and its macroeconomic impact. *ECB Economic Bulletin*, 5. Available at: Euro area fiscal policy response to the war in Ukraine and its macroeconomic impact. Available at: https://www.ecb.europa.eu/pub/economic-bulletin/focus/2022/html/ecb.ebbox202205_07~6db6f2c297.en.html
- Debreu G.** (1970). Economies with a Finite Set of Equilibria. *Econometrica*, 38, 387–392.
- Debreu G.** (1972). Smooth Preferences. *Econometrica*, 40, 603–616.
- ЕС (2023). *Impact of Russia's invasion on the markets: EU response*. Consilium. Available at: <https://www.wsj.com/articles/russias-war-in-ukraine-to-cost-global-economy-2-8-trillion-oecd-says-11664177401>
- Hannon P.** (2022). Russia's war in Ukraine to cost global economy \$2.8 trillion, OECD says. *The Wall Street Journal*, Sept. 26.
- Kornai J.** (1980). *The Economics of Shortage*. Amsterdam: North Holland.
- Kornai J.** (2013). *Dynamism, rivalry, and the surplus economy. Two essays on the nature of capitalism*. Oxford: Oxford University Press.
- Merrill R., Neves C., Lain B.** (2022). *Basic income experiments. A critical examination of their goals, contexts, and methods*. Palgrave Macmillan, Springer Nature Switzerland AG.
- Torry M.** (2022). *Basic income — What, why, and how? Aspects of the Global Basic Income Debate*. Palgrave Macmillan, Springer Nature Switzerland AG.

Rationing and market: Structure and stability of equilibria

©2023 F.L. Zak

F.L. Zak,

*Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Moscow, Russia;
e-mail: zak@cemi.rssi.ru*

Received 15.12.2022

Abstract. In recent years, state control of the economy has increased in many countries. A number of states try to influence prices in key areas of economy, in particular by selling resources at fixed prices within given quotas. However, in real economies the governments cannot prevent economic agents from reselling rationed goods at the free market. The study of impact of rationing on the market prices is a difficult and challenging problem. In the present paper we consider an equilibrium model in which part of the goods within the limits of quotas is sold at fixed prices while the remaining goods are sold at market prices; the goods bought at fixed prices can also be resold at market prices. Economy depends on parameters, viz. total resources, incomes of the participants, quotas, and fixed prices. For special values of parameters, this model reduces to pure exchange and fixed income models and, in a sense, is a combination of these models. Basing on known properties of these special cases and using techniques of elementary differential topology, we study the existence of equilibria and their properties. Depending on the values of parameters, a (sufficiently general) economy may have a finite (even or odd) number of equilibria, and in an important special case when total resources are subject to rationing and the total cost of allocated quotas coincides with the total income of the participants the equilibria form a one-dimensional manifold. We consider a generalized tâtonnement process and study its convergence under certain assumptions. It is shown that in our setup convergence of tâtonnement to an equilibrium may involve endogenous inflation.

Keywords: deficit, rationing, quotas, demand functions, market, equilibrium, Walras correspondence, tâtonnement, inflation.

JEL Classification: C02, C62, C65, D31, D45, D47, D52, D61.

For reference: **Zak F.L.** (2023). Rationing and market: Structure and stability of equilibria. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 68–86. DOI: 10.31857/S042473880025860-5

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Оптимальное решение задачи иммунизации потока множественных платежей произвольной структуры

© 2023 г. С. В. Курочкин, В. А. Родина¹

С. В. Курочкин,
НИУ ВШЭ, Москва; e-mail: skurochkin@hse.ru

В. А. Родина,
НИУ ВШЭ, Москва; e-mail: victoriarodina@hse.ru

Поступила в редакцию 22.11.2022

Аннотация. Одной из центральных задач в управлении портфелем активов с фиксированной доходностью является иммунизация, т.е. контроль изменения стоимости портфеля при колебаниях процентных ставок с учетом аналогичной зависимости портфеля обязательств. В многочисленных исследованиях были предложены различные модели иммунизации для обязательства с единичным платежом и/или при предположении определенного вида сдвигов кривой спот-ставок. В настоящей работе впервые предложено решение проблемы иммунизации портфеля облигаций для множественных платежей по обязательствам и сдвигов кривой доходности произвольной структуры. Введенная Навалкой и Чемберсом, мера риска M-Absolute обобщается на случай потока множественных платежей по обязательствам. В качестве меры близости потоков платежей используется известная в машинном обучении метрика Earth Mover's Distance (EMD), или расстояние Монжа–Канторовича–Вассерштейна. Доказана оценка типа Фонга–Васичека — процентный риск портфеля ограничен произведением двух факторов, один из которых будет EMD-расстоянием между активами и обязательствами (т.е. зависит только от структуры портфеля), а другой — sup-норма функции шока ставок — зависит только от изменения кривой бескупонной доходности. Доказана неуллучшаемость оценки. Получен явный вид и алгоритм расчета оптимального иммунизирующего портфеля. Практическая применимость метода продемонстрирована на примере иммунизации портфеля облигаций федерального займа при структуре потока обязательств типа аннуитета.

Ключевые слова: ALM, иммунизация, процентный риск, мера разброса, метрика Монжа–Канторовича–Вассерштейна, EMD-расстояние.

Классификация JEL: G1, G2, F3.

Для цитирования: Курочкин С. В., Родина В. А. (2023). Оптимальное решение задачи иммунизации потока множественных платежей произвольной структуры // Экономика и математические методы. Т. 59. № 2. С. 87–99. DOI: 10.31857/S042473880025861-6

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время *интегрированное* управление портфелями активов и обязательств (asset-liability management, ALM) относится к классу лучших международных практик. Прежде всего это касается пенсионных фондов и страховых компаний, но также затрагивает и других финансовых посредников, имеющих портфели средне- и долгосрочных обязательств, таких как коммерческие и инвестиционные банки, и управляющих частным капиталом. Стратегии и техники в ALM разнообразны (см., например, классификацию (Leibowitz, 1986; Van der Meer, Smink, 1993)) и нацелены на контроль спектра рисков, но главным среди них всегда остается процентный риск².

Неопределенность движения процентных ставок является главной сложностью при управлении портфелями, находящимися «по разные стороны баланса» и состоящими из чувствительных к движению процентных ставок инструментов, а асимметричность изменения их стоимостей после

¹ Авторы благодарны рецензенту первого варианта статьи за ценные замечания, позволившие улучшить текст.

² Здесь и далее по тексту под процентным риском (interest rate risk) мы будем понимать отрицательный эффект от движения процентных ставок в любом направлении. При конкретизации направления движения понятие процентного риска сужается либо до ценового риска (price risk), либо до риска реинвестирования (reinvestment risk).

реализации процентного риска — крайне нежелательным следствием. Классическая теория иммунизации, выдвинутая Фрэнком Редингтоном в 1952 г., явилась первым ответом на эти вызовы.

Заметим, что классическую модель стали использовать на практике весьма оперативно в Великобритании, где была опубликована работа Фрэнка Редингтона (Vanderhoof, 1972). Вместе с тем осмысление того, что природа неопределенности движения процентных ставок очень далека от упрощенной схемы аддитивного шока форвардных ставок в классической модели, запустило процесс эволюции научных взглядов на то, какой должна быть правильная иммунизация, длящийся до сих пор. Были предложены многочисленные подходы к оценке и контролю процентного риска. Но только их часть и только для иммунизации единичного³ платежа подходит для практического применения. Остальные подходы скорее интеллектуально привлекательны для научного сообщества. Но если для обязательств с единичным платежом утверждение, что иммунизация является мощным инструментом обращения с процентным риском в портфельном управлении, все-таки справедливо, то для случая множественных платежей утверждение остается только в области абстракции.

А между тем *множественные* выплаты генерируют и портфели пенсионных планов, и портфели страховых полисов (когда в страховые полисы заложены аннуитетные компенсации). Для таких портфелей, в отличие от портфелей обязательств с единичной выплатой, и по сей день не существует иммунизирующих механизмов. Потребность в них диктуется жесткими регуляторными ограничениями для пенсионных фондов и страховых компаний в отношении финансовой устойчивости их бизнес-модели.

Поскольку модели иммунизации денежного потока с единичной выплатой не работают для потока множественных выплат, хеджирование, как правило, осуществляется на базе решения задачи линейного программирования в рамках альтернативной для иммунизации концепции балансировки по платежам (cash flow matching). Модели балансировки по платежам также относятся к ALM и примечательно, что они применялись до появления классической иммунизации.

Новое развитие модели балансировки по платежам получили в 1990-е годы в работах (Rosenbloom, Shiu, 1990; Ford, 1991, 1993). Однако эти модели все же являются инструментом *ad hoc*. Не будучи порождением финансовой науки, они не имеют достаточного теоретического фундамента, уязвимы в отношении обосновывающих критериев, а решением задачи линейного программирования может стать неестественный и неэффективный портфель. Как статичная модель, предполагающая изначальное равенство двух денежных потоков, балансировка по платежам обходится дорого и может не иметь решения без большого числа коротких позиций. Как динамическая модель, ситуативно выравнивающая два денежных потока, она уязвима ввиду ошибочных прогнозов будущих ставок по займам и депозитам, а фактическая реализация стратегии в части заимствования денежных средств может приводить к нарушению внутренних установок по нормам ликвидности. Задачей же ALM для пенсионных фондов и страховых компаний является формирование *стратегического* портфеля, обеспечивающего бесперебойное функционирование. Этого можно добиться дальнейшим прогрессом в моделировании иммунизации.

В настоящей работе предложена модель иммунизации потока множественных платежей с минимизацией меры разброса, опирающаяся на теоретические результаты в (Fong, Vasicek, 1984; Nawalkha, Chambers, 1996; Balbas, Ibanez, 1998). В этих работах был предложен и формализован подход, в рамках которого остаточный процентный риск, неустранимый посредством наложения ограничений дюрацией Фишера–Вейла, оценивается количественно и подлежит минимизации. В свое время понимание того, что дюрация Фишера–Вейла неэффективна при непараллельных сдвигах спотовой кривой, породило многочисленные попытки получить улучшенные метрики, при применении которых действенность иммунизирующего механизма не могла бы быть существенно скомпрометирована ошибочными прогнозами движения процентных ставок.

В моделях иммунизации с мерой разброса в (Fong, Vasicek, 1984; Balbas, Ibanez, 1998) предлагается оставить за дюрацией Фишера–Вейла хеджирующую от параллельных сдвигов спотовой кривой функцию и сосредоточиться на проблеме минимизации остаточного процентного риска, а в (Nawalkha, Chambers, 1996) — полностью свести задачу иммунизации к минимизации остаточного процентного риска. Последнее объясняется тем, что в вышеперечисленных работах, в отличие от работ в рамках других подходов к моделированию правильной иммунизации, допущения

³ В контексте настоящей работы прилагательное «единичный» понимается как однократный.

о шоке форвардных ставок минимально рестриктивные, что существенно усиливает иммунизирующий потенциал модели и делает соблюдение дюрации Фишера–Вейла излишним условием.

В (Fong, Vasicek, 1984; Nawalkha, Chambers, 1996; Balbas, Ibanez, 1998) выводится неравенство, в котором один компонент показывает максимально допустимое возмущение спотовой кривой, а второй — чувствительность портфеля, генерирующего единичную выплату, к такому возмущению, называемую мерой разброса. Формальное представление меры разброса — важный шаг в моделировании иммунизации. Мы развиваем теоретический результат (Nawalkha, Chambers, 1996) и предлагаем модель иммунизации с мерой разброса, подходящую для хеджирования потока как с единичным, так и с множественными платежами при сохранении минимально рестриктивных допущений о шоке форвардных ставок.

Главная трудность метода состоит в том, что мера разброса M -Absolute, полученная в (Nawalkha, Chambers, 1996), не может быть обобщена напрямую. Для такого обобщения требуется другая конструкция. Подходящей конструкцией является метрика Монжа–Канторовича–Вассерштейна. Данное понятие было введено Гаспаром Монжем еще в 1781 г. (Monge, 1781), а затем многократно, под различными названиями и с различными вариациями, открывалось заново, изучалось и применялось в теории меры, теории транспортных задач, методах распознавания образов и т.д.⁴ Метрика Монжа–Канторовича–Вассерштейна — количественная мера близости многомерных объектов (изображений, гистограмм, персистентных диаграмм и т.п.) — широко и результативно применяется в современных приложениях искусственного интеллекта и методах машинного обучения (Panaretos, Zemel, 2019; Torres et al., 2021). В настоящей работе для ее обозначения будет использован краткий термин «EMD-расстояние» (earth mover's distance).

В настоящей работе впервые предложено решение проблемы иммунизации портфеля облигаций для случая множественных платежей по обязательствам и сдвигов кривой доходности произвольной структуры. Ключевым новым результатом работы является оценка типа Фонга–Васичека — величина процентного риска, т.е. отклонение в отрицательную сторону стоимости портфеля активов от приведенной стоимости потока обязательств, вызванное изменением ставок спот, ограничено произведением двух сомножителей, один из которых представляет EMD-расстояние между потоками активов и обязательств и зависит только от структуры портфеля, а другой — \sup -норма функции шока ставок — зависит только от изменения кривой бескупонной доходности. Такая оценка неуплачиваема в классе функций изменений ставок произвольной формы (без предположений гладкости). Для реализующего ее, т.е. оптимального, портфеля получена его структура и способ расчета.

Конструирование меры разброса и оптимального иммунизирующего портфеля для случая множественных платежей дополняется апробацией на реальных данных. Показано, что иммунизация с минимизацией EMD-расстояния является готовым руководством к действию для практиков. При этом, имея психологически-комфортный прескриптивный характер, предлагаемое нами решение выгодно отличается от хеджирования потока множественных платежей в моделях балансировки по платежам, поскольку совмещает необременительность прикладного применения со строгим теоретическим обоснованием.

Структура работы следующая. В разд. 2 описана логика возникновения моделей иммунизации с минимизацией меры разброса и представлены теоретические результаты данного направления. В разд. 3 получено основное неравенство для оценки процентного риска через меру близости потоков платежей по активам и обязательствам произвольной структуры. В разд. 4 показана неуплачиваемость данной оценки, поставлена задача оптимальной иммунизации и приведен алгоритм ее решения. В разд. 5 проведена апробация конструкции на реальных данных. В заключении сформулированы выводы и открытые вопросы.

2. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ: КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Идея хеджирования потока выплат потоком поступлений по критерию срочности получила завершённое оформление в работе Фрэнка Редингтона (Redington, 1952). Он ввел термин «иммунизация» (immunization), с тех пор прочно закрепившийся в профессиональной лексике. В классической теории иммунизации Редингтона выдвигаются два необходимых и достаточных условия.

⁴ С историей вопроса можно ознакомиться в (Богачев, Колесников, 2012).

Условия Редингтона.

1. Для портфелей активов и обязательств двух равенств одновременно соблюдаются их настоящие стоимости и их дюрации⁵.

2. Разброс взвешенных сроков по поступлениям должен превышать таковой по выплатам.

Допущения, принятые в классической теории иммунизации. В классической теории формулируется ряд допущений, при этом основной траекторией дальнейшего развития теории стало ослабление следующих допущений:

- 1) спотовая кривая является плоской,
- 2) возмущение спотовой кривой описывается параллельным сдвигом,
- 3) возмущение спотовой кривой незначительное.

Заметим, что в классической теории *допускаются* множественные платежи по обязательствам, однако в полной мере предметно развить данное направление не удалось.

В ранних работах, в которых впервые ослабляются первое и второе допущения (Fisher, Weil, 1971; Bierwag, Khang, 1977; Khang, 1979), изменения форвардных ставок описываются шоком аддитивного, мультипликативного и затухающего по срочности воздействия посредством введения соответствующих констант. Как следствие — изменения форвардных ставок функционально зависят и абсолютно коррелированы. Уже в (Ingersoll, Skelton, Weil, 1978) было продемонстрировано, что подобные установки моделирования неопределенности движения процентных ставок приводят к логическому парадоксу. Это связано с тем, что сформированные в подобных установках иммунизированные портфели несовместимы с принципом отсутствия арбитражных возможностей и их существование в условиях общего рыночного равновесия неминуемо означает движение процентных ставок, отличное от первоначально прогнозируемого. После этого теория иммунизации получила новое осмысление и с 1980-х годов демонстрирует разветвленность, характеризуемую тем, какое именно обращение с базовыми установками лежит в основе изменений.

Моделирование иммунизации с минимизацией меры разброса является ключевой в контексте настоящей работы ветвью развития теории иммунизации. В общих чертах, это — поддержание (а потом отталкивание от) зонтичной идеи о том, что при невозможности совершенно корректной идентификации качества и числа диффузионных процессов в моделировании неопределенности движения процентных ставок лучшим выходом будет принять неизбежность остаточного процентного риска⁶ (появляющегося после устранения процентного риска посредством балансировки по дюрациям), его формализовать и минимизировать. Для того чтобы задача оптимизации дала независимое решение, работающее при разнообразных возмущениях спотовой кривой, в моделировании неопределенности устанавливаются минимальные допущения.

Впервые такой иммунизирующий механизм представлен в (Fong, Vasicek, 1984). Авторы показали, что падение конечной стоимости портфеля активов вследствие изменения процентных ставок имеет нижнюю границу, существование которой не обусловлено типом возмущения спотовой кривой. Для аддитивного шока форвардных ставок $\Delta i(t)$ теорема Фонга–Васичека утверждает:

$$\Delta V_H / V_H \geq -0,5KM^2, \quad (1)$$

$$M^2 = \frac{1}{V_0} \sum_{k=1}^n a_{t_k} (t_k - H)^2, \quad (2)$$

где V_0, V_H — стоимости портфеля активов в момент времени 0 и H соответственно; t_k — момент времени денежного поступления в портфель ($k = 1, \dots, n$); a_{t_k} — настоящая стоимость денежного поступления A_t в портфель; K — верхняя граница изменения наклона по всей временной структуре вплоть до срока T . Неравенство (1) показывает, что неблагоприятное изменение конечной стоимости портфеля активов ограничено снизу произведением двух величин, первая из которых, $(-0,5K)$, зависит только от шока форвардных ставок, вторая (M^2) — только от структуры активов.

⁵ Фрэнк Редингтон не использовал термина «дюрация» (duration), введенного Фредериком Маколеем, о работе которого он просто не знал. В современном изложении с использованием термина «дюрация» теория иммунизации впервые появилась в работах (Fisher, Weil, 1971; Vanderhoof, 1972; Weil, 1973).

⁶ По-английски данный риск именуется stochastic process risk (либо просто process risk), или immunization risk.

Поскольку в (1) только структура активов является подконтрольным свойством, она будет переменной выбора в задаче минимизации последствий несовершенной иммунизации посредством балансировки по дюрациям, которые количественно выражены целевой функцией M^2 , с наложением ограничений по первому допущению Редингтона. В соответствии с (2), M^2 — взвешенное среднее квадратов расстояний между моментами времени денежных поступлений и горизонтом инвестирования. Примерная структура активов, соответствующая решению задачи минимизации, — так называемый *залповый портфель* (bullet portfolio).

В работах (Shiu, 1987, 1990) обобщены результаты (Fong, Vasicek, 1984) и уточнены ограничения, при которых результат (Fong, Vasicek, 1984) справедлив. В (Montrucchio, Peccati, 1991) общие выводы (Shiu, 1987) обобщаются далее, включая случай, когда функция, описывающая шок форвардных ставок, может быть недифференцируемой и скачкообразной. Также дано уточнение для основного неравенства в (Fong, Vasicek, 1984). В (Bierwag, Fooladi, Roberts, 1993) показано, что M^2 эффективно минимизирует остаточный процентный риск только для узкого класса стохастических процессов, а портфель с минимальным значением M^2 против ожиданий не всегда будет залповым.

В (Nawalkha, Chambers, 1997; Nawalkha, Soto, Zhang, 2003) авторы развивают меру M^2 до Q -компонентной структуры — M -вектора — через разложение изменения прироста одной денежной единицы в ряд Тейлора порядка $Q+1$. При $Q=2$ M -вектор сводится к M^2 . Если $Q>2$, то, по утверждению (Nawalkha, Chambers, 1997), можно добиться почти совершенной иммунизации, так как увеличение элементов в M -векторе позволяет лучше учитывать отдаленность моментов времени денежных поступлений от горизонта инвестирования H и позволяет отразить более тонкие нюансы возмущения спотовой кривой.

Мера M^2 является квадратичной мерой разброса денежных поступлений относительно горизонта инвестирования. В (Balbas, Ibanez, 1998; Balbas, Ibanez, Lopez, 2002) была введена схожая мера линейного разброса. Так же, как и в (Fong, Vasicek, 1984), у авторов вводится параметр, определяющий наихудший (в рамках разумных и реалистичных предположений) сценарий изменения спотовой кривой.

В моделях (Fong, Vasicek, 1984; Shiu, 1987, 1990; Balbas, Ibanez, 1998), равно как и в их обобщениях, соблюдается правило: среди всех портфелей, выполняющих первое условие Редингтона, выбирается один с наименьшим значением меры разброса. Также имеется схожая характеристика: аддитивность шока форвардных ставок с допущением произвольной структуры по срочности. Поэтому такие модели иммунизируют:

- как в случае незначительных, так и в случае значительных возмущений спотовой кривой и ослабляют допущение;
- от разнообразия проявлений процентного риска, например от скручивания и раскручивания (twist) спотовой кривой.

Наконец, в (Nawalkha, Chambers, 1996) выдвигается модель иммунизации, которая сохраняет вышеперечисленные преимущества, но отличается более гибкой постановкой задачи оптимизации. В модели снимается ограничение на *точное* соблюдение первого условия Редингтона и подбирается мера разброса, которая возьмет на себя функцию минимизации не остаточного, а совокупного процентного риска. Если кроме предположения, что шок форвардных ставок является ограниченной функцией, не делается других предпосылок относительно возмущения спотовой кривой, то нет необходимости в жестком разграничении иммунизирующих функций между дюрацией, использование которой направлено на устранение неблагоприятных последствий параллельных сдвигов, и мерой разброса, минимизация которой устраняет остаточный процентный риск. Поддержка этой идеи исходит, в том числе, и из того что в условиях неполноты рынка портфель с требуемой дюрацией можно и не сформировать. Основное неравенство в (Nawalkha, Chambers, 1996) имеет вид:

$$\Delta V_H / V_H \geq -K_3 M^A, \quad (3)$$

где

$$M^A = \frac{1}{V_0} \sum_{k=1}^n a_k |t_k - H|, \quad (4)$$

$$K_3 = \max(|K_1|, |K_2|), \quad K_1 \leq \Delta i(t) \leq K_2 \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

Мера разброса M -Absolute (M^A) представлена в (4); это — взвешенное среднее абсолютное расстояние между моментом времени поступления денег и горизонтом инвестирования. Мера,

характеризующая возмущение спотовой кривой, дана в (5). Это максимальное отклонение форвардной кривой в большую или меньшую сторону. Как и прежде, минимизации подлежит компонент, который можно контролировать дизайном портфеля активов. Авторы (Nawalkha, Chambers, 1996) заявляют, что только в гипотетическом случае незначительного параллельного сдвига спотовой кривой иммунизация по дюрации Фишера–Вейла сработает лучше. Во всех реалистичных случаях иммунизация мерой M -Absolute окажется эффективнее.

На случай множественных платежей меры разброса распространены не были, если не считать условный пример в (Fabozzi, Fong, 1985), где с весьма ограничивающим предположением, что шок форвардных ставок является линейной функцией от срочности, получено приближенное выражение для изменения стоимости портфеля, содержащее неточности.

В теории иммунизации известно несколько работ, в которых прорабатывается вопрос множественных платежей. В (Bierwag, Kaufman, Toevs, 1983) дано решение как для совместимых, так и для несовместимых с общим экономическим равновесием предпосылок относительно возмущения спотовой кривой. В первом случае первое условие Редингтона является необходимым и достаточным, во втором случае — только необходимым, а достаточность достигается выполнением второго условия Редингтона в таком виде, что формируются два портфеля активов, для которых сроки первой и последней выплаты по портфелю обязательств будут верхней и нижней границей дюрации соответственно. В (Shiu, 1988) проблема рассматривается для общего случая: если возмущения спотовой кривой описываются выпуклой функцией, то разбивка на портфели активов выполняется так, чтобы каждая выплата по портфелю обязательств была иммунизирована отдельно, — что является необходимым и достаточным условием. Результаты (Shiu, 1988) были развиты и обобщены в (Shiu, 1990; Hürlimann, 2002). Отметим, что ни одна из вышеперечисленных работ не имеет прикладного характера и, по-видимому, даже приближенно не может рассматриваться как руководство к действию для практиков.

С точки зрения практического применения интересна работа (Theobald, Yallup, 2009), в которой предложена модель иммунизации на основе обобщения первого условия Редингтона на $m+1$ моментов иммунизации, где дюрация будет частным случаем при $m=1$. Отметим, что здесь неизбежна проблема выбора (trade-off), не имеющая места в модели иммунизации, выдвинутой в настоящей работе: повышение точности посредством увеличения слагаемых высшего порядка в ряде Маклорена усложняет работу оптимизационного механизма. Похожий подход используется в (De La Peña, 2021; Бешенов, Лапшин, 2019).

С начала 1990-х годов, когда отставание в разработках иммунизирующих механизмов для множественных платежей в сравнении с таковыми для единовременного платежа становится особенно явным, появляются работы об управлении портфелями активов и обязательств с фокусом на технике балансировки по платежам (Rosenbloom, Shiu, 1990; Ford, 1991, 1993). К настоящему времени возникающая здесь задача оптимизации сильно усложнилась технически. В публикациях предлагается применение стохастического линейного (Dutta et al., 2019) и нелинейного (Кора, Rusý, 2021) программирования с симуляциями Монте-Карло для оценки риска неплатежей (Bayliss et al., 2020). Однако, как разъяснено во введении, техника балансировки по платежам будет скорее вынужденной альтернативой и, ввиду слабой концептуальности и собственных погрешностей, не делает менее актуальными поиски полноценного иммунизирующего механизма на случай, когда по обязательствам совершаются множественные платежи.

3. ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Основное неравенство (см. формулу (12)) есть результат ослабления допущения о единичном платеже по обязательствам, которое, не будучи заявленным Редингтоном, тем не менее, стало неизменным условием моделирования иммунизации. В остальном мы ослабляем допущения 1)–3) так же, как это сделано в работах, в которых иммунизация моделируется с минимизацией меры разброса.

Пусть имеются потоки платежей по портфелю активов и обязательств — $\{A_{t_k}\}$ и $\{L_{t_k}\}$ соответственно, где $k=1, \dots, N$ — моменты времени наступления платежей. Не нарушая общности, можно считать, что моменты времени синхронизированы, полагая недостающие платежи равными нулю. Короткие позиции не допускаются, т.е. $\{A_{t_k}\} \geq 0$.

Введем необходимые обозначения. Пусть $i(t)$ и $\Delta i(t)$ — форвардная ставка на момент времени t по состоянию на настоящий момент и шок форвардной ставки соответственно;

$W_t = \exp\left\{-\int_0^t i(\tau) d\tau\right\}$ — дисконтная функция; $V_{A,0}$ и $V_{L,0}$ — настоящая стоимость портфелей активов и обязательств соответственно;

$$V_{A,0} = \sum_{t=t_1}^{t_N} A_t W_t, \quad (6)$$

$$V_{L,0} = \sum_{t=t_1}^{t_N} L_t W_t; \quad (7)$$

$\Delta V_{A,0}$ и $\Delta V_{L,0}$ — изменение настоящей стоимости вследствие шока форвардной для портфелей активов и обязательств соответственно,

$$\Delta V_{A,0} = \sum_{t=t_1}^{t_N} A_t W_t \left(\exp\left\{-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} - 1 \right), \quad \Delta V_{L,0} = \sum_{t=t_1}^{t_N} L_t W_t \left(\exp\left\{-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} - 1 \right);$$

$\|\Delta i\|$ — величина шока форвардной ставки в норме равномерной сходимости, $\|\Delta i\| = \sup_{\tau \in [0, t_N]} |\Delta i(\tau)|$.

Считаем (как принято в таких случаях), что активы куплены на привлеченные средства, т.е. $V_{A,0} = V_{L,0}$ ⁷. Исследуем расхождение в стоимости портфелей активов и обязательств, которое может произойти вследствие шока форвардной ставки. Предварительно рассмотрим ситуацию единичной выплаты по обязательствам L_H , приходящейся на момент времени $t = H$. Тогда

$$\Delta V_{L,0} = V_{L,0} \left(\exp\left\{-\int_0^H \Delta i(\tau) d\tau\right\} - 1 \right).$$

Учитывая равенство $V_{A,0} = V_{L,0}$ и (6), имеем

$$\Delta(V_{A,0} - V_{L,0}) = V_{A,0} + \Delta V_{A,0} - V_{L,0} - \Delta V_{L,0} = \sum_{t=t_1}^{t_N} A_t W_t \left[\exp\left\{\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} - \exp\left\{\int_0^H \Delta i(\tau) d\tau\right\} \right]. \quad (8)$$

Выражение в скобках в (8) можно представить как

$$\exp\left\{-\int_0^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} - \exp\left\{-\int_0^H \Delta i(\tau) d\tau\right\} = \exp\left\{-\int_0^H \Delta i(\tau) d\tau\right\} \left[\exp\left\{-\int_H^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} \right]. \quad (9)$$

Для первого сомножителя в правой части (9) справедливо неравенство $\exp\left\{-\int_0^H \Delta i(\tau) d\tau\right\} \leq \exp\{H \|\Delta i\|\}$. Здесь $\|\Delta i\|$ — по своему смыслу малая величина, так что все выражение имеет порядок единицы⁸ и может быть оценено как $\exp\{H \|\Delta i\|\} \leq 1 + \varepsilon$, ε — малая величина. Для второго сомножителя в (9), учитывая, что $e^x \geq 1 + x$, справедливо неравенство

$$\exp\left\{-\int_H^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} - 1 \geq -\int_H^t \Delta i(\tau) d\tau \geq -|H - t| \|\Delta i\|.$$

Переходя к относительным изменениям, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Delta(V_{A,0} - V_{L,0}) / V_{L,0} &= \sum_{t=t_1}^{t_N} A_t W_t \left[\exp\left\{-\int_0^H \Delta i(\tau) d\tau\right\} \right] \left[\exp\left\{-\int_H^t \Delta i(\tau) d\tau\right\} - 1 \right] / V_{L,0}, \\ \Delta(V_{A,0} - V_{L,0}) / V_{L,0} &\geq \left(\sum_{t=t_1}^{t_N} A_t W_t / V_{L,0} \right) [-(1 + \varepsilon)] [H - t] \|\Delta i\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку, по определению, $V_{A,0} = \sum_{t=t_1}^{t_N} A_t W_t$, величины $A_t W_t / V_{A,0}$ являются весами отдельных поступлений в денежном потоке по активам (как веса в стандартной формуле дюрации). Оценка (10) аналогична основному результату в (Nawalkha, Chambers, 1996), см. (1)–(3), с той лишь разницей, что там стоимости денежных потоков и их изменений вследствие шока форвардных ставок приводятся к моменту времени $t = H$, в то время как в (10) они приведены к моменту времени $t = 0$, поэтому возникает множитель $(1 + \varepsilon)$. Действовать именно так естественно, поскольку в настоящей работе у рассматриваемого произвольного потока выплат по обязательствам нет одного выделенного срока H . Кроме того, дисконтирование к настоящему моменту, а не к какому-либо моменту времени в будущем, соответствует общепринятой финансовой практике.

⁷ В различных прикладных областях условия типа нормировки часто не соответствуют сути задачи, в связи с чем в ряде работ рассматриваются так называемые несбалансированные транспортные задачи и вводятся расстояния между мерами, не удовлетворяющие условиям нормированности и даже знакоопределенности (Chizat, 2018; Gangbo et al., 2019).

⁸ Например, при горизонте $H = 20$ лет и контролируемом изменении процентных ставок $\Delta i = \pm 25$ базисных пунктов, $e^{H \|\Delta i\|} \approx 1,0513$.

Обратимся к общему случаю произвольного потока выплат. Предположим, что для каждого платежа L_h из $\{L_h\}_{h=1, \dots, t_N}$ для портфеля обязательств указаны (пока каким-либо произвольным образом, но далее возникнет задача оптимизации) финансирующие его платежи A_{th} из $\{A_{th}\}_{t, h=1, \dots, t_N}$, представляющие собой части платежей A_t . В совокупности $\{A_{th}\}$ образуют транспортный план. Тогда имеем:

$$\sum_{t=t_1}^{t_N} A_{th} W_t = L_h W_h, \quad \sum_{h=t_1}^{t_N} A_{th} = A_t, \quad V_{A,0} = \sum_{h=t_1}^{t_N} \sum_{t=t_1}^{t_N} A_{th} W_t = \sum_{h=t_1}^{t_N} L_h W_h = V_{L,0}.$$

Повторяя конструкцию для случая единичной выплаты L_H в (10) и соответственно применяя (10) для каждого L_h , после суммирования имеем

$$\Delta(V_{A,0} - V_{L,0}) = \sum_{h=t_1}^{t_N} \Delta \left[\sum_{t=t_1}^{t_N} (A_{th} W_t - L_h W_h) \right] \geq -(1 + \varepsilon) \sum_{h=t_1}^{t_N} \sum_{t=t_1}^{t_N} A_{th} W_t |h - t| \|\Delta i\|. \quad (11)$$

Таким образом, процентный риск в абсолютном выражении ограничен произведением двух (не считая множителя $(1 + \varepsilon)$) величин, из которых одна $(\sum_{h=t_1}^{t_N} \sum_{t=t_1}^{t_N} A_{th} W_t |h - t|)$ зависит от денежных потоков по портфелям активов и обязательств и спотовой кривой, наблюдаемой сейчас, и не зависит от возможных возмущений спотовой кривой в будущем; вторая $(\|\Delta i\|)$ представляет величину изменения форвардных ставок в смысле максимум-нормы в пространстве функций.

Далее, введем величины $a_{th} = A_{th} W_t / V_{A,0}$. Очевидно, что $a_{th} \geq 0$, $t, h = 1, \dots, N$ и что $\sum_h \sum_t a_{th} = 1$. Тогда величина $\gamma_t = \sum_h a_{th} = \sum_h (A_{th} W_t / V_{A,0}) = A_t W_t / V_{A,0}$ — вес (с учетом дисконтирования) платежа t в портфеле активов. Величина $\lambda_h = \sum_t a_{th} = \sum_t (A_{th} W_t / V_{A,0}) = L_h W_h / V_{L,0}$ (учтено равенство $V_{A,0} = V_{L,0}$) — вес (с учетом дисконтирования) платежа h в портфеле обязательств.

Понимая $\{a_{th}\}$ как вероятностную меру, видим, что ее частные распределения совпадают с относительными распределениями платежей, соответственно, по активам и обязательствам, а каждое отдельное a_{th} представляет собой, в дисконтированном и нормированном виде, часть платежа t по активам, направляемую на финансирование платежа h по обязательствам. Делим (11) на $V_{A,0}$ и получаем основное неравенство

$$\frac{\Delta(V_{A,0} - V_{L,0})}{V_{A,0}} \geq -(1 + \varepsilon) \sum_{h=t_1}^{t_N} \sum_{t=t_1}^{t_N} \frac{[A_{th} W_t]}{V_{A,0}} |h - t| \|\Delta i\|. \quad (12)$$

Выражение

$$\sum_{h=t_1}^{t_N} \sum_{t=t_1}^{t_N} \frac{[A_{th} W_t]}{V_{A,0}} |h - t| = \sum_h \sum_t a_{th} |h - t|$$

в правой части (12) в точности представляет собой функционал, фигурирующий в определении метрики Монжа–Канторовича–Вассерштейна, или EMD-расстояния. Расстояние EMD есть минимум такого функционала, взятый по всевозможным транспортным планам $\{a_{th}\}$.

Данная мера близости потоков платежей по портфелям активов и обязательств в отличие от мер разброса, представленных в обзоре литературы, имеет прямой финансовый смысл. Стоимость перемещения одной денежной единицы (без учета временной стоимости) на один год варьирует от 50 до 100% величины банковского спреда в зависимости от типа участника долгового рынка. Тогда EMD-расстояние дает информацию о стоимости всей операции приведения в соответствие активов и обязательств при условии, что она выполняется оптимальным образом.

4. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

В реальной ситуации управления задан поток платежей по обязательствам $\{L_t\}$, а поток $\{A_t\}$ составлен из промежуточных и конечных платежей по портфелю активов. Оптимальная иммунизация состоит в получении способа формирования портфеля активов, гарантирующего наилучшую оценку снизу в левой части (12). Понимая, вслед за (Nawalkha, Chambers, 1996), малость изменения форвардных ставок в смысле sup-нормы, ввиду (12), следует найти EMD-расстояние между потоками $\{A_t\}$ и $\{L_t\}$. Чтобы схема приводила к результату (12), необходимо решить следующие задачи.

Получить в замкнутом виде выражение для EMD-расстояния между $\{A_t\}$ и $\{L_t\}$ для последующей оптимизации по $\{A_t\}$. В противном случае две вложенные задачи численной оптимизации будут представлять техническую трудность.

Одновременно (для заданных $\{A_t\}$ и $\{L_t\}$) находить оптимальный транспортный план $\{a_{th}\}$.

Доказать неувлучшаемость оценки (12). В противном случае оптимизироваться будет не целевой показатель, а некоторый функционал, про который известно только, что он мажорирует целевой.

Решить задачу минимизации EMD-расстояния между $\{A_t\}$ и $\{L_t\}$, что даст искомый оптимальный портфель. Минимизация проводится по всевозможным потокам $\{A_t\}$, порождаемым различными портфелями из имеющегося набора инструментов. Одновременно будет найден оптимальный план $\{a_{th}\}$, который также позволит выявить остаточные несоответствия между активами и обязательствами, т.е. то, что не может быть устранено оптимизацией. Детали таких несоответствий могут быть использованы для достижения (если потребуется) совершенного хеджа (например, через заключение соглашений о форвардной ставке (FRA)).

4.1. Вычисление EMD-расстояния

Почти готовый ответ содержится в (Валландер, 1973): для вероятностных мер P и Q на прямой

$$EMD[P, Q] = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)| dx, \tag{13}$$

где $F(x), G(x)$ — функции распределения мер P, Q .

Необходимо лишь конкретизировать (13) для случая дискретных мер так, чтобы результат можно было легко вычислить. В рассматриваемой задаче меры задаются величинами $\{\gamma_t\} = \{\sum_h a_{th}\}$, $\{\lambda_h\} = \{\sum_t a_{th}\}$. Рассмотрим соответствующие функции распределения: $F(t) = \sum_{\tau \leq t} \gamma_\tau$, $G(h) = \sum_{\tau \leq h} \lambda_\tau$. Функции F и G — ступенчатые (кусочно-постоянные), монотонно неубывающие, непрерывные справа, определены на $[0, +\infty)$ так, что $F(0) = G(0) = 0$ и $F(+\infty) = G(+\infty) = 1$.

Предложение 1. $EMD[\{\gamma_t\}, \{\lambda_h\}] = \sum_{k=1}^{N-1} |F(t_k) - G(t_k)|(t_{k+1} - t_k)$.

Доказательство получается прямым применением (13) к случаю мер, сосредоточенных на конечном множестве точек $\{t_k\}$.

4.2. Оптимальный транспортный план

Структура $\{a_{th}\}_{t,h=1,\dots,N}$ ясна из конструкции п. 4.1. Полуось времени $[0, \infty)$ разбивается на чередующиеся промежутки, где $F(t) < G(t)$ и где $F(t) > G(t)$. (Случай $F(t) = G(t)$ можно отнести к любому из предыдущих.) При $F(t) < G(t)$ (поступления по активам запаздывают по отношению к выплатам по обязательствам) текущие выплаты нужно финансировать из будущих поступлений. При $F(t) > G(t)$ — текущие поступления используются для финансирования будущих выплат.

Приведем точное описание конструкции. Пусть $\gamma_k = F(t_k) - F(t_{k-1})$ — платеж — в дисконтированном и нормированном виде — из $\{A_t\}$. В общем случае для некоторых r, q будет

$$G(t_{r-1}) \leq F(t_{k-1}) < G(t_r) < \dots < G(t_k) < \dots < G(t_q) \leq F(t_k) < G(t_{q+1}).$$

При другом относительном расположении $F(t_k)$ и $G(t_k)$ некоторые узлы могут отсутствовать.

Предложение 2. В транспортном плане, реализующем $EMD[\{\gamma_t\}, \{\lambda_h\}]$, из платежа γ_k денежная сумма $a_{k,r} = G(t_r) - F(t_{k-1})$ идет на финансирование (оставшейся части) выплаты λ_r , $a_{k,r+1} = G(t_{r+1}) - G(t_r)$ — на финансирование выплаты λ_{r+1} , ... $a_{k,k} = G(t_k) - G(t_{k-1})$ взаимно погашается с (одновременной ей) выплатой λ_k , ... $a_{k,q} = G(t_q) - G(t_{q-1})$ идет на финансирование (будущей) выплаты λ_q , $a_{k,q+1} = F(t_k) - G(t_q)$ — на финансирование части (будущей) выплаты λ_{q+1} . Остальные $a_{k,j}$ равны нулю.

Как указано выше, все денежные суммы представлены в дисконтированном и нормированном виде (рис. 1).

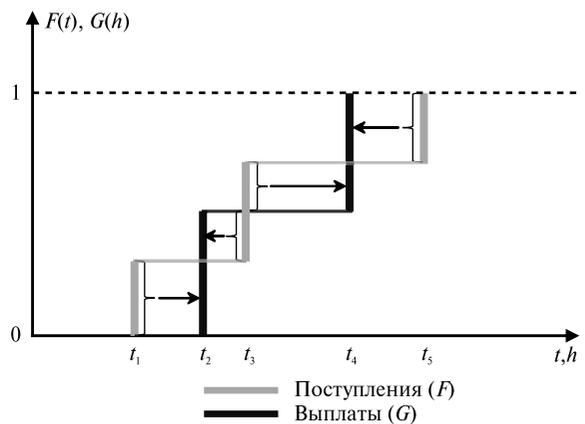


Рис. 1. Оптимальный транспортный план для условного примера иммунизации потока из двух выплат потоком из трех поступлений

4.3. Неулучшаемость оценки

На содержательном уровне неулучшаемость оценки (12) ясна заранее, поскольку оптимальный транспортный план — как при фиксированных $\{A_t\}, \{L_t\}$ (п. 4.1, 4.2), так и при оптимизации верхнего уровня по $\{A_t\}$ (см. п. 4.4), — не должен содержать встречных денежных потоков. Строго, в предложенной конструкции это можно показать следующим образом.

Зададим шок форвардной ставки Δi так, что при $F(t) < G(t)$ (недостаточный баланс) положим $\Delta i = \delta$, δ — малое положительное число; при $F(t) > G(t)$ (избыточный баланс) положим $\Delta i = -\delta$; при $F(t) = G(t)$ — можно применить любой вариант из двух или положить $\Delta i = 0$. Если шок рассматривается в классе непрерывных функций, можно добиться этого, исправив Δi в малых окрестностях узлов, так что это мало изменит значения интегралов. В итоге оценка (12) будет выполняться со сколь угодно малой наперед заданной погрешностью.

4.4. Минимизация EMD-расстояния

Решение задачи оптимальной иммунизации сведено к задаче оптимизации по целевой функции $\min_{\{A_t\}} EMD[\{A_t\}, \{L_t\}]$. Переменной выбора будут веса в структуре активов. Для решения может быть применен какой-либо стандартный метод численной оптимизации (см. разд. 5). В результате будут получены оптимальный портфель, оптимальный поток платежей $\{A_t^*\} = \operatorname{argmin}_{\{A_t\}} EMD[\{A_t\}, \{L_t\}]$ и оптимальный (верхнего уровня) транспортный план $\{a_{t,h}^*\}$.

5. АПРОБАЦИЯ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В стандартном предположении о детерминированных денежных потоках портфель составляется из облигаций с минимальной вероятностью дефолта, с фиксированными купонными выплатами, без опции отзыва, не индексируемыми на темпы инфляции.

Для демонстрационного расчета взяты данные торгов облигаций федерального займа (ОФЗ) на Московской бирже (МБ) за 27.07.2022. Для дисконтирования использовалась спотовая кривая, рассчитанная по методике МБ, со значениями динамических параметров на ту же дату, взятыми с сайта МБ⁹, а в качестве набора облигаций для составления портфеля — ОФЗ ПД 26220, 26227, 26224, 26218 и 26240 со сроками погашения в 2022, 2024, 2029, 2031 и 2036 г. Данные выпуски выбраны из числа наиболее ликвидных (что проверялось в том числе малостью корректирующих поправок) и используемых в спотовой кривой. Графики купонных выплат и погашений взяты с сайта эмитента — Министерства финансов России¹⁰. В качестве потока обязательств, для примера, был взят 10-летний аннуитет с первым платежом 27.02.2023. Чтобы дополнительно продемонстрировать простоту и доступность предлагаемого метода, расчеты умышленно были выполнены в обычном табличном процессоре с модулем оптимизации (MS Excel), а не в какой-либо среде программирования. При этом время сходимости итераций градиентного спуска и точность вычислений оказались вполне удовлетворительными для практического использования.

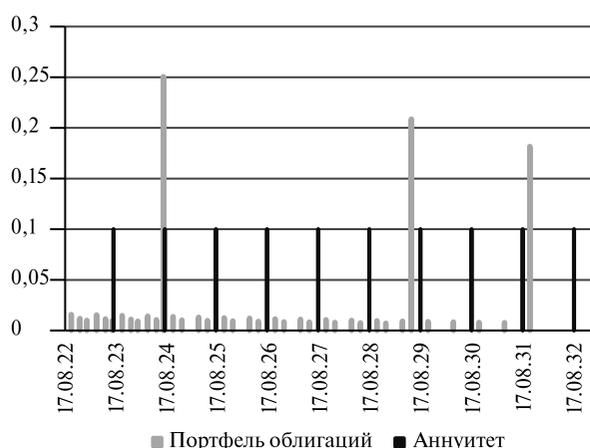


Рис. 2. Поток платежей по обязательствам и оптимальному иммунизированному портфелю

Предварительно для проверки метода в качестве пробных потоков обязательств задавались портфели из выбранных облигаций с различными соотношениями долей. Всякий раз метод успешно и точно воспроизводил эти доли в своем оптимальном иммунизированном портфеле.

В итоге решением задачи оптимизации является портфель, состоящий из ОФЗ 26227; 26224; 26218 в долях 0,28; 0,33; 0,39 соответственно. EMD-расстояние между портфелем и аннуитетом равно 0,62 по формуле (12). Для сравнения, для отдельных облигаций из списка такие расстояния равны соответственно 4,43; 3,03; 1,62; 1,75 и 3,69, т.е. мы наблюдаем очевидное улучшение. Потоки платежей по обязательствам и оптимальному иммунизированному портфелю представлены на рис. 2.

⁹ <https://www.moex.com/ru/marketdata/indices/state/g-curve>

¹⁰ https://minfin.gov.ru/ru/performance/public_debt/internal/release

Заметим, что иммунизация с минимизацией EMD-расстояния не приводит к абсолютно безрисковому портфелю, это же относится к любому иммунизирующему механизму, предложенному когда-либо.

Современный взгляд на неопределенность на финансовых рынках таков, что хеджирование процентного риска следует понимать не как равенство конечных стоимостей *ex ante* и *ex post* в духе классической теории Редингтона, а как нахождение приемлемой верхней границы для убытков. При этом иммунизация потока множественных платежей с минимизацией меры разброса может дать даже более защищенный портфель, чем такая же иммунизация единичного платежа: активы будут структурированы равномернее, чем в залповом портфеле, структура которого является оптимальной при иммунизации единичного платежа, и как следствие, могут представлять меньший идиосинкратический риск.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Финансовые посредники, управляющие портфелями чувствительных к движению процентных ставок инструментов «по обе стороны баланса» (пенсионные фонды, страховые компании, управляющие частным капиталом), регулярно сталкиваются с проблемой выравнивания денежных потоков по активам и обязательствам в условиях непрерывно меняющихся процентных ставок. Управление процентным риском является неотъемлемым компонентом их рутинной практики. В процессе своей эволюции теория иммунизации предложила ряд идейных инноваций в управлении процентными рисками, однако все они касаются только частного случая хеджирования единичного платежа. Ввиду отсутствия в рамках теории иммунизации решений для потока множественных платежей, ориентированных на практику, финансовые институты вынуждены прибегать к хеджирующим механизмам *ad hoc*, к примеру, — к балансировке по платежам (*cash flow matching*).

В статье предложен новый иммунизирующий механизм, универсальный в плане хеджирования потока как с единичным, так и с множественными платежами при самых общих предположениях относительно возмущения спотовой кривой. В основе данного механизма лежит сложившаяся в научной литературе (Fong, Vasicek, 1984; Nawalkha, Chambers, 1996; Balbas, Ibanez, 1998) концепция минимизации меры разброса, характеризующей чувствительность портфеля активов к возмущению спотовой кривой. В отличие от вышеперечисленных работ предложенная в настоящей работе мера разброса — EMD-расстояние — применима для оценки разброса по отношению к множественным моментам времени. Базовая конструкция — расстояние Монжа–Канторовича–Вассерштейна — успешно применяется в теории меры, теории транспортных задач, методах распознавания образов и т.д., но впервые рассматривается как инструментарий интегрированного управления портфелями активов и обязательств.

Для оптимизации структуры активов поставлены и решены такие задачи, как выражение EMD-расстояния в замкнутом виде, доказательство неулучшаемости оценки верхней границы убытков, нахождение оптимального транспортного плана. Действенность иммунизирующего механизма проиллюстрирована на числовой симуляции с привлечением реальных данных. Для демонстрации технической простоты метода задача оптимизации была решена в табличном процессоре MS Excel. Представляется, что, обладая как четкой теоретической трактовкой, так и высоким потенциалом практической реализуемости, модель иммунизации с минимизацией EMD-расстояния на сегодняшний день является оптимальным решением проблемы хеджирования потока множественных платежей.

При этом настоящая работа раскрывает потенциал дальнейшего совершенствования иммунизирующих механизмов, которого можно было бы добиться, рассмотрев снятие ряда ограничений, — таких как равенство настоящих стоимостей портфелей активов и обязательств, т.е. постановка несбалансированной транспортной задачи и запрет на короткие позиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Бешенов С.В., Лапшин В.А. (2019). Параметрическая иммунизация процентного риска на основе моделей срочной структуры процентных ставок // *Экономический журнал ВШЭ*. Т. 23 (1). С. 9–31. [Beshenov S.V., Lapshin V.A. (2019). Parametric immunization of interest rate risk with the term structure of interest rates. *HSE Economic Journal*, 23 (1), 9–31 (in Russian).]

- Богачев В.И., Колесников А.В.** (2012). Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы // *Успехи математических наук*. Т. 67. Вып. 5 (407). С. 3–110. [**Bogachov V.I., Kolesnikov A.V.** (2012). The Monge–Kantorovich problem: Advancements, links, and prospects. *Russian Mathematical Surveys*, 67, 5 (407), 3–110 (in Russian).]
- Валландер С.С.** (1973). Вычисление расстояния по Вассерштейну между распределениями вероятностей на прямой // *Теория вероятностей и ее применения*. Т. 18. Вып. 4. С. 824–827. [**Vallander S.S.** (1973). The computation of the Wasserstein distance among probability distributions. *Theory of Probability and its Applications*, 18, 4, 824–827 (in Russian).]
- Balbas A., Ibanez A.** (1998). When can you immunize a bond portfolio? *Journal of Banking and Finance*, 22, 1571–1595.
- Balbas A., Ibanez A., Lopez S.** (2002). Dispersion measures as immunization risk measures. *Journal of Banking and Finance*, 26 (6), 1229–1244.
- Bayliss C., Serra M., Nieto A., Juan A.** (2020). Combining a matheuristic with simulation for risk management of stochastic assets and liabilities. *Risks* 8 (4), 131.
- Bierwag G.** (1977). Immunization, duration, and the term structure of interest rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12 (5), 725–742.
- Bierwag G., Fooladi I., Roberts G.** (1993). Designing an immunized portfolio: Is M-squared the key? *Journal of Banking and Finance*, 17, 1147–1170.
- Bierwag G., Kaufman G., Toevs A.** (1983). Immunization strategies for funding multiple liabilities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18 (1), 113–123.
- Chizat L.** (2018). Unbalanced optimal transport: Dynamic and Kantorovich formulations. *Journal of Functional Analysis*, 274 (11), 3090–3123.
- De La Peña J.I., Iturricastillo I., Moreno R., Roman F., Trigo E.** (2021). Towards an immunization perfect model? *International Journal of Finance & Economics*, 26 (1), 1181–1196.
- Dutta G., Rao H., Basu S., Tiwari M.** (2019). Asset liability management model with decision support system for life insurance companies: Computational results. *Computers & Industrial Engineering*, 128, 985–98.
- Fabozzi F.J., Fong H.G.** (1985). Fixed income portfolio management. Appendix E: Derivation of risk immunization measures. Homewood Illinois: Dow Jones-Irwin.
- Fisher L., Weil R.** (1971). Coping with the risk of interest rate fluctuations: Returns to bondholders from naïve and optimal strategies. *Journal of Business*, 44 (4), 408–431.
- Fong G., Vasicek O.** (1984). A risk minimizing strategy for portfolio immunization. *Journal of Finance*, 39 (5), 1541–1546.
- Ford P.** (1991). Some Further Investigations into Cashflow Matching. *AFIR Colloquium*, Rome, Italy, 539–551.
- Ford P.E.B.** (1991). Cashflow matching using modified linear programming. *AFIR Colloquium, Brighton, United Kingdom*, 3, 301–322.
- Gangbo W., Li W., Osher S., Puthawala M.** (2019). Unnormalized Optimal transport. *Journal of Computational Physics*, 399, 108940.
- Hürlimann W.** (2002). On immunization, stop-loss order and the maximum shiu measure. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 315–325.
- Ingersoll J. Jr., Skelton J., Weil W.** (1978). Duration forty years later. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13 (4), 627–650.
- Khang C.** (1979). Bond immunization when short-term interest rates fluctuate more than long-term rates. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14 (5), 1085–1090.
- Кора М., Русý Т.** (2021). A decision-dependent randomness stochastic program for asset-liability management model with a pricing decision. *Annals of Operations Research*, 299, 241–271.
- Leibowitz M.** (1986). The dedicated bond portfolio in pension funds — Part I: Motivations and basics. *Financial Analysts Journal*, 42 (1), 68–75.
- Monge G.** (1781). *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*. Paris: De l’Imprimerie Royale.
- Montrucchio M., Peccati L.** (1991). A note on shiu-fisher-weil immunization theorem. *Insurance: Mathematics and Economics*, 10, 125–131.
- Nawalkha S., Chambers D.** (1996). An improved immunization strategy: M-absolute. *Financial Analysts Journal*, 52 (5), 69–76.
- Nawalkha S., Chambers D.** (1997). The M-vector model: Derivation and testing of extensions to M-square. *Journal of Portfolio Management*, 23 (2), 92–98.

- Nawalkha S., Soto G., Zhang J. (2003). Generalized M-vector models for hedging interest rate risk. *Journal of Banking and Finance*, 27 (8), 1581–1604.
- Panaretos V., Zemel Y. (2019). Statistical aspects of wasserstein distances. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 6, 405–431.
- Redington F. (1952). Review of the principles of life-office valuations. *Journal of the Institute of Actuaries*, 78 (3), 286–340.
- Rosenbloom E., Shiu E. (1990). The matching of assets with liabilities by goal programming. *Managerial Finance*, 16 (1), 23–26.
- Shiu E. (1987). On the Fisher–Weil immunization theorem. *Insurance: Mathematics and Economics*, 6, 259–266.
- Shiu E. (1990). On Redington’s theory of immunization. *Insurance: Mathematics and Economics*, 9, 171–175.
- Theobald M., Yallup P. (2009). Liability-driven investment: Multiple Liabilities and the question of the number of moments. *European Journal of Finance*, 16 (5), 413–435.
- Torres L., Pereira L., Amini H. (2021). *A survey on optimal transport for machine learning: Theory and applications*. arXiv: 2106.01963. DOI: 10.48550/arXiv.2106.01963
- Van der Meer R., Smink M. (1993). Strategies and techniques for asset-liability management: An overview. *Geneva Papers on Risk and Insurance, s and Practice*, 18 (67), 144–157.
- Vanderhoof I. (1972). The interest rate assumption and the maturity structure of the assets of a life insurance company. *Transactions of Society of Actuaries*, 24 (69), 157–192.
- Weil R. (1973). Macaulay’s duration: An appreciation. *Journal of Business*, 46 (4), 589–592.

Optimal solution for immunizing arbitrarily scheduled multiple liabilities

© 2023 S.V. Kurochkin, V.A. Rodina¹¹

S.V. Kurochkin,

HSE University, Moscow, Russia; e-mail: skurochkin@hse.ru

V.A. Rodina,

HSE University, Moscow, Russia; e-mail: victoriarodina@hse.ru

Received 22.11.2022

Abstract. Immunization, a control tool for interest rate dependent changes in the value of an asset portfolio given a similar dependency for a target liability portfolio, is central to portfolio management. A vast body of academic literature describes various immunization models either for the case of a single liability payout or assuming a specific change in the yield curve, or both. This paper is the first to propose an immunization solution for the case of multiple liability payouts assuming arbitrary changes in the yield curve. For the case of multiple liability payouts, we generalize M-Absolute, which is a risk measure proposed by Nawalkha и Chambers (1996), and estimate the proximity of payment streams with EMD (the Wasserstein distance) which is a well-known tool in machine learning. In line with Fong and Vasicek (1984), it is shown that portfolio’s interest rate risk is constrained to a product of two factors with one factor, EMD between asset and liability streams, being only dependent on the portfolio structure and the other factor, the sup-norm of the function of interest rate shocks, being solely determined by changes in the yield curve. We also show the unimprovability of the estimate and obtain, in an explicit form, a computational procedure for the optimal immunizing portfolio. The results are practically applicable as exemplified by the immunization of an annuity-type security with a portfolio of government bonds.

Keywords: ALM, immunization, interest rate risk, dispersion measure, Wasserstein distance, Monge–Kantorovich–Rubinstein metric, EMD.

JEL Classification: G1, G2, F3.

For reference: **Kurochkin S.V., Rodina V.A. (2023).** Optimal solution for immunizing arbitrarily scheduled multiple liabilities. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 87–99. DOI: 10.31857/S042473880025861-6

¹¹ The authors are grateful to the reviewer of the first version of the article for valuable comments that made it possible to improve the text.

===== МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ =====

**Компьютерные испытания прототипа непараметрической модели
частичного равновесия¹**

© 2023 г. Н.М. Светлов

Н.М. Светлов,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: nikolai.svetlov@gmail.com

Поступила в редакцию 08.02.2023 г.

Аннотация. На основе непараметрических формулировок задач о производственной программе и о выборе потребителя предложена вычислимая модель частичного равновесия с непараметрическим представлением спроса и предложения. Задачи производителя и потребителя представлены системами неравенств взаимно двойственных задач. Это позволяет свести отыскание равновесия к минимизации разностей между их целевыми функциями, суммированных по производителям и потребителям. Такая задача может иметь более одного локального оптимума. Компьютерными испытаниями на искусственных наборах данных подтверждено, что дополнение числовой модели техническими ограничениями, заведомо выполняющимися в равновесии, способно эффективно направлять поиск решения с использованием процедуры CONOPT4 к глобальному оптимуму (которому соответствует искомое равновесие). Во всех проведенных испытаниях равновесные решения найдены с первой попытки. Полученный результат имеет существенное значение для создания инструментальных средств, используемых на отраслевом уровне при управлении нестабильной экономической динамикой, характерной для периодов смены систем технологий широкого применения. Такие инструменты смогут полнее использовать информацию, содержащуюся в исходных эмпирических данных.

Ключевые слова: частичное равновесие, вычислимая модель, непараметрическая граница производственных возможностей, непараметрическая граница возможностей потребления, первая теорема двойственности, компьютерные испытания.

Классификация JEL: C02, C14, C63.

Для цитирования: Светлов Н.М. (2023). Компьютерные испытания прототипа непараметрической модели частичного равновесия // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 100–111. DOI: 10.31857/S042473880025862-7

ВВЕДЕНИЕ

Поиск путей развития математического инструментария для исследования структурных предпосылок становления в экономике нового технологического уклада — задача, от решения которой зависят, во-первых, сокращение потерь, связанных с обновлением системы технологий широкого применения; во-вторых, своевременное, с опережением конкурентов, использование преимуществ взаимодействия этих технологий с ресурсным потенциалом национальной экономики и ее отраслей. В этом поиске следует сочетать разработки, отражающие специфику технологий нового уклада², с классическими подходами, способными имитировать (в некоторых границах) реакции рынков на происходящие изменения. Такие подходы необходимы для выявления структурных тенденций развития экономики и связанных с ними рисков при различных сценариях становления нового мирового технологического уклада. К их числу относятся, в частности, вычислимые модели общего и частичного равновесия.

В данной статье представлен вклад в изучение возможностей обновления инструментария моделирования частичного равновесия при помощи непараметрического представления спроса и предложения.

¹ Компьютерные испытания модели проведены на инфраструктуре ВИАПИ имени А.А. Никонова — филиала ФГБНУ ФНЦ ВНИИЭСХ. Автор благодарен руководству и всему коллективу филиала за возможность выполнить эту часть исследования.

² Например (Дементьев, 2021; Дементьев, Евсюков, Устюжанина, 2020; Акаев, Садовничий, 2016).

В отраслевом анализе и в исследованиях международной торговли вычислимые модели частичного равновесия (ВМЧР)³, не содержащие непараметрических субмоделей, успешно применяются, несмотря на присущие им недостатки. Во-первых, это погрешности, возникающие из-за игнорирования взаимовлияния моделируемых рынков и остальной экономики⁴. Во-вторых, широкое (и, как правило, вынужденное) использование предположения о постоянстве эластичностей предложения и спроса по ценам. Наше исследование сфокусировано на втором недостатке.

Предположение постоянства эластичностей принимается ради замещения массовых исходных данных немногими параметрами. Помимо потери части полезной информации, содержащейся в данных, статистическое оценивание этих эластичностей — непростая задача, для решения которой далеко не всегда находят подходящие эмпирические данные.

Критика предположения о постоянстве эластичности спроса представлена в статье (Houthakker, 1965), а приводимые в ней же контраргументы в поддержку этого предположения оспорены в работе (Goldberger, Gamaletsos, 1970). Направления совершенствования моделей потребительского спроса представлены в статье (Brown, Deaton, 1972).

Что касается эластичностей предложения, в ряде ВМЧР удается обойтись без них благодаря включению в эти модели подзадач об оптимальном плане производителей⁵. Вычислительные трудности, сопровождающие такой подход, преодолеваются одним из трех способов:

— итеративное согласование равновесных цен и оптимального плана — способ ресурсоемкий и не гарантирует сходимости вычислительного процесса, но все же применяется в модели CAPRI (Britz, Witzke, 2014);

— решение задачи максимизации совокупного общественного благосостояния, эквивалентной исходной задаче о равновесии; этот прием используется в модели GLOBIOM (Ermolieva et al., 2016). Он применим до тех пор, пока выполнены предпосылки второй теоремы экономики благосостояния, устанавливающей условия, при которых любому оптимуму по Парето соответствует конкурентное равновесие;

— представление задачи производителя в форме системы неравенств взаимно двойственных задач линейного программирования. Этот способ пригоден только для линейных задач производителей, но свободен от недостатков первых двух способов. Данный способ положен в основу PF+PE-архитектуры ВМЧР с непараметрической субмоделью предложения⁶ (Светлов, 2019б). Ее расширенная версия PF+PE+ED⁷, учитывающая случайный характер производственных процессов в сельском хозяйстве, использована при создании пространственной ВМЧР оптовых рынков сельскохозяйственной продукции России (Светлов, Шишкина, 2019; Светлов и др., 2020, глава 5) на базе модели оптимальной территориально-отраслевой структуры сельского хозяйства страны (Svetlov et al., 2019), где применено непараметрическое представление технологии в соответствии с (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978). Модель нашла применение в ряде прикладных исследований, где проявились достоинства ее архитектуры: более полное использование полезной информации, содержащейся в исходных данных о производстве; алгоритмическая простота трансформации исходных данных в числовую модель; меньшая обусловленность результатов априорными предположениями; широкие возможности формулирования сценариев, представляющих интерес для практики. Все это породило надежду, что непараметрическое представление спроса наделит модель новыми преимуществами.

Цели данной статьи — сформулировать ВМЧР с непараметрическим представлением предложения и спроса; предложить приемы преодоления вычислительных трудностей, обусловленных множественностью ее локальных экстремумов; продемонстрировать ее реализуемость в компьютерных испытаниях на искусственных данных.

³ Обзоры использования ВМЧР при исследовании энергетической политики содержатся в статьях (Savvidis et al., 2019; Ruhnau et al., 2022); рынков нефти и газа — в препринте (Hurrmann, 2013). Множество таких моделей применяется при анализе агропродовольственной политики — см. обзор в статье (Прокопьев, 2015), а также статьи (Ermolieva et al., 2016; Chantreuil, Hanrahan, Leeuwen, 2012). Разработан ряд ВМЧР для рынков сельскохозяйственной продукции России (Fock et al., 2000; Kiselev, Stokov, Belugin, 2016; Киселев, Ромашкин, Белугин, 2022) и Беларуси (Земцов, Филиппов, 2009).

⁴ См., например, (Just, 2011).

⁵ В англоязычной литературе — например в (Savvidis et al., 2019) — такие модели называются моделями с явным представлением технологий (technology explicit partial equilibrium models).

⁶ (Non-parametric) Production Frontier (непараметрическая граница производственных возможностей) + Partial Equilibrium (частичное равновесие).

⁷ Empirical (probability) Distribution (эмпирическое распределение вероятностей).

1. МОДЕЛЬ

В задаче имеются один производитель, максимизирующий прибыль, и множество потребителей, максимизирующих заданные линейные функции полезности. Ни производитель, ни потребители не обладают контролем над ценами продукции, но располагают полной актуальной информацией о них. Выполняется закон одной цены (что подразумевает отсутствие транзакционных издержек).

Производитель обладает ресурсами в фиксированных объемах. Его технологическое множество определяется приближенно из наблюдений его предыстории (либо предыстории его аналогов) по следующим правилам:

– любая фактически наблюдавшаяся пара векторов затрат и выпусков принадлежит технологическому множеству;

– технологическому множеству принадлежит любая линейная комбинация вышеуказанных векторов с неотрицательными весами, лежащими в границах, которые предполагаются известными. Любая иная пара векторов затрат–выпуска не принадлежит технологическому множеству.

В соответствии с введенными предположениями функция предложения $\mathbf{x}^* = F_1(\mathbf{a}_0, \mathbf{p})$ задается через непараметрическую границу производственных возможностей⁸ (Farrell, 1957; Charnes et al., 1978) с ограниченной областью уверенности (Thompson et al., 1990):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{k}^* \end{pmatrix} = \arg \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{k})^T} (\mathbf{p}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{k} \leq \mathbf{a}_0; \mathbf{B}\mathbf{k} \geq \mathbf{x}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{k}_1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{k}_2), \quad (1)$$

где \mathbf{x}^* — вектор предложения продуктов, включенных в модель; \mathbf{k}^* — оптимальное значение вектора \mathbf{k} множителей Фаррелла⁹, число компонентов которого равно числу включенных в модель наблюдений производства; \mathbf{p} — вектор цен; \mathbf{x} — вектор объемов производства; \mathbf{A} — матрица данных о затратах, в которой строка соответствует ресурсу, а столбец — наблюдению; \mathbf{a}_0 — вектор наличия ресурсов; \mathbf{B} — матрица данных о выпусках, в которой строка соответствует продукту, а столбец — наблюдению; $\mathbf{0}$ — вектор соответствующего порядка, все компоненты которого равны нулю; \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — границы области уверенности¹⁰. Все компоненты векторов \mathbf{p} , \mathbf{a}_0 , \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} неотрицательны. Запись $\begin{pmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{k}^* \end{pmatrix}$ означает, что вектор включает все компоненты вектора \mathbf{x} и все компоненты вектора \mathbf{k} ; знаки \leq и \geq в контексте векторов обозначают операции « \leq » и « \geq », применяемые попарно ко всем компонентам обоих векторов. В задаче (1) переменными являются \mathbf{x} и \mathbf{k} .

Каждый потребитель составляет потребительский набор, максимизирующий его функцию полезности, из продуктов, поставляемых производителем, в пределах потребительского множества (одного для всех потребителей) и своего бюджета. Потребительское множество задается подобно технологическому: оно исчерпывается фактически наблюдавшимися потребительскими наборами, а также всеми линейными комбинациями наблюдавшихся наборов с весами, заключенными в неотрицательных границах (известных). Бюджет потребителя определяется стоимостью потребительского набора, выбранного потребителем на определенную дату, в ценах на ту же дату. Эти же цены приравниваются к весам продуктов в его линейной функции предпочтения¹¹.

Для функции $\mathbf{y}_i^* = F_D(\mathbf{p}_{0i}, \mathbf{p}_{1i}^T \mathbf{c}_i)$ спроса потребителя i принимается непараметрическая форма представления, схожая с (1):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_i^* \\ \mathbf{m}_i^* \end{pmatrix} = \arg \max_{(\mathbf{y}_i, \mathbf{m}_i)^T} (\mathbf{p}_{0i}^T \mathbf{y}_i \mid \mathbf{p}_{1i}^T \mathbf{y}_i \leq \mathbf{p}_{0i}^T \mathbf{c}_i; \mathbf{C}\mathbf{m}_i \geq \mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i \geq \mathbf{0}; \mathbf{m}_{1i} \leq \mathbf{m}_i \leq \mathbf{m}_{2i}), \quad (2)$$

⁸ Обзор приложений подобных представлений на примере сельскохозяйственной проблематики содержится в статье (Светлов, 2019а).

⁹ Множители Фаррелла — коэффициенты линейной комбинации известных (наблюдавшихся) производственных процессов, задающие некоторый производственный процесс, принадлежащий технологическому множеству производителя. Положим, что на этом множестве задано упорядочение по прибыли при ценах \mathbf{p} . Тогда задача (1) определяет спрос как супремум его подмножества, ограниченного объемом ресурсов \mathbf{a}_0 .

¹⁰ Подмножество множителей Фаррелла, задающее производственные процессы за исключением тех, которые производитель не выберет из-за неуверенности в результате.

¹¹ Подразумевается, что предпочтения потребителей следуют (с некоторым лагом) за рыночными ценами в духе (Pollak, 1977; Светлов, 2002, п. 2.2).

где \mathbf{y}_i^* — вектор спроса на продукты со стороны потребителя i ; \mathbf{m}_i^* — оптимальное значение вектора \mathbf{m}_i множителей, аналогичных по смыслу множителям Фаррелла в приложении к векторам потребления (число компонентов вектора \mathbf{m}_i равно числу наблюдений потребления); \mathbf{p}_1 — вектор цен; \mathbf{p}_{0i} — вектор весов линейной функции предпочтения потребителя i ; \mathbf{y}_i и \mathbf{c}_i — искомый и наблюдаемый вектора потребления потребителя i ; \mathbf{C} — матрица данных о потреблении, в которой строка соответствует продукту, а столбец — наблюдению; \mathbf{m}_{1i} и \mathbf{m}_{2i} — векторы границ области уверенности, на которую распространяется потребительский опыт агента i и за пределы которой он не рискует выходить. Все компоненты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{0i}, \mathbf{c}_i, \mathbf{m}_{1i}$ и \mathbf{m}_{2i} , а также матрицы \mathbf{C} неотрицательны. Переменными задачи (2) являются векторы \mathbf{y}_i и \mathbf{m}_i .

При ценах, равных \mathbf{p}_{0i} , план потребления \mathbf{c}_i эффективен по построению задачи. При достаточно большом отклонении цен от \mathbf{p}_{0i} эффективным может стать иной план.

Хотя в литературе встречаются непараметрические модели границ возможностей потребления¹², основанной на них модели спроса с линейной функцией предпочтения, насколько известно автору, нет. В отличие от модели предложения, в которой применено неоднократно апробированное представление, способность предложенной модели спроса адекватно воспроизводить фактические данные требует изучения.

Непараметрическая ВМЧР включает задачи (1), (2), а также уравнения

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^* \geq \sum_i \mathbf{y}_i^*, \mathbf{p} \odot \mathbf{x}^* = \mathbf{p}_1 \odot \sum_i \mathbf{y}_i^*. \quad (3)$$

В (3) переменными являются векторы $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{x}^*$ и \mathbf{y}_i^* . Символ « \odot » обозначает покомпонентное (адямарово) произведение двух векторов.

Если множества допустимых решений задач (1) и (2) не пусты, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{m}_{1i} = \mathbf{0} \quad \forall i$, а все компоненты векторов \mathbf{k}_2 и \mathbf{m}_{2i} достаточно велики, то хотя бы одно равновесие в задаче (1)–(3) существует, поскольку она отвечает условиям его существования в форме (Полтерович, 1990, с. 38–39).

Из-за того что цены входят в (1) и (2) в качестве констант, а в (3) — в качестве переменных, модель (1)–(3) неудобна для численной реализации. Поэтому переформулируем ее с использованием первой теоремы двойственности в линейном программировании по образцу (Светлов, 2019б):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{k} \leq \mathbf{a}_0; \mathbf{B}\mathbf{k} \geq \mathbf{x}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{k}_1 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{k}_2; \mathbf{A}^T\lambda_1 + \mathbf{B}^T\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \geq \mathbf{0}; \\ -\lambda_2 \geq \mathbf{p}; \lambda_1 \geq \mathbf{0}; \lambda_2 \leq \mathbf{0}; \lambda_3 \leq \mathbf{0}; \lambda_4 \geq \mathbf{0}; z_0 = \mathbf{p}^T\mathbf{x} - (\mathbf{a}_0^T\lambda_1 + \mathbf{k}_1^T\lambda_3 + \mathbf{k}_2^T\lambda_4); \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_1^T\mathbf{y}_i \leq \mathbf{p}_{0i}^T\mathbf{c}_i; \mathbf{C}\mathbf{m}_i \geq \mathbf{y}_i; \mathbf{y}_i \geq \mathbf{0}; \mathbf{m}_{1i} \leq \mathbf{m}_i \leq \mathbf{m}_{2i}; \\ \mathbf{p}_1\mu_{1i} - \mu_{2i} \geq \mathbf{p}_{0i}^T\mathbf{c}_i; \mathbf{C}^T\mu_{2i} + \mu_{3i} + \mu_{4i} \geq \mathbf{0}; \mu_{1i} \geq \mathbf{0}; \mu_{2i} \leq \mathbf{0}; \mu_{3i} \leq \mathbf{0}; \mu_{4i} \geq \mathbf{0}; \\ z_i = \mathbf{p}_{0i}^T\mathbf{y}_i - ((\mathbf{p}_{0i}^T\mathbf{c}_i)\mu_{1i} + \mathbf{m}_{1i}^T\mu_{3i} + \mathbf{m}_{2i}^T\mu_{4i}); \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\mathbf{x} \geq \sum_i \mathbf{y}_i; \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 \geq \mathbf{0}; \quad (6)$$

$$z_0 + \sum_i z_i \rightarrow \max. \quad (7)$$

Обозначения, в дополнение к введенным к задаче (1)–(3): $\lambda_1 \dots \lambda_4$ и $\mu_{1i}, \dots, \mu_{4i}$ — двойственные переменные (векторы двойственных переменных) соответственно к задачам производителя и потребителей; z_0 — разница между целевыми функциями прямой и о предельных ценах в оптимальном плане); z_i — разница между целевыми функциями прямой и двойственной задач потребителя i . В задаче (4)–(7) переменными являются векторы $\mathbf{k}, \mathbf{x}, \lambda_1 \dots \lambda_4, \mathbf{m}_i, \mathbf{y}_i, \mu_{1i}, \mu_{2i} \dots \mu_{4i}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, z, z_i \quad \forall i$. Если в ее локальном оптимуме значение целевой функции равно нулю и выполнено условие $\mathbf{p} \odot \mathbf{x} = \mathbf{p}_1 \odot \sum_i \mathbf{y}_i$, то, в силу первой теоремы двойственности в линейном программировании, в указанных условиях гарантирующей оптимальность планов производителя и потребителей при ценах $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, данный локальный оптимум является глобальным оптимумом и частичным равновесием для задачи (1)–(3).

¹² Например (Lee, Hwang, Kim, 2005).

2. МЕТОДИКА КОМПЬЮТЕРНЫХ ИСПЫТАНИЙ

2.1. Общие условия

Имитируется ситуация, в которой данные о затратах, выпусках, потреблении, ценах и предпочтениях (и только они) известны как разработчику числовой модели, так и агентам моделируемого рынка. Процессы, генерирующие данные, не известны ни разработчику модели, ни агентам.

Изучены спецификации модели (4)–(7) с: 1) двумя ресурсами и двумя продуктами; 2) двумя ресурсами и тремя продуктами; 3) тремя ресурсами и четырьмя продуктами. Такой набор спецификаций дает возможности изучить вычислительные свойства модели в мере, необходимой для перехода к предстоящим экспериментам на реальных данных.

Для каждой спецификации выполнено 12 прогонов, образованных комбинацией;

– *условий субсидирования* (1) субсидии отсутствуют; 2) субсидируется первый продукт в размере 20% выручки от продажи; 3) субсидируется второй продукт в том же объеме);

– *диффузии технологий* (1) свободной, при которой $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$, а компоненты вектора \mathbf{k}_2 неограниченно велики, 2) ограниченной, когда $\mathbf{k}_1 = (0, 9; \dots; 0, 9)^T$ и $\mathbf{k}_2 = (1, 1; \dots; 1, 1)^T$);

– *инерции спроса* (1) отсутствует ($\mathbf{m}_{1i} = \mathbf{0}$, компоненты \mathbf{m}_{2i} неограниченно велики); 2) присутствует ($\mathbf{m}_{1i} = \mathbf{0}$; компоненты вектора \mathbf{m}_{2i} для всех потребительских наборов, кроме набора потребителя i , равны 1% отношения бюджета, соответствующего наблюдению, к бюджету потребителя i ; компонент с индексом i неограниченно велик)).

Компьютерные испытания проведены на искусственных наборах данных, описывающих 40 наблюдений производителя продукции и по одному наблюдению каждого из 50 потребителей. Для каждого из 36 прогонов модели искусственные наборы создавались заново по одним и тем же правилам, описанным в п. 2.2 и 2.3.

2.2. Генерация данных производителей

Затраты ресурсов для каждого из 40 наблюдений производителя (столбцы матрицы \mathbf{A}) вычисляются по формуле

$$c + (d - c)\varepsilon, \quad \varepsilon \sim B(a, b), \quad (8)$$

где $B(a, b)$ — бета-распределение вероятностей¹³ с параметрами a и b ; параметры c и d задают верхнюю и нижнюю границы размеров генерируемых затрат. Значения четырех параметров¹⁴ приведены в табл. 1. Вектор \mathbf{a}_0 равен сумме столбцов сгенерированной матрицы \mathbf{A} .

Для формирования матрицы \mathbf{V} объем продукции вида h определяется производственной функцией, имитирующей несовершенное замещение ресурсов:

– для случая трех ресурсов

$$s_h e_h (1, 4x_{[3]} + 0, 4(x_{[2]} - x_{[3]}) + 0, 1(x_{[1]} - x_{[2]})); \quad (9)$$

– для случая двух ресурсов

$$s_h e_h (1, 3x_{[2]} + 0, 3(x_{[1]} - x_{[2]})), \quad (10)$$

где $x_{[k]}$ — объем ресурса, занимающего место k в ранжированном ряду ресурсов, упорядоченному по объему; s_h — доля ресурсного потенциала, выделяемая на продукт i согласно правилу

Таблица 1. Значения параметров формулы (8) для генерации данных о ресурсах

Номер ресурса	a	b	c	d
1	1	2	1	5
2	1	2	1	10
3	2,5	2,5	1	10

¹³ Псевдослучайные значения генерируются с использованием алгоритма Mersenne twister (Matsumoto, Nishimura, 1998).

¹⁴ Параметры распределений вероятностей, использованных для генерации данных, выбирались с тем чтобы распределения, относящиеся к разным ресурсам или видам продукции, различались между собой центральными моментами первых трех порядков. Значения параметров выбирались 1 раз, и их подбор по какому-либо критерию не производился.

Таблица 2. Значения параметров формулы (8) для генерации параметров e_h

Номер продукта	a	b	c	d
1	3	1	0,4	1
2	4	1	0,5	1
3	2,5	1	0,2	1
4	5	2	0,6	1

$\sum_{m=1}^h s_m \sim U$ (U — равномерное распределение вероятностей); e_h — коэффициент эффективности, определяемый по формуле (8) при значениях параметров, приведенных в табл. 2.

В отличие от формы (4)–(7) предполагается, что ресурсы платные, а целевая функция производителя имеет вид $\mathbf{p}^T \mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{k})^T \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} = (v_j)$ — вектор цен ресурсов (постоянный). Считаем, что первый ресурс самый дешевый в расчете на его единицу, третий — самый дорогой. Цены v_j генерируются по правилу $\sum_{m=1}^j v_m \sim U$.

2.3. Генерация данных потребителей

Объемы потребления каждого продукта каждым из 50 потребителей генерируются согласно формуле (8), причем параметры c и d задают верхнюю и нижнюю границы объемов потребления. Значения параметров формулы (8), используемые при генерации объемов потребления, приведены в табл. 3.

Таблица 3. Значения параметров формулы (8) для генерации объемов потребления

Номер продукта	a	b	c	d
1	3	1	1	8
2	4	1	1	5
3	1,5	1,5	0	0,2
4	1,4	1,4	0	0,2

Предпочтения \mathbf{p}_{0i} одинаковы у всех 50 потребителей. Предусмотрено, что предпочтительность единицы продукта i возрастает с ростом i . Значения параметров предпочтений генерируются аналогично значениям цен ресурсов.

2.4. Процедура отыскания равновесия

Задача решалась при помощи инструментального средства GAMS версии 30.2 с модулем поиска оптимума CONOPT4 (Drud, 1992, 2023) версии 4.17 под управлением операционной системы Windows 10 (22H2) 64 bit на ПЭВМ с четырехъядерным процессором Intel Core i3–8100 на тактовой частоте 3,6 ГГц (процедура поиска оптимума использует одно ядро) и объемом оперативной памяти 8 Гбайт. Время решения варьировало в диапазоне от 0,375 секунд (для двух ресурсов и двух видов продукции; без субсидий; диффузия технологий не ограничена; инерция спроса отсутствует) до 1,484 секунд (для трех ресурсов и четырех видов продукции (без субсидий; диффузия технологий неограничена; спрос инерционный)).

Начальные приближения формировались следующим образом: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = \lambda_2 = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единичный вектор; $\mathbf{x} = \mathbf{B} \times \mathbf{1}$; $\lambda_1 = \mathbf{v}$, $\mu_i = \mathbf{p}_{0i}^T \mathbf{c}_i$; остальные переменные нулевые. Подбор начальных приближений не предусмотрен, так как цель заключается в том, чтобы зафиксировать результат каждого из 36 прогонов: найден глобальный оптимум, соответствующий равновесию; найден локальный оптимум, не соответствующий равновесию; найдено допустимое решение, условия оптимальности не выполнены; допустимое решение не найдено.

Чтобы предупредить остановку вычислительного процесса в локальных угловых экстремумах, где целевая функция меньше нуля, а решение подзадачи производителя неоптимально¹⁵, задача дополняется техническим условием

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x} = (\mathbf{a}_0^T \lambda_1 + \mathbf{k}_1^T \lambda_3 + \mathbf{k}_2^T \lambda_4), \quad (11)$$

которое заведомо выполняется в равновесии. Оказалось, что этот прием эффективно направляет процесс поиска решения к глобальному оптимуму, в котором целевая функция достигает наибольшего теоретически возможного значения — нуля.

¹⁵ При попытках решить задачу (4)–(7) без дополнительных условий такая ситуация встречалась неоднократно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В табл. 4 приведены результаты 12 компьютерных испытаний для случая двух ресурсов и двух продуктов. Столбцы 2–6 содержат условия испытания, 7–9 — результаты решения модели. В каждом из этих испытаний условия равновесия, не вошедшие в задачу (4)–(7), (11) в явном виде, выполнены — планы производителя и всех потребителей оптимальны, уравнение $\mathbf{p} \odot \mathbf{x} = \mathbf{p}_1 \odot \sum_i \mathbf{y}_i$ соблюдено.

При условиях проводимых испытаний ограничение на диффузию технологий приводит к избытку (следовательно, нулевой цене) второго продукта. Если спрос неинертен, резко возрастает цена первого продукта, поскольку весь бюджет потребителей расходуется на него. При сочетании инерции спроса и субсидий ресурсы недоиспользуются: при субсидировании первого продукта — оба, второго — только второй. Действие субсидий на равновесные цены немонотонно: при их наличии цена как субсидируемого продукта, так и несубсидируемого, может снизиться, а может и возрасти. Сравнение первого и пятого испытаний показывает, что этот эффект не объясняется различиями векторов предпочтений и бюджетов потребителей.

Таблица 4. Результаты компьютерных испытаний модели: два ресурса, два продукта

№ испытания	Вектор субсидий (3)	Параметр диффузии технологий (2)	Параметр инерции спроса (2)	Вектор цен ресурсов	Вектор предпочтений	Равновесие		
						Вектор цен продуктов	Вектор выпусков	Вектор потребления
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(0;0)	0	0	(0,049; 0,816)	(0,423; 0,640)	(1,920; 1,917)	(105,80; 66,45)	(105,80; 66,45)
2	(0;0)	0	0,01	(0,774; 0,846)	(0,330; 0,910)	(2,414; 1,797)	(87,54; 60,27)	(87,54; 60,27)
3	(0;0)	0,1	0	(0,281; 0,286)	(0,162; 0,690)	(10,724; 0)	(57,14; 64,70)	(57,14; 40,54)
4	(0;0)	0,1	0,01	(0,026; 0,210)	(0,771; 0,920)	(8,040; 0)	(66,84; 55,88)	(66,84; 43,54)
5	(0,2;0)	0	0	(0,119; 0,261)	(0,308; 0,808)	(4,507; 1,804)	(97,30; 63,60)	(97,30; 63,60)
6	(0,2;0)	0	0,01	(0,574; 0,641)	(0,372; 0,576)	(1,942; 1,158)	(95,45; 62,05)	(95,45; 62,05)
7	(0,2;0)	0,1	0	(0,280; 0,577)	(0,663; 0,981)	(18,747; 0)	(55,94; 58,89)	(55,94; 36,69)
8	(0,2;0)	0,1	0,01	(0,203; 0,689)	(0,015; 0,320)	(1,839; 0)	(55,81; 68,73)	(55,81; 40,63)
9	(0;0,2)	0	0	(0,423; 0,554)	(0,283; 0,703)	(2,976; 1,456)	(91,82; 62,05)	(91,82; 62,05)
10	(0;0,2)	0	0,01	(0,100; 0,969)	(0,545; 0,836)	(3,257; 1,833)	(83,86; 56,35)	(83,86; 56,35)
11	(0;0,2)	0,1	0	(0,201; 0,649)	(0,217; 0,867)	(7,539; 0)	(59,90; 65,77)	(59,90; 39,78)
12	(0;0,2)	0,1	0,01	(0,129; 0,779)	(0,088; 0,353)	(2,044; 0)	(60,80; 60,72)	(60,80; 41,66)

Примечание. Полу жирным шрифтом выделены объемы потребления, отличающиеся от соответствующих объемов выпуска.

Таблица 5. Результаты компьютерных испытаний модели: два ресурса, три продукта

№ испытания	Вектор субсидий (3)	Параметр диффузии технологий (2)	Параметр инерции спроса (2)	Вектор цен ресурсов	Вектор предпочтений	Равновесие		
						Вектор цен продуктов	Вектор выпусков	Вектор потребления
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(0;0;0)	0	0	(0,008; 0,791)	(0,561; 0,754; 0,903)	(9,612; 1,126; 0)	(81,11; 51,32; 47,97)	(81,11; 51,32; 1,10)
2	(0;0;0)	0	0,01	(0,291; 0,626)	(0,026; 0,154; 0,968)	(0,927; 0,767; 0)	(37,99; 28,63; 32,59)	(37,99; 28,63; 0,82)
3	(0;0;0)	0,1	0	(0,430; 0,904)	(0,075; 0,370; 0,559)	(7,052; 0; 0)	(48,72; 40,53; 37,11)	(48,72; 31,30; 0,79)
4	(0;0;0)	0,1	0,01	(0,037; 0,635)	(0,620; 0,641; 0,903)	(9,590; 0; 0)	(44,05; 41,18; 34,71)	(44,05; 26,71; 0,65)
5	(0,2;0;0)	0	0	(0,758; 0,950)	(0,245; 0,704; 0,921)	(3,813; 1,616; 0)	(74,11; 47,29; 40,94)	(74,11; 47,29; 1,05)
6	(0,2;0;0)	0	0,01	(0,673; 0,996)	(0,460; 0,556; 0,884)	(2,684; 1,386; 0)	(83,17; 55,99; 38,92)	(83,17; 55,99; 1,16)
7	(0,2;0;0)	0,1	0	(0,587; 0,986)	(0,150; 0,432; 0,516)	(9,496; 0; 0)	(43,19; 41,88; 37,63)	(43,19; 29,67; 0,57)
8	(0,2;0;0)	0,1	0,01	(0,032; 0,638)	(0,261; 0,679; 0,737)	(6,825; 0; 0)	(44,84; 43,41; 36,24)	(44,84; 30,49; 0,73)
9	(0;0,2;0)	0	0	(0,049; 0,466)	(0,420; 0,493; 0,565)	(5,355; 1,351; 0)	(73,79; 49,95; 26,29)	(73,79; 49,95; 1,22)
10	(0;0,2;0)	0	0,01	(0,027; 0,136)	(0,080; 0,396; 0,496)	(1,477; 0,434; 0)	(74,30; 50,29; 48,07)	(74,30; 50,29; 1,27)
11	(0;0,2;0)	0,1	0	(0,231; 0,980)	(0,233; 0,248; 0,530)	(6,485; 0; 0)	(43,22; 38,01; 34,55)	(43,22; 29,43; 0,71)
12	(0;0,2;0)	0,1	0,01	(0,332; 0,390)	(0,147; 0,585; 0,860)	(4,709; 0; 0)	(45,57; 49,06; 39,84)	(45,57; 28,83; 0,66)

Примечание. Полужирным шрифтом выделены объемы потребления, отличающиеся от соответствующих объемов выпуска.

В табл. 5 представлены результаты испытаний, в которых число продуктов увеличено до трех. Остальные условия остаются неизменными (но данные сгенерированы заново по прежним правилам). Во всех 12 случаях найденные локальные оптимумы оказались равновесиями. Третий продукт оказывается избыточным и, следовательно, бесплатным; для остальных продуктов остаются в силе наблюдения, следующие из табл. 4, в том числе относящиеся к субсидиям. В испытаниях № 2 и № 11 имеет место недоиспользование второго ресурса.

Таблица 6. Результаты компьютерных испытаний модели: три ресурса, четыре продукта

№ испытания	Вектор субсидий (3)	Параметр диффузии технологий (2)	Параметр инерции спроса (2)	Вектор цен ресурсов	Вектор предпочтений	Равновесие		
						Вектор цен продуктов	Вектор выпусков	Вектор потребления
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(0;0;0;0)	0	0	(0,084; 0,574; 0,864)	(0,063; 0,355; 0,624; 0,963)	(1,300; 2,059; 0; 0)	(47,09; 32,23; 18,84; 18,64)	(47,09; 32,23; 0,79; 0,79)
2	(0;0;0;0)	0	0,01	(0,151; 0,360; 0,721)	(0,587; 0,836; 0,871; 0,878)	(2,863; 1,931; 0; 0)	(91,47; 65,18; 29,52; 30,85)	(91,47; 65,18; 1,60; 1,44)
3	(0;0;0;0)	0,1	0	(0,249; 0,670; 0,815)	(0,383; 0,388; 0,642; 0,857)	(6,813; 0; 0; 0)	(53,33; 53,84; 33,15; 44,79)	(53,33; 36,61; 0,82; 0,79)
4	(0;0;0;0)	0,1	0,01	(0,087; 0,094; 0,582)	(0,317; 0,625; 0,920; 1,000)	(7,572; 0; 0; 0)	(41,80; 51,55; 40,55; 47,74)	(41,80; 26,66; 0,65; 0,68)
5	(0,2;0;0;0)	0	0	(0,121; 0,144; 0,628)	(0,022; 0,382; 0,794; 0,974)	(1,574; 0,669; 0; 0)	(81,58; 56,11; 33,91; 22,95)	(81,58; 56,11; 1,24; 1,20)
6	(0,2;0;0;0)	0	0,01	(0,742; 0,862; 0,981)	(0,628; 0,641; 0,870; 0,911)	(2,699; 2,604; 0; 0)	(82,76; 53,52; 45,20; 52,83)	(82,76; 53,52; 1,25; 1,27)
7	(0,2;0;0;0)	0,1	0	(0,069; 0,294; 0,732)	(0,264; 0,517; 0,820; 0,856)	(8,984; 0; 0; 0)	(49,11; 48,60; 38,41; 52,72)	(49,11; 32,76; 0,67; 0,86)
8	(0,2;0;0;0)	0,1	0,01	(0,144; 0,735; 0,834)	(0,005; 0,220; 0,764; 0,791)	(1,882; 0; 0; 0)	(39,89; 45,63; 32,52; 56,26)	(39,89; 27,86; 0,67; 0,71)
9	(0;0,2;0;0)	0	0	(0,218; 0,649; 0,669)	(0,045; 0,055; 0,578; 0,968)	(2,074; 1,033; 0; 0)	(20,09; 12,13; 9,45; 10,04)	(20,09; 12,13; 0,29; 0,30)
10	(0;0,2;0;0)	0	0,01	(0,285; 0,382; 0,672)	(0,125; 0,583; 0,604; 0,746)	(1,923; 0,976; 0; 0)	(73,19; 49,75; 27,22; 18,90)	(73,19; 49,75; 1,24; 1,31)
11	(0;0,2;0;0)	0,1	0	(0,304; 0,354; 0,945)	(0,018; 0,078; 0,275; 0,396)	(1,293; 0; 0; 0)	(40,22; 52,10; 32,44; 49,21)	(40,22; 26,25; 0,59; 0,64)
12	(0;0,2;0;0)	0,1	0,01	(0,106; 0,480; 0,500)	(0,022; 0,122; 0,194; 0,496)	(1,265; 0; 0; 0)	(39,06; 49,01; 32,61; 49,06)	(39,06; 25,39; 0,60; 0,67)

Примечание. Полу жирным шрифтом выделены объемы потребления, отличающиеся от соответствующих объемов выпуска.

В табл. 6 показаны результаты испытаний модели с тремя ресурсами и четырьмя продуктами. Как и в предыдущих случаях, все 12 найденных локальных оптимумов оказались равновесиями. Третий и четвертый продукты в каждом из них оказались в избытке. Для первых двух продуктов закономерности, отмеченные выше, наблюдаются и здесь. Во всех испытаниях, кроме седьмого, недоиспользуется хотя бы один ресурс — по крайней мере первый. В шести испытаниях недоиспользуются все три ресурса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в статье непараметрическая модель спроса (2) дает возможность, используя первую теорему двойственности в линейном программировании, построить полностью непараметрическую ВМЧР в форме задачи нелинейного программирования (4)–(7). Такая модель еще не обладает удовлетворительными вычислительными свойствами, однако дополнение ее техническим уравнением (11), выполняющимся в любом равновесии, направляет поиск решения к одному из экстремумов, соответствующих равновесию. Проведенные испытания не доказывают универсальности этого приема, но свидетельствуют о возможности направления поиска решения к равновесию при помощи подходящих технических ограничений в некоторых случаях, не обладающих какими-либо особыми признаками.

Успех проведенных испытаний модели (4)–(7) служит предпосылкой создания методики калибровки модели спроса (2) с целью достижения удовлетворительной способности воспроизводить реакцию потребителей на изменение цен. Такая методика может включать подбор параметров функций предпочтения, компонентов векторов \mathbf{m}_{1i} и \mathbf{m}_{2i} , а также рекомендуемый способ очистки фактических данных о потреблении от статистических выбросов.

За созданием такой методики последует включение моделей вида (2) в модель (Светлов, Шишкина, 2019) вместо параметрических функций спроса, что ознаменует перевод ее на архитектуру PF+CF+PE+ED, где CF (non-parametric Consumption Frontier) означает непараметрическую границу возможностей потребления. Помимо ожидаемого повышения точности модели спроса в сравнении с нынеприменяемой, это даст возможность пространственной (региональной) дифференциации функций спроса с использованием открытых данных Росстата. В перспективе модели, подобные (4)–(7), могут быть приспособлены к моделированию рынков, соединенных продуктовыми цепями.

Модель (2), преобладающая по отношению к моделям непараметрической границы производственных возможностей, наследует их недостаток — чувствительность к шуму в данных наблюдений, лежащих на границе (см., например, (Gstach, 1998, p. 165)). При наличии шума множество, определяемое эмпирической моделью такого типа, с увеличением числа наблюдений сходится не к фактическому потребителскому множеству, а к его некоторому надмножеству. Проявление этого недостатка в контексте ВМЧР предстоит изучить. Можно предположить, что данный эффект может быть частично скомпенсирован калибровкой модели, а статистические выбросы, существенно искажающие потребителское множество, удастся выявлять и устранять при анализе результатов моделирования. Эти предположения предстоит проверить в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Акаев А.А., Садовничий В.А.** (2016). Замкнутая динамическая модель для описания и расчета длинной волны экономического развития Кондратьева // *Вестник Российской академии наук*. Т. 86. № 10. С. 883–896. DOI: 10.7868/S0869587316100029 [Akaev A.A., Sadovnichiy V.A. (2016). A closed dynamic model to describe and calculate the Kondratiev long wave of economic development. *Herald of the Russian Academy of Sciences*, 86 (10), 883–896. DOI: 10.7868/S0869587316100029 (in Russian).]
- Дементьев В.Е.** (2021). Модель интерференции длинных волн экономического развития // *Компьютерные исследования и моделирование*. Т. 13. № 3. С. 649–663. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-649-663 [Dementiev V.E. (2021). The model of interference of long waves of economic development. *Computer Research and Modeling*, 13 (3), 649–663. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-649-663 (in Russian).]
- Дементьев В.Е., Евсюков С.Г., Устюжанина Е.В.** (2020). О важности стратегического подхода при ценообразовании на рынках сетевых благ // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 2 (46). С. 57–71. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-46-2-3 [Dementiev V.E., Evsukov S.G., Ustyuzhanina E.V. (2020). The importance of a strategic approach to pricing in markets for network goods. *Journal of the New Economic Association*, 46 (2), 57–71. DOI: 10.31737/2221-2264-2020-46-2-3 (in Russian).]
- Земцов С.М., Филиппов А.М.** (2009). Калибровка функций расходов и прибыли в модели частичного равновесия BEL-ASIM: теоретический аспект // *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия D. Экономические и юридические науки*. № 4. С. 52–58. [Zemtsov S.M., Filiptsov A.M. (2009). Calibration of cost and profit functions in partial equilibrium model BEL-ASIM: A theoretical aspect. *Vestnik of Polotsk State University. Part D. Economic and Legal Sciences*, 4, 52–58 (in Russian).]
- Киселёв С.В., Ромашкин Р.А., Белугин А.Ю.** (2022). Агропродовольственный экспорт России до 2030 г.: прогноз на основе модели частичного равновесия // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 4 (56). С. 69–90. [Kiselev S.V., Romashkin R.A., Belugin A. Yu. (2022). Russia's agri-food exports until 2030: Projection from a partial equilibrium model. *Journal of the New Economic Association*, 56 (4), 69–90 (in Russian).]
- Полтерович В.М.** (1990). Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука. 256 с. [Polterovich V.M. (1990). *Economic equilibrium and economic mechanism*. Moscow: Nauka. 256 p. (in Russian).]
- Прокопьев М.Г.** (2015). Классификация и методические аспекты разработки моделей частичного равновесия // *Региональные проблемы преобразования экономики*. № 6 (56). С. 88–95; № 7 (57). С. 83–91. [Prokopiev M.G. (2015). Classification and methodical aspects of developing models of partial balance. *Regional'nye Problemy Preobrazovaniya Ekonomiki*, 6 (56), 88–95; 7 (57), 83–91 (in Russian).]
- Светлов Н.М.** (2002). На пути к новой концепции стоимости. М.: Издательство МСХА. 108 с. [Svetlov N.M. (2002). *Towards a new conception of value*. Moscow: MSKhA (in Russian).]

- Светлов Н.М.** (2019а). Модели непараметрических границ производственных возможностей: опыт применения в сельском хозяйстве // *Вестник ЦЭМИ*. № 1. Статья 5. 14 с. DOI: 10.33276/S265838870004477-7 [Svetlov N.M. (2019a). Non-parametric production frontier models: Experience of agricultural applications. *Vestnik CEMI*, 1, 5. DOI: 10.33276/S265838870004477-7 (in Russian).]
- Светлов Н.М.** (2019б). Непараметрическая граница производственных возможностей в вычислимой модели частичного равновесия // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 4. С. 104–116. DOI: 10.31857/S042473880006779-5 [Svetlov N.M. (2019). Non-parametric production frontier in a computable partial equilibrium model. *Economics and Mathematical Methods*, 55 (4), 104–116. DOI: 10.31857/S042473880006779-5 (in Russian).]
- Светлов Н.М., Буць В.И., Карачевская Е.В., Ленькова Р.К., Редько Д.В., Светлова Г.Н., Шафранская И.В., Шафранский И.Н.** (2020). Применение математических методов в управлении АПК Беларуси и России. М.: ЦЭМИ РАН. 177 с. DOI: 10.33276/978-5-8211-0782-4 [Svetlov N.M., Buts' V.I., Karachevskaya E.V., Len'kova R.K., Red'ko D.V., Svetlova G.N., Shafranskaya I.V., Shafranskiy I.N. (2020). *The use of mathematical methods in the management of agro-industrial complex in Belarus and Russia*. Moscow: CEMI RAS. DOI: 10.33276/978-5-8211-0782-4 (in Russian).]
- Светлов Н.М., Шишкина Е.А.** (2019). Инновационная модель частичного равновесия в приложении к анализу эффектов изменения климата // *Международный сельскохозяйственный журнал*. № 5. С. 58–60. DOI: 10.24411/2587-6740-2019-11587 [Svetlov N.M., Shishkina E.A. (2019). An innovative partial equilibrium model applied to the analysis of effects of climate change. *International Agricultural Journal*, 5, 58–60. DOI: 10.24411/2587-6740-2019-11587 (in Russian).]
- Britz W., Witzke P.** (eds.) (2014). *CAPRI model documentation 2014*. Bonn: Institute for Food and Resource Economics, University of Bonn. 277 p.
- Brown A., Deaton A.** (1972). Surveys in applied economics: models of consumer behavior. *The Economic Journal*, 82, 328, 1145–1236.
- Chantreuil F., Hanrahan K., Leeuwen M. van** (2012). *The future of EU agricultural markets by AGMEMOD*. Dordrecht: Springer. XVI, 128 p. DOI: 10.1007/978-94-007-2291-0
- Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.** (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429–444.
- Drud A.** (1992). CONOPT — a large-scale GRG code. *ORSA Journal on Computing*, 6, 207–216.
- Drud A.** (2023). CONOPT4. *GAMS — Documentation*. GAMS Development Corp., 1547–1581.
- Ermolieva T., Havlík P., Ermoliev Yu., Mosnier A., Obersteiner M., Leclère D., Khabarov N., Valin H., Reuter W.** (2016). Integrated management of land use systems under systemic risks and security targets: A stochastic global biosphere management model. *Journal of Agricultural Economics*, 67, 3, 584–601. DOI: 10.1111/1477-9552.12173
- Farrell M.J.** (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of Royal Statistical Society: Series A (General)*, 3, 253–290.
- Fock A., Weingarten P., Wahl O., Prokopiev M.** (2000). Russia's bilateral agricultural trade: First results of a partial equilibrium analysis. *Russia's Agro-food sector: Towards truly functioning markets* / P. Wehrheim et al. (eds.). Kluwer Academic Publishing, 271–197.
- Goldberger A.S., Gamaletsos T.** (1970). A cross-country comparison of consumer expenditure patterns. *European Economic Review*, 1, 357–400. DOI: 10.1016/0014-2921(70)90020-6
- Gstach D.** (1998). Another approach to data envelopment analysis in noisy environments: DEA+. *Journal of Productivity Analysis*, 9, 2, 161–176. DOI: 10.1023/A:1018312801700
- Houthakker H.S.** (1965). New evidence on demand elasticities. *Econometrica*, 33, 277–288.
- Huppmann D.** (2013). Endogenous shifts in OPEC market power — a Stackelberg oligopoly with fringe. *DIW Discussion Papers*, 1313. Berlin: German Institute for Economic Research. 26 p.
- Just R.E.** (2011). Behavior, robustness, and sufficient statistics in welfare measurement. *Annual Review of Resource Economics*, 3, 33–70. DOI: 10.1146/annurev-resource-040709-135125
- Kiselev S., Strokov A., Belugin A.** (2016). Projections of Russia's agricultural development under the conditions of climate change. *Studies on Russian Economic Development*, 5, 548–556. DOI: 10.1134/S1075700716050063
- Lee J.-D., Hwang S., Kim T.-Y.** (2005). The measurement of consumption efficiency considering the discrete choice of consumers. *Journal of Productivity Analysis*, 23, 65–83. DOI: 10.1007/s11123-004-8548-y
- Matsumoto M., Nishimura T.** (1998). Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8 (1), 3–30. DOI: 10.1145/272991.272995
- Pollak R.A.** (1977). Price dependent preferences. *The American Economic Review*, 67, 2, 64–75.

- Ruhnau O., Bucksteeg M., Ritter D., Schmitz R., Böttger D., Koch M., Pöstges A., Wiedmann M., Hirth L. (2022). Why electricity market models yield different results: Carbon pricing in a model-comparison experiment. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 153. Paper 111701. DOI: 10.1016/j.rser.2021.111701
- Savvidis G., Siala K., Weissbart C., Schmidt L., Borggreve F., Kumar S., Pittel K., Madlener R., Hufendiek K. (2019). The gap between energy policy challenges and model capabilities. *Energy Policy*, 125, 503–520. DOI: 10.1016/j.enpol.2018.10.033
- Svetlov N.M., Siptits S.O., Romanenko I.A., Evdokimova N.E. (2019). The effect of climate change on the location of branches of agriculture in Russia. *Studies on Russian Economic Development*, 30, 4, 406–418. DOI: 10.1134/S1075700719040154
- Thompson R.G., Langemeier L.N., Lee C., Lee E., Thrall R.M. (1990). The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming. *Journal of Econometrics*, 46, 93–108.

Computer testing of a non-parametric partial equilibrium model prototype¹⁶

© 2023 N.M. Svetlov

N.M. Svetlov,

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences (CEMI RAS), Moscow, Russia;
e-mail: nikolai.svetlov@gmail.com

Received 08.02.2023

Abstract. On the basis of non-parametric formulations of the production program problem (previously known) and the consumer choice problem (new), a computable partial equilibrium model with a non-parametric representation of both supply and demand is proposed. In this model the problems of the producer and the consumer are represented by simultaneous inequalities of the dual problems pair. This converts the problem of finding an equilibrium to minimizing the differences between objective functions in each pair, summarized over producers and consumers. Such a problem, however, may have multiple local optima. Computer tests on artificial data sets confirmed that inserting such “technical” constraints into a computable model, that are always valid in an equilibrium, can effectively direct the search for a solution using the CONOPT4 procedure to the global optimum (to which the sought equilibrium corresponds). In all 36 tests carried out, equilibrium solutions were found on the first try. The result obtained is of significant importance for the creation of tools used at the sectoral level in managing the unstable economic dynamics that are characteristic of periods of change in systems of dominant technologies. Such tools will make better use of the information in the original empirical data.

Keywords: partial equilibrium, computable model, nonparametric production frontier, nonparametric consumption frontier, first duality theorem, computer-aided testing.

JEL Classification: C02, C14, C63.

For reference: Svetlov N.M. (2023). Computer testing of a non-parametric partial equilibrium model prototype. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 100–111. DOI: 10.31857/S042473880025862-7

¹⁶ Computer testing of the model was carried out using the infrastructure of VIAPИ named after A.A. Nikonov — branch of the FS-BSIFRC AESDRA VNIIESH. The author is grateful to the management and the entire staff of the Branch for the opportunity to complete this part of the study.

Вопросы балансирования экономического роста с состоянием среды обитания

© 2023 г. В.К. Фальцман

В.К. Фальцман,
ИПЭИ РАНХиГС, Москва; e-mail: m975032@gmail.com

Поступила в редакцию 08.12.2022

Аннотация. Статья посвящена фундаментальной проблеме экономического роста — каким условиям должен отвечать рост, чтобы обеспечить благосостояние быстро растущего населения мира и одновременно сохранить природную среду обитания для будущих поколений. Безусловным приоритетом роста мировой экономики в XXI в. должно стать сохранение среды обитания, включая климат. Для формализации природоохранного типа экономического роста в неявном виде предложена производственная функция, в которой выделен фактор сохранения среды обитания, сдерживающий рост. В целях замедления роста антропогенной нагрузки на среду обитания, наряду с природоохранными мерами и технологиями, по-видимому, предстоит вынужденное снижение темпов роста численности населения развивающихся стран и мира в целом. Нынешний быстрый рост населения должен быть сбалансирован с ресурсами жизнеобеспечения стран, в том числе — природными. Анализируются три концепции экономического роста: классическая — максимального роста, нулевого роста и предложенная в статье концепция сбалансированного роста, реализация которой предполагает верхний и нижний пределы роста. Рассмотрены необходимые предпосылки сбалансированного роста. Для сбалансированного роста населения развивающихся стран предстоит сократить их опасное отставание от стран развитого мира по индексу человеческого развития, обеспечив опережающий рост их ВВП на душу населения. Регулирование роста численности населения может стать объектом международного соглашения и, видимо, потребует дополнительной целевой международной помощи слаборазвитым странам.

Ключевые слова: экономический рост, численность населения, антропогенная нагрузка, индекс человеческого развития, международная помощь.

Классификация JEL: O44.

Для цитирования: **Фальцман В.К.** (2023). Вопросы балансирования экономического роста с состоянием среды обитания // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 2. С. 112–121. DOI: 10.31857/S042473880025863-8

1. ВВЕДЕНИЕ

Последние два века развитие мировой экономики, — по крайней мере в развитых странах, — четко укладывалось в рамки традиционной теории максимального экономического роста. При этом что быстрый экономический рост, с одной стороны, сопровождался неравномерной бедностью стран и народов, а с другой — непосильной нагрузкой на среду обитания, ее невосполнимым уничтожением.

Основываясь на статистике ООН, можно примерно оценить гигантские масштабы роста за послевоенные 70 лет (1950–2020 гг.): мировая экономика — в 6,8 раза; численность населения — в 3,1 раза; ВВП на душу населения — в 2,2 раза. Всего за 70 лет численность населения планеты, сформировавшаяся за многие предшествующие тысячелетия, утроилась. Экономика, по-видимому, справилась с обеспечением жизни колоссально возросшей численности населения. Но для окружающей среды такая нагрузка оказалась предельной. Об этом свидетельствуют следующие факты.

1. Колоссальный рост населения отразился на ухудшении природной среды. Под воздействием антропогенной нагрузки происходит потепление климата. Парижское соглашение по климату (2015 г.), получившее одобрение практически всех государств мира, признало, что источником глобальных климатических угроз являются масштабы человеческой деятельности,

2. В XXI в. проявились новые последствия избыточной антропогенной нагрузки: COVID-19, массовая миграция населения стран Африки и Азии в европейские страны, а из стран Центральной и Южной Америки — в США; возродилось морское пиратство.

3. Массовый характер приобрели ресурсные войны на Африканском континенте (Фитуни, 2012), на сдерживание которых уходит около 90% средств, выделяемых мировым сообществом на миротворческую деятельность.

По мнению компетентных экспертов, едва ли не повсеместно нарушено самовосстановление природной среды. Считается, что в естественном равновесии природная среда существовала до последней трети прошлого века. Именно вследствие этого начался экологический бум. В настоящее время экономический рост в большинстве стран не полностью отвечает условиям самовосстановления и самоочищения природной среды. Государственные и международные нормативы состояния природной среды исходят из осознания невозможности обеспечивать ее самовосстановление, ориентируются на менее жесткие параметры, предельно допустимые для жизни и здоровья людей.

В бедных развивающихся странах максимизация роста проявилась в высокой рождаемости, способствующей разрастанию их бедности. Главные проблемы здесь порождает именно бедность. Для развитых стран, где преобладают умеренные темпы роста населения, плавно переходящие в депопуляцию, главной проблемой роста остается сохранение природной среды обитания, ее защита от воздействия экономики. В итоге развитые и развивающиеся страны оказались в противофазе развития: в развитых странах растет экономика и ее нагрузка на природную среду обитания, а рост населения стремится к нулю, и даже к депопуляции, его благосостояние — к максимуму. В отличие от этих стран в развивающихся странах быстро растет численность населения и его относительная бедность. При этом антропогенная нагрузка быстро растущего населения на природную среду в этих странах остается важнейшей проблемой для всего мира. Задача мирового сообщества состоит в том, чтобы сблизить характер экономического роста развитых и развивающихся стран мира.

Стратегия будущего экономического роста развивающихся стран состоит в обеспечении умеренного темпа роста населения, балансировании его с экономическим потенциалом стран, в снижении бедности. В конечном итоге — вклад развивающихся стран в сохранение природной среды обитания.

Мировое сообщество должно взять под контроль и регулировать рост населения и антропогенную нагрузку отдельных стран, прежде всего содействовать бедным странам в переходе к политике умеренной рождаемости.

Перечисленные события побуждают вернуться к истокам — к базисным основам теории экономического роста.

2. ДИСКУССИЯ ПО ВОПРОСАМ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Проблема экономического роста прямо или косвенно присутствует едва ли не в каждом макроэкономическом исследовании. Остановимся на классических исследованиях этой проблемы в трудах нескольких нобелевских лауреатов.

Одним из основоположников теории экономического роста является Саймон Кузнец (Кузнец, 2004). Он выделил эту проблему в число самостоятельных дисциплин, видимо, под влиянием взрывного экономического роста развитых стран в XX в., который он характеризовал как «*управляемая революция*».

В нобелевской лекции в 1971 г. (Кузнец, 2004) С. Кузнец дает следующее определение экономического роста: это — долговременное увеличение возможностей удовлетворять все более разнообразные потребности в продукции экономической деятельности.

С. Кузнец указывает, что его исследования ограничены развитыми странами. Вместе с тем он приводит некоторые «предварительные выводы и правдоподобные заключения» относительно экономики развивающихся стран. Он указывает на огромную неравномерность экономического развития населения Земли, когда основная его масса разделена на два полюса — с очень высоким и очень низким доходом на душу населения. Причина отставания второй группы стран от первой заключается не только в их прошлом, часто колониальном, но и в высоком уровне естественного прироста населения в группе развивающихся стран, давно уже прекратившемся в развитом мире.

Фундаментальные исследования экономического роста содержатся в трудах Гуннара Мюрдаля (Мюрдаль, 2004). Среди прочих центральное место в них отводится проблемам экономического неравенства стран мира. Мюрдаль указывает на трудности регулирования рождаемости и планирования семьи, особенно актуальной для стран Африки южнее Сахары, предлагает собственную концепцию повышения эффективности внешней помощи развивающимся странам.

Роберт Солоу в своей нобелевской лекции (1987 г.) рассматривает достижения теории роста, анализирует ряд предложенных ранее моделей экономического роста, включая производственную функцию, выражает надежду на то, что теория экономического роста послужит базой для построения многофакторных моделей (Солоу, 2004).

Современная теория экономического роста не содержит ограничений, которые накладывает на экономический рост оскудение среды обитания. В ее основе лежит гипотеза бесконечно растущего спроса и беспредельных возможностей его удовлетворения. В связи с этим Пол Самуэльсон указывает на господство принципа максимума роста для экономики в целом и прибыли на микроуровне (Самуэльсон, 2004).

С помощью экономико-математических методов современную теорию экономического роста можно интерпретировать в виде аппарата производственной функции. Производственная функция — экономико-математическая зависимость выпуска продукции и услуг от факторов роста производства. В агрегированном и неявном виде монопродуктовая производственная функция имеет вид:

$$\text{ВВП} = F(\text{Труд, Капитал, НТП и прочие факторы производства}). \quad (1)$$

Производственная функция (1) не отражает ограничений на рост ВВП, которые накладывает состояние природной среды обитания, т.е. построена по принципу «чем больше, тем лучше». Ориентация на максимум роста ВВП и прибыли без учета ограниченности ресурсов среды обитания неизбежно выведет человеческое сообщество за пределы допустимой антропогенной нагрузки.

Не привел ли принцип максимума уже сейчас к достижению или, хуже, — превышению пределов роста?

С. Кузнец приводит следующие фактические данные (Kuznets, 1971): прирост численности населения мира — 1% в год; прирост ВВП мировой экономики — 3% в год; прирост ВВП на душу населения — 2% в год. Из приведенных данных следует, что мировая экономика пока еще способна (в среднем!) обеспечить благосостояние существующего населения Земли: средний рост ВВП на душу населения составляет 2% при фактически достигнутом приросте его численности на 1%.

Этот вывод подтверждает быстрый рост ВВП на душу населения — с 2104 долл. в 1950 г. до 4687 долл. на жителя планеты в 2021 г. За 71 год ресурсы жизнеобеспечения среднего жителя планеты выросли в 2,2 раза.

В настоящей статье содержится попытка обосновать гипотезу дополнения существующей теории экономического роста следующими приоритетами XXI в.:

- сохранение среды обитания и биологического ресурса для будущих поколений;
- сокращение роста численности населения, в первую очередь в развивающихся странах;
- снижение экономического неравенства стран, сближение экономического благополучия развивающихся стран с развитыми странами.

В современной теории роста достижение максимума ВВП и прибыли выступает в качестве критерия успешной деятельности правительств большинства стран мира. Поскольку текущие результаты обычно предпочтительней долговременных, затраты на сохранение будущей среды обитания, тормозящие рост ВВП, обычно финансируются по остаточному принципу. Такой подход к экономическому росту пагубно сказывается на среде обитания будущих поколений.

Сохранение природной среды обитания целесообразно уравнивать в правах с факторами экономического роста, конечно, со знаком «минус». С учетом этого новая производственная функция в неявном виде приобретает следующее выражение:

$$\text{ВВП} = F(\text{Труд, Капитал, НТП, Природоохранные затраты}). \quad (2)$$

В отличие от производственной функции (1), где природоохранные затраты входят в состав прочих неидентифицированных факторов, в функции (2) природоохранные затраты выделены в самостоятельный фактор, равнозначный другим факторам роста.

Главное *противоречие развития человечества* проявляется на глобальном уровне в виде *непосильной антропогенной нагрузки на природную среду*. По мере осложнения экологической обстановки и вследствие роста антропогенной нагрузки фактор сохранения природной среды обитания будет из *равноправного фактора* теории роста перерастать в *ведущий* ее фактор, ограничивающий возможности экономического роста.

3. КОНЦЕПЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО, НУЛЕВОГО И СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА

Теория нулевого роста (0-теория) возникла в 1960–1970-е годы в США и странах Европы (Римский клуб) как альтернатива и антипод общепризнанной концепции максимизации экономического роста. Концепция нулевого роста рассмотрена в работе группы американских экономистов (*Economic growth in the Future ...*, 1976). Она исходит из пределов роста, которые диктует ограниченность природной среды и высокого достигнутого уровня экономики развитых стран, при котором индекс человеческого развития (ИЧР) приблизился к своему предельному значению.

Как и остальные разделы современной экономической теории, 0-теория основана на анализе экономики США и других развитых стран. 0-теория противоречит интересам большинства развивающихся стран, где сочетание накопленной бедности и быстрого роста численности населения неотвратимо предполагает опережающий рост производства продукции и услуг, безотносительно уровня антропогенной нагрузки на среду обитания.

По нашим представлениям, целесообразно найти компромисс между традиционной теорией экономического роста и 0-теорией. Компромиссом может стать **теория сбалансированного роста**, в которой экономический рост ВВП ограничен сверху необходимостью сохранения самовосстановления среды обитания, а там, где она утрачена — ее возрождения. Снизу он ограничен безальтернативным требованием сохранения достигнутого уровня жизни и душевого ВВП. Верхнее ограничение предполагает, что в приведенной выше производственной функции предусмотрены природоохранные затраты, достаточные для сохранения среды обитания либо для ее возрождения, где она утрачена. Нижнее ограничение исходит из презумпции сохранения благосостояния населения. Общество не может пожертвовать благосостоянием населения даже во имя сохранения окружающей среды. Сбалансированным является такой экономический рост, который, с одной стороны, предполагает сохранение (или рост) благосостояния, а с другой — ограничен условием сохранения среды обитания.

Условия экономического роста и сохранения окружающей среды взаимно противоречивы. Рост необходим хотя бы для сохранения достигнутого уровня благосостояния растущего населения: новые поколения людей должны жить, как минимум, не хуже нынешнего. Но рост сопровождается антропогенной нагрузкой на среду обитания, ведет к ее уничтожению, а меры сохранения природы тормозят рост. Устранить это противоречие может такой рост, который в определенных пределах допускает загрязнение среды обитания при условии сохранения свойств самовосстановления и самоочищения природной среды. Такая формулировка, например, для климата соответствует уровню углеродистой нейтральности.

Итак, концепция сбалансированного роста определяет два предела экономического роста.

Нижнее ограничение на экономический рост. Рост ВВП должен быть достаточным для сохранения и повышения благосостояния новых поколений: уровень жизни, ВВП на душу населения должны, как минимум, сохраняться, и даже расти, удовлетворяя растущие потребности населения.

Верхнее ограничение на экономический рост. Рост ВВП не должен превышать уровня, при котором в окружающей природной среде накапливаются невосстановимые нарушения.

Как верхний, так и нижний пределы экономического роста зависят от численности населения. Чтобы уложиться в прокрустово ложе этих ограничений, государства и мировое сообщество в целом должны контролировать, регулировать и ограничивать рост населения. В этом — суть теории сбалансированного роста.

В (*Economic growth in the Future ...*, 1982, p. 82–134) дан подробный анализ положений 0-теории в сравнении с традиционной теорией экономического роста. С учетом этого ниже приведено краткое сопоставление основных положений этих двух теорий в сравнении с теорией сбалансированного роста. Различие теорий проявляется по отношению к проблемам общества: загрязнению среды обитания, бедности, безработице, антропогенной нагрузке.

3.1. Загрязнение среды обитания

Классическая теория роста. Росту содействуют способность природной среды к самоочищению в сочетании с природоохранными мерами, направленными на улавливание и переработку отходов. Наступившее исчерпание возможностей самовосстановления природной среды учитывается неполностью.

Теория нулевого роста. Затраты на охрану окружающей среды тормозят экономический рост и поэтому хронически недофинансируются. Загрязнения сдерживают экономический рост и после достижения определенных пределов приводят к климатическим и другим природным катаклизмам.

Теория сбалансированного роста. В условиях быстрого роста населения, мировой экономики и антропогенной нагрузки на окружающую среду самоочищение природной среды, даже в сочетании с мерами защиты окружающей среды, не способно обеспечить сохранение среды обитания для будущих поколений. Необходимо снижать антропогенную нагрузку. Для начала необходимо хотя бы затормозить ее бурный рост вследствие демографического взрыва.

3.2. Бедность и нищета

Классическая теория роста. Экономический рост — единственный путь преодоления бедности и нищеты. В бедных странах он необходим, чтобы избежать голода. Вопросы перераспределения доходов могут внести лишь коррективы в благосостояние населения. Крупномасштабное перераспределение доходов связано с социальной революцией.

Теория нулевого роста. Экономический рост не помог решить проблемы экономического неравенства, лишь усиливая последнее.

Теория сбалансированного роста. Экономический рост необходим для повышения благосостояния человеческого сообщества, особенно для бедных стран, но только — в пределах возможностей сохранения среды обитания для нынешнего и будущих поколений. Регламентированный рост численности населения за счет нормализации рождаемости в развивающихся странах — важнейшее необходимое условие борьбы с бедностью в мире.

3.3. Безработица

Классическая теория роста. Обеспечение занятости — основная функция экономического роста.

Теория нулевого роста. Занятость можно обеспечить при отсутствии роста такими, например, мерами, как сокращение продолжительности рабочего дня и увеличение рабочего времени.

Теория сбалансированного роста. Рост численности населения должен быть сбалансирован с темпами роста экономики. Нельзя допускать как избыточность, так и дефицит трудовых ресурсов.

3.4. Антропогенная нагрузка

Классическая теория роста. Абсолютные пределы жизненного пространства предполагают ограниченность роста численности населения Земли. Тенденция самопроизвольного сокращения рождаемости может ограничить рост населения Земли, как это произошло в развитых странах. Теоретически экономический рост возможен при стабильной, и даже уменьшающейся, численности населения.

Теория нулевого роста. На ограниченной планете нельзя беспредельно поддерживать рост населения. Чем дольше продолжается рост населения, тем большее напряжение он создает для способности Земли поддерживать жизнь.

Теория сбалансированного роста. Необходимо государственное и, возможно, международное регулирование роста численности населения с учетом обеспечения его потребностей ресурсами на территории государств.

Регулирование роста населения — центральная проблема экономического роста, так как рост численности населения является необходимой предпосылкой роста мировой экономики, с одной стороны, и усиления антропогенной нагрузки на среду обитания, с другой стороны. Поэтому центральная идея статьи заключается в необходимости регулирования рождаемости и темпов роста численности населения, прежде всего в бедных странах с высокой рождаемостью, как необходимого условия реализации концепции сбалансированного роста, ликвидации источников бедности и нищеты и повышенной антропогенной нагрузки на природную среду обитания.

Да и в богатых странах такие проблемы сохранения среды обитания, как, например, ликвидация АЭС, требуют дополнительных затрат, тормозят экономический рост в результате использования дорогих возобновляемых источников энергии.

Таким образом, классическая теория экономического роста направлена на увеличение благосостояния быстро увеличивающегося населения. Но она не учитывает ограничений природной среды обитания, способствует нарастанию неравномерности развития и бедности. В отличие от этого 0-теория предполагает сохранение природной среды обитания. Но она не позволяет даже сохранить уровень жизни растущего населения, не говоря уже о его повышении. Выход из этого

противоречия, по нашему мнению, состоит в поиске компромисса. Компромиссный вариант экономического роста мы определили как *сбалансированный рост*. Реализация сбалансированного роста может быть достигнута путем *регулирования роста населения*.

4. ПРЕДПОСЫЛКИ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА

В предшествующих публикациях (Фальцман, 2020, 2021, 2022) обоснованы три условия экономического роста, сбалансированного между сохранением благосостояния населения и сохранением природной среды для будущих поколений.

Первоочередные меры сохранения природной среды в условиях возросшей антропогенной нагрузки включают использование в максимально доступных пределах возобновляемых источников энергии (ВИЭ) и других природоохранных технологий.

Китай и ряд стран успешно сокращают выбросы в окружающую среду за счет перехода от высоких темпов рождаемости и роста населения к умеренным темпам.

Развивающиеся страны могут ускорить переход к природосберегающему режиму экономического роста за счет повышения индекса человеческого развития (ИЧР) и душевого ВВП. Мировое сообщество может содействовать этому процессу средствами международной помощи.

Для реализации концепции сбалансированного роста необходим комплекс мер, включающий все три названных направления. В условиях возросшей антропогенной нагрузки ограничиться одними природоохранными технологиями, по-видимому, нереально.

4.1. Ограничение роста населения

Рост населения однозначно предполагает рост экономики, увеличение ресурсов продовольствия, других потребительских благ и услуг. При этом рост населения увеличивает антропогенную нагрузку на ограниченную природную среду обитания. Поскольку ресурсы жизнеобеспечения, как и емкость природной среды обитания, для каждого исторического этапа ограничены, рост населения также должен быть ограничен.

Между тем рост населения принял угрожающий характер. Первоначально его последствия имели локальный характер и требовали локальных мер противодействия. Среди многих фактов можно привести экологическую катастрофу Аральского моря и прилегающего региона. В результате быстрого роста поливного земледелия, особенно производства хлопка, Аральское море и питающие его реки высохли, а окрестности превратились в районы пустынь, мало пригодные для обитания.

В XXI в., как отмечено в Парижском соглашении по климату, проявились глобальные последствия разрушения окружающей среды.

В целях сохранения природной среды обитания от мирового сообщества потребуются срочные меры ограничения роста численности населения в странах развивающегося мира. Стихийный процесс сокращения темпов роста населения наблюдается во многих странах. Примерно в 30 странах происходит депопуляция населения. Это преимущественно развитые страны с высоким цивилизационно-образовательным уровнем населения. Принимаемые здесь меры стимулирования рождаемости позволяют замедлить и нормализовать процесс депопуляции, но не исключить его. Тем более что к середине столетия число стран с убыванием населения может удвоиться.

Однако в самых густонаселенных странах мира численность населения быстро растет, хотя и с убывающими темпами. Эти страны определяют общемировую тенденцию гигантского роста населения планеты. В опасной близости от пределов антропогенной нагрузки было бы рискованно положиться на достижение нулевого роста населения за счет стихийного сокращения рождаемости. Государства и, возможно, мировое сообщество должны взять на себя функции контроля и регулирования рождаемости и роста населения в бедных странах, где стихия рождаемости душит не только природу, но и возможности их собственного цивилизационного роста.

На первом этапе, видимо, не удастся избежать элементов регулирования. С этой целью может быть разработано и добровольно заключено межгосударственное соглашение о росте численности населения, наподобие Парижского соглашения по климату. Дальнейшее ограничение рождаемости может происходить стихийно, как в развитых странах, в результате косвенного воздействия возрастающего цивилизационно-образовательного уровня населения на его национальный менталитет.

4.2. Технологии природосбережения

Центральная идея Парижского соглашения по климату состоит в переводе энергетики на возобновляемые источники энергии (ВИЭ). Но преодолеть гигантскую и все разрастающуюся антропогенную нагрузку только за счет достижений науки и техники, по-видимому, не удастся. Нужно регулировать и ограничивать рост населения как главный источник антропогенной нагрузки.

Длительное время природоохранные технологии недофинансируются, а рост населения в развивающихся странах не регулируется ни на государственном, ни на международном уровнях. В результате в атмосфере планеты продолжают накапливаться огромные массы парниковых газов. Для предотвращения этого явления Еврокомиссия приняла документ «Европейская зеленая сделка». В документе изложены принципы, на основе которых Евросоюз намерен достичь «углеродной нейтральности» к 2050 г. Но и при этом, по расчетам ИНП РАН, накопление парниковых газов будет продолжаться.

Из-за высокой стоимости новые технологии малодоступны развивающимся странам. Поэтому во многих странах предполагается строить электростанции преимущественно на угле.

В качестве «асимметричного ответа» и выхода из создавшейся опасной ситуации может быть предложено сокращение выбросов парниковых газов за счет умеренности роста населения в некоторых странах развивающегося мира.

4.3. Сближение уровня благосостояния стран мира

По мере роста численности человеческой популяции возрастают угрозы пандемий. Пандемия COVID-19 была своевременно предсказана. Поэтому после ее прихода в короткие сроки были созданы десятки вакцин, проведены массовые вакцинации населения, приняты меры для самоизоляции.

Возникла проблема равного доступа стран к проведению этих противовирусных мер. Огромное различие в экономическом благополучии стран мира делает равнодоступность услуг медицины трудно достижимой. Поэтому вирус сохраняется в слаборазвитых странах, мутирует и на повторной волне возвращается в развитые страны. При существующих темпах роста населения и разрастания бедности победить пандемию в одной или нескольких странах мира невозможно.

Выход из создавшейся ситуации, на наш взгляд, состоит в сближении уровня экономического благополучия развивающихся стран с развитыми. В сокращении экономического отставания развивающихся стран от развитых, по-видимому, заключается также ключ к кардинальному решению проблемы растущей незаконной миграции масс населения Африки, Азии и Латинской Америки в Европу и Северную Америку¹.

Необходимым условием сближения экономического благополучия богатых и бедных стран является переход развивающихся стран к политике планирования семьи и умеренным показателям рождаемости, принятым в развитом мире. Китай и ряд других стран предпринимают меры, направленные на сближение своей демографической политики со странами развитого мира.

В предыдущих наших исследованиях на базе статистических данных развивающихся стран была доказана следующая закономерность: прирост населения в развивающихся странах строго обратно пропорционален душевому ВВП (ППС). Для стран с самым низким уровнем экономики (годовой ВВП до 5 тыс. долл. на человека) годовой прирост населения составляет 20–25 человек на 1 тыс. жителей. В странах с высоким душевым ВВП (ППС) на уровне, близком к развитым странам (30 тыс. долл. на человека и более), прирост населения становится практически нулевым. Значит, чтобы выйти на умеренные приросты населения, развивающиеся страны должны повышать уровень своего благосостояния.

Процесс сближения уровней благосостояния стран мира уже идет. По данным МВФ, темпы прироста ВВП (ППС) в 2020 г. составляли: весь мир — 3,4%; развитые страны — 1,7%; развивающиеся страны и страны с переходной экономикой — 4,6%.

Однако колоссальное отставание развивающихся стран от стран с высоким экономическим развитием сохраняется (табл. 1).

¹ По данным ООН, за первые 20 лет текущего столетия доля международных мигрантов в численности населения увеличилась с 2 до 3,5%. Разрастаются локальные ресурсные войны в Африке.

Таблица 1. Неравномерность экономического роста развивающихся и развитых стран

Показатели	Развитые страны	Развивающиеся страны	Отставание (–) и опережение (+) развивающихся стран
ВВП на душу населения, тыс. долл.	50,1	14,3	–72%
Темпы роста ВВП, %	1,7	4,6	+2,9 п.п.
Темпы роста численности населения, %	0,33	1,07	+0,74 п.п.

Источник: рассчитано автором по данным МВФ.

Из данных в табл. 1 следует, что ВВП на душу населения в развивающихся странах составляет всего около 1/3 уровня развитых стран. Но темпы экономического роста развивающихся стран выше, чем развитых. Отставание сокращается. Однако опережающие темпы рождаемости и роста населения развивающихся стран сдерживают сближение уровня их экономического развития со странами развитого мира.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате интеграции классической теории экономического роста и теории нулевого роста в статье предложена компромиссная теория сбалансированного роста, реализация которой в ограниченных пределах позволяет повышать благосостояние растущего населения при одновременном сохранении природной среды обитания. В основе сбалансированной теории роста лежит умеренный, нулевой или даже отрицательный темп увеличения численности населения государств.

В статье в неявном виде предложена производственная функция сбалансированного роста, в которой максимально допустимый (предельный) экономический рост не должен необратимо нарушать природную среду, в то время как минимум роста исходит из презумпции сохранения и увеличения благосостояния населения. Все более очевидным становится ситуация, при которой темпы экономического роста определяют не только его традиционные факторы — труд, капитал и НТП, но и природоохранные затраты. Сбалансированность между двумя конкурирующими требованиями к росту — увеличением благосостояния растущего населения при одновременном сбережении ограниченных ресурсов среды обитания — может быть достигнута за счет снижения до умеренного уровня рождаемости в некоторых странах развивающегося мира, при одновременном освоении ими достижений НТП². Иначе говоря, условием сбалансированного роста является сближение демографического и научно-технического уровней развивающихся и развитых стран.

Процесс сближения экономического уровня стран мира, хотя и медленно, но уже происходит: темпы роста ВВП развивающихся стран превышают уровень развитых. Однако росту душевого ВВП препятствует высокая рождаемость в бедных странах. Ключевой проблемой бедных стран с высокой рождаемостью является ее нормализация до уровня стран развитого мира.

В опасной близости от пределов антропогенной нагрузки на природную среду необходимо ускорить переход развивающихся стран на демографический тренд развитых стран. Ускорение этого процесса на первых порах может потребовать заключения международного соглашения государств по росту численности населения. В дальнейшем процесс рождаемости и роста населения может вернуться в сферу саморегулирования. Предпосылкой для этого является рост ИЧР, душевого ВВП, гендерного равенства, образовательно-цивилизационного уровня в странах с повышенной рождаемостью.

Теория сбалансированного роста предназначена для переходного периода — перехода от максимально достижимой к умеренно-допустимой антропогенной нагрузке. Преимущества и благоденствие умеренного роста населения исторически доказаны в странах развитого мира. Ими могут воспользоваться и остальные страны, если ограничат рождаемость и рост численности населения. Оказывается, что высокий уровень жизни достижим не только за счет достижений НТП, но и путем демографической революции — самой безобидной из всех социальных революций.

Если представить происходящий экономический рост в терминах S-образной логистической кривой, характеризующей развитие циклов жизни биологических популяций, то оказывается, что около

² Проблема умеренного потребления в развитых странах в данной статье не анализируется.

трех десятков развитых стран мира уже вступили в стадию депопуляции населения, умеренного и за­тухающего роста. Ожидается, что к 2050 г. число стран с убывающим населением удвоится.

Но многие развивающиеся страны находятся на предшествующей стадии высокого роста насе­ления. В рамках концепции сбалансированного роста им предстоит переход к умеренной рождае­мости, как в развитых странах. В свою очередь, сбалансированный экономический рост развитых стран должен предусматривать умеренный рост потребления и государственных расходов, не свя­занных с ростом благосостояния населения.

Практическая аппроксимация концепции сбалансированного роста предполагает проведение государствами и мировым сообществом крупномасштабных экологических и экономических ис­следований и долгосрочных прогнозов. Предстоит обосновать оценки затрат на природоохран­ные мероприятия, обеспечивающие сохранение свойства самовосстановления природной среды, а в тех случаях, когда она уже утеряна, — затрат на ее возрождение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Кузнец С.** (2004). Современный экономический рост: результаты исследования и размышления. В кн.: «Ми­ровая экономическая мысль». Т. 5. «Всемирное признание. Лекции нобелевских лауреатов». Отв. ред. Г.Г. Фетисов. М.: Мысль. С. 106–124. [**Kuznets S.** (2004). Modern economic growth: Finding and reflections. In: *World economic ideas. Lectures of Nobel laureates*. Vol. 5. G.G. Fetisov (ed.). Moscow: Mysl', 106–124 (in Russian).]
- Мюрдаль Г.** (2004). Проблема равновесия и ее роль в мировом развитии. В кн.: «Мировая экономическая мысль». Т. 5. «Всемирное признание. Лекции нобелевских лауреатов». Отв. ред. Г.Г. Фетисов. М.: Мысль. С. 189–214. [**Myrdal G.** (2004). The equality issue in world development. In: *World economic ideas. Lectures of Nobel laureates*. Vol. 5. G.G. Fetisov (ed.). Moscow: Mysl', 189–213 (in Russian).]
- Самуэльсон П.А.** (2004). Принципы максимума в экономическом анализе. В кн.: «Мировая экономическая мысль». Т. 5. «Всемирное признание. Лекции нобелевских лауреатов». Отв. ред. Г.Г. Фетисов. М.: Мысль. С. 87–106. [**Samuelson P.A.** (2004). Maximum principles in analytical economics. In: *World economic ideas. Lectures of Nobel laureates*. Vol. 5. G.G. Fetisov (ed.). Moscow: Mysl', 87–106 (in Russian).]
- Солоу Р.** (2004). Теория роста и дискуссия о ней. В кн.: «Мировая экономическая мысль». Т. 5. «Всемирное признание. Лекции нобелевских лауреатов». Отв. ред. Г.Г. Фетисов. М.: Мысль. С. 574–593. [**Solow R.M.** (2004). Growth theory and after. In: *World economic ideas. Lectures of Nobel laureates*. Vol. 5. G.G. Fetisov (ed.). Moscow: Mysl', 574–593 (in Russian).]
- Фальцман В.К.** (2020). Международная помощь беднейшим странам // *Мировая экономика и международные отношения*. Т. 64. № 8. С. 56–62. [**Fal'tsman V.K.** (2020). On International aid to least developed countries (LDCs) for family planning, poverty reduction and climate mitigation. *World Economy and International Relations*, 64, 8, 56–62 (in Russian).]
- Фальцман В.К.** (2021). Регулирование антропогенной нагрузки на среду обитания // *Мировая экономика и международные отношения*. Т. 65. № 4. С. 14–20. [**Fal'tsman V.K.** (2021). Regulation of anthropogenic load of the habitat. *World Economy and International Relations*, 65, 4, 14–20 (in Russian).]
- Фальцман В.К.** (2022). Перспективы повышения индекса человеческого развития // *Мировая экономика и международные отношения*. Т. 66. № 9. С. 47–53. [**Fal'tsman V.K.** (2022). Perspectives of human development index improvement. *World Economy and International Relations*, 66, 9, 47–53 (in Russian).]
- Фитуни Л.Л.** (2012). Африка: ресурсные войны XXI века на Африканском континенте // *Институт Африки РАН*. С. 248. [**Fituni L.L.** (2012) Africa: Resource wars of the XXI century on the African continent. *Institute of Africa RAN*. 248 p. (in Russian).]
- Economic growth in the Future. The growth debate in national and global perspective* (1976). Edison Electric Institute, McGraw-Hill Book Company, 82–134.
- Kuznets S.** (1971). *Economic growth of nations: Total output and production structure*. Cambridge: Harvard University Press, 10–27.

Issues of balancing economic growth and the state of the environment

© 2023 V.K. Fal'tsman

V.K. Fal'tsman,*Institute of Applied Economic Research, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russia; e-mail: m975032@gmail.com*

Received 08.12.2022

Abstract. This paper addresses the core problem of economic growth — the question of the criteria that should be met in order to both satisfy the needs of a growing population and assure preservation of natural environment for future generations. It contains a comparative analysis of classic theory of maximal economic growth with zero-growth theory. A compromise concept of balanced economic growth is presented. In the paper, an unobvious form an industrial function of balanced growth is hinted at, within which maximum allowed (limited) economic growth shouldn't induce irreparable damage on environment while minimum of the growth assumes increasing of population wellbeing. Among traditional arguments of the industrial function a factor of investments into environmental protection has been introduced. Balance between two competing requirements to economic growth — improvement of population wellbeing accompanied by simultaneous conservation of limited environmental resources — may be achieved, in addition to the use of resource-efficient technologies, through family planning and monitoring of population growth. Condition of balanced growth is convergence of demographic and technological levels of developing and developed countries. Being dangerously close to the limits of anthropogenic pressure on our environment, the international community should assist developing countries' transition to the demographic trends of the developed world. At the initial stage, acceleration of this process may require negotiations of an international compact among states regarding population growth. Subsequently, fertility patterns and population growth may return to self-regulation. Drivers for this process will be the Index of Human Development, indicators of gender parity, per capita GNP, and educational levels of populations in the countries with high birth rates. Efficient international aid to poor countries should contribute to this process. Comparative advantages and prosperity as a result of moderate population growth were proved by the historic records of developed countries. These trends can be applied in other countries if they limit birth rates and population growth. It appears that improvements of population-wide quality of life can be achieved not only by promotion of scientific and technological progress, but also by means of demographic revolution, which is the most harmless among all of social revolutions.

Keywords: regulation of growth, population, anthropogenic pressure on environment, Human Development Index (HDI), official development assistance (ODA).

JEL Classification: O44.

For reference: **Fal'tsman V.K.** (2023). Issues of balancing economic growth and the state of the environment. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 112–121. DOI: 10.31857/S042473880025863-8

Об упрощениях решения транспортных задач с экологическим критерием

© 2023 г. В.Н. Ассаул, И.Е. Погодин

В.Н. Ассаул,

Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург;
e-mail: vicvic21@yandex.ru

И.Е. Погодин,

Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ «ВМА», Санкт-Петербург;
e-mail: iepogodin@mail.ru

Поступила в редакцию 18.01.2023

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за обстоятельный, конструктивный анализ работы, а также всему коллективу редколлегии и редакции ЭММ, своим добросовестным, оперативным трудом создавшим журналу авторитет и международное признание высокого научного уровня.

Аннотация. Проанализирована возможность пренебрежения штрафной составляющей при решении транспортной задачи (ТЗ) с экологическим критерием, когда наряду со сделанной оплатой назначаются фиксированные добавки, обусловленные фактом конкретной перевозки, а не объемом перевозимого груза (штрафы). Обнаружено, что в то время как пороговые отношения средних квадратических отклонений тарифов и штрафов в ТЗ с единственным оптимальным планом могут группироваться довольно плотно, в ТЗ с неединственным оптимальным планом их использование мало эффективно из-за большого разброса. Однако возможность применения предложенного авторами метода зацикливаний, когда многократно решается ТЗ, в которой к тарифам добавляются штрафы, деленные сначала на максимально допустимую перевозку, затем на план перевозки на предыдущем шаге, позволяет пренебречь штрафами, если зацикливание завершается на первом шаге. Недостатком и причиной приближенного характера метода зацикливаний является возможное наличие других циклов с локальными минимумами. Рассмотрен метод исключений, когда для ТЗ с n поставщиками и m заказчиками исключаются клетки по убыванию штрафов при достаточности остающихся частей мощностей и емкостей. Распределение перевозок после $R=(nm - (n+m - 1))$ шагов позволяет не учитывать тарифов при выборе плана. Недостатком этого метода, равноценного распределению по минимальным затратам, являются затруднения при расстановке перевозок после R шагов исключений, сделанных в предположении насыщенного использования клеток.

Ключевые слова: транспортная задача, экологический критерий, тариф, штраф, оптимальный план, предельно допустимое значение.

Классификация JEL: C02, C44, C54, C65.

Для цитирования: Ассаул В.Н., Погодин И.Е. (2023). Об упрощениях решения транспортных задач с экологическим критерием // Экономика и математические методы. Т. 59. № 2. С. 122–127. DOI: 10.31857/S042473880025864-9

ВВЕДЕНИЕ

В отличие от классического варианта транспортной задачи (ТЗ), ТЗ с экологическим критерием (или ТЗ с фиксированными доплатами) (Ассаул, Погодин, 2019, 2022; Balinski, 1961; Бирман, 1968; Корбут, Финкельштейн, 1969; Поляк, 1966; Седова, Лебедев, 1999, 2001; Сигал, Иванова, 2007; Фролькис, 2002; Хоанг, 1964) предусматривает дополнительные платежи $d_{i,j}$ (штрафы), которые не зависят от объемов перевозок $E_{i,j}$ и назначаются только за использование конкретных перевозок от поставщика i потребителю j , где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, n и m — число поставщиков и заказчиков соответственно. Эти задачи актуальны как для теории оптимизации, так и для оптимального планирования.

Поскольку решение ТЗ с экологическим критерием порождает много проблем и точный путь их преодоления в общем случае до сих пор неизвестен, то высок интерес к исследованию исключения влияния штрафной компоненты $d_{i,j}$ при выборе оптимального плана полной задачи с заданными штрафами.

Очевидно, что средние (по ансамблю перевозок) значения как тарифов $c_{i,j}$, так и штрафов $d_{i,j}$ должны влиять только на подсчитываемые в конце решения экономические показатели суммарных затрат при выбранных оптимальных планах ТЗ. Выбор планов задачи связан с переменными по ансамблю частями тарифов ($c_{i,j} - prices$) и штрафов ($d_{i,j} - penalty$), которые будем характеризовать, например, их средними квадратичными отклонениями (СКО), точнее, соотношениями между ними ($\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$). В частности, можно надеяться, что эти соотношения позволят выделить ситуации, в которых удастся элементарными способами строить оптимальные планы ТЗ без учета штрафов $d_{i,j}$.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И РАСЧЕТА

Очевидно, что очень малые штрафы в ТЗ с экологическим критерием не могут изменить оптимального плана задачи, найденного без учета штрафов. Поэтому рассмотрим, какие предельные средние характеристики системы штрафов могли бы нарушить это утверждение. Иными словами, попытаемся найти количественную меру допустимой малости штрафов на уровне выбора оптимального плана задачи, а для этого отыщем ситуации, когда добавление штрафов не изменяет оптимального плана ТЗ, найденного без штрафов.

На практике возможны ситуации, когда при постоянных штрафах все же требуется изменить оптимальный план ТЗ без штрафов. Так бывает, если ТЗ имеет вырожденные (использующие меньше, чем $(n + m - 1)$ ячеек) неоптимальные планы, увеличивающие суммарные затраты меньше, чем на величину постоянных штрафов, умноженных на число ячеек с нулевыми перевозками в вырожденном плане. Вырожденные планы могут появиться, например, при наличии групп партнеров, в которых суммарная мощность нескольких поставщиков равна суммарной емкости нескольких заказчиков. Выявив такие группы партнеров, общий вырожденный план ТЗ можно найти как суперпозицию планов сокращенных ТЗ для групп партнеров и ТЗ без выделенных групп.

Приведем несколько примеров, характеризуемых СКО-тарифов $(c_{i,j})\sigma_{price}$ и СКО-штрафов $(d_{i,j})\sigma_{penalty}$, когда для тарифов, умножившихся на различные масштабирующие коэффициенты $\mu = 0,8; 1,6$ (табл. 1, левая часть), указывались штрафы $d_{i,j}$ (табл. 1, правая часть), для которых подбирались такие наименьшие значения $\lambda_{кр}$ масштабирующих коэффициентов λ , при которых уже требовалось переходить к новому оптимальному плану для решения полной ТЗ (с учетом штрафов), отличному от имевшегося плана $\{E_{i,j}\}$. Введение в линейных выражениях для штрафов малого (изначально $\alpha = 0$) параметра α для обнаружения неединственных оптимальных планов объясняется позже.

Для сохранения СКО постоянными будем только изменять различными способами расстановку одних и тех же ценовых значений внутри табл. 1.

Исходная ТЗ в табл. 1 имеет единственный оптимальный план $\{E_{i,j}\}$ (ячейки, выделенные полужирным шрифтом). Предельно допустимые отношения СКО-штрафов за счет коэффициента $\lambda_{кр}$ при значениях штрафов $d_{i,j}$ (правая часть табл. 1) к СКО-тарифов $\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$ составили не более: 5,7 — для исходной табл. 1; 2,4 — при перестановке местами мощностей A_i ; 3,6 — при циклической перестановке строк тарифов $c_{i,j}$ в левой части таблицы; 4,3 — при циклической перестановке строк штрафов $d_{i,j}$ в правой части, причем независимо от величины коэффициента μ . Здесь задача табл. 1 проявилась как линейная с близким при различных вариациях условий уровнем предельно допустимого отношения СКО $\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$.

ТЗ может иметь несколько равноценных оптимальных планов. При этом наличие в упрощенной ТЗ (без штрафов) более одного равноценного нескольких оптимальных планов связано с набором

Таблица 1

$A_i \setminus B_j$	15	20	25	15	20	25
10	5 μ	3 μ	1 μ 10	$\alpha + \lambda$ 20	$\alpha + \lambda$ 45	$\alpha + \lambda$ 29
20	3 μ 15	2 μ 5	4 μ	$\alpha + \lambda$ 39	$\alpha + \lambda$ 50	$\alpha + \lambda$ 36
30	4 μ	1 μ 15	2 μ 15	$\alpha + \lambda$ 60	$\alpha + \lambda$ 22	$\alpha + \lambda$ 54
Мощности	Тарифы $c_{i,j}$ и оптимальный план $x_{i,j}$			Штрафы $d_{i,j}$		

конкретных значений тарифов $c_{i,j}$ и сохраняется при рассмотренных изменениях расположения этих значений в конкретных клетках таблицы. В различных ситуациях изменяются только сами оптимальные планы, которые позволяет обнаружить предложенный в (Ассаул, Погодин, 2019) и используемый в (Ассаул, Погодин, 2022) алгоритм зацикливаний с процедурой Minimize в пакете Mathcad.

Суть метода зацикливаний заключается в том, что первоначально решается элементарная ТЗ, в платежной таблице которой (подобно методу (Balinski, 1961) все тарифы заменяются на модифицированные:

$$CM_{i,j} = c_{i,j} + d_{i,j} / \min(A_i, B_j), \quad (1)$$

где CM — новые значения тарифов $c_{i,j}$. Затем — в отличие от (Balinski, 1961) — многократно, до появления эффекта зацикливания, т.е. до повторения получаемых планов, решается та же ТЗ, где на шаге $k+1$ устанавливаются тарифы

$$CM_{i,j,(k+1)} = c_{i,j} + d_{i,j} / x_{i,j,k}, \quad (2)$$

где $x_{ij,k}$ — перевозка, назначенная в k -плане ТЗ в клетку оптимального плана с адресом (i, j) . После получения зацикливания подсчитываются полные фактические затраты на перевозки для каждого шага с учетом штрафов. В качестве оптимального плана выбирается тот, который обеспечивает минимум затрат.

Предложенный алгоритм зацикливаний обладает интересной особенностью. А именно при очевидном факте независимости оптимальных планов полной ТЗ от постоянных величин α , прибавляемых ко всем штрафам в ТЗ (см. табл. 1), этот метод позволяет получить несколько различных равноценных оптимальных планов ТЗ: один — при $\alpha = 0$ и еще один или два — в противном случае (при $\alpha > 0,001$). Такая возможность появляется благодаря преобразованиям (1), (2), вносящим искусственную дифференциацию долей вкладов штрафов по различным клеткам. В ТЗ с единственным оптимальным планом (см. табл. 1) этот план получается при любых значениях α .

Метод зацикливаний может применяться к решению полной ТЗ (Ассаул, Погодин, 2019, 2022), однако недостаток и причина его приближенного характера заключаются в том, что помимо работающего цикла планов может существовать непересекающееся с ним подмножество планов ТЗ с другим локальным оптимальным планом.

Так, полученный методом зацикливаний план ТЗ в примере табл. 2 дает сумму перевозок в 338 единиц. В то же время эта ТЗ имеет другой непересекающийся цикл планов с другими оптимальными планами (значения, указанные через «/» в табл. 2) и суммой 337 единиц (локальный минимум).

В упрощенной ТЗ по оценкам с помощью отношения их СКО ($\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$) при других найденных оптимальных планах, отличных от выделенного, допустимая оценка СКО-штрафов может составлять лишь ничтожную часть от СКО-тарифов (например, менее 10^{-5}), т.е. исключать штрафы при использовании других оптимальных планов исходной задачи нельзя!

Те же вариации условий расстановки тарифов $c_{i,j}$, проделанные в задаче табл. 1, были повторены для задачи, имеющей несколько оптимальных планов, с другими мощностями A_i , емкостями B_j и тарифами $c_{i,j}$, но с теми же штрафами $d_{i,j}$ в шести рассмотренных случаях и дали предельно допустимые отношения СКО ($\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$), приведенные в табл. 3.

При наличии нескольких равноценных оптимальных планов ТЗ без штрафов (значения оптимальных перевозок одного из планов $\{E_{i,j}\}$ указаны рядом с тарифами используемых клеток $c_{i,j}$):

Таблица 2

$A_i \setminus B_j$	6	10	19
8	4 30 1/0	10 20 /1	7 15 7/7
12	11 25	8 40	5 35 12/12
15	9 18 5/6	6 22 10/9	12 42

Таблица 3

$A_i \setminus B_j$	9	18	23		9	18	23
16	9 μ	4 μ 16	7 μ		$\alpha + \lambda 20$	$\alpha + \lambda 45$	$\alpha + \lambda 29$
22	5 μ	3 μ 2	6 μ 20		$\alpha + \lambda 39$	$\alpha + \lambda 50$	$\alpha + \lambda 36$
12	1 μ 9	8 μ	2 μ 3		$\alpha + \lambda 60$	$\alpha + \lambda 22$	$\alpha + \lambda 54$
Мощности	Тарифы $c_{i,j}$ и оптимальный план $x_{i,j}$				Штрафы $d_{i,j}$		

1) $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \leq 281 \div 303$, $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \leq 10 \div 13$ получаются в двух вариантах циклических перестановок строк тарифов $c_{i,j}$ в левой части табл. 3, в то время как в третьем варианте один из трех равноценных оптимальных по тарифам планов случайно исключает клетки с самыми большими штрафами, что допускает их неограниченное увеличение (или пропорциональное увеличение штрафов во всех клетках);

2) $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \leq 28 \div 57$ — при циклической перестановке строк штрафов $d_{i,j}$ в правой части табл. 3;

3) $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \leq 23 \div 5$ — при транспонировании таблицы тарифов (один из двух равноценных планов),

4) $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \leq 12 \div 14$ — при перестановке мощностей A_i в табл. 3.

Здесь, в отличие от ТЗ в табл. 1 с единственным оптимальным планом (с максимумом предельно допустимого отношения $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} = 2 \div 5$), разброс значений $\sigma_{penalty} / \sigma_{price}$ составляет два порядка и определяющие его факторы обнаружить не удается.

Анализ противоположной предельной ситуации поиска оценок максимальных СКО-тарифов, при которых ими можно пренебречь, сохраняя в качестве оптимального план ТЗ, полученный только с учетом штрафов, приводит к порогу $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \geq 288$ по табл. 1 и $\sigma_{penalty} / \sigma_{price} \geq 18$ по табл. 3.

Приведем возможный и, казалось бы, достаточно логичный алгоритм решения ТЗ только со штрафами (метод исключений). Этот метод можно было бы применять также для получения приближенного оптимального плана при относительно малой тарифной составляющей по сравнению со штрафной. Для этого достаточно вместо фактических значений штрафов использовать модифицированные величины $DM_{i,j} = d_{i,j} + c_{i,j} \min(A_i, B_j)$.

Суть метода исключений состоит в том, что для нахождения оптимального плана ТЗ только по штрафной компоненте можно последовательно удалять клетки с большими штрафами в порядке их убывания при условии, что после каждого такого исключения остающихся в соответствующих строке и столбце сумм величин $\min(A_i, B_j)$ будет достаточно для обеспечения требуемых мощности A_i и емкости B_j . Так, следует удалить не более чем $nm - (n + m - 1)$ клеток, а в оставшихся — разместить оптимальный план перевозок.

Приведем недостатки метода исключений.

1. Условие исключения клеток с большими штрафами по остающимся в соответствующих строке и столбце суммам значений $\min(A_i, B_j)$ предполагает насыщенное ($x_{i,j} = \min(A_i, B_j)$) использование этих клеток. Однако полученный в итоге план может содержать также и ненасыщенное ($x_{i,j} < \min(A_i, B_j)$) использование некоторых клеток, т.е. требует изменения правила отбора исключавшихся клеток с большими штрафами, которое (как следствие) привело бы к другому плану.

2. На оставшихся клетках после такого грубого исключения больших штрафов не удается построить распределения поставок, удовлетворяющего заданным мощностям и емкостям.

Метод исключений, примененный к примеру, показанному в табл. 3, дает тот же оптимальный план, что и метод заикливания в ТЗ с нулевыми тарифами. Он может с успехом использоваться и при больших размерах ТЗ (5×5 и больше).

Метод исключений для ТЗ размером 4×4 представлен в табл. 4. В угловых скобках стоят исключенные большие штрафы, в фигурных — избежавшие исключения из-за дефицита остающихся возможностей перевозок (так, например, клетка (2, 2) сохранена для обеспечения предложения второго

Таблица 4

$A_i \setminus B_j$	18	11	13	7
10	<40> (10)	10 (10) 10	<25> (10)	<30> (7)
20	18 (18) 18	{27} (11) 1	<35> (13) 1	<37> (7)
8	<32> (8)	<33> (8)	23 (8) 1	19 (7) 7
11	<43> (11)	<34> (11)	23 (11) 11	19 (7)

поставщика A_2); в круглых — значения $\min(A_i, B_j)$); полужирным шрифтом указаны оптимальные перевозки плана.

После исключения 9 клеток с большими штрафами здесь не удается расставить плана необходимых перевозок. Метод исключений приводит к плану, требующему замены перевозки в ранее исключенной клетке (2, 3) вместо клетки (4, 4), что дает минимум суммарных затрат в 155 единиц вместо формально ожидавшихся 139 единиц. Причина этого в неверном решении исключить клетки (2, 3), делавшемся в предположении о полной загрузке (насыщении) клетки (2, 2).

Следует сказать, что метод исключений по сути соответствует классическому методу распределений по наименьшим затратам, только примененному в обратном направлении. В ТЗ табл. 4 оба подхода дают один и тот же результат, затраты по которому, однако, превышают истинно оптимальные на 10 единиц.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы.

Если на практике считать инфляцию как пропорциональное увеличение тарифов и штрафов ($\lambda = \mu$, $\alpha = 0$), то устоявшиеся ранее логистические системы организации перевозок, в которых оптимальный план строился только с учетом тарифов, могут утратить свойство оптимальности, если инфляция превысит некоторое значение (т.е. нарушится условие $\lambda = \mu$).

Как было замечено в ТЗ из табл. 3, в случае неединственности оптимального плана СКО не является достаточным параметром для непосредственного заключения о возможности не учитывать штрафов при отыскании оптимального плана полной задачи. Это тесно связано со свойствами (структурой) как конкретных таблиц тарифов, так и таблиц штрафов. Однако предложенный метод зацикливаний по первому его применению позволяет точно заключить, можно ли так поступить (если оптимальный план задачи без штрафов и со штрафами совпадают после первого шага).

В остальных случаях, когда нет оснований полностью пренебречь штрафами при выборе оптимального плана, остаются следующие возможности:

– пренебрегать штрафами, если их суммарный вклад мал хотя бы по сравнительным оценкам их средних значений

$$Ro = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{i,j} \min(A_i, B_j) \right) / \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d_{i,j}, \text{ или } R = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j} \right) / nm,$$

где $R_{i,j} = c_{i,j} \min(A_i, B_j) / d_{i,j}$, где R и Ro — это некие суммы, интегрально характеризующие ТЗ;

– учитывать штрафы при поиске оптимальных планов полной задачи с экологическим критерием, в частности, с помощью предложенного в (Ассаул, Погодин, 2019, 2022) приближенного, однако достаточно простого на практике метода зацикливаний. Недостатком и причиной приближенного характера этого метода зацикливаний является возможное наличие других циклов планов с локальными минимумами;

– в предельном случае очень малых тарифов методы зацикливаний (Ассаул, Погодин, 2019, 2022) и исключений¹ также позволяют найти оптимальный план, учитывая только штрафы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

Ассаул В.Н., Погодин И.Е. (2019). О транспортной задаче с экологическим критерием // *Экономика и математические методы*. Т. 55. № 2. С. 58–64. [Assaul V.N., Pogodin I.E. (2019). About the transport task with environmental criteria. *Economics and Mathematical Methods*, 55 (2), 58–64 (in Russian).]

Ассаул В.Н. Погодин И.Е. (2022). Об одном практическом способе решения транспортной задачи с «экологическим» критерием // *Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика*. № 3. С. 3–13. [Assaul V.N., Pogodin I.E. (2022). On one practical way to solve the transport problem with an “environmental” criterion. *BSU bulletin. Mathematics, Informatics*. 3, 3–13 (in Russian).]

Бирман И.Я. (1968). Оптимальное программирование. М.: Экономика. 231с. [Birman I.Ya. (1968). *Optimal programming*. Moscow: Ekonomika. 231p. (in Russian).]

¹ Недостатком метода исключений являются возможные затруднения при расстановке перевозок после $(nm - (n+m-1))$ -шагов исключений.

- Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.** (1969). Дискретное программирование. М.: Наука. 368 с. [**Korbut A.A., Finkelstein Yu.Yu.** (1969). *Discrete programming*. Moscow: Nauka. 368 p. (in Russian).]
- Поляк Р.А.** (1966). Об одной неоднородной транспортной задаче. В сб.: «Математические модели и методы оптимального планирования». Новосибирск: Наука. С. 109–115. [**Polyak R.A.** (1966). On one heterogeneous transport problem. In: *Mathematical models and methods of optimal planning*. Novosibirsk: Nauka, 109–115 (in Russian).]
- Седова С.В., Лебедев С.С.** (1999). Решение одной задачи размещения с использованием узловых векторов разрешающих множителей // *Экономика и математические методы*. Т. 35. № 3. С. 116–121. [**Sedova S.V., Lebedev S.S.** (1999). Solution of one placement problem using nodal vectors of resolving factors. *Economics and Mathematical Methods*, 35 (3), 116–121 (in Russian).]
- Седова С.В., Лебедев С.С.** (2001). Метод узловых векторов целочисленного программирования. 2. Задачи специального вида. Препринт ЦЭМИ. WP/2000/094. 88 с. [**Sedova S.V., Lebedev S.S.** (2001). Nodal vector method for integer programming. 2. Problems of a special type. *CEMI preprint*. WP/2000/094. 88 p. (in Russian).]
- Сигал И.Х., Иванова А.П.** (2007). Введение в прикладное и дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит. С. 45–49. [**Sigal I.Kh., Ivanova A.P.** (2007). *Introduction to applied and discrete programming: Models and computational algorithms*. Moscow: Fizmatlit, 45–49 (in Russian).]
- Фролькис В.А.** (2002). Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. СПб: Питер. 320 с. [**Frolkis V.A.** (2002). *Introduction to the theory and methods of optimization for economists*. Saint Petersburg: Piter. 320 p. (in Russian).]
- Хоанг Т.** (1964). Вогнутое программирование при линейных ограничениях // *Доклады Академии наук СССР*. Т. 159. № 1. С. 32–35. [**Hoang T.** (1964). Concave programming under linear restrictions. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 159, 1, 32–35 (in Russian).]
- Balinski M.L.** (1961). Fixed cost transportation problem. *Naval Res. Log. Quart.*, 8, 1, 41–54.

On simplification of the transport problem solution with ecological criterion

© 2023 V.N. Assaul, I.E. Pogodin

V.N. Assaul,

Saint Petersburg State Aerospace Technologies University, Saint Petersburg, Russia; e-mail: vicvic21@yandex.ru

I.E. Pogodin,

Naval Polytechnical Institute, Saint Petersburg, Russia; e-mail: iepogodin@mail.ru

Received 18.01.2023

The authors express their sincere gratitude to the Reviewer for a detailed, constructive analysis of the work, as well as to the entire staff of the EMM Editorial board, who, with their conscientious, prompt work, created the authority and international recognition of a high scientific level for the Journal.

Abstract. The possibility of neglecting the penalty component in solving the transport problem (TP) with an environmental criterion is analyzed, when, along piece-rate payment, fixed additives are assigned, due only to the fact of a specific transportation, and not to the amount of transported cargo (penalties). It was found that, while the threshold ratios of the standard deviations of tariffs and fines in a TP with a single optimal plan can be grouped quite tightly, in a TP with a non-unique optimal plan, their use is not effective due to the large spread. However, the possibility of applying the “looping” method proposed by the authors, when the TP is solved many times, in which penalties are added to the tariffs, divided first by the maximum possible transportation, then by the transportation plan at the previous step allows neglecting the “penalties” if the loop ends at the first step. The disadvantage and reason for the approximate nature of the “looping” method is the possible presence of other cycles with local minima. The possibility of the “exclusions” method presented in the paper is also considered, when for a TK with n suppliers and m customers cells are excluded in descending order of fines if the remaining parts of capacities and capacities are sufficient. The ability to distribute transportation after $R = (nm - (n + m - 1))$ steps allows you to ignore tariffs when choosing a plan. The disadvantage of this method, equivalent to allocative least cost method is the possible difficulty in arranging transportations after R steps of exclusion made under the assumption of a “saturated” use of cells.

Keywords: transport problem, environmental criterion, tariff, fine, optimal plan, maximum possible value.

JEL Classification: C02, C44, C54, C65.

For reference: **Assaul V.N., Pogodin I.E.** (2023). On simplification of the transport problem solution with ecological criterion. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 2, 122–127. DOI: 10.31857/S042473880025864-9

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

**О монографии Макарова В.Л., Окрепилова В.В., Бахтизина А.Р.
«Научные решения сложных экономических и социальных задач с помощью
суперкомпьютеров» М.: URSS. 2023. 416 с. ISBN 978-5-9710-6284-4**

© 2023 г. В.Е. Дементьев

В.Е. Дементьев,
ЦЭМИ РАН, Москва; e-mail: vedementev@rambler.ru

Поступила в редакцию 31.05.2023

DOI: 10.31857/S042473880025866-1

Современное развитие возможностей компьютерного моделирования социально-экономических процессов ставит на повестку дня создание систем поддержки принятия решений нового типа. И это должны быть не просто системы подбора и предварительного анализа информации, необходимой для принятия решений, а виртуальные полигоны для моделирования и апробации различных сценариев и вариантов решений с имитацией их последствий. Использование подобного инструмента анализа позволяет в ходе компьютерных экспериментов выбирать сочетания различных мер воздействия на управляемую систему, а также стратегии их поэтапной реализации, дающие в итоге желаемые результаты или же наглядно демонстрирующие границы достижимых результатов. В последнее время особенно бурное развитие получил метод агент-ориентированного моделирования, основанный на имитации индивидуального поведения социально-экономических акторов.

Использование суперкомпьютеров для агент-ориентированных моделей становится неизбежным. В реальной жизни агентов много (например, в демографических моделях учитывается поведение миллионов/миллиардов людей) и только суперкомпьютер может справиться с таким числом агентов. Суперкомпьютеры позволяют на несколько порядков увеличить число агентов и других количественных характеристик (узлов сети, размеров территории) в моделях, первоначально разработанных для использования в обычных настольных компьютерах. Поэтому суперкомпьютерное моделирование является логичным и необходимым шагом для упрощенных моделей, которые уже прошли успешную практическую апробацию на обычных компьютерах. Увы, специфика архитектуры современных компьютеров не гарантирует, что программное обеспечение компьютерной модели немедленно заработает и на суперкомпьютере. Требуется, как минимум, распараллеливание счетного ядра, а зачастую и его глубокая оптимизация, поскольку в ином случае применение дорогостоящего суперкомпьютерного счета скорее всего себя не оправдает.

В монографии, изданной в URSS и приуроченной к 300-летию Российской академии наук, рассматривается опыт зарубежных ученых и практиков по запуску агентных моделей на суперкомпьютерах, а также описываются известные программные платформы для их реализации в параллельном режиме. На примере демографических моделей, разработанных коллективами Центрального экономико-математического института РАН и Института проблем региональной экономики РАН, анализируются этапы и методы эффективного отображения счетного ядра мультиагентной системы на архитектуру современного суперкомпьютера.

В последние годы в число приоритетных направлений в информационных технологиях уверенно вошли отдельные отрасли гуманитарных наук, в частности создание систем краткосрочного и долгосрочного предсказательного моделирования социальных явлений и событий с использованием суперкомпьютерных технологий. Отметим, что суммарная производительность ТОП-500 суперкомпьютеров мира по сравнению с 1993 г. выросла почти в 4 млн раз и составляет более 4,4 эксафлопс¹, а производительность топовой системы FRONTIER в 2022 г. перешагнула эксафлопсный рубеж.

¹ Производительность в 1 эксафлопс означает, что машина может выполнять квинтиллион (миллиард миллиардов, число с 18 нолями) операций в секунду.

Что касается России, то, по последним данным рейтинга ТОП-500 от июня 2023 г., в этот список вошло 7 суперкомпьютеров: 1) Червоненкис (Яндекс), 2) Галушкин (Яндекс), 3) Ляпунов (Яндекс), 4) Christofari Neo (Сбер), 5) Christofari (Сбер), 6) «Ломоносов-2» (МГУ), 7) MTS GROM (МТС).

Однако, по оценкам аналитической компании IDC (International Data Corporation), общий объем данных в мире вырос почти в 150 раз за последние 15 лет. Как полагают аналитики, наибольший вклад в этот огромный прирост внесли следующие сферы: Интернет (блоги, социальные сети и т.д.); финансы (биржевые индексы, аналитические материалы и т.д.); здравоохранение (данные о пациентах, лекарствах, способах лечения и т.д.); астрономия (детализированные изображения галактик); биоинформатика (данные о 3.3 млрд оснований нуклеиновых кислот в геноме человека, протеиновые последовательности и их анализ); библиотеки (текстовые данные, фото, карты и т.д.).

Необходимость обработки такого объема данных обуславливает появление аналитических систем нового поколения, включающих усовершенствованные методы вычислений, распознавания образов, организации хранилищ, сбора статистики с целью извлечения смысла из данных и получения информационного контекста. Ставка делается в том числе и на агент-ориентированные модели.

В силу фактически экспоненциального роста данных дальнейший тренд развития агентных моделей направлен на использование для их построения суперкомпьютерных технологий (в том числе на базе геоинформационных систем). Это направление активно развивается, а на мировых конгрессах, посвященных агент-ориентированному моделированию, оно уже давно обсуждается не только на специализированных сессиях, но и в рамках пленарных выступлений.

Актуальность использования суперкомпьютерных технологий для разработки агентных моделей обусловлена тем, что оперативная память обычного персонального компьютера не способна вместить то число объектов программной среды, которое соответствует, например, населению земного шара, или даже отдельных густонаселенных стран. Запуск оригинальной модели в специализированных средах для разработки агентных моделей с числом агентов, превышающим несколько миллионов, приводит к исчерпанию оперативной памяти персонального компьютера.

Подобным же образом дела обстоят и с производительностью. Для пересчета состояния масштабной системы с нетривиальной логикой поведения и взаимодействия агентов требуются значительные вычислительные ресурсы, сопоставимые с потребностями вычислительных методов математической физики с аналогичным количеством расчетных ячеек. Но, в отличие от последних, поведение агентов включает элементы случайности, поэтому требуется провести серию расчетов и найти вероятностное распределение ключевых характеристик итогового состояния моделируемой среды.

Названные факторы обуславливают необходимость масштабных экспериментов с суперкомпьютерными версиями моделей, в которых популяция агентов распределяется по множеству узлов суперкомпьютера и расчеты выполняются параллельно. При этом возникает задача адаптации разрабатываемых в традиционных программных средах моделей для суперкомпьютеров.

На основе анализа большого числа зарубежных научных публикаций были конкретизированы основные направления использования суперкомпьютерных технологий применительно к общественным наукам:

- прогнозирование развития социально-экономических систем (стран, регионов, городов);
- воспроизведение исторических событий;
- моделирование миграционных процессов;
- моделирование распространения эпидемий;
- моделирование транспортных систем;
- имитация и оптимизация пешеходного движения;
- предсказание политических событий на основе сканирования новостей;
- прогнозирование экологического состояния окружающей среды и т.д.

В монографии «Научные решения сложных экономических и социальных задач с помощью суперкомпьютеров» представлены результаты научно-исследовательских работ, проведенных авторскими коллективами Центрального экономико-математического института РАН и Института проблем региональной экономики РАН в рамках выполнения программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы математического моделирования», а также программы Президиума РАН

«Механизмы обеспечения отказоустойчивости современных высокопроизводительных и высоконадежных вычислений» и подпрограммы «Фундаментальные проблемы решения сложных практических задач с помощью суперкомпьютеров».

В исследовании изложен новый теоретико-методологический подход, основанный на применении инструментов экономики качества — стандартизации, метрологии и управления качеством, который в условиях цифровой экономики создает дополнительные возможности для исследования и повышения качества жизни.

Авторы монографии рассматривают повышение качества жизни как самую важную и сложнейшую социальную, экономическую и управленческую задачу, поиску научного решения которой в значительной степени может способствовать совместное применение экономики качества и агент-ориентированных моделей с использованием суперкомпьютерных технологий.

Первая презентация монографии состоялась 18 мая 2023 г. на площадке «Точка кипения — Санкт-Петербург. ГУАП» в рамках международной конференции «Социальные и экономические тренды устойчивого развития современного общества». С докладами по темам монографии выступили академики РАН А.Г. Аганбегян, В.Л. Макаров, В.В. Окрепилов, заместитель президента РАН член-корр. РАН В.В. Иванов, президент ВЭО России член-корр. РАН С.Д. Бодрунов, директор ЦЭМИ РАН член-корр. РАН А.Р. Бахтизин, директор ИПРЭ РАН д.э.н. А.Д. Шматко и другие.

V.E. Dementiev

Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia;
e-mail: vedementev@rambler.ru

Received 31.05.2023

DOI: 10.31857/S042473880025866-1

А.И. Ставчикову — 85



5 марта 2023 г. исполнилось 85 лет ученому секретарю ЦЭМИ РАН, кандидату экономических наук Александру Ивановичу Ставчикову.

Александр Иванович Ставчиков 60 лет активно и плодотворно работает в Центральном экономико-математическом институте РАН. В ЦЭМИ он прошел путь от младшего научного сотрудника лаборатории систем обработки информации до ученого секретаря института, в должности которого он трудится вот уже 45 лет. Александр Иванович ведет широкую научно-организационную и общественную работу. С 1978 г. по настоящее время А.И. Ставчиков бессменный ученый секретарь Ученого и Диссертационного советов, с 1979 г.— секретарь Экспертной комиссии РАН по премии имени академика В.С. Немчинова, с 1992 г.— член Ученого совета экономического факультета Государственного академического университета гуманитарных наук, с 1998 г.— член редакционной коллегии журнала «Экономическая наука современной России». За это время им защищена кандидатская диссертация, опубликовано около 100 научных работ, в том числе 3 монографии.

А.И. Ставчиков — известный специалист в области экономики предприятий и информационно-аналитических систем в экономике и науке. В сфере его научных интересов центральное место занимают проблемы совершенствования процессов управления на основе использования вычислительной техники и математических методов. Значительный вклад А.И. Ставчиков внес в разработку системы матричных моделей предприятий различных отраслей и методологии свода их в модели макроуровней. В последние годы он активно участвует в разработке проблем экономического риска на предприятии, маркетинга научной продукции, теоретических проблем модернизации.

Вся трудовая деятельность А.И. Ставчикова связана с ЦЭМИ, он является непосредственным свидетелем создания и активным участником дальнейшей научной деятельности ЦЭМИ РАН, верным хранителем истории института, бережно сохраняет память о создателях ЦЭМИ, основоположниках его научных направлений, важнейших научных исследованиях и достижениях, уникальных фактах, исторических поворотах и ярких событиях.

Дорогой Александр Иванович! Ваша многогранная и обширная научная деятельность, которую Вам удастся успешно выполнять, сочетает высокий уровень научной зрелости, профессиональную квалификацию, требовательность к себе, твердость убеждений, принципиальность, умение отстаивать свою точку зрения, при этом сохраняя подчеркнутое спокойствие и уравновешенность, демонстрируя искреннюю доброжелательность, желание прийти на помощь и оказать дружескую поддержку.

Для нас, сотрудников ЦЭМИ РАН, Вы всегда были и остаетесь нашим старшим коллегой, образцом уравновешенного и стабильного человека, уверенного в правильности поставленных целей и реальной возможности их достижения. Нам повезло, что мы имеем возможность ежедневно общаться и дружить с таким Человеком! Пусть же Вас поддерживает наше чувство искреннего уважения и симпатии.

Дорогой Александр Иванович, Ваш замечательный юбилей дает нам прекрасную возможность выразить Вам нашу благодарность как замечательному человеку! Пожелать Вам крепкого здоровья, активной плодотворной работы, новых творческих идей и перспективных проектов, неиссякаемого оптимизма и много радости от жизни, семьи, родных, близких, детей и многочисленных внуков!

Друзья и коллеги