

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ



<https://ras.jes.su>



Российская академия наук

ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Том 59 № 1 2023

Журнал основан в январе 1964 г.
Выходит 4 раза в год
ISSN 0424-7388

*Журнал издается под руководством
Отделения общественных наук РАН*

Главный редактор

В.Е. Дементьев

Редакционная коллегия:

А.А. Афанасьев, С.А. Афонцев, А.Р. Бахтизин (зам. главн. ред.), В.А. Волконский,
Н.А. Волчкова, Ю.Н. Гаврилец, И.У. Зулькарнай, В.Л. Квинт, Г.Б. Клейнер, М. Кубонива,
А.М. Либман, В.Н. Лившиц, В.Л. Макаров, П.А. Минакир, В.В. Окрепилов,
В.М. Полтерович, А.В. Савватеев, Н.М. Светлов, Е.В. Устюжанина (зам. главн. ред.),
И.С. Шитова (зам. главн. ред.)

Заведующая редакцией Н.С. Виноградова

Журнал «Экономика и математические методы»
входит в Перечень ВАК, базы данных РИНЦ,
Web of Science (Emerging Sources Citation Index)

Адрес редакции:

117418, г. Москва, Нахимовский просп., 47, ком. 305
Тел.: 8(499) 129-39-33, 8(916) 139-27-26
e-mail: emm@cemi.rssi.ru

Москва

СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, № 1, 2023

Теоретические и методологические проблемы

- Lahiri S.** Production theory for constrained linear activity models 5
- Проневич А.Ф.** О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс 16

Народнохозяйственные проблемы

- Дроботенко М.И., Невечеря А.П.** Прогнозирование отраслевой структуры занятости населения 22
- Моисеев Н.А., Внуков И.А., Сокерин П.О.** Оценка эффектов различных вариантов импортозамещения методом «затраты—выпуск» на примере Российской Федерации 30

Отраслевые проблемы

- Непп А.Н., Зыков А.С., Егорова Ю.В.** Нефть в эпоху коронавируса: истерия или закономерное падение рынка? 48

Проблемы предприятий

- Цуриков В.И.** О влиянии избыточного документооборота на трудовую активность сотрудника бюджетной организации 65
- Грачева М.В., Утемова Н.О.** Эмпирический анализ степени влияния рисков на успешность крупных проектов слияний и поглощений в современных компаниях 79

Математический анализ экономических моделей

- Андреев М.Ю., Полбин А.В.** Макроэкономическая роль залогового ограничения в странах, зависимых от экспорта ресурсов 93
- Балабушкин А.Н.** Приближенный расчет параметров ликвидационной стоимости портфеля с учетом асимметрии ее распределения 105
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г.** Сведение динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования 119
- Серков Л.А., Красных С.С.** Анализ влияния нерационального поведения экономических агентов на устойчивость моделей общего равновесия с открытой экономикой 131

Russian Academy of Sciences

ECONOMICS AND MATHEMATICAL METHODS

Volume 59 No. 1 2023

Founded in January 1964

4 issues a year

ISSN 0424-7388

*The Journal is run under the supervision
of the Department of Social Sciences at RAS*

Editor-in-Chief

V.E. Dementiev

Editorial Board:

Afanasiev A.A., Afontsev S.A., Bakhtizin A.R. (Deputy Editor-in-Chief),
Gavrilets Yu.N., Kleiner G.B., Kuboniwa M., Kvint V.L., Libman A.M., Livshits V.N.,
Makarov V.L., Minakir P.A., Okrepilov V.V., Polterovich V.M., Savvateev A.V.,
Shitova I.S. (Deputy Editor-in-Chief), Svetlov N.M.,
Ustyuzhanina E.V. (Deputy Editor-in-Chief), Volchkova N.A., Volkonskiy V.A., Zulkarnay I.U.

Secretary of Editorial Staff N.S. Vinogradova

The journal "Economics and Mathematical Methods"
is included in the list of the Higher Attestation Commission (HAC)
and indexed in Russian Index of Scientific Citation,
Web of Science (Emerging Sources Citation Index)

Editorial Address

Nakhimovskiy Prospect, 47, Office 305, Moscow, Russia, 117418

Tel.: +7(499) 129-39-33; +7(916) 139-27-26;

e-mail: emm@cemi.rssi.ru

Moscow

CONTENTS

Volume 59, no. 1, 2023

Theoretical and methodological problems

- Lahiri S.** Production theory for constrained linear activity models 5
- Pranevich A.F.** About production functions that take into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress 16

Problems of national economy

- Drobotenko M.I., Nevecherya A.P.** Forecasting the sectoral structure of population employment 22
- Moiseev N.A., Vnukov I.A., Sokerin P.O.** Evaluation of the effects from various ways of import substitution “input–output” method: Evidence from the Russian Federation 30

Industrial problems

- Nepp A.N., Zykov A.S., Egorova Yu.V.** Oil in the age of coronavirus: Hysteria or appropriate market fall? 48

Problems of enterprises

- Tsurikov V.I.** On the impact of excessive document flow on the labor activity of a budgetary organization employee 65
- Gracheva M.V., Utemova N.O.** Empirical analysis of risks’ influence on the large mergers and acquisitions projects’ success in modern companies 79

Mathematical analysis of economic models

- Andreyev M.Yu., Polbin A.V.** The macroeconomic role of the collateral constraint in resource-rich countries 93
- Balabushkin A.N.** Approximation to portfolio liquidation value with calculation of its skewness 105
- Lesik I.A., Perevozchikov A.G.** Reducing the dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming 119
- Serkov L.A., Krasnykh S.S.** Analysis of the influence of heterogeneous expectations of economic agents on the stability of general equilibrium models with an open economy 131

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Production theory for constrained linear activity models¹

© 2023 S. Lahiri

S. Lahiri,

Lok Jagruti (LJ) University, India; e-mail: somdeb.lahiri@gmail.com

Received 24.09.2022

Abstract. The purpose of this paper is to generalize the framework of activity analysis discussed in the paper by Antonio Villar without claiming any dimensional requirements on the activity matrices and by introducing a model of activity analysis in which each activity may (or may not) have a capacity constraint. We follow the usual nomenclature of input-output analysis for “the quantity of a good supplied to the consumers outside the production (or manufacturing) sector” and refer it as “final demand”. We obtain results similar to those in Villar concerning solvability, non-substitution and existence of efficiency prices. We apply our analysis and results to the two-period multisector activity analysis model with capacity constraints. The activity matrix is the difference between a non-negative output coefficient matrix and a non-negative input coefficient matrix, with the coefficients being measured in money units for each activity. Almost all the results obtained thus far get replicated in this macroeconomic context. However, some reformulations are required for issues related to existence of equilibrium price vector and as a consequence, issues related to efficiency prices via the non-substitution theorems. The corresponding concepts in this application refer to “inflation rate” vectors.

Keywords: constrained, linear activity analysis, solvability, non-substitution theorem, efficiency prices.

JEL Classification: C67, E16, E23, E31.

For reference: Lahiri S. (2023). Production theory for constrained linear activity models. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 5–15. DOI: 10.31857/S042473880024866-1

This paper is in honour of Professor Dipankar Dasgupta and Professor Pradip Maiti, who taught me Linear Production Models and Linear Programming respectively.

1. INTRODUCTION

The purpose of this paper is to generalize the framework of activity analysis discussed in A. Villar (Villar, 2003) and obtain similar results concerning solvability. We generalize the model due to A. Villar (Villar, 2003), without requiring any dimensional requirements on the activity matrices and by introducing a model of activity analysis in which each activity may (or may not) have a capacity constraint i.e., a maximum level at which the activity can operate. This may be one way to accommodate meaningful non-linearities similar to that considered for input–output analysis in I. Sandberg (Sandberg, 1973).

In I. Sandberg (Sandberg, 1973), the input-output coefficients were assumed to be differentiable, which is very likely an approximation of the more realistic and practically applicable representation in which the input-output coefficients are piecewise constant. Minor, technical increments on the solvability result in Sandberg (Sandberg, 1973) can be found in P. Chander (Chander, 1983) and some references therein. Undoubtedly, piecewise constant input-output constants are more difficult to deal with mathematically than differentiable ones. Non-linearities are much easier to represent in the framework of linear activity analysis by introducing upper bounds — whenever there is a capacity constraint for the levels at which each such activity may operate. We do this by introducing a model of activity analysis in which each activity may (or may not) have a capacity constraint. In this paper we follow the usual nomenclature of input-output analysis for “the quantity of a good supplied to the consumers outside the production (or manufacturing) sector” and refer it as “final demand”.

It seems that in this significantly more general framework we are able to obtain the desired results concerning solvability and existence of an equilibrium price-vector under weaker assumptions than the corresponding requirements in A. Villar (Villar, 2003). The property that guarantees solvability has the following

¹ This paper generalizes and extends the framework of analysis as well as the results in an earlier paper by the author entitled “Production Analysis for Proper Activity Matrices” (<https://drive.google.com/file/d/15E2SI1b5NeWBgtRI-O1gb1UA9CG6QhJc/view>).

economic interpretation: Given two price vectors p, q a final demand vector and unit prices of operating capacity constrained activities, if the revenue from operating every unconstrained activity at unit level at price-vector p is no less than doing the same at price-vector q and if the revenue from operating a constrained activity at unit level at price-vector p is no less than doing the same at price-vector q plus the unit price of operating the activity then the value of the final demand at price vector p is no less than the value of the final demand at price-vector q plus the total cost of the capacities. In the context of the constraint linear activity analysis model, we call this property “weakly proper”. We also prove a version of the Non-Substitution Theorem that establishes the existence of “efficiency price-vectors” as a joint product. However, our Non-Substitutions Theorem — in spite of the generality of our model as compared to the one due to A. Villar (Villar, 2003) — requires that if there are capacity constraints, then there is a minimal subset of the set of capacity constrained activities that are always used up to full capacity, for the production of all producible final demand vectors. Further, these capacity constrained activities are the only ones whose capacities are binding for some producible final demand vector. Hence there is a clear dependence of the equilibrium price vector on the final demand vector (i.e. the vector of quantities supplied for non-manufacturing prices); unlike the conclusion of Sraffian economics², and we are able to show this without using production functions. Our framework is a generalization of the one used in Sraffian economics.

In a concluding section of this paper, we apply our analysis and results to the two-period multisector activity analysis model with capacity constraints. Production takes place in the current period and the sale of goods outside the production system, takes place in a subsequent period. The activity matrix is the difference between a non-negative output coefficient matrix and a non-negative input coefficient matrix, with the coefficients being measured in money units for each activity. Almost all the results obtained thus far get replicated in this macroeconomic context. However, some reformulations are required for issues related to existence of equilibrium price vector and as a consequence, issues related to efficiency prices via the non-substitution theorems. The corresponding concepts in this application refer to “inflation rate” vectors, i.e., “equilibrium inflation rate-vector” and “efficiency equilibrium rate-vector” respectively. In the case of final demand for services (provided by the service sector) which do not require manufacturing, but are nonetheless measured in current producer prices, this may imply a difference between producer prices and the prices that consumers are required to pay for the services during the current period.

In what follows we will be making extensive use of mathematical results in Topics 2 and 3 — and therefore by implication results in Topic 1 — of Lahiri (Lahiri, 2022). Sometimes, when there is no scope for confusion, given two vector/points x and y in a real Euclidean space of the same dimension we use $x \geq y$ to denote that every co-ordinate of x is **greater than or equal to** the corresponding coordinate of y , $x > y$ to denote $x \geq y$, but $x \neq y$ (x is not equal to y), and $x \gg y$ to denote every coordinate of x is **strictly greater than** the corresponding coordinate of y .

2. MOTIVATION

Consider a very simple production process which produces a single output (“corn”) from a single input (once again “corn”). In the classical or Leontief Input-Output (IO) Model one assumes that there exists a **fixed positive constant** a such that ax units of corn are **required to produce** x units of corn. The production process is productive **if and only if** $0 < a < 1$. However, in reality the assumption of a fixed input-out coefficient a is unrealistic. Fertility of the soil is not uniform. Hence, it is unreasonable to assume that input-output coefficient remains constant for all levels of output.

Sandberg (Sandberg, 1973) suggested that the input-output coefficient(s) is(are) a differentiable function(s) of the gross output. Once again, differentiability of input-output coefficient appears to be an “unrealistic” assumption for actual production processes. Even if such an assumption is theoretically true, it is extremely difficult to invoke it for practical use in “production planning”. It is perhaps more realistic to assume that input-output coefficients are piece-wise constant. In what follows we generalize such an assumption and develop the theory that follows from it to the case of production with possibly more than one good.

The Sraffian conclusion of market prices being independent of the quantity “supplied” (which is referred to in the literature on input-output analysis as “final demand”) with fixed input-output coefficients and hence fixed unit costs of production with competitive factor markets, is not unreasonable at all in the “one good” setting, since that is precisely what is indicated by the intersection of any demand curve with a horizontal marginal cost (or perfectly competitive supply curve). However, in the more general setting with piece-wise

² See the sixth paragraph at: <https://www.rethinkeconomics.org/journal/sraffian-economics/>

constant input-output coefficients or piece-wise constant marginal cost functions, neither would the associated extension of the Sraffian linear model indicate such independence between market price and quantity supplied and nor would it be implied by the intersection of the market demand and marginal cost curves.

3. THE MODEL

Consider an economy with m produced goods indexed by $i = 1, \dots, m$ and n activities indexed by $j = 1, \dots, n$.

An $m \times n$ matrix of real numbers is said to be non-zero, if it has “at least one non-zero entry”.

Note. The rank of a non-zero matrix is a positive integer.

Let M be a non-zero $m \times n$ matrix of real numbers called an **activity matrix** the column j of which denoted M^j for $j \in \{1, \dots, n\}$ denotes the amount of **net output** of each good if the activity j is operated at unit level. Thus for $I \in \{1, \dots, m\}$ and $j \in \{1, \dots, n\}$, the entry i of M^j denoted m_{ij} denotes the **net output** (of the produced good i if the activity j (or activity j) is operated at unit level. If m_{ij} is negative, then $-m_{ij}$ is the amount of the produced good i used as **net input**, if the activity j is operated at unit level.

In what follows, unless otherwise stated, we shall use net output and output interchangeably. The same applies for net input and input.

An **activity-vector** is a column vector $x \in \mathbb{R}_+^n$ such that for all $j \in \{1, \dots, n\}$, the row j (or coordinate) of x , denoted x_j , is the level at which activity j is operated.

A **constrained linear activity analysis model (CLAAM)** is a pair $(M, \langle \bar{x}_j \mid j \in W \rangle)$ where M is an $m \times n$ activity matrix and if $W \neq \emptyset$ then $\langle \bar{x}_j \mid j \in W \rangle$ is an array with $\bar{x}_j \in \mathbb{R}_{++}$ being the maximum level at which activity $j \in W \subset \{1, \dots, n\}$ can operate, the possible levels of operation for activities in $\{1, \dots, n\} \setminus W$ being unbounded above. If $W = \emptyset$, then a constrained linear activity analysis model with activity matrix M is $(M, \emptyset)$.

In the case of $(M, \emptyset)$ no activity has a capacity constraint.

Note. This is a very general formulation. In particular there could be non-negative $m \times n$ matrices B, A such that $M = B - A$.

A column vector $d \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ is said to be a **final demand vector** if for all $i \in \{1, \dots, m\}$, row i of d , i.e. d_i represents the quantity of good supplied i for non-manufacturing/non-production purposes, i.e. quantity of the good supplied i to the consumers outside the production process.

The following is an example of an activity matrix, different from any in A. Villar (Villar, 2003) and any known to us otherwise (see chapters 6 and 7 of K. Lancaster (Lancaster, 1968)).

Example 1. Let C be a $n \times n$ matrix of non-negative real numbers such that for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$, c_{ij} which is the element (i, j) of C , is a non-negative real number that denotes the level at which activity i is required to be operated — to produce enough of the m produced goods — so as to be able to operate activity j at unit level. Let B be a $m \times n$ matrix of non-negative real numbers such that for all $h \in \{1, \dots, m\}$ and $I \in \{1, \dots, n\}$, b_{hi} is the element (h, i) of B , denoting the (net) amount of good h that is produced with the purpose of satisfying final demand, if activity i operates at unit level.

Let $M = B(I - C)$.

If $x \in \mathbb{R}_+^n$ satisfying $x_j \leq \bar{x}_j$ for all $j \in W$, if $W \neq \emptyset$ and unconstrained otherwise, is an activity-vector then Cx denotes the level at which the activities are required to operate in order to “operationalize” the activity vector x . The remaining levels of activity vector $(I - C)x$ are used to produce the “produced goods” in the amount $B(I - C)x$, **provided** $(I - C)x \in \mathbb{R}_+^n$.

In what follows, unless otherwise stated or required, we will write $(M, \langle \bar{x}_j \mid j \in W \rangle)$ to represent a CLAAM, with the implicit understanding that if $W = \emptyset$, then the CLAAM reduces to or represents $(M, \emptyset)$.

The following definition will prove to be important in the analysis that follows.

A **price-vector** is a vector $p \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ where the coordinate i of p , denoted p_i is the unit price at which the produced good i is sold in the market. Let $w > 0$ denote wage rate of labour.

4. SOLVABILITY OF CLAAM

Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ and a non-empty subset of activities J , we define the set **Constrained Span** $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J)$, denoted $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) = \{Mx \in \mathbb{R}^m | x \in \mathbb{R}^n \text{ with } x_j \leq \bar{x}_j \text{ for } j \in W \text{ and } x_j = 0 \text{ for all } j \notin J\}$.

Thus, $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \subset \text{Span}(M, J)$.

If $J = \{1, \dots, n\}$, then $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J)$ is written simply as $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$.

Let J be a non-empty subset of $\{1, \dots, n\}$.

The content of the following property is based on one due to Villar (Villar, 2003).

A CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is said to be **weakly proper for** (a non-empty subset of activities) J , if for all $p, q \in \mathbb{R}_+^m$, any array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\})$: $[p^T M^j - \alpha_j \geq q^T M^j \text{ for all } j \in W \cap J \text{ and } p^T M^j \geq q^T M^j \text{ for all } j \in J \setminus W \text{ implies } p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j \geq q^T d]$.

We use $(CLAAM(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle))$ as weakly proper for J and $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is a CLAAM weakly proper for J , or just $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J)$ is weakly proper for J interchangeably.

Weakly proper in the context of CLAAM has the following economic interpretation (if we interpret α_j as the unit cost of operating a capacity constrained activity $j \in W \cap J$):

if the revenue from operating every unconstrained activity in J at unit level at price-vector p is no less than doing the same at price-vector q and if the revenue from operating a capacity constrained activity in J at unit level at price-vector p is no less than doing the same at price-vector q **plus** the unit price of the capacity then the value of the final demand d at price vector p is no less than the value of the final demand d at price vector q **plus** the total cost of the capacities.

In the interpretation provided above we are assuming that capacities have an imputed price/shadow price given by the alphas up to the maximum that is possible.

A CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is said to be **weakly proper** if it is weakly proper for $\{1, \dots, n\}$.

In particular, (by setting $\alpha_j = 0$ for all $j \in W$) for all $p, q \in \mathbb{R}_+^m$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\})$: $[p^T M \geq q^T M \text{ implies } p^T d \geq q^T d]$.

Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ the activity matrix M is said to be **weakly proper** if for all $p, q \in \mathbb{R}_+^m$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\})$: $[p^T M \geq q^T M \text{ implies } p^T d \geq q^T d]$.

Clearly the activity matrix M is weakly proper if the CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is weakly proper.

Since any point in $\mathbb{R}^m$ can always be expressed as the difference between two points in $\mathbb{R}_+^m$ the following is an immediate consequence of the definition of a weakly proper activity matrix.

$CLAAM(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is weakly proper for J if and only if for all $p \in \mathbb{R}^m$, any array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in (CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}))$: $[p^T M - \alpha_j \geq 0 \text{ for all } j \in W \cap J, p^T M^j \geq 0 \text{ for all } j \in J \setminus W, \text{ implies } p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j \geq 0]$.

Note. The definition corresponding to weakly proper activity matrices in A. Villar (Villar, 2003) is equivalent to our definition of weakly proper activity matrices of CLAAM's because A. Villar (Villar, 2003) requires $\text{Span}(M) \cap \mathbb{R}_{++}^m \neq \emptyset$.

Lemma 1. Suppose $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_{++}^m \neq \emptyset$. Then $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is a weakly proper CLAAM for J if and only if $\forall p, q \in \mathbb{R}_{++}^m$, any array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in CS(M) \cap \mathbb{R}_{++}^m$: $[p^T M^j - \alpha_j \geq q^T M^j \forall j \in W \cap J \text{ and } p^T M^j \geq q^T M^j \forall j \in W \setminus J \text{ implies } p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j \geq q^T d]$.

Proof. If $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is a weakly proper CLAAM for J , then it is easy to see that $\forall p, q \in \mathbb{R}_{++}^m$, any array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_{++}^m$: $[p^T M^j - \alpha_j \geq q^T M^j \forall j \in W \cap J \text{ and } p^T M^j \geq q^T M^j \forall j \in W \setminus J \text{ implies } p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j \geq q^T d]$.

Hence suppose that $\forall p, q \in \mathbb{R}_{++}^m$, any array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_{++}^m$: $[p^T M^j - \alpha_j \geq q^T M^j \forall j \in W \cap J \text{ and } p^T M^j \geq q^T M^j \forall j \in W \setminus J \text{ implies } p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j \geq q^T d]$.

Then as in the case of weakly proper CLAAM's for J , we get in this case that for all $p \in \mathbb{R}^m$, an array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$: $[p^T M^j - \alpha_j \geq 0 \forall j \in W \cap J, p^T M^j \geq 0 \forall j \in W \setminus J]$, implies $p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j \geq 0$.

Suppose $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\})$.

By hypothesis $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m \neq \emptyset$. Let $d^* \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$.

Now $d^* \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$ implies $td^* \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$ for all $1 \geq t > 0$.

Similarly, $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$ implies $(1-t)d + td^* \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$ for all $1 \geq t > 0$.

Thus, $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$ implies $(1-t)d + td^* \in CS(M) \cap \mathbb{R}_+^m$ for all $1 \geq t > 0$.

Let $\langle t^{(h)} | h \in \mathbb{N} \rangle$ be a sequence of positive real numbers less than or equal to 1, converging to 0.

Clearly, the sequence $\langle (1-t^{(h)})d + t^{(h)}d^* | h \in \mathbb{N} \rangle$ converges to d and for all $h \in \mathbb{N}$, $p^T((1-t^{(h)})d + t^{(h)}d^*) \geq 0$.

Thus $p^T d \geq 0$.

Thus, $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is a weakly proper CLAAM for J . ■

Proposition 1. $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is a weakly proper CLAAM for J if and only if for all final demand vectors $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J)$ there exists $x \in \mathbb{R}_+^n$ satisfying $Mx = d$, $x_j \leq \bar{x}_j$ for $j \in W \cap J$ and $x_j = 0$ for all $j \notin J$.

Proof. Let d be a final demand vector in $CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J)$. For $d = 0$, clearly $Mx = d$, where $x = 0$ and further $x_j \leq \bar{x}_j$ for $j \in W$. Hence, we may suppose that $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$.

$(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is weakly proper for J if and only if there does not exist $p \in \mathbb{R}^m$, any array of non-negative real numbers $\langle \alpha_j | j \in W \cap J \rangle$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap \mathbb{R}_+^m$ satisfying $p^T M^j - \alpha_j \geq 0 \forall j \in W \cap J$, $p^T M^j \geq 0 \forall j \in W \setminus J$ and $p^T d - \sum_{j \in W \cap J} \alpha_j \bar{x}_j < 0$.

Hence by Farka's lemma, $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ is weakly proper for J if and only if $Mx = d$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x_j \leq \bar{x}_j$ for $j \in W \cap J$ and $x_j = 0$ for all $j \notin J$ has a solution. ■

Note. Nowhere have we invoked any restriction on the size of the activity matrix or its rank, except that the rank of the activity matrix is positive. That leaves out the uninteresting case of $M = 0$. Thus, our framework is considerably more general than that of Villar (Villar, 2003).

An immediate consequence of the proposition above is that the requirement of $n \leq m$ in Villar (Villar, 2003) can be dispensed with not only for solvability problem in activity analysis, but also for the non-substitution theorem (theorem 5) in the same paper.

5. EXISTENCE OF EQUILIBRIUM PRICE-VECTOR

We will now present a similar generalization as above for the existence of an equilibrium price-vector for a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$.

Let A_{m+1} be a row vector in $\mathbb{R}^n$ with all co-ordinates strictly positive, where the entry in the column j denoted $a_{m+1,j} > 0$, is the amount of the only non-produced good called "labour" that is used as input if activity j is operated at unit level. Let $\bar{L} > 0$ be the total initial amount of labour in the economy.

Recall that a price-vector is a vector $p \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$. Let $w > 0$ denote wage rate of labour.

At price-vector p and wage rate w the **profit-vector** at the pair (p, w) denoted $\pi(p, w) = p^T M - wA_{m+1}$.

A row vector $v \in \mathbb{R}_+^n$ is said to be **profitable** at wage rate $w > 0$, if there exists $q \in \mathbb{R}^m$ such that $q^T M = wA_{m+1} + v$.

Note. The vector q in the definition of profitable vectors need not be non-negative.

A price-vector p is said to be an **equilibrium price-vector** at the wage rate $w > 0$ and row-vector $v \in \mathbb{R}_+^n$ if $v = \pi(p, w)$.

Recall that an activity matrix M is said to be weakly proper if for all $p, q \in \mathbb{R}_+^m$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle, J) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\})$: $[p^T M \geq q^T M \text{ implies } p^T d \geq q^T d]$.

Proposition 2. Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$, suppose M is a weakly proper activity matrix and v is a profitable row vector at wage rate $w > 0$. Then there exists an equilibrium price-vector p at the wage rate w and row-vector v .

Proof. Since $w > 0$, $A_{m+1} >> 0$ and $v \geq 0$, we get $wA_{m+1} + v >> 0$.

Since $v \in \mathbb{R}_+^n$ if there exists $p \in \mathbb{R}_+^m$ such that $p^T M = wA_{m+1} + v$, then it must be the case that $p \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$.

Since v is profitable at wage rate $w > 0$, there exists $q \in \mathbb{R}^m$ such that $q^T M = wA_{m+1} + v$.

Towards a contradiction suppose that there does not exist $p \in \mathbb{R}_+^m$ such that $p^T M = wA_{m+1} + v$. By Farkas' lemma, there exists $x \in \mathbb{R}^m$ such that $Mx \in \mathbb{R}_+^m$ and $(wA_{m+1} + v)x < 0$.

Since M is weakly proper, $Mx \in \mathbb{R}_+^m$ implies that there exists $y \in \mathbb{R}_+^n$ such that $My = Mx \geq 0$.

Now $q^T M = wA_{m+1} + v >> 0$ and $y \geq 0$ implies $q^T My = (wA_{m+1} + v)y \geq 0$.

Thus $My = Mx$ implies $q^T Mx = q^T My = (wA_{m+1} + v)y \geq 0$.

On the other hand $q^T M = wA_{m+1} + v$ implies $q^T Mx = (wA_{m+1} + v)x < 0$, contradicting $q^T Mx \geq 0$, that we obtained above.

Thus there exists $p \in \mathbb{R}_+^m$ such that $p^T M = wA_{m+1} + v$ and as we observed earlier this $p \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$. ■

6. NON-SUBSTITUTION THEOREM

Recall that a final demand vector is a column vector $d \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$.

Let J be a non-empty subset of $\{1, \dots, n\}$.

Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j \mid j \in W \rangle)$, a final demand vector d is said to be **producible by** (activities in) J if there exists $x \in \mathbb{R}_+^n$ satisfying $Mx = d$, $A_{m+1}x \leq \bar{L}$, $x_j \leq \bar{x}_j$ for all $j \in W$, and $x_j = 0$ for all $j \notin J$. Clearly any such x must belong to $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$.

It follows from proposition 1, that if $(M, \langle \bar{x}_j \mid j \in W \rangle)$ is weakly proper for J , then any final demand vector $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j \mid j \in W \rangle, J)$ is producible by J , provided the requirement of labour to produce it does not exceed $\bar{L}$.

If $J = \{1, \dots, n\}$, then a final demand vector producible by J is said to be **producible**.

Hence the set of all final demand vectors producible by J is $\{Mx \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\} \mid x \in \mathbb{R}_+^n, x_j \leq \bar{x}_j \text{ for all } j \in W, A_{m+1}x \leq \bar{L}, \text{ and } x_j = 0 \text{ for all } j \notin J\}$.

Given a price-vector p , a wage rate $w > 0$, a producible final demand vector d , and $x \in \mathbb{R}_+^n$ satisfying $Mx = d$, the aggregate profit of the production sector is $p^T d - wA_{m+1}x$. If the production sector intended to maximize profit, then it would be required to solve the following profit maximization problem: Find x to solve $p^T d - wA_{m+1}x \rightarrow \max$ subject to $Mx = d$, $A_{m+1}x \leq \bar{L}$, $x_j \leq \bar{x}_j$ for all $j \in W$, $x \geq 0$.

However, given the price-vector p and w , the above for a producible final demand vector is equivalent to solving the following linear programming problem denoted $LP - d$:

$$wA_{m+1}x \rightarrow \min \text{ subject to } Mx = d, -A_{m+1}x \geq -\bar{L}, -x_j \geq -\bar{x}_j \text{ for all } j \in W, x \geq 0.$$

If y solves $LP - d$ then $y > 0$ since $d > 0$. Thus $A_{m+1}y > 0$.

The question that we are interested in is the following: **If** for some producible final demand vector, x^* is an optimal solution for the minimization problem, **then** is it the case that for all final demand vectors producible by $\{j \mid x_j^* > 0\}$, there exists an optimal solution for the minimization problem, such that the activities operated at a positive level at this optimal solution is a subset of $\{j \mid x_j^* > 0\}$?

Given a producible final demand vector d , the dual of $LP - d$ denoted $DLP - d$ is the following linear programming problem: find $q \in \mathbb{R}^m$, an array of non-negative real numbers $\langle h_j \mid j \in W \rangle$ and a real number $\alpha \geq 0$ to solve:

$$q^T d - \alpha \bar{L} - \sum_{j \in W} h_j \bar{x}_j \rightarrow \max \text{ subject to } q^T M^j - \alpha A_{m+1,j} - h_j \leq wA_{m+1,j} \text{ for all } j \in W, \\ q^T M^j - \alpha A_{m+1,j} \leq wA_{m+1,j} \quad \forall j \notin W.$$

Suppose there exists a producible final demand vector d^* and let x^* be an optimal solution for $LP - d^*$. By the Weak Duality Theorem for LP , there exists $q^* \in \mathbb{R}^m$, an array of non-negative real numbers $\langle h_j^* \mid j \in W \rangle$ and a real number $\alpha^* \geq 0$ such that:

- I) $q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} - h_j^* \leq wA_{m+1,j}$ for all $j \in W$,
- II) $q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} \leq wA_{m+1,j}$ for all $j \notin W$,
- III) $[q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} - h_j^* - wA_{m+1,j}] x_j^* = 0$ for all $j \notin W$,

$$\text{IV)} [q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - wA_{m+1,j}]x_j^* = 0 \text{ for all } j \notin W,$$

$$\text{V)} Mx^* = d^*,$$

$$\text{VI)} \alpha^*[A_{m+1}x^* - \bar{L}] = 0,$$

$$\text{VII)} x_j^* \leq \bar{x}_j \quad \forall j \in W,$$

$$\text{VIII)} [x_j^* - \bar{x}_j] = 0 \quad \forall j \notin W,$$

$$\text{IX)} [q^{*T}d^* - \alpha^*\bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* \bar{x}_j] = wA_{m+1}x^*.$$

Since by (V) $Mx^* = d^*$, (III), (IV) and (VI) implies $[q^{*T}d^* - \alpha^*\bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* x_j^*] = wA_{m+1}x^*$.

$[q^{*T}d^* - \alpha^*\bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* x_j^*] = wA_{m+1}x^*$ combined with (VIII) implies $[q^{*T}d^* - \alpha^*\bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* \bar{x}_j] = wA_{m+1}x^*$, which is (IX).

Thus, (III), (IV), (V), (VI) and (VIII) implies (IX).

Hence the required system of equations and inequalities are:

$$\text{I)} q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - h_j^* \leq wA_{m+1,j} \text{ for all } j \in W,$$

$$\text{II)} q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} \leq wA_{m+1,j} \text{ for all } j \notin W,$$

$$\text{III)} [q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - h_j^* - wA_{m+1,j}]x_j^* = 0 \text{ for all } j \in W,$$

$$\text{IV)} [q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - wA_{m+1,j}]x_j^* = 0 \text{ for all } j \notin W,$$

$$\text{V)} Mx^* = d^*,$$

$$\text{VI)} \alpha^*[A_{m+1}x^* - \bar{L}] = 0,$$

$$\text{VII)} x_j^* \leq \bar{x}_j \text{ for all } j \in W,$$

$$\text{VIII)} [x_j^* - \bar{x}_j]h_j^* = 0 \text{ for all } j \in W.$$

Note that $\{j|x_j^* > 0\} \neq \emptyset$, since $d^* > 0$, $\{j \in W|x_j^* > 0\} \subset \{j|q^{*T}M^j - \alpha^*a_{m+1,j} - h_j^* - wa_{m+1,j} = 0\}$, $\{j \notin W|x_j^* > 0\} \subset \{j \notin W|q^{*T}M^j - \alpha^*a_{m+1,j} - wa_{m+1,j} = 0\}$.

Let $J = \{j|x_j^* > 0\}$.

Let d be a final demand vector producible by J . Then clearly $d \in \{Mx \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\} | x \in \mathbb{R}_+^n, x_j \leq \bar{x}_j \text{ for all } j \in W, A_{m+1}x \leq \bar{L}, \text{ and } x_j = 0 \text{ for all } j \notin J\}$.

Let $x(d)$ solve the following linear programming problem:

$$wA_{m+1}x \rightarrow \min \text{ subject to } Mx = d, -A_{m+1}x \geq -\bar{L}, -x_j \geq -\bar{x}_j \text{ for all } j \in W, x \geq 0, x_j = 0, \text{ if } j \notin J.$$

Since $J = \{j|x_j^* > 0\} = \{j \in W|x_j^* > 0\} \cup \{j \notin W|x_j^* > 0\} \subset \{j \in W|q^{*T}M^j - \alpha^*a_{m+1,j} - h_j^* - wa_{m+1,j} = 0\} \cup \{j \in W|q^{*T}M^j - \alpha^*a_{m+1,j} - wa_{m+1,j} = 0\}$ and $x_j(d) = 0$ for all $j \notin J$ it is clear that $[q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - h_j^* - wA_{m+1,j}]x_j(d) = 0$ for all $j \in W$ and $[q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - wA_{m+1,j}]x_j(d) = 0$ for all $j \notin W$.

Hence, the following system of equations and inequalities are satisfied:

$$\text{a)} Mx(d) = d,$$

$$\text{b)} A_{m+1}x(d) \leq \bar{L},$$

$$\text{c)} x_j(d) \leq \bar{x}_j \text{ for all } j \in W,$$

$$\text{d)} q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - h_j^* \leq wA_{m+1,j} \text{ for all } j \in W,$$

$$\text{e)} q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} \leq wA_{m+1,j} \text{ for all } j \notin W,$$

$$\text{f)} [q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - h_j^* - wA_{m+1,j}]x_j(d) = 0, \text{ for all } j \in W,$$

$$\text{g)} [q^{*T}M^j - \alpha^*A_{m+1,j} - wA_{m+1,j}]x_j(d) = 0, \text{ for all } j \notin W.$$

Thus $x(d)$ satisfies all the constraints of $LP - d$ and $q^*, \alpha^*, \langle h_j^* | j \in W \rangle$ solves all the constraints of the $DLP - d$. Further, $x_j(d) = 0$, if $j \notin J$.

The value of the objective function of $LP - d$ at $x(d)$ is $wA_{m+1}x(d)$ and that of the dual $DLP - d$ at $q^*, \alpha^*, \langle h_j^* | j \in W \rangle$ is $q^{*T}d - \alpha^*\bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* \bar{x}_j$.

From (a) we get $q^{*T}d = q^{*T}Mx(d)$ and this combined with (f) and (g) gives us $[q^{*T}d - \alpha^* - \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d)] = wA_{m+1}x(d)$.

At this point we invoke an assumption about activities operating up to “full capacity”.

Assumption (about activities using their entire capacity): suppose that $\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\} \subset \{j \in W | x_j(d) = \bar{x}_j\}$.

$$\text{Now, } \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d) = \sum_{\{j \in W | x_j^* < \bar{x}_j\}} h_j^* x_j(d) + \sum_{\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\}} h_j^* x_j(d).$$

$$\text{Clearly } \sum_{\{j \in W | x_j^* < \bar{x}_j\}} h_j^* x_j(d) = 0, \text{ since } h_j^* = 0 \text{ whenever } x_j^* < \bar{x}_j.$$

$$\text{Thus, } \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d) = \sum_{\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\}} h_j^* x_j(d).$$

$$\text{However, } \{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\} \subset \{j \in W | x_j(d) = \bar{x}_j\}.$$

$$\text{Thus, } \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d) = \sum_{\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\}} h_j^* \bar{x}_j.$$

$$\text{Since } \sum_{\{j \in W | x_j^* < \bar{x}_j\}} h_j^* \bar{x}_j = 0, \text{ we get } \sum_{j \in W} h_j^* \bar{x}_j = \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d).$$

$$\text{We already have, } [q^{*T} d - \alpha^* \bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d)] = w A_{m+1} x(d).$$

$$\text{Substituting } \sum_{j \in W} h_j^* \bar{x}_j \text{ for } \sum_{j \in W} h_j^* x_j(d) \text{ in the above equation gives } [q^{*T} d - \alpha^* \bar{L} - \sum_{j \in W} h_j^* \bar{x}_j] = w A_{m+1} x(d).$$

Thus, as is well known in the theory of linear programming, $x(d)$ is an optimal solution for $LP - d$ and so the answer to the question we have posed earlier is in the affirmative, **provided** $\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\} \subset \{j \in W | x_j(d) = \bar{x}_j\}$.

From (d) and (e) we get $q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} - h_j^* \leq w A_{m+1,j}$ for all $j \in W$ and $q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} \leq w A_{m+1,j}$ for all $j \notin W$.

Thus for all $j \in \{1, \dots, n\}$, there exists a non-negative real number ε_j such that $q^{*T} M^j - w A_{m+1,j} = \alpha^* A_{m+1,j} + \varepsilon_j$.

Clearly, $\varepsilon_j = h_j^*$ for all $j \in W$ satisfying $q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} - h_j^* - w A_{m+1,j} = 0$ and $\varepsilon_j = 0$ for all $j \notin W$ satisfying $q^{*T} M^j - \alpha^* A_{m+1,j} - w A_{m+1,j} = 0$.

Let $v \in \mathbb{R}_+^n$ be the row-vector whose coordinate j is $\alpha^* A_{m+1,j} + \varepsilon_j$.

Since $q^{*T} M - w A_{m+1} = v$, v is profitable at wage rate w .

Hence if M is a weakly productive activity matrix, by Proposition 2 it follows that there exists an equilibrium price-vector p^* at the wage rate w and row-vector v .

Important Note: v depends on $q^*, \alpha^*, \langle h_j^* | j \in W \rangle$ which depends on J . Thus p^* depends on the producibility of d by activities in J and on the assumption $\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\} \subset \{j \in W | x_j(d) = \bar{x}_j\}$.

Hence, as mentioned in the first section, there is a clear **dependence** of the **equilibrium price-vector** on the **final demand vector**, unlike the conclusion of Sraffian economics.

This proves the following theorem, which is popularly known as the Non-Substitution Theorem.

Theorem 1. Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$, suppose that for some producible final demand vector d^*, x^* is an optimal solution for $LP - d^*$. Let d be a final demand vector producible by $J = \{j | x_j^* > 0\}$. Let $x(d)$ be an optimal solution for the linear programming problem $LP - d$ along with an additional constraint $x_j = 0$ for all $j \notin J$ (i.e., x is producible by J):

$$w A_{m+1} x \rightarrow \min \quad \text{s.t. } Mx = d^*, A_{m+1} x \leq \bar{L}, x_j \leq x_j^* \quad \forall j \in W, x_j = 0 \quad \forall j \notin J, x \geq 0.$$

If $\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\} \subset \{j \in W | x_j(d) = \bar{x}_j\}$ (i.e., the capacities that are binding at x^* continue to remain binding at $x(d)$), **then** $x(d)$ solves $LP - d$.

If in addition M is weakly productive, then there exists a price-vector p^* known as efficiency price-vector, an array of non-negative real numbers $\langle h_j^* | j \in W \rangle$ and a real number $\alpha^* \geq 0$ — such that:

- i) $p^T M^j - w A_{m+1,j} - h_j^* \leq \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \in W$;
- ii) $p^T M^j - w A_{m+1,j} \leq \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \notin W$;
- iii) $p^T M^j - w A_{m+1,j} - h_j^* = \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \in W$ with $x_j^* > 0$;
- iv) $p^T M^j - w A_{m+1,j} = \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \notin W$ with $x_j^* > 0$. ■

Note. In the statement above, for each $j \in W$, h_j^* could be interpreted as the shadow price of operating the activity j at unit level. So, the shadow price of any activity that operates below capacity at x^* is 0, and continues to remain, so even if at $x(d)$ it uses up the entire capacity.

An immediate corollary of Theorem 1 is the following “compact” result valid only for (M, φ) .

Corollary of Theorem 1. Given a CLAAM (M, φ) , suppose that for some producible final demand vector d^* , x^* is an (a basic) optimal solution for $LP - d^*$. Let d be a final demand vector producible by $J = \{j | x_j^* > 0\}$. Let $x(d)$ be an optimal solution for $LP - d$ along with an additional constraint “ x is producible by J ”. Then $x(d)$ solves $LP - d$.

If in addition M is weakly productive, then there exists a price-vector p^* known as efficiency price-vector and a real number $\alpha^* \geq 0$ — such that:

- i) $p^T M^j - w A_{m+1,j} \leq \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$;
- ii) $p^T M^j - w A_{m+1,j} = \alpha^* A_{m+1,j}$ for all j with $x_j^* > 0$.

Note. In the proof of Theorem 1 presented in the form of a discussion prior to the statements of the two theorems, observe that, since $x(d)$ must belong to $\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ and $A_{m+1} \gg 0$, it must be the case that $w A_{m+1} x(d) > 0$.

7. MULTISECTOR PRODUCTION THEORY FOR CLAAM

The implications of the above analysis for constrained linear activity analysis models when the m manufactured goods are interpreted as m distinct composite commodities in a one-to-one correspondence with m distinct sectors of the economy is best performed with a dynamic (two-period) interpretation of the model discussed here, with production taking place during the current/first period — period 0 and the final demand vector is supplied during a subsequent period — period 1. In such a situation a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ corresponds to the specific case where:

- a) there exist non-negative $m \times n$ matrices B, A such that $M = B - A$;
- b) the entries in the matrices B and A are measured in money units evaluated at producer prices.

Thus for $I \in \{1, \dots, m\}$ and $j \in \{1, \dots, n\}$, a_{ij} is the cost of good i required to operate activity j at unit level and b_{ij} is the monetary of good i produced if activity j is operated at unit level, both measured in producer prices prevailing in period 0.

Issues relating to solvability remain intact — the analysis in section four remains unaffected under this new interpretation. What however requires some reformulations are issues related to existence of equilibrium price vector and as a consequence, issues related to efficiency prices via the non-substitution theorems.

In the first place, instead of price-vector the concept that is relevant in this context is (sectoral) inflation rate vectors, i.e., the vector of factors by which the period 0 sectoral price indices are individually multiplied to obtain the period 1 price indices.

As in section 5, the amount of the only non-produced good called labour that is used as input as well its total initial amount in the economy is measured in physical units.

An **inflation rate-vector** is a vector $p \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$. Let $w > 0$ denote wage rate of labour.

At inflation rate-vector p and wage rate w the **profit-vector** at the pair (p, w) denoted $p(p, w) = p^T B - e^T A - w A_{m+1}$, where e is the m -dimensional column vector all entries of which are 1; e is called the sum-vector.

A row-vector $v \in \mathbb{R}_+^n$ is said to be **profitable** at wage rate $w > 0$, if there exists $q \in \mathbb{R}^m$ such that $q^T B = w A_{m+1} + e^T A + v$.

Note. The vector q in the definition of profitable vectors need not be non-negative.

An inflation rate-vector p is said to be an **equilibrium inflation rate-vector** at the wage rate $w > 0$ and row-vector $v \in \mathbb{R}_+^n$ if $v = \pi(p, w)$.

Instead of the activity matrix being weakly proper, we now require the following property.

Weakly proper Output Coefficient Matrix. Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ with $M = B - A$ for non-negative matrices A and B , for all $p, q \in \mathbb{R}_+^m$ and $d \in CS(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle) \cap (\mathbb{R}_+^m \setminus \{0\})$: $[p^T B \geq q^T B$ implies $p^T d \geq q^T d]$.

This allows us to state and prove the following result.

Result 1. Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ with $M = B - A$ for non-negative matrices A and B and satisfying weakly proper output coefficient matrix property if v is a profitable row vector at wage rate $w > 0$. Then there exists an equilibrium inflation rate-vector p at the wage rate w and row-vector v .

Note that the solvability aspect of the non-substitution theorem, concerns minimization of aggregate wages or cost of labour, subject to producibility constraint. Hence that aspect of the non-substitution theorem remains intact under the new interpretation. We need to however replace the concept of efficiency prices by efficiency inflation rates.

The following result has a proof similar to the one for theorem 1.

Result 2. Given a CLAAM $(M, \langle \bar{x}_j | j \in W \rangle)$ with $M = B - A$ for non-negative matrices A and B , suppose that for some producible final demand vector d^* , x^* is an optimal solution for $LP - d^*$. Let d be a final demand vector producible by $J = \{j | x_j^* > 0\}$. Let $x(d)$ be an optimal solution for the linear programming problem $LP - d$ **along with an additional constraint** $x_j = 0$ for all $j \notin J$ (i.e., x is producible by J):

$$wA_{m+1}x \rightarrow \min \quad s.t. \quad Mx = d^*, \quad A_{m+1}x \leq \bar{L}, \quad x_j \leq \bar{x}_j \quad \forall j \in W, \quad x_j = 0 \quad \forall j \notin J, \quad x \geq 0.$$

If $\{j \in W | x_j^* = \bar{x}_j\} \subset \{j \in W | x_j(d) = \bar{x}_j\}$ (i.e., the capacities that are binding at x^* continue to remain binding at $x(d)$), **then** $x(d)$ solves $LP - d$.

If in addition the Weakly Proper Output Coefficient Matrix property is satisfied, then there exists an inflation rate-vector p^* known as efficiency inflation rate vector, an array of non-negative real numbers $\langle h_j^* | j \in W \rangle$ and a real number $\alpha^* \geq 0$ — such that:

- i) $p^T B^j - e^T A^j - wA_{m+1,j} - h_j^* \leq \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \in W$;
- ii) $p^T B^j - e^T A^j - wA_{m+1,j} \leq \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \notin W$;
- iii) $p^T B^j - e^T A^j - wA_{m+1,j} - h_j^* = \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \in W$ with $x_j^* > 0$;
- iv) $p^T B^j - e^T A^j - wA_{m+1,j} = \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \notin W$ with $x_j^* > 0$.

An immediate corollary of Result 2 is the following compact result valid only for (M, ϕ) .

So, the shadow price of any activity that operates below capacity at x^* is 0, and continues to remain, so even if at $x(d)$ it uses up the entire capacity.

Corollary of Result 2. Given a CLAAM (M, ϕ) , suppose that for some producible final demand vector d^* , x^* is an (a basic) optimal solution for $LP - d^*$. Let d be a final demand vector producible by $J = \{j | x_j^* > 0\}$. Let $x(d)$ be an optimal solution for $LP - d$ **along with an additional constraint** x is producible by J . Then $x(d)$ solves $LP - d$.

If in addition Weakly Proper Output Coefficient Matrix property is satisfied, then there exists an inflation rate-vector p^* known as **efficiency inflation rate-vector** and a real number $\alpha^* \geq 0$ — such that:

- i) $p^T B^j - e^T A^j - wA_{m+1,j} \leq \alpha^* A_{m+1,j}$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$;
- ii) $p^T B^j - e^T A^j - wA_{m+1,j} = \alpha^* A_{m+1,j}$ for all j with $x_j^* > 0$.

In the case of final demand for services (provided by the service sector) which do not require manufacturing, but are none the less measured in current producer prices, this may imply a difference between producer prices and the prices that consumers are required to pay for the services during the current period.

REFERENCES / СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Chander P.** (1983). The nonlinear input-output model. *Journal of Economic Theory*, 30, 219–229.
- Lahiri S.** (2022). *The essential appendix on linear programming*. Available at: https://www.academia.edu/44541645/The_essential_appendix_on_Linear_Programming
- Lancaster K.** (1968). *Mathematical economics*. New York: The Macmillan Company.
- Sandberg I.W.** (1973). A nonlinear input-output model of a multisector economy. *Econometrica*, 41, 6, 1167–1182.
- Villar A.** (2003). The generalized linear production model: Solvability, non-substitution and productivity measurement. *Advances in Theoretical Economics*, 3, 1, 1.

Acknowledgment. This paper was written when I was a Professor at the School of Petroleum Management, PD Energy University, from where I retired on June 5, 2022. An earlier version of this paper was presented (virtually) at a seminar on April 5, 2020, in the department of Industrial Engineering and Operations Research, IIT-Bombay. I would like to thank K.S. Mallikarjuna Rao for observations about the paper during my presentation. A subsequent version of this paper was presented (virtually) at the 9th International Conference on Matrix Analysis and Applications hosted by University of Aveiro, Portugal from June 15–17, 2022. I wish to the conference participants — in particular Enide Aandrade — for a positive assessment of the paper. I wish to put on record my deep gratitude to Arabinda Tripathy, for appreciative comments and endorsement of the contents, in addition to encouragement for this research — several steps beyond his role as a senior colleague. I gladly and happily put on record “a very big thank you” to my friend Ishan Mistry, whose eyes noticed the innumerable errors due to me and a few that occurred while preparing the final printed version. I would also like to thank an anonymous referee of this journal and Victor Dementiev (Editor-in-Chief) for suggestions towards improvement of this paper. Last but not the least, I wish to express the immense honour I feel in being able to publish this paper in an academically respected journal published in Russia — the birth place of Professor Wassily Leontief — the father of input-output macroeconomics and Professor Leonid Kantorovich — the father of Linear Programming — whose seminal contributions to “applicable mathematical economics” are the ancestors of the work presented in this paper.

Теория производства для содержащих ограничения линейных моделей операций³

© 2023 S. Lahiri

S. Lahiri,

Lok Jagruti (LJ) University, India; e-mail: somdeb.lahiri@gmail.com

Поступила в редакцию 24.09.2022

Аннотация. Цель статьи — расширить рамки анализа операций, которые обсуждались в статье Антонио Виллара без каких-либо требований к размеру матриц. В его работе была введена модель анализа операций, в которой операции могут иметь (или не иметь) ограничений по мощности. Мы применяем обычные приемы анализа затраты—выпуск при определении количества товара внешним для сектора производства (или обрабатывающей промышленности) потребителям и рассматриваем его как конечный спрос. Мы получили сходные с А. Вилларом результаты об алгоритмической разрешимости, незамещаемости и существовании эффективных цен. Мы применили наш анализ и результаты к двухпериодной модели анализа многосекторальной деятельности с ограничениями по мощности. Матрица операций представляет собой разницу между неотрицательной матрицей коэффициентов выпуска и неотрицательной матрицей коэффициентов затрат, при том что коэффициенты были определены в денежных единицах для каждого вида деятельности. Почти все результаты, полученные к настоящему времени, представлены в таком макроэкономическом контексте. Тем не менее, необходимы некоторые изменения формулировок для проблем, относящихся к существованию равновесного вектора цен и — как следствие — к вопросам, относящимся к эффективности цен через теоремы о незамещаемости. Соответствующие концепции применяются здесь и к векторам уровней инфляции.

Ключевые слова: линейный анализ процессов с ограничениями, разрешимость, теорема о незамещаемости, эффективные цены.

Классификация JEL: C67, E16, E23, E31.

Для цитирования: **Lahiri S.** (2023). Production theory for constrained linear activity models // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 5–15. DOI: 10.31857/S042473880024866-1

³ В работе сообщаются новые результаты, обобщаются и расширяются границы анализа, приведенного автором в ранней работе «Анализ производства, основывающийся на матричном представлении операций», доступной на <https://drive.google.com/file/d/15E2SIb5NeWBgtRI-O1gb1UA9CG6QhJc/view>

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс

© 2023 А.Ф. Проневич

А.Ф. Проневич,

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь; e-mail: pranevich@grsu.by

Поступила в редакцию 04.08.2022

Аннотация. Статья посвящена вопросам учета научно-технического прогресса (НТП) в аналитическом задании динамических агрегированных производственных функций. Рассмотрены три концепции нейтральности экономических показателей относительно НТП: неизменность предельной нормы технического замещения (по Хиксу), неизменность предельной производительности капитала (по Харроду) и неизменность предельной производительности труда (по Солоу). Указаны аналитические виды динамических агрегированных производственных функций, учитывающие все три нейтральных НТП, а также приведены публикации, продолжением исследований которых является данная работа. Решена задача Х. Удзавы об аналитическом виде динамических агрегированных производственных функций, учитывающих одновременно три нейтральных НТП, и для них описаны все классы агрегированных динамических производственных функций. Полученные в статье результаты могут быть использованы для моделирования производственных процессов, учитывающих нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП.

Ключевые слова: научно-технический прогресс (НТП), производственная функция, нейтральность по Хиксу, нейтральность по Харроду, нейтральность по Солоу.

Классификация JEL: C65, O30.

Для цитирования: **Проневич А.Ф.** (2023). О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 16–21. DOI: 10.31857/S042473880021360-5

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамическую агрегированную производственную функцию (ПФ)

$$Y = F(K, L, t), \quad (1)$$

где Y — выпуск продукции, K — капитал, L — труд, t — параметр времени из числового луча $R_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП). Неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times R_+$, экономическая область G из первого квадранта $R_+^2 = \{(K, L): K \geq 0, L \geq 0\}$, R — множество действительных чисел.

Начиная с 1920-х годов исследователи пытались понять, в чем состоит НТП с точки зрения макроэкономической динамики, какие экономические показатели он оставляет неизменными (нейтральными, инвариантными) во времени, а какие — изменяет. На основании понятия нейтральности были построены различные классификации НТП относительно заданных инвариантных соотношений между экономическими показателями. Одна из первых классификаций НТП была предложена Дж.Р. Хиксом в книге (Hicks, 1932, p. 121–122) и основана на изменении с течением времени предельной нормы технического замещения: «Если рассматривать два фактора, “труд” и “капитал”, то изобретения можно классифицировать в соответствии с тем, увеличивают ли они, оставляют неизменным или уменьшают отношение предельной производительности капитала к предельной производительности труда по сравнению с ее первоначальным состоянием. Такие изобретения будем называть “трудосберегающими”, “нейтральными” и “капиталосберегающими” соответственно». Дж. Робинсон (Robinson, 1937) при обсуждении влияния технологий на положения долгосрочного равновесия в теории занятости использовала классификацию НТП по Хиксу при дополнительном условии: «фондовооруженность труда является величиной постоянной» (Robinson, 1938). В дальнейшем данная модификация определения нейтральности НТП по Хиксу получила широкое

распространение и сейчас в научной литературе принята в качестве основного понятия (см., например, (Uzawa, 1961; Sato, Beckmann, 1968; Stiglitz, Uzawa, 1969; Дадаян, 1973; Курзенев, Матвеев, 2018; Проневич, 2020)). Идея еще одной классификации НТП была заложена Р.Ф. Харродом в рецензии (Harrod, 1937) на книгу Дж.В. Робинсон «Очерки по теории занятости» (Robinson, 1937) и позднее в расширенном виде была изложена в монографии «К динамической экономической теории» (Harrod, 1948, с. 22–27). Понятие «нейтральность НТП по Солоу», которое является симметричным по отношению к понятию «нейтральность НТП по Харроду», было введено в работах американского экономиста Р.М. Солоу (Solow, 1960, 1962). Для неоклассических ПФ (1) в статье Р. Сато и М. Беккмана (Sato, Beckmann, 1968) в зависимости от инвариантности относительно НТП различных соотношений (в работе рассмотрены 15 случаев) между основными экономико-математическими характеристиками ПФ введены возможные определения нейтральности НТП и получены соответствующие им аналитические представления динамических линейно-однородных ПФ. В работе (Хацкевич, Проневич, 2020) классификация Сато–Беккмана обобщена и дополнена новыми условиями нейтральности НТП на общий случай аналитического задания динамической ПФ. Обсуждение возможности применения на практике концепций нейтральности НТП по Хиксу, Харроду и Солоу в моделях экономического роста приведено в статье (Fontejne, 2018).

Сформулируем точнее концепции нейтральности НТП по Хиксу, Харроду и Солоу:

1) если предельная норма технического замещения (труда капиталом) $MRTS_{LK}$ не изменяется с течением времени при фиксированной фондовооруженности труда, т.е.

$$MRTS_{LK} = \text{const}, K / L = \text{const}, \quad (2)$$

имеет место *нейтральный по Хиксу НТП*;

2) если предельная производительность капитала MP_K не изменяется с течением времени при фиксированной фондоотдаче, т.е.

$$MP_K = \text{const}, Y / K = \text{const}, \quad (3)$$

НТП является *нейтральным по Харроду*;

3) если предельная производительность труда MP_L не изменяется с течением времени при фиксированной производительности труда, т.е.

$$MP_L = \text{const}, Y / L = \text{const}, \quad (4)$$

НТП будет *нейтральным по Солоу*.

Общий вид агрегированных динамических ПФ, учитывающих нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП, описывают следующие утверждения.

Теорема 1. Динамическая агрегированная ПФ (1) учитывает:

1) *нейтральный по Хиксу НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде $Y = \Phi(\Psi(K, L), t)$ (Beckmann, 1974), где Φ — некоторая неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция переменных Ψ и t , а Ψ — линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция;*

2) *нейтральный по Харроду НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде $Y = \Phi(K, \Psi(L, t))$ (Morimoto, 1974), где Φ — некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция переменных K и Ψ , а Ψ — непрерывно дифференцируемая функция от переменных L и t ;*

3) *нейтральный по Солоу НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в аналитическом виде $Y = \Phi(\Psi(K, t), L)$ (Beckmann, 1974), где Φ — некоторая неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция переменных Ψ и L , а Ψ — непрерывно дифференцируемая функция от переменных K и t .*

Когда ПФ (1) является линейно-однородной, то из теоремы 1 следует теорема 2.

Теорема 2. Линейно-однородная динамическая ПФ (1) учитывает:

1) *нейтральный по Хиксу НТП, если и только если она может быть представлена в аналитической форме $Y = A(t)\Phi(K, L)$ (см., например, работу (Sato, Beckmann, 1968));*

2) *нейтральный по Харроду НТП, если и только если она может быть представлена в аналитической форме $Y = \Phi(K, C(t)L)$ (Robinson, 1938; Uzawa, 1961);*

3) *нейтральный по Солоу НТП*, если и только если она может быть представлена в аналитической форме $Y = \Phi(B(t)K, L)$ (Sato, Veckmann, 1968), где Φ — неотрицательная линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция, а строго возрастающие функции A, B и C такие, что $A(0) = B(0) = C(0) = 1$ — индексы НТП.

В 1961 г. японский экономист Х. Удзава (Uzawa, 1961) поставил и решил для *линейно-однородных ПФ* задачу об аналитическом виде динамических ПФ, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП. В работе (Проневич, Хацкевич, 2020) результаты Удзавы были распространены на *однородные ПФ произвольной степени* и полностью решена задача Удзавы — выделены общие классы динамических агрегированных ПФ, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП. Основной результат данной работы выражает следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы динамическая агрегированная ПФ (1) одновременно учитывала нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП, необходимо и достаточно, чтобы она была представлена или в форме Кобба–Дугласа–Тинбергена*

$$F_1(K, L, t) = A(t) K^\alpha L^\beta \quad (5)$$

или в аналитической форме

$$F_2(K, L, t) = (aK^{1-\gamma} + bL^{1-\gamma} + A(t))^{1/(1-\gamma)}, \quad (6)$$

где числа $\alpha, \beta, \gamma, a, b \in R$, $\gamma \neq 1$, а функция A зависит только от параметра НТП t .

Из теоремы 3 при $A(t) = ce^{\delta t}$, где $c > 0$, а δ — постоянный темп прироста индекса НТП, получаем конкретные аналитические формы динамических ПФ

$$F_3(K, L, t) = AK^\alpha L^\beta e^{\delta t}, \quad F_4(K, L, t) = (aK^{1-\gamma} + bL^{1-\gamma} + Ae^{\delta t})^{1/(1-\gamma)}$$

для моделирования производственных процессов, учитывающих нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу НТП на основе статистических данных эконометрическими методами.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Основываясь на понятиях (Клейнер, 1986, с. 48–49) предельной нормы технического замещения (труда капиталом), предельных производительностей капитала и труда, на основании определений нейтральности НТП по Хиксу (2), по Харроду (3) и по Солоу (4), получаем, что динамическая ПФ (1) одновременно учитывает НТП, нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу тогда и только тогда, когда существуют непрерывно дифференцируемые функции h_1, h_2, h_3 такие, что имеют место дифференциальные тождества

$$\frac{\partial_L F(K, L, t)}{\partial_K F(K, L, t)} = h_1\left(\frac{K}{L}\right), \quad \partial_K F(K, L, t) = h_2\left(\frac{F}{K}\right), \quad \partial_L F(K, L, t) = h_3\left(\frac{F}{L}\right), \quad (7)$$

где через ∂_K и ∂_L обозначены частные производные первого порядка по переменным K и L соответственно.

Необходимость. Из системы дифференциальных тождеств (7) следует, что функции h_1, h_2, h_3 связаны функциональным уравнением

$$h_3(\zeta) = h_1(\zeta/\xi)h_2(\xi), \quad (8)$$

где введены переменные $\zeta = F/K$, $\xi = F/L$.

Уравнение (8) — это обобщенное уравнение Коши относительно трех неизвестных функций, которое имеет единственное решение (Pexider, 1903; Castillo et al., 1999, p. 89–90)

$$h_1\left(\frac{\zeta}{\xi}\right) = C_1 \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^\gamma, \quad h_2(\xi) = C_2 \xi^\gamma, \quad h_3(\xi) = C_3 \xi^\gamma, \quad (9)$$

где C_1, C_2 и $C_3 = C_1 C_2$ — произвольные вещественные числа, $\gamma \in R$.

Решим систему квазилинейных уравнений в частных производных (7) при условии (9), используя подход последовательного интегрирования квазилинейных дифференциальных уравнений (Камке, 1966, с. 75–76) методом характеристик (Зайцев, Полянин, 2003, с. 229).

1. Случай $\gamma = 1$. При $h_1(K/L) = C_1(K/L)$ из первого уравнения $C_1 K \partial_K F - L \partial_L F = 0$ системы уравнений в частных производных (7) находим функционально-независимые первые интегралы

$KL^{C_1} = \tilde{C}_1$ и $t = \tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные вещественные постоянные) характеристической системы $\frac{dK}{C_1 K} = \frac{dL}{-L} = \frac{dt}{0}$ и строим его общее решение $F(K, L, t) = \Phi(KL^{C_1}, t)$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию F во второе уравнение системы в частных производных (7) при $h_2(F/K) = C_2(F/K)$, для определения функции Φ получаем дифференциальное уравнение $\partial_u \Phi(u, t) = C_2 \Phi(u, t) / u$, где $u = KL^{C_1}$, с общим решением $\Phi(u, t) = A(t)u^{C_2}$. А значит, функция F примет вид $F(K, L, t) = A(t)K^{C_2}L^{C_1 C_2}$.

Подставляя функцию F в третье уравнение системы в частных производных (7) при $h_3(F/L) = C_3(F/L)$ получаем верное тождество. Следовательно, функция (5) является решением системы (7) при условиях (9) и $\gamma = 1$, где $\alpha = C_2$, $\beta = C_1 C_2$, а A — произвольная функция, зависящая только от параметра НТП.

2. Случай $\gamma \neq 1$. При $h_1(K/L) = C_1(K/L)^\gamma$ из первого уравнения $C_1 K^\gamma \partial_K F - L^\gamma \partial_L F = 0$ системы (7) находим функционально-независимые первые интегралы $K^{1-\gamma} + C_1 L^{1-\gamma} = \tilde{C}_1$ и $t = \tilde{C}_2$ ($\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ — произвольные вещественные постоянные) характеристической системы $\frac{dK}{C_1 K^\gamma} = \frac{dL}{-L^\gamma} = \frac{dt}{0}$ и строим его общее решение $F(K, L, t) = \Phi(K^{1-\gamma} + C_1 L^{1-\gamma}, t)$, где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя полученную функцию F во второе уравнение системы (7) при $h_2(F/K) = C_2(F/K)^\gamma$, для определения функции Φ запишем дифференциальное уравнение $\partial_u \Phi(u, t) = (C_2 / (1-\gamma)) \Phi^\gamma(u, t)$, которое имеет общее решение $\Phi(u, t) = (C_2 u + A(t))^{1/(1-\gamma)}$, где $u = K^{1-\gamma} + C_1 L^{1-\gamma}$, A — произвольная функция, зависящая только от параметра НТП. А значит, функция F примет вид $F(K, L, t) = (C_2 K^{1-\gamma} + C_1 C_2 L^{1-\gamma} + A(t))^{1/(1-\gamma)}$.

Подставляя функцию F в третье уравнение системы (7) при $h_3(F/L) = C_3(F/L)^\gamma$, получаем верное тождество. Таким образом, функция (6) является общим решением системы квазилинейных уравнений (7) при условиях (9) и $\gamma \neq 1$, где $a = C_1$, $b = C_1 C_2$, A — произвольная функция, зависящая только от параметра НТП.

Достаточность. Пусть динамическая ПФ (1) представима в аналитической форме (5) или в форме (6). Тогда, вычисляя частные производные от функций F_1 и F_2 по факторам производства K и L , получаем:

1) $MRTS_{LK}(F_1) = \beta K / \alpha L$, $MP_K(F_1) = \alpha F / K$, $MP_L(F_1) = \beta F / L$, т.е. имеют место тождества (7) при $h_1(\xi) = \beta \xi / \alpha$, $h_2(\zeta) = \alpha \zeta$ и $h_3(\rho) = \beta \rho$, а значит, ПФ (5) учитывает НТП, одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу;

2) $MRTS_{LK}(F_2) = (b/a)(K/L)^\gamma$, $MP_K(F_2) = a(F/K)^\gamma$, $MP_L(F_2) = b(F/L)^\gamma$, т.е. имеют место тождества (7) при $h_1(\xi) = b\xi^\gamma / a$, $h_2(\zeta) = a\zeta^\gamma$ и $h_3(\rho) = b\rho^\gamma$, а значит, ПФ (6) учитывает НТП, одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Дадаян В.С. (1973). Моделирование народно-хозяйственных процессов. Под ред. В.С. Дадаяна. М.: Экономика. [Dadajan V.S. (1973). *Modeling of national economic processes*. V.S. Dadajan (ed.). Moscow: Ekonomika (in Russian).]
- Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. (2003). Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: ФИЗМАТЛИТ. [Zaitsev V.F., Polyaniin A.D. (2003). *Handbook of first-order partial differential equations*. Moscow: FIZMATLIT (in Russian).]
- Камке Э. (1966). Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука. [Kamke E. (1966). *Handbook of first-order partial differential equations*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Клейнер Г.Б. (1986). Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика. [Kleyner G.B. (1986). *Production functions: Theory, methods, application*. Moscow: Finansy i statistika (in Russian).]
- Курзев В., Матвеев В. (2018). Экономический рост. СПб.: Питер. [Kurzenev V., Matveenko V. (2018). *Economic growth*. Saint-Petersburg: Piter (in Russian).]

- Проневич А.Ф.** (2020). Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу // *Вестник ЦЭМИ РАН*. № 3. С. 4–27. [**Pranevich A.F.** (2020). Product-augmenting technological progress and neutrality by Hicks. *Vestnik CEMI*, 3, 4–27 (in Russian).]
- Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.** (2020). Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение // *Белорусский экономический журнал*. № 3. С. 87–105. [**Pranevich A.F., Khatskevich G.A.** (2020). Technological progress and neutrality by Hicks, Harrod, and Solow: genesis, construction, and generalizations. *Belarusian Economic Journal*, 3, 87–105 (in Russian).]
- Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф.** (2020). Классификация Сато–Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение // *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. № 2. С. 4–17. [**Khatskevich G.A., Pranevich A.F.** (2020). Sato–Beckmann classification of accounting for technological progress: Genesis, generalisation, and extension. *Journal of the Belarusian State University. Economics*, 2, 4–17 (in Russian).]
- Beckmann M.J.** (1974). Invariant relationships for homothetic production functions. *Production theory: Proceedings of an International seminar held at the university of Karlsruhe, May–July 1973. Lecture notes in Economics and mathematical systems: mathematical economics*. M.J. Beckmann, H.P. Kunzi (eds.). Berlin: Springer-Verlag, 99, 3–20.
- Castillo E., Cobo A., Gutiérrez J.M., Pruneda R.E.** (1999). *Functional networks with applications*. New York: Springer.
- Fontejne M.R. de la** (2018). Why the concept of Hicks, Harrod, Solow neutral and even non-neutral augmented technical progress is flawed in principle in any economic model. *MPRA Paper 107730*. University Library of Munich, Germany.
- Harrod R.F.** (1937). Review of Joan Robinson's "Essays in the theory of employment". *Economic Journal*, 47 (June), 326–330.
- Harrod R.F.** (1948). *Towards a dynamic economics*. London: Macmillan.
- Hicks J.R.** (1932). *The theory of wages*. London: Macmillan.
- Morimoto Y.** (1974). Neutral technical progress and the separability of the production function. *The Economic Studies Quarterly*, 25 (3), 66–69.
- Pexider H.W.** (1903). Hotiz über functional theorem. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 14 (1), 293–301.
- Robinson J.** (1937). *Essays in the theory of employment*. London: Macmillan.
- Robinson J.** (1938). The classification of inventions. *The Review of Economic Studies*, 5 (2), 139–142.
- Sato R., Beckmann M.J.** (1968). Neutral inventions and production functions. *The Review of Economic Studies*, 35 (1), 57–67.
- Solow R.M.** (1960). Investment and technical progress. *Mathematical methods in the social sciences: proceedings of the first Stanford Symposium, Stanford, Stanford University, 1959*. K.J. Arrow, S. Karlin, P. Suppes (eds.). Stanford: Stanford University Press, 89–104.
- Solow R.M.** (1962). Technical progress, capital formation, and economic growth. *The American Economic Review*, 52 (2), 76–86.
- Stiglitz J.E., Uzawa H.** (1969). *Readings in the modern theory of economic growth*. Cambridge: MIT Press.
- Uzawa H.** (1961). Neutral inventions and the stability of growth equilibrium. *The Review of Economic Studies*, 28 (2), 117–124.

About production functions that take into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress

© 2023 A.F. Pranevich

A.F. Pranevich,

Yanka Kupala State University of Grodno, Belarus; e-mail: pranevich@grsu.by

Received 04.08.2022

Abstract. This article is devoted to the issues of accounting for technological progress in the analytical forms of dynamic aggregated production functions. We considered three concepts of the neutrality of economic indicators considering technological progress: constancy of marginal rate of technical substitution (Hicks-neutral technological progress), marginal product of capital (Harrod-neutral technological progress) and marginal product of labor (Solow-neutral technological progress). Analytical forms of dynamic aggregated production functions that take into account Hicks-neutral technological progress (Harrod-neutral technological progress, Solow-neutral technological progress) are indicated. The publication continues the author's research. The H. Uzawa problem on the analytical forms of dynamic aggregated production functions that takes into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress is solved. All classes of aggregated dynamic production functions that take into account simultaneously Hicks, Harrod and Solow neutral technological progress are described. The results can be used to the modeling of production functions taking into account the Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress.

Keywords: technological progress, production function, Hicks neutrality, Harrod neutrality, Solow neutrality.

JEL Classification: C65, O30.

For reference: **Pranevich A.F.** (2023). About production functions that take into account simultaneously Hicks-, Harrod- and Solow-neutral technological progress. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 16–21. DOI: 10.31857/S042473880021360-5

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Прогнозирование отраслевой структуры занятости населения

© 2023 М.И. Дроботенко, А.П. Невечеря

М.И. Дроботенко,

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар; e-mail: mdrobotenko@mail.ru

А.П. Невечеря,

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар; e-mail: artiom1989@mail.ru

Поступила в редакцию 27.07.2022

Аннотация. Прогнозирование отраслевой занятости представляет интерес для всех субъектов рынка труда, способных влиять на динамику трудовых ресурсов (государственных и муниципальных служб, работодателей, работников). Качество прогнозирования динамики трудовых ресурсов зависит от степени агрегации используемых для этого статистических данных. При высокой степени агрегации каждый показатель рынка труда объединяет совокупность детализированных показателей, из-за чего информацию о трендах детализированных показателей невозможно учесть при построении трендов отраслевой занятости, что отрицательно сказывается на качестве прогноза. Негативно влияет на качество прогноза отсутствие информации о взаимодействии показателей рынка труда за каждый конкретный год. В работе предлагается с помощью балансовой математической модели динамики трудовых ресурсов, связывающей отраслевые показатели рынка труда, определить показатели межотраслевых перемещений. Для вычисления показателей рынка труда используются только статистические данные о структуре отраслевой занятости и безработице. Таким образом, для детализации рынка труда Российской Федерации с помощью показателей межотраслевых перемещений достаточно данных о динамике трудовых ресурсов, предоставляемых Федеральной службой государственной статистики. Показано, как с помощью показателей межотраслевых перемещений построить прогнозные значения этих показателей и вычислить прогнозные значения показателей рынка труда. Для установления влияния детализации показателей рынка труда на надежность прогноза отраслевой занятости рассмотрены примеры построения прогноза занятости в отраслях экономики Российской Федерации на 2011–2016 гг. и на 2019 г. Выбор интервала исследования вызван вступлением в силу в 2017 г. второй редакции «Общероссийского классификатора видов экономической деятельности». Для анализа использовались результаты прогнозирования непосредственно по показателям рынка труда и по показателям межотраслевых перемещений, полученные с помощью балансовых моделей различной степени детализации. Для оценки качества прогнозирования приведены таблицы надежности прогнозов, которые свидетельствуют о том, что детализация параметров отраслевой занятости при помощи балансовой модели способна повысить надежность их прогноза.

Ключевые слова: балансовая модель, динамика трудовых ресурсов, детализация межотраслевых связей, прогнозирование, рынок труда.

Классификация JEL: C32.

Для цитирования: Дроботенко М.И., Невечеря А.П. (2023). Прогнозирование отраслевой структуры занятости населения // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 22–29. DOI: 10.31857/S042473880024868-3

1. ВВЕДЕНИЕ

На качество прогноза динамики трудовых ресурсов влияет уровень агрегирования статистических показателей рынка труда (Key indicators ..., 2016). Прогнозируемый показатель рынка труда может объединять несколько факторов, тренды которых различны, вследствие чего модель динамики агрегированного показателя может не обладать достаточным уровнем предсказательной способности (Невечеря, 2021).

Один из подходов повышения надежности прогноза направлен на устранение эффекта агрегированности с помощью сегментирования отраслевых показателей. Обычно под сегментированием национального рынка труда подразумевается его разделение на два непересекающихся кластера (сегмента): первичный рынок с низким уровнем текучести кадров, высоким уровнем заработных плат и вторичный рынок с высоким уровнем текучести кадров и низким уровнем заработных плат (Wilkinson, 1981). В общем случае возможно определение сегментирования как групп

непересекающихся кластеров трудовых ресурсов, каждый из которых обладает уникальным набором свойств по одному или группе признаков (Scott, Marshall, 2009). Например, можно осуществлять сегментирование трудовых ресурсов по территориальному и отраслевому признакам (Единак, Коровкин, 2014; Коровкин, 2001; Коровкин, Единак, Королев, 2017; Knobel, Kriechel, Schmid, 2008), по видам профессиональной деятельности, квалификации, роду занятий и образованию (Borghans, Grip, Heijke, 1996; Bakens, Fouarge, Peeters, 2018; Cörvers, Heijke, 2005) или по уровню сбора статистики. Например, в качестве сегментирования трудовых ресурсов можно рассматривать уточнение Росстандартом общероссийского классификатора видов экономической деятельности¹, в результате которого отраслевая структура рынка труда стала включать 20 укрупненных отраслей вместо 12. При переходе к большей детализации показателей экономической деятельности ожидается повышение надежности прогноза агрегированных показателей (Tsakalozos, Konstantinos, Scott, 2011).

Увеличение числа сегментов на уровне модели трудовых ресурсов приводит к оценке большого числа факторов, по которым объективная регулярная статистика может отсутствовать. Для прогнозирования таких факторов могут использоваться экспертные оценки (Armstrong, 1984).

Надежность прогнозирования агрегированных показателей рынка труда можно повысить за счет детализации показателей межотраслевых перемещений на основе имеющейся статистики.

В работе (Дроботенко, Невечеря, 2021) предложена детализация трудовых ресурсов с помощью балансовой математической модели. Показано, что прогнозирование детализированных показателей (с последующим вычислением прогнозных агрегированных показателей на основе найденных детализированных) обеспечивает лучшую надежность прогноза по сравнению с подходом к прогнозированию экстраполяцией трендов показателей трудовых ресурсов.

В настоящей работе рассмотрена задача прогнозирования показателей рынка труда на основе балансовой модели с большей детализацией.

2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОТРАСЛЕВОЙ СТРУКТУРЫ РЫНКА ТРУДА С ПОМОЩЬЮ БАЛАНСОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

2.1. Балансовая модель динамики трудовых ресурсов

Статистические данные, характеризующие состояние рынка труда, можно использовать для прогноза, построив тренды для каждого исследуемого показателя. Вычисление прогнозных значений таких показателей на основе статистики было рассмотрено в работе (Дроботенко, Невечеря, 2021). При таком подходе существующие связи между показателями рынка труда не учитываются. Однако они детализируют процессы исследуемого рынка, содержат информацию, которая отсутствует в статистике занятости и безработицы. Таким образом, учет этих связей за счет модели динамики может способствовать повышению надежности прогноза показателей рынка труда.

Балансовая модель была рассмотрена в работах (Невечеря, 2016а; Дроботенко, Невечеря, 2021). Моделируется динамика следующих показателей по n отраслям рынка труда: $N_1^{(i)}(t)$ — число занятых в отрасли i на конец года t ; $N_2^{(i)}(t)$ — число безработных на конец года t , последнее место работы которых было в отрасли i ; $N_2^{(0)}(t)$ — число безработных на конец года t , которые ранее не имели занятости на исследуемом рынке; $i = 1, \dots, n$.

Для описания взаимодействия моделируемого рынка с внешней средой вводится экзогенный параметр $\Delta N_2^{(0)}(t)$ — приток трудовых ресурсов на рынок труда в течение года $t + 1$. Значение $\Delta N_2^{(0)}(t)$ вычисляется на основе показателей Федеральной службы государственной статистики (Россия в цифрах ..., 2021). Формула, применяемая для вычисления $\Delta N_2^{(0)}(t)$, рассмотрена в работе (Дроботенко, Невечеря, 2021).

Балансовая модель динамики трудовых ресурсов включает уравнения связи между показателями рынка труда за годы t и $t + 1$:

$$N_1^{(i)}(t+1) = N_1^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^n N_2^{(j)}(t) P_1^{(j,i)}(t) + [\Delta N_2^{(0)}(t) + N_2^{(0)}(t)] P_1^{(0,i)}(t) - \\ - N_1^{(i)}(t) [P_2^{(i)}(t) + P_3^{(i)}(t)] + \sum_{j=1, j \neq i}^n N_1^{(j)}(t) P_4^{(j,i)}(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n N_1^{(i)}(t) P_4^{(i,j)}(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

¹ О принятии и введении в действие общероссийского классификатора видов экономической деятельности (ОКВЭД2) ОК 029-2014 (КДЕС ред. 2) и общероссийского классификатора продукции по видам экономической деятельности (ОКПД2) ОК 034-2014 (КПЕС 2008). (2014). Приказ Росстандарта от 31.01.2014 № 14-ст (ред. от 16.10.2018).

$$N_2^{(i)}(t+1) = N_2^{(i)}(t) + N_1^{(i)}(t)P_2^{(i)}(t) - N_2^{(i)}(t) \sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(i,j)}(t), \quad i=1, \dots, n, \quad (2)$$

$$N_2^{(0)}(t+1) = N_2^{(0)}(t) + \Delta N_2^{(0)}(t) - \left[\Delta N_2^{(0)}(t) + N_2^{(0)}(t) \right] \sum_{j=1}^{n+1} P_1^{(0,j)}(t), \quad (3)$$

и ограничения:

$$P_1^{(j,i)}(t), P_1^{(j,n+1)}(t), P_2^{(i)}(t), P_3^{(i)}(t), \quad j=0, \dots, n; \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

$$P_4^{(j,i)}(t) \geq 0, \quad j, i=1, \dots, n, \quad j \neq i, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} P_1^{(j,i)}(t) \leq 1, \quad P_2^{(j)}(t) + P_3^{(j)}(t) + \sum_{i=1, i \neq j}^n P_4^{(j,i)}(t) \leq 1, \quad j=1, \dots, n. \quad (6)$$

Здесь $P_1^{(j,i)}(t)$ — вероятность того что безработный (с последним местом работы в отрасли j) в течение $(t+1)$ года найдет работу в отрасли i ; $P_1^{(0,i)}(t)$ — вероятность того что безработный, не имевший занятости с момента появления на данном рынке, в течение года $(t+1)$ найдет работу в отрасли i ; $P_1^{(j,n+1)}(t)$ — вероятность того что безработный, с последним местом работы в отрасли j , покинет рынок труда в течение $(t+1)$ года; $P_1^{(0,n+1)}(t)$ — вероятность того что ранее не занятый безработный в течение $(t+1)$ года покинет рынок; $P_2^{(i)}(t)$ — вероятность того что специалист, работающий в отрасли i , к концу $(t+1)$ года станет безработным; $P_3^{(i)}(t)$ — вероятность того что специалист, работающий в отрасли i , покинет рынок труда в течение $(t+1)$ года; $P_4^{(j,i)}(t)$ — вероятность того что специалист, работающий в отрасли j , в течение $(t+1)$ года перейдет в отрасль i .

Таким образом, в балансовой модели появляются величины, связывающие показатели рынка труда — вероятности, которые характеризуют потоки межотраслевых перемещений трудовых ресурсов. Совокупность этих вероятностей в дальнейшем будем называть *показателями межотраслевых перемещений*.

Балансовая модель связывает $2n+1$ показатель рынка труда с помощью $2n^2 + 3n + 1$ показателей межотраслевых перемещений.

2.2. Нахождение показателей межотраслевых перемещений

Введем сопряженные переменные:

$$P_*^{(i)}(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} P_1^{(i,k)}(t), \quad i=0, \dots, n, \quad (7)$$

$$P_{**}^{(i)}(t) = 1 - P_2^{(i)}(t) - P_3^{(i)}(t) - \sum_{k=1, k \neq i}^n P_4^{(i,k)}(t), \quad i=1, \dots, n. \quad (8)$$

Равенства (1)–(3) и неравенства (4)–(6) можно записать в матричном виде:

$$N(t, t+1) = A(t)P(t), \quad (9)$$

$$P(t) \geq 0. \quad (10)$$

Здесь $N(t, t+1)$ — вектор, компоненты которого зависят от показателей рынка труда за годы t и $t+1$. Его размерность равняется $4n+2$, т.е. числу уравнений (1)–(3), (7), (8). Матрица $A(t)$ зависит от показателей рынка труда за год t и от экзогенного параметра $\Delta N_2^{(0)}(t)$. Размерность матрицы $A(t)$ равняется $(4n+2) \times (2n^2 + 3n + 1)$. Вектор $P(t)$ состоит из значений показателей межотраслевых перемещений трудовых ресурсов в течение года $(t+1)$. Размерность вектора $P(t)$ равняется $2n^2 + 3n + 1$, т.е. числу показателей межотраслевых перемещений.

Задача отыскания вектора $P(t)$, удовлетворяющего условиям (9), (10), является некорректной, ее решение с применением метода регуляризации (Тихонов, Арсенин, 1979) рассмотрено в (Невечеря, 2016а, 2016б).

2.3. Прогнозирование динамики трудовых ресурсов

Зная показатели рынка труда за годы t и $t+1$, с помощью (9), (10) можно найти вектор показателя межотраслевых перемещений $P(t)$. Таким образом, знание совокупности показателей рынка труда за годы $t-k, t-k+1, \dots, t+1$ позволяет найти вектора $P(t-k), \dots, P(t)$. Если для каждой компоненты вектора $P(t)$ построить тренд и на его основе вычислить прогнозное значение на $(t+1)$ год, можно составить прогнозный вектор межотраслевых перемещений $P_{\text{пр}}(t+1)$. Тогда с помощью равенства $N_{\text{пр}}(t+1, t+2) = A(t+1)P_{\text{пр}}(t+1)$ можно вычислить прогнозные значения показателей рынка труда за год $t+2$.

2.4. Особенности предложенного подхода

Балансовые модели динамики структур занятости применялись ранее для исследования движения населения и трудовых ресурсов (Единак, Коровкин, 2014; Коровкин, 2001; Коровкин и др., 2017). Значения параметров движения населения и трудовых ресурсов (вероятностей p_{ij} перехода из состояния i в состояние j) данные Федеральной службы государственной статистики не содержат, поэтому для их оценки рассматривались различные теоретические схемы движения. При этом возникали трудности, связанные со «слабой изученностью социально-экономического механизма процесса движения населения и трудовых ресурсов, неразработанностью методов учета этого процесса, межотраслевых перемещений работников» (Коровкин, 2001, глава 3.3).

В предложенной в настоящей работе балансовой модели используются только показатели рынка труда, полученные на основе статистических данных Федеральной службы государственной статистики (кроме одной экзогенной величины — притока трудовых ресурсов на рынок труда). Параметры движения трудовых ресурсов² вычисляются как решение уравнений балансовой модели (1)–(6). Для построения прогноза показателей рынка труда применяются только уравнения балансовой модели. Такой подход позволяет повысить объективность процесса прогнозирования.

3. ПРИМЕРЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ НА РЫНКЕ ТРУДА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

До конца 2016 г. рынок труда Российской Федерации, согласно «Общероссийскому классификатору видов экономической деятельности», подразделялся на 12 отраслей. С 2017 г. действует вторая редакция общероссийского классификатора видов экономической деятельности, согласно которой рынок труда Российской Федерации разделялся на 20 отраслей (и деятельность экстерриториальных организаций).

Рассмотрим примеры прогнозирования динамики трудовых ресурсов до и после 2016 г., используя для вычисления показателей рынка статистические данные Федеральной службы государственной статистики, имеющиеся в открытом доступе³: численность занятых по видам экономической деятельности — для вычисления отраслевой структуры занятости. Способ приближенного вычисления отраслевой структуры безработицы по численности выбывших работников списочного состава по видам экономической деятельности см. в (Дроботенко, Невечеря, 2021).

3.1. Прогнозирование на 2011–2016 гг.

Для прогнозирования динамики рынка труда на 2011–2016 гг. привлечем статистические данные по 12 отраслям: 1) сельское и лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство; 2) добыча полезных ископаемых; 3) обрабатывающие производства; 4) производство и распределение электроэнергии, газа и воды; 5) строительство; 6) оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования, гостиницы и рестораны; 7) транспорт и связь; 8) финансовая деятельность, операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг; 9) государственное управление и обеспечение военной безопасности, социальное обеспечение; 10) образование; 11) здравоохранение и предоставление социальных услуг; 12) другие виды экономической деятельности.

Приведем таблицу надежности прогнозов показателей рынка труда (табл. 1), полученных непосредственно по показателям рынка труда (столбцы I), балансовой модели из (Дроботенко,

Таблица 1. Таблица надежности прогнозов показателей рынка труда на 2011–2016 гг.

Отрасль	2011			2012			2013			2014			2015			2016		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

² В статье они названы «показателями межотраслевых перемещений».

³ Трудовые ресурсы, занятость и безработица (2022 г.). Федеральная служба государственной статистики (https://rosstat.gov.ru/labour_force).

Окончание таблицы 1

Отрасль	2011			2012			2013			2014			2015			2016		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
4	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
Итого	6	2	1	4	2	3	8	3	3	4	3	2	3	2	2	5	1	0

Невечеря, 2021) (столбцы II) и балансовой модели (1)–(6) (столбцы III). При прогнозировании показателей рынка труда и показателей межотраслевых перемещений выбирается один из трендов: константный, линейный или нелинейный (Дроботенко, Невечеря, 2021). Прогноз считается надежным, если его погрешность не превосходит 2%. В этом случае в соответствующем столбце стоит «0», в противном случае — «1». В строке «Итого» приведено число ненадежных прогнозов в текущем году. Таким образом, прогнозирование непосредственно по показателям рынка труда дает 30 ненадежных прогнозов; по балансовой модели из (Дроботенко, Невечеря, 2021) — 13; по балансовой модели (1)–(6) — 11.

3.2. Прогнозирование на 2019 г.

С 2017 г. народное хозяйство Российской Федерации разделяется на 20 отраслей:

- 1) сельское и лесное хозяйство, охота, рыболовство и рыбоводство;
- 2) добыча полезных ископаемых;
- 3) обрабатывающие производства;
- 4) обеспечение электрической энергией, газом и паром; кондиционирование воздуха;
- 5) водоснабжение; водоотведение, организация сбора и утилизации отходов, деятельность по ликвидации загрязнений;
- 6) строительство;
- 7) торговля оптовая и розничная; ремонт автотранспортных средств и мотоциклов;
- 8) транспортировка и хранение;
- 9) деятельность гостиниц и предприятий общественного питания;
- 10) деятельность в области информации и связи;
- 11) деятельность финансовая и страховая;
- 12) деятельность по операциям с недвижимым имуществом;
- 13) деятельность профессиональная, научная и техническая (исключая научные исследования и разработки);
- 14) научные исследования и разработки;
- 15) деятельность административная и сопутствующие дополнительные услуги;
- 16) государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное обеспечение;
- 17) образование;
- 18) деятельность в области здравоохранения и социальных услуг;
- 19) деятельность в области культуры, спорта, организации досуга и развлечений;
- 20) предоставление прочих видов услуг.

Таблица 2. Таблица погрешностей и надежности прогнозов занятых в отраслях рынка труда Российской Федерации 2019 г.

Отрасль	Прогноз на 2019 г.					
	I	II	III	IV	V	VI
1	3,25	1	0,36	0	0,24	0
2	0,97	0	1,43	0	0,95	0
3	1,04	0	0,08	0	0,16	0
4	0,95	0	0,42	0	0,52	0
5	2,87	1	1,44	0	1,35	0
6	0,40	0	0,41	0	0,42	0
7	1,28	0	1,07	0	1,04	0
8	0,37	0	1,40	0	1,35	0
9	2,34	1	0,41	0	0,07	0
10	0,71	0	0,78	0	0,62	0
11	1,26	0	2,08	1	2,04	1
12	0,20	0	0,70	0	0,90	0
13	1,20	0	0,36	0	0,62	0
14	3,87	1	0,92	0	1,18	0
15	3,22	1	3,18	1	2,73	1
16	0,68	0	0,80	0	1,07	0
17	1,16	0	0,17	0	0,37	0
18	0,09	0	1,03	0	1,27	0
19	1,13	0	0,64	0	0,42	0
20	1,09	0	0,43	0	0,52	0
Итого	1,40	5	0,90	2	0,89	2

Возможность использования для прогнозирования данных лишь за 2017–2019 гг. ограничивает выбор прогнозного тренда константным. В табл. 2 приведены погрешности (в %) прогноза занятых. Цифрой «1» отмечены ненадежные прогнозы. В строке «Итого» в столбцах I, III, V показаны средние значения погрешностей прогнозов, а в ст. II, IV, VI — число ненадежных прогнозов. В столбцах I, II отражены результаты прогнозирования непосредственно по показателям рынка труда; в столбцах III, IV — результаты, полученные с помощью балансовой модели из (Дроботенко, Невечеря, 2021); в столбцах V, VI — с помощью модели (1)–(6). Таким образом, прогнозирование непосредственно по показателям рынка труда, прогнозирование показателей рынка труда с помощью балансовой модели из (Дроботенко, Невечеря, 2021) и с помощью балансовой модели (1)–(6) дают на 2019 г. 5, 2 и 2 ненадежных прогнозов соответственно.

Рассмотренные примеры прогнозирования занятости по 12 и 20 отраслям свидетельствуют о том, что детализация показателей трудовых ресурсов является эффективным подходом для повышения надежности прогноза отраслевой занятости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Дроботенко М.И., Невечеря А.П.** (2021). Прогнозирование динамики трудовых ресурсов на многоотраслевом рынке труда // *Компьютерные исследование и моделирование*. Т. 13. Вып. 1. С. 235–250. [**Drobotenko M.I., Nevecherya A.P.** (2021). Forecasting the labour force dynamics in a multisectoral labor market. *Computer Research and Modeling*, 13, 1, 235–250 (in Russian).]
- Единак Е.А., Коровкин А.Г.** (2014). Построение баланса территориального движения занятого населения (на примере федеральных округов РФ) // *Проблемы прогнозирования*. № 3 (144). С. 72–85. [**Edinak E.A., Korovkin A.G.** (2014). Construction of balance of territorial mobility of employed population: Case study of federal districts of the Russian federation. *Studies on Russian Economic Development*, 3 (144), 72–85 (in Russian).]
- Коровкин А.Г.** (2001). Динамика занятости и рынка труда: вопросы макроэкономического анализа и прогнозирования. М.: МАКС Пресс. [**Korovkin A.G.** (2001). *Employment and labor market dynamics: Issues of macroeconomic analysis and forecasting*. Moscow: MAKSS Press (in Russian).]

- Коровкин А.Г., Единак Е.А., Королев И.Б.** (2017). Прогнозирование численности и структуры населения на базе балансового подхода. В сб.: *Демографический потенциал стран ЕАЭС*. Екатеринбург: Институт экономики УрО РАН. С. 297–303. [**Korovkin A.G., Edinak E.A., Korolev I.B.** (2017). The number and population structure forecasting on the base of the balance approach. In: *Demographic potential of the EAEU countries*. Yekaterinburg: Institute of Economics UrB RAS, 297–303 (in Russian).]
- Невечеря А.П.** (2016a). Исследование динамики трудовых ресурсов на основе многоотраслевой математической модели рынка труда // *Экономика и математические методы* Т. 52. Вып. 2. С. 129–140. [**Nevecherya A.P.** (2016a). Analysis of labor force dynamics in intersectoral mathematical model of the labor market. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 2, 129–140 (in Russian).]
- Невечеря А.П.** (2016b). Численный алгоритм в задаче самоорганизации трудовых ресурсов // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ)*. № 04(118). С. 1333–1349. [**Nevecherya A.P.** (2016b). A numerical algorithm in the problem of self-organization of labor resources. *Polythematic network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Scientific Journal of KubSAU)*, 04 (118), 1333–1349 (in Russian).]
- Невечеря А.П.** (2021). Задача прогнозирования динамики трудовых ресурсов // *Наука. Новое поколение. Успех*. Т. 2. С. 24–26. [**Nevecherya A.P.** (2021). Labour resources dynamics forecasting problem. *Science. A new generation. Success*, 2, 24–26 (in Russian).]
- Россия в цифрах. 2021: Краткий статистический сборник (2021). М.: Федеральная служба государственной статистики. [*Russia in figures. 2021: Brief Statistical Compilation* (2021). Moscow: Federal State Statistics Service (in Russian).]
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** (1979). Методы решения некорректных задач. М.: Наука. [**Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** (1979). *Methods for solving ill-posed problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Armstrong J.S.** (1984). Forecasting by extrapolation: Conclusions from 25 years of research. *Interfaccs*. No. 003. 20 p.
- Bakens J., Fouarge D., Peeters T.** (2018). Labour market forecasts by education and occupation up to 2022. *ROA. ROA Technical Reports*, 14, 6, 52–66.
- Borghans L., De Grip A., Heijke H.** (1996). Labor market information and the choice of vocational specialization. *Economics of Education Review*, 15 (1), 59–74.
- Cörvers F., Heijke H.** (2005). *Forecasting the labour market by occupation and education: Some key issues*. Maastricht: Research centrum voor Onderwijs en Arbeidsmarkt.
- Key indicators of the labour market* (2016). 9th ed. Geneva: International labour office.
- Knobel C., Kriechele B., Schmid A.** (2008). *Regional forecasting on labour markets*. Munich: Rainer Hampp Verlag.
- Scott J., Marshall G.** (2009). *A dictionary of sociology*. Oxford: Oxford University Press.
- Tsakalozos N., Konstantinos D., Scott R.** (2011). Signal extrapolation using empirical mode decomposition with financial applications. *CASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 5744–5747.
- Wilkinson F.** (1981). *The dynamics of labour market segmentation*. NYC: Academic press.

Forecasting the sectoral structure of population employment

© 2023 M.I. Drobotenko, A.P. Nevecherya

M.I. Drobotenko,

Kuban State University, Krasnodar, Russia; e-mail: mdrobotenko@mail.ru

A.P. Nevecherya,

Kuban State University, Krasnodar, Russia; e-mail: artiom1989@mail.ru

Received 27.07.2022

Abstract. All the labor market subjects that can influence the labor resources dynamics are interested in employment forecasts for labor market sectors. Such subjects are state employees and municipal employees, employers and workers. The statistical data aggregation degree affects the quality of the labor resources dynamics forecasting. Each labor market indicator combines a set of detailed indicators in a high degree of aggregation case. When building the trends it is impossible to take into account information on the detailed indicators trends. The labor market indicators for each specific year don't contain information about the interaction with each other. This fact also negatively affects the forecast quality. The article discusses the use of a balance mathematical model of the labor resources dynamics, which relates the labor market sectoral indicators, to define the intersectoral movements indicators. The authors consider a calculating labor market indicators method that uses only statistical data on sectoral employment and unemployment. Thus, the statistical data on the labor resources dynamics provided by the Federal State Statistics Service is a sufficient condition for the Russian Federation labor market detailing using intersectoral movements' indicators. The paper shows how a set of intersectoral movements indicators allows building the forecast values of these indicators and using them to calculate the forecast values of labor market indicators. The article considers examples of claiming employment estimates by Russian Federation economy sectors for 2011–2016 and 2019. The entry into force of the All-Russian classifier of types of economic activity (second edition) in 2017 is the reason for choosing such research intervals. The purpose of these examples was to determine the impact of the detailed labor market indicators of the sectoral employment estimates reliability. The authors compared the forecast obtained directly from labor market indicators with the forecasts obtained from intersectoral movements indicators. Intersectoral movements indicators are the results of applying balance models with varying degrees of detail. The reliability tables presented in this work to assess the forecasting quality indicate that the detailing of the sectoral employment indicators by using the balance model can increase reliability of the forecast.

Keywords: balance model, labor force dynamics, intersectoral relations detailing, forecasting, labor market.

JEL Classification: C32.

For reference: **Drobotenko M.I., Nevecherya A.P.** (2023). Forecasting the sectoral structure of population employment. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 22–29. DOI: 10.31857/S042473880024868-3

НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

**Оценка эффектов различных вариантов импортозамещения методом
«затраты–выпуск» на примере Российской Федерации**

© 2023 Н.А. Моисеев, И.А. Внуков, П.О. Сокерин

Н.А. Моисеев,

РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва; e-mail: moiseev.na@rea.ru

И.А. Внуков,

НИУ ВШЭ, Москва; e-mail: jvnukov@yandex.ru

П.О. Сокерин,

РЭУ им. Г.В. Плеханова, Москва; e-mail: sokerinpo@mail.ru

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда (проект 22-78-10150) («Разработка системы оценки и оптимального планирования реализации государственных экономических проектов в условиях геополитических рисков»).

Поступила в редакцию 30.10.2022

Аннотация. Статья посвящена вопросу оценки экономических эффектов импортозамещения для определения последствий инвестиционных решений на уровне государства в условиях геополитических рисков. В связи с рядом экономических ограничений со стороны западных стран особенно актуальной является проблема замещения тех видов продукции, по которым приостановлен торговый оборот. В условиях шокового сокращения предложения на рынке многих отраслей при сохранившемся уровне спроса существует потребность в экстренной переориентации отечественного производства. Государственные инвестиции должны учитывать мультипликативный эффект, вызванный влиянием выпуска каждой отрасли друг на друга. В работе предлагается методика построения теоретической модели мирового взаимодействия стран на основе таблиц «затраты–выпуск», учитывающих производственные потребности каждой отрасли в продукции остальных отраслей и мультипликативный эффект. Проведено два эксперимента, моделирующих воздействия на экономики всех стран прекращения торговли между Россией и Европейским союзом (ЕС) по ряду отраслей с последующими мерами: замещение европейской продукции товарами и услугами Китая и замещение импорта из ЕС за счет выпуска собственных производственных мощностей России. Оцениваются последствия двух сценариев изменения выпуска, налоговых сборов, импорта и экспорта России и ЕС; прогнозируются долгосрочные эффекты. Практическая значимость данной работы состоит в помощи в принятии управленческих решений на государственном уровне в вопросах финансирования отдельных отраслей экономики России.

Ключевые слова: импортозамещение, таблицы «затраты–выпуск», мультипликатор, межотраслевой баланс, оценка инвестиций, моделирование.

Классификация JEL: C21, C54, C67.

Для цитирования: **Моисеев Н.А., Внуков И.А., Сокерин П.О.** (2023). Оценка эффектов различных вариантов импортозамещения методом «затраты–выпуск» на примере Российской Федерации // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 30–47. DOI: 10.31857/S042473880024869-4

ВВЕДЕНИЕ

Торговые войны негативно влияют на уровень жизни населения стран, против которых они направлены. При этом цели экономических санкций не всегда достигаются (Головин, Головин, Пархомчук, 2018, с. 217), а потери от санкций могут коснуться стран, которые их же и вводят (Барковский, Алабян, Морозенкова, 2015, с. 6). Нестабильность современной политической и экономической ситуации имеет длительный характер и влияет на отношения России со странами запада: ЕС и США. Во многих исследованиях предпринимались попытки оценить степень влияния санкций на экономику России (Ажекбаров, Абдуваитов, 2020, с. 23; Долматова и др., 2020, с. 130).

В условиях торговых войн на различные виды товаров могут распространяться тарифы и квоты, как, например, при экономическом конфликте между США и Китаем. В США были введены

ограничения на импорт из Китая текстильных товаров, стали, алюминия и т.д., а в Китае — ограничения на 106 видов товаров аграрной, автомобильной и химической промышленности (Юнюш-кина, Шаповалова, Каткова, 2021, с. 60). Торговые войны порождают проблему учета эффектов межотраслевого сотрудничества, так как в сложной структуре межсекторального взаимодействия появляются мультипликативные эффекты, влияющие на конечный выпуск. Мультипликативный эффект (Кейнс, 1936, с. 46) состоит в значительном увеличении экономического результата при росте затрат. Так, инвестиции в разные отрасли могут дать разные приросты национального дохода.

В данной статье приводится теоретическая модель, основанная на распространенных инструментах и методах, — таблицах «затраты—выпуск» с данными о производстве и потреблении каждой отрасли и их взаимной зависимости, вычислительных алгоритмах и анализе мультипликативных эффектов. По ним можно выделить отрасли, в которых импортозамещение будет наиболее эффективным (наибольший прирост выпуска и изменение торгового баланса в сторону экспорта).

Моделированию на основе таблиц «затраты—выпуск» экономики страны для целей государственного управления посвящена работа (Mori, Sasaki, 2007, p. 29). По этим таблицам можно отследить, какие отрасли являются наиболее взаимозависимыми. В статье (Калинин и др., 2021, с. 83) приведен анализ импортной зависимости России от торговых партнеров и роль регионов России в валовом продукте. Появляются новые методы и модернизированные модели оценки межотраслевых взаимодействий (например, в (Серебряков, 2000, с. 16) представлен новый тип межотраслевой динамической модели), а также обновленные версии межотраслевой макроэкономической модели RIM (Russian Interindustry Model) как ключевого элемента системы комплексного макроструктурного прогнозирования (Широв, Янговский, 2017, с. 17; Баранов, Гореев, 2019, с. 94).

Большое число отечественных работ в этой области посвящено вопросам протекционизма и импортозамещения, как например статья (Luchinkin, 2021, p. 19), где показано, что импортозамещение сопряжено с рядом рисков, при введении ряда механизмов поддержки национальных производителей можно получить большие выгоды. Исследователи также поднимают проблему качества продукции, отмечая, что продукция российского производства часто не соответствует технологическим требованиям потребителя, а высокотехнологичные компании очень чувствительны к ограничениям импорта (Симачев, Кузык, Зудин, 2016, с. 25).

В зарубежной литературе также широко распространено применение моделей межотраслевого баланса, в частности среди китайских и японских исследователей. Популярно использование межстрановых таблиц «затраты—выпуск» для вычисления экспорта с добавленной стоимостью отрасли информационно-коммуникационных технологий (Lin et al., 2016, p. 47; Chen et al., 2018, p. 20; Hong, Byun, Kim, 2016, p. 502).

В статье (Моисеев, Ахмадеев, 2021, с. 117) уже проводилось моделирование эффектов импортозамещения для национальной экономики страны с помощью таблицы «затраты—выпуск». На примере данных Австралии было проведено два эксперимента: замещение импорта продукции одной отрасли импортом другой отрасли и замещение импорта продукции данной отрасли за счет собственных ресурсов. Были проанализированы изменения в выпуске, импорте и экспорте Австралии и ее торговых партнеров.

В отечественной научной литературе использование таблиц «затраты—выпуск» встречается не так часто, однако ранее изменения в производстве не получали такого масштабного характера, поэтому исследования касались отдельных экономических проектов и мало внимания уделялось импортозамещению и его влиянию на национальный продукт.

МЕТОДЫ

Для расчетов используются данные из Всемирной базы данных «затраты—выпуск» (WIOD) (Timmer et al., 2015, p. 575) за 2014 г. Данные содержат информацию о выпуске и потреблении каждой отрасли в 43 странах, в том числе в 27 странах ЕС, по 56 отраслям (см. Приложение); отдельно представлены агрегированные данные по отраслям в остальном мире. В общем виде таблица выпуска и потребления является симметричной. Она включает данные по отдельным странам и по «остальному миру» (rest of the world), куда входят суммарные показатели по странам, не представленным отдельно в таблице. Схема таблицы «затраты—выпуск» состоит из четырех квадрантов (рис. 1). Импорт и экспорт указаны для первой страны. В первом квадранте находится промежуточное производственное потребление, во втором — конечное потребление каждой отрасли, в третьем — структура валовой добавленной

		Внутреннее производство страны 1		Экспорт в страну 2		Экспорт в страну 3		Конечное потребление		Выпуск
		Отрасль 1	Отрасль 2	Отрасль 1	Отрасль 2	Отрасль 1	Отрасль 2	Домохозяйства	Государства	
Внутреннее производство страны 1	Отрасль 1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
	Отрасль 2	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Импорт из страны 2	Отрасль 1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
	Отрасль 2	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Импорт из страны 3	Отрасль 1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
	Отрасль 2	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Всего	Промежуточное потребление	6	6	6	6	6	6	6	6	0
	Налоги за вычетом субсидий	0	1	1	1	1	1	0	0	0
	Поправки на экспорт	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Прямые расходы резидентов за рубежом	4	4	4	4	4	4	0	0	0
	Расходы нерезидентов внутри страны	-6	-6	-6	-6	-6	-6	0	0	0
	Добавленная стоимость в базисных ценах	3	3	3	3	3	3	0	0	0
	Рентабельность международных перевозок	1	0	0	0	0	0	1	1	0
Выпуск		8	8	8	8	8	8	0	0	0

Рис. 1. Общее представление таблицы «затраты–выпуск» для одной страны

стоимости (ВДС), а в четвертом — перераспределение национального дохода. Импорт по каждой стране можно получить сложением потребления каждой отрасли из отраслей других стран, а экспорт — сложением выпусков по каждой отрасли. Промежуточное потребление — сумма по столбцам первого квадранта таблицы. Конечный выпуск можно получить либо суммированием чисел по столбцам третьего квадранта, либо суммированием по строкам первого и второго квадранта. Все показатели измерены в миллионах долларов США. По строкам показывается выпуск отрасли i в объеме a_{ij} , потребленный отраслью j ; по столбцам — потребление отрасли j в объеме a_{ij} продукции отрасли i для собственного производства.

Для определения экономико-математической модели принято руководствоваться следующими предположениями.

1. Производственное потребление прямо пропорционально производству в потребляющих отраслях, а факторами прямых затрат являются коэффициенты пропорциональности:

$$a_{ij} = x_{ij} / x_j, \quad (1)$$

где a_{ij} — элемент производственной матрицы A ; x_{ij} — элемент таблицы «затраты–выпуск» прямых затрат (по строкам), а x_j — общий выпуск каждой отрасли.

2. Каждый продукт может быть произведен только в одной отрасли.

Этап 1. Оценка краткосрочного воздействия

1. Рассчитывается исходная производственная матрица A_0 из исходной таблицы «затраты–выпуск» путем вычисления доли каждой отрасли, задействованной в производстве единицы товара каждой отрасли по формуле (1).

2. По уравнению

$$X = AX + Y \quad (2)$$

вычисляется исходный вектор конечного выпуска X_0

$$X_0 = (I - A_0)^{-1} Y_0, \quad (3)$$

где X — вектор конечного выпуска; AX — вектор промежуточного потребления; Y — вектор конечного потребления; I — единичная матрица размерности матрицы A_0 ; Y_0 — исходный вектор конечного потребления.

3. Изменяется исходная таблица «затраты—выпуск», отражающая новое потребление российских отраслей. Переносится импорт одних отраслей в другие путем вычитания из ячеек таблицы величин импорта России из стран ЕС и прибавление этих величин в отрасли Китая или России.

4. Формируется новая производственная матрица A_1 аналогично действиям на шаге 1.

5. Вычисляется новый вектор конечного выпуска X_1 при сохранении исходного конечного потребления по формуле

$$X_1 = (I - A_1)^{-1} Y_0. \quad (4)$$

Вектор конечного потребления сохраняется, поскольку в течение короткого промежутка времени структура конечного потребления меняется незначительно. Коэффициент корреляции векторов конечного потребления соседних лет варьирует от 0,9 до 0,99 (Ахмадеев, Моисеев, 2017, с. 70).

Имеется возможность оценить налоговые сборы, вычислив налоговую нагрузку на выпуск предприятий в каждой стране по каждой отрасли. Предполагается, что налоговые ставки остаются неизменными, а налоговые сборы напрямую зависят от реализации продукции.

В данной работе налоговая нагрузка вычисляется как отношение налоговых сборов в исходной таблице к реализованной продукции:

$$\text{Налоговая нагрузка} = \text{Налоговые сборы} / X_0. \quad (5)$$

Налоговые сборы после проведения политики импортозамещения оцениваются как произведение налоговой нагрузки на новый вектор выпуска X_1 . Аналогичным образом вычисляются доли импорта и экспорта, а импорт и экспорт оцениваются, соответственно, как произведение долей импорта и экспорта на новый вектор выпуска X_1 .

Этап 2. Оценка долгосрочного воздействия

1. Валовое конечное потребление по стране сильно коррелирует с валовой добавленной стоимостью, поскольку предполагается, что из добавленной стоимости на производстве формируется прибыль предприятий, заработная плата работников и свободные финансовые ресурсы, которые идут на конечное потребление. От отрасли к отрасли добавленные стоимости варьируют, как и конечное потребление, однако в сумме по странам они меняются одинаково.

Вектор добавленной стоимости можно найти по формуле

$$\text{ВДС} = X - XA_{\text{sum}}, \quad (6)$$

где A_{sum} — сумма по столбцам производственной матрицы, т.е. это доля промежуточного потребления каждой отрасли относительно выпуска всей отрасли.

Новый вектор конечного потребления вычисляется умножением исходного вектора конечного потребления на коэффициент роста добавленной стоимости по каждой стране. Коэффициент корреляции между валовым конечным потреблением и валовой добавленной стоимостью на исследуемых данных был равен 0,9998, связь между ними сильная (рис. 2).

2. В цикле рассчитываются вектор выпуска X , добавленная стоимость и новый вектор конечного потребления Y . После вычисления нового вектора конечного потребления Y алгоритм переходит к расчету следующего вектора выпуска X_1 .

3. На каждой итерации цикла прослеживается изменение нормы вектора выпуска X . За

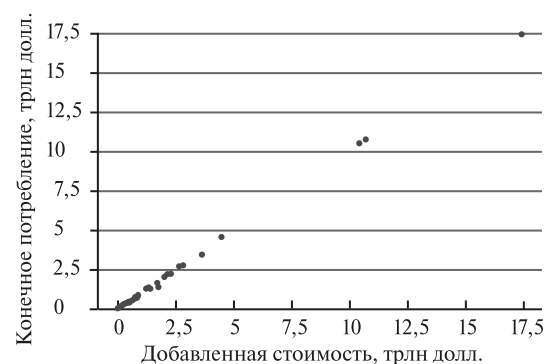


Рис. 2. Диаграмма рассеяния валового конечного потребления и валовой добавленной стоимости

несколько шагов проверяется сходимость вектора выпуска к постоянной величине, т.е. к установлению равновесия. Производственная матрица не меняется во времени.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Эксперимент № 1

Эксперимент предполагает полную замену импорта всех отраслей ЕС дополнительным импортом из соответствующих отраслей Китая, т.е. Россия перестает покупать продукцию Евросоюза, импортируя из Китая необходимые товары и услуги, ранее производимые отраслями ЕС. В исходном состоянии импорт России из ЕС составляет 70,551 млрд долл., что достигает 2,087% совокупного выпуска России.

В результате переноса выпуска из ЕС в Китай суммарный выпуск по всем странам остался на том же уровне (рис. 3). В ЕС валовой выпуск сократился на 70,551 млрд долл. Большая доля потерь пришлась на

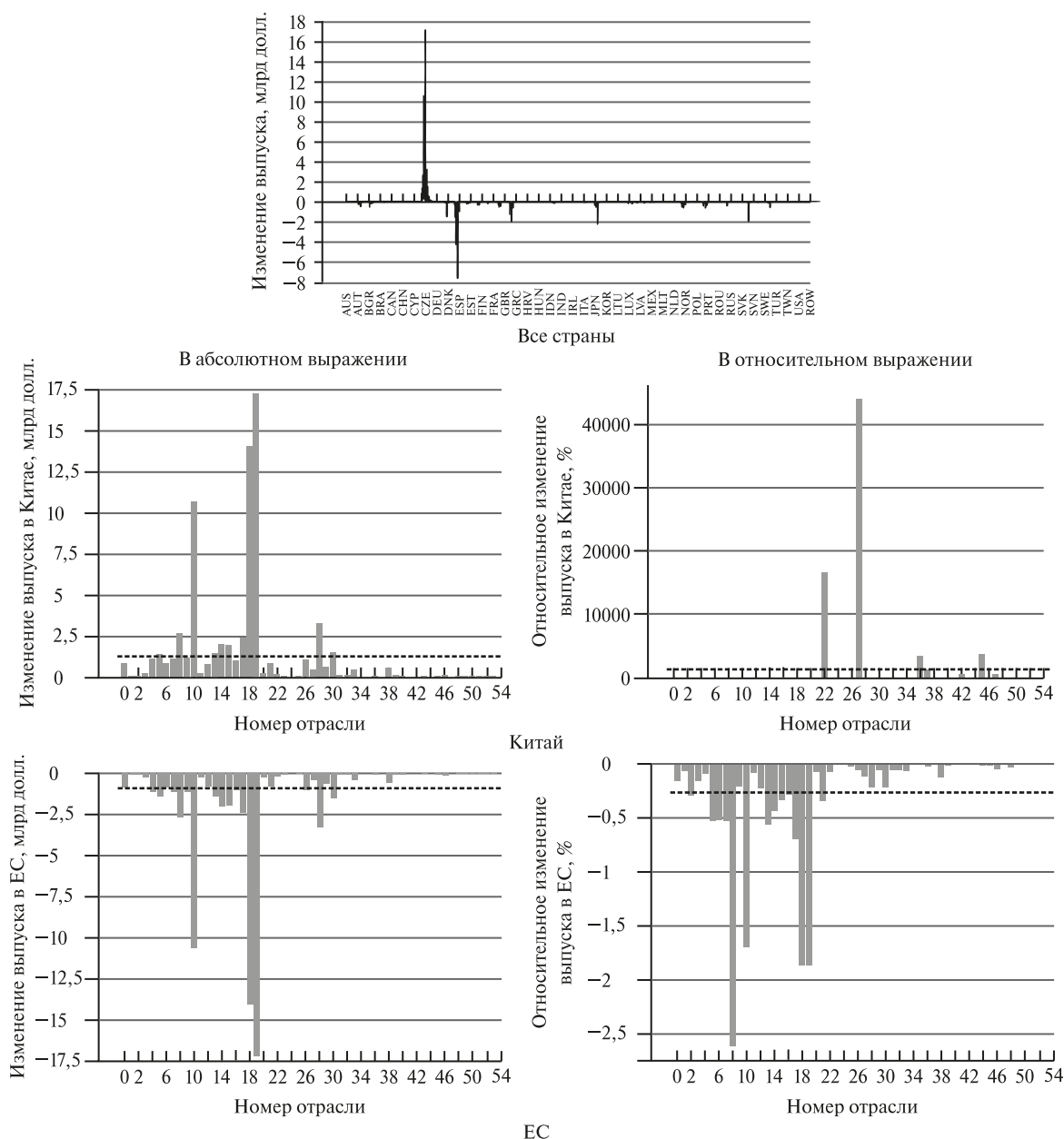


Рис. 3. Изменение производства во всех странах, и в частности России, Китае и ЕС после переноса импорта в Китай

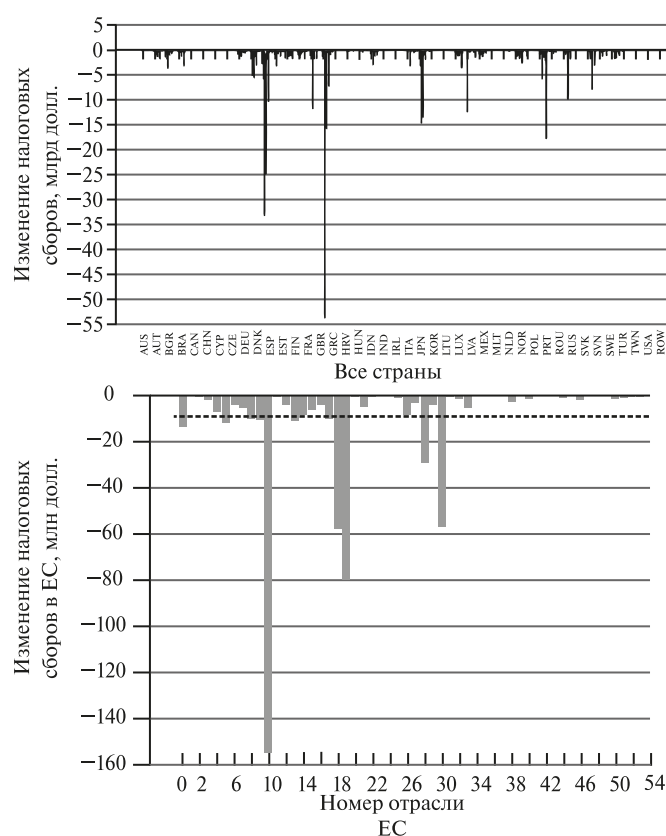


Рис. 4. Изменение налоговых сборов во всех странах и в ЕС, млрд долл.

Германию. В России выпуск снизился незначительно (на 3,242 тыс. долл.). Китайский выпуск увеличился на 70,551 млрд долл. У ряда стран пропадает необходимость производить те же объемы продукции в связи с падением необходимого экспорта. Отрасли Китая должны производить больше продукции, чтобы удовлетворить спрос России на конечное потребление, который раньше обеспечивался странами ЕС (см. рис. 3).

В нашем эксперименте производство по всем отраслям в России практически не изменилось. Значительное увеличение выпуска наблюдалось в Китае (см. рис. 3, Китай). Пунктирной линией обозначается среднее изменение выпуска по отраслям.

В Китае во всех отраслях значительно увеличился выпуск (рис. 4, Китай). В процентном выражении рост составил 0,222%. Пять отраслей Китая, в которых относительный рост превышает средние значения, например отрасль «27. Оптовая и розничная торговля и ремонт автотранспортных средств и мотоциклов», не располагают необходимыми производственными мощностями для обеспечения России импортом. Данные отрасли практически ничего не производили, а в новых условиях нагрузка на нихкратно возрастает. Этот сценарий может быть нереалистичен на практике, поскольку резкий рост выпуска сопряжен с большими издержками и системными изменениями. В предлагаемой модели нагрузка на китайские отрасли растет не только из-за появившихся потребностей российских отраслей, но также из-за возрастающей потребности китайских отраслей произвести необходимый объем продукции, чтобы поддерживать прежний уровень потребления.

Снижение производства наблюдается в ЕС по всем отраслям на 0,242%, что значительно больше потерь России от санкций (см. рис. 3, ЕС).

В мире налоговые сборы сократились на 533,954 млн долл. (–0,052%) (см. рис. 4). Во всех странах, особенно в ЕС, практически по всем отраслям они снизились. Большие потери понесли бюджеты Германии и Франции. Сравнительно меньшие потери по налогам обозначились

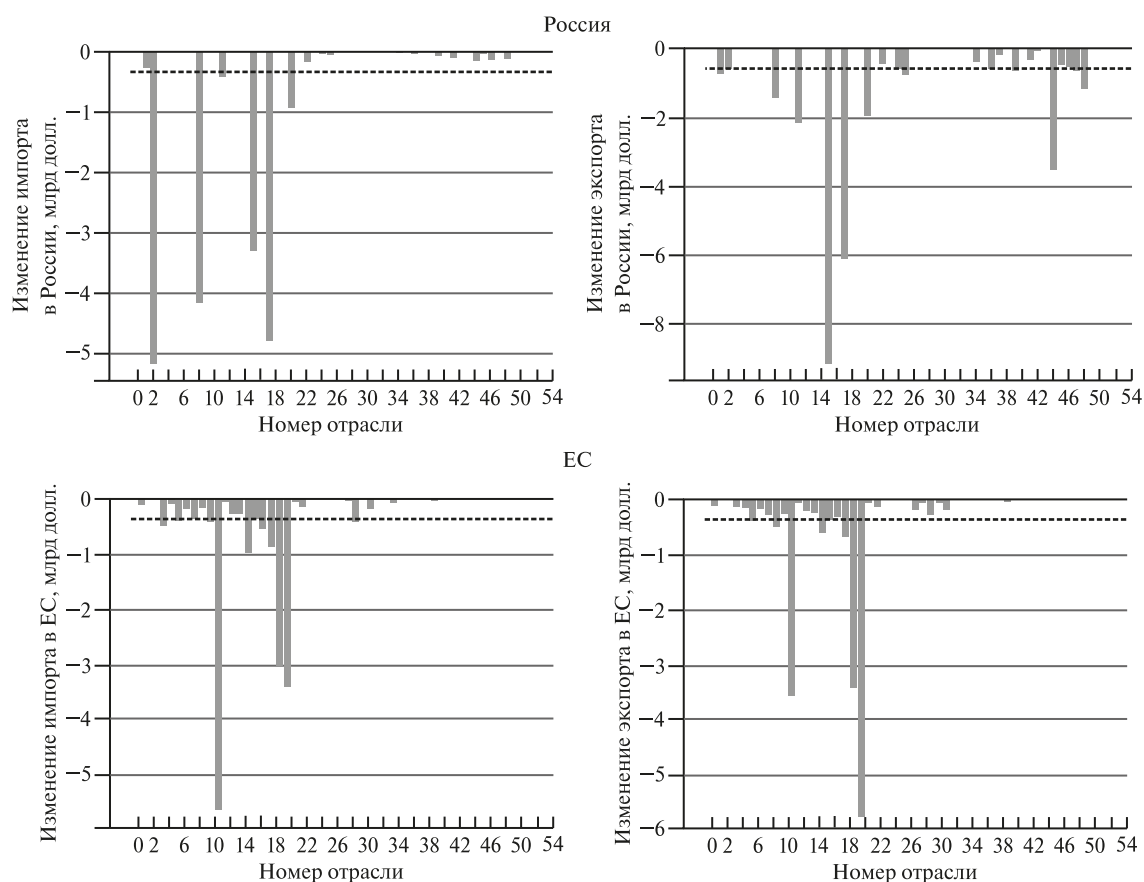


Рис. 5. Изменение импорта и экспорта в России и ЕС, млрд долл.

в бюджете России. Данные по налогам Китая в таблицах отсутствуют, поэтому на графике нет изменений по налоговым сборам Китая.

Налоговые сборы напрямую зависят от выпуска отраслей. Однако налоговая нагрузка по отраслям варьирует, поскольку некоторые отрасли могут получать больше субсидий или иметь меньшие налоговые ставки. В России значительного изменения налоговых сборов не наблюдалось (уменьшение на 0,15 тыс. долл.).

В ЕС снизились налоговые сборы на 545,08 млн долл. ($-0,131\%$) (см. рис. 4, ЕС). В абсолютном выражении потери ЕС значительно превышают потери России. Сокращение производства в разных отраслях не равноценно для бюджета, поскольку одни отрасли могут осуществлять больше налоговых выплат, чем другие, и падение производства в них более критично для государства, чем в других отраслях, которые могут потерять больше в объеме производства, но принести меньше средств в бюджет.

Импорт в России сократился на 20 млрд долл. ($-12,79\%$). Экспорт в России сократился на 32,635 млрд долл. ($-7,274\%$), что в процентном соотношении существенно больше потерь стран ЕС (рис. 5). В ЕС экспорт сократился на 0,466%, а импорт — на 0,538%.

На следующем шаге анализировалось поведение долгосрочных эффектов от импортозамещения, для чего был создан цикл, в котором конечное потребление подстраивается под изменение добавленной стоимости в каждой стране. Для определения наличия сходимости выпуска к постоянному равновесию было проведено 10 итераций и выявлено, что с каждой новой итерацией норма вектора приращения X стремится к константе.

Общий выпуск во всем мире увеличился на 0,355% по сравнению с выпуском до импортозамещения (рис. 6). Наибольший рост наблюдался в Китае, при этом в странах ЕС выпуск продолжал падать. Менее масштабное падение выпуска было в России. В долгосрочном периоде выпуск

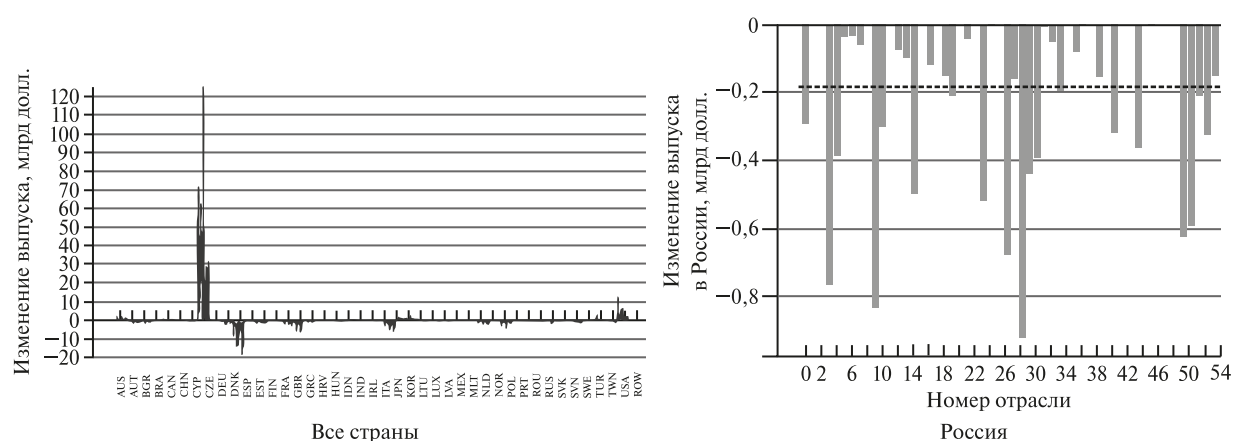


Рис. 6. Изменение выпуска в долгосрочном периоде, млрд долл.

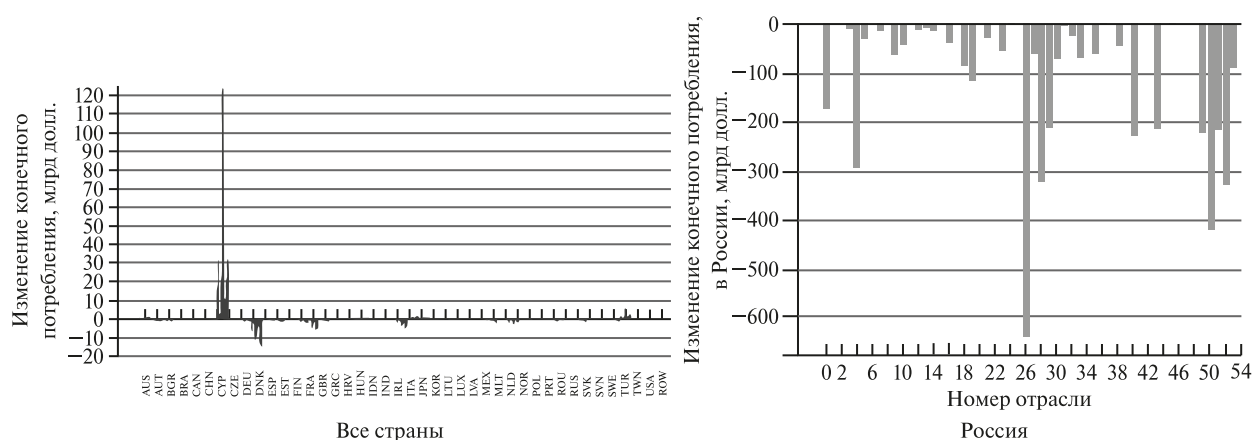


Рис. 7. Изменение конечного потребления в долгосрочном периоде, млрд долл.

снижался во всех странах, кроме Китая. Конечное потребление меняется вслед за добавленной стоимостью, которая, в свою очередь, зависит от выпуска. После прекращения торгового оборота ЕС с Россией европейским отраслям больше не надо выпускать столько же продукции, так как и другие отрасли ЕС не испытывают потребности в этой продукции. В то же время партнеры Китая, такие как Япония, Корея и Тайвань, также нарастили производство, чтобы обеспечивать возросший спрос. Общий выпуск в России сократился меньше, чем в среднем по миру, — на 10,097 млрд долл. (−0,299%) (см. рис. 6, Россия). В целом по миру конечное потребление снизилось на 0,119%. Падение выпуска было в странах ЕС, а рост — в Китае, Австралии, Японии, Корее и в «остальном мире» (рис. 7). В России снижение конечного потребления составило 4,212 млрд долл. (−0,294%) (рис. 7, Россия).

В большинстве стран, включая Россию, налоговые сборы снизились. В основном налоговые потери понесли страны ЕС, в которых снижение налоговых сборов составило 2,433% (рис. 8). Совокупное изменение налоговых сборов после зацикливания составило 10,462 млрд долл. (1,011%). Однако в этих данных исключается влияние Китая, в котором налоговые сборы предположительно должны увеличиться в соответствии с ростом выпуска. Во всех отраслях России налоговые сборы в долгосрочном периоде начали падать, особенно это коснулось отрасли «9. Производство кокса и нефтепродуктов». В России совокупное снижение налоговых сборов по отраслям составило 291,538 млн долл. (−0,32%), при этом импорт и экспорт сократились на 0,316% и 0,335% соответственно (рис. 9).

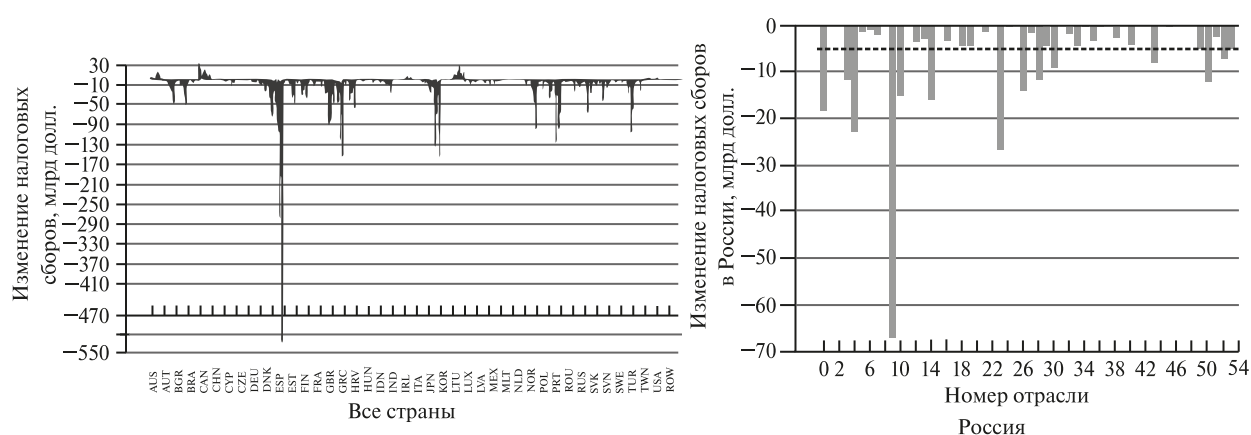


Рис. 8. Изменение налоговых сборов в долгосрочном периоде, млрд долл.

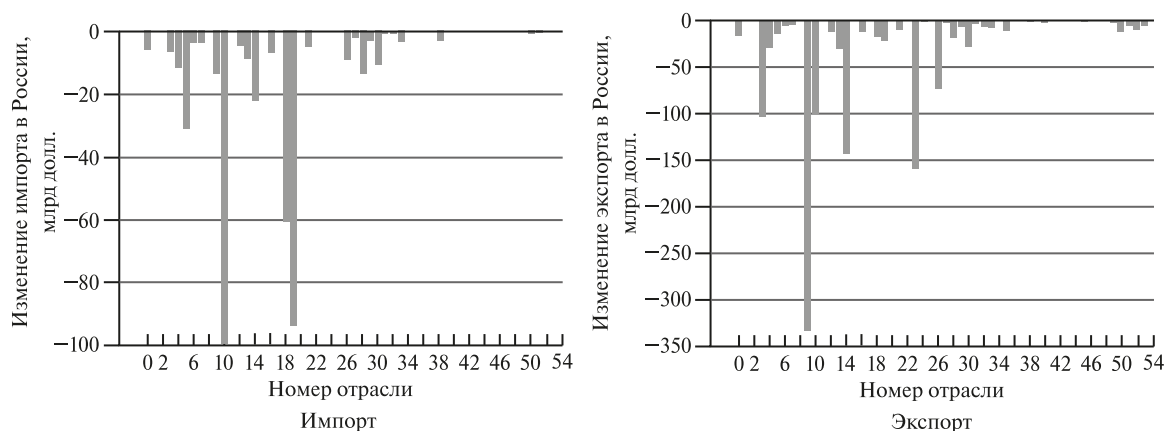


Рис. 9. Изменение импорта и экспорта России в долгосрочном периоде, млрд долл.

Эксперимент № 2

В этом эксперименте моделируется ситуация полного импортозамещения продукции всех отраслей ЕС за счет собственных отраслей России. После такого импортозамещения суммарный выпуск во всех странах снизился на 700 тыс. долл. (рис. 10). Аналогично предыдущему эксперименту, выпуск по странам приходит в баланс — сокращение выпуска в ЕС компенсируется ростом российского производства. В целом по ЕС валовой выпуск уменьшился также на 70,551 млрд долл. ($-0,242\%$). В России выпуск, напротив, вырос на сумму замещаемой продукции на 70,551 млрд долл. ($+2,087\%$).

В России производство всех отраслей увеличилось (рис. 10, Россия). Наибольший рост наблюдается в «19. Производство автотранспортных средств, прицепов и полуприцепов». Совокупный выпуск здесь возрос на 2,09%. Как минимум, шесть отраслей России могут испытывать значительные трудности с производством необходимого объема продукции (отрасли, где относительный прирост выше среднего), поскольку раньше они работали менее интенсивно. Маловероятно, что данные отрасли смогут производить нужное количество продукции для импортозамещения.

Отрасли ЕС сократили выпуск (рис. 10, ЕС) — спад производства составил 0,22%. Однако такое падение выпуска в денежном выражении может означать, что производство стало более эффективным, поскольку обеспечивает прежнее конечное потребление.

Налоговые сборы после проведения политики импортозамещения в России существенно возросли по сравнению с остальными странами (рис. 11); общий рост налоговых сборов на 0,139% «по странам в целом» произошел в основном за счет России. Во многих странах ЕС налоговые сборы снизились.

В ЕС налоговые сборы снизились на 545,08 млн долл. ($-0,131\%$) (рис. 11, ЕС). В России налоговые сборы увеличились на 1,973 млрд долл. ($+2,164\%$). Отрасли «10. Производство химикатов

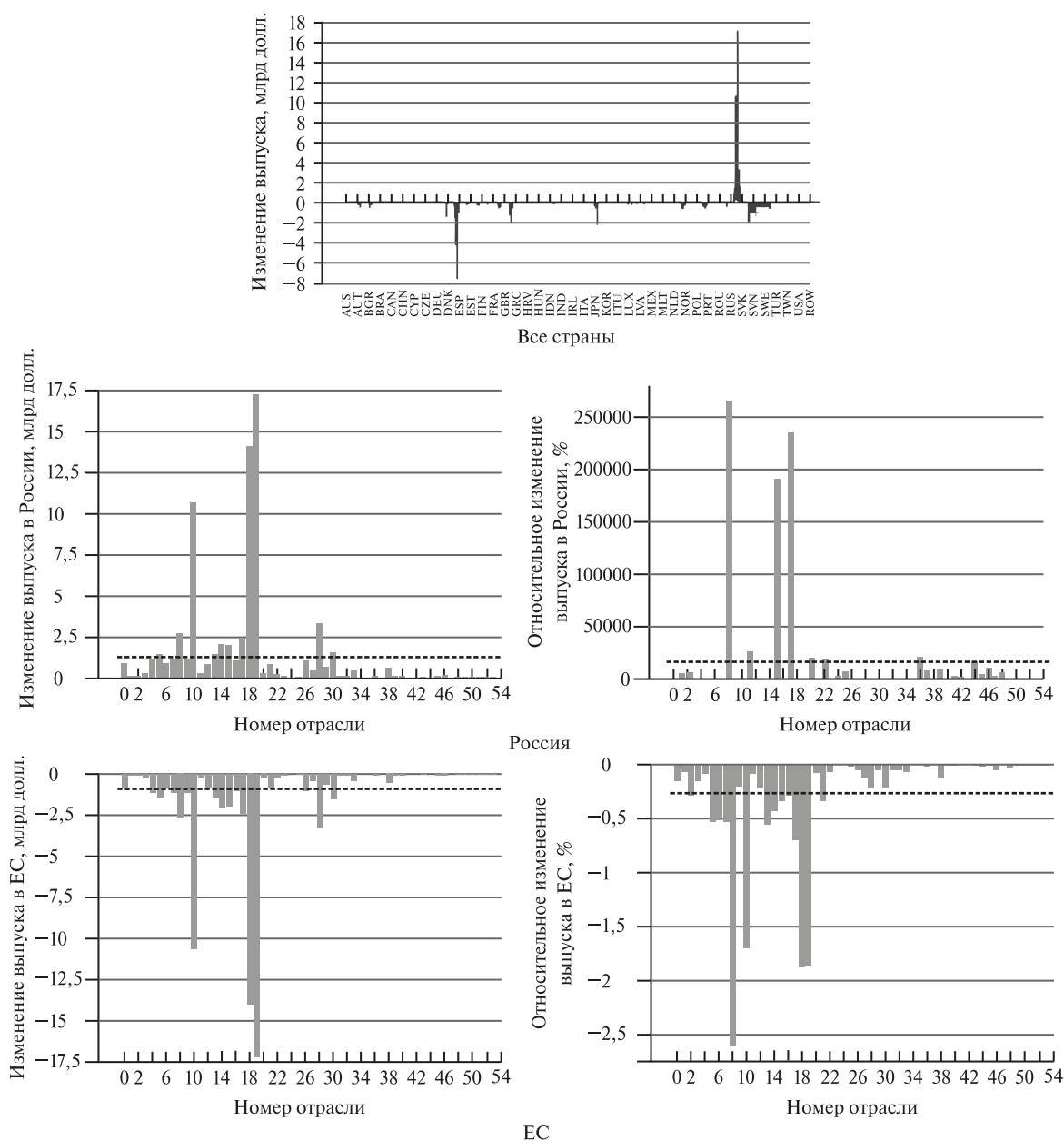


Рис. 10. Изменение производства в разных странах после импортозамещения, млрд долл.

и химических продуктов», «18. Производство машин и оборудования н.э.с.», «19. Производство автотранспортных средств, прицепов и полуприцепов» принесли бюджету наибольший прирост налоговых сборов (рис. 11, Россия). Они получают максимальный прирост производства от импортозамещения и при этом несут максимальную налоговую нагрузку. Государство может провести финансирование таких отраслей для притока налогов в бюджет. В обратной ситуации, зная потери от отраслей, государство имеет возможность инвестировать в отстающие и связанные с ними отрасли, чтобы увеличить выпуск и минимизировать убытки.

Россия после импортозамещения была вынуждена импортировать больше из других стран, поскольку отрасли «9. Производство кокса и нефтепродуктов», «15. Производство готовых металлических изделий, за исключением машин и оборудования» и «17. Производство электрооборудования» производили меньшие объемы продукции. Также возрастает экспортная нагрузка на данные отрасли (рис. 12). Для сохранения тех же пропорций импорта и экспорта перечисленные отрасли вынуждены

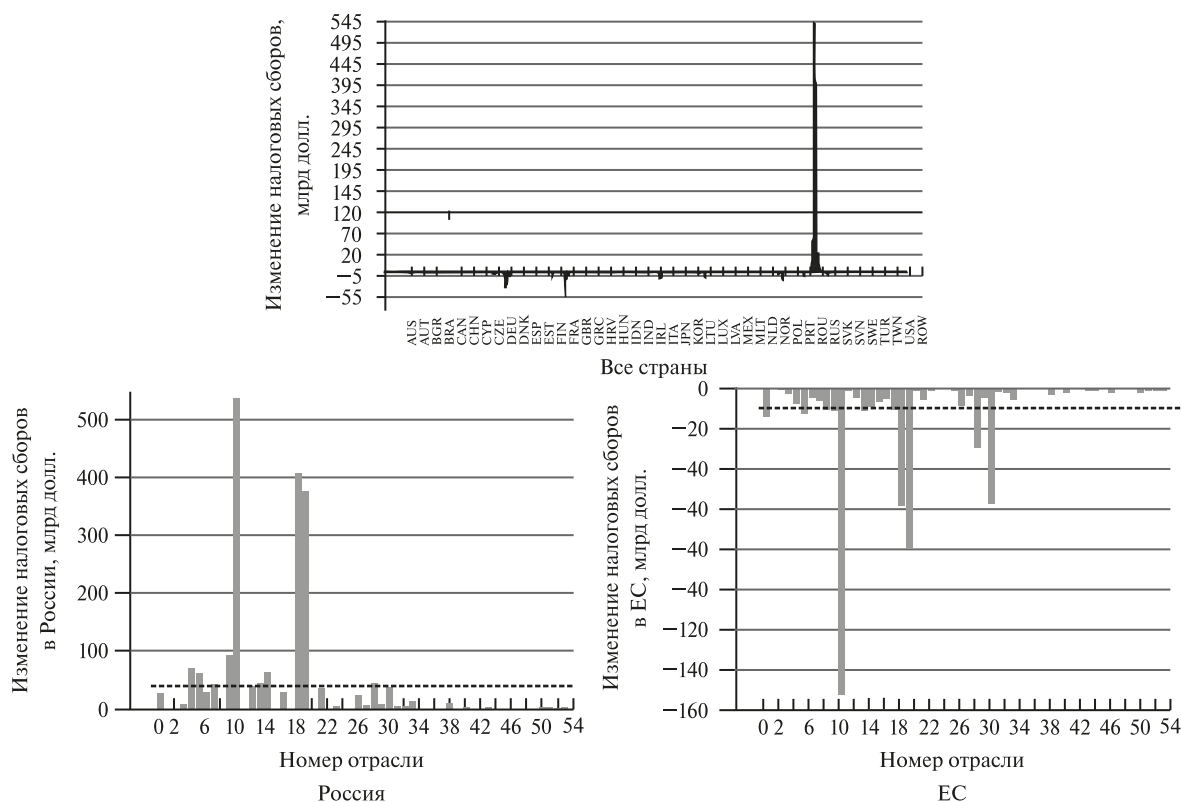


Рис. 11. Изменение налоговых сборов по странам после импортозамещения

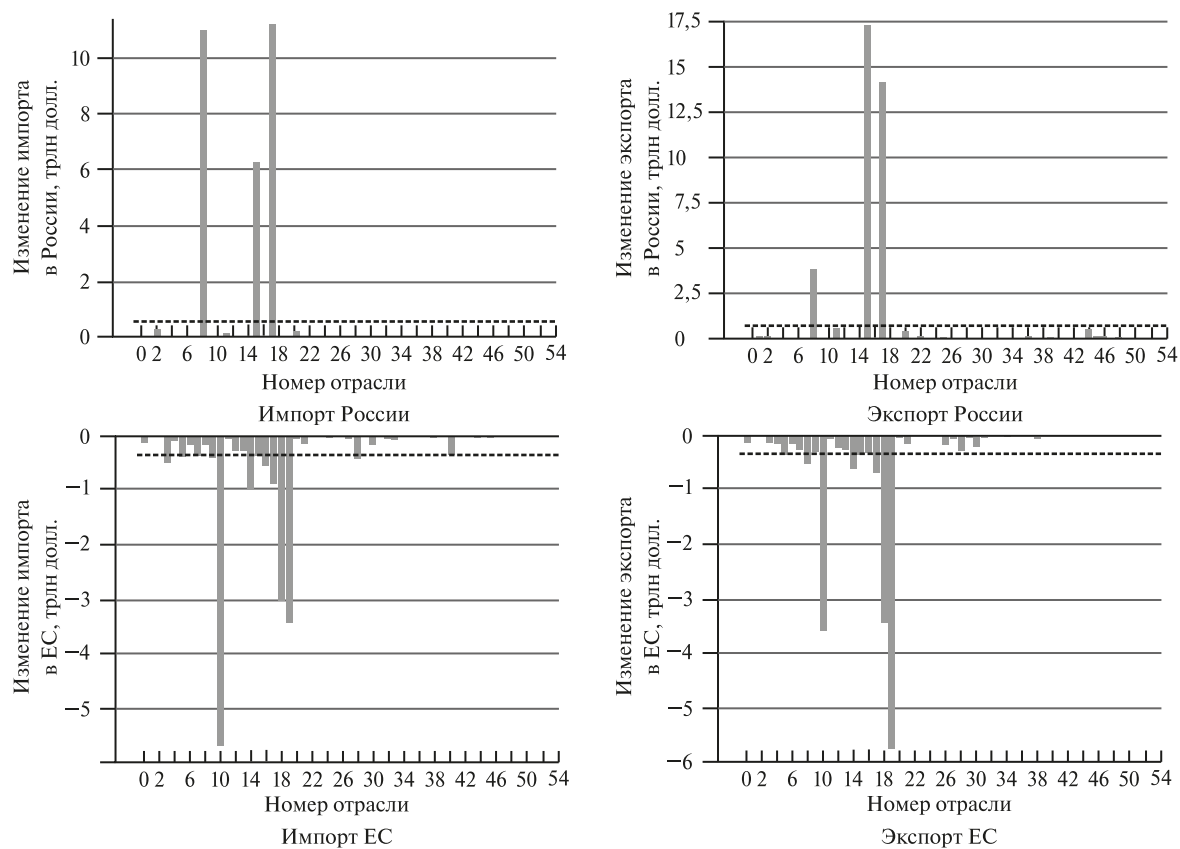


Рис. 12. Изменение импорта и экспорта в России и ЕС после импортозамещения

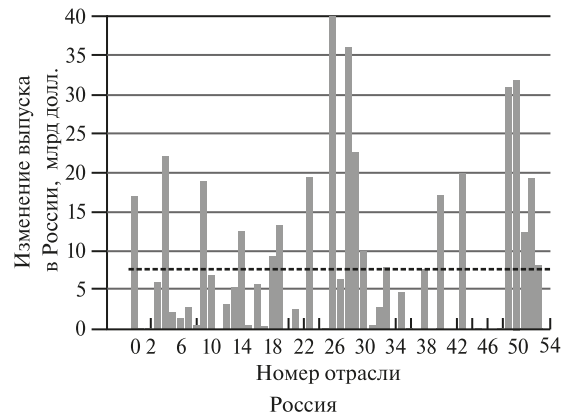


Рис. 13. Изменение выпуска в странах в долгосрочном периоде

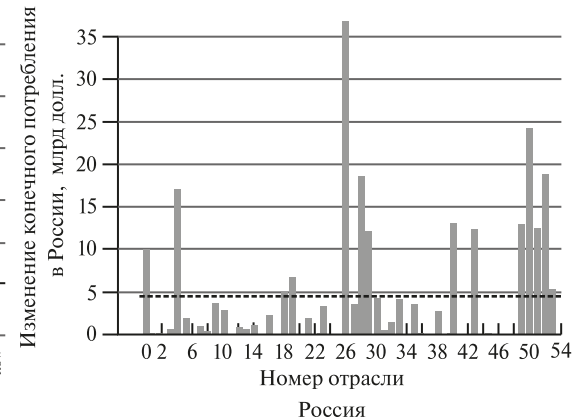


Рис. 14. Изменение конечного потребления в странах в долгосрочном периоде

находить дополнительные рынки сбыта, поскольку до импортозамещения у них не было потребности в таких объемах производства. Так, импорт в России повысился на 186%, а экспорт — на 83%.

В то же время для ЕС сокращение торгового баланса было несущественным. Импорт сократился всего на 0,491% (18,668 млрд долл.), а экспорт — на 0,478% (18,623 млрд долл.) (см. рис. 12).

Как и в предыдущем эксперименте, в долгосрочном периоде установилось равновесие. Производство во всем мире сократилось на 0,366% по сравнению с ситуацией до импортозамещения (рис. 13). Практически во всех странах, особенно в Германии и в остальном мире, выпуск уменьшился. Российские отрасли значительно увеличили объемы производства. В данном эксперименте в долгосрочном периоде снижается выпуск практически во всех странах, в том числе в Китае и США, поскольку ЕС перестает закупать у этих стран продукцию, необходимую для обеспечения импорта России. В долгосрочном периоде импортозамещение положительно повлияло на российскую экономику. Общий выпуск увеличился на 424,681 млрд долл. (+12,304%) (рис. 13, Россия).

Конечное потребление во всех странах, кроме России, сократилось. Общее снижение конечного потребления в относительном выражении по всем странам составило 0,429%. Наибольшее сокращение конечного потребления наблюдалось в Германии, Франции, Италии, США и «остальном мире» (рис. 14). В России рост конечного потребления составил 240,695 млрд долл. (+16,818%) (рис. 14. Россия).

Налоговые сборы сократились также во всех странах, за исключением России (рис. 15). Общее падение налоговых сборов в мире составило 1,036 млрд долл. ($-0,1\%$). Наибольший рост налоговых сборов в России наблюдался в отрасли «9. Производство кокса и нефтепродуктов». Совокупное

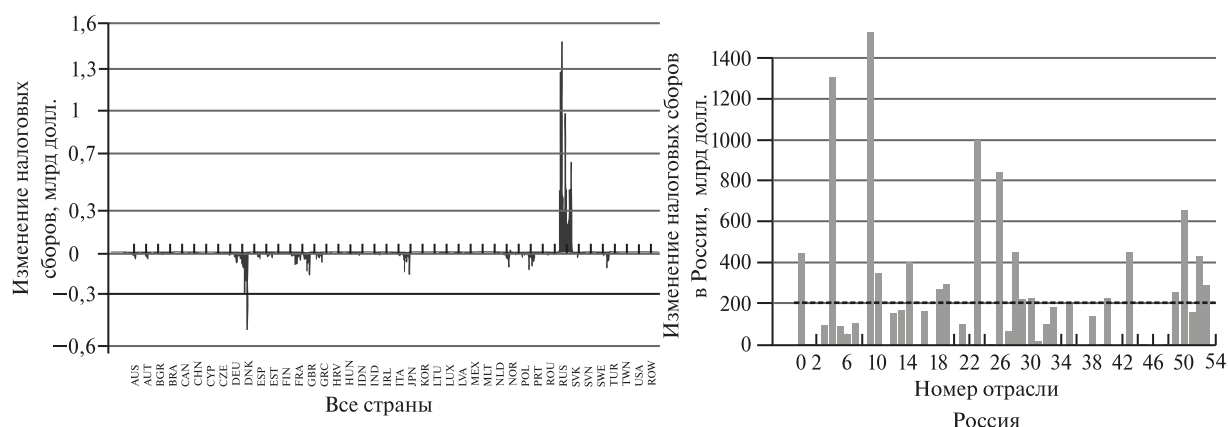


Рис. 15. Изменение налоговых сборов во всех странах в долгосрочном периоде

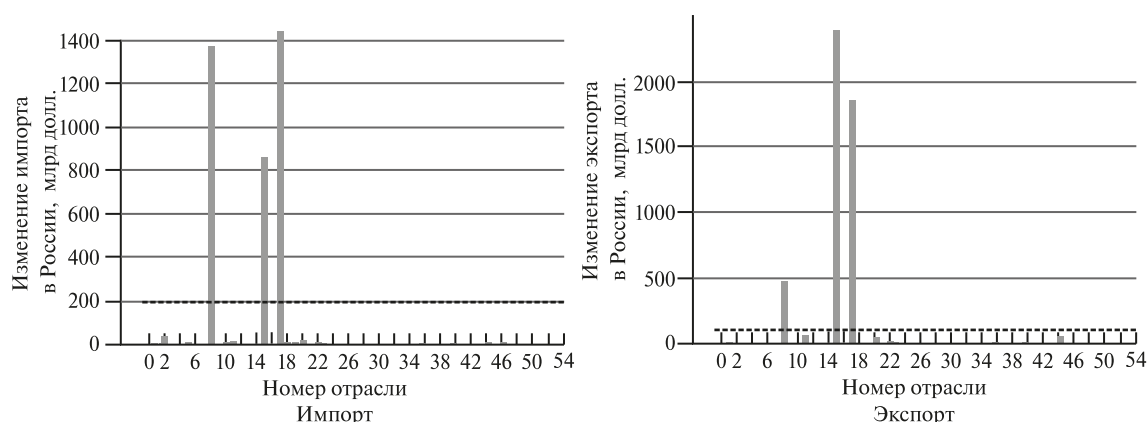


Рис. 16. Изменение импорта и экспорта в России в долгосрочном периоде

увеличение налоговых сборов в России составило 11,31 млрд долл. (+12,143%). Импорт и экспорт в России в долгосрочном периоде возросли соответственно на 12,896% и 13,123% (рис. 16).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе двух экспериментов были оценены эффекты от импортозамещения в разрезе отраслей по основным макроэкономическим показателям. В эксперименте 1 весь импорт России из всех отраслей ЕС был перемещен в Китай, а во втором — весь импорт из ЕС был замещен за счет собственных производств России. Результаты экспериментов приведены в таблице.

Результаты моделирования показали, что импортозамещение одних и тех же отраслей на одну и ту же сумму в двух разных экспериментах дает различные эффекты по всем макроэкономическим показателям. Уровень выпуска в случае эксперимента 2 падает во всем мире, но растет в России, в то время как в эксперименте 1 обратная ситуация — падение выпуска в России и рост в Китае. В обоих случаях ЕС несет потери как по выпуску, так по налоговым сборам и конечному потреблению. Преимуществом по всем показателям для России обладает политика эксперимента 2, поскольку так обеспечивается максимальный приток капитала в страну и больший выигрыш с точки зрения производства и конечного потребления в долгосрочном периоде.

Таким образом, с помощью предложенного алгоритма оценивания последствий импортозамещения в глобальной экономике для макроэкономических показателей страны (выпуск, налоговые сборы и конечное потребление по отраслям) возможно помочь государственным органам

Таблица. Изменения макроэкономических показателей в ходе двух экспериментов, млн долл.

Показатель	Эксперимент № 1		Эксперимент № 2	
	Замещение	Защипливание	Замещение	Защипливание
Совокупное изменение валового выпуска	0,019	571 990	–0,7	–591 048
Изменение валового выпуска в России	–0,003	–10 097	70 550	424 681
Изменение валового выпуска в ЕС	–70 551	–693 383	–70 551	–760 054
Совокупное изменение налоговых сборов	–534	–10 462	1439	–1036
Изменение налоговых сборов в России	–0,0001	–292	1973	11 310
Изменение налоговых сборов в ЕС	–545	–10 018	–545	–10 922
Изменение импорта в России	–20 000	–430	29 076 082	3 769 921
Изменение экспорта в России	–32 636	–1 395	37 303 849	4 954 293
Изменение конечного потребления в России	0	–4 212	0	240 695

в принятии решений относительно инвестиционной и регулирующей политики в России. Это особенно актуально в периоды суровых ограничений и торговых войн, вызывающих ситуацию нестабильности и неопределенности. Данная методика позволяет рассмотреть приблизительные результаты решений на государственном уровне.

В статье продемонстрировано, что импортозамещение в отраслях ведет к неочевидным последствиям в различных странах и отраслях при разных обстоятельствах, поскольку взаимная зависимость отраслей проявляется в мультипликативном изменении производства после корректировок структуры выпуска и потребления. Было показано, что технически наложение санкций со стороны Евросоюза на импорт в Россию может незначительно ухудшить ее экономическое положение (или стимулировать внутренний выпуск). Такая политика может привести к более негативным последствиям для стран ЕС, поскольку отказ от налаженного взаимовыгодного сотрудничества создает организационные проблемы обеим сторонам.

Большой выпуск требует больших производственных возможностей, что может наложить дополнительные ограничения на модель в виде финансовой составляющей и трудовых ресурсов. Рост выпуска без соответствующего повышения производительных сил может привести к сильному росту цен.

В модели не учитывается качество импортозамещаемой продукции, поскольку этот вопрос выходит за рамки исследования. В дальнейшем авторы планируют совершенствовать модель и включить в нее такие ограничения, как цены на продукцию, финансовые и трудовые ресурсы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Обозначения стран, принятые на рисунках

Обозначение	Страна	Обозначение	Страна
AUS	Австралия	IRL	Ирландия
AUT	Австрия	ITA	Италия
BEL	Бельгия	JPN	Япония
BGR	Болгария	KOR	Корея
BRA	Бразилия	LTU	Литва
CAN	Канада	LUX	Люксембург
CHE	Швейцария	LVA	Латвия
CHN	Китай	MEX	Мексика
CYP	Кипр	MLT	Мальта
CZE	Чехия	NLD	Нидерланды
DEU	Германия	NOR	Норвегия
DNK	Дания	POL	Польша

Обозначение	Страна	Обозначение	Страна
ESP	Испания	PRT	Португалия
EST	Эстония	ROU	Румыния
FIN	Финляндия	RUS	Россия
FRA	Франция	SVK	Словакия
GBR	Великобритания	SVN	Словения
GRC	Греция	SWE	Швеция
HRV	Хорватия	TUR	Турция
HUN	Венгрия	TWN	Тайвань
IDN	Индонезия	USA	США
IND	Индия	ROW	Остальной мир

2. Отрасли в соответствии с их номерами

№	Название отрасли	№	Название отрасли
0	Растениеводство и животноводство, охота и связанная с ними сервисная деятельность	28	Оптовая торговля, за исключением автотранспортных средств и мотоциклов
1	Лесоводство и лесозаготовки	29	Розничная торговля, за исключением автотранспортных средств и мотоциклов
2	Рыболовство и аквакультура	30	Наземный транспорт и транспортировка по трубопроводам
3	Добыча полезных ископаемых и разработка карьеров	31	Водный транспорт
4	Производство пищевых продуктов, напитков и табачных изделий	32	Воздушный транспорт
5	Производство текстиля, носильной одежды и изделий из кожи	33	Складирование и вспомогательные мероприятия для транспортировки
6	Производство древесины и изделий из дерева и пробки, за исключением мебели; производство изделий из соломы и материалов для плетения	34	Почтовая и курьерская деятельность
7	Производство бумаги и бумажных изделий	35	Деятельность по размещению и питанию
8	Печать и воспроизведение записанных носителей	36	Издательская деятельность
9	Производство кокса и нефтепродуктов	37	Деятельность по производству кинофильмов, видео- и телевизионных программ, звукозаписи и изданию музыки; деятельность по программированию и радиовещанию
10	Производство химикатов и химических продуктов	38	Телекоммуникации
11	Производство основных фармацевтических продуктов и фармацевтических препаратов	39	Компьютерное программирование, консультации и связанная с ними деятельность; деятельность по информационному обслуживанию
12	Производство резиновых и пластмассовых изделий	40	Деятельность по предоставлению финансовых услуг, за исключением страхования и пенсионного финансирования
13	Производство прочих неметаллических минеральных продуктов	41	Страхование, перестрахование и пенсионное обеспечение, за исключением обязательного социального страхования
14	Производство основных металлов	42	Деятельность, вспомогательная к финансовым услугам и страховой деятельности
15	Производство готовых металлических изделий, за исключением машин и оборудования	43	Деятельность в сфере недвижимости
16	Производство компьютерной, электронной и оптической продукции	44	Юридическая и бухгалтерская деятельность; деятельность головных офисов; консультационная деятельность по вопросам управления
17	Производство электрооборудования	45	Архитектурная и инженерная деятельность; техническое тестирование и анализ
18	Производство машин и оборудования н.э.с.	46	Научные исследования и разработки

№	Название отрасли	№	Название отрасли
19	Производство автотранспортных средств, прицепов и полуприцепов	47	Реклама и маркетинговые исследования
20	Производство другого транспортного оборудования	48	Другая профессиональная, научная и техническая деятельность; ветеринарная деятельность
21	Производство мебели; другое производство	49	Деятельность административного и вспомогательного обслуживания
22	Ремонт и установка машин и оборудования	50	Государственное управление и оборона; обязательное социальное обеспечение
23	Подача электричества, газа, пара и кондиционирования воздуха	51	Образование
24	Сбор, очистка и подача воды	52	Деятельность в области здравоохранения и социальной работы
25	Канализация; деятельность по сбору, обработке и удалению отходов; рекуперация материалов; мероприятия по рекультивации и другие услуги по обращению с отходами	53	Другие виды деятельности по оказанию услуг
26	Строительство	54	Деятельность домашних хозяйств в качестве работодателей; недифференцированная деятельность домашних хозяйств по производству товаров и услуг для собственного использования
27	Оптовая и розничная торговля и ремонт автотранспортных средств и мотоциклов	55	Деятельность экстерриториальных организаций и органов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Ажекбаров К.А., Абдувайтов Э.Ч.** (2020). Экономические санкции ЕС против России и их последствия // *Путеводитель предпринимателя*. № 13 (1). С. 23–31. [**Azhekbarmov K.A., Abduvaitov E.Ch.** (2020). EU economic sanctions against Russia and their consequences. *Entrepreneur's Guide*, 13 (1), 23–31 (in Russian).]
- Ахмадеев Б.А., Моисеев Н.А.** (2017). Метод расчета коэффициента влияния отрасли на экономику // *Аудит и финансовый анализ*. № 1. С. 69–73. [**Akhmadeev B.A., Moiseev N.A.** (2017). Method of calculating the coefficient of the industry's influence on the economy. *Audit and Financial Analysis*, 1, 69–73 (in Russian).]
- Баранов А.О., Гореев А.В.** (2019). Оценка влияния национальных проектов на развитие экономики России с использованием динамической межотраслевой модели // *ЭКО*. № 10 (544). С. 94–114. [**Baranov A.O., Goreyev A.V.** (2019). Assessment of the impact of national projects on the development of the Russian economy using a dynamic intersectoral model. *ECO*, 10 (544), 94–114 (in Russian).]
- Барковский А.Н., Алабян С.С., Морозенкова О.В.** (2015). Последствия западных санкций и ответных санкций РФ // *Российский внешнеэкономический вестник*. № 9. С. 3–7. [**Barkovsky A.N., Alabyan S.S., Morozenkova O.V.** (2015). Consequences of Western sanctions and retaliatory sanctions of the Russian Federation. *Russian Foreign Economic Journal*, 9, 3–7 (in Russian).]
- Головин А.А., Головин А.А., Пархомчук М.А.** (2018). Последствия мировых экономических санкций для национальной экономики России // *Фундаментальные исследования*. № 11 (2). С. 216–221. [**Golovin A.A., Golovin A.A., Parkhomchuk M.A.** (2018). The consequences of world economic sanctions for the national economy of Russia. *Fundamental Research*, 11–2, 216–221 (in Russian).]
- Долматова В.Ю., Безуглова М.Н., Салман О.Ф.** (2020). Влияние антироссийских санкций на экономику Российской Федерации // *Государственное и муниципальное управление. Ученые записки*. № 2. С. 130–134. [**Dolmatova V.Yu., Bezuglova M.N., Salman O.F.** (2020). The impact of anti-Russian sanctions on the economy of the Russian Federation. *State and Municipal Administration. Scientific Notes*, 2, 130–134 (in Russian).]
- Калинин А.М., Коротеев С.С., Крупин А.А., Нефедов А.В.** (2021). Технологическая импортозависимость российской экономики: оценка с использованием таблиц «затраты–выпуск» // *Проблемы прогнозирования*. № 1 (184). С. 83–93. [**Kalinin A.M., Koroteev S.S., Krupin A.A., Nefedov A.V.** (2021). Technological import dependence of the Russian economy: Assessment using input–output tables. *Studies on Russian Economic Development*, 1 (184), 83–93 (in Russian).]
- Кейнс М.Дж.** (1936). Общая теория занятости, процента и денег (general theory of employment, interest and money). М.: Гелиос АРВ. [**Keynes M.J.** (1936). *The general theory of employment, interest and money*. Moscow: Helios ARV (in Russian).]
- Моисеев Н.А., Ахмадеев Б.А.** (2021). Алгоритм оценки импортозамещения на основе таблиц затрат — выпуска // *Вестник РЭА им. Г.В. Плеханова*. № 3 (117). С. 117–129. [**Moiseev N.A., Akhmadeev B.A.** (2021). An

- algorithm for assessing import substitution based on input-output tables. *Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics*, 3 (117), 117–129 (in Russian).]
- Серебряков Г.Р.** (2000). Опыт построения динамической межотраслевой равновесной модели российской экономики // *Проблемы прогнозирования*. № 2. С. 1–17. [**Serebryakov G.R.** (2000). The experience of constructing a dynamic intersectoral equilibrium model of the Russian economy. *Studies on Russian Economic Development*, 2, 1–17 (in Russian).]
- Симачев Ю., Кузык М., Зудин Н.** (2016). Импортозависимость и импортозамещение в российской обрабатывающей промышленности: взгляд бизнеса // *Форсайт*. № 4. С. 25–45. [**Simachev Y., Kuzyk M., Zudin N.** (2016). Import dependence and import substitution in Russian manufacturing: A business viewpoint. *Foresight*, 4, 25–45.
- Широв А.А., Янтовский А.А.** (2017). Межотраслевая макроэкономическая модель rim — развитие инструментария в современных экономических условиях // *Проблемы прогнозирования*. № 3. С. 3–18. [**Shirov A.A., Yantovsky A.A.** (2017). Intersectoral macroeconomic model rim — development of tools in modern economic conditions. *Studies on Russian Economic Development*, 3, 3–18 (in Russian).]
- Юньюшкина А.С., Шаповалова К.А., Каткова Е.Ю.** (2021) Торговая война США с Китаем как попытка вернуть глобальное лидерство // *Международные отношения*. № 2. С. 55–68. [**Yunushkina A.S., Shapovalova K.A., Katkova E.Yu.** (2021). The US trade war with China as an attempt to regain global leadership. *International Relations*, 2, 55–68 (in Russian).]
- Chen Q., Zhu K., Liu P., Chen X., Tian K., Yang L., Yang C.** (2018). Distinguishing China's processing trade in the world input-output table and quantifying its effects. *Economic Systems Research*, 31, 1–21.
- Hong J., Byun J.E., Kim P.** (2016). Structural changes and growth factors of the ICT industry in Korea. *Telecommunications Policy*, 40, 502–513.
- Lin H.C., Hsu S.H., Liou R.W., Chang C.C.** (2016). A value-added analysis of trade in Taiwan and Korea's ICT industries. *Journal of Korea Trade*, 20, 47–73.
- Luchinkin M.** (2021). Protectionism and import substitution as part of the national policy of socio-economic and scientific-technological development. *German International Journal of Modern Science*, 22, 12–20.
- Mori T., Sasaki H.** (2007). Interdependence of production and income in Asia-Pacific economies: An international input-output approach. *Bank of Japan Working Paper Series*, 26 (7), 1–29.
- Timmer M.P., Dietzenbacher E., Los B., Stehrer R., Vries G.J. de** (2015). An illustrated user guide to the world input-output database: The case of global automotive production. *Review of International Economics*, 23, 575–605.

Evaluation of the effects from various ways of import substitution “input–output” method: Evidence from the Russian Federation

© 2023 N.A. Moiseev, I.A. Vnukov, P.O. Sokerin

N.A. Moiseev,

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia; e-mail: moiseev.na@rea.ru

I.A. Vnukov,

HSE University, Moscow, Russia; e-mail: jvnukov@yandex.ru

P.O. Sokerin,

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia; e-mail: sokerinpo@mail.ru

Received 30.10.2022

The work was carried out within the framework of the project of the Russian Science Foundation (project 22-78-10150) (“Development of a system for assessing and optimal planning of the implementation of state economic projects in conditions of geopolitical risks”).

Abstract. The article is devoted to the issue of assessing the economic effects of import substitution to determine the consequences of investment decisions at the state level in the context of geopolitical risks. Due to a number of economic restrictions on the part of Western countries, the problem of replacing those types of products for which trade turnover were suspended particularly acute. In the conditions of a dramatic shock reduction of supply in the markets of many industries, with the level of demand remaining, there is a need for emergent reorientation of domestic production. Public investments should take into account the multiplier effect caused by the impact of each industry’s output on each other. The paper proposes methodology for constructing a theoretical model of global interaction of countries based on input–output tables that take into account the production needs of each industry in the production of other industries and the multiplicative effect. Two experiments, the impact on the economies of all the countries of termination of trade between Russia and the European Union in a number of industries with subsequent measures were carried out: the replacement of European products with goods and services through China as well as its import substitution at the expense of Russia’s own product facilities. The consequences of two scenarios of changes in output, tax charges, imports and exports of Russia and the EU are estimated; long-term effects are predicted. The practical significance of this work consists in helping to make managerial decisions at the state level in financing certain sectors of the Russian economy.

Keywords: import substitution, input-output tables, multiplier, intersectoral balance, investment assessment, modeling.

JEL Classification: C21, C54, C67.

For reference: **Moiseev N.A., Vnukov I.A., Sokerin P.O.** (2023). Evaluation of the effects from various ways of import substitution “input–output” method: Evidence from the Russian Federation. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 30–47. DOI: 10.31857/S042473880024869-4

ОТРАСЛЕВЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Нефть в эпоху коронавируса: истерия или закономерное падение рынка?

© 2023 А.Н. Непп, А.С. Зыков, Ю.В. Егорова

А.Н. Непп,

Уральский федеральный университет, Екатеринбург; email: anep@inbox.ru

А.С. Зыков,

Уральский федеральный университет, Екатеринбург; email: alexandr.zykov.basic@gmail.com

Ю.В. Егорова,

Уральский федеральный университет, Уфимский государственный авиационный технический университет, Екатеринбург; email: jvegorova@mail.ru

Поступила в редакцию 08.10.2022

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта (проект 20-04-60158).

Авторы благодарят О. Охрина, И. Охрину и З. Джураеву за ценные комментарии. Также благодарят за критику, замечания и предложения участников XXII Апрельской конференции ВШЭ (2021), IV Российского экономического конгресса (2020), 43–45 заседания Школы-семинара им. С.С. Шаталина (2020, 2021, 2022) и конференции Future Outlook of Oil Market and Fiscal Stability (2021). Авторы выражают признательность рецензенту за высказанные рекомендации, время и труд, потраченные на нашу статью.

Аннотация. В работе рассматривается влияние пандемии и внимания к ней на падение цен на нефть в начале 2020 г. Используя модели временных рядов, мы проверяем, что способствовало такому падению в большей мере — непосредственно сам коронавирус либо интерес к нему в социальных сетях и интернет-поисковиках. Мы показываем отсутствие прямых влияний со стороны COVID-19 на рынок нефти и обнаруживаем значимые отрицательные последствия для рынка нефти в результате внимания в сети Интернет и интернет-поисковиках к COVID-19. Также исследуется роль ОПЕК в смягчении негативного воздействия коронавируса и внимания к нему: после саммита внимание к коронавирусу в сети Интернет и активность интернет-запросов в большинстве случаев перестали создавать эффекты. Наша работа может представлять интерес для исследователей поведенческих финансов, а также для анализа влияния информационных шоков на рынки, в частности на рынок нефти и оценки влияния коронавируса на экономику, равно как и для регуляторов и непосредственных участников данных рынков.

Ключевые слова: цены на нефть марки Brent, COVID-19, истерия, паника, Google, ОПЕК.

Классификация JEL: G10, G15, G40.

Для цитирования: Непп А.Н., Зыков А.С., Егорова Ю.В. (2023). Нефть в эпоху коронавируса: истерия или закономерное падение рынка? // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 48–64. DOI: 10.31857/S042473880024876-2

ВВЕДЕНИЕ

Нефтяная отрасль является бюджетообразующей для российской экономики, а сама нефть, наряду с газом, выступает важным фактором производства для мировой экономики. Рынок нефти влияет на инфляцию и ряд других макроэкономических показателей многих стран, что делает нефть важным товаром не только на мировом рынке, но и в геополитике в целом (Stevens, 2018). Роль нефтедобывающей отрасли для российской и мировой экономик обосновала выбор цен на нефть в качестве объекта нашего исследования.

Рынок нефти, начиная с 2020 г., испытывает значительные деформации, что выражается в существенном росте его волатильности (рис. 1). Основные причины неопределенности в 2022 г. эксперты связывают с завершением сделки ОПЕК+ в сентябре 2022 г. и санкциями в отношении экспорта российской нефти и нефтепродуктов, их масштабами и периодом действия (см. например, (Каукин, Миллер, 2022)). В 2022 г., как демонстрирует рис. 1, наблюдается повышенная волатильность относительно 2019 г. при более высоком уровне цен. В 2020–2021 гг. ситуация была иной: в начале пандемии мы наблюдаем резкий взлет волатильности при значительном падении

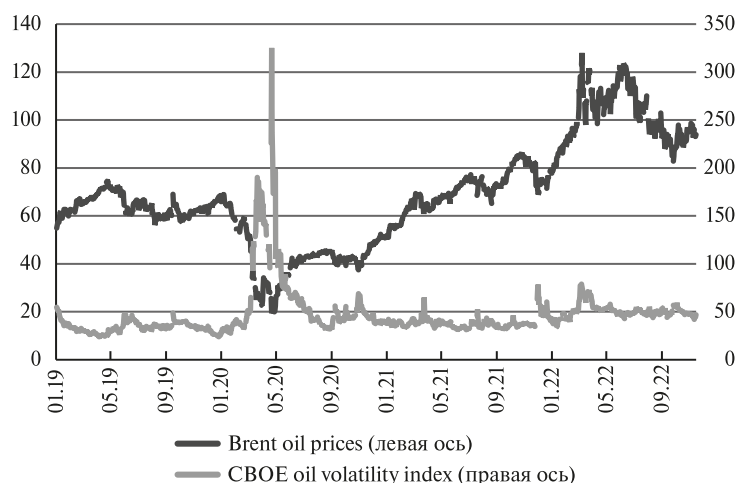


Рис. 1. Динамика цен на нефть марки Brent (USD за баррель) и их волатильность в период с 01.01.2019 до 15.11.2022

Примечание. Индекс CBOE представляет собой оценку ожидаемой 30-дневной волатильности сырой нефти по цене Нефтяного фонда США, рассчитывается компанией CBOE Global Markets, ведущим поставщиком информации по финансовым и товарным рынкам. Режим доступа: <https://www.cboe.com/us/indices/dashboard/ovx/>. Дата доступа: 17.11.2022.

Источник: Investing.com.

цен на нефть. Именно это стало мотивацией формирования исследуемой базы данных для периода с 30.12.2019 по 30.04.2020 в условиях первой волны COVID-19 и наиболее активного распространения новостей о нем.

С появлением и развитием пандемии коронавируса многие рынки испытали падение. Снижение показали, как компании, так и фондовые индексы — данное явление связывали с финансовым кризисом (Kawa, 2020), паническими продажами активов (Liu, 2020) и большими потерями (Culpr, 2020). Тем не менее, один из самых ярких примеров падения на фоне коронавируса — рынок нефти. Именно цены на нефть показали драматичное снижение в феврале—марте 2020 г.¹ (рис. 1), когда вирус выбрался за пределы китайского Уханя и начал распространяться в других регионах мира. Опасения, а затем и реальные угрозы остановки многих мировых производств привели к падению поставок нефти, а затем и к беспрецедентным решениям снижения добычи по ОПЕК. Все это сопровождалось падением котировок цен на нефть.

Влияние тех или иных детерминант на рынок нефти широко исследовалось в экономической литературе. Было обосновано воздействие на рынок нефти со стороны факторов, характеризующих или влияющих на экономическую активность и энергопотребление (Dbouk, Jamali, 2018; Варшавский, 2009; Aloui, Aïssa, 2016); показаны возможные воздействия на рынок нефти со стороны цен на золото (Pindyck, Rotemberg, 1988), фондовых (Samanta, Zaden, 2012) и валютных рынков (Malliaris A., Malliaris M., 2013; Aloui, Aïssa, 2016).

Тем не менее, связано ли падение цен на нефть в начале 2020 г. с уже исследованными детерминантами? Может ли быть падение цен объяснено фундаментальными факторами (ростом заболеваемости и, как следствие, остановкой многих отраслей при падении спроса на топливо) или также является следствием повышенного внимания к коронавирусу и связанных с этим панических настроений? А может, ни сам коронавирус, ни интерес к нему не воздействуют на нефть? Поиск ответа на эти вопросы стал мотивом нашего исследования.

Тема влияния заболеваний на экономику уже не раз интересовала ученых: существуют работы, посвященные влиянию чумы (Maur, 1995; Welford, 2018; Alfani, Percoco, 2019), тифа (Lebrun, 1980; Watanabe, 2002; Drali, Brouqui, Raoult, 2014), туберкулеза (Nor et al., 2015), а также гриппа (Johnson, Mueller, 2002; McLafferty, 2010), в которых продемонстрировано негативное влияние

¹ Oil plunges 24% for worst day since 1991, hits multi-year low after OPEC deal failure sparks price war. CNBC. 8th March, 2020 (<https://www.cnbc.com/2020/03/08/oil-plummets-30percent-as-opec-deal-failure-sparks-price-war-fears.html>).

данных заболеваний на экономику. Также появились исследования влияния коронавируса на экономику: показаны негативные давления на инфляционные ожидания и ожидаемую безработицу (Binder, 2020), фондовые рынки (Alber, 2020; Schoenfeld, 2020; Sansa, 2020), на ВВП и торговлю (McKibbin, Fernando, 2020).

Распространение болезней воспринимается населением и рынками как шок и может драматически воздействовать на рынки через изменение настроения инвесторов и экономических агентов (Bondt, Thaler, 1987). В ряде случаев такое влияние может пересилить рациональное мышление (DellaVigna, 2009). Подобные события могут вызвать истерию на рынках, распространяющуюся подобно заболеванию (Maskay, 1841; Bon, 1895; Gehlen, 1977). Все это может негативно влиять на рынки, например, приводить к массовым убыткам у инвесторов (Kyle, Xiong, 2001).

В данной работе мы рассматриваем влияние как коронавируса, так и ажиотажа вокруг него на цены на нефть на фоне событий, связанных с соглашениями ОПЕК. Мы исследуем эффекты COVID-19, а также упоминаний коронавируса в веб-поиске на котировки нефти, что позволяет оценить, были ли наблюдаемые изменения вызваны объективными причинами или же по большей части повлияли субъективные настроения инвесторов.

Наш вклад обусловлен тем, что при исследовании воздействия коронавируса на рынок нефти в период пандемии мы эмпирически обосновали приоритетность механизма косвенных эффектов через влияние факторов внимания к коронавирусу в Интернете как поведенческих детерминант по сравнению с прямым воздействием самого COVID-19.

Мы используем данные по фьючерсам на нефть марки Brent, а также по числу случаев заболеваний COVID-19 и поисковой активности по теме коронавируса в Google. Мы обосновываем использование в качестве контрольных переменных цен на золото, курса евро к доллару, опережающего индекса морских перевозок и индекса Dow–Jones Industrial Average (США).

Наша работа построена следующим образом: в разд. 1 дается теоретическое обоснование влияния заболеваемости COVID-19, внимания к коронавирусу и эффекта истерии вокруг пандемии. В разд. 2 мы представляем методологию нашего исследования и набор используемых данных. В разд. 3 представляются результаты моделирования, их интерпретация и дискуссия по их поводу. В заключительной части формулируются выводы.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОСНОВА

1.1. Классические детерминанты рынка нефти в доковидную эпоху

Цены на нефть и определяющие их факторы — нередкая тема многих экономических исследований, как теоретических, так и эмпирических. Рассмотрим показатели, которые чаще всего выступают в качестве факторов влияния на нефтяном рынке.

Одной из основных детерминант является цена на золото. Доказана корреляция между ценами на золото и нефть и их динамическая взаимосвязь (Pindyck, Rotemberg, 1990; Samantha, Zadeh, 2012). Золото как важный показатель будущей инфляции и инфляционных ожиданий влияет на цены на нефть (Malliaris A., Malliaris M., 2013).

Значимое влияние на цены на нефть оказывает валютный рынок. Есть свидетельства совместного движения с ценами на нефть курсов евро (Malliaris A., Malliaris M., 2013) и доллара США (Aloui, Aïssa, 2016). Ослабление валюты некоторых стран, экспортирующих нефть, может приводить к более низким экспортным ценам на ее собственную нефть, что создаст ценовую конкуренцию на мировом рынке с влиянием на внутренние и мировые цены на нефть (Samantha, Zadeh, 2012).

Важным значением для рынка нефти выступают предикторы потребления топлива и нефти (Сokolov, 2019). Одними из таких предикторов цены на нефть являются индикаторы экономического развития, которые выступают показателями будущего энергопотребления и являются индикаторы экономического развития (Kilian, 2009; Wang, Sun, 2017; Dong et al., 2019), которые, несмотря на снижение воздействия на нефтяной рынок, сохраняют свою значимость (Полбин, Скроботов, 2022).

Другими предикторами экономического роста являются фондовые рынки (Mauro, 2003; Shen, Lee, 2006; Cole, Moshirian, Wu, 2008), которые выступают, таким образом, индикатором будущего энергопотребления и спроса на нефть, что проявляется как при исследовании корреляции между фондовыми индексами и рынком нефти (Aloui, Aïssa, 2016), так и при изучении воздействия фондовых рынков на цены на нефть (Samantha, Zadeh, 2012). В качестве показателей, предсказывающих

экономическую активность, часто используются индексы и показатели транспортных перевозок (Giannarakis et al., 2017; Dbouk, Jamali, 2018).

Организация стран–экспортеров нефти ОПЕК существенно влияет на рынок нефти, с учетом условий спроса на нефть в мире она устанавливает для стран-участниц квоты на добычу и производство и поддерживает, таким образом, определенного рода рыночное равновесие. Доказано влияние на внутренние и на мировые цены на нефть как отдельных решений ОПЕК (Griffin, Teese, 2016; Lin, Tamvakis, 2010), так и отдельных саммитов ОПЕК (Kaufmann et al., 2004; Razek, Michieka, 2019). Фактором, детерминирующим цену на нефть, выступают объемы ее добычи (Варшавский, 2009), сочетание которых, наряду с фондовыми индексами, позволяет повысить качество прогноза, несмотря на проблемы «шумов» и дефицита информации (Варшавский, 2018). Воздействуют на цену нефти и нефтепродуктов также затраты по ее добыче и переработке (Каукин, Филичева, Фрейнкман, 2016).

Устоявшиеся взаимосвязи факторов влияния и рынка нефти, которые мы обнаружили в ходе исследования литературы, были значительно искажены пандемией коронавируса (Gil-Alana, Monge, 2020).

1.2. Коронавирус: прямое и косвенное воздействие

Механизм прямого воздействия

Воздействие коронавируса на рынки может быть объяснено механизмами прямых и косвенных влияний (Егорова, Непп, 2022).

Механизм прямых воздействий заключается во влиянии пандемии на рынки посредством таких детерминант экономического роста модели Солоу, как спрос, объем производства, размеры накоплений и инвестиций (Solow, 1956).

Болезни сокращают базовые потребности в результате шоков в доходах населения и тем самым снижают спрос населения (Gertler, Gruber, 2002). Наибольшее воздействие на потребление наблюдается у бедных слоев населения.

Болезни влияют на здоровье и, следовательно, продолжительность жизни, что, в свою очередь, воздействует на опыт работника и его производительность. Здоровье позитивно влияет на производственную функцию (Hassan, Cooray, Holmes, 2017); способствует росту экономики (Kalemli-Ozcan, Ryder, Weil, 2000; Bhargava et al., 2001) и рынков (Swift, 2011).

Увеличивая продолжительность жизни, здоровье стимулирует сбережения и инвестиции (Chakraborty, 2004). Улучшение здоровья населения привлекает прямые иностранные инвестиции (Alsan, Bloom, Canning, 2006).

Выводы о наличии механизма прямых эффектов подтверждаются и для коронавируса.

Пандемия повлияла на ВВП всех стран, так как вводимые ограничения, а также сама заболеваемость привели к падению производства во многих отраслях, а значит, и совокупного выпуска экономики (McKibbin, Fernando, 2020). Негативное влияние пандемии на макроэкономику (Binder, 2020) способствовало снижению спроса на нефть (Maliszewska et al., 2020).

Пандемия COVID-19 также повлияла на фондовые рынки (Ali et al., 2020; Zhang et al., 2020; Alber, 2020; Sansa, 2020; Sherif, 2020; Al-Awadhi et al., 2020; Haroon, Rizvi, 2020). В ходе распространения коронавируса наблюдалось снижение фондовых индексов (Sherif, 2020; Al-Awadhi et al., 2020) при увеличении их волатильности (Haroon, Rizvi, 2020; Zhang, Hu, Ji, 2020).

Во время пандемии наблюдалась девальвация валют развивающихся стран (Devpura, 2021; Xu, Lien, 2021). Пандемия способствовала девальвации валют в ряде стран, являющихся крупными добытчиками нефти, что, в свою очередь, способствовало снижению цен на нефть (Devpura, 2021; Xu, Lien, 2021; Konstantakis et al., 2021).

Многие товарные рынки испытали падение (Maliszewska et al., 2020) и увеличение волатильности (Farid et al., 2021). Воздействие пандемии спровоцировало бегство инвесторов в такие традиционно безопасные активы, как золото, что негативно отразилось на рынке нефти (Salisu, Vo, Lawal, 2021). Коронавирус, негативно влияя на цены марки Brent, воздействовал на объемы производства нефтедобывающих стран, в частности России (Афанасьев, Пономарева, 2021).

Механизм косвенного воздействия

Под механизмом косвенного воздействия мы понимаем влияние коронавируса через настроение участников рынка нефти. При моделировании цены на нефть учет, наряду с фундаментальными

факторами конъюнктурных детерминант, в том числе поведенческих, существенно улучшает качество прогноза (Гурвич, Прилепский, 2018). Косвенное воздействие пандемии проявляется во влиянии на настроение инвесторов и граждан посредством СМИ, сети Интернет, социальных сетей и пр. Поведению инвесторов и их настроениям, а также реакциям на сигналы на рынках посвящен ряд исследований. Данные настроения могут влиять на рынки, причем иногда даже сильнее фундаментальных факторов. Так, согласно (Barberis, Shleifer, Vishny, 1998), инвесторы могут недостаточно энергично реагировать на информацию об изменении доходов компаний, напрямую влияющих на дивиденды, однако слишком сильно реагировать на хорошие или плохие новости. Ожидания инвесторов также выступают детерминантами будущих цен спот на нефть (Потанин, Трифонов, 2021). Воздействие поведения агентов на рынок может проявляться через спекулятивный капитал, который влияет на цену нефти как в случае его избытка, так и при его недостатке (Разумнова, Светлов, 2010; Разумнова, 2010).

Эпидемии могут негативно влиять на настроения на рынках, и даже создавать панику. Такие негативные шоки усиливают реакцию инвесторов и, соответственно, влияют на их действия (Giglio et al., 2021; Nepp et al., 2022). При формировании настроений наиболее важны Интернет, социальные сети, а также СМИ как каналы распространения информации (Yang, Lin, Yi, 2017; Barber, Odean, 2008). Благодаря распространению Интернета эффекты — как позитивные, так и негативные — могут усиливаться (Полтерович, 2018). Резкие изменения цен на рынке нефти вызывают пристальное внимание со стороны инвесторов (Qadan, Nama, 2018).

Новости в Интернете и распространяемая информация в социальных сетях воздействуют на эмоции участников рынков и принятие рациональных или иррациональных решений. Распространение эмоций, подобно механизмам распространения истерии, может порождать эффекты наподобие «истерической заразы» (Kunieda, 2014).

Несмотря на наличие научных работ, доказывающих прямое и косвенное воздействие пандемии на экономический рост, товарные, валютные и фондовые рынки, мы не обнаружили работ, исследующих механизмы влияния коронавируса на рынок нефти. На устранение выявленного дефицита направлено наше исследование.

2. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Обоснование гипотез

Отталкиваясь от негативного влияния пандемии в отношении спроса (Binder, 2020), в особенности спроса на нефть (Maliszewska et al., 2020), и учитывая доказанное отрицательное влияние коронавируса на ВВП (McKibbin, Fernando, 2020) и фондовые рынки (Alber, 2020; Schoenfeld, 2020; Sansa, 2020), мы предполагаем наличие негативного прямого эффекта и на рынок нефти. Такое влияние рассмотрено, например, в работах (Gil-Alana, Monge, 2020; Narayan, 2020; Albulescu, 2020). Поэтому мы не рассматриваем результатов проверки этой гипотезы как элементы научной новизны. Однако данные результатов потребуются нам для исследования косвенных эффектов пандемии на рынок нефти и сопоставления косвенных эффектов с прямыми. Исходя из изложенного выше, мы формулируем первую гипотезу.

H1. Распространение пандемии коронавируса негативно повлияло на цены на нефть.

В соответствии с принципами поведенческих финансов при воздействии внешних шоков поведение участников рынка может отклониться от рационального (Bondt, Thaler, 1987) с преобладанием в ряде случаев иррационального поведения (DellaVigna, 2009). Рассматривая пандемию в качестве сильнейшего внешнего шока для рынков, мы предполагаем, что COVID-19 мог спровоцировать ситуацию, при которой поведенческие факторы стали создавать эффекты, сопоставимые или даже превышающие такие классические факторы, как экономическая активность (Wang, Sun, 2017; Dong et al., 2019), спрос на нефть (Dale, Fattouh, 2018; Byrne, Lorusso, Xu, 2019) и т.д.

В числе показателей поведения участников рынка мы рассматриваем внимание к коронавирусу в Интернете. Пандемия коронавируса стала шоком для экономического развития и граждан. Неудивительно, что COVID-19 занял первое место по упоминанию в СМИ, Интернете и социальных сетях на значительный период времени.

При увеличении внимания к событию или активу может быть достигнут уровень истерии (Nepp et al., 2022; Nepp, Кагреко, 2022; Егорова, Непп, 2022). В соответствии с теорией толпы

(Bon, 1896) истерия может распространяться по онлайн-сообществам в соответствии с законами толпы (Dong, Bollen, 2015; Langley, Leyshon, 2017). Участников онлайн-площадок вполне можно отнести к онлайн-сообществам.

Нам не удалось найти работ, рассматривающих влияние внимания к коронавирусу на рынок нефти. Для устранения данного дефицита мы формулируем вторую гипотезу.

Н2. Увеличение запросов о коронавирусе в интернет-поисковиках негативно повлияло на цены на нефть с силой, сопоставимой с прямым эффектом коронавируса или превышающей его.

На фоне негативной динамики рынка нефти с начала пандемии 5 марта 2020 г. состоялся саммит ОПЕК для принятия решений для стабилизации рынка. В доковидную эпоху ОПЕК демонстрировал эффективные решения (Kaufmann et al., 2004; Razeq, Michieka, 2019).

В разгар разворачивающейся пандемии и на фоне опасений снижения мирового спроса и производства на саммите ОПЕК не было достигнуто соглашения по добыче нефти. Смогли ли решения ОПЕК воздействовать на рынок нефти в разгар пандемии? Было ли дальнейшее движение цен на нефть по-прежнему вызвано коронавирусом и вниманием к нему или же данные последствия были минимизированы действиями ОПЕК? Мы не смогли найти ответа на этот вопрос в научной литературе. Поэтому, для исследования выявленного дефицита, мы формулируем третью гипотезу.

Н3. Решения ОПЕК ослабили негативные прямые и косвенные последствия коронавируса для цен на нефть.

Для проверки данных гипотез мы проводим эконометрическое моделирование влияния факторов заболеваемости и внимания к коронавирусу при учете контрольных факторов цен на нефть.

2.2. Данные

В качестве объясняемой переменной в моделях используются цены фьючерсов на нефть марки Brent (долл./барр.) как индикатор мировых цен на нефть (Turhan, Nacihasanoglu, Soytaş, 2013; Albulescu, 2020). Кроме того, фьючерсные цены являются своеобразными маркерами нефтяного рынка (Варшавский, 2010), они реагируют на внешние шоки первыми, так как инвесторам проще оперировать фьючерсными контрактами, чем спотовыми, на которые в большей степени влияют транзакционные издержки и ограничения (Bekiros, Diks, 2008; Silvapulle, Mussa, 1999; Garbade, Silver, 1983). Для проверки данного предположения нами был проведен тест Грейнджера (Granger, 1969), который подтвердил эти выводы, продемонстрировав влияние фьючерсных цен нефти на спотовые (табл. 1). Данный тест в приведенном виде предполагает нулевую гипотезу об отсутствии влияния проверяемой переменной на объясняемую и по результатам дает отсутствие влияния спотовых цен на фьючерсные, однако демонстрирует наличие влияния фьючерсных цен на спотовые.

Поскольку цены на нефть характеризуют во многом именно мировую экономику, влияющие переменные также были взяты на надстрановом уровне. Используя наднациональные показатели, мы тем самым уходим от проблемы учета неравномерности распространения COVID-19 между странами. Частотность для всех переменных — дневная.

В качестве влияющих факторов мы выделяем три категории переменных: заболеваемость, внимание к коронавирусу в интернет-поисковиках, а также контрольные факторы.

Для исследования заболеваемости COVID-19 (“COVID”) мы, отталкиваясь от работ (Apergis E., Apergis N., 2020; Atri, Kouki, Gallali, 2021), используем число заболевших в мире за определенный день, по данным European Centre for Disease Prevention and Control.

При исследовании внимания к коронавирусу в сети Интернет мы (по аналогии с работами (Salisu, Ogbonna, Adewuyi, 2020; Atri, Kouki, Gallali, 2021)) применяем динамику поиска темы «Коронавирус» в мире в поисковике Google (Google).

Таблица 1. Результаты теста Грейнджера: фьючерсные и спотовые цены на нефть

Переменная, подвергающаяся влиянию (Y)	Влияющая переменная (X)	Статистика хи-квадрат (χ^2)	Число степеней свободы (Df)	p -value ($Prob > \chi^2$)
Фьючерсные цены ←	Спотовые цены	0,03	1	0,86
Спотовые цены ←	Фьючерсные цены	6,45	1	0,01

В качестве контрольных факторов мы используем индекс Dow Jones Industrial Average (*DJIA*) как индикатор движения финансового рынка, цену на золото (*Gold*) — как индикатор рынка торгуемых товаров — и курс евро к доллару США (*Euro/USD*) как индикатор валютного рынка. Данные факторы часто рассматриваются совместно с динамикой цены нефти в качестве контрольных (Samantha, Zadeh, 2012; Malliaris A., Malliaris M., 2013; Aloui, Aïssa, 2016).

В качестве контрольного фактора, характеризующего экономическую активность и, соответственно, спрос на нефть, мы рассматриваем Baltic Dry Index (BDI), отражающий динамику цен на морские перевозки сухого груза по ключевым мировым портам, по данным сайта инвестиций Investing.com. BDI анализируется в качестве опережающего индикатора мировой экономической активности (Bakshi, Panayotov, Skoulakis, 2011; Giannarakis et al., 2017; Dbouk, Jamali, 2018), в том числе в применении к дневным исследованиям рынков (Dbouk, Jamali, 2018; Kilian, 2009).

Мы используем также две инструментальные дамми-переменные. Дамми-переменная для выходных дней (*Weekend*) вызвана отсутствием изменений цены на нефть при необходимости учета эффектов выходных дней. Такой подход применили, например, (Abraham, Ikenberry, 1994). Данные по выходным дням биржевых переменных брались по фактическим значениям, т.е. таким, какими они сохранялись после закрытия торгов.

Второй инструментальной переменной выступает двухдневная дамми-переменная для статистического выброса по заболеваемости коронавирусом в феврале 2020 г. (*February*) для учета возможных эффектов в выборке, с этим связанных (статистический выброс мог быть связан, например, с пересчетом заболеваемости из-за изменения методики учета).

Для контроля неучтенных эффектов мы используем первый лаг цен на нефть (*Oil*).

Анализируются данные за период наибольшего внимания к коронавирусу с 30 декабря 2019 г. по 30 апреля 2020 г.

Подробная информация об используемых переменных и описательная статистика приведены в табл. 2 и 3 соответственно.

Таблица 2. Используемые переменные

Обозначение	Переменная	Единицы измерения	Определение	Источник
<i>Oil</i>	Цена на нефть марки Brent	USD/барр.	Цена фьючерса на нефть марки Brent, USD за барр. (среднее значение за день)	Investing.com
<i>DJIA</i>	Индекс Dow Jones Industrial Average	Индекс	Индекс американского фондового рынка Dow–Jones Industrial Average (среднее значение за день)	Investing.com
<i>Gold</i>	Цена на золото	USD	Цена за тройскую унцию золота в долларах США (среднее значение за день)	Investing.com
<i>Euro/USD</i>	Курс евро	Евро/ USD	Обменный курс евро к доллару США	Investing.com
<i>BDI</i>	Индекс Baltic Dry Index	Индекс	Индекс стоимости перевозок сухого груза морскими путями	Investing.com
<i>COVID</i>	Дневная заболеваемость COVID-19	Человек	Число заболевших COVID-19 в мире за определенный день	European Centre for Disease Prevention and Control
<i>Google</i>	Поисковая активность в Google по теме коронавируса	Индекс	Значение индекса Google Trends по теме коронавируса в мире за определенный день	trends.google.com

Таблица 3. Описательная статистика используемых переменных

Переменная	Среднее значение	Медиана	Минимум	Максимум	Стандартное отклонение
<i>Oil</i>	45,63	51,86	19,33	68,91	16,35
<i>DJIA</i>	25 876,10	26 121,00	18 591,90	29 551,00	3259,62
<i>Gold</i>	1605,40	1585,13	1471,00	1731,58	63,19
<i>Euro/USD</i>	0,91	0,91	0,88	0,94	0,01

Окончание таблицы 3

Переменная	Среднее значение	Медиана	Минимум	Максимум	Стандартное отклонение
<i>Oil</i>	45,63	51,86	19,33	68,91	16,35
<i>DJIA</i>	25 876,10	26 121,00	18 591,90	29 551,00	3259,62
<i>Gold</i>	1605,40	1585,13	1471,00	1731,58	63,19
<i>Euro/USD</i>	0,91	0,91	0,88	0,94	0,01

2.3. Эконометрическая модель

Для выявления устойчивых взаимосвязей наиболее популярен метод OLS, который применялся для фондовых рынков (Kathiravan, Raja, Chinnadorai, 2018; Liu et al., 2020), валютных рынков (Chen, Rogoff, 2003; Shu, 2010) и товарных рынков (Borensztein, Reinhart, 1994; Imai, Gaiha, Thapa, 2008), в том числе рынка нефти (Hamilton, 1983; Möbert, 2007). В случае необходимости учета динамического характера рынка использовалась лаговая модель OLS (Hamilton, 1983; Bachmeier, Griffin, 2003; Frondel, Vance, Kihm, 2016).

При исследовании товарных рынков для нахождения краткосрочных и долгосрочных эффектов используется модель ARDL (Autoregressive Distributed Lag model) (Atri et al., 2021). Для нахождения порога влияния в исследованиях воздействия внешних шоков применяется пороговая регрессия (threshold regression) (Narayan, 2020). В исследовании волатильности при наличии проблем гетероскедастичности использовалась модель LSTARGARCHLSTM (Logistic Smooth Transition Autoregressive Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Long-Short Term Memory method) (Bildirici, Guler Bayazit, Ucan, 2020).

Проверка сформулированных нами гипотез сводится к выявлению устойчивой взаимосвязи между коронавирусом, вниманием к нему в интернет-поисковике и ценой на нефть, а также определению влияния ОПЕК на эту взаимосвязь. Для учета динамического характера рынка нефти мы, отталкиваясь от работ (Möbert, 2007; Hamilton, 2009), применяем модель OLS с первыми разностями объясняющих переменных и их первыми лагами. Кроме того, анализ лаговых значений детерминант позволит нам снизить риск эндогенности, который может быть спровоцирован, например, влиянием цены на нефть на объемы ее добычи (Маланичев, 2018). Все переменные также взяты в виде первых разностей для стационарности рядов.

Во избежание мультиколлинеарности все первые разности проверены на взаимную корреляцию (табл. 4).

Для исключения возможной скрытой зависимости между переменными мы поочередно интегрируем в модели с контрольными переменными переменную заболеваемости, а затем переменную внимания к COVID-19 в интернет-поисковике:

$$\Delta oil_t = c + \omega_o \Delta oil_{t-1} + \varphi_y \Delta y_{t-1} + \sum_{j=1}^4 \gamma_z \Delta z_{j,t-1} + \delta_D D_{i,t} + \begin{cases} \varphi_y \Delta y_{t-1}, & COVID\ model \\ b_x \Delta x_{t-1}, & Google\ model \end{cases} + \varepsilon_t; \quad (1)$$

где Δoil_t — первая разность цены на нефть марки Brent; Δoil_{t-1} — первый лаг первой разности цены на нефть (с коэффициентом ω_o); Δy_{t-1} — первая разность для предыдущего значения переменной заболеваемости; Δx_{t-1} — первая разность для предыдущего переменной внимания к коронавирусу

Таблица 4. Матрица корреляций первых разностей используемых переменных

<i>Google</i>	<i>COVID</i>	<i>DJIA</i>	<i>Gold</i>	<i>Euro/ USD</i>	<i>BDI</i>	
1,00	0,54	−0,94	0,15	0,32	−0,08	<i>Google</i>
	1,00	−0,68	0,66	0,49	0,10	<i>COVID</i>
		1,00	−0,24	−0,38	−0,05	<i>DJIA</i>
			1,00	0,19	−0,10	<i>Gold</i>
				1,00	−0,37	<i>Euro/ USD</i>
					1,00	<i>BDI</i>

Таблица 5. Результаты теста Чоу на наличие структурного разрыва в точке 05.03.2020

Значения тестовой статистики соответствующей переменной и <i>p-value</i> для соответствующей статистики	<i>COVID</i>	<i>Google</i>	<i>OPEC</i>
Статистика хи-квадрат (<i>Chi-square</i>)	30,2290	27,5138	34,2386
<i>p-value</i>	0,0002	0,0006	0,0001
F-статистика (<i>F-statistics</i>)	3,7786	3,4392	3,8043
<i>p-value</i>	0,0006	0,0015	0,0004

Примечание. Тест позволяет сделать вывод о наличии структурного разрыва в указанной точке 05.03.2020 и об ее значимости в данной роли для каждой модели.

в сети Интернет (с коэффициентами φ_y и b_x , соответственно); $\Delta z_{j,t-1}$ — первая разность предыдущих значений контрольных переменных j — фондового индекса Dow–Jones, цены на золото, курса евро к доллару и Baltic Dry Index (с коэффициентом γ_z). $D_{i,t}$ — вектор инструментальных дамми-переменных для учета выходных дней и статистического выброса заболеваемости коронавирусом в феврале 2020 г. с соответствующим коэффициентом δ_D ; ε_t — ошибка модели.

Все влияющие переменные (в виде разностей) взяты в предыдущем периоде, и подразумевается их влияние на нефть в текущем. Включение контрольных факторов в предыдущем периоде также позволяет избежать ложного статистического эффекта, если бы рынки падали одновременно и поэтому могли бы иметь между собой сильную корреляцию.

В работе используется подход структурных разрывов временных рядов для проверки в рамках НЗ возможного эффекта истерии. Он предполагает, что до определенной временной точки влияние объясняющих переменных на нефть описывалось одной взаимосвязью, а после нее — другой, что и позволяет выявить эффект истерии и ажиотажа вокруг коронавируса.

Для определения значимого структурного разрыва нами был использован тест Чоу (Chow, 1960). В процессе тестирования выборка делилась на два периода, для каждого из которых использовались одни и те же переменные, показывающие, как предполагалось, разное влияние на цены на нефть. Исходя из предыдущих исследований влияния истерии вокруг коронавируса на фондовые рынки (Nepp et al., 2022), были протестированы предполагаемые даты структурного разрыва. По результатам тестов в качестве точки структурного разрыва, значимой статистически (табл. 5), была определена дата 5 марта 2020 г., повлиявшая на динамику цен на нефть в рамках рассматриваемого периода и совпавшая с датой заседания ОПЕК. Мы предполагаем, что данное событие повлияло на факторы, и делим выборку на два периода — с 30.12.2019 по 05.03.2020 и с 06.03.2020 по 30.04.2020 — после заседания. В дальнейшем мы проверяем воздействия на обе подвыборки. Данная точка разрыва оказалась значимой по всем рассматриваемым моделям, что также свидетельствует об ее устойчивости.

В следующем разделе мы приводим результаты моделирования и формулируем выводы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ДИСКУССИЯ

В табл. 6 и 7 представлены все рассматриваемые модели, где в строках — влияющие на нефть переменные, в столбцах — модели с варьируемой переменной интереса к коронавирусу или заболеваемости. В табл. 6 — результаты моделей до структурного разрыва, в табл. 7 — после. Звезды при коэффициентах означают значимость: одна звезда — на уровне 10%, две — 5%, три — 1%.

Таблица 6. Результаты моделирования цены на нефть до точки структурного разрыва

Имя переменной	Значение коэффициентов перед переменными в соответствующей модели	
	Модель с <i>COVID</i>	Модель с <i>Google</i>
<i>COVID</i>	0,25	
<i>Google</i>		–1035,30*

Окончание таблицы 6

Имя переменной	Значение коэффициентов перед переменными в соответствующей модели	
	Модель с <i>COVID</i>	Модель с <i>Google</i>
Контрольные переменные		
<i>DJIA</i>	6,15**	6,46**
<i>Gold</i>	–12,06	–16,71
<i>Euro/USD</i>	226 475,00	62 840,90
<i>BDI</i>	–1,90	–5,85
<i>Oil lag</i>	747,86	367,83
<i>Constant</i>	–3918,38**	–3468,93*
<i>Weekend</i>	4802,59***	4492,11**
<i>February dummy</i>	8070,92**	10635,40***

Примечание. Коэффициенты при переменных умножены на 10^4 . Полужирным шрифтом выделены значимые переменные. В таблице символами «*», «**», «***» отмечены оценки, значимые на уровне 10, 5 и 1% соответственно. Переменные *Weekend* и *February dummy* введены для учета выходных для финансовых данных и статистического выброса в феврале соответственно.

Таблица 7. Результаты моделирования цены на нефть после точки структурного разрыва

Имя переменной	Значение коэффициентов перед переменными в модели	
	Модель с <i>COVID</i>	Модель с <i>Google</i>
<i>COVID</i>	0,36	
<i>Google</i>		–656,48
Контрольные переменные		
<i>DJIA</i>	–2,42	5,08
<i>Gold</i>	–89,54	149,81
<i>Euro/USD</i>	91 978,40	103 310,00
<i>BDI</i>	–119,80	127,00
<i>Oil lag</i>	320,62	805,17
<i>Constant</i>	–5920,39	–5447,87
<i>Weekend</i>	4813,78	5196,01
<i>February dummy</i>	0,00	0,00

Примечание. Коэффициенты при переменных умножены на 10^4 . Полужирным шрифтом выделены значимые переменные. В таблице символами «*», «**», «***» отмечены оценки, значимые на уровне 10, 5 и 1% соответственно. Переменные *Weekend* и *February dummy* введены для учета выходных для финансовых данных и статистического выброса в феврале, соответственно.

Дискуссию вокруг результатов структурируем следующим образом: вначале кратко опишем поведение контрольных переменных, затем проанализируем результаты, упорядочив их в соответствии с выдвинутыми гипотезами.

Влияние контрольных переменных на цены на нефть

Как цены на золото, так и курс евро к доллару США не показали значимого влияния на нефть как до, так и после структурного разрыва, что идет вразрез с результатами (Samanta, Zadeh, 2012; Malliaris A., Malliaris M., 2013). Не повлияла и экономическая активность, что проявилось в отсутствии значимости переменной *BDI*, что также идет вразрез с (Kilian, 2009; Wang, Sun, 2017; Dong et al., 2019). Это может быть обусловлено запаздывающим воздействием экономической активности. В начале пандемии экономическая активность, вероятно, еще не испытала снижения, в то время как цены на нефть уже показали опережающее снижение вследствие соответствующего поведения инвесторов.

Индекс Dow–Jones Industrial Average оказался значимым и положительно влиял на цены на нефть до разрыва во всех моделях, что подтверждает наличие взаимосвязи между нефтью и фондовым рынком на данном промежутке времени. Такой результат соответствовал выводам (Samanta, Zadeh, 2012; Aloui, Aïssa, 2016). После разрыва данный показатель также был незначим, что также может говорить об исчезновении данных эффектов и появлении альтернативных влияющих факторов после разрыва. Мы не будем вводить расширенного анализа контрольных переменных, так как это не входило в задачи нашего исследования, и перейдем к дискуссии в рамках проверки гипотез.

Лучше быть здоровым, чем больным. И для рынка нефти также? — результаты проверки гипотезы H1.

Мы не наблюдали прямого влияния коронавируса ни до, ни после разрыва для рассмотренной выборки. Этот результат идет вразрез с H1, что позволяет утверждать, что в данном случае гипотеза H1 не подтвердилась. Также данный результат идет вразрез с результатами (Narayan, 2020; Albulescu, 2020). Данное расхождение можно объяснить тем, что косвенные COVID-19 посредством влияния на поведение инвесторов преобладали над прямым влиянием пандемии на рынки. Наши результаты соответствуют выводам работ (Atri et al., 2021; Nepp et al., 2022), не наблюдавших прямого влияния коронавируса. Такие результаты соответствуют теории поведенческих финансов, обосновывающей преобладание в условиях внешних шоков поведенческих факторов (Bondt, Thaler, 1987; DellaVigna, 2009).

Страшен не сам COVID, а страх перед ним. По крайней мере для рынка нефти — результаты проверки гипотезы H2.

При исследовании активности поисковых запросов по коронавирусу в Google мы наблюдаем негативное влияние на уровне 10%-ной значимости до саммита ОПЕК, что соответствует гипотезе H2 и подтверждает выводы для фондовых рынков (Bijl et al., 2016; Cerpi, 2020; Lyócsa et al., 2020; Nepp et al., 2022). После саммита ОПЕК структурного разрыва мы не обнаруживаем значимого воздействия поисковой активности, что мы связываем с ролью точки разрыва и изменением влияния детерминант на нефтяные цены, а также с возможным снижением интереса к COVID-19.

Придет ОПЕК и наведет порядок? — результаты проверки H3.

Перед обсуждением результатов саммита ОПЕК отметим, что точка разрыва, характеризующая изменение внимания к коронавирусу в массовом сознании, совпала с саммитом ОПЕК.

Результаты моделирования показывают, что при сохранении незначимости коронавируса после саммита ОПЕК исчезает значимое воздействие на рынок нефти по ряду каналов, что подтверждает гипотезу H3 и соответствует выводам (Kaufmann et al., 2004; Razek, Michieka, 2019) о значимости решений ОПЕК для рынка нефти — после саммита эффекты по данным каналам действительно ослабели либо исчезли совсем. В то же время, поскольку цена нефти продолжила падение и после саммита, мы предполагаем, что впоследствии падение происходило в первую очередь на фоне опасений перепроизводства нефти, неопределенности относительно ее добычи и последующего падения реальной экономической активности после начала ограничений. Однако данное направление влияния остается за рамками текущего исследования.

ВЫВОДЫ

Пандемия коронавируса стала шоком для экономики и рынков. Рынок нефти в феврале 2020 г. испытал существенное падение, что могло серьезно отразиться, помимо прочего, на бюджете российской экономики. Однако стал ли именно коронавирус причиной столь существенных изменений либо здесь вполне уместна русская пословица «у страха глаза велики»? Поиск ответа на эти вопросы стал мотивом нашего исследования, в ходе которого мы анализировали прямые и косвенные эффекты коронавируса, связанные с вниманием к нему в интернет-поисковиках. Мы также проанализировали, насколько решения ОПЕК смогли изменить это влияние.

В результате проведенных исследований нами были сделаны следующие выводы: 1) сама по себе заболеваемость коронавирусом на рассматриваемой выборке не повлияла на цены на нефть; 2) рынок нефти испытал негативное воздействие косвенных эффектов коронавируса, а именно — интереса к COVID-19 в интернет-поисковике; 3) решения ОПЕК ослабили негативные косвенные эффекты коронавируса на рынок нефти посредством внимания к нему в интернет-поисковиках и изменили характер воздействия переменных на цены на нефть.

Наше исследование продолжает выводы (Потанина, Трифонова, 2021) о влиянии ожиданий инвесторов на цены на нефть и соответствует результатам (Serói, 2020; Lyócsa et al., 2020; Nepp et al., 2022) в части влияния истерии вокруг коронавируса на рынки. Далее истерия сменилась опасениями в отношении исключительно рынка нефти на фоне неопределенности в плане производства нефти, что создало новые эффекты.

Наш вклад обусловлен тем, что при исследовании воздействия коронавируса на рынок нефти в период пандемии мы обосновали приоритетность влияния факторов внимания к коронавирусу как поведенческих детерминант по сравнению с прямым воздействием самого COVID-19. В этом мы подтверждаем теорию (Bondt, Thaler, 1987) о роли поведенческих факторов при принятии решений инвесторами.

Вместе с тем, исследуя внимание к COVID-19 в Интернете, мы не учитывали смысловой и эмоциональной нагрузки запросов и постов, учет которых, на наш взгляд, может изменить результаты. Это не входило в задачи нашего исследования. Тем не менее, это может стать объектом исследования в будущих работах.

Обнаруженные в исследовании эффекты интересны, во-первых, с точки зрения поведения инвесторов на мировых биржевых рынках в целом и рынках нефти в частности. Во время крупных потрясений и эпидемий рынки могут поддаваться истерии и ажиотажу, когда сила реакции превышает вызвавшее ее событие. Возникающие эффекты временны и имеют импульсный характер. В данном контексте разумным (с точки зрения инвесторов) представляется поведение, основанное на долгосрочных фундаментальных тенденциях, даже если в краткосрочном периоде рынок меняет направление в полном отрыве от них и под влиянием временных импульсов. Во-вторых, данные выводы интересны с позиции влияния именно коронавируса на рынок нефти и на рынки вообще, с позиции контроля подобных эффектов в случае их повторного возникновения и с точки зрения оценки экономических итогов прошедшего периода. С точки зрения регулирования разумной представляется стратегия минимизации подобного локального импульсного падения рынка при помощи информационных сигналов, направленных на разъяснение временного характера таких шоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Афанасьев А.А., Пономарева О.С.** (2021). Распространение уханьского коронавируса (SARS-CoV-2) в России: макроэкономическая производственная функция с учетом мировой цены на нефть марки «Брент» // *Проблемы рыночной экономики*. № 1. С. 24–46. [Afanasyev A.A., Ponomareva O.S. (2021). Wuhan coronavirus (SARS-CoV-2) spread in Russia: macroeconomic production function in regard to Brent crude oil price. *Market Economy Problems*, 1, 24–46 (in Russian).]
- Варшавский Л.Е.** (2009). Моделирование динамики цены на нефть при разных режимах развития рынка нефти // *Прикладная эконометрика*. № 1 (13). С. 70–88. [Varshavskiy L.Ye. (2009). Modeling Dynamics of oil prices under different regimes of oil market development. *Applied Econometrics*, 13(1), 70–88 (in Russian).]
- Варшавский Л.Е.** (2010). Кризис финансовой системы и эволюция товарных рынков // *Прикладная эконометрика*. № 1 (17). С. 30–44. [Varshavskiy L.Ye. (2010). Crisis of financial system and evolution of commodities market. *Applied Econometrics*, 17 (1), 30–44 (in Russian).]
- Варшавский Л.Е.** (2018). Моделирование динамики экономических систем с неопределенными параметрами // *Компьютерные исследования и моделирование*. № 10 (2). С. 261–276. [Varshavskiy L.Ye. (2018). Uncertainty factor in modeling dynamics of economic systems. *Computer Research and Modelling*, 10 (2), 261–276 (in Russian).]
- Гурвич Е.Т., Прилепский И.В.** (2018). Анализ экспертных и официальных прогнозов цен на нефть // *Вопросы экономики*. № 4. С. 26–48. [Gurvich E.T., Prilepskiy I.V. (2018). Analysis of expert and official oil price forecasts. *Voprosy Ekonomiki*, 4, 26–48 (in Russian).]
- Егорова Ю.В., Непп А.Н.** (2022). Влияние эпидемий на экономическое развитие и финансовые рынки: структурированный обзор // *Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика*. № 6. С. 28–53. [Egorova Yu.V., Nepp A.N. (2021). The impact of epidemics on economic development and financial markets: A structured overview. *Moscow University Economics Bulletin. Series 6. Economy*, 6, 28–53 (in Russian).]
- Каукин А.С., Миллер Е.М.** (2022). Мониторинг ситуации на нефтяном рынке во II квартале 2022 г. Институт экономической политики им. Е.Т. Гайдара. [Kaukin A., Miller E. (2022) *Monitoring the situation on the oil market in the second quarter of 2022*. Moscow: Gaidar Institute for Economic Policy (in Russian).]
- Каукин А.С., Филичева Е.В., Фрейнкман Л.М.** (2016). Детерминанты розничных цен на нефтепродукты в России // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 30 (2). С. 34–59. [Kaukin A.S., Filicheva E.V., Freyinkman L.M. (2016). Determinants of retail prices of petroleum products in Russia // *Journal of the New Economic Association*. № 30 (2). С. 34–59.]

- Freinkman L.M.** (2016). Determinants of Russian Retail Petroleum Prices. *Journal of the New Economic Association*, 30 (2), 34–59 (in Russian).]
- Маланичев А.Г.** (2018). Сланцевая нефть: потенциал добычи как функция ее цены // *Экономический журнал Высшей школы экономики*. № 22 (2). С. 275–293. [**Malanichev A.G.** (2018). Shale oil: Production potential as a function of price. *HSE Economic Journal*, 22 (2), 275–293 (in Russian).]
- Полбин А.В., Скроботов А.А.** (2022). О снижении эластичности ВВП, потребления и инвестиций в России по ценам на нефть // *Прикладная эконометрика*. № 2 (66). С. 5–24. [**Polbin A.V., Skrobotov A.A.** (2022). On decrease in oil price elasticity of GDP and investment in Russia. *Applied Econometrics*, 66, 5–24 (in Russian).]
- Полтерович В.М.** (2018). Интернет, гражданская культура и эволюция механизмов координации // *Вестник ЦЭМИ РАН*. Т. 1. Выпуск 1. [**Polterovich V.M.** (2018). Internet, civic culture and the evolution of coordination mechanisms. *Herald of CEMI*, 1, 1. (in Russian).]
- Потанин Б.С., Трифонов Ю.С.** (2021). Влияние ожиданий инвесторов на цену нефти // *Прикладная эконометрика*. № 3. С. 76–90. [**Potantin B.S., Trifonov Yu.S.** (2021). The influence of investors' expectations on oil prices. *Applied Econometrics*, 63, 76–90 (in Russian).]
- Разумнова Л.Л.** (2010). Трансформация мирового рынка нефти в условиях финансовой глобализации. Специальность 08.00.14 «Мировая экономика»: автореферат дисс. на соискание уч. степ. д.э.н. Москва: EDN XAGQYP. 48 с. [**Razumnova L.L.** (2010). Transformation of the world oil market in the context of financial globalization. Abstract of doct. economy sciences: 08.00.14. Moscow: EDN XAGQYP. 48 p. (in Russian).]
- Разумнова Л.Л., Светлов Н.М.** (2010). Влияние финансового рынка на цену нефти // *Экономика и математические методы*. Т. 46. № 4. С. 28–55. [**Razumnova L.L., Svetlov N.M.** (2010). The influence of the financial market on the price of oil. *Economics and Mathematical Methods*, 46 (4), 28–55 (in Russian).]
- Соколов М.М.** (2019). Перспективы потребления нефти в мире и динамика мировых цен на нее // *Вестник Института экономики РАН*. № 4. С. 108–124. [**Sokolov M.** (2019). Prospects for world oil consumption and dynamics of world prices for it. *The Bulletin of the Institute of Economics of the Russian Academy of Sciences*, 4, 108–124 (in Russian).]
- Abraham A., Ikenberry D.L.** (1994). The individual investor and the weekend effect. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29 (2), 263–277.
- Al-Awadhi A.M., Alsaifi K., Al-Awadhi A., Alhammadi S.** (2020). Death and contagious infectious diseases: Impact of the COVID-19 virus on stock market returns. *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 27, 100326.
- Alber N.** (2020). *The effect of coronavirus spread on stock markets: The case of the worst 6 countries*. SSRN: 3578080.
- Albulescu C.** (2020). *Coronavirus and oil price crash*. arXiv preprint arXiv:2003.06184
- Alfani G., Percoco M.** (2019). Plague and long-term development: The lasting effects of the 1629–30 epidemics on the Italian cities. *The Economic History Review*, 72 (4), 1175–1201.
- Aloui R., Aïssa M.S.B.** (2016). Relationship between oil, stock prices and exchange rates: A vine copula based GARCH method. *The North American Journal of Economics and Finance*, 37, 458–471.
- Alsan M., Bloom D.E., Canning D.** (2006). The effect of population health on foreign direct investment inflows to low- and middle-income countries. *World Development*, 34 (4), 613–630.
- Apergis E., Apergis N.** (2021). Inflation expectations, volatility and Covid-19: Evidence from the US inflation swap rates. *Applied Economics Letters*, 28 (15), 1327–1331.
- Atri H., Kouki S., Gallali M.I.** (2021). The impact of COVID-19 news, panic and media coverage on the oil and gold prices: An ARDL approach. *Resources Policy*, 72, 102061.
- Bachmeier L.J., Griffin J.M.** (2003). New evidence on asymmetric gasoline price responses. *Review of Economics and Statistics*, 85 (3), 772–776.
- Bakshi G., Panayotov G., Skoulakis G.** (2010). The Baltic Dry Index as a predictor of global stock returns, commodity returns, and global economic activity. *Commodity Returns, and Global Economic Activity*. October 1.
- Barber B.M., Odean T.** (2008). All that glitters: The effect of attention and news on the buying behavior of individual and institutional investors. *The Review of Financial Studies*, 21 (2), 785–818.
- Barberis N., Shleifer A., Vishny R.** (1998). A model of investor sentiment. *Journal of Financial Economics*, 49 (3), 307–343.
- Bekiros S.D., Diks C.G.** (2008). The relationship between crude oil spot and futures prices: Cointegration, linear and nonlinear causality. *Energy Economics*, 30 (5), 2673–2685.
- Bhargava A., Jamison D.T., Lau L.J., Murray C.J.** (2001). Modeling the effects of health on economic growth. *Journal of Health Economics*, 20 (3), 423–440.

- Bijl L., Kringhaug G., Molnár P., Sandvik E.** (2016). Google searches and stock returns. *International Review of Financial Analysis*, 45, 150–156.
- Bildirici M., Guler Bayazit N., Ucan Y.** (2020). Analyzing crude oil prices under the impact of covid-19 by using LSTARGARCHLSTM. *Energies*, 13 (11), 2980.
- Binder C.** (2020). Coronavirus fears and macroeconomic expectations. *Review of Economics and Statistics*, 102 (4), 721–730.
- Bon G. le** (1895). *The crowd: A study of the popular mind*. London: Ernest Benn (also Unwin, 1896).
- Bondt W.F. de, Thaler R.H.** (1987). Further evidence on investor overreaction and stock market seasonality. *The Journal of Finance*, 42 (3), 557–581.
- Borensztein E., Reinhart C.M.** (1994). The macroeconomic determinants of commodity prices. *Staff Papers*, 41 (2), 236–261.
- Byrne J.P., Lorusso M., Xu B.** (2019). Oil prices, fundamentals and expectations. *Energy Economics*, 79, 59–75.
- Cepoi C.O.** (2020). Asymmetric dependence between stock market returns and news during COVID-19 financial turmoil. *Finance Research Letters*, 36, 101658.
- Chakraborty S.** (2004). Endogenous lifetime and economic growth. *Journal of Economic Theory*, 116 (1), 119–137.
- Chen Y.C., Rogoff K.** (2003). Commodity currencies. *Journal of International Economics*, 60 (1), 133–160.
- Chow G.C.** (1960). Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 591–605.
- Cole R.A., Moshirian F., Wu Q.** (2008). Bank stock returns and economic growth. *Journal of Banking Finance*, 32 (6), 995–1007.
- Culp S.** (2020). Wall Street clobbered as crude plummets, virus crisis deepens. *Reuters*. March 9.
- Dale S., Fattouh B.** (2018). Peak oil demand and long-run oil prices. *Energy Insight*, 25, 2–11.
- Dbouk W., Jamali I.** (2018). Predicting daily oil prices: Linear and non-linear models. *Research in International Business and Finance*, 46, 149–165.
- DellaVigna S.** (2009). Psychology and economics: Evidence from the field. *Journal of Economic Literature*, 47 (2), 315–372.
- Devpura N.** (2021). Effect of COVID-19 on the relationship between Euro/USD exchange rate and oil price. *MethodsX*, 8, 101262.
- Dong M., Chang C.P., Gong Q., Chu Y.** (2019). Revisiting global economic activity and crude oil prices: A wavelet analysis. *Economic Modelling*, 78, 134–149.
- Dong X., Bollen J.** (2015). Computational models of consumer confidence from large-scale online attention data: Crowd-sourcing econometrics. *PloS One*, 10 (3), e0120039.
- Drali R., Brouqui P., Raoult D.** (2014). Typhus in world war I. *Microbiology Today*, 41 (2), 58–61.
- Farid S., Kayani G.M., Naeem M.A., Shahzad S.J. H.** (2021). Intraday volatility transmission among precious metals, energy and stocks during the COVID-19 pandemic. *Resources Policy*, 72, 102101.
- Fronzel M., Vance C., Kihm A.** (2016). Time lags in the pass-through of crude oil prices: Big data evidence from the German gasoline market. *Applied Economics Letters*, 23 (10), 713–717.
- Garbade K.D., Silber W.L.** (1983). Price movements and price discovery in futures and cash markets. *The Review of Economics and Statistics*, 289–297.
- Gehlen F.L.** (1977). Toward a revised theory of hysterical contagion. *Journal of Health and Social Behavior*, 27–35.
- Gertler P., Gruber J.** (2002). Insuring consumption against illness. *American Economic Review*, 92 (1), 51–70.
- Giannarakis G., Lemonakis C., Sormas A., Georganakis C.** (2017). The effect of Baltic Dry Index, gold, oil and USA trade balance on Dow–Jones sustainability index world. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 7 (5), 155.
- Giglio S., Maggiori M., Stroebel J., Utkus S.** (2021). The joint dynamics of investor beliefs and trading during the COVID-19 crash. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118 (4), e2010316118.
- Gil-Alana L.A., Monge M.** (2020). Crude oil prices and COVID-19: Persistence of the shock. *Energy Research Letters*, 1 (1), 13200.
- Granger C.W.** (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 424–438.
- Griffin J.M., Teece D.J.** (2016). *OPEC behaviour and world oil prices*. London: Routledge.
- Hamilton J.D.** (1983). Oil and the macroeconomy since World War II. *Journal of Political Economy*, 91 (2), 228–248.

- Hamilton J.D.** (2009). Understanding crude oil prices. *The Energy Journal*, 30 (2), 179–206.
- Haroon O., Rizvi S.A. R.** (2020). COVID-19: Media coverage and financial markets behavior — a sectoral inquiry. *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 27, 100343.
- Hassan G., Cooray A., Holmes M.** (2017). The effect of female and male health on economic growth: Cross-country evidence within a production function framework. *Empirical Economics*, 52 (2), 659–689.
- Imai K.S., Gaiha R., Thapa G.B.** (2008). Transmission of world commodity prices to domestic commodity prices in India and China. *Brooks World Poverty Institute Working Paper*, 45.
- Johnson N.P., Mueller J.** (2002). Updating the accounts: Global mortality of the 1918–1920 ‘Spanish’ influenza pandemic. *Bulletin of the History of Medicine*, 76 (1), 105–115.
- Kalemli-Ozcan S., Ryder H.E., Weil D.N.** (2000). Mortality decline, human capital investment, and economic growth. *Journal of Development Economics*, 62 (1), 1–23.
- Kathiravan C., Raja M., Chinnadorai K.M.** (2018). Stock market returns and the weather effect in Sri Lanka. *SMART Journal of Business Management Studies*, 14 (2), 78–85.
- Kaufmann R.K., Dees S., Karadeloglou P., Sanchez M.** (2004). Does OPEC matter? An econometric analysis of oil prices. *The Energy Journal*, 25 (4), 67–90.
- Kawa L.** (2020). Stock market volatility tops financial crisis with vix at record. *Bloomberg*. March 17.
- Kilian L.** (2009). Not all oil price shocks are alike: Disentangling demand and supply shocks in the crude oil market. *American Economic Review*, 99 (3), 1053–1069.
- Konstantakis K.N., Melissaropoulos I.G., Daglis T., Michaelides P.G.** (2021). The euro to dollar exchange rate in the Covid-19 era: Evidence from spectral causality and Markov-switching estimation. *International Journal of Finance Economics*, February, 2021, 1–19.
- Kunieda T.** (2014). A note on the crowd-in effect of asset bubbles in the perpetual youth model. *Mathematical Social Sciences*, 72, 50–54.
- Kyle A.S., Xiong W.** (2001). Contagion as a wealth effect. *The Journal of Finance*, 56 (4), 1401–1440.
- Langley P., Leyshon A.** (2017). Capitalizing on the crowd: The monetary and financial ecologies of crowdfunding. *Environment and Planning A*, 49 (5), 1019–1039.
- Lebrun F.** (1980). Les crises démographiques en France aux XVIIe et XVIIIe siècles. In: *Annales. Histoire, Sciences Sociales*, 35, 2, 205–234. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lin S.X., Tamvakis M.** (2010). OPEC announcements and their effects on crude oil prices. *Energy Policy*, 38 (2), 1010–1016.
- Liu H.** (2020). Wall Street tumbles in panic selling amid COVID-19 crisis. *Xinhua*, March 13.
- Liu H., Manzoor A., Wang C., Zhang L., Manzoor Z.** (2020). The COVID-19 outbreak and affected countries stock markets response. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 17 (8), 2800.
- Lyócsa Š., Baumöhl E., Výrost T., Molnár P.** (2020). Fear of the coronavirus and the stock markets. *Finance Research Letters*, 36, 101735.
- Mackay C.** (2012). *Extraordinary popular delusions and the madness of crowds*. New York: Simon and Schuster.
- Maliszewska M., Mattoo A., Van Der Mensbrugghe D.** (2020). The potential impact of COVID-19 on GDP and trade: A preliminary assessment. *World Bank policy research working paper*, 9211.
- Malliaris A.G., Malliaris M.** (2013). Are oil, gold and the euro inter-related? Time series and neural network analysis. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 40 (1), 1–14.
- Maur E.** (1995). Humans and plague in history. *Demografie*, 37 (1), 36–41.
- Mauro P.** (2003). Stock returns and output growth in emerging and advanced economies. *Journal of Development Economics*, 71 (1), 129–153.
- McKibbin W., Fernando R.** (2021). The global macroeconomic impacts of COVID-19: Seven scenarios. *Asian Economic Papers*, 20 (2), 1–30.
- McLafferty S.** (2010). Placing pandemics: Geographical dimensions of vulnerability and spread. *Eurasian Geography and Economics*, 51 (2), 143–161.
- Möbert J.** (2007). Crude oil price determinants. No. 186. *Darmstadt Discussion Papers in Economics*.
- Narayan P.K.** (2020). Oil price news and COVID-19 — Is there any connection? *Energy Research Letters*, 1 (1), 13176.
- Nepp A., Karpeko F.** (2022). Hype as a factor on the global market: The case of bitcoin. *Journal of Behavioral Finance*, May 2022, 1–14.

- Nepp A., Okhrin O., Egorova J., Dzhuraeva Z., Zikov A. (2022). What threatens stock markets more — The coronavirus or the hype around it? *International Review of Economics Finance*, 78, 519–539.
- Nor N.M., Sirag A., Thinn W.B. K., Waziri S.I. (2015). Diseases and economic performance: Evidence from panel data. *Asian Social Science*, 11 (9), 198.
- Pindyck R.S., Rotemberg J.J. (1990). The excess co-movement of commodity prices. *The Economic Journal*, 100 (403), 1173–1189.
- Qadan M., Nama H. (2018). Investor sentiment and the price of oil. *Energy Economics*, 69, 42–58.
- Razek N.H., Michieka N.M. (2019). OPEC and non-OPEC production, global demand, and the financialization of oil. *Research in International Business and Finance*, 50, 201–225.
- Salisu A.A., Ogbonna A.E., Adewuyi A. (2020). Google trends and the predictability of precious metals. *Resources Policy*, 65, 101542.
- Salisu A.A., Vo X.V., Lawal A. (2021). Hedging oil price risk with gold during COVID-19 pandemic. *Resources Policy*, 70, 101897.
- Samanta S.K., Zadeh A.H. (2012). Co-movements of oil, gold, the US dollar, and stocks. *Modern Economy*, 3, 1, 111–117.
- Sansa N.A. (2020). The Impact of the COVID-19 on the Financial Markets: Evidence from China and USA. *Electronic Research Journal of Social Sciences and Humanities*, 2, II, 1–39.
- Schoenfeld J. (2020). The invisible risk: Pandemics and the financial markets. *Tuck School of Business Working Paper*, 3567249.
- Shen C.H., Lee C.C. (2006). Same financial development yet different economic growth: Why? *Journal of Money, Credit and Banking*, 1907–1944.
- Sherif M. (2020). The impact of Coronavirus (COVID-19) outbreak on faith-based investments: An original analysis. *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 28, 100403.
- Shu C. (2010). Impact of the renminbi exchange rate on Asian currencies. In *Currency internationalization: Global experiences and implications for the renminbi*, 221–235. London: Palgrave Macmillan.
- Silvapulle P., Moosa I.A. (1999). The relationship between spot and futures prices: Evidence from the crude oil market. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 19 (2), 175–193.
- Solow R.M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70 (1), 65–94.
- Stevens P. (2018). The role of oil and gas in the economic development of the global economy. *Extractive Industries*, 71, 1–746.
- Swift R. (2011). The relationship between health and GDP in OECD countries in the very long run. *Health Economics*, 20 (3), 306–322.
- Turhan I., Hacihasanoglu E., Soytaş U. (2013). Oil prices and emerging market exchange rates. *Emerging Markets Finance and Trade*, 49 (sup1), 21–36.
- Wang Q., Sun X. (2017). Crude oil price: Demand, supply, economic activity, economic policy uncertainty and wars — from the perspective of structural equation modelling (SEM). *Energy*, 133, 483–490.
- Watanabe M. (2002). An outbreak of epidemic louse-borne typhus in Tokyo 1914: A study on the prevention of epidemics. *Nihon Ishigaku Zasshi [Journal of Japanese History of Medicine]*, 48 (4), 597–616.
- Welford M. (2018). *Geographies of plague pandemics: The spatial-temporal behavior of plague to the modern day*. London: Routledge.
- Xu Y., Lien D. (2022). COVID-19 and currency dependences: Empirical evidence from BRICS. *Finance Research Letters*, 45, 102119.
- Yang W., Lin D., Yi Z. (2017). Impacts of the mass media effect on investor sentiment. *Finance Research Letters*, 22, 1–4.
- Zhang D., Hu M., Ji Q. (2020). Financial markets under the global pandemic of COVID-19. *Finance Research Letters*, 36, 101528.

Oil in the age of coronavirus: Hysteria or appropriate market fall?

© 2023 A.N. Nepp, A.S. Zykov, Yu.V. Egorova

A.N. Nepp,

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia; e-mail: anepp@inbox.ru

A.S. Zykov,

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia; e-mail: alexandr.zykov.basic@gmail.com

Yu.V. Egorova,

Ural Federal University, Ekaterinburg, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia; e-mail: jvegorova@mail.ru

Received 08.10.2022

We thank the RFBR for financial support in the scientific project No. 20-04-60158.

We would like to thank O. Okhrin, I. Okhrin and Z. Juraeva for their valuable comments. We would also like to thank the participants of the April XXII HSE Conference (2021), the IV Russian Economic Congress (2020), the 43rd and 44th meetings of the Shatalin School Seminar (2020, 2021) and the Oil Market Prospects and Financial Stability Conference (2021) for their criticism, comments and suggestions. We also express our gratitude to the reviewer for the recommendations made, the time and labor spent on our article.

Abstract. We look at the oil price fall in the beginning of 2020 and the effects of coronavirus and the attention towards it on these prices. Such a fall was observed at multiple markets simultaneously with the spread of coronavirus and the panic around it, and oil market wasn't an exception. Using OLS time series models, we investigate — what was the main reason behind such a fall — the coronavirus pandemic itself or rather the attention towards it. We prove the absence of straight effects of the COVID-19 itself on oil prices. At the same time we find significant negative impact of the attention towards COVID-19 on the Internet search on the oil prices. We investigate the role of the OPEC in mitigating the negative impact of coronavirus and the attention towards it. We found that after the OPEC summit both the number of Covid cases and the attention towards the disease lost its influence on oil prices. Our paper is relevant for the behavioral finance researchers, as well as for those who look at the influence of informational shocks on different markets and particularly, on the oil market and at the effect of the COVID-19 on the economy.

Keywords: oil prices, COVID-19, hysteria, panic, Google, OPEC.

JEL Classification: G10, G15, G40.

For reference: Nepp A.N., Zykov A.S., Egorova Yu.V. (2023). Oil in the age of coronavirus: Hysteria or appropriate market fall? *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 48–64. DOI: 10.31857/S042473880024876-2

ПРОБЛЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

**О влиянии избыточного документооборота на трудовую активность
сотрудника бюджетной организации**

© 2023 В.И. Цуриков

В.И. Цуриков,

Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома; e-mail: tsurikov@inbox.ru

Поступила в редакцию 12.08.2022

Аннотация. С помощью математического моделирования анализируются причины и результаты формирования в бюджетных организациях избыточного документооборота. Модель построена с учетом мнения бывшего руководителя Министерства экономического развития РФ Максима Орешкина, согласно которому ненужная отчетность потребляет огромное количество ресурсов и поэтому может генерироваться с враждебным намерением создать препятствие на пути достижения национальных целей. В основу модели положены следующие предположения. Агент (сотрудник бюджетной организации) не может отказаться от выполнения отчетной нагрузки. Чиновник (сотрудник вышестоящей организации или представитель органов государственного управления) имеет неконтролируемую и неограниченную возможность требовать от подконтрольной организации оформления документов в предлагаемой им форме и предоставления их ему в заданные сроки. Полезность чиновника возрастает с получением этих документов. Показано, что в таких условиях чиновнику выгодно неограниченно увеличивать трудоемкость отчетной нагрузки, возлагаемой на агента. В результате повышения размера неоплачиваемых усилий, затрачиваемых агентом на отчетность, его активность, определяемая частью оплачиваемых усилий, превышающих их минимальный объем, падает до нуля. Проводится сравнение активности двух чиновников, один из которых не имеет никаких враждебных намерений и просто стремится увеличить свою полезность, а другой преследует враждебную цель парализовать работу подконтрольной организации. Показано, что в результатах их деятельности просматривается только количественное различие, т.е. пороговое значение трудоемкости заданий, достижение или превышение которого уничтожает активность агента, ниже в случае враждебного чиновника. Обсуждаются три способа обуздания активности чиновника: обложение контролирующей организации корректирующим налогом, полная компенсация издержек подконтрольной организации, законодательное ограничение документооборота.

Ключевые слова: избыточность документооборота, ненужная отчетность, отчетная нагрузка, бюрократизация, равновесие по Нэшу, алгоритм Филби, враждебный чиновник.

Классификация JEL: C62, D62, D73.

Для цитирования: **Цуриков В.И.** (2023). О влиянии избыточного документооборота на трудовую активность сотрудника бюджетной организации // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 65–78. DOI: 10.31857/S042473880024882-9

ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена вопросу влияния избыточного документооборота на трудовую активность сотрудника бюджетной организации. Анализируемое влияние обусловлено возможностью чиновника обременять сотрудников нижестоящей или подконтрольной бюджетной организации написанием различных отчетов, разработкой и составлением разнообразных справок, планов, программ, заполнением анкет, таблиц и т.п. Эту проблему удачно обозначил на XVIII Общероссийском форуме, проходившем в октябре 2019 г. в Санкт-Петербурге, Максим Орешкин, руководивший в то время Министерством экономического развития РФ.

«Госаппарат тратит огромное количество времени и ресурсов на ненужную отчетность, это одно из препятствий на пути к реализации национальных целей», — считает глава Минэкономразвития РФ Максим Орешкин. В качестве примера избыточного «бумажного» регулирования он назвал число справок, которые приходится готовить по требованию Счетной палаты¹.

«Среди других проблем министр выделил сложность бюрократических процедур и отчетности. По каждому нацпроекту сотрудники министерства регулярно отправляют справки. «Все это

¹ См. (Орешкин предложил Кудрину ..., 2019).

происходит на бумаге, каждый раз происходит зачастую в новой форме, под новым углом. Сотрудники сидят и пишут-пишут-пишут, отправляют», — отметил министр. В качестве примера Максим Орешкин вспомнил шпиона Ми-6 Кима Филби, который работал на советскую разведку: «Когда мой сотрудник начинал активно вести работу — вербовать агентуру, выявлять резидентов, я заваливал его никому ненужной бумажной рутинной, и его активность очень быстро сводилась на нет. Я горжусь тем, что лично разработал и ввел несколько новых форм отчетов»².

На сложившуюся избыточность документооборота указывают сотрудники и других бюджетных организаций. В последние годы в научной литературе появилось немало статей, посвященных проблеме засилья отчетности в высшей и средней школе.

Например, в исследовании (Вольчик и др., 2016), основу которого составило 50 глубинных интервью, взятых у студентов, преподавателей и руководителей организаций высшего образования Ростовской области, одна из задач состояла в выделении институциональных изменений в высшем образовании. Авторы пришли к выводу, что в качестве одного из важнейших изменений респонденты усматривают бюрократизацию. В качестве примеров приводятся следующие высказывания респондентов: «Огромное количество ненужной, бессмысленной работы», «Эта нагрузка не связана с преподаванием, она бессмысленна», «Мы тратим так много сил и времени на обеспечение учебного процесса, что до самого процесса часто руки просто не доходят» (Вольчик и др., 2016, с. 65).

Бессмысленность отчетной нагрузки в вузе, непродуктивная трата сил и времени преподавателя на ее выполнение в ущерб учебной и научной работы, необходимость дебюрократизации деятельности высшей и средней школы, отрицательные последствия реформ отмечаются в работах (Тамбиянц, Шалин, 2021; Осипов, 2020; Тощенко, 2019; Курбатова, Донова, 2019; Амбарова, 2018; Смолин, 2015; Слива и др., 2015). Показателен следующий результат Интернет-анкетирования 450 вузовских преподавателей: «Три четверти опрошенных преподавателей (74,5%) посчитали, что в первую очередь необходимо уменьшить учебную нагрузку и сократить количество отчетной документации» (Красинская, 2016, с. 77).

Исследование бюрократизации учебного процесса в общеобразовательных школах Мясниковского района Ростовской области показало, что наибольшее число запросов поступает в школы из районного отдела образования, причем большинство из них — это ретранслированные запросы из областного Министерства образования. К ним относятся запросы многочисленных отчетов и фотоотчетов «о проведении Всероссийских тематических уроков и образовательных событий, приуроченных к государственным и национальным праздникам Российской Федерации, памятным датам российской истории и культуры, а также памятным датам и событиям Ростовской области» (Каплун, Труханович, 2020, с. 93).

Отвечая на вопрос, насколько остра проблема отчетности, председатель Комитета Государственной думы по образованию Вячеслав Никонов сказал: «Да просто стон вселенский стоит во всех образовательных организациях, особенно после перехода на программные, проектные методы финансирования. Организации готовят в год порядка 300 отчетов, что больше количества рабочих дней в году, с числом показателей около 15 тысяч. Из них около 80 процентов первично заполняется непосредственно педагогическими работниками» (Никонов, 2015).

Бюрократизация проникла не только в образование. Например, в работе (Фризен, 2019, с. 346) указывается излишняя бюрократизация в органах внутренних дел, которая существенным образом влияет на эффективность реализации управленческой функции государства. При этом возрастающий документооборот свидетельствует о постепенном увеличении нагрузки на руководящий и личный состав по исполнению документов и организации переписки.

Вопрос о бюрократизации науки поднимался на заседании Совета по науке и образованию, состоявшемся 20 декабря 2013 г. Вот цитата из выступления В.Е. Фортова, возглавлявшего в то время РАН: «Бюрократизм, волокита, бумаготворчество, а на самом деле безответственность, мелочная опека и диктат махрового чиновника превратились сегодня у нас в тяжелейшую, всеми признанную проблему, от этого страдают буквально все. Бюрократия кардинально снижает эффективность нашей работы, почти не оставляя времени для реальных исследований, убивает научную

² «Максим Орешкин рассказал о проблемах реализации нацпроектов» (Министерство экономического развития РФ, https://www.economy.gov.ru/material/news/maksim_reshkin_rasskazal_o_sistemnyh_problemah_v_realizacii_nacproektov.html).

инициативу, творчество и губительным образом сказывается на конкурентной способности науки нашей страны»³.

В данной статье не ставится задача анализировать методы и результаты реформирования научной и образовательной деятельности. Этим вопросам посвящены работы (Голик, 2021; Курбатова, Левин, Саблин, 2021; Тамбовцев, 2020; Протасов, 2017; Курбатова, 2016; Тамбовцев, Рождественская, 2014). Наша задача состоит только в том, чтобы, исходя из предположения (очень похожего на достоверный факт) о существовании в бюджетных организациях избыточного документооборота, показать, что простая личная заинтересованность в получении справок и отчетов вполне заурядного рядового чиновника может играть роль основной причины, порождающей неудержимый вал отчетности, действительно способный создать серьезные препятствия на пути достижения национальных целей.

Такая задача может рассматриваться в качестве частного случая проблемы принципал-агентских отношений, возникающей в случае когда агент, преследующий личные цели, выполняет поручение принципала в условиях асимметрично распределенной информации (Holmstrom, Milgrom, 1991; Furubotn, Richter, 2000). Фигурирующий в предлагаемой модели агент (нижестоящий сотрудник бюджетной организации) обладает определенным информационным преимуществом, в силу которого принципал (вышестоящий сотрудник) и требует от него предоставления тех или иных справок. Принципал способен конвертировать получаемые от агента данные в собственную пользу, но при этом несет издержки, обусловленные необходимостью составления инструкции (задания) для агента и обработки полученной информации.

В модели не предполагается оплаты оказываемых агентом услуг. Государственный служащий использует административный ресурс, и, соответственно, решаемая в статье задача относится к задачам экономики бюрократии, основные положения которой были сформулированы в работах (Tullock, 1965; Downs, 1967; Niskanen, 1968, 1975). По типологии мотивов бюрократов, предложенной Энтони Даунсом, рассматриваемый нами неввраждебный чиновник является карьеристом («эгоистический чиновник»), преследующим исключительно личные цели — собственные престиж, власть, доход (Downs, 1967, p. 88).

К настоящему времени этот раздел экономики широко представлен математическими моделями, описывающими поведение бюрократа такого типа. В первую очередь — это модели особенностей коррупционного поведения чиновника в зависимости от его рода деятельности и таких факторов, как отношение к риску, степень неопределенности, наличие/отсутствие конкурентов, вероятность наказания и т.п. Например, Сьюзан Роуз-Аккерман разработала ряд моделей поведения коррумпированного чиновника, наделенного полномочиями заключать контракты на поставку продукции (Rose-Ackerman, 1978), а в моделях (Cadot, 1987) исследуется поведение чиновника, выдающего по результатам тестирования разрешение на осуществление некоторой деятельности. В работе (Choi, Thum, 2005) показана взаимосвязь бюрократической коррупции с развитием теневого сектора экономики.

Помимо работ, посвященных анализу коррупционного поведения эгоистического чиновника, исследуется роль бюрократов других типов (Abbott et al., 2001; Gailmard, Patty, 2007); изучается связь качества бюрократии и мотивации чиновников с политическими неудачами (Park, 2021) и экономическим развитием (Besley et al., 2022); ищутся причины низкой эффективности бюрократии. Например, в статье «Пределы бюрократической эффективности» автор (Prendergast, 2003), опираясь на построенную им математическую модель, анализирует причины широкого использования бюрократами таких инструментов, как бездействие, игнорирование законных жалоб, бессистемный мониторинг, общий низкий уровень исправления ошибок, затягивание процесса принятия решений и предоставление особо некомпетентным бюрократам возможности подвергаться незначительной проверке после жалобы. По мнению (Prendergast, 2003), подобные бюрократические практики обусловлены не присущей бюрократам неэффективностью как таковой, а природой благ, которые распределяют бюрократы и отсутствием легкодоступных показателей эффективности работы бюрократа и его стремлением избежать расследования своих действий.

Интересно отметить, что бюрократизация, охватившая бюджетные организации, не является отечественным ноу-хау. Результаты исследования (Coccia, 2009), проведенного на основе данных, взятых из ежегодников Итальянского национального института статистики за 1991–2004 гг. и отчетов Итальянского национального исследовательского совета, позволяют сделать вывод о том, что

³ Цитата приводится по стенографическому отчету: <http://science.gov.ru/events/sten/1923/>

сотрудники итальянских научно-исследовательских учреждений и университетов так же страдают от возрастающего документооборота и избыточного администрирования, как российские ученые и преподаватели.

Предлагаемая в статье математическая модель анализирует то влияние на трудовую активность сотрудника бюджетной организации, которое может оказывать как обычный, не преследующий каких-то враждебных целей чиновник, так и враждебный чиновник, сознательно стремящийся нанести ущерб деятельности бюджетной организации.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Сделаем два важных замечания.

Замечание 1. Предлагаемая модель описывает взаимодействие двух индивидов: агента и чиновника. Агент — сотрудник бюджетной организации (т.е. подконтрольной), не имеющий возможности игнорировать требования своего руководства составлять тот или иной документ. Чиновник — представитель контролирующей организации (т.е. органов государственного управления или вышестоящей организации), имеющий возможность требовать от подконтрольной организации предоставления в назначаемый им срок документов, составленных по предлагаемой им форме. Между агентом и чиновником не предполагается наличия непосредственной связи. Их взаимодействие может осуществляться через одно или несколько иерархических звеньев. Суть взаимодействия состоит исключительно в следующем: чиновник направляет свои усилия на разработку формы документа, составление задания для агента и последующую работу с уже полученным от агента материалом, а агент прилагает свои усилия для выполнения соответствующего задания.

Замечание 2. Для того чтобы не утяжелять получаемые в модели формулы излишними коэффициентами, будем считать все используемые величины безразмерными.

Представим доход агента в виде суммы двух частей. Первая — фиксированная заработная плата D_0 , начисляемая ему за определенный минимальный размер прилагаемых усилий σ_0 . Кроме этого агент может проявить активность и за счет своих дополнительных усилий⁴ сформировать вторую часть дохода, размер которой пропорционален его дополнительным усилиям σ_{ak} . Общий объем усилий агента, направленных на создание дохода, представим в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_{ak}. \quad (1)$$

Если использовать линейную шкалу стимулирования активности, то для всего дохода агента получим выражение

$$D = D_0 + K(\sigma - \sigma_0), \quad (2)$$

где $K(\sigma - \sigma_0)$ — составляющая дохода, которая образуется за счет дополнительных усилий, обусловленных активностью агента. Если речь идет исключительно о доходе в виде оплаты труда, то коэффициент пропорциональности K имеет смысл размера (нормы) оплаты единицы усилий агента. В качестве единицы усилий можно рассматривать усилия, приложенные в течение учебного или календарного года. К примеру, у преподавателя вуза или школы эта составляющая дохода может формироваться за счет проведения дополнительных платных курсов или часов, оплачиваемой подготовки учащихся к экзамену, конкурсу или олимпиаде, премий за публикационную активность и т.п.

В гипотетическом случае отсутствия какого бы то ни было внешнего (чиновничьего) участия, зависимость издержек агента от размера его усилий можно представить в виде возрастающей и строго выпуклой вниз функции:

$$I = 0,5\sigma^2, \sigma \geq \sigma_0. \quad (3)$$

Множитель 0,5 выбран для краткости, так как с ним норма роста предельных издержек прилагаемых агентом усилий ($I' = \sigma$) равна 1, что избавляет от необходимости увеличивать число используемых коэффициентов.

⁴ На практике оплата труда в бюджетной организации чаще всего принята в повременной форме или в сочетании повременной и сдельной. Здесь используется термин «усилия» — как принято в экономической теории контрактов вследствие того, что он точнее отражает суть дела, так как повременной принцип оплаты не исключает отсутствия каких-либо усилий работника, когда он просто отсиживает время на работе.

Обозначим прилагаемые для выполнения требований чиновника неоплачиваемые усилия агента через σ_b . Так как над документом трудятся и чиновник, и агент, то объем этих усилий агента пропорционален усилиям чиновника, т.е.

$$\sigma_b = ax, \quad (5)$$

где коэффициент пропорциональности $a > 0$, x — размер усилий чиновника. Заметим, что значение коэффициента пропорциональности a определяется не только профессиональными качествами агента, но и волей чиновника. Например, в школу спускается распоряжение департамента образования представить в определенный срок некую справку об учащихся, которая может содержать как 10 пунктов, так и 100 или 200.

С учетом введенных обозначений выражение для чистого дохода (выигрыш) U_i агента i примет вид

$$U_i = D_{i0} + K_i(\sigma_i - \sigma_{i0}) - 0,5(\sigma_i + a_i x)^2. \quad (6)$$

Сотрудник бюджетной организации может получать определенное моральное удовлетворение от выполнения некоторых видов формально неоплачиваемой работы. Например, он может из чисто внутренних побуждений, добровольно и без всякой оплаты выполнять обязанности члена диссертационного совета или редакционной коллегии, состоять в той или иной комиссии либо комитете по организации и проведению конкурса, олимпиады, конференции, осуществлять работу рецензента, безвозмездно проводить научные исследования и т.п. Подобная деятельность влечет за собой определенное моральное удовлетворение, испытываемое агентом от осознания хорошо выполняемой социально значимой работы. Это нематериальное вознаграждение аналогично Δ -параметру, предложенному в работе (Crawford, Ostrom, 1995). Если агент за свое добровольное участие в подобной деятельности действительно испытывает определенное моральное удовлетворение, то соответствующие усилия мы также будем считать оплачиваемыми. В таком случае выражение (6) надо трактовать не как чистый доход или выигрыш агента, а как его полезность.

Объем усилий, прилагаемых чиновником, также состоит из минимальной части x_0 , величины $x - x_0$, обусловленной его активностью и величиной неоплачиваемых усилий x_b , направленных на его собственную отчетность. Размер усилий, затрачиваемых чиновником на собственную отчетность, также прямо пропорционален тем усилиям, которые прилагает его руководитель или другой служащий, имеющий возможность обременять нашего чиновника требованием оформить по просьбе внешних организаций те или иные документы. Будем считать эти усилия чиновника постоянной величиной и обозначим ее значение через b .

Если считать избыточность сложившегося в ряде бюджетных учреждений документооборота, превосходящего по инициативе контролирующих организаций своими размерами всякие разумные пределы, действительным фактом, мы должны признать, что сотрудники этих организаций имеют свой интерес в таком документообороте с подотчетными им учреждениями. Другими словами, чиновник получает некоторую полезность от предоставляемых ему сотрудниками подконтрольной организации подготавливаемых ими справок и отчетов.

Эта полезность может быть обусловлена различными факторами. Следует учесть, что чиновнику всегда выгодно продемонстрировать руководству свою компетентность. Еще со школьной скамьи, при ознакомлении на уроках истории с биографией А.В. Суворова он может проникаться пониманием того, что начальство негативно относится к «немогузнайкам». Кроме того, он заинтересован в подаче сигналов своему руководителю о затраченных им усилиях в целях создания имиджа старательного, трудолюбивого и перспективного работника, способного ответить на любой вопрос о состоянии дел в курируемой им бюджетной организации и всегда готового подтвердить свое мнение соответствующей справкой, заверенной руководителем этой организации. Стремление чиновника получать различные справки и отчеты может быть обусловлено и какими-то другими причинами, например сбором материала для написания им или его родственником диссертации.

Функцию полезности U^H невраждебного чиновника в том случае, когда он обременяет отчетностью только одного агента, можно записать в виде

$$U^H = D_0^H + q(x - x_0) + ah(x - x_0) - 0,5(x + b)^2, \quad (7)$$

где D_0^H — величина заработной платы, начисляемой чиновнику за определенную минимальную величину усилий x_0 , коэффициенты пропорциональности $q, h > 0$. Слагаемое $ah(x - x_0)$ является той частью полезности, которую чиновник получает от усилий агента, представляющего ему документы.

В случае произвольного числа агентов функция полезности чиновника примет вид:

$$U^H = D_0^H + q(x - x_0) + (x - x_0) \sum_{i \in N} a_i h_i - 0,5(x + b)^2, \quad (8)$$

где N — множество агентов, привлеченных к работе над документами, предназначенными для чиновника.

Теперь обратимся к функции полезности такого чиновника, который, по утверждению М. Орешкина, является скрытым врагом, так как сознательно навязывает бюджетной организации излишний документооборот с целью снизить активность сотрудников данной организации до нуля. Функция полезности такого чиновника будет отличаться от функции полезности (8) невраждебного чиновника.

Так же, как для Кима Филби, который с целью понизить активность своего подчиненного «заваливал его никому ненужной бумажной рутинной», для чиновника-врага значение параметра h , характеризующего для него степень полезности усилий агента, роли не играет. Однако если чиновник будет заваливать сотрудников внешней для него бюджетной организации большим количеством абсолютно ненужных бумаг, он рискует навлечь на себя подозрение. Поэтому чиновнику-врагу, не являющемуся руководителем сотрудника бюджетной организации, выгодно придать делу такой вид, будто требуемые им от этого сотрудника документы полезны для успешной деятельности его (чиновника) организации. Другими словами, ему желательно демонстративно использовать в своей работе, по крайней мере в глазах руководства, получаемые от агента материалы. Поэтому мы по-прежнему должны полагать, что $h > 0$ и учитывать слагаемое $ah(x_0 - x)$ в функции полезности враждебного чиновника.

Кроме того, полезность чиновника-врага должна возрастать по мере приближения к своей цели, т.е. при убывании активности агента. Поэтому его функцию полезности в этом случае можно записать в виде

$$U^B = D_0^B + q(x - x_0) + (x - x_0) \sum_{i \in N} a_i h_i + C - r \sum_{i \in N} (\sigma_i - \sigma_{i0}) - 0,5(x + b)^2, \quad (9)$$

где $r > 0$, $C - r(\sigma_i - \sigma_{i0}) > 0$. Слагаемое $C - r(\sigma_i - \sigma_{i0})$ играет роль вознаграждения чиновника за достигнутые результаты по снижению активности агента i . Это вознаграждение может иметь материальный характер в качестве платы от соответствующих вражеских спецслужб или каких-то заинтересованных лиц, либо нематериальный характер — в виде чувства удовлетворения от проделанной работы.

При сравнении функций (8) и (9) видно, что они отличаются между собой только наличием в функции полезности врага слагаемого $C - r \sum_{i \in N} (\sigma_i - \sigma_{i0})$. Если положить $C = 0$ и $r = 0$, то функции (8) и (9) станут тождественными. Поэтому функцию полезности (8) можно рассматривать в качестве частного случая функции (9).

«КТО ЗДЕСЬ ВРАГ ТАИНСТВЕННЫЙ?»

Оба актора — и агент, и чиновник — заинтересованы в максимуме своей полезности. При этом агент j выбирает уровень своих усилий σ_j , а чиновник — уровень x . Функция полезности агента (6) строго выпукла вверх и поэтому может иметь не более одного максимума. В качестве переменных величин пока будем рассматривать только усилия чиновника и агентов.

Так как производная функции (6) по размеру усилий агента j имеет вид

$$\partial U_j / \partial \sigma_j = K_j - \sigma_j - a_j x, \quad (10)$$

максимум функции U_j удовлетворяет условию

$$\sigma_j = K_j - a_j x. \quad (11)$$

С учетом (11) функции (9) и (8), если рассматривать (8) как частный случай (9) при $C = 0$ и $r = 0$, принимают вид

$$U = D_0 + (x - x_0) \left(q + \sum_{i \in N} a_i h_i \right) + C - r \sum_{i \in N} (K_i - a_i x - \sigma_{i0}) - 0,5(x + b)^2. \quad (12)$$

Функция (12) строго выпукла вверх, и ее производная по x равна

$$\frac{dU}{dx} = q + \sum_{i \in N} a_i (h_i + r) - x - b. \quad (13)$$

Для определенности будем полагать, что параметры q, b, x_0 удовлетворяют условию $q - b > x_0$. Функция полезности чиновника (12) имеет максимум, который достигается при

$$x = x_m = q + \sum_{i \in N} a_i (h_i + r) - b. \quad (14)$$

Если при этом для $j \in N$ справедливо неравенство

$$K_j - a_j x_m > \sigma_{j0}, \quad (15)$$

агенту j наиболее выгодны собственные усилия в объеме

$$\sigma_j = K_j - a_j x_m. \quad (16)$$

С учетом (14) перепишем неравенство (15) в виде

$$a_j^2 (h_j + r) + a_j \left(q - b + \sum_{k \neq j} a_k (h_k + r) \right) - (K_j - \sigma_{j0}) < 0, \quad k, j \in N. \quad (17)$$

Решив его относительно a_j и используя для краткости обозначение a_{j1} , получим неравенство, равносильное (15):

$$0 < a_j < a_{j1} = \frac{1}{2(h_j + r)} \left(\sqrt{Q_j^2 + 4(h_j + r)(K_j - \sigma_{j0})} - Q_j \right), \quad (18)$$

где $Q_j = q - b + \sum_{i \neq j} a_i (h_i + r)$; $i, j \in N$.

Для того чтобы различать значения параметров для случаев чиновника-врага и невраждебного чиновника будем использовать верхние индексы B и H соответственно. Для невраждебного чиновника ($r = 0$) значение порогового параметра a_j принимает вид

$$a_{j1}^H = \frac{1}{2h_j} \left(\sqrt{\left(q - b + \sum_{k \neq j} a_k h_k \right)^2 + 4h_j (K_j - \sigma_{j0})} - \left(q - b + \sum_{k \neq j} a_k h_k \right) \right). \quad (19)$$

Из (14) и (15) следует, что с ростом значения r величина x_m возрастает, а значение a_j при выполнении неравенства (15), соответственно, снижается. В частности, из сравнения (19) и (18) для $a_{j1} = a_{j1}^B$, (т.е. когда $r = 0$ и $r > 0$) при равных значениях всех остальных параметров вытекает неравенство

$$a_{j1}^H > a_{j1}^B. \quad (20)$$

Рассмотрим случай невраждебного чиновника. Его функция полезности (8) не зависит от усилий агентов, и поэтому ее максимальное значение при любых усилиях агентов достигается при

$$x_m^H = q + \sum_{i \in N} a_i h_i - b. \quad (21)$$

Если при этом для некоторого агента j выполняется неравенство $a_j < a_{j1}^H$, равносильное неравенству (15), то его функция полезности достигает свой единственный максимум при

$$\sigma_j = K_j - a_j x_m^H > \sigma_{j0}, \quad a_j < a_{j1}^H. \quad (22)$$

Если же оказывается справедливым неравенство $a_j \geq a_{j1}^H$, агенту j наиболее выгоден уровень усилий

$$\sigma_j = \sigma_{j0}, \quad a_j \geq a_{j1}^H. \quad (23)$$

Эти значения усилий (21)–(23) приводят всех участников к равновесному по Нэшу состоянию. Ни чиновнику, ни одному из агентов невыгодно, по крайней мере в одностороннем порядке, использовать другой уровень своих усилий при фиксированных значениях всех параметров (табл. 1, строка 1).

Таблица 1. Равновесные по Нэшу исходы для случая невраждебного чиновника

№	Усилия чиновника и агентов в равновесном исходе	Условия достижения равновесных исходов
1	$x = x_m^H = q + \sum_{i \in N} a_i h_i - b$, $\sigma_j = K_j - a_j x_m^H > \sigma_{j0}$, $\sigma_k = \sigma_{k0}$	$a_j < a_{j1}^H$, $a_k \geq a_{k1}^H$, $j, k \in N$
2	$x = x_m^H = q + \sum_{i \in N} a_i^H h_i - b$, $\sigma_j = K_j - a_{jm}^H x_m^H > \sigma_{j0}$, $\sigma_k = \sigma_{k0}$	$a_{jm}^H < a_{j1}^H$, $a_{km}^H \geq a_{k1}^H$, $j, k \in N$
3	$x = x_m^H$, $\sigma_j = K_j - a_{jm}^H x_m^H > \sigma_{j0}$	$a_{jm}^H < a_{j1}^H \quad \forall j \in N$

Таблица 2. Равновесные по Нэшу исходы для случая чиновника-врага

№	Усилия чиновника и агентов в равновесном исходе	Условия достижения равновесных исходов
1	$x = x_m^B = q - b + \sum_{i \in N} a_i (h_i + r), \sigma_j = K_j - a_j x_m^B > \sigma_{j0}$	$a_j < a_{j1}^B < a_{j2} \quad \forall j \in N$
2	$x = x_{m1}^B = q - b + \sum_{i \in N} a_i h_i + r \sum_{j \in A} a_j, \sigma_j = K_j - a_j x_{m1}^B > \sigma_{j0}, \sigma_k = \sigma_{k0}$	$a_j < a_{j2} < a_{j1}^H, a_k \geq a_{k2}, j \in A, k \in N \setminus A$
3	$x = x_m^H = q - b + \sum_{i \in N} a_i h_i, \sigma_i = \sigma_{i0}$	$a_i \geq a_{i1}^H, i \in N$
4	$x = x_m^B, \sigma_j = K_j - a_j x_m^B > \sigma_{j0}$	$a_{jm}^B < a_{j1}^B \quad \forall j \in N$

Полезность чиновника-врага в отличие от полезности невраждебного чиновника зависит от усилий агентов. Если неравенство (18), имеющее в этом случае вид

$$a_j < a_{j1}^B, \quad (24)$$

выполняется для всех агентов, то полезность чиновника-врага (9) принимает максимальное значение при его усилиях в объеме $x = x_m^B$. Соответственно, равновесие Нэша достигается при условиях:

$$x = x_m^B = q + \sum_{i \in N} a_i (h_i + r) - b, \sigma_j = K_j - a_j x_m^B > \sigma_{j0}, a_j < a_{j1}^B, \forall j \in N. \quad (25)$$

(табл. 2, строка 1).

Обратимся к ситуации, когда условие (24) выполняется не для всех агентов. Обозначим через A множество агентов, проявляющих активность. Если множество A непустое, функция полезности враждебного чиновника (9) преобразуется к виду

$$U^B = D_0^B + (x - x_0) \left(q + \sum_{i \in N} a_i h_i \right) + C - r \sum_{j \in A} (K_j - a_j x - \sigma_{j0}) - 0,5(x + b)^2. \quad (26)$$

Функция (26) имеет максимум в точке $x = x_{m1}^B$, где

$$x_{m1}^B = q + \sum_{i \in N} a_i h_i + r \sum_{j \in A} a_j - b. \quad (27)$$

Если множество $N \setminus A$ непустое, то $x_{m1}^B < x_m^B$, и выполнение условий (15) и, соответственно, (18) влечет за собой справедливость неравенств

$$K_j - a_j x_{m1}^B > \sigma_{j0}, \quad \forall j \in A. \quad (28)$$

Неравенства (28) эквивалентны неравенствам:

$$0 < a_j < a_{j2} = \left(\sqrt{Q_{2j}^2 + 4(h_j + r)(K_j - \sigma_{j0})} - Q_{2j} \right) / 2(h_j + r), \quad (29)$$

где $Q_{2j} = q - b + \sum_{i \neq j} a_i h_i + r \sum_{s \neq j} a_s, j, s \in A, i \in N, A \neq \emptyset, N \setminus A \neq \emptyset$.

Таким образом, если для одной части агентов с $j \in A$ справедливы неравенства (29), а для другой части — с $k \in N \setminus A$ эти неравенства не выполняются, т.е.

$$K_k - a_k x_{m1}^B \leq \sigma_{k0}, \quad k \in N \setminus A, \quad (30)$$

то равновесие по Нэшу будет достигнуто при выполнении условий:

$$x = x_{m1}^B, \sigma_j = K_j - a_j x_{m1}^B > \sigma_{j0}, \sigma_k = \sigma_{k0}, a_j < a_{j2}, a_k \geq a_{k2}, j \in A, k \in N \setminus A. \quad (31)$$

(табл. 2, строка 2).

Если множество A оказывается пустым, т.е. если для всех агентов справедливыми оказываются условия (30), из которых следует, что

$$a_i \geq a_{i2}^B \quad \forall i \in N, \quad (32)$$

то все агенты выбирают свои усилия в объеме $\sigma_i = \sigma_{i0}, i \in N$. Функция полезности чиновника (9) принимает вид

$$U^B = D_0^B + q(x - x_0) + (x - x_0) \sum_{i \in N} a_i h_i + C - 0,5(x + b)^2. \quad (33)$$

В этом случае функции полезности невраждебного чиновника и враждебного отличаются только постоянным слагаемым. Поэтому максимум полезности (33) достигается при $x = x_m^H$. Если

при таком уровне усилий чиновника-врага усилия всех агентов удовлетворяют неравенствам $K_j - a_j x_m^H \leq \sigma_{j0}$, которые, как следует из (15) и (18), эквивалентны неравенствам

$$a_j \geq a_{j1}^H, \quad j, k \in N, \quad (34)$$

то при усилиях в объемах $x = x_m^H$ и $\sigma_j = \sigma_{j0}$ участники достигают равновесного по Нэшу исхода (табл. 2, строка 3).

Если для агента k окажется справедливым двойное неравенство

$$a_{k1}^H > a_k \geq a_{k2}^B, \quad a_j \geq a_{j1}^H, \quad j \in N, \quad j \neq k, \quad (35)$$

возникает неопределенность. В силу справедливости неравенства (32) агенту k выгодно применять свои усилия в объеме $\sigma_k = \sigma_{k0}$. Но тогда функция полезности чиновника принимает вид (33) с максимумом в точке $x = x_m^H$. При таком выборе усилий чиновника для агента k , согласно (35), выгоднее усилия в размере $\sigma_k = K_k - a_k x_m^H > \sigma_{k0}$, при котором функция полезности чиновника принимает вид (26), где множество A состоит из одного элемента k , и, соответственно, достигает свой максимум в точке $x = x_{m1}^B > x_m^H$. Для таких усилий чиновника агенту k , в силу условия $\sigma_k = K_k - a_k x_{m1}^B \leq \sigma_{k0}$, снова наиболее выгодны усилия в размере $\sigma_k = \sigma_{k0}$. Нельзя исключить предположения, что и в этом случае существует равновесный по Нэшу исход с некоторыми значениями усилий $x = x^*$ и $\sigma_k = K_k - a_k x^* > \sigma_{k0}$, где значение x^* удовлетворяет двойному неравенству $x_m^H < x^* < x_{m1}^B$, но этот вопрос остается открытым.

Все результаты, полученные в предположении, что переменными величинами являются только размеры усилий x и σ_i , $i \in N$, для удобства сведены в табл. 1 и 2. В них приведены объемы усилий чиновника и агентов в равновесных по Нэшу состояниях и условия достижения соответствующих состояний. Следует иметь в виду, что под равновесным по Нэшу исходом понимается такое состояние, выход из которого за счет одностороннего изменения тем или иным актором объема своих усилий при фиксированных значениях всех остальных параметров обернется снижением его полезности. Поэтому результаты, записанные в табл. 1 в строке 1 и в табл. 2, строки 1–3, описывают равновесные состояния, которые существуют только в предположении, что все параметры a_j имеют фиксированные значения.

Из формул в табл. 1 (строка 1) и табл. 2 (строки 1–3) видно, что с ростом значения параметра a_j , т.е. по мере того как возрастают неоплачиваемые усилия, затрачиваемые агентом j на отчетность, его активность снижается. Как только параметр a_j достигает значения a_{j1}^H (18), активность агента j становится равной нулю. А вот активность чиновника с ростом параметра a_j только возрастает.

Теперь разберем случай, когда чиновник имеет возможность влиять на значения этих параметров путем изменения трудоемкости своих заданий. Поэтому обратимся к зависимости полезности чиновника от значений параметров a_j .

Для этого предположим, что параметры a_j , $j \in N$ являются переменными величинами. Теперь подставим в функцию полезности невраждебного чиновника (8) значение $x = x_m^H$ и полученное выражение продифференцируем по a_j , тогда

$$\frac{\partial U^H}{\partial a_j} = h_j \left(q + \sum_{i \in N} a_i h_i - b - x_0 \right) = h_j (x_m - x_0) > 0, \quad j \in N. \quad (36)$$

Аналогично, подставив в функцию полезности враждебного чиновника (26) значение $x = x_{m1}^B$ и продифференцировав соответствующее выражение по a_j с $j \in A$ и по a_k с $k \in N \setminus A$, получим:

$$\frac{\partial U^B}{\partial a_j} = h_j (x_{m1}^B - x_0) + r x_{m1}^B > 0, \quad j \in A, \quad (37)$$

$$\frac{\partial U^B}{\partial a_k} = h_k (x_{m1}^B - x_0) > 0, \quad k \in N \setminus A. \quad (38)$$

Из неравенств (36)–(38) следует, что во всех случаях независимо от того, является ли чиновник скрытым врагом (37), (38) или нет (36), проявляет ли агент активность (37) или уже не проявляет в силу высоких издержек неоплачиваемых усилий (38), полезность чиновника возрастает с ростом значения параметра a_j . И это неудивительно, так как выгоды от роста параметров a_i $\forall i \in N$ получает чиновник, а агентам достаются только издержки. Поэтому чиновнику выгодно неограниченно увеличивать значение a_j . Для этого ему достаточно (конечно, в силу своих возможностей) требовать от агентов предоставлять более детальные и обстоятельные отчеты и справки с обилием различных материалов, в том числе и не особенно нужных. В результате его полезность будет только увеличиваться.

С ростом значения параметра a_j неуклонно снижается активность агента j и увеличивается активность чиновника. Таким образом, если чиновник в стремлении к повышению собственной полезности неограниченно увеличивает издержки агента, обусловленные отчетностью, он добивается того, что агент снижает свою активность до нуля в полном соответствии с алгоритмом Филби.

Интересно отметить, что на XVIII Общероссийском форуме, на котором М. Орешкин сетовал на чрезмерное «бумажное регулирование», он после своего рассказа о найденном Филби способе парализовать успешную активность любого контрразведчика предложил Л. Кудрину поискать в своем ведомстве скрытых врагов. По его словам, только их наличием можно объяснить требования Счетной палаты заполнять огромное число ненужных справок, создавая тем самым препятствия для работы Министерства экономического развития РФ. Как следует из модели, М. Орешкин не вполне прав. Неограниченный рост отчетной нагрузки на сотрудников его министерства могут обеспечивать не только преследующие враждебные цели чиновники Счетной палаты, но и обычные невраждебные чиновники в силу стремления к увеличению собственной полезности.

Фактически результаты активности враждебного и невраждебного чиновников отличаются только количественными показателями. Из сравнения табл. 1 и 2 следует, что условия $r > 0$ в случае врага и $r = 0$ в случае невраждебного чиновника при прочих равных условиях отражаются на размерах усилий и значениях пороговых параметров a_{j1} и a_{j2} . Враждебный чиновник прикладывает больше усилий. Соответственно, объемы усилий агентов и значения параметров a_{j1} и a_{j2} в его случае ниже.

Перейдем к вопросу о том, как можно остановить этот возрастающий вал отчетной нагрузки, выгодный только чиновнику.

ТРИ СПОСОБА ОГРАНИЧЕНИЯ ОБЪЕМА ОТЧЕТНОЙ НАГРУЗКИ

Самый простой (теоретически) способ обуздать стремление чиновника к неограниченному росту документооборота состоит во введении в его функцию полезности отрицательного слагаемого, нелинейного по усилиям агента, затрачиваемых им на отчетность. Если обозначить соответствующее слагаемое как $-f_i(a_i x)$, функция полезности чиновника (9) примет вид

$$U = D_0 + (x - x_0) \left(q + \sum_{i \in N} a_i h_i \right) + C - r \sum_{i \in N} (\sigma_i - \sigma_{i0}) - \sum_{i \in N} f_i(a_i x) - 0,5(x + b)^2. \quad (39)$$

Для сохранения вида зависимости x_m (14) и σ_j (16) от значений параметров $K_i, q, a_i, a_j, h_i, h_j, b, r$ в качестве $f_i(a_i x)$ следует взять функцию, зависящую только от величины параметра a_i . Если использовать самый простой вариант в виде степенной функции аргумента a_i , функция полезности (39) приобретет вид

$$U = D_0 + (x - x_0) \left(q + \sum_{i \in N} a_i h_i \right) + C - r \sum_{i \in N} (\sigma_i - \sigma_{i0}) - \sum_{i \in N} p_i a_i^\alpha - 0,5(x + b)^2, \quad (40)$$

где $p_i > 0, \alpha > 2$. Если подставить в (40) $x = x_m$ (14) и $\sigma_j = K_j - a_j x_m$ (16), то функцию полезности чиновника можно рассматривать как функцию переменных a_i : $U = U(a_1, \dots, a_n)$, где n — число элементов множества N . Ее производная по a_j имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_j} = & x_m (h_j + r) - h_j x_0 - \alpha p_j a_j^{\alpha-1} = (h_j + r) \left(q - b + \sum_{k \neq j} a_k (h_k + r) \right) - h_j x_0 + \\ & + a_j \left((h_j + r)^2 - \alpha p_j a_j^{\alpha-2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Из (41) видно, что с возрастанием значения a_j производная убывает, проходя через ноль при условии

$$a_j \left(\alpha p_j a_j^{\alpha-2} - (h_j + r)^2 \right) = (h_j + r) \left(q - b + \sum_{k \neq j} a_k (h_k + r) \right) - h_j x_0. \quad (42)$$

Так как левая часть (42), начиная со своего нулевого значения, т.е. с того значения a_j , при котором $\alpha p_j a_j^{\alpha-2} = (h_j + r)^2$, монотонно возрастает с ростом a_j при неизменном положительном значении правой части, то уравнение (42) имеет единственное решение, которое обозначим как a_{jm}^B для случая враждебного чиновника и как a_{jm}^H для случая невраждебного чиновника. В силу того что при этом значении параметра a_j полезность чиновника принимает максимальное значение, теперь ему от него отклоняться невыгодно.

Решение уравнения (42) зависит от коэффициента p_j . С его ростом значения a_{jm}^B и a_{jm}^H уменьшаются. Отсюда следует, что вариацией его величины и значения показателя степени α можно регулировать уровень активности и чиновника, и агента j . Например, для частного случая $\alpha = 3$ получим:

$$a_{jm}^H = \frac{1}{6p_j} \left(h_j^2 + \sqrt{h_j^4 + 12p_j h_j \left(q - b - x_0 + \sum_{k \neq j} a_k h_k \right)} \right), \quad (43)$$

$$a_{jm}^B = \frac{1}{6p_j} \left((h_j + r)^2 + \sqrt{(h_j + r)^4 + 12p_j R_j} \right), \quad (44)$$

где $R_j = (h_j + r) \left(q - b + \sum_{k \neq j} a_k (h_k + r) \right) - h_j x_0$. Из (44) видно, что при любом фиксированном значении коэффициента p_j величина a_{jm}^B быстро возрастает с ростом r . Поэтому чем лучше оплачиваются услуги враждебного чиновника, тем выше для сохранения стимула у агента j к проявлению активности должно быть значение коэффициента p_j .

При выборе значений p_j такими, чтобы для всех агентов выполнялись условия

$$\sigma_j = K_j - a_{jm}^B x_m^B > \sigma_{j0}, \quad \forall j \in N, \quad (45)$$

состояние с усилиями враждебного чиновника в объеме $x = x_m^B$ и агентов в объемах (45) будет равновесным по Нэшу. Неравенства (45) равносильны неравенству (18) при $r > 0$ (см. табл. 2, строка 4).

Так как полезность невраждебного чиновника не зависит от усилий агента, равновесие по Нэшу достигается во всех случаях, в которых чиновник прилагает свои усилия в размере

$$x_m^H = q + \sum_{i \in N} a_{im}^H h_i - b, \quad (46)$$

а агенты — в размерах

$$\sigma_j = K_j - a_{jm}^H x_m^H > \sigma_{j0}, \quad a_{jm}^H < a_{j1}^H; \quad \sigma_k = \sigma_{k0}, \quad a_{km}^H \geq a_{k1}^H. \quad (47)$$

(см. табл. 1, строка 2). Если неравенство $K_j - a_{jm}^H x_m^H > \sigma_{j0}$ выполняется для всех $j \in N$, то равновесие Нэша достигается (см. табл. 1, строка 3) при

$$x = x_m^H, \quad \sigma_j = K_j - a_{jm}^H x_m^H > \sigma_{j0}, \quad a_{jm}^H < a_{j1}^H \quad \forall j \in N. \quad (48)$$

Таким образом, если функция полезности чиновника имеет вид (40), всегда можно так подобрать соответствующие коэффициенты p и α , что значение параметра a_{jm} , отвечающего максимуму полезности чиновника, станет сколь угодно малым. Как только его значение станет меньше величины a_{j1} , равновесие по Нэшу будет достигаться при ненулевой активности агента. Изменением значений коэффициентов p_i при любом $\alpha > 2$ можно регулировать активность и чиновника, и агентов.

Представляется, что при практической реализации такого способа обуздания объема отчетной нагрузки нецелесообразно непосредственно подвергать каждого чиновника воздействию сдерживающего механизма, который отражается слагаемым $-\sum_{i \in N} p_i a_i^\alpha$ в его функции полезности (40). Предпочтительнее использовать сдерживающий механизм путем обложения контролирующей организации корректирующим налогом (пигуанским) на использование трудовых ресурсов бюджетных организаций. Величина налога должна быть пропорциональна степенной функции с показателем степени $\alpha > 2$, зависящей от количества и размеров подготавливаемых для контролирующей организации документов.

Вторая возможность для ограничения отчетной нагрузки обусловлена тем, что порождаемая активностью чиновника отрицательная экстерналия относится к числу принципиально компенсируемых. Поэтому для ограничения активности чиновника достаточно ее интернализации. Другими словами, достаточно переложить на получателя выгоды (т.е. на чиновника) все издержки, которые несет агент i в результате выполнения отчетной нагрузки. Так как величина этих издержек, которую обозначим через ΔI_i , равна

$$\Delta I_i = 0,5(\sigma_i + a_i x)^2 - 0,5\sigma_i^2 = \sigma_i a_i x + 0,5a_i^2 x^2, \quad (49)$$

то следует ввести это слагаемое со знаком «плюс» в функцию полезности (6) агента $i \quad \forall i \in N$ и со знаком «минус» в функцию полезности чиновника (9). Теперь издержки агента принимают вид (3), и полезность агента полностью утрачивает зависимость и от параметров a_i , и от усилий чиновника. Максимум полезности агента i достигается при $\sigma_i = K_i > \sigma_{i0}$.

На практике также представляется целесообразным для сокращения трансакционных издержек возложить компенсационные выплаты не на отдельных чиновников, а на контролируемую

организацию в целом. В этом случае ситуация равносильна покупке у подконтрольной организации нужных справок и отчетов.

Третий способ состоит во введении на законодательном уровне ограничения на объем тех усилий, которые требуются для выполнения отчетной нагрузки. Для этого достаточно ограничить число документов, которые должен оформлять агент, и закрепить форму каждого документа. В этом случае оба типа чиновников окажутся в равных условиях, так как деятельность враждебного чиновника, стремящегося парализовать активность сотрудников бюджетной организации, будет полностью нивелирована.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной модели анализируется взаимодействие двух индивидов — чиновника и агента, — где каждый стремится к максимуму своей функции полезности. Модель построена в предположении, что чиновник, представляющий органы государственного управления или вышестоящую организацию, может получать некоторую полезность от тех документов, которые по его требованию готовят сотрудники подконтрольной бюджетной организации. Моделирование показало: данного условия достаточно, чтобы такой чиновник при отсутствии контроля над его активностью был склонен неограниченно увеличивать документооборот, вынуждая сотрудников подконтрольной организации затрачивать на излишнюю отчетность огромное количество времени и ресурсов.

В результате анализа были выявлены три возможности ограничения активности чиновника, направленной на создание избыточного документооборота, конечно, если не считать самую очевидную и надежную — кардинальное сокращение числа чиновников. Наиболее фундаментальным выглядит предложение обложить контролируемую организацию корректирующим налогом, величина которого нелинейно возрастает с ростом количества и размера получаемых от подконтрольной организации документов. К его недостатку можно отнести возможность углубления бюрократизации, обусловленной проблемой измерения и необходимостью постоянно вычислять величину налога.

Вторая возможность состоит в полной компенсации издержек, обусловленных подготовкой сотрудниками бюджетной организации требуемых от них документов. Эту компенсацию можно рассматривать как покупку контролирующей организацией у подконтрольной того справочного и отчетного материала, который превышает некоторый установленный минимум. Этот вариант тем ближе к оптимальному, чем ниже транзакционные издержки его реализации.

Третья возможность состоит во введении ограничений, имеющих силу закона, на виды и размеры документов, которые контролирующая организация может требовать от подконтрольной бюджетной организации. К нежелательным особенностям этого способа можно отнести недостаточную степень гибкости и оперативности с возможностью углубления бюрократизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Амбарова П.А.** (2018). Сверхбюрократизация как аномалия развития высшего образования в России // *Известия Уральского федерального университета. Сер. 1 Проблемы образования, науки и культуры*. № 1 (171). С. 173–183. [Ambarova P.A. (2018). Over-bureaucratization as abnormality of higher education development in Russia. *Izvestia. Ural Federal University Journal. Ser. 1. Problems of Education, Science and Culture*, 1 (171), 173–183 (in Russian).]
- Вольчик В.В., Филоненко Ю.В., Аверкиева Е.С., Ширяев И.М.** (2016). Бюрократизация и адаптивное поведение в сфере высшего образования // *Вопросы регулирования экономики*. № 4. С. 57–71. [Volchik V.V., Filonenko Yu.V., Averkieva E.S., Shiryayev I.M. (2016). Bureaucratization and adaptive behavior in higher education. *Journal of Economic Regulation*, 4, 57–71 (in Russian).]
- Голик Ю.В.** (2021). Бюрократизация науки недопустима (заметки после прочтения книги В.Н. Протасова «Методологические проблемы защиты диссертаций (на примере юриспруденции)» // *Государство и право*. № 12. С. 67–72. [Golik Yu.V. (2021). Bureaucratization of science is unacceptable (notes after reading the book by V.N. Protasov "Methodological problems of defending dissertations (on the example of jurisprudence)"). *State and Law*, 12, 67–72 (in Russian).]
- Каплун К.Р., Труханович Д.С.** (2020). Бюрократизация образовательного процесса как проблема реализации образовательной политики (на примере Мясниковского района Ростовской области) // *Тенденции развития науки и образования*. № 62–8. С. 89–93. [Kaplun K.R., Trukhanovich D.S. (2020). Bureaucratization of the educational process as a problem of the implementation of educational policy (on the example of the Myasnikov district of the Rostov region). *Trends in the Development of Science and Education*, 62–8, 89–93 (in Russian).]

- Красинская Л.Ф.** (2016). Модернизация, оптимизация, бюрократизация... Что ожидает высшую школу завтра? // *Высшее образование в России*. № 3. С. 73–82. [**Krasinskaya L.F.** (2016). Modernization, optimization, bureaucratization... What awaits higher education tomorrow? *Higher Education in Russia*, 3, 73–82 (in Russian).]
- Курбатова М.В.** (2016). Реформа высшего образования как институциональный проект российской бюрократии: содержание и последствия // *Мир России*. № 4. С. 59–86. [**Kurbatova M.** (2016). Higher education reform as an institutional project of the Russian bureaucracy: The content and the outcomes. *Universe of Russia*, 25, 4, 59–86 (in Russian).]
- Курбатова М.В., Донов И.В.** (2019). Эффективный контракт в высшем образовании: результаты реализации проекта // *Journal of Institutional Studies*. № 11 (2). С. 122–145. [**Kurbatova M.V., Donova I.V.** (2019). Effective contract in higher education: Some results of project implementation. *Journal of Institutional Studies*, 11 (2), 122–145 (in Russian).]
- Курбатова М.В., Левин С.Н., Саблин К.С.** (2021). Импорт инструментов научной политики в современной России // *Журнал институциональных исследований*. № 13 (3). С. 37–52. [**Kurbatova M.V., Levin S.N., Sablin K.S.** (2021). Import of scientific policy instruments in contemporary Russia. *Journal of Institutional Studies*, 13 (3), 37–52 (in Russian).]
- Никонов В.** (2015). Как оптимизировать отчётность в системе образования? Режим доступа: <https://russkiymir.ru/publications/189024/> [**Nikonov V.** (2015). How to optimize reporting in the education system? Available at: <https://russkiymir.ru/publications/189024/> (in Russian).]
- Орешкин предложил Кудрину искать врагов в Счетной палате (2019) // *Интерфакс*. 28 октября. [Online] Режим доступа: <https://www.interfax.ru/business/681995> [Oreshkin invited Kudrin to look for enemies in the Accounts Chamber (2019). *Interfax*. 28 october. [Online] Available at: <https://www.interfax.ru/business/681995> (in Russian).]
- Осипов А.М.** (2020). Бюропатология и бумажный прессинг в российском образовании // *Вестник РУДН. Серия: Социология*. № 4. С. 953–966. [**Osipov A.M.** (2020). Bureaupathology and paper pressure in Russian education. *RUDN Journal of Sociology*, 4, 953–966 (in Russian).]
- Протасов В.Н.** (2017). Иррациональные методы властвования как инструмент самосохранения и экспансии бюрократически организованных систем управления // *Государство и право*. № 10. С. 55–61. [**Protasov V.N.** (2017). Irrational methods of ruling as a tool for self-preservation and expansion of bureaucratically organized management systems. *State and Law*, 10, 55–61 (in Russian).]
- Слива А.В., Березовский В.А., Фокина В.Н., Басов В.А.** (2015). Финансовые и интеллектуальные потери вуза вследствие излишней бюрократизации в системе образования // *Экономика образования*. № 5 (90). С. 4–16. [**Sliva A.V., Berezovsky V.A., Fokina V.N., Basov V.A.** (2015). Financial and intellectual losses of the university due to excessive bureaucratization in the education system. *Economics of Education*, 5 (90), 4–16 (in Russian).]
- Смолин О.Н.** (2015). Высшее образование: борьба за качество или покушение на человеческий потенциал? // *Социологические исследования*. № 7. С. 30–37. [**Smolin O.N.** (2015). Higher education: Struggle for quality or encroachment on human potential? *Sociological Studies*, 7, 30–37 (in Russian).]
- Тамбиянц Ю.Г., Шалин В.В.** (2021). Бюрократизация отечественного высшего образования: факторы и перспективы // *Общество: философия, история, культура*. № 5. С. 31–39. [**Tambiyants Yu.G., Shalin V.V.** (2021). Bureaucratization of domestic higher education: Factors and prospects. *Society: Philosophy, History, Culture*, 5, 31–39 (in Russian).]
- Тамбовцев В., Рождественская И.** (2014). Реформа высшего образования в России: международный опыт и экономическая теория // *Вопросы экономики*. № 4. С. 97–108. [**Tambovtsev V., Rozhdestvenskaya I.** (2014). Reform of higher education in Russia: International experience and economic theory. *Voprosy Ekonomiki*, 4, 97–108 (in Russian).]
- Тамбовцев В.Л.** (2020). Действенность мер российской научной политики: что говорит мировой опыт // *Управление наукой: теория и практика*. № 1. С. 15–39. [**Tambovtsev V.L.** (2020). Effectiveness of measures of Russian science policy: What the world experience says. *Science Management: Theory and Practice*, 1, 15–39 (in Russian).]
- Тощенко Ж.Т.** (2019). Высшее образование на перепутье: куда ведут реформы (заметки скептика) // *Мониторинг общественного мнения: Экономические и социальные перемены*. № 4. С. 400–417. [**Toshchenko Zh.T.** (2019). Higher education at the crossroads: Where are the reforms leading (notes of a skeptic). *The Monitoring of Public Opinion: Economic and Social Changes Journal*, 4, 400–417 (in Russian).]
- Фризен П.Д.** (2019). Оптимизация документооборота как средство реализации правоохранительной функции в регионе // *Евразийский юридический журнал*. № 4 (131). С. 346–347. [**Friesen P.D.** (2019). Document flow optimization as a means of implementing the law enforcement function in the region. *Eurasian Law Journal*, 4 (131), 346–347 (in Russian).]
- Abbott K., Genschel P., Snidal D., Zangl B.** (2021). Beyond opportunism: Intermediary loyalty in regulation and governance. *Regulation and Governance*, S1, 83–101.
- Besley T., Burgess R., Khan A., Xu G.** (2022). Bureaucracy and development. *Annual Review of Economics*, 14, 397–424.
- Cadot O.** (1987). Corruption as a gamble. *Journal of Public Economics*, 2, 223–244.

- Choi J.P., Thum M. (2005). Corruption and the shadow economy. *International Economic Review*, 3, 817–836.
- Coccia M. (2009). Bureaucratization in public research institutions. *Minerva*, 1, 31–50.
- Crawford S.E.S., Ostrom E. (1995). A grammar of institutions. *American Political Science Review*, 3, 582–600.
- Downs A. (1967). *Inside bureaucracy*. Boston: Little Brown and Co.
- Furubotn E.G., Richter R. (2000). *Institutions and economic theory: The contribution of the new institutional economics*. Ann Arbor: The University of Michigan Press.
- Gailmard S.F., Patty J.W. (2007). Slackers and zealots: Civil service, policy discretion, and bureaucratic expertise. *American Journal of Political Science*, 4, 873–889.
- Holmstrom B.R., Milgrom P. (1991). Multitask principal-agent analyses: Incentive contracts, asset ownership, and job design. *Journal of Law, Economics and Organization*, 7 (special issue), 24–52.
- Niskanen W.A. (1968). Peculiar economics of bureaucracy. *American Economic Review*, 2, 293–305.
- Niskanen W.A. (1975). Bureaucrats and politicians. *Journal of Law and Economics*, 3, 617–643.
- Park S. (2021). Politics or bureaucratic failures? Understanding the dynamics of policy failures in democratic governance. *Journal of Policy Studies*, 3, 25–36.
- Prendergast C. (2003). The limits of bureaucratic efficiency. *Journal of Political Economy*, 5, 929–958.
- Rose-Ackerman S. (1978). *Corruption: A study in political economy*. Cambridge: Academic Press.
- Tullock G. (1965). *The Politics of Bureaucracy*. Washington, D.C.: Public Affairs Press.

On the impact of excessive document flow on the labor activity of a budgetary organization employee

© 2023 V.I. Tsurikov

V.I. Tsurikov,

Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia; e-mail: tsurikov@inbox.ru

Received 12.08.2022

Abstract. The causes and results of the formation of excessive workflow in budgetary organizations are analyzed with the help of mathematical modeling. The model was built taking into account the opinion of the former head of the Ministry of Economic Development of the Russian Federation Maxim Oreshkin, according to whom excessive reporting consumes a huge amount of resources, and therefore can be generated with a hostile intent to create an obstacle to achieving national goals. The model is based on the following assumptions. An agent (an employee of a budgetary organization) cannot refuse to carry out the reporting burden. An official (an employee of a higher ranking organization or a representative of government bodies) has an uncontrolled and unlimited opportunity to demand that the controlled organization draws up documents in the form proposed by him and provide them within the specified time. The utility of the official increases with receipt of these documents. It is shown that under such conditions the official benefits by unlimitedly increasing labor intensity of the reporting burden imposed on the agent. As a result of an increase in the amount of unpaid effort spent by an agent on reporting, his activity, which is determined by the part of paid efforts that exceed their minimum volume, drops to zero. The activity of two officials is compared: one of them has no hostile intentions and simply increases his work's utility, while the other pursues a hostile goal to paralyze the work of the controlled organization. It is shown that there is only a quantitative difference in the results of their activities: the threshold value of the complexity of tasks, the achievement or exceeding of which destroys the activity of the agent, is lower in the case of a hostile official. Three possible ways of limiting the activity of an official are discussed: taxing the controlling organization with a corrective tax, full compensation for the costs of the controlled organization, and legislative restriction of document flow.

Keywords: paperwork redundancy, excessive reporting, reporting burden, bureaucratization, Nash equilibrium, Philby's algorithm, hostile official.

JEL Classification: C62, D62, D73.

For reference: **Tsurikov V.I.** (2023). On the impact of excessive document flow on the labor activity of a budgetary organization employee. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 65–78. DOI: 10.31857/S042473880024882-9

ПРОБЛЕМЫ ПРЕДПРИЯТИЙ

Эмпирический анализ степени влияния рисков на успешность крупных проектов слияний и поглощений в современных компаниях

© 2023 М.В. Грачева, Н.О. Утемова

М.В. Грачева,

Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: grachevamv@mail.ru

Н.О. Утемова,

Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва; e-mail: utemovanata@gmail.com

Поступила в редакцию 26.10.2022

Авторы благодарят Игоря Михайловича Чуркина за помощь в поиске фундаментальной литературы по теме «Слияния и поглощения».

Аннотация. В текущих условиях нестабильности мировой экономики сделки слияний и поглощений являются одним из ключевых способов стабилизировать и укрепить свою рыночную позицию, получить конкурентное преимущество за счет неорганического роста. У крупных проектов слияний и поглощений увеличивается шанс стать неуспешными, прерванными или незавершенными, что сопряжено с финансовыми, репутационными и временными потерями. Это делает необходимым грамотно разрабатывать стратегии управления рисками таких сделок и определять степень влияния различных категорий рисков на их успешность. Данное исследование посвящено количественной оценке влияния рисков крупных (стоимостью более 10 млрд евро) проектов слияний и поглощений на успешное заключение сделки, а также разработке на этой основе рекомендаций для управления значимыми рисками с использованием проектной методологии. Анализ был выполнен при помощи probit-регрессий на широкой выборке из 24 стран и 10 укрупненных отраслей. В результате значимыми показали себя пять групп рисков: враждебного характера сделки; наличие странового барьера; неверной оценки стоимости сделки; соотношения размеров компании-цели и компании-покупателя; отклонения сроков заключения сделки. При этом транснациональные слияния и поглощения демонстрируют более сильное влияние всех значимых рисков на успешность сделки.

Ключевые слова: слияния и поглощения, управление рисками проектов, риск-менеджмент, проектное управление, проектные риски.

Классификация JEL: G34, O22, L20.

Для цитирования: **Грачева М.В., Утемова Н.О.** (2023). Эмпирический анализ степени влияния рисков на успешность крупных проектов слияний и поглощений в современных компаниях // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 79–92. DOI: 10.31857/S042473880024877-3

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на последствия пандемии COVID-19 для глобальной экономики, мировой объем рынка слияний и поглощений быстро вернулся к докризисному уровню и значительно обогнал его (Levy, Lloyd, Brown, 2022). Возросло как число сделок, так и их средняя стоимость. За последний квартал 2021 г. было заключено около 15 тыс. сделок слияний и поглощений, а средний размер сделки увеличился более чем в два раза по сравнению с доковидными значениями и составил 85 млн долл. (Levy et al., 2022). Согласно исследованию международной консалтинговой компании McKinsey крупные сделки имеют значительно больший шанс стать неуспешными, прерванными или незавершенными. В среднем для слияний и поглощений, перешагнувших порог в 1 млрд евро, эта вероятность составляет 10%, а для сделок дороже 10 млрд евро — 20% (Bahreini et al., 2019).

Последствия отказа от сделки наносят серьезный удар по репутации и финансовому положению обеих сторон, как в долгосрочном периоде из-за неэффективного вложения своих временных, денежных и человеческих ресурсов, так и в краткосрочном — в связи с расходами на работу консультантов и штрафами за расторжение договора. Наряду с этим те организации, которые решились стать покупателями во время предыдущих рецессий, опередили своих конкурентов по темпу прироста цены акции на 7% уже через год после объявления сделки (Wittmer, Potter, 2019). Современные условия ведения бизнеса диктуют необходимость быстро реагировать на глобальные

изменения, что делает особенно актуальным данное исследование. Экономические последствия событий, начавшихся 24 февраля 2022 г., еще больше усилили потребность компаний в быстрой адаптации к новым условиям. Грамотное управление проектами слияний и поглощений и их рисками может предоставить корпорациям возможности для неорганического (возникающего в результате слияний или поглощений, а не вследствие увеличения собственной деловой активности компании) роста и стабилизации своих позиций на рынке в эти непростые турбулентные времена.

Данное научное направление является достаточно разработанным как в российской, так и в зарубежной литературе. Преимущественно встречаются работы, связанные с общими аспектами проектов слияний и поглощений, а также глобальными тенденциями на мировом и национальных рынках, однако в последние годы все чаще публикуются исследования непосредственно по риск-менеджменту таких сделок.

Теоретические и прикладные аспекты слияний и поглощений наиболее широко и фундаментально заложили такие иностранные ученые, как Т. Дж. Галпин, П.А. Гохан, А.Р. Лажу, С. Майерс, С.Ф. Рид и Р.С. Фостер.

Отечественные авторы О.И. Гуляев, А.А. Иванова, А.Е. Иванов, М.Г. Карелина, А.Е. Молотников, В.С. Мхитарян, К.Р. Романенко, К.В. Усков, С.М. Филимонова, И.Д. Фрумин, С.В. Фрумина, Е.А. Чувелева, Д.В. Щегельский и др. адаптировали работы западных исследований к российским реалиям, заострив внимание на специфических страновых и отраслевых рисках.

Оценка эффективности проектов слияний и поглощений вызывает интерес исследователей по всему миру, А.В. Бровкин, С. Коларик, В.Р. Колесников, Н.И. Медведева, К. Мендес-Ортега, М.М. Таймасова, М. Теруэль, Д. Ширек и др. опубликовали свои исследования данной проблемы.

Примечательно, что если в ранний период работы имели более общий, обзорный, и даже философский, характер, то в последние годы как российские, так и зарубежные авторы стали изучать конкретные аспекты проектов слияний и поглощений для определенных стран в выбранной индустрии. В целом отмечается тенденция написания практически ориентированных статей.

Для данной научной проблематики характерно разнообразие методов исследования: кейс-метод, метод индукции (М. Вебер, Э. Гомес и др.), оригинальные авторские модели (Л. Анг и др.), VaR (Георгиос К. и др.), шкалирование и картирование (И.В. Вселенская). Самым популярным исследовательским инструментом в оценке рисков проектов слияний и поглощений продолжает быть математическое моделирование. Из работ последних лет, являющихся наиболее близкими по теме данного исследования, можно выделить публикации В.И. Алефирова, И.В. Вселенской, К. Мендеса-Ортеги, М. Теруэль, В.М. Фонга.

В своей работе мы поставили перед собой задачу разработать методы количественной оценки и дать градацию степени влияния различных категорий рисков на успешность крупных проектов слияний и поглощений. В качестве объекта были выбраны крупные проекты слияний и поглощений. Для этого потребовалось провести эмпирический анализ степени влияния различных рисков на успешность реализации слияния/поглощения и сформулировать рекомендации для управления значимыми рисками.

Нами был использован метод экономико-математического моделирования (построение моделей регрессий) для получения количественной оценки влияния рисков на успешность крупных сделок слияний и поглощений. Изучаемые риски были формализованы в виде переменных, включенных в модель.

Эмпирическая база была сформирована¹ из данных о слияниях и поглощениях из терминалов Bloomberg и Refinitiv Eikon, ежегодных финансовых и социальных отчетов на официальных сайтах компаний из выборки, документации на официальном сайте Комиссии по ценным бумагам и биржам США, данных исследовательских агентств Statista и Macrotrends.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Собранные данные и вычисления предельных эффектов изменения регрессора в полученной эконометрической модели представлены в репозитории Mendeley Data².

¹ База была сформирована до 24 февраля 2022 г.

² <https://data.mendeley.com/datasets/3sycwj6gdh/2>; DOI:10.17632/3sycwj6gdh.2

Построение выборки для эмпирического исследования влияния рисков для крупных проектов слияний и поглощений

Выборка включала сделки слияний и поглощений, которые удовлетворяли следующим условиям:

- дата анонсирования сделки находилась в промежутке от 1 января 2012 г. до 20 октября 2021 г., т.е. охватывала слияния и поглощения последних 10 лет;
- все участвующие в сделке компании являлись публичными. Это ограничение было введено, для того чтобы была возможность найти в открытом доступе данные по истории M&A, активности контрагентов и числу сотрудников компании;
- размер сделки начинался от 11 927 млн долл. (т.е. 10 млрд евро, переведенным по среднему курсу за последние 10 лет³. Такой минимальный размер был выбран исходя из исследования McKinsey, которое относит такие слияния и поглощения к наиболее рисковым — вероятность их успешного заключения самая низкая — примерно 80% (Bahreini et al., 2019);
- из выборки были убраны компании-поглотители, которые преследовали сделкой не стратегическую, а финансовую цель, т.е. частные инвестиционные фонды и фонды венчурного капитала, поскольку для них слияния и поглощения представляют собой основную деятельность, осуществляемую регулярно для дальнейшей перепродажи;
- исключены сделки, которые оказались в статусе незавершенных (т.е. анонсированные в прошлом или позапрошлом году и до сих пор не пришедшие к заключению), поскольку оценить успешность продолжающихся сделок не представляется возможным.

Таким образом, в итоговой выборке оказалось всего 225 сделок, 170 из которых содержат полные данные по всем интересующим нас переменным; 111 (63%) были успешно завершены, остальные — прерваны или отозваны. Это достаточно репрезентативное соотношение для дальнейшего исследования успешности сделок слияний и поглощений. Под «успешным», в рамках данного исследования, понимался именно завершённый проект, поскольку прерывание процесса крупных слияний или поглощений особенно болезненно сказывается на всех участниках сделки и в финансовом (издержки на ведение сделки), и в стратегическом плане (альтернативные и репутационные издержки).

Одним из главных отличий выборки данного исследования от предшествующих является ее широта. Рис. 1 и 2 демонстрируют многообразие стран и индустрий компаний-целей — организаций,

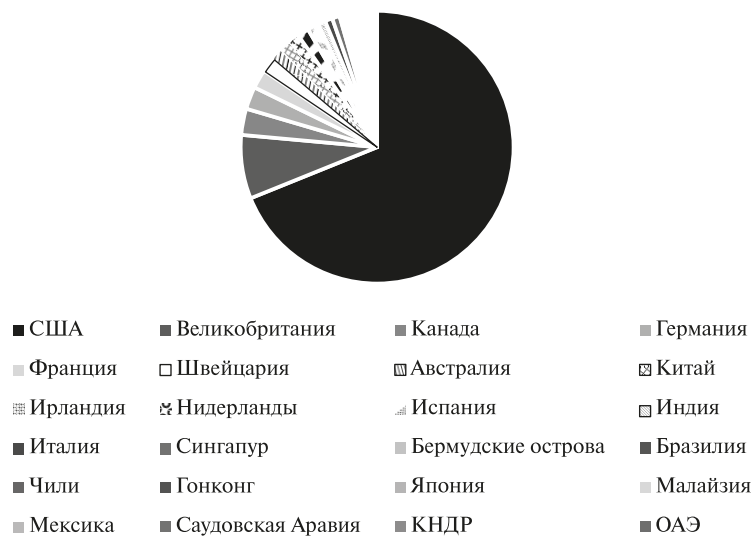


Рис. 1. Страны компаний-целей из выборки

Источник: составлено авторами на основании анализа собранных данных.

³ «Yearly average rates». Официальный сайт OFX (<https://www.ofx.com/en-au/forex-news/historical-exchange-rates/yearly-average-rates/>).



Рис. 2. Индустрии компаний-целей из выборки

Источник: составлено авторами на основании анализа собранных данных.

которые выступают в качестве объекта приобретения другой фирмой в рамках проектов слияний и поглощений. В модель вошли сделки из 24 стран и 10 укрупненных отраслей.

Описание переменных и обоснование включения их в модель

На основе данных, которые удалось собрать из открытых источников и терминалов Bloomberg и Reuters до 2022 г. (Утемова, 2022), были сформированы следующие переменные для модели регрессии:

DealStatus — 1, если сделка была успешно завершена; 0 — иное (прервана или отозвана) (зависимая переменная);

AnnouncedTotalValue — анонсированная стоимость сделки (млн долл. США). Включена в модель для проверки гипотезы о том, что крупные сделки имеют больше шансов стать неуспешными (Bahreini et al., 2019);

Country — 1, если ни одна из стран на стороне цели не совпадала ни с одной страной на стороне покупателя (считаем, что существовал страновой барьер); 0 — обратное. Предыдущие исследования указывали на повышенные негативные риски трансграничных сделок (Cao, Ellis, Li, 2019), связанные с культурными, юридическими и финансовыми различиями сторон;

CrossIndustry — 1, если ни одна из индустрий в описании покупателя не являлась прямым или косвенным конкурентом индустрий цели (Thunberg, 2015); 0 — обратное. Межотраслевые сделки сопряжены с повышенными рисками брендовой, технологической и культурной несовместимости компаний.

Оптимальный выбор способа оплаты сделки признан одним из важнейших факторов увеличения ненормальной доходности приобретающей компании (Меньшиков, 2021). Чтобы включить этот риск в модель, были добавлены две дамми-переменные:

MixedPayment — 1, если при оплате сделки использовались наличные и акции; 0 — иное;

CashPayment — 1, если при оплате сделки использовались только наличные; 0 — иное;

Target's Currency — для учета валютных рисков — 1, если валюта сделки и валюта, в которой оперирует компания-цель, совпадали; 0 — если не совпали;

NatureOfBid — 1, если характер сделки был дружественным или стал дружественным в процессе; 0 — если характер сделки был враждебным или стал таковым в процессе.

Взаимосвязь характера сделки с ее доходностью (иное понятие «успешности») — популярная тема исследований по всему миру. При этом единого мнения о положительном (Servaes, 1991; Sudarsanam, Mahate, 2006) или отрицательном (Franks, Harris, Titman, 1991; Goergen, Renneboog, 2004) влиянии

враждебности так и не сформировалось. Это делает риск возникновения конфликта с акционерами неоднозначным и интересным для включения в модель.

Размеры компаний—участников сделки признавались важными для исхода слияний и поглощений (Oh, Peters, Johnston, 2014), поэтому в модель были включены переменные: *TargetNumberOfEmployees* — число сотрудников в компании-цели на момент сделки (человек); *AcquirerNumberOfEmployees* — число сотрудников в компании-покупателе на момент сделки (человек).

Предыдущие исследования выявили значимость опыта компании-покупателя для успешности проектов слияний и поглощений (Алефиров, 2017), поэтому в модель была включена переменная *Experience* — в скольких сделках слияний и поглощений ранее (удалось получить данные с 2012 г.) участвовал покупатель (число сделок).

Знания о приобретаемой организации на уровне акционеров могли помочь покупателю сделать более точный и правильный выбор цели слияния или поглощения. Для этого предназначена переменная *BeforeShare* — 1, если у покупателя была часть акций компании-цели до сделки, 0 — если не было.

Duration — длительность сделки от момента анонсирования до завершения или ее прерывания, отзыва (число дней). Эта переменная связана с риском задержки процесса интеграции, отклонения от первоначального плана проекта.

Риск нехватки ресурсов (конкретно по причине множества одновременных проектов) учитывается с помощью переменной *SameYearDeals* — число сделок (включая анализируемую) слияний и поглощений, которые покупатель осуществил в том же году (число сделок).

ВЫБОР МОДЕЛИ, ОПИСАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ

Для того чтобы избежать мультиколлинеарности, в модели были проверены связи между независимыми переменными по корреляционной матрице. На рис. 3, показано, что присутствует сильная корреляция между *Experience* и *SameYearDeals*. Эта связь может иметь такой экономический смысл — компании, которые имеют больше опыта в слияниях и поглощениях, могут позволить себе параллельное ведение нескольких сделок с меньшими рисками потерь; или — обратная причинно-следственная связь — наибольший опыт получили те компании, которые придерживаются

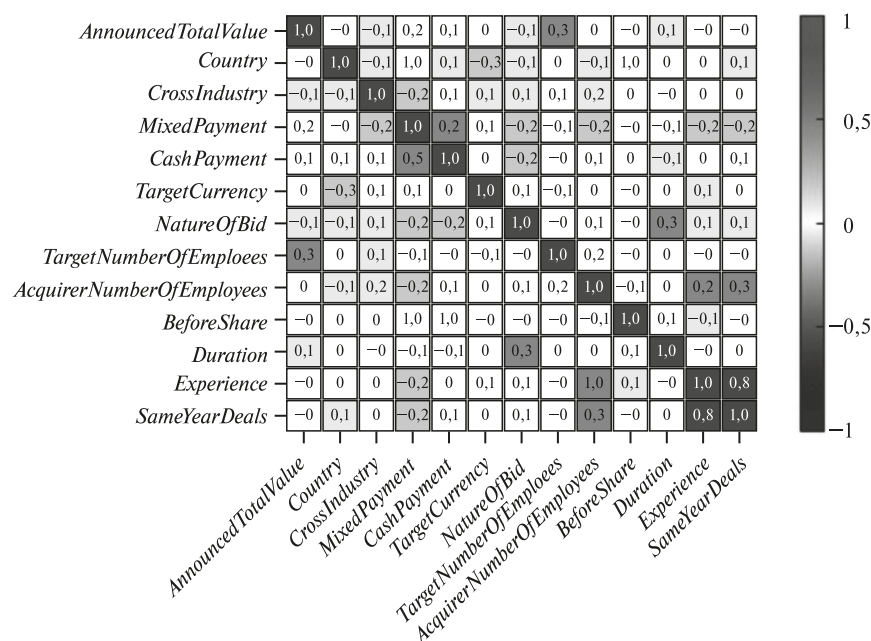


Рис. 3. Начальная корреляционная матрица независимых переменных

Источник: составлено авторами на основе эмпирического анализа.

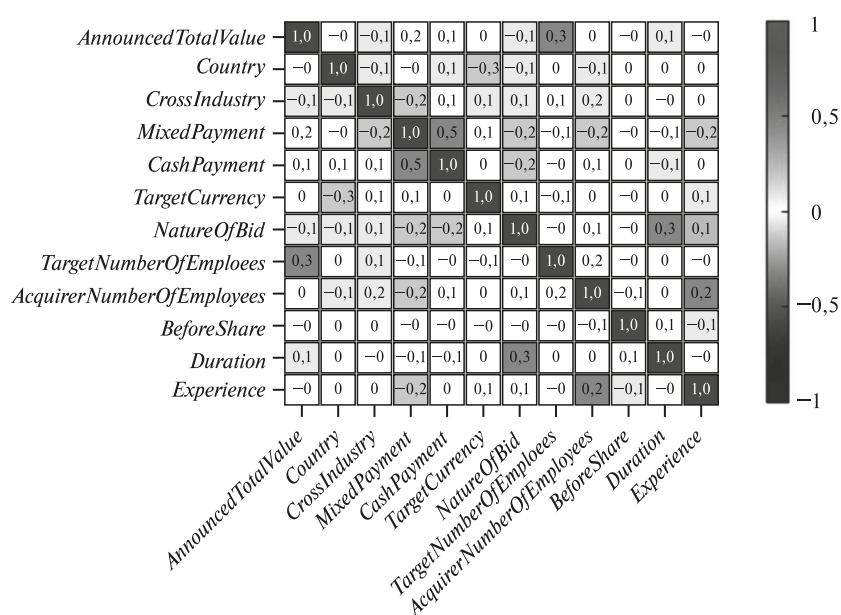


Рис. 4. Итоговая корреляционная матрица независимых переменных

Источник: составлено авторами на основе эмпирического анализа.

стратегии одновременного заключения сделок. В данном случае было принято решение исключить *SameYearDeals* и оставить *Experience*, поскольку исследования предшественников указывают на значимость опыта компании-покупателя для успешности слияний и поглощений (Алефиров, 2017). *MixedPayment* и *CashPayment* показали корреляцию 0,5, однако по смыслу они описывают принципиально разные случаи (оплата сделки одновременно акциями и наличными; оплата сделки только наличными), поэтому обе переменные было решено оставить в модели.

Таким образом, итоговая корреляционная матрица независимых переменных, допущенных в модель, представлена на рис. 4.

Поскольку зависимая переменная *DealStatus* является бинарной, в рамках проводимого исследования были использованы логит- и пробит-модели, которые не позволяют прогнозируемому значению выйти за рамки 0 и 1. Эти конфигурации дают возможность оценивать вероятность осуществления успешной сделки в зависимости от значений выбранных переменных. Для построения моделей был выбран прикладной программный пакет для эконометрического моделирования Gretl.

Стартовые логит- и пробит-модели представлены в табл. 1 (столбцы 1 и 2). Наблюдения с неполными данными были автоматически исключены Gretl, выборка сократилась до 172 сделок.

Таблица 1. Эконометрические модели исследования

Переменная	Модель без исключения избыточных переменных		Модель с исключением избыточных переменных	
	логит	пробит	логит	пробит
	1	2	3	4
<i>const</i>	1,012 (0,7612)	0,6416 (0,4468)	0,5265 (0,3870)	0,3553 (0,2276)
<i>AnnouncedTotalValue</i>	-1,305e-05** (6,548e-06)	-7,852e-06** (3,801e-06)	-1,277e-05** (6,105e-06)	-7,574e-06** (3,655e-06)
<i>Country</i>	-0,6000 (0,4013)	-0,3536 (0,2382)	-0,5930* (0,3542)	-0,3562* (0,2135)
<i>CrossIndustry</i>	1,213 (0,7716)	0,7427* (0,4223)		

Окончание таблицы 1

Переменная	Модель без исключения избыточных переменных		Модель с исключением избыточных переменных	
	логит	пробит	логит	пробит
	1	2	3	4
<i>MixedPayment</i>	0,6166 (0,4597)	0,3860 (0,2728)		
<i>CashPayment</i>	−0,6810 (0,5326)	−0,4260 (0,3079)		
<i>TargetCurrency</i>	−0,5573 (0,6557)	−0,3534 (0,3826)		
<i>TargetNumberOfEmployees</i>	−1,196e-05** (5,442e-06)	−7,180e-06** (2,950e-06)	−1,092e-05** (5,531e-06)	−6,573e-06** (2,858e-06)
<i>AcquirerNumberOfEmployees</i>	7,239e-06* (3,981e-06)	4,242e-06* (2,172e-06)	6,397e-06* (3,333e-06)	3,644e-06** (1,857e-06)
<i>BeforeShare</i>	0,5657 (0,6833)	0,3408 (0,4014)		
<i>Duration</i>	0,002841* (0,001498)	0,001633** (0,0007826)	0,002832* (0,001499)	0,001568** (0,0007785)
<i>Experience</i>	0,003288 (0,003883)	0,002283 (0,002235)		
<i>n</i>	172	172	172	172
Исправленный R ²	0,1448	0,1455	0,1203	0,1184

Примечание. В таблице символами «*», «**» отмечены оценки, значимые на уровне 10 и 5% соответственно. В скобках указаны стандартные ошибки. Для моделей логит и пробит R² — это псевдо-R² Макфаддена (*McFadden*).

Источник: составлено авторами на основе эмпирического анализа.

Кроме того, выяснилось, что зависимая переменная *DealStatus* с вероятностью 100% будет равна нулю, если *NatureOfBid* равно нулю. То есть у крупных сделок слияний и поглощений нет шансов на успех, если они не смогли стать дружественными. Это — первый важный вывод о значимых рисках для таких проектов. Переменная *NatureOfBid* была автоматически исключена из дальнейшего эконометрического анализа.

Для того чтобы улучшить первоначальные модели (столбцы 1 и 2 в табл. 1), было применено последовательное автоматическое исключение избыточных переменных с использованием двухстороннего р-значения 0,1 (столбцы 3 и 4 в табл. 1). При этом доля корректно предсказанных случаев у пробит-модели получилась на 1,2% больше, чем у логит-моделей, поэтому по ней и была проведена интерпретация коэффициентов при переменных.

КАЧЕСТВО МОДЕЛИ

Доля «корректно предсказанных» случаев — 73,3%.

Критерий отношения правдоподобия

Нулевая гипотеза: все переменные незначимы (коэффициенты при всех переменных равны нулю).

Хи-квадрат расчетное больше хи-квадрат критического при числе степеней свободы 5 и степени значимости 0,01 (26,76 > 15,1) — нулевая гипотеза отвергается — уравнение в целом значимо на уровне 1%.

Тест на нормальное распределение ошибок

Нулевая гипотеза: ошибки распределены по нормальному закону.

Хи-квадрат расчетное меньше хи-квадрат критического при числе степеней свободы 2 и степени значимости 0,01 (1,06 < 9,2) — нулевая гипотеза принимается — ошибки распределены по нормальному закону.

Таким образом, переменная *Country* оказалась значимой на уровне 10%, а *AnnouncedTotalValue*, *TargetNumberOfEmployees*, *AcquirerNumberOfEmployees* и *Duration* — на уровне 5%.

ВЫЯВЛЕНИЕ НАИБОЛЕЕ ЗНАЧИМЫХ РИСКОВ

Для количественной интерпретации степени влияния значимых рисков на успешность крупных слияний и поглощений был использован метод вычисления предельных эффектов для средней по выборке.

Сделки, по которым имелись полные данные по каждой значимой переменной, были разделены на внутренние (*Country* = 0) и со страновым барьером (*Country* = 1). Средние значения независимых переменных из модели 4 для каждой из групп представлены в табл. 2.

Табл. 3 и 4 содержат количественные результаты исследования (значение и интерпретацию предельного эффекта изменения регрессора в зависимости от малого изменения переменной, а также продемонстрированный ею уровень значимости в нашей модели). Мы видим, что для средней внутренней (без странового барьера) сделки увеличение ее стоимости на 1 млрд долл. снизит вероятность успешного завершения слияния или поглощения на 0,26 п.п., а дополнительные 1 тыс. сотрудников в компании-цели — на 0,23 п.п. Увеличение числа сотрудников в компании-покупателе на 1 тыс., напротив, увеличит вероятность успеха сделки на 0,12 п.п. Дополнительный день ведения проекта прибавит 0,05 п.п. к вероятности ее завершения. А если слияние или поглощение со средними характеристиками становится международным (приобретает страновой барьер), то шансы на благополучный финал упадут на 12,2 п.п.

Для международных сделок предельные эффекты интерпретируются аналогично. Все предельные эффекты для этой группы больше по абсолютному значению, т.е. все значимые риски существенно влияют на успешность проекта слияния или поглощения и управление ими становится еще важнее.

Таблица 2. Средние значения переменных в группах при наличии (отсутствии) странового барьера

<i>Country</i>	<i>AnnouncedTotalValue</i> , млн долл.	<i>TargetNumberOfEmployees</i> , человек	<i>AcquirerNumberOfEmployees</i> , человек	<i>Duration</i> , дней
0	35096	29527	93669	202
1	33924	33615	68082	205

Источник: составлено авторами на основе эмпирического анализа.

Таблица 3. Предельные эффекты для сделок без странового барьера

Дополнительное условие	<i>Country</i> = 0	
	предельный эффект для среднего по выборке, п.п.	уровень значимости, %
+1 млрд долл. к стоимости сделки	−0,26	5
+ 1 тыс. сотрудников компании-цели	−0,23	5
+ 1 тыс. сотрудников компании-покупателя	0,12	5
+ 1 день	0,05	5
Стать трансграничной	−12,2	10

Источник: составлено авторами на основании эмпирического анализа.

Таблица 4. Предельные эффекты для сделок со страновым барьером

Дополнительное условие	<i>Country</i> = 1	
	предельный эффект для среднего по выборке, п.п.	уровень значимости, %
+1 млрд долл. к стоимости сделки	−0,30	5
+1 тыс. сотрудников компании-цели	−0,26	5
+ 1 тыс. сотрудников компании-покупателя	0,14	5
+1 день	0,06	5

Источник: составлено авторами на основании эмпирического анализа.

Таким образом, проведенный авторами эмпирический анализ степени влияния различных рисков на успешность реализации крупных проектов слияний и поглощений позволил выявить следующие наиболее значимые риски:

- 1) враждебный характер сделки (или конфликт интересов между сторонами);
- 2) страновой барьер;
- 3) неверная (завышенная) стоимостная оценка сделки;
- 4) соотношение размеров компании-цели и компании-покупателя;
- 5) отклонение сроков заключения сделки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Рекомендации, изложенные далее, в большей степени относятся к этапу «Руководство изменениями» при управлении проектными рисками по международному стандарту⁴. Общие принципы заключительного этапа — мониторинг рисков — применимы для всех рассматриваемых групп (Грачева, 2002, 2018), а более детальные методы и подходы непосредственно зависят от организационной структуры каждой конкретной компании и потому не будут подробно рассматриваться в рамках наших рекомендаций.

Управление риском враждебного характера

Владельцем этого риска является компания-покупатель, поскольку именно она заинтересована в успешном завершении сделки, в то время как компания-цель, по определению враждебной сделки, не хочет такого исхода. Факт того, что в построенной модели недружелюбный характер слияния или поглощения предопределяет его неуспех, может свидетельствовать о достаточно хорошо развитых и финансово доступных механизмах защиты от враждебных поглощений у крупных компаний (Pearce, Robinson, 2004).

В качестве стратегий управления такими рисками можно использовать отказ от риска или его снижение.

Отказ от риска предполагает, что организация не вступает в сделку или прерывает ее, если понимает, что проект не является желательным для руководства компании-цели. Полное отклонение сделки может показаться радикальным, однако по результатам проведенного нами исследования ни одно из слияний или поглощений, которое не достигло дружелюбного характера, не завершилось успешно. Поэтому оставить стратегию рейдерства в стороне, когда речь идет об особо крупных корпорациях, представляется выгоднее, чем нести значительные финансовые и репутационные издержки.

Снижение риска оказывается более перспективным из-за того, как в модели была устроена переменная *NatureOfBid*: она принимала значение 1 и в том случае, когда сделка была дружественной изначально, и тогда, когда она стала таковой в процессе. То есть даже если по началу взаимоотношения между сторонами не ладятся, можно изменить этот фактор в процессе проекта и полностью избежать данного предопределяющего риска.

Основные мероприятия, направленные на снижение риска враждебности крупных проектов слияний и поглощений, должны быть направлены на ведение переговоров с акционерами и топ-менеджментом компании, которую владелец риска намерен приобрести. Помимо общих рекомендаций для ведения переговоров, широко освещенных как в научной, так и в публицистической литературе, эксперты по сделкам обращают внимание на следующие шаги, которые помогают создать дружелюбные отношения между сторонами крупной сделки слияния или поглощения:

— прорабатывать альтернативные варианты покупки, не забрасывать другие цели полностью после выбора наиболее подходящей; необходимо быть морально готовым к конкуренции за приобретение желаемой компании (Ury, Patton, Fisher, 1991);

— на первичных переговорах рекомендуется быть гибким в вопросе стоимости сделки, избегать ультиматумов, больше внимания уделять формированию единой проектной команды, оценке настроений акционеров и топ-менеджеров оппонента (Aiello, Watkins, 2000);

⁴ IEC31010:2019. Risk management — Risk assessment techniques. Edition 2. 2019.

— быть честным в своем стратегическом видении интегрированной компании не только с ее руководством, но и с внешними контрагентами (Ahammad et al., 2016). Это поможет нивелировать скачки в цене акций компании на бирже ценных бумаг (Aiello, Watkins, 2000);

— разделить представителей сторон на несколько команд, которые могли бы вести свои части переговоров параллельно, например: менеджеры, юристы, финансисты и инвестиционные банкиры (Aiello, Watkins, 2000).

Управление рисками, связанными с наличием странового барьера

Наличие странового барьера в крупном проекте слияния или поглощения привносит в сделку множество рисков. Глобально это может быть возросший риск неверного выбора компании-партнера (в частности, культурная, технологическая и брендовая несовместимость). Одновременно с этим растут риски нарушения законодательства одной из стран-участниц, потери местных поставщиков и существующей клиентской базы. Например, выход косметической компании на китайский рынок, где законодательно закреплено обязательное тестирование продукции на животных, посредством приобретения активов местного предприятия может привести к значительному оттоку клиентов из развитых западных стран, где широко распространено движение «cruelty-free» («произведено без жестокости»).

По результатам исследования с уверенностью можно выделить только значительное негативное влияние этого фактора на успешное завершение транзакционной фазы, поэтому рекомендации будут направлены преимущественно на нее и на предшествующий стратегический этап. Действительно, некоторые исследования показывают, что транснациональные M&A-проекты, а именно сильные культурные различия между организациями-участницами, на интеграционном этапе и в долгосрочной перспективе генерируют больше положительных синергий, чем аналогичные проекты компаний с одинаковым культурным кодом (Chakrabarti, Gupta-Mukherjee, Jayaraman, 2009). Работы с похожими выводами есть и для корпоративной культуры (независимо от национального аспекта) организаций, участвующих в сделках слияний и поглощений (Fong et al., 2019).

Здесь возможен временный *отказ от рисков* рассматриваемой группы. Не раз было доказано, что предыдущий опыт заключения международных сделок слияний и поглощений увеличивает вероятность успеха таких проектов в будущем (Barkema, Bell, Pennings, 1996; Finkelstein, Haleblan, 2002; Haleblan, Finkelstein, 1999; Vermeulen, Barkema, 2001; Very, Schweiger, 2001). Поскольку данное исследование и его результаты посвящены крупным слияниям и поглощениям, логично рекомендовать компании сначала попробовать себя в транснациональной сделке поменьше, возможно, даже в той же стране, где оперирует изначальная цель, и набраться опыта. Кроме того, допустима *передача юридических рисков* — компания может нанять юристов с подходящей экспертизой и обозначить в контракте, что в случае нарушений законодательства одной из стран-участниц организация будет вправе рассчитывать на компенсацию.

В рамках стратегии снижения рисков, связанных с наличием странового барьера в крупных сделках слияний и поглощений, возможно проведение ряда мероприятий.

На этапе выбора компании-цели необходимо оценить как свою собственную (Denison, Adkins, Guidroz, 2011; Marks, Mirvis, 2001), так и партнерскую (Harding, Rouse, 2007) национальную и корпоративную культуры. Осознание сходств и различий поможет идентифицировать реальные риски крупной сделки реструктуризации, а также выбрать лучшую стратегию для переговоров и интеграции.

Многим компаниям помогали корпоративные тренинги, направленные на формирование общей идентичности у сотрудников реорганизованного предприятия (Vaara, Tienari, Sääntti, 2003). Такие мероприятия можно начать проводить для топ-менеджмента сторон даже до интеграционного этапа.

Управление рисками неверной оценки стоимости

Риски неверной оценки стоимости крупных проектов слияний и поглощений можно *снизить* за счет привлечения к сделке консультантов, аудиторов и оценщиков высшего уровня. Работы прошлых лет показывают, что такие специалисты имеют больше шансов успешно завершить проект (Hunter, Jagtiani, 2003). Лицам, непосредственно принимающим решение заключать крупные сделки слияния или поглощения, также рекомендуется лично и детально контролировать процесс оценки (Aiello, Watkins, 2000).

В рамках стратегии *снижения риска* со стороны продаваемой компании мы можем рекомендовать ей не пытаться слишком сильно завышать цену. Эмпирические исследования (в том числе

наше) указывают: чем выше стоимость сделки, тем меньше шансов ее успешного завершения (Bahreini et al., 2019).

Управление рисками, связанными с численностью персонала в компаниях, заключающих крупные сделки слияний и поглощений

Как и с рисками, связанными со страновым барьером, разработанная нами модель позволяет учесть влияние числа сотрудников в компании-покупателе и в приобретаемой организации только на успешное течение стратегической и транзакционной стадий. В связи с этим рекомендации будут сфокусированы преимущественно на этих стадиях. Однако отметим, что некоторые исследования указывают на значимость данных рисков как раз на начальных этапах, а также в долгосрочном периоде, на этапе постинтеграции (Oh et al., 2014). Это подтверждает один из выводов эмпирической части данного исследования: проекты слияний и поглощений, в которых относительный размер компании-цели меньше, чем компании-покупателя, в среднем показывают себя более успешными. В данном случае успешность сделки определяется как завершение и приращение финансовых показателей реорганизованного предприятия. Работы предшественников с регрессионным анализом подтверждают наличие преимущества в сделках слияний и поглощений у более крупных компаний-покупателей (Stylianou, Jeffries, Robbins, 1996).

Основными методами управления рисками, связанными с соотношением числа работников в компаниях, заключающих крупные сделки слияний и поглощений, представляются:

— *отказ от риска* — компании-покупателю стоит отдавать предпочтение заключению крупных сделок слияний и поглощений с более мелкими (насколько это возможно в условиях крупных М&А-сделок) компаниями, отказываться от реализации проектов с многочисленными предприятиями. Компании-цели, напротив, стоит искать партнеров как можно крупнее с точки зрения количественного состава работников;

— *снижение риска* — компании-цели рекомендовано произвести аудит человеческих ресурсов и соответствующие сокращения перед продажей предприятия или его значительной части. Приобретающей организации следует испробовать все возможности естественного роста численности собственных сотрудников;

— *принятие риска* — если вышеописанные методы оказываются недоступны или в ходе стратегического этапа при выборе цели становится очевидным, что сделка с определенной компанией принесет значительные выгоды, допустимо принятие риска — начать осуществление проекта в любом случае.

Управление риском отклонения сроков заключения договора

Результаты проведенного нами эмпирического исследования показали положительную корреляцию успешности и длительности-заключения крупной сделки слияния или поглощения. То есть дополнительный день увеличивает шансы компаний-участниц прийти к соглашению. Этим риском можно управлять, избрав одну из стратегий:

— *снижение риска* — отказ от проведения проекта в сжатые сроки. Менеджменту рекомендуется сделать выбор в пользу планомерной работы, связанной с заключением соглашения, охватывающего все аспекты сделки и прорабатывающего риски уже на начальном стратегическом этапе;

— *полное принятие риска*, поскольку он показал себя относительно незначительным (0,05–0,06 п.п.) по сравнению с проанализированными в предыдущих пунктах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными элементами научной новизны исследования являются:

1) результаты количественной оценки степени влияния рисков на успешность крупных проектов слияний и поглощений, полученные с помощью эмпирических методов (экономико-математической модели). Построенная модель отличается от предыдущих исследований включением в выборку стран без ограничений, большинства секторов экономики и уникального определения успешности проекта слияния или поглощения, актуального для крупных сделок;

2) разработанные методические рекомендации управления эмпирически значимыми рисками крупных проектов слияний и поглощений.

Практическую значимость исследованию придают эмпирические оценки степени влияния различных рисков на успешность крупных проектов слияний и поглощений, а также возможность практической реализации рекомендаций, направленных на управление наиболее значимыми из них. Это позволяет топ-менеджерам крупных компаний, стратегическим и финансовым консультантам, занимающимся сопровождением сделок, получить информацию, необходимую для наиболее эффективного распределения ресурсов в процессе риск-менеджмента. Следствием этого является сокращение числа неудачных крупных проектов слияний и поглощений, нивелирование финансовых и репутационных потерь для компаний-сторон.

Дальнейшее продвижение исследования может быть связано с расширением числа риск-факторов, включенных в модель, за счет получения доступа к внутренней информации компаний. Кроме того, интересно сравнить степень влияния одних и тех же рисков на успешность крупных, средних и мелких сделок слияний и поглощений. Вероятно, это будет корректнее сделать уже в иных рамках понятия «успешность», чем в разработанной модели, например через финансовые показатели постинтеграционного периода, поскольку введенное в работе определение было специфично для дорогостоящих проектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Алефиров В.И.** (2017). Самые неудачные сделки M&A на развивающихся рынках капитала: основные причины неудач: бакалаврская выпускная работа. Образовательная программа «Экономика». М.: НИУ ВШЭ. 63 с. [**Alefirov V.I.** (2017). *Least successful M&A deals on emerging markets: Main causes of failure*. Bachelor's thesis on Economics. Moscow: HSE University. 63 p. (in Russian).]
- Грачева М.В.** (2002). Управление проектными рисками. В сборнике трудов «История управленческой мысли и бизнеса» V международной конференции «Проблемы измерений в управлении организацией». М.: ТЕИС. [**Gracheva M.V.** (2002). Project risk management. In: *Proceedings "History of managerial thought and business" of the V International Conference "Measurement problems in organization management"*. Moscow: TEIS (in Russian).]
- Грачева М.В.** (2018). Математические и инструментальные методы в современных экономических исследованиях. В кн.: «Математические методы в инвестиционно-проектной деятельности: учет рисков». Монография. Колл. авторов: под науч. ред. М.В. Грачевой. М.: Экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. 232 с. [**Gracheva M.V.** (2018). Mathematical and instrumental methods in modern economic research. In: *Mathematical methods in investment and project activities: Risk accounting*. Monograph. Collective author. M.V. Gracheva (gen. ed.). Moscow: Faculty of Economics, Lomonosov Moscow State University. 232 p. (in Russian).]
- Меньшиков Е.В.** (2021). Способы финансирования сделок слияний и поглощений: теоретические основы // *Вестник Алтайской академии экономики и права*. № 6 (2). С. 213–219. [**Menshikov E.V.** (2021). Instruments of financing mergers and acquisitions: Theoretical foundations. *Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law*, 6 (2), 213–219 (in Russian).]
- Утемова Н.О.** (2022). Управление рисками крупных проектов слияний и поглощений. Магистерская диссертация: программа «Предпринимательство и управление проектами». М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 60 с. [**Utemova N.O.** (2022). Risk management of big mergers and acquisitions projects: master's thesis: Entrepreneurship and project management. Moscow: Lomonosov Moscow State University. 60 p. (in Russian).]
- Ahammad M.F., Tarba S.Y., Liu Y., Glaister K.W., Cooper C.L.** (2016). Exploring the factors influencing the negotiation process in cross-border M&A. *International Business Review*, 25 (2), 445–457.
- Aiello R.J., Watkins M.D.** (2000). The fine art of friendly acquisition. *Harvard Business Review*, 78, 6, 100–107.
- Bahreini D., Bansal R., Finck G., Firouzzgar M.** (2019). *Done deal? Why many large transactions fail to cross the finish line, 2019*. McKinsey & Company. Available at: <https://www.mckinsey.com/business-functions/strategy-and-corporate-finance/our-insights/done-deal-why-many-large-transactions-fail-to-cross-the-finish-line>
- Barkema H.G., Bell J.H.J., Pennings J.M.** (1996). Foreign entry, cultural barriers, and learning. *Strategic Management Journal*, 17, 2, 151–166.
- Cao J., Ellis K.M., Li M.** (2019). Inside the board room: The influence of nationality and cultural diversity on cross-border merger and acquisition outcomes. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 53, 4, 1031–1068.
- Chakrabarti R., Gupta-Mukherjee S., Jayaraman N.** (2009). Mars–Venus marriages: Culture and cross-border M&A. *Journal of International Business Studies*, 40, 2, 216–236.
- Denison D.R., Adkins B., Guidroz A.M.** (2011). *Managing cultural integration in cross-border mergers and acquisitions. Advances in global leadership*. Emerald Group Publishing Limited.

- Finkelstein S., Haleblan J.** (2002). Understanding acquisition performance: The role of transfer effects. *Organization Science*, 13, 1, 36–47.
- Fong W.M., Lam K.C., Wong P.W., Yao Y.** (2019). Mergers & acquisitions and the acquirer-target cultural differences. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 53, 633–661.
- Franks J., Harris R., Titman S.** (1991). The post-merger share-price performance of acquiring firms. *Journal of Financial Economics*, 29, 1, 81–96.
- Goergen M., Renneboog L.** (2004). Shareholder wealth effects of European domestic and cross-border takeover bids. *European Financial Management*, 10, 1, 9–45.
- Haleblan J., Finkelstein S.** (1999). The influence of organizational acquisition experience on acquisition performance: A behavioral learning perspective. *Administrative Science Quarterly*, 44, 1, 29–56.
- Harding D., Rouse T.** (2007). Human due diligence. *Harvard Business Review*, 85, 4, 124.
- Hunter W.C., Jagtiani J.** (2003). An analysis of advisor choice, fees, and effort in mergers and acquisitions. *Review of Financial Economics*, 12, 1, 65–81.
- Levy B., Lloyd M., Brown D.** (2022). *Global M&A Industry Trends: 2022. Outlook*. PWC Available at: <https://www.pwc.com/gx/en/services/deals/trends.html>
- Marks M.L., Mirvis P.H.** (2001). Making mergers and acquisitions work: Strategic and psychological preparation. *Academy of Management Perspectives*, 15, 2, 80–92.
- Oh J.H., Peters L.D., Johnston W.J.** (2014). Who's acquiring whom? Experimental evidence of firm size effect on B2B mergers and marketing/sales tasks. *Industrial Marketing Management*, 43, 6, 1035–1044.
- Pearce II J.A., Robinson Jr. R.B.** (2004). Hostile takeover defenses that maximize shareholder wealth. *Business Horizons*, 47, 5, 15–24.
- Servaes H.** (1991). Tobin's Q and the gains from takeovers. *The Journal of Finance*, 46, 1, 409–419.
- Stylianou A.C., Jeffries C.J., Robbins S.S.** (1996). Corporate mergers and the problems of IS integration. *Information & Management*, 31, 4, 203–213.
- Sudarsanam S., Mahate A.A.** (2006). Are friendly acquisitions too bad for shareholders and managers? Long-term value creation and top management turnover in hostile and friendly acquirers. *British Journal of Management*, 17, S1, S7–S30.
- Thunberg E.** (2015). *Cross-industry collaboration: How to boost innovation capability*. Master of science thesis. KTH Industriell teknik och management. Stockholm. 85 p.
- Ury W., Patton B., Fisher R.** (1991). *Getting to yes: Negotiating agreement without giving in*. New York: Penguin Books. 224 p.
- Vaara E., Tienari J., Sääntti R.** (2003). The international match: Metaphors as vehicles of social identity-building in cross-border mergers. *Human Relations*, 56, 4, 419–451.
- Vermeulen F., Barkema H.** (2001). Learning through acquisitions. *Academy of Management Journal*, 44, 3, 457–476.
- Very P., Schweiger D.M.** (2001). The acquisition process as a learning process: Evidence from a study of critical problems and solutions in domestic and cross-border deals. *Journal of World Business*, 36, 1, 11–31.
- Wittmer C., Potter J.D.** (2019). *Succeeding through M&A in uncertain economic times*. PWC. Available at: <https://www.pwc.com/us/en/services/consulting/deals/ma-in-uncertain-economic-times.html>

Empirical analysis of risks' influence on the large mergers and acquisitions projects' success in modern companies

© 2023 M.V. Gracheva, N.O. Utemova

M.V. Gracheva,

Economics Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: grachevamv@mail.ru

N.O. Utemova,

Economics Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; e-mail: utemovanata@gmail.com

Received 26.10.2022

We wish to express our gratitude to Igor Mikhailovich Churkin for his assistance in finding literature on the topic "Mergers and Acquisitions".

Abstract. Mergers and acquisitions (M&A) are among the key strategies for stabilizing and strengthening a company's market position in an unstable economic environment and gaining a competitive advantage from inorganic growth. Doing so, big M&A deals show a higher risk of failing, being terminated, or being incomplete, which can lead to financial, reputational, and time losses. Due to these factors, prudent risk-management of such transactions is necessary, including the evaluation of the degree to which various risk groups influence M&A success. This paper evaluates big (those the value of which exceeds 10 billion euros) M&A projects risks influence on the success of the deal closure quantitatively and offers recommendations for managing significant risks using the project methodology. The analysis includes probit-regressions on a wide sample of 24 countries and 10 amalgamated industries. As a result, five risk groups appear significant: risk of transaction's hostile nature; cross-country risks; risk of misjudging the transaction value; risks associated with the size ratio of target and acquiring companies; risk of delaying the terms of the deal. Transnational mergers and acquisitions demonstrate a stronger influence of all significant risks on the transaction's success. The paper provides recommendations for managing significant risks using the project methodology.

Keywords: mergers and acquisitions, risk management, project management, project risks.

JEL Classification: G34, O22, L20.

For reference: **Gracheva M.V., Utemova N.O.** (2023). Empirical analysis of risks' influence on the large mergers and acquisitions projects' success in modern companies. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 79–92. DOI: 10.31857/S042473880024877-3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Макроэкономическая роль залогового ограничения в странах, зависимых от экспорта ресурсов

© 2023 М.Ю. Андреев, А.В. Полбин

М.Ю. Андреев,

Банк России, РАНХиГС, Москва; e-mail: m.andreyev@inbox.ru

А.В. Полбин,

Институт экономической политики им. Е.Т. Гайдара; РАНХиГС, Москва; e-mail: apolbin@gmail.com

Поступила в редакцию 13.05.2022

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-78-10020¹.

Аннотация. Рассматривается малая открытая экономика, сильно зависящая от экспорта ресурсов. Цель исследования — выявить в такой экономике роли залогового ограничения — требования, согласно которому стоимость долга не должна превышать определенной доли стоимости залогового обеспечения. Изучается трансмиссионная роль залогового ограничения при шоке условий торговли. Рассмотрена динамическая стохастическая модель общего равновесия. В модели долговые обязательства возникают между двумя типами домохозяйств: терпеливыми, являющимися одновременно кредиторами и собственниками производственного капитала, и нетерпеливыми — должниками. Модель отличает наличие двух ограничений — залогового и неотрицательности номинальной процентной ставки, что вместе с наличием случайности в модели предъявляет особые требования к методу решения. Если денежно-кредитная политика неинерционная (т.е. центральный банк при установке процентной ставки слабо привязан к ее историческим значениям), то при серии шоков условий торговли реакция экономики оказывается сильно несимметричной по отношению к направлению шоков (положительному и отрицательному). Срабатывают оба вида ограничения-неравенства, т.е. экономика на определенное время оказывается в ситуации, когда перестают выполняться два характерных для долгосрочного равновесия равенства — устанавливающее процентную ставку правило Тейлора и залоговое ограничение в форме равенства. Срабатывание обоих ограничений приводит к уменьшению положительного воздействия шока условий торговли на экономику. Если же центральный банк при установке процентной ставки сильно привязан к ее историческим значениям или слабо реагирует на инфляцию, срабатывает лишь залоговое ограничение, а эффект асимметрии оказывается слабым.

Ключевые слова: динамическая стохастическая модель общего равновесия, нелинейные модели, залоговое ограничение, условия торговли, асимметрия, нулевая граница ставок.

Классификация JEL: D58, E32, E52, E58.

Для цитирования: **Андреев М.Ю., Полбин А.В.** (2023). Макроэкономическая роль залогового ограничения в странах, зависимых от экспорта ресурсов // *Экономика и математические методы*. Т. 59. № 1. С. 93–104. DOI: 10.31857/S042473880020147-0

1. ВВЕДЕНИЕ

По мере накопления экономического знания и развития численных методов экономические исследования все интенсивнее применяют нелинейные подходы к моделированию. Нелинейные модели позволяют, например, описать асимметричность в динамике наблюдаемых макроэкономических данных. Ярким примером асимметричности является динамика во время бизнес-циклов: реальные макроэкономические показатели во время кризиса падают довольно резко за короткий интервал времени, восстанавливаются же они в течение более продолжительного периода с более низкими по абсолютной величине темпами роста.

Понимание природы асимметрии в макроэкономике является высоко значимым с практической точки зрения. Во-первых, оно важно для повышения эффективности денежно-кредитной

¹ <https://rscf.ru/project/21-78-10020/>

политики и, как следствие, эффективности функционирования всей экономики. Эффективность денежно-кредитной политики может различаться в зависимости от фазы делового цикла и его амплитуды, от ожиданий экономических агентов относительно проводимой экономической политики, от следования или не следования центральным банком данным ранее обещаниям. Например, смягчение денежно-кредитной политики на фазе спада действует ожидаемо слабее, чем ужесточение на фазе экономического подъема. Изучение связи между асимметрией и экономической политикой на уровне экономических моделей проводилось с 1990-х годов (см., например, (Cover, 1992; Karras 1996)) и продолжается до сих пор с расширением модельного аппарата (см., например, (Aastveit, Anundsen, 2022)). Во-вторых, наличие асимметрии в экономической динамике может серьезно влиять на получаемые оценки параметров функционирования экономики. Например, асимметрия может приводить к смещению прогнозных оценок и отвержению гипотезы о рациональности агентов (Elliott, Komunjer, Timmermann, 2008).

Такие макроэкономические нелинейности, как естественное ограничение неотрицательности номинальных процентных ставок (*zero lower bound*, ZLB), также приводят к смещению оценок параметров моделей. В работе (Hirose, Inoue, 2016) выявлено, что при росте вероятности попадания экономики на ZLB смещение принимает все большие масштабы, приводя к искажению функций импульсного отклика, которые характеризуют динамическое влияние структурных макроэкономических шоков на макроэкономические показатели. В (Iiboshi, Shintani, Ueda, 2022) на примере оценки нелинейной модели для Японии показано, что учет нелинейностей играет решающую роль в анализе эффектов денежно-кредитной политики, для оценки траектории нейтральной реальной ставки процента.

Залоговое ограничение наряду с ZLB является, пожалуй, одним из наиболее изучаемых источников экономической асимметрии. Оно представляет собой требование, согласно которому стоимость долга не должна превышать определенной доли стоимости залогового обеспечения. Интерес к залоговому ограничению связан в первую очередь с важностью роли финансового посредничества и механизма финансового акселератора, подчеркнутого в работах (Kiyotaki, Moore, 1997; Bernanke, Gertler, Gilchrist, 1999; Kocherlakota, 2000) и др., и позже активно используемого для объяснения движущих причин мирового экономического кризиса 2008 г.

Моделирование залогового ограничения требует наличия гетерогенных экономических агентов-домохозяйств. Один из типов агентов терпелив и исполняет роль кредиторов, а другой тип нетерпелив и занимает средства либо для покупки недвижимости (Guerrieri, Iacoviello, 2017), либо для покупки средств производства (Davis, Presno, 2017; Liu, Wang, Zha, 2013; Liu, Miao, Zha, 2016) (агент-предприниматель), либо — того и другого (Andres, Arce, Thomas, 2013).

Долгое время исследователи при работе с залоговыми ограничениями были вынуждены вместо неравенств, которые могут выполняться с запасом или без, использовать просто равенства. Это приводило к тому, что как при положительных, так и при отрицательных шоках экономика описывалась одной и той же системой уравнений. В результате амплитуда воздействия шоков не менялась в зависимости от направления шока. Исследователям оставалось сравнивать ситуации с наличием акселерирующего механизма и без него. Данный подход позволяет качественно объяснять некоторые феномены. Например, с помощью ограничения стоимости предприятия финансового посредника (Gertler et al., 2012) можно оценить риски, которые берет на себя банковская система, а позднее (Gertler et al., 2020) рассмотреть возможность существования «хороших» и «плохих» кредитных бумов. Несмотря на то что различные подходы к описанию финансового акселератора постоянно сравниваются между собой и не всегда лучшим оказывается вариант залогового ограничения (Brzoza-Brzezina, Kolasa, Makarski, 2013), простота и прозрачность данного ограничения делают его одним из наиболее популярных методов моделирования финансовых несовершенств в экономике.

В последние годы на смену моделированию ограничений как равенств стал приходить точный учет срабатывания неравенств: в одни периоды неравенства могут быть выполнены как равенства, а в другие — с запасом — как нестрогие неравенства. Модель, в которой присутствует периодически срабатывающее неравенство, является нелинейной. Не существует единого общепризнанного метода решения стохастических моделей с неравенствами. Однако в последние годы данные методы активно развиваются. Эти методы основываются на кусочно-линейном приближении решения нелинейных моделей (Guerrieri, Iacoviello, 2015; Holden, 2016), многочленах Чебышева (Aguoba, Cuba-Borda, Schorfheide, 2018), машинном обучении (Lepetyuk, Maliar L., Maliar S., 2020) и т.д. В (Lepetyuk et al., 2020) были получены косвенные доказательства эквивалентности различных

подходов к решению стохастических моделей с неравенствами на уровне функций импульсного отклика. Авторы (Guerrieri, Iacoviello, 2017) разработали алгоритм оценивания параметров стохастических моделей с ограничениями-неравенствами. Этот алгоритм позволил оценить модель с залоговым ограничением и выявить асимметричность: бум на рынке недвижимости перед 2007 г. сопровождался вялым ростом потребления, тогда как падение на рынке недвижимости повлекло за собой масштабный провал в потреблении.

Нашей задачей является исследование механизма действия залогового ограничения, поведения гетерогенных агентов и изучение асимметрии в связи с залоговым ограничением в экономике, сильно зависящей от экспорта сырьевых товаров (например, экономике России). Актуальность исследования залогового ограничения обоснована усилением роли ипотечного кредитования и рынка недвижимости в экономике РФ в последнее десятилетие. Полученные в работе результаты различаются в зависимости от вида денежно-кредитной политики: от степени реакции ключевой ставки центрального банка на изменение инфляции и от степени сглаживания траектории процентных ставок во времени (параметр автокорреляции процентных ставок в инструментальном правиле Тейлора).

В статье рассматривается вопрос взаимного влияния залогового ограничения и ZLB, приводится математическое описание модели (разд. 2), технические детали моделирования залогового ограничения (разд. 3), калибровка модели (разд. 4), результаты расчетов (разд. 5). Основные выводы приведены в разд. 6.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

2.1. Общее описание модели

Мы строим модель малой открытой экономики, сильно зависящей от экспорта природных ресурсов. Для этого мы расширяем модель, представленную в (Guerrieri, Iacoviello, 2017) производством экспортного товара, требующего факторов труда и капитала, а также предполагаем наличие потребности в импортном продукте при производстве товаров конечного потребления.

В модели присутствуют гетерогенные домохозяйства. *Терпеливые домохозяйства* владеют производственным капиталом, принимают решения относительно объема инвестиций и сдают его в аренду. Они могут одалживать средства другому типу домохозяйств — *нетерпеливым домохозяйствам*. Оба типа домохозяйств получают удовольствие не только от потребления, но и от владения недвижимостью. Недвижимость в данной модели не производится и не амортизируется, ее постоянный объем распределяется между двумя типами домохозяйств. Недвижимость используется нетерпеливыми домохозяйствами в качестве залога при привлечении займов.

Труд нетерпеливых и терпеливых домохозяйств дифференцируется производителями. Производители внутреннего промежуточного (неторгуемого) товара и производители экспортного (торгуемого) товара привлекают два производственных фактора: производственный капитал и труд каждого типа домохозяйств. Внутренний промежуточный продукт комбинируется с импортным для производства конечного внутреннего продукта, который расходуется на потребление домохозяйств и инвестиции обоих секторов.

В качестве механизмов несовершенств, приводящих к неэффективности равновесия и рационализирующих присутствие органа монетарной политики, в модели присутствует жесткость внутренних промежуточных цен и жесткость заработных плат.

Распространение влияния шока условий торговли происходит следующим образом. Положительный шок условий торговли укрепляет национальную валюту. Так как импорт используется в производстве конечного продукта, то укрепление национальной валюты способствует снижению инфляции и номинальной процентной ставки в рамках реализации денежно-кредитной политики на основе правила Тейлора, согласно которому параметр реакции ставки процента на денежном рынке на инфляцию является положительным. Эффект дохода вызывает рост потребления и спроса на недвижимость, что влечет за собой рост цен на недвижимость. Рост цен на недвижимость приводит к тому, что стоимость залога может оказаться выше величины заемных средств, т.е. объем заемных средств может перестать быть лимитированным залогом. Снижение процентных ставок может противоречить ограничению неотрицательности номинальных ставок. Таким образом, в экспортирующей экономике положительный шок условий торговли может вызвать как срабатывание ограничения неотрицательности ставки, так и ослабление залогового ограничения.

2.2. Домохозяйства

Домохозяйства оптимизируют функцию полезности, отражающую удовольствия от потребления и владения недвижимостью и неудовольствие от труда. Функция полезности терпеливых домохозяйств имеет вид

$$E \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\gamma_C \ln(C_t - \varepsilon_C C_{t-1}) + j \gamma_H \ln(H_t - \varepsilon_H H_{t-1}) - (N_t)^{1+\eta} / (1+\eta) \right), \quad (1)$$

нетерпеливых² —

$$E \sum_{t=0}^{\infty} (\beta')^t \left(\gamma'_C \ln(C'_t - \varepsilon_C C'_{t-1}) + j \gamma'_H \ln(H'_t - \varepsilon_H H'_{t-1}) - (N'_t)^{1+\eta} / (1+\eta) \right), \quad (2)$$

где E — оператор математического ожидания; C_t, H_t, N_t — потребление, объем недвижимости и труд терпеливых домохозяйств; аналогично для нетерпеливых домохозяйств — C'_t, H'_t, N'_t . Параметры $\varepsilon_C, \varepsilon_H$ и соответствующие слагаемые отражают привычки домохозяйств в потреблении и владении недвижимостью. Параметры $\gamma_C, \gamma_H, \gamma'_C, \gamma'_H$ являются калибровочными, их размер подобран так, чтобы предельная полезность потребления и владения недвижимостью в долгосрочном равновесии не зависели от привычек.

Параметры предпочтения времени β, β' удовлетворяют неравенству $\beta > \beta'$, что отражает большую склонность нетерпеливых домохозяйств потреблять по сравнению с терпеливыми домохозяйствами. Эти неравенства также обеспечивает условие, согласно которому в долгосрочном равновесии нетерпеливые домохозяйства являются заемщиками.

Бюджетные ограничения терпеливых и нетерпеливых домохозяйств в реальном выражении имеют вид:

$$C_t + Q_t H_t + B_t + B_t^f S_t + I_t^d + I_t^{ex} = W_t N_t / X_{W,t} + Q_t H_{t-1} + (R_{t-1} B_{t-1}) / \pi_t + R^f B_{t-1}^f S_t / \pi^f + \\ + 0,5d (B_t^f S_t / Y_t)^2 Y_t + Rk_t^d K_{t-1}^d + Rk_t^{ex} K_{t-1}^{ex} + Div_t, \quad (3)$$

$$C'_t + Q_t H'_t + R_{t-1} B_{t-1} / \pi_t = W'_t N'_t / X'_{W,t} + Q_t H'_{t-1} + B_t + Div'_t. \quad (4)$$

Здесь Q_t — цена недвижимости; B_t — кредиты от терпеливых домохозяйств нетерпеливым; R_t — процентная ставка по кредитам; W_t, W'_t — цена труда терпеливых и нетерпеливых домохозяйств, оплачиваемая производителем; π_t — темп роста цен на конечный продукт в экономике; S_t — реальный обменный курс; Y_t — конечный внутренний продукт; $W_{W,t}, X'_{W,t}$ — наценки на труд, образованные в результате действий посредника, обладающего монопольной властью на рынке труда; Div_t, Div'_t — прибыль посредников на рынке труда и на рынке промежуточного внутреннего продукта, передаваемая домохозяйствам.

Помимо кредитов, предоставляемых нетерпеливым домохозяйствам, терпеливые домохозяйства имеют возможность вкладывать средства в иностранные облигации B_t^f , номинированные в иностранной валюте, под постоянную ставку R^f . Считается, что внешняя инфляция π_t постоянна и в долгосрочном равновесии совпадает с внутренней инфляцией. За изменение уровня вложений в иностранные облигации терпеливое домохозяйство несет издержки в размере $0,5d(B_t^f S_t / Y_t)^2 Y_t$.

Терпеливым домохозяйствам принадлежит производственный капитал двух типов: K_t^d — для нужд производства промежуточного внутреннего товара; K_t^{ex} — для производства торгуемого товара. Оба типа производственного капитала сдаются в аренду по ставкам Rk_t^d и Rk_t^{ex} . Инвестиции I_t^d, I_t^{ex} осуществляются для производства нового производственного капитала. Динамика производственного капитала с учетом выбытия и реальных издержек $\phi(I_t^d - I_{t-1}^d)^2 / I_{ss}^d$ и $\phi(I_t^{ex} - I_{t-1}^{ex})^2 / I_{ss}^{ex}$ на изменение уровня капитала имеет вид:

$$K_t^d = (1 - \delta) K_{t-1}^d + I_t^d - \phi(I_t^d - I_{t-1}^d)^2 / I_{ss}^d, \quad (5)$$

$$K_t^{ex} = (1 - \delta) K_{t-1}^{ex} + I_t^{ex} - \phi(I_t^{ex} - I_{t-1}^{ex})^2 / I_{ss}^{ex}. \quad (6)$$

Задача терпеливых домохозяйств заключается в максимизации функции полезности (1) при бюджетном ограничении (3) и технологических ограничениях (5), (6).

Задача нетерпеливых домохозяйств — в максимизации функции полезности (2) при бюджетном ограничении (4) и залоговом ограничении

$$B_t \leq \gamma B_{t-1} / \pi_t + (1 - \gamma) m Q_t H'_t. \quad (7)$$

² Переменные нетерпеливых домохозяйств обозначены теми же символами со штрихом.

Согласно залоговому ограничению текущий долг не должен превышать взвешенной суммы долга и стоимости залога. Введение параметра γ объясняется тем, что в случае выдачи кредитов на длительные периоды времени, что наблюдается в действительности, лишь доля домохозяйств будет оформлять покупку новой недвижимости в выделенный период времени, и только для этой части домохозяйств на практике устанавливается залоговое ограничение в виде неперевышения объема кредита стоимости залога. Усреднение по индивидам, оформляющим и не оформляющим покупку в данный период времени, дает выражение (7).

2.3. Производители внутреннего промежуточного товара и производители экспортного товара

Производители внутреннего промежуточного продукта Y_t^d и производители экспортного продукта Exp_t используют 3 фактора производства: труд терпеливых домохозяйств $N_{d,t}$, $N_{ex,t}$, труд нетерпеливых домохозяйств $N'_{d,t}$, $N'_{ex,t}$ и производственный капитал K_t^d , K_t^{ex} .

Производственные функции секторов имеют вид:

$$Y_t^d = (N_{d,t})^{(1-\sigma)(1-\alpha)} (N'_{d,t})^{\sigma(1-\alpha)} (K_t^d)^\alpha, \quad Exp_t = (N_{ex,t})^{(1-\sigma)(1-\alpha)} (N'_{ex,t})^{\sigma(1-\alpha)} (K_t^{ex})^\alpha.$$

Производитель внутреннего промежуточного товара продает продукт Y_t^d по номинальной цене $P_t^{d,flex}$ посреднику-монополисту, который затем перепродает товар производителю конечной продукции по цене P_t^d . Целью производителя является максимизация прибыли, которая в равновесии оказывается нулевой:

$$\tilde{P}_t^d Y_t^d / X_t^{pd} - W_t N_{d,t} - W'_t N'_{d,t} - R k_t^d K_t^d = 0.$$

В данном выражении обозначены следующие относительные цены: $\tilde{P}_t^d = P_t^d / P_t$, $X_t^{pd} = P_t^d / P_t^{d,flex}$, где P_t — номинальная цена на конечный продукт в экономике. Относительная цена X_t^{pd} отражает наценку, которую взимает посредник.

Производители экспортного товара продают продукт в объеме Exp_t на внешнем рынке по внешней номинальной цене. Отношение внешней номинальной цены на экспортируемый продукт к внешней цене импорта является условиями торговли и обозначается P_t^{res} . Цель производителей экспортного продукта — максимизация прибыли, оказывающаяся нулевой в равновесии: $S_t P_t^{res} Exp_t - W_t N_{ex,t} - W'_t N'_{ex,t} - R k_t^{ex} K_t^{ex} = 0$.

Считается, что динамика условий торговли P_t^{res} следует AR(1)-процессу в логарифмах:

$$\ln(P_t^{res}) = \rho_{res} \ln(P_{t-1}^{res}) + \varepsilon_t^{TOT}, \quad (8)$$

где ε_t^{TOT} (шоки условий торговли) — одинаково распределенные во времени независимые случайные величины с нулевым средним. Шок условий торговли является основным при последующем исследовании экспортирующей экономики.

2.4. Посредники

Предполагается, что существует 3 вида посредников: на рынке промежуточного внутреннего продукта, на рынке труда терпеливых домохозяйств и на рынке труда нетерпеливых домохозяйств.

Посредник на рынке промежуточного внутреннего продукта покупает товар Y_t^d у производителя по цене $P_t^{d,flex}$, дифференцирует этот товар и устанавливает на него цену согласно известной функции спроса, а затем продает товар производителю конечного товара. Производитель агрегирует³ дифференцированный товар перед использованием в конечном производстве (цена агрегированного товара — P_t^d). Считается, что установка посредником цены на товар происходит в соответствии с моделью Кальво: в каждый период времени доля θ_π посредников не может изменить цены, а доля $1 - \theta_\pi$ меняет цену оптимально, максимизируя приведенную прибыль. В результате максимизации получается соотношение между темпом роста относительной внутренней цены $\tilde{P}_t^d = P_t^d / P_t$ и наценкой $X_t^{pd} = P_t^d / P_t^{d,flex}$:

$$\ln\left(\frac{\tilde{P}_t^d}{\tilde{P}_{t-1}^d} \frac{\pi_t}{\pi^{ss}}\right) = \beta E \ln\left(\frac{\tilde{P}_{t+1}^d}{\tilde{P}_t^d} \frac{\pi_{t+1}}{\pi^{ss}}\right) - \frac{(1-\theta_\pi)(1-\beta\theta_\pi)}{\theta_\pi} \ln\left(\frac{X_t^{pd}}{X_{ss}^{pd}}\right). \quad (9)$$

Рекурсивная подстановка данного выражения показывает, что текущий темп роста относительной внутренней цены $\tilde{P}_t^d / \tilde{P}_{t-1}^d$ является приведенной суммой будущих наценок X_t^{pd} между ценой производителя внутреннего промежуточного товара $P_t^{d,flex}$ и ценой этого же товара, выплачиваемой

³ Математическую постановку задачи агрегирования см., например, в (Андреев, Полбин, 2019).

покупателем — производителем конечного товара. Таким образом, реализуется жесткость внутренних относительных цен.

Аналогичным образом посредники на рынке труда выкупают труд у домохозяйств, дифференцируют труд и продают его производителям, имея возможность с вероятностью θ_w установить оптимальную заработную плату:

$$\ln \left(\frac{W_t}{W_{t-1}} \frac{\pi_t}{\pi^{ss}} \right) = \beta E \ln \left(\frac{W_{t+1}}{W_t} \frac{\pi_{t+1}}{\pi^{ss}} \right) - \frac{(1-\theta_w)(1-\beta\theta_w)}{\theta_w} \ln \left(\frac{X_{W,t}}{X_{W,ss}} \right),$$

$$\ln \left(\frac{W'_t}{W'_{t-1}} \frac{\pi_t}{\pi^{ss}} \right) = \beta E \ln \left(\frac{W'_{t+1}}{W'_t} \frac{\pi_{t+1}}{\pi^{ss}} \right) - \frac{(1-\theta_w)(1-\beta\theta_w)}{\theta_w} \ln \left(\frac{X'_{W,t}}{X'_{W,ss}} \right).$$

2.5. Производители конечного внутреннего товара

По аналогии с работами (Карев, 2011; Полбин, 2014) мы будем считать, что производители конечного внутреннего товара комбинируют внутренний промежуточный продукт Y_t^d с импортом Imp_t , чтобы получить конечный выпуск Y_t в соответствии с технологией

$$Y_t = (Imp_t)^\omega (Y_t^d)^{1-\omega} / (\omega^\omega (1-\omega)^{1-\omega}). \quad (10)$$

Импортный продукт приобретается на внешнем рынке по цене (номинированной в иностранной валюте), которая считается постоянной и оплачивается по номинальному курсу $S_t P_t$. Внутренний промежуточный продукт приобретается по цене P_t^d . Цель деятельности производителя конечного товара — максимизация прибыли, оказывающейся нулевой в равновесии:

$$P_t Y_t - S_t P_t Imp_t - P_t^d Y_t^d = 0. \quad (11)$$

Следствием максимизации прибыли (11) при ограничении (10) является, в частности, соотношение между ценами $P_t = (S_t P_t)^\omega (P_t^d)^{1-\omega}$ — цена (и инфляция) на конечную продукцию зависит от внутренних цен и обменного курса. Принятие данной структуры производства позволяет учитывать влияние шока условий торговли на инфляцию и всю экономику через механизм ценообразования.

2.6. Денежно-кредитная политика

Денежно-кредитная политика заключается в таргетировании инфляции с помощью инструментального правила Тейлора

$$R_t - R^{ss} = \rho_r (R_{t-1} - R^{ss}) + (1-\rho_r) \rho_{inf} (\pi_t - \pi^{ss}), \quad (12)$$

где R^{ss}, π^{ss} — долгосрочные значения номинальной процентной ставки и инфляции. Параметр ρ_r отражает степень инерционности денежно-кредитной политики; ρ_{inf} — степень (сила) реакции ставки на изменение инфляции.

2.7. Условия равновесия

Условия равновесия на рынках конечного товара, труда терпеливых и нетерпеливых домохозяйств, а также условие равновесия на валютном рынке имеют вид:

$$Y_t = C_t + C'_t + I_t^d + I_t^{ex}, \quad N_t = N_{d,t} + N_{ex,t}, \quad N'_t = N'_{d,t} + N'_{ex,t},$$

$$P_t^{res} Exp_t - Imp_t - B_t^f + R^f B_{t-1}^f - 0,5d (B_t^f S_t / Y_t)^2 Y_t / S_t = 0.$$

Условие равновесия на валютном рынке содержит издержки на изменение уровня вложений в иностранные облигации, поскольку предполагается, что данные издержки оплачиваются на внешнем рынке.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАЛОГОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

В модели присутствует 2 ограничения в форме неравенств — залоговое ограничение (7) и ограничение неотрицательности номинальной процентной ставки

$$R_t \geq 0. \quad (13)$$

Особенность учета ограничения (7) как неравенства состоит в том, что в долгосрочном равновесии оно должно выполняться как равенство. Это создает дополнительную внутреннюю стоимость займов для нетерпеливого домохозяйства, которая уравнивает воспринимаемую им

процентную ставку как низкую (по отношению к восприятию терпеливого домохозяйства — в результате различия коэффициентов предпочтения времени). Только в такой ситуации экономическое равновесие оказывается возможным.

Выполнение (7) как равенства в долгосрочном равновесии приводит к тому, что ослабление ограничения возможно лишь в хорошие времена — когда цена залога растет. Таким образом, при исследовании (7) как неравенства, которое может быть ослаблено, фокус внимания оказывается на положительных шоках, повышающих стоимость залога.

При расчете модели учитывается возможность выполнения ограничения (7) как равенства и как строгого неравенства. А именно, если переписать ограничение (7) в форме

$$\gamma B_{t-1} / \pi_t + (1-\gamma)m Q_t H'_t - B_t \geq 0$$

и обозначить множитель Лагранжа при ограничении через φ_t , то в силу условия дополняющей жесткости необходимо, чтобы

$$\varphi_t \geq 0 \quad \& \quad \varphi_t (\gamma B_{t-1} / \pi_t + (1-\gamma)m Q_t H'_t - B_t) = 0.$$

Поэтому при каждом событии может быть выполнено только одно из условий: либо залоговое ограничение (7) выполняется как равенство, либо обнуляется множитель Лагранжа ($\varphi_t = 0$). В расчетах учитывается переход между двумя этими режимами.

Что касается ограничения неотрицательности процентной ставки (13), то при каждом событии либо неравенство (13) выполнено строго и действует правило Тейлора (12), либо верно $R_t = 0$. В последнем случае утверждают, что центральный банк не таргетирует инфляции, а инфляция определяется свободными рыночными силами.

В силу того что в экспортирующей экономике положительный шок условий торговли приводит к укреплению национальной валюты и, как следствие, снижению инфляции, центральный банк снижает ставку при положительных шоках условий торговли. Поэтому достижение нулевой границы ставок также происходит при положительных шоках (условий торговли).

Это означает, что именно при положительных шоках условий торговли могут сработать два неосновных режима: исполнение залогового ограничения с запасом и достижение ставкой нулевой границы.

4. КАЛИБРОВКА МОДЕЛИ

Калибровка модели повторяет работу (Guerrieri, Iacoviello, 2017) с учетом корректировки, связанной с включением блока производства экспортного продукта и изменения правила Тейлора, характерного для стран, экспортирующих ресурсы.

Аналогично (Guerrieri, Iacoviello, 2017) мы взяли коэффициент предпочтения времени терпеливых домохозяйств равным $\beta = 0,995$, что подразумевает годовой размер реальной процентной ставки 2%. Долгосрочное значение инфляции установлено на уровне 2% годовых. Инфляция 2% и реальная процентная ставка 2% в год означают наличие долгосрочного значения номинальной процентной ставки в 4%. Квартальная норма выбытия производственного капитала δ установлена на уровне 0,025, что означает амортизацию капитала 10% в год. Эластичность производства по капиталу α имеет стандартное значение 0,3, а параметр эластичности неудовольствия от труда η равен 1. Долгосрочный уровень наценок посредников на рынке труда $X_{W,ss}$, $X'_{W,ss}$ и промежуточного внутреннего продукта X_{ss}^{pd} составляет 1,2. Параметр m максимально возможного отношения кредита к залому установлен на уровне 0,9, а параметр инерционности кредитов — на уровне 0,7.

Параметры экспортирующего сектора откалиброваны так, что экспорт и импорт составляют 0,3 от конечного выпуска. Также значение 0,3 составляют следующие соотношения: доля инвестиций в экспортирующий сектор по отношению к общим инвестициям, доля производственного капитала в экспортирующем секторе в общем производственном капитале, доля труда обоих типов домохозяйств, задействованная в экспортирующем секторе, по отношению к труду каждого типа домохозяйств. Долгосрочное значение вложений в иностранные облигации предполагается нулевым.

Параметр автокорреляции условий торговли ρ_{res} был взят равным 0,8.

Параметры правила Тейлора, оцененные для стран, зависимых от экспорта ресурсов (Andreyev, Polbin, 2022; Lepetyuk et al., 2020), показывают, что денежно-кредитная политика таких стран инерционна, а реакция на изменение инфляции невысока. В силу этого в базовом варианте модели мы установили параметр инерционности ρ_r на уровне 0,9, а реакцию на изменение инфляции ρ_{inf} — на уровне 1,5.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ИМИТАЦИОННОГО АНАЛИЗА

Далее мы анализируем действие шока условий торговли на уровне функций импульсного отклика. Рассматриваемый сценарий — затяжное изменение (бум или спад) на внешнем рынке природных ресурсов. Сценарий заключается в ежеквартальном 10%-ном шоке условий торговли P_t^{res} в течение семи кварталов, что с учетом затухания воздействия шока (уравнение (8)) приводит к концу седьмого квартала к суммарному 40%-ному изменению условий торговли.

Для наглядности на рис. 1 изображены функции импульсного отклика для случаев: а) положительного шока условий торговли; б) отрицательного шока условий торговли; в) положительного шока в случае когда не накладывается условие отрицательности процентной ставки (13), а залоговое ограничение (7) всегда выполнено как равенство. Функции отклика для случаев б) и в) одинаковы по модулю, но имеют различные знаки, в силу того что залоговое ограничение (13) перестает выполняться как равенство, а номинальная ставка достигает нуля только при положительных шоках условий торговли.

Если параметр степени инерционности денежно-кредитной политики в правиле Тейлора (12) высок ($\rho_r = 0,9$), то различие между откликами переменных для серии положительных и отрицательных шоков условий торговли имеет умеренный характер (рис. 1). Наиболее отличающиеся

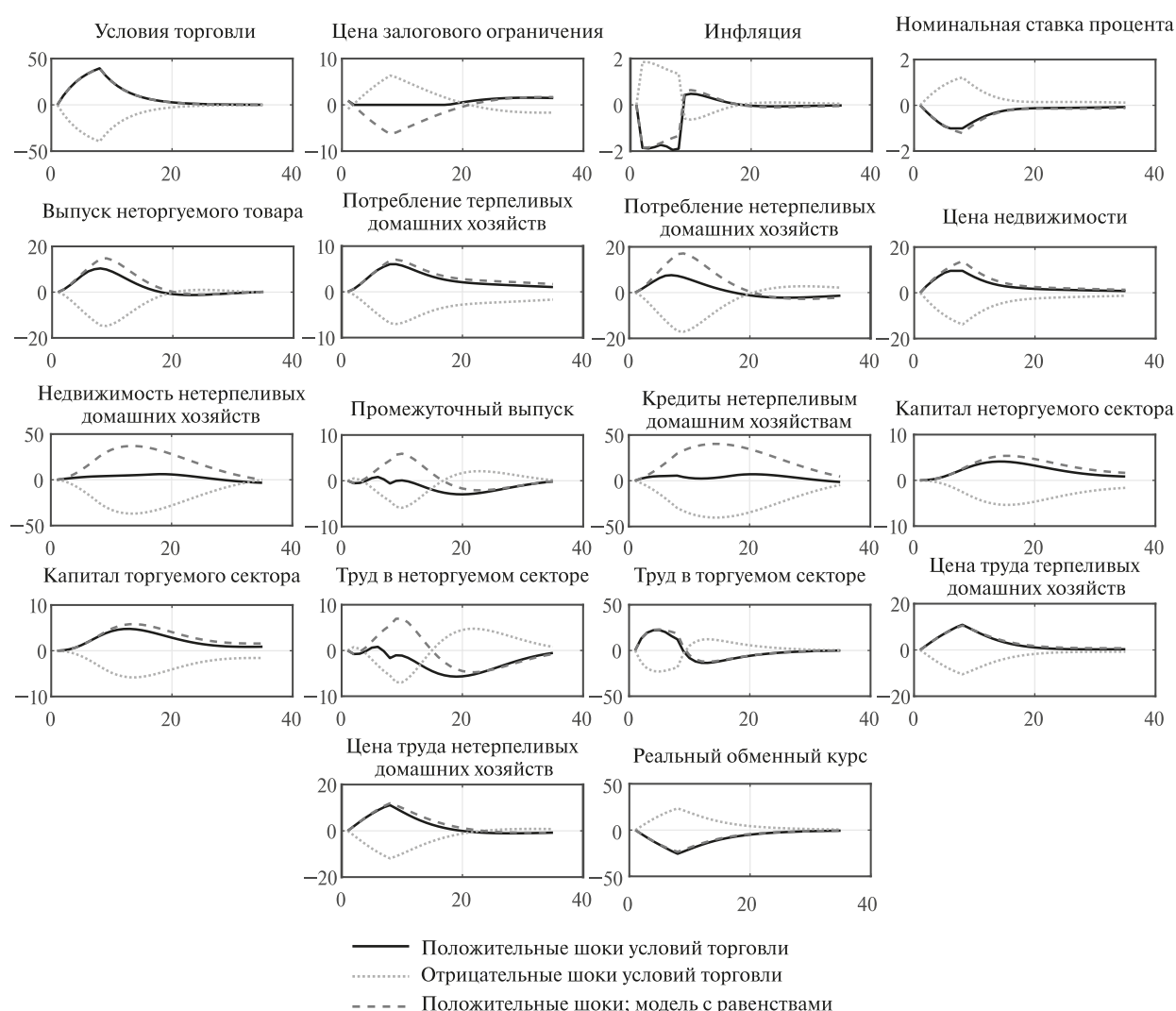


Рис. 1. Функции импульсного отклика для случая высокой инерционности ДКП

Примечание. По горизонтали отложено время, квартал; по вертикали — процентное отклонение от долгосрочного равновесия.

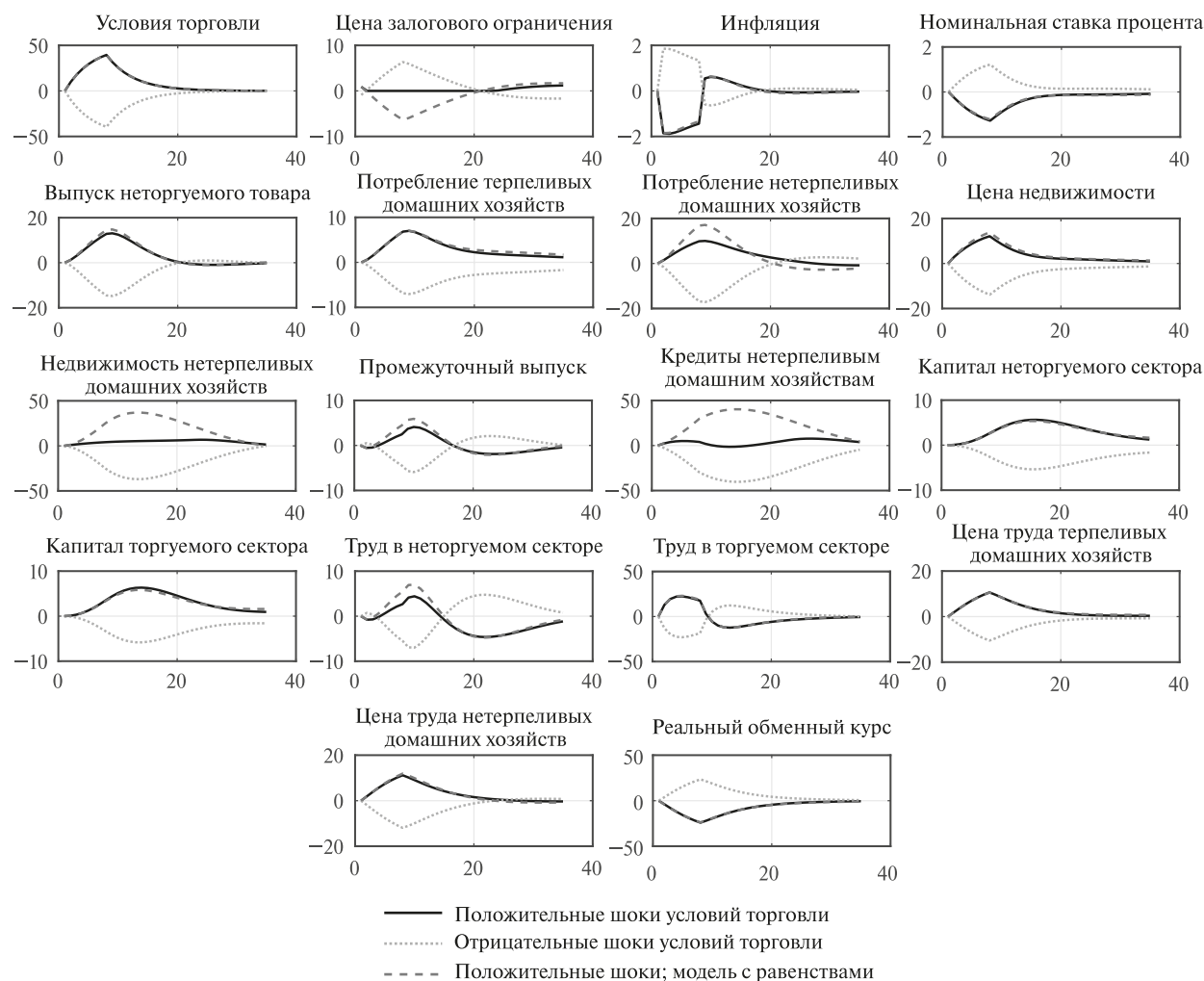


Рис. 2. Функции импульсного отклика для случая высокой инерционности ДКП и отсутствия ограничения неотрицательности процентной ставки

Примечание. По горизонтали отложено время, квартал; по вертикали — процентное отклонение от долгосрочного равновесия.

отклики наблюдаются для переменных потребления нетерпеливых домохозяйств, кредитов, недвижимости, внутреннего промежуточного выпуска, производственного капитала в обоих секторах, труда в неторгуемом секторе. При серии положительных шоков отклики данных переменных значительно меньше по масштабу, чем при серии отрицательных шоков. Таким образом, наличие залогового ограничения сдерживает положительное влияние шока условий торговли.

Различие в откликах для потребления нетерпеливых домохозяйств, кредитов и недвижимости обусловлено наличием именно залогового ограничения. Это следует из того, что в случае отсутствия ограничения неотрицательности процентной ставки (13), когда ставка может опускаться ниже нуля, отклики остальных переменных будут близки по модулю (рис. 2). Таким образом, если денежно-кредитная политика инерционна, то залоговое ограничение отвечает за асимметричность реакции малого числа переменных — относящихся лишь к залоговому ограничению, а общий масштаб асимметрии мал. Если при этом учитывается ограничение неотрицательности ставки, масштаб асимметрии имеет умеренный характер (см. рис. 1).

Если политика регулятора оказывается низко инерционной ($\rho_r = 0,75$), то существенная асимметрия наблюдается во всех переменных (рис. 3). При низкой инерции денежно-кредитной политики, как и при высокой инерции, асимметрия обусловлена в первую очередь срабатыванием ограничения неотрицательности процентной ставки, и в меньшей степени — выполнением залогового ограничения как строгого неравенства. При низкой инерции денежно-кредитной политики реакция инфляции дает больший масштаб отклика. Поэтому и ставка регулятора также имеет больший отклик и находится дольше на нулевой границе ставок, что объясняет дополнительную степень асимметрии.

Увеличение отклика инфляции при низкой инерционности денежно-кредитной политики не относится к вопросу асимметрии и имеет следующее объяснение. Так как агенты принимают решения с оглядкой на будущую инфляцию, что отражается в уравнении для аналога кривой Филлипса (9), то текущая инфляция тем ниже, чем ниже ожидаемая будущая инфляция. В случае более низкой инерционности ДКП, соответствующей при прочих равных менее длительному возврату ставки в положение долгосрочного равновесия, регулятор обещает менее продолжительную борьбу с причинами, вызвавшими изменение инфляции, что повышает реакцию инфляции.

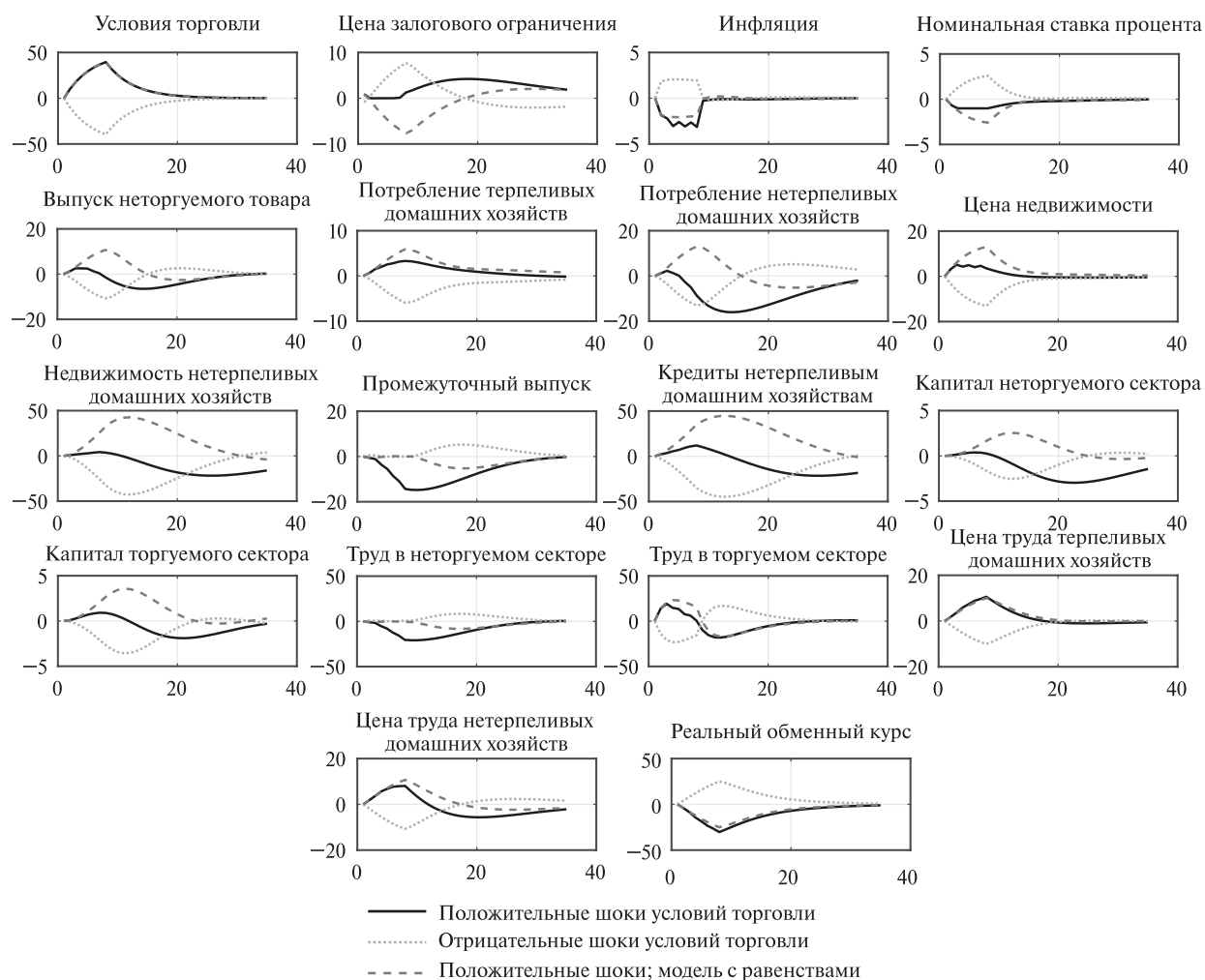


Рис. 3. Функции импульсного отклика для случая низкой инерционности ДКП

Примечание. По горизонтали отложено время, квартал; по вертикали — процентное отклонение от долгосрочного равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели модель малой открытой экономики, сильно зависимой от экспорта природных ресурсов. Экономику отличает наличие гетерогенных домохозяйств, один тип которого — нетерпеливые — стеснен залоговым ограничением.

Макроэкономическая роль залогового ограничения в экономиках, сильно зависящих от экспорта ресурсов, заключается в ослаблении воздействия положительного влияния шока условий торговли на макроэкономические переменные. В отношении наблюдаемых рядов экономических данных это означает, что при положительных шоках экономика медленно разгоняется, а при отрицательных — резко падает.

При высокой инерционности денежно-кредитной политики, которая означает сильную привязку центрального банка при установке процентной ставки к историческим значениям ставки и при возможности процентной ставки быть отрицательной, в экономике наблюдается незначительная степень асимметрии по отношению к серии положительных и серии отрицательных шоков условий торговли. Значительная асимметрия затрагивает лишь переменные, близко касающиеся залогового ограничения, — объем недвижимости в распоряжении агентов, цены на недвижимость и потребление заемщиков.

Макроэкономическая роль залогового ограничения в создании асимметричности значительно усиливается в присутствии другого ограничения — неотрицательности номинальной процентной ставки. Если в экономике присутствует ограничение на ставку, реакция многих переменных будет умеренно асимметричной. Если к тому же денежно-кредитная политика слабо инерционна, то за счет продолжительного нахождения экономики на нулевой границе ставок в результате серии положительных шоков условий торговли реакция большинства переменных оказывается сильно асимметричной. В последнем случае игнорировать такие проблемы, как асимметричность влияния денежно-кредитной политики и смещение оценок, невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Андреев М.Ю., Полбин А.В. (2019). Исследование эффекта финансового акселератора в DSGE модели с описанием производства экспортного продукта // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 4 (44). С. 12–49. [Andreyev M.Yu., Polbin A.V. (2019). Studying the financial accelerator effect in a two-sector DSGE-model for an export-oriented economy. *The Journal of the New Economic Association*, 44, 12–49 (in Russian).]
- Карев М.Г. (2011). Задача выявления предпочтений Банка России. Имитационный подход // *Журнал Новой экономической ассоциации*. № 9. С. 72–97. [Karev M.G. (2011). Identification of the Bank of Russia's preferences. A simulation approach. *The Journal of the New Economic Association*, 9, 72–97 (in Russian).]
- Полбин А.В. (2014). Эконометрическая оценка структурной макроэкономической модели российской экономики // *Прикладная эконометрика*. № 1 (33). С. 3–29. [Polbin A.V. (2014). Econometric estimation of a structural macroeconomic model for the Russian economy. *Applied Econometrics*, 33, 1, 3–29 (in Russian).]
- Aastveit K.A., Anundsen A.K. (2022). Asymmetric effects of monetary policy in regional housing markets. *American Economic Journal: Macroeconomics*. Forthcoming.
- Andres J., Arce O., Thomas C. (2013). Banking competition, collateral constraints, and optimal monetary policy. *Journal of Money, Credit and Banking*, 45 (s2), 87–125.
- Andreyev M., Polbin A. (2022). Monetary policy for a resource-rich economy and the zero lower bound // *Экономическая политика*. Т. 17. № 3. С. 44–73 (in English). [Andreyev M., Polbin A. (2022). Monetary policy for a resource-rich economy and the zero lower bound. *Ekonomicheskaya Politika*, 17, 3, 44–73.]
- Aruoba B., Cuba-Borda P., Schorfheide F. (2018). Macroeconomic dynamics near the ZLB: A tale of two countries. *Review of Economic Studies*, 85, 1, 87–118.
- Bernanke B.S., Gertler M., Gilchrist S. (1999). The financial accelerator in a quantitative business cycle framework. In: *Handbook of macroeconomics*. Vol. 1. The Netherlands: North-Holland, 1341–1393.
- Brzoza-Brzezina M., Kolasa M., Makarski K. (2013). The anatomy of standard DSGE models with financial frictions. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37, 1, 32–51.
- Cover J. (1992). Asymmetric effects of positive and negative money supply shocks. *Quarterly Journal of Economics*, 107, 4, 1261–1282.
- Davis S., Presno I. (2017). Capital controls and monetary policy autonomy in a small open economy. *Journal of Monetary Economics*, 85 (C), 114–130.
- Elliott G., Komunjer I., Timmermann A. (2008). Biases in macroeconomic forecasts: Irrationality or asymmetric loss? *Journal of the European Economic Association*, 6, 1, 122–157.
- Gertler M., Kiyotaki N., Queralto A. (2012). Financial crises, bank risk exposure and government financial policy. *Journal of Monetary Economics*, 59 (S), 17–34.

- Gertler M., Kiyotaki N., Prestipino A. (2020). Credit booms, financial crises, and macroprudential policy. *Review of Economic Dynamics*, 37, 8–33.
- Guerrieri L., Iacoviello M. (2015). OccBin: A toolkit for solving dynamic models with occasionally binding constraints easily. *Journal of Monetary Economics*, 70 (C), 22–38.
- Guerrieri L., Iacoviello M. (2017). Collateral constraints and macroeconomic asymmetries. *Journal of Monetary Economics*, 90 (C), 28–49.
- Hirose Y., Inoue A. (2016). The zero lower bound and parameter bias in an estimated DSGE model. *Journal of Applied Econometrics*, 31, 4, 630–651.
- Holden T. (2016). Computation of solutions to dynamic models with occasionally binding constraints. *EconStor Preprints 130143*, ZBW — Leibniz Information Centre for Economics.
- Iiboshi H., Shintani M., Ueda K. (2022). Estimating a nonlinear new Keynesian model with the zero lower bound for Japan. *Journal of Money, Credit and Banking*, 54, 6, 1637–1671.
- Karras G. (1996). Are the output effects of monetary policy asymmetric? Evidence from a sample of European countries. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58, 267–278.
- Kiyotaki N., Moore J. (1997). Credit cycles. *Journal of Political Economy*, 105, 2, 211–248.
- Kocherlakota N. (2000). Creating business cycles through credit constraints. Federal Reserve Bank of Minneapolis. *Quarterly Review*, 24, 2–10.
- Lepetyuk V., Maliar L., Maliar S. (2020). When the U.S. catches a cold, Canada sneezes: A lower-bound tale told by deep learning. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 117 (C). Available at: <https://lmaliar.ws.gc.cuny.edu/files/2020/08/JEDC2020.pdf>
- Liu Z., Wang P., Zha T. (2013). Land-price dynamics and macroeconomic fluctuations. *Econometrica*, 81, 3, 1147–1184.
- Liu Z., Miao J., Zha T. (2016). Land prices and unemployment. *Journal of Monetary Economics*, 80 (C), 86–105.

The macroeconomic role of the collateral constraint in resource-rich countries

© 2023 M.Yu. Andreyev, A.V. Polbin

M.Yu. Andreyev,

Bank of Russia; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russia; e-mail: m.andreyev@inbox.ru

A.V. Polbin,

Gaidar Institute for Economic Policy; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Moscow, Russia; e-mail: apolbin@gmail.com

Received 13.05.2022

The study was supported by grant No. 21-78-10020 from the Russian Science Foundation⁴.

Abstract. In this paper we consider a small open economy heavily dependent on resource exports. The aim of the study is to identify the role of the collateral constraint in such an economy. Collateral constraint is a restriction according to which the value of debt should not exceed a certain percentage of the value of collateral. We study the transmission role of the collateral constraint under the terms-of-trade (TOT) shock. For this purpose, a DSGE model is considered. There are two types of households in the model: patient households who are both creditors and owners of capital, and impatient households who are debtors. The features of the model are two restrictions in the form of inequalities: the collateral constraint and the zero lower bound (ZLB) constraint. This imposes special requirements on the solution method. We found that if the monetary policy (MP) is not inertial, that is, the central bank, when setting the interest rate, is loosely tied to its historical values, then under a series of unidirectional TOT shocks, the response of the economy is highly skewed with respect to positive and negative shocks. Both inequalities bind. The binding of both inequalities reduces the positive impact of the TOT shock. If the monetary policy is inertial or the central bank reacts poorly to inflation change, then only the collateral constraint binds, and the effect of asymmetry almost disappears.

Keywords: DSGE, non-linear models, collateral constraint, terms of trade, asymmetry, ZLB.

JEL Classification: D58, E32, E52, E58.

For reference: Andreyev M. Yu., Polbin A.V. (2023). The macroeconomic role of the collateral constraint in resource-rich countries. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 93–104. DOI: 10.31857/S042473880020147-0

⁴ <https://rscf.ru/en/project/21-78-10020>

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Приближенный расчет параметров ликвидационной стоимости портфеля с учетом асимметрии ее распределения

© 2023 А.Н. Балабушкин

А.Н. Балабушкин,

Компания БКС, Москва, e-mail: BalabushkinAN@msk.bcs.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022

Аннотация. Рассматривается граничная задача для однородного диффузионного процесса в предположении малости случайных возмущений. Показывается, что среднее, вторые и третьи центральные моменты вектора состояния в момент достижения заданной плоскости в фазовом пространстве могут быть приближенно получены как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительным преобразованием (проецированием на границу). Для квантиля линейной комбинации координат процесса дается разложение второго порядка по степеням малого параметра, характеризующего уровень случайных возмущений. В первом приближении это разложение соответствует гауссовскому распределению, следующий член учитывает асимметрию. Результат распространяется на процесс с несколькими границами, при достижении каждой из которых уравнение процесса изменяется. Такая модель описывает ликвидацию портфеля финансовых инструментов в предположении, что скорость закрытия каждой позиции является случайным процессом. Приводятся два примера. В первом — портфель состоит из линейных инструментов (таких как акции, фьючерсы), цены описываются коррелированными геометрическими броуновскими движениями, скорости закрытия позиций постоянны, но со случайными флуктуациями из-за ежедневных колебаний биржевых оборотов. В этом случае приближенные выражения для среднего, дисперсии, коэффициента асимметрии, VaR и $CVaR$ финансового результата ликвидации портфеля даются в явном виде. Во втором примере рассматривается ликвидация биржевой опционной позиции в предположении, что скорость закрытия изменяется в зависимости от отношения цены базового актива к страйковой цене опциона. Результаты численных расчетов показывают, что учет асимметрии распределения финансового результата существенно повышает точность оценок.

Ключевые слова: диффузионный процесс, граничная задача, геометрическое броуновское движение, ликвидационная стоимость портфеля, опцион, Value-at-Risk, разложение Корниша–Фишера.

Классификация JEL: C02, C32, G20, G32.

Для цитирования: Балабушкин А.Н. (2023). Приближенный расчет параметров ликвидационной стоимости портфеля с учетом асимметрии ее распределения // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 105–118. DOI: 10.31857/S042473880024878-4

1. ВВЕДЕНИЕ

Клиринговые организации с определенной периодичностью проводят контроль обеспеченности портфелей участников клиринга, а те, в свою очередь, проверяют портфели своих клиентов. При использовании меры риска Value-at-Risk (Jorion, 2007) возможные потери оцениваются величиной $VaR(\tau, \alpha) = m_0 - q(\tau, \alpha)$, а условием обеспеченности портфеля является $q(\tau, \alpha) \geq 0$, где m_0 — текущая стоимость портфеля, $q(\tau, \alpha)$ — квантиль заданного порядка $\alpha \in (0, 1)$ распределения стоимости портфеля в момент $\tau > 0$. Временной горизонт τ складывается из:

- 1) продолжительности периода между проверками условия обеспеченности;
- 2) срока, предоставляемого участнику клиринга для самостоятельных операций по устранению дефицита обеспечения, если таковой выявлен (довнесением активов и/или проведением соответствующих сделок);
- 3) интервала, в течение которого клиринговая организация считает возможным ликвидировать портфель в принудительном порядке, т.е. совершить закрывающие сделки и, в случае необходимости, распродать активы портфеля.

До недавнего времени общепринятым был стандартизованный подход, в котором все компоненты τ устанавливались едиными для всех участников клиринга вне зависимости от состава портфеля. Типично срок τ составлял 1 или 2 дня. Данный способ не учитывал особенностей больших позиций, закрытие которых происходит частями и не укладывается в стандартный период. В настоящее время рискам такого рода (рискам концентрации) уделяется значительное внимание в регулировании клиринговой деятельности. Дополнительным фактором, потребовавшим изменения стандартизованного подхода, стало включение в сферу деятельности клиринговых организаций внебиржевых рынков (ОТС), для которых характерны более длительные сроки и специфические процедуры закрытия позиций.

В большинстве случаев учет рисков больших позиций сводится к модификации стандартных алгоритмов оценки риска портфеля для фиксированного временного горизонта. Так, Chicago Mercantile Exchange включила в свою методологию Standard Portfolio Analysis of Risk надбавку за концентрацию (concentration charge), которая возникает в случае превышения размером позиции порога, зависящего от среднесуточного объема торгов соответствующим инструментом¹. В методологии SIMM² (Standard Initial Margin Model), разработанной International Swaps and Derivatives Association для ОТС рынка, при превышении позицией i определенного порога вводится множитель (concentration risk factor) $CR_i = \max\left(1, \sqrt{\tau_i / \tau}\right)$, где τ_i во столько раз превышает стандартный срок τ , во сколько раз размер позиции превышает порог. Далее риск по портфелю рассчитывается с помощью $VaR_i(\tau_i, \alpha) = VaR_i(\tau, \alpha) CR_i$ по обычной формуле для дисперсии суммы коррелированных случайных величин (variance-covariance), но с заменой коэффициента корреляции ρ_{ij} между ценами инструментов i, j на $\lambda_{ij} \rho_{ij}$, где $\lambda_{ij} = \sqrt{\min(\tau_i, \tau_j) / \max(\tau_i, \tau_j)}$.

Наиболее основательно к проблеме больших позиций подошла бразильская биржа B3³, разработав новый подход CORE⁴ (Closeout Risk Evaluation). Процесс ликвидации каждой позиции представляется в виде последовательности $\{u_k\}$, $\sum_k u_k = 1$, элементы которой обозначают доли позиции, закрываемые в дни $k = 1, 2, \dots$ (стратегия ликвидации). Одновременно с оценкой риска определяется наилучшая в некотором смысле стратегия ликвидации портфеля. Данный подход можно назвать минимаксным: каждой стратегии ликвидации сопоставляются потери в наихудшем сценарии поведения риск-факторов (цен, процентных ставок, волатильностей и др.) из заранее определенного множества сценариев, а оптимальная стратегия характеризуется наименьшими такими потерями. При этом возникают особые требования к формированию множества сценариев во избежание чрезмерно больших отклонений риск-факторов.

Оптимальная ликвидация портфеля линейных инструментов с более традиционным вероятностным критерием рассмотрена в (Kim, 2014; Avellaneda et al., 2015), где при определенных условиях показано, что оптимальные стратегии являются кусочно-постоянными и могут быть получены как решение задачи квадратичного программирования.

Алгоритм CORE вычислительно затратен, так как анализируется большое число сценариев (как правило, не менее 10 тыс.) и решаются соответствующие задачи оптимизации. В настоящее время применение торговых роботов требует непрерывного контроля обеспеченности портфелей. Относительно простые модификации стандартизованных алгоритмов, упомянутые ранее, позволяют получать неоптимизированную оценку риска портфеля (т.е. оценку сверху), что приемлемо с практической точки зрения.

В данной работе задача оптимизации не ставится, стратегия ликвидации считается заданной, в частности, это может быть закрытие каждой позиции с постоянной скоростью. Акцент делается на оценке риска портфеля с учетом коэффициента асимметрии распределения финансового результата. Наряду с VaR рассматривается мера риска Expected Shortfall или $CVaR$, равная

$$CVaR(\alpha) = m_0 - Q(\alpha), \quad Q(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{q(\alpha)} z f(z) dz,$$

¹ <https://www.cmegroup.com/clearing/risk-management/span-overview/span-2-methodology.html>

² www.isda.org

³ Некоторые указания на способ, применяемый B3, содержатся в (De Genaro, 2016) и B3 Clearinghouse Risk Management Manual (<https://www.b3.com.br/data/files/1A/D2/8A/FC/0974D710EEBC50D7AC094EA8/B3%20Clearinghouse%20Risk%20Management%20Manual%20-%2020211122.pdf>).

⁴ Описание базовых принципов методологии CORE содержится в работах (Avellaneda, Cont, 2013; Vicente et al., 2015).

где $f(z)$ — плотность функции распределения финансового результата (в предположении ее существования), при этом условием обеспеченности является $Q(\alpha) \geq 0$.

2. ЛИКВИДАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЗИЦИЙ С ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО ПОСТОЯННЫМИ СКОРОСТЯМИ

Примем следующую модель процесса ликвидации: размер закрываемой позиции в день k равен $u_k = u\Delta t + v\eta_k \sqrt{\Delta t}$, где u, v — константы, η_k — независимые нормально распределенные случайные величины со средним 0 и дисперсией 1, $\Delta t = 1/252$ (исходя из 252 торговых дней в году). Первое слагаемое предполагает, что ликвидация позиции данного объема не оказывает существенного влияния на цены. Значение устанавливается экспертно, например, это может быть 10% квантиля порядка $\alpha_{volume} = 0,25$ дневных оборотов торгов за последние 3 месяца. Второе слагаемое описывает случайные флуктуации, вызванные колебаниями оборота торгов день ото дня. Отрицательные значения соответствуют обороту ниже квантиля, а в случае повышенного оборота производится компенсация имеющегося отставания от плана (поэтому для η_k принято симметричное распределение). Строго говоря, в этой модели имеется вероятность получить отрицательную величину u_k , т.е. в некоторые дни вместо закрытия нарастить позицию, однако типично значения параметра v не превышают 0,01–0,02 и эта вероятность пренебрежимо мала.

Пусть портфель состоит из n компонент, цены которых в момент $t = 0$ равны $S_i > 0$, количества равны X_i , $i = 1, \dots, n$. Количества могут быть как положительными, так и отрицательными. Задается время $t_0 \geq 0$, в течение которого никаких действий с портфелем не совершается. Для $t > t_0$ каждая из компонент портфеля изменяется в соответствии с уравнением

$$dX_i^\varepsilon(t) = -u_i dt + \sqrt{\varepsilon} v_i u_i dW_i(t), \quad X_i^\varepsilon(t_0) = X_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где u_i — постоянные величины того же знака, что и начальные количества X_i , $v_i > 0$ — постоянные величины, $W_i(t)$ — винеровские процессы, $0 \leq \varepsilon \leq 1$ — вспомогательный параметр. Для применения приведенных далее результатов следует положить $\varepsilon = 1$. Уравнение (1) является непрерывным аналогом приведенной выше модели ликвидации.

Изменение цен для $t > 0$ описывается многомерным геометрическим броуновским движением с нулевым сносом

$$dS_i^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} S_i^\varepsilon(t) \sum_{j=1}^k B_{ij} dW_{n+j}(t), \quad S_i^\varepsilon(0) = S_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где B — матрица размера $n \times k$ с постоянными элементами; $\delta_i = \sqrt{D_{ii}} > 0$, $D = BB^T$; T — знак транспонирования. Все винеровские процессы $W_i(t)$, $i = 1, \dots, n+k$, предполагаются независимыми. Вводя винеровские процессы $W_i(t) = \frac{1}{\delta_i} \sum_{j=1}^k B_{ij} W_{n+j}(t)$, уравнение (2) можно представить в виде

$$dS_i^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} \delta_i S_i^\varepsilon(t) dW_i'(t). \quad (3)$$

Величины δ_i являются волатильностями цен $S_i^\varepsilon(t)$, $\rho_{ij} = D_{ij} / \delta_i \delta_j$ — корреляциями относительных изменений цен. Эти параметры определяются по истории цен статистическими методами, и в этих же терминах формулируется результат.

Каждое из уравнений (1) описывает процесс ликвидации соответствующей компоненты портфеля до момента $t_0 + \tau_i^\varepsilon$, где

$$\tau_i^\varepsilon = \inf \left(s \geq 0 : X_i^\varepsilon(t_0 + s) = 0 \right) = \inf_{s \geq 0} \left(W_i(t_0 + s) - W_i(t_0) = (s - \tau_i) / \sqrt{\varepsilon} v_i \right),$$

$\tau_i = X_i / u_i$ — период ликвидации позиции i при отсутствии случайных возмущений. Как известно, $P(\tau_i^\varepsilon < \infty) = 1$ (Липцер, Ширяев, 1974). Обозначим $Y_i^\varepsilon(t)$ денежную сумму, которая образуется в процессе ликвидации компоненты i к моменту t в интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_i^\varepsilon$. Будем предполагать, что компоненты портфеля могут быть двух типов:

1) акция — в этом случае $Y_i^\varepsilon(t)$ определяется уравнением

$$dY_i^\varepsilon(t) = -S_i^\varepsilon(t) dX_i^\varepsilon(t), \quad Y_i^\varepsilon(t_0) = 0; \quad (4)$$

2) фьючерс — тогда финансовый результат образуется в результате накопления вариационной маржи

$$dY_i^\varepsilon(t) = X_i^\varepsilon(t) dS_i^\varepsilon(t), \quad Y_i^\varepsilon(t_0) = X_i \left[S_i^\varepsilon(t_0) - S_i \right]. \quad (5)$$

Начальное условие в (5) описывает вариационную маржу до начала процесса ликвидации. С учетом предположения о независимости винеровских процессов $W'_i(t)$, $W_i(t)$

$$X_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) S_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) - X_i S_i^\varepsilon(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} X_i^\varepsilon(t) dS_i^\varepsilon(t) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} S_i^\varepsilon(t) dX_i^\varepsilon(t), \quad X_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = 0,$$

поэтому результат ликвидации для акции $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$ можно представить в виде решения уравнения (5) с начальным условием $Y_i^\varepsilon(t_0) = X_i S_i^\varepsilon(t_0)$, а результат для фьючерса — в виде решения уравнения (4) с начальным условием $Y_i^\varepsilon(t_0) = -X_i S_i^\varepsilon(t_0)$.

Необходимо найти: среднее m^ε , дисперсию V^ε , третий центральный момент M^ε , квантиль $q^\varepsilon(\alpha)$ и ожидаемые потери $Q^\varepsilon(\alpha)$ распределения случайной величины $Y^\varepsilon = \sum_{i=1}^n Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$.

Введем обозначения. Пусть:

$$m_0 = \sum_{\text{акции}} X_i S_i, \quad V = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \lambda_{ij} \omega_i \omega_j, \quad \omega_i = X_i S_i \delta_i \sqrt{t_0 + \tau_i} / 3,$$

$$\lambda_{ij} = (2\tau_{ij}^{\max})^{-1} \left[6t_0 \tau_{ij}^{\max} + \tau_{ij}^{\min} (3\tau_{ij}^{\max} - \tau_{ij}^{\min}) \right] / \sqrt{(3t_0 + \tau_i)(3t_0 + \tau_j)},$$

$$\tau_{ij}^{\max} = \max(\tau_i, \tau_j), \quad \tau_{ij}^{\min} = \min(\tau_i, \tau_j),$$

M — величина, определенная в Приложении, п. 1; $\sigma = \sqrt{V}$, $\chi = M\sigma^{-3}$; $\Phi(r)$, $\phi(r)$, $\beta_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ — функция стандартного нормального распределения, ее плотность и квантиль порядка α ;

$$\tilde{q}^\varepsilon(\alpha) = m_0 + \sqrt{\varepsilon} \sigma \beta_\alpha + \varepsilon \chi \sigma (\beta_\alpha^2 - 1) / 6, \quad (6)$$

$$\tilde{Q}^\varepsilon(\alpha) = m_0 - \sqrt{\varepsilon} \sigma \phi(\beta_\alpha) / \alpha - \varepsilon \chi \sigma \beta_\alpha \phi(\beta_\alpha) / 6\alpha. \quad (7)$$

Утверждение 1.

I. $m^\varepsilon = m_0$.

II. Если все моменты τ_i различны, то $V^\varepsilon = \varepsilon V + \varepsilon^2 \Delta_1^\varepsilon$, $M^\varepsilon = \varepsilon^2 M + \varepsilon^3 \Delta_2^\varepsilon$, где Δ_1^ε , Δ_2^ε ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некотором $0 < \varepsilon_1 \leq 1$; при условии $V > 0$ для любого $\alpha < 0,5$ найдется $0 < \varepsilon_1(\alpha) \leq 1$ такое, что

$$q^\varepsilon(\alpha) = \tilde{q}^\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{3/2} \Delta_3^\varepsilon(\alpha), \quad (8)$$

$$Q^\varepsilon(\alpha) = \tilde{Q}^\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{3/2} \Delta_4^\varepsilon(\alpha), \quad (9)$$

где $\Delta_3^\varepsilon(\alpha)$, $\Delta_4^\varepsilon(\alpha)$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(\alpha)$.

Выражения (6), (7) без последних слагаемых соответствуют нормальному распределению. В этом приближении случайная величина Y^ε характеризуется средним m_0 и дисперсией εV . Ликвидационные стоимости отдельных компонент $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$ имеют средние $m_i^\varepsilon = X_i S_i$ для акций и $m_i^\varepsilon = 0$ для фьючерсов, дисперсии приблизительно равны $\varepsilon \omega_i^2$, а корреляции — $\rho_{ij} \lambda_{ij}$. Коэффициенты λ_{ij} обладают свойствами: $\lambda_{ij} = 1$ для любых $t_0 \geq 0$, $\tau_j = \tau_i$; если увеличивать τ_j , начиная со значения τ_i , то λ_{ij} убывает. При $t_0 = 0$

$$\lambda_{ij} = \left(\frac{3}{2} - \frac{\tau_{ij}^{\min}}{2\tau_{ij}^{\max}} \right) \sqrt{\frac{\tau_{ij}^{\min}}{\tau_{ij}^{\max}}} \geq \sqrt{\frac{\tau_{ij}^{\min}}{\tau_{ij}^{\max}}},$$

где справа указан упомянутый в разд. 1 аналогичный коэффициент методологии SIMM.

Последние слагаемые в (6), (7) являются поправками к гауссовской аппроксимации, обусловленными наличием у рассматриваемого распределения асимметрии $\chi^\varepsilon = M^\varepsilon (V^\varepsilon)^{-3/2} \approx \sqrt{\varepsilon} \chi$. В (Boudt, Peterson, Croux, 2008) посредством комбинирования отрезков разложений Эджворта для распределений и Корниша—Фишера для квантилей получены уточнения гауссовских аппроксимаций VaR и $CVaR$, содержащие коэффициенты асимметрии и эксцесса. Здесь критерием обрыва разложений является не количество учитываемых моментов распределения, а малость поправки по ε .

Величины v_i не входят в приближенные выражения, т.е. случайная неравномерность процесса ликвидации вносит эффект более высокого порядка малости по ε .

Вклад коэффициента асимметрии в результат становится существенным только для больших сроков закрытия позиций и высоких ценовых волатильностей. Более всего это соответствует депрессивному состоянию рынка с пониженными оборотами в условиях кризиса.

Таблица 1

X_i	48	-65	-84	-30
S_i	33	30	10	50
$u_i/252$	4	-5	-6	-2
δ_i	0,3	0,35	0,4	0,45

Таблица 2

Метод	m^ε	$\sigma^\varepsilon = \sqrt{V^\varepsilon}$	χ^ε	$VaR^\varepsilon(\alpha)$		$CVaR^\varepsilon(\alpha)$	
Монте-Карло	-1205,7	201,44	-0,2069	600,54		678,28	
Аппроксимация	$2,4 \times 10^{-4}$	$3,8 \times 10^{-3}$	1,1%	8,9%	0,5%	10,8%	1,1%

Таблица 3

Метод	m^ε	σ^ε	χ^ε	$VaR^\varepsilon(\alpha)$		$CVaR^\varepsilon(\alpha)$	
Монте-Карло	-1116,0	196,00	-0,2097	584,40		660,64	
Аппроксимация	$3,8 \times 10^{-5}$	$5,1 \times 10^{-3}$	0,2%	9,0%	0,7%	11,9%	1,3%

Пример 1. Пусть портфель состоит из четырех позиций (табл. 1).

Первые три являются позициями в акциях, четвертая — во фьючерсе. В третьей строке указаны размеры позиций, которые можно закрыть за 1 день. Корреляционная матрица имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0,56 & 0,81 & 0,69 \\ 0,56 & 1 & 0,86 & 0,80 \\ 0,81 & 0,86 & 1 & 0,94 \\ 0,69 & 0,80 & 0,94 & 1 \end{vmatrix}$$

Период t_0 принят равным $1/252$ (т.е. 1 дню), $v_i \equiv 0,02$ для всех инструментов.

В табл. 2 приведены результаты, полученные методом Монте-Карло для 10^6 испытаний с шагом $\Delta t = 0,1/252$, и относительные погрешности аппроксимаций. Величины $VaR^\varepsilon(\alpha)$ и $CVaR^\varepsilon(\alpha)$ рассчитаны для $\alpha = 0,003$. Точность оценок $\widehat{VaR}^\varepsilon(\alpha) = m_0 - \tilde{q}^\varepsilon(\alpha)$ и $\widehat{CVaR}^\varepsilon(\alpha) = m_0 - \tilde{Q}^\varepsilon(\alpha)$ указана в двух вариантах: в гауссовском приближении (значение слева) и по полным формулам (6), (7) с учетом асимметрии (значение справа).

В данном примере учет асимметрии приводит к снижению относительной погрешности оценок $\widehat{VaR}^\varepsilon(\alpha)$, $\widehat{CVaR}^\varepsilon(\alpha)$ приблизительно в 10 раз.

Условие различия моментов τ_i используется при доказательстве более общего утверждения 3, приведенного в следующем разделе, а утверждение 1 выводится как следствие. По-видимому, в частном случае задачи данного раздела это условие не является необходимым, однако доказательство получено только для первого соотношения утверждения 1, п. I.

Утверждение 2. $V^\varepsilon = \varepsilon V + \varepsilon^2 \Delta_1^\varepsilon$, где Δ_1^ε ограничена для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некотором $0 < \varepsilon_1 \leq 1$.

С практической точки зрения данный вопрос представляется второстепенным, поскольку расчеты различных модельных примеров не выявляют каких-либо особенностей при совпадении некоторых или всех моментов τ_i .

Пример 2. Заменим в примере 1 первую строку таблицы.

X_i	48	-60	-90	-30
-------	----	-----	-----	-----

Тогда $\tau_1 = \tau_2 = 12/252$ и $\tau_3 = \tau_4 = 15/252$. Результаты расчетов по формулам утверждения 1 показывают, что погрешности остаются приблизительно на прежних уровнях (табл. 3).

3. ПРОЦЕССЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦАХ

Сформулируем задачу разд. 2 следующим образом. Имеется процесс $(X_i^\varepsilon(t), S_i^\varepsilon(t), Y_i^\varepsilon(t))_{i=1,n}$, описываемый уравнениями (1), (3), (4), (5). В случайные моменты достижения процессом границ в фазовом пространстве $X_i^\varepsilon(t) = 0$ уравнения для соответствующих координат процесса изменяются на $dX_i^\varepsilon(t) = 0$, $dS_i^\varepsilon(t) = 0$, $dY_i^\varepsilon(t) = 0$, что приводит к остановке этих координат. Требуется найти

распределение линейной комбинации координат вектора состояния процесса в момент достижения процессом последней из границ.

В качестве обобщения предположим, что n -мерный случайный процесс $\zeta^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, описывается однородным стохастическим уравнением

$$d\zeta^\varepsilon(t) = f_1(\zeta^\varepsilon(t))ds + \sqrt{\varepsilon}\delta_1(\zeta^\varepsilon(t))dW(t), \quad \zeta^\varepsilon(0) = x, \quad (10)$$

где x — известное начальное состояние, $W(t)$ — l -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, элементы вектора $f_1(\zeta)$ и матрицы $\delta_1(\zeta)$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие А. $f_{1i}(\zeta), \delta_{1ij}(\zeta) \in C^\infty(R^n)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, l$.

Условие Б. При некотором $K > 0$ для любых $\zeta, \eta \in R^n$

$$\sum_{i=1}^n f_{1i}^2(\zeta) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \delta_{1ij}^2(\zeta) \leq K \left(1 + \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \right),$$

$$\sum_{i=1}^n \left(f_{1i}(\zeta) - f_{1i}(\eta) \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \left(\delta_{1ij}(\zeta) - \delta_{1ij}(\eta) \right)^2 \leq K \sum_{i=1}^n (\zeta_i - \eta_i)^2.$$

Условие Б обеспечивает существование и единственность решения уравнения (10), траектории процесса $\zeta^\varepsilon(t)$ непрерывны (Липцер, Ширяев, 1974).

Невозмущенный процесс $\zeta(t)$ задается уравнением $\dot{\zeta}(t) = f_1(\zeta(t))$, $\zeta(0) = x$.

Определим случайный процесс с переключениями $\xi^\varepsilon(t)$ следующим образом. Пусть векторы $\pi_\theta \in R^n$ и константы r_θ задают плоскости $\Pi_\theta = \{\zeta \in R^n : \pi_\theta^T \zeta = r_\theta\}$, $\theta = 1, \dots, \Theta$. До случайного момента $\tau_1^\varepsilon = \inf(t \geq 0 : \zeta^\varepsilon(t) \in \bigcup_{\theta=1}^\Theta \Pi_\theta)$ ($\inf \emptyset = T$) включительно процесс $\xi^\varepsilon(t)$ совпадает с $\zeta^\varepsilon(t)$. После этого состояние $\xi^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon)$ становится начальным для уравнения вида (10), но с другими парами функций $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$, которые зависят от того, какая именно граница была достигнута (или несколько границ одновременно). Достигнутые границы исключаются из определения последующих моментов остановки. После каждого момента остановки функции $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$ изменяются в зависимости от того, какие границы и в какой последовательности достигались ранее.

Предполагается, что все пары $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$ удовлетворяют условиям, аналогичным А и Б. Если некоторая траектория процесса $\xi^\varepsilon(t)$ до наступления момента T достигает всех Θ плоскостей, то обозначим через τ_Θ^ε — момент достижения последней границы (номер этой границы не обязательно Θ), иначе положим $\tau_\Theta^\varepsilon = T$; $Y^\varepsilon = H \xi^\varepsilon(\tau_\Theta^\varepsilon)$, где H — заданная строка размерности n . Задача, как и в разд. 2, заключается в нахождении среднего m^ε , дисперсии V^ε , третьего центрального момента M^ε , квантиля $q^\varepsilon(\alpha)$ и ожидаемых потерь $Q^\varepsilon(\alpha)$ распределения случайной величины Y^ε . Положим $\tau_0 = \tau_0^\varepsilon = 0$, $\tau_{\Theta+1} = \tau_{\Theta+1}^\varepsilon = T$ и добавим еще одно условие.

Условие В. Предположим, что невозмущенный процесс $\xi(t)$, определяемый последовательностью уравнений

$$\dot{\xi}(t) = f_\theta(\xi(t)), \quad t \in [\tau_{\theta-1}, \tau_\theta], \quad \theta = 1, \dots, \Theta + 1, \quad (11)$$

достигает границ $\Pi_1, \dots, \Pi_\Theta$ в указанной последовательности в моменты $0 < \tau_1 < \dots < \tau_\Theta < T$, причем каждое достижение происходит нетангенциально: $b_\theta = \pi_\theta^* \dot{\xi}_\theta \neq 0$, где $\dot{\xi}_\theta = f_\theta(\xi(\tau_\theta))$, $\theta = 1, \dots, \Theta$.

Пусть функции $\delta_\theta(\xi)$ образуют пары с функциями $f_\theta(\xi)$, т.е. отрезки случайного процесса $\xi^\varepsilon(t)$ при условии последовательного достижения плоскостей $\Pi_1, \dots, \Pi_\Theta$ в моменты $0 < \tau_1^\varepsilon < \tau_2^\varepsilon < \dots < \tau_\Theta^\varepsilon < T$ описываются уравнениями:

$$d\xi^\varepsilon(t) = f_\theta(\xi^\varepsilon(t))ds + \sqrt{\varepsilon}\delta_\theta(\xi^\varepsilon(t))dW(t), \quad t \in [\tau_{\theta-1}^\varepsilon, \tau_\theta^\varepsilon], \quad \theta = 1, \dots, \Theta + 1. \quad (12)$$

Как следует из Приложения, п. 2, лемма 1 (Fleming, 1974, лемма 2.1), при малых ε траектории $\xi^\varepsilon(t)$ в окрестности невозмущенной траектории $\xi(t)$ дают основной вклад в распределение случайной величины Y^ε , поэтому для формулировки приближенного результата из всех пар $(f_*(\xi), \delta_*(\xi))$ достаточно задать $(f_\theta(\xi), \delta_\theta(\xi))$, $\theta = 1, \dots, \Theta$.

Условие Г. Предположим, что распределение случайной величины Y^ε , определяемой уравнением (12) для $\theta = \Theta$ при начальном условии $\xi^\varepsilon(\tau_{\Theta-1}^\varepsilon) = \xi(\tau_{\Theta-1})$, имеет плотность.

Введем следующие обозначения:

$$A_\theta(\xi) = \|A_{\theta j}^i(\xi)\|_{i,j=1}^n, \quad A_{\theta j}^i(\xi) = \frac{\partial f_{\theta i}(\xi)}{\partial \xi_j}, \quad (i — номер строки),$$

$$a_\theta(\xi) = \|a_{\theta ij}(\xi)\|_{i,j=1}^n = \delta_\theta(\xi) \delta_\theta^*(\xi), \quad c_{\theta k}^j(\xi) = \partial a_{\theta ij}(\xi) / \partial \xi_k, \quad F_{\theta ij}^k(\xi) = \partial^2 f_{\theta k}(\xi) / \partial \xi_i \partial \xi_j.$$

Сначала рассмотрим процесс без переключений $\zeta^\varepsilon(t)$. Определим функции $\gamma(t) = \|\gamma_i(t)\|_{i=1}^n$, $\Gamma(t) = \|\Gamma_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$, $M(t) = \|M_{ijk}(t)\|_{i,j,k=1}^n$ как решения обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке $[0, T]$, где пока полагаем $\theta = 1$:

$$\dot{\gamma}_i(t) = \sum_{p=1}^n A_{\theta p}^i(\zeta(t)) \gamma_p(t) + 0,5 \sum_{p,q=1}^n F_{\theta pq}^i(\zeta(t)) \Gamma_{pq}(t), \gamma(0) = 0, \quad (13)$$

$$\dot{\Gamma}_{ij}(t) = \sum_{p=1}^n \left\{ A_{\theta p}^i(\zeta(t)) \Gamma_{pj}(t) + A_{\theta p}^j(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \right\} + a_{\theta ij}(\zeta(t)), \Gamma(0) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{ijk}(t) = & \sum_{p=1}^n \left\{ A_{\theta p}^i(\zeta(t)) M_{pj k}(t) + A_{\theta p}^j(\zeta(t)) M_{ip k}(t) + A_{\theta p}^k(\zeta(t)) M_{ij p}(t) \right\} + \\ & + \sum_{p,q=1}^n \left\{ F_{\theta pq}^i(\zeta(t)) \Gamma_{pj}(t) \Gamma_{qk}(t) + F_{\theta pq}^j(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \Gamma_{qk}(t) + F_{\theta pq}^k(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \Gamma_{qj}(t) \right\} + \\ & + \sum_{p=1}^n \left\{ c_{\theta p}^{ij}(\zeta(t)) \Gamma_{pk}(t) + c_{\theta p}^{ik}(\zeta(t)) \Gamma_{pj}(t) + c_{\theta p}^{jk}(\zeta(t)) \Gamma_{pi}(t) \right\}, \quad M(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $\Gamma_{ij}(t), M_{ijk}(t)$ не меняются при перестановке индексов, имеется $0,5n(n+1)$ уравнений (14) и $n(n+1)(n+2)/6$ уравнений (15). Как показано в Приложении, п. 2, для любого $t \in [0, T]$ среднее, ковариационная матрица и третьи центральные моменты случайного вектора $\zeta^\varepsilon(t)$ могут быть представлены соответственно как

$$\zeta(t) + \varepsilon \gamma(t) + \varepsilon^2 \Delta_5^\varepsilon(t), \varepsilon \Gamma(t) + \varepsilon^2 \Delta_6^\varepsilon(t), \varepsilon^2 M(t) + \varepsilon^3 \Delta_7^\varepsilon(t), \quad (16)$$

где для каждого t найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что функции $\Delta_5^\varepsilon(t), \Delta_6^\varepsilon(t), \Delta_7^\varepsilon(t)$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

Переходя к процессу $\zeta^\varepsilon(t)$, сохраним данное определение функций $\gamma(t), \Gamma(t), M(t)$ на полуотрезке $t \in [0, \tau_1)$, переопределив для момента τ_1 . Смысл этого преобразования в том, чтобы от распределения сечения процесса $\zeta^\varepsilon(t)$ в фиксированный момент времени $t = \tau_1$ перейти к распределению на границе Π_1 (проецирование на границу). Пусть по-прежнему $\theta = 1$, $I_{n \times n}$ — единичная матрица, $\Gamma(\tau_\theta^-)$ — предел $\Gamma(t)$ слева в точке τ_θ , $A_\theta = A(\xi(\tau_\theta))$, $\tilde{\xi} = A_\theta \xi$, $\dot{\Gamma}_\theta = A_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) + \Gamma(\tau_\theta^-) A_\theta^T + a_\theta(\xi(\tau_\theta))$, $L_\theta = I_{n \times n} - \tilde{\xi}_\theta \pi_\theta^T / b_\theta$, $\mu = L \tilde{\xi} / b^2$, $Z_\theta = L_\theta \dot{\Gamma}_\theta L_\theta^T$, $z_\theta = L_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) \pi_\theta$.

Преобразование имеет вид:

$$\gamma(\tau_\theta) = -\frac{1}{b_\theta} L_\theta A_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) \pi_\theta + 0,5 \pi_\theta^T \Gamma(\tau_\theta^-) \pi_\theta \mu_\theta + L_\theta \gamma(\tau_\theta^-), \quad (17)$$

$$\Gamma(\tau_\theta) = L_\theta \Gamma(\tau_\theta^-) L_\theta^T, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_{ijk}(\tau_\theta) = & \mu_\theta^i z_{\theta j} z_{\theta k} + \mu_\theta^j z_{\theta i} z_{\theta k} + \mu_\theta^k z_{\theta i} z_{\theta j} - \left(z_{\theta i} Z_{\theta jk} + z_{\theta j} Z_{\theta ik} + z_{\theta k} Z_{\theta ij} \right) / b_\theta + \\ & + \sum_{p,q,r=1}^n L_{\theta p}^i L_{\theta q}^j L_{\theta r}^k M_{pqr}(\tau_\theta^-), \quad i, j, k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее $\gamma(\tau_1), \Gamma(\tau_1), M(\tau_1)$ становятся начальными для уравнений (13)–(15) на полуотрезке $[\tau_1, \tau_2)$ с заменой $\theta = 1$ на $\theta = 2$ и невозмущенного процесса $\zeta(t)$ на $\xi(t)$. Затем по формулам (17)–(19) делается преобразование для $\theta = 2$:

$$\{\gamma(\tau_\theta^-), \Gamma(\tau_\theta^-), M(\tau_\theta^-)\} \rightarrow \{\gamma(\tau_\theta), \Gamma(\tau_\theta), M(\tau_\theta)\}. \quad (20)$$

Эта процедура повторяется для последующих отрезков $[\tau_{\theta-1}, \tau_\theta]$ до получения финальных значений $\gamma(\tau_\theta), \Gamma(\tau_\theta), M(\tau_\theta)$.

Определим $\tilde{q}^\varepsilon(\alpha), \tilde{Q}^\varepsilon(\alpha)$ выражениями:

$$\tilde{q}^\varepsilon(\alpha) = m + \sqrt{\varepsilon} \sigma \beta_\alpha + \varepsilon \left[\Delta m + \chi \sigma (\beta_\alpha^2 - 1) / 6 \right], \quad (21)$$

$$\tilde{Q}^\varepsilon(\alpha) = m - \sqrt{\varepsilon} \sigma \phi(\beta_\alpha) / \alpha + \varepsilon \left[\Delta m - \chi \sigma \beta_\alpha \phi(\beta_\alpha) / 6 \alpha \right], \quad (22)$$

где $m = H \xi(\tau_\theta)$, $\Delta m = H \gamma(\tau_\theta)$, $V = H \Gamma(\tau_\theta) H^T$, $M = \sum_{i,j,k=1}^n H_i H_j H_k M_{ijk}(\tau_\theta)$, $\sigma = \sqrt{V}$, $\chi = M \sigma^{-3}$.

Утверждение 3.

1. При условиях А–В для некоторого $0 < \varepsilon_1 \leq 1$: $m^\varepsilon = m + \varepsilon \Delta m + \varepsilon^2 \Delta_8^\varepsilon$, $V^\varepsilon = \varepsilon V + \varepsilon^2 \Delta_9^\varepsilon$, $M^\varepsilon = \varepsilon^2 M + \varepsilon^3 \Delta_{10}^\varepsilon$, где $\Delta_8^\varepsilon, \Delta_9^\varepsilon, \Delta_{10}^\varepsilon$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$;

2. При дополнительных условиях Г и $V > 0$ для любого $\alpha < 0,5$ найдется $0 < \varepsilon_1(\alpha) \leq 1$ такое, что

$$q^\varepsilon(\alpha) = \tilde{q}^\varepsilon(\alpha) + \varepsilon^{3/2} \Delta_{11}^\varepsilon(\alpha), \quad (23)$$

$$Q^{\varepsilon}(\alpha) = \tilde{Q}^{\varepsilon}(\alpha) + \varepsilon^{3/2} \Delta_{12}^{\varepsilon}(\alpha), \quad (24)$$

где $\Delta_{11}^{\varepsilon}(\alpha)$, $\Delta_{12}^{\varepsilon}(\alpha)$ ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1(\alpha)$.

Пример 3. Пусть портфель состоит из короткой позиции по опциону колл, количество $X(0) = -90$, страйк $E = 100$, срок до экспирации $T_{exp} = 12 / 252$. Базовым активом опциона является фьючерсный контракт, цена опциона определяется формулой Блэка $C(F, \Omega, t)$, в которой процентную ставку положим равной нулю. Цена базового фьючерса $F(t)$ и подразумеваемая волатильность $\Omega(t)$ описываются геометрическими броуновскими движениями:

$$dF(t) = \delta F(t) dW_1(t), \quad F(0) = 100, \quad d\Omega(t) = v\Omega(t) dW_2(t), \quad \Omega(0) = 0,4, \delta = 0,4, v = 2,0.$$

Винеровские процессы $W_1(t)$, $W_2(t)$ являются независимыми. Ликвидация позиции начинается в момент $t_0 = 0$ и происходит в соответствии с

$$dX(t) = -u(F(t))dt, \quad u(F) = u_0 \left[0,7 \exp\{-q(F/E - 1)^2\} + 0,3 \right], \quad q = 100 \ln(2), \quad u_0 / 252 = 30.$$

Минимальная скорость закрытия $0,3u_0$ гарантирует ликвидацию позиции за 10 дней, т.е. в пределах срока действия опциона. Если бы цена базового актива сохранялась на уровне страйка, закрытие заняло бы 3 дня. Коэффициент q выбран так, что при смещении F от начального значения на 10% экспонента снижается до 0,5. Данная формула для скорости закрытия выбрана произвольно, но качественно соответствует наблюдаемому на торгах снижению ликвидности серии опционов при удалении цены базового актива от страйка.

Рассмотрим опцион в двух вариантах: а) традиционный (up front); б) маржируемый (futures-style). В первом случае финансовый результат дается уравнением вида (4), во втором — вида (5), с заменой цены акции на цену опциона. Как и в разд. 2, применение формулы Ито к процессу $X(t)C(t)$ показывает, что распределение финансового результата в вариантах а) и б) отличается только сдвигом на начальную стоимость опционов $m_0 = X(0)C(0) = -313,30$.

Предположим, что закрытие опционной позиции осуществляется владельцем портфеля, который в процессе ликвидации непрерывно поддерживает дельта-нейтральную позицию для уменьшения неопределенности финансового результата (базовый фьючерс считаем значительно более ликвидным, чем опцион). Поскольку в вариантах а) и б) фьючерсная позиция изменяется одинаково, вывод о сдвиге распределений на величину m_0 сохраняется.

В уравнении (10) вектор состояния имеет размерность 5: $(X(t), F(t), \Omega(t), Y(t), t)^T$. Функция $f_1(\zeta)$ и матрица $\delta_1(\zeta)$ в вариантах а) и б) имеют вид (опуская индекс 1):

— традиционный вариант — $f = (-u(F), 0, 0, C(F, \Omega, t), 1)^T$; δ — нулевая матрица размера 5×2 , за исключением $\delta(2,1) = \delta F$, $\delta(3,2) = v\Omega$, $\delta(4,1) = -X\delta\delta F$;

— маржируемый вариант — $f = (-u(F), 0, 0, X(\theta + 0,5\Gamma\delta^2 F^2 + 0,5Volga v^2 \Omega^2), 1)^T$; δ — нулевая матрица размера 5×2 , за исключением $\delta(2,1) = \delta F$, $\delta(3,2) = v\Omega$, $\delta(4,2) = X Vega v\Omega$.

В данном примере $\theta, \Delta, \Gamma, Vega, Volga$ — частные производные стоимости опциона («греки»).

Частные производные в уравнениях (13)–(15) определялись численным методом. Параметры финансового результата получены методом Монте-Карло по 10^6 испытаний с шагом $\Delta t = 0,01 / 252$. Для сопоставимости результатов в первой колонке для Монте-Карло (вариант а) указана величина $m^{\varepsilon} - m_0$, а для аппроксимации (вариант а) — величина $m + \Delta m - m_0$ (табл. 4).

В данном примере аппроксимация при варианте б) оказывается несколько более точной. В обоих вариантах гауссовские приближения $VaR^{\varepsilon}(\alpha)$, $CVaR^{\varepsilon}(\alpha)$ получают заниженными (значения слева), учет асимметрии значительно улучшает оценки.

Закрытие крупной биржевой позиции может быть осуществлено одномоментно, если на рынке присутствуют участники, готовые по запросу дать котировки на большие объемы (в частности, список таких участников предоставляет Московская биржа). Приведенные выше соотношения

Таблица 4

Метод		m^{ε}	σ^{ε}	χ^{ε}	$VaR^{\varepsilon}(\alpha)$		$CVaR^{\varepsilon}(\alpha)$	
Монте-Карло	Вариант а	-0,47	33,73	-0,52	113,40		130,42	
	Вариант б	-0,52	33,71	-0,52	113,48		130,41	
Аппроксимация	Вариант а	-1,38	35,26	-0,40	98,25	113,74	108,90	128,71
	Вариант б	-0,66	34,34	-0,50	95,03	113,73	105,40	129,32

позволяют выразить котировку в вероятностных терминах. Текущая цена опциона составляет $C(0) = 3,48$. Предположим, что имеется возможность закрыть позицию по цене $C = 3,65$, потери по всему портфелю составят 15,20. Такое значение $VaR^e(\alpha)$ получается при $\alpha = 0,307$ (метод Монте-Карло дает 0,305), т.е. при растянутом во времени закрытии на биржевом рынке можно ожидать худшего результата, чем при одномоментном, с вероятностью около 30%.

Вместо формулы Блэка можно использовать какую-либо модель стохастической волатильности, например SABR. Для опционов вне денег аппроксимации становятся все менее удовлетворительными по мере отклонения $F(0)$ от страйка, поскольку зависимость цены опциона от F в окрестности $F(0)$ все заметнее отличается от параболы, а приближения используют частные производные до второго порядка. В этом случае можно в некоторой окрестности $F(0)$ заменить цену опциона на верхнюю параболическую границу (для короткой позиции) или на нижнюю границу (для длинной позиции) и получить оценки сверху для $VaR^e(\alpha)$, $CVaR^e(\alpha)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Пусть компоненты портфеля пронумерованы в порядке неубывания τ_i , т.е. $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$. Для совпадающих τ_i порядок следования значения не имеет. Обозначим

$$M = t_0^2 \sum_{i,j,k=1}^n X_i X_j X_k S_i S_j S_k \delta_i \delta_j \delta_k (\delta_i \rho_{ij} \rho_{ik} + \delta_j \rho_{ji} \rho_{jk} + \delta_k \rho_{ki} \rho_{kj}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^n (t_0 M'_{ijk} + M''_{ijk}),$$

где M'_{ijk} , M''_{ijk} равны:

- если $i = j = k$, то $M'_{iii} = 2\tau_i S_i^3 X_i^3 \delta_i^4$, $M''_{iii} = \frac{2}{5} \tau_i^2 S_i^3 X_i^3 \delta_i^4$;
- если $i = j < k$, то $M'_{iik} = \tau_i S_i^2 S_k \delta_i^2 \delta_k \rho_{ik} [2X_i^2 X_k \delta_i + (3\tau_k - \tau_i) X_i^2 u_k (\delta_i + \delta_k \rho_{ik})]$,
 $M''_{iik} = \frac{1}{20} S_i^2 S_k X_i^2 u_k \delta_i^2 \delta_k \rho_{ik} \tau_i^2 [(25\tau_k - 9\tau_i) \delta_i + (15\tau_k - 7\tau_i) \delta_k \rho_{ik}]$;
- если $i < j = k$, то $M'_{ikk} = S_i S_j^2 S_k \delta_i \delta_k^2 \rho_{ik} [2X_i^2 X_k \delta_k \tau_k + (3\tau_k - \tau_i) \tau_i u_k X_k X_i (\delta_k + \delta_i \rho_{ik})]$,
 $M''_{ikk} = 0,5 S_i S_j^2 X_i u_k^2 \delta_i^2 \delta_k^2 \rho_{ik} \tau_i [(20\tau_k^3 - 5\tau_k \tau_i^2 + \tau_i^3) \delta_k + \tau_i (20\tau_k^2 - 15\tau_i \tau_k + 3\tau_i^2) \delta_i \rho_{ik}]$;
- если $i < j < k$, то
 $M'_{ijk} = S_i S_j S_k \delta_i \delta_j \delta_k [(3\tau_j - \tau_i) \tau_i X_k X_j u_{ij} \rho_{ij} (\delta_i \rho_{ik} + \delta_j \rho_{jk}) + (3\tau_k - \tau_j) \tau_j X_i X_j u_{jk} \rho_{jk} (\delta_j \rho_{ij} + \delta_k \rho_{ki})]$,
 $M''_{ijk} = 0,05 \tau_i^2 S_i u_i S_j u_j S_k u_k \delta_i \delta_j \delta_k (p \delta_i \rho_{ij} \rho_{ik} + q \delta_j \rho_{ji} \rho_{jk} + r \delta_k \rho_{ki} \rho_{kj})$,
 $p = 40\tau_i \tau_j \tau_k - 15\tau_k \tau_i^2 - 15\tau_j \tau_i^2 + 6\tau_i^3$, $q = 30\tau_j^3 \tau_k - 10\tau_j^3 - 5\tau_i^2 \tau_k + \tau_i^3$, $r = 30\tau_j^2 \tau_k - 10\tau_j^3 - 5\tau_i^2 \tau_j + \tau_i^3$.

2. В случае $\Theta = 1$ имеем обычную граничную задачу при малых возмущениях. Введем следующие обозначения: $m(x) = H\zeta_x(\tau_x)$, где τ_x является моментом достижения невозмущенной траекторией поверхности Π_1 при начальном условии $\zeta_x(0) = x$,

$$\Delta m(x) = 0,5 \int_0^{\tau_x} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 m(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) \bigg|_{\zeta=\zeta_x(t)} dt, \quad V(x) = \int_0^{\tau_x} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) \bigg|_{\zeta=\zeta_x(t)} dt,$$

$$M(x) = 3 \int_0^{\tau_x} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) \bigg|_{\zeta=\zeta_x(t)} dt.$$

Эти функции могут быть представлены как решение задачи Коши (13)–(15) с преобразованием (17)–(19). Соответствующие выкладки содержатся в (Балабушкин, 1991), где доказан п. 1 из утверждения 3. Ниже приведено доказательство п. 2.

Введем трубку радиуса $\rho > 0$ вокруг невозмущенной траектории $\zeta_x(t): U^\rho(x) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{\zeta \in R^n : |\zeta - \zeta_x(t)| < \rho\}$, где $|\cdot|$ — евклидова норма в R^n .

Лемма 1 (Fleming, 1974, lemma 2.1). Для любых $\rho > 0$ и компактного множества $K \subset R^n$ найдутся $\lambda > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что

$$P[\exists t \in [0, T]: \zeta_x(t) \notin U^\rho(x)] \leq 2n \exp[-\rho \lambda / \sqrt{\varepsilon}]$$

для всех $x \in K$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$.

При $\Theta=1$ $\tau_1^\varepsilon = \inf(t \geq 0: \zeta^\varepsilon(t) \in \Pi_1)$ ($\inf \emptyset = T$). Обозначим U_1^ρ часть трубки U^ρ , которая содержит точку x и лежит по одну сторону от плоскости Π_1 . Пусть $\tilde{\tau}_1^\varepsilon = \inf(t \geq 0: \zeta^\varepsilon(t) \notin U_1^\rho)$, тогда по определению $\tilde{\tau}_1^\varepsilon \leq \tau_1^\varepsilon$. По условию В можно выбрать достаточно малое $\rho > 0$ так, что $\tilde{\tau}_1^\varepsilon < T$. Разобьем границу ∂U_1^ρ на $\partial U_{11}^\rho = \partial U_1^\rho \cap \Pi_1$ и $\partial U_{12}^\rho = \partial U_1^\rho \setminus \partial U_{11}^\rho$. Из леммы 1 следует, что $p^\varepsilon = P(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ быстрее любой степени ε .

Рассмотрим в качестве аппроксимации характеристической функции $\psi_\lambda^\varepsilon(x) = E \exp(i\lambda Y_x^\varepsilon)$ (E — символ математического ожидания) выражение

$$\tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(x) = (1 + (i\lambda)^3 \varepsilon^2 M(x) / 6) \exp(i\lambda(m(x) + \varepsilon \Delta m(x)) - 0,5 \varepsilon \lambda^2 V(x)).$$

Применяя к $\tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta_x^\varepsilon(t))$ формулу Ито, получаем

$$\psi_\lambda^\varepsilon(x) = \tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(x) + \Delta\psi_2 + \Delta\psi_3, \quad (П1)$$

где

$$\Delta\psi_2 = E \left[\exp(i\lambda Y^\varepsilon) - \tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) \right], \quad \Delta\psi_3 = E \int_0^{\tilde{\tau}_1^\varepsilon} L_1^\varepsilon \tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta^\varepsilon(t)) dt,$$

$$L_1^\varepsilon \psi(\zeta) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + 0,5 \varepsilon \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \psi(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta).$$

Обозначим $F^\varepsilon(r)$ функцию распределения случайной величины $\varepsilon^{-0,5} [Y^\varepsilon - m - \varepsilon \Delta m]$, $F^{\varepsilon,9}(r)$ — функцию распределения суммы этой случайной величины и гауссовской случайной величины η с нулевым средним и дисперсией $9^2 > 0$, не зависящей от Y^ε . По условию Г функция $F^\varepsilon(r)$ абсолютно непрерывна. Для любых $a < b$

$$F^{\varepsilon,9}(b) - F^{\varepsilon,9}(a) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda} \psi_{\lambda/\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon \exp\left(-\frac{i\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}(m + \varepsilon \Delta m) - 0,5 \lambda^2 9^2\right) d\lambda. \quad (П2)$$

Наличие вспомогательного множителя $\exp(-0,5 \lambda^2 9^2)$ позволяет в дальнейшем применять теорему Фубини о замене порядка интегрирования в повторных интегралах. Подставляя (П1) в (П2), рассмотрим отдельно каждое слагаемое:

1) подстановка $\tilde{\psi}_{\lambda/\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon$, замена $(e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}) / i\lambda = \int_a^b e^{-i\lambda r} dr$ и изменение порядка интегрирования приводят к выражению $F_1^{\varepsilon,9}(b) - F_1^{\varepsilon,9}(a)$, где

$$F_1^{\varepsilon,9}(r) = \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{V+9^2}}\right) - \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{6[V+9^2]^{3/2}} \left(\frac{r^2}{V+9^2} - 1\right) \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{V+9^2}}\right); \quad (П3)$$

2) выражение под знаком математического ожидания в $\Delta\psi_2$ равно нулю на множестве $\{\tilde{\tau}_1^\varepsilon = \tau_1^\varepsilon\}$, поэтому

$$\Delta\psi_2 = E \left[\exp(i\lambda Y^\varepsilon) I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \right] - E \left[\tilde{\psi}_\lambda^\varepsilon(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \right], \quad (П4)$$

где $I(\cdot)$ — индикатор множества. Подставляя в (П2) первое слагаемое из (П4) и меняя местами интегрирование по λ и математическое ожидание, получаем

$$E \left[I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) I(a \leq \varepsilon^{-1/2} [Y^\varepsilon - m - \varepsilon \Delta m] + \eta \leq b) \right],$$

что не превышает p^ε . Подстановка второго слагаемого приводит по аналогии с (П3) к выражению $F_2^{\varepsilon,9}(b) - F_2^{\varepsilon,9}(a)$, где

$$F_2^{\varepsilon,9}(r) = E \left\{ I(\tilde{\tau}_1^\varepsilon < \tau_1^\varepsilon) \left[\Phi\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_\eta}}\right) - \sqrt{\varepsilon} \frac{M(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon))}{6(V_\eta)^{3/2}} \left(\frac{\tilde{r}^2}{V_\eta} - 1\right) \Phi\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_\eta}}\right) \right] \right\}, \quad (П5)$$

и для краткости обозначено $V_\eta = V(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) + 9^2$,

$$\tilde{r} = \tilde{r}^\varepsilon(r, \zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) = r - m(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) + m - \varepsilon \Delta m(\zeta^\varepsilon(\tilde{\tau}_1^\varepsilon)) + \varepsilon \Delta m. \quad (П6)$$

Вдоль траектории невозмущенного движения $m(\zeta(t)) \equiv m$, $t \in [0, \tau_1]$, и по условиям А, Б $m(\zeta)$ имеет ограниченные частные производные в U_1^ρ , поэтому в $\bar{U}_1^\rho$ (замыкании U_1^ρ) $|m(\zeta) - m| \leq C_1$, где C_1 сколь угодно мало при выборе соответствующего ρ . Функция $\Delta m(\zeta)$ непрерывна и ограничена в $\bar{U}_1^\rho$. Пусть $r_0 > 0$, тогда выбором достаточно малых $\rho > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ можно обеспечить отделенность $\tilde{r}^\varepsilon(r, \zeta)$ от нуля: $|\tilde{r}^\varepsilon(r, \zeta)| \geq C_3(r_0) > 0$ для всех $|r| \geq r_0$, $\zeta \in \bar{U}_1^\rho$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Поскольку при этом функция $M(\zeta)$ ограничена в $\bar{U}_1^\rho$, выражение в квадратных скобках в (П5) ограничено по модулю некоторой константой

$C_4(r_0) > 0$, не зависящей от $\vartheta > 0$. Суммарно подстановка $\Delta\psi_2$ в (П2) дает вклад, не превышающий $(2C_4 + 1)p^\varepsilon$;

3) из определения функций $m(x), \Delta m(x), V(x), M(x)$ следует, что в области U_1^p имеют место уравнения:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + 0,5 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 m(\zeta)}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial M(\zeta)}{\partial \zeta_i} f_{1i}(\zeta) + 3 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial m(\zeta)}{\partial \zeta_i} \frac{\partial V(\zeta)}{\partial \zeta_j} a_{ij}(\zeta) = 0.$$

С использованием этих соотношений проверяется, что $I_1^{\varepsilon} \tilde{\Psi}_\lambda^{\varepsilon}(\zeta)$ равно сумме конечного числа слагаемых вида $\varepsilon^p (i\lambda)^q h(\zeta) \exp(i\lambda m(\zeta) + i\lambda \varepsilon \Delta m(\zeta) - 0,5 \varepsilon \lambda^2 V(\zeta))$, где $h(\zeta)$ — ограниченные в $\bar{U}_1^p$ функции, $q \geq 1, p - 0, 5q \geq 1$. Подставляя в (П2), получаем сумму конечного числа слагаемых

$$(\varepsilon^{p-q/2} / 2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}) (i\lambda)^{-1} (i\lambda)^q G^{\varepsilon}(\lambda) d\lambda,$$

где

$$G^{\varepsilon}(\lambda) = E \int_0^{\tilde{\tau}_1^{\varepsilon}} h(\zeta^{\varepsilon}(t)) \exp(i\lambda (m(\zeta^{\varepsilon}(t)) - m + \varepsilon \Delta m(\zeta^{\varepsilon}(t)) - \varepsilon \Delta m) / \sqrt{\varepsilon} - 0,5 \varepsilon \lambda^2 V_{\eta}(\zeta^{\varepsilon}(t))) dt.$$

Каждое из этих слагаемых равно $F_3^{\varepsilon, \vartheta}(b) - F_3^{\varepsilon, \vartheta}(a)$, где

$$F_3^{\varepsilon, \vartheta}(r) = \varepsilon^{p-q/2} E \int_0^{\tilde{\tau}_1^{\varepsilon}} \frac{h(\zeta^{\varepsilon}(t))}{(V_{\eta})^{q/2}} g\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_{\eta}}}\right) \varphi\left(\frac{\tilde{r}}{\sqrt{V_{\eta}}}\right) dt,$$

$g(\cdot)$ — полином, $\tilde{r} = \tilde{r}^{\varepsilon}(r, \zeta^{\varepsilon}(t))$ определяется выражением (П6) при замене $\tilde{\tau}_1^{\varepsilon}$ на t . Аналогично (П5) $|F_3^{\varepsilon, \vartheta}(r)| \leq \varepsilon C_5$ для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некоторой константе $C_5(r_0) > 0$.

Суммируя результаты подстановки (П2) в (П3): для любого $r_0 > 0$ найдутся $\rho > 0, \varepsilon_1 > 0$ такие, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, a < b, |a|, |b| \geq r_0$ и произвольного $\vartheta > 0$:

$$|F^{\varepsilon, \vartheta}(b) - F^{\varepsilon, \vartheta}(a) - (F_1^{\varepsilon, \vartheta}(b) - F_1^{\varepsilon, \vartheta}(a))| \leq (2C_4 + 1)p^\varepsilon + \varepsilon C_5.$$

Полагая $a \rightarrow -\infty, \vartheta \rightarrow 0$ и учитывая непрерывность $F^{\varepsilon}(r)$, получаем для $|r| \geq r_0$:

$$|F^{\varepsilon}(r) - F_1^{\varepsilon}(r)| \leq \varepsilon C_6. \quad (\text{П7})$$

Пусть $\alpha < 0,5, \beta_{\alpha} < 0, r_0 = -0,5\beta_{\alpha}$. Можно найти достаточно малое ε_1 такое, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, r \leq r_0$ выполнено (П7) и при этом уравнения $F_1^{\varepsilon}(r) \pm \varepsilon C_6 = \alpha$ имеют единственные решения, не превышающие r_0 . В этом случае квантиль порядка α распределения $F^{\varepsilon}(r)$ лежит между этими решениями. Отсюда следует, что для случайной величины $\varepsilon^{-1/2}[Y^{\varepsilon} - m - \varepsilon \Delta m]$ квантиль порядка α представляется в виде

$$\sigma\beta_{\alpha} + \sqrt{\varepsilon}\chi\sigma(\beta_{\alpha}^2 - 1)/6 + \varepsilon\Delta_{11}^{\varepsilon}(\alpha), \quad (\text{П8})$$

что эквивалентно (23).

Для доказательства (24) в случае $\Theta = 1$ по аналогии с (П2) рассмотрим при произвольном q выражение

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^q r \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda r} \Psi_{\lambda/\sqrt{\varepsilon}}^{\varepsilon} \exp(-i\lambda (m + \varepsilon \Delta m) / \sqrt{\varepsilon} - 0,5 \varepsilon \lambda^2 \vartheta^2) d\lambda \right] dr, \quad (\text{П9})$$

где функция в квадратных скобках является плотностью распределения $F^{\varepsilon, \vartheta}(r)$. Подстановка в (П9) первого слагаемого из (П2) приводит к

$$-\frac{\sqrt{V + \vartheta^2}}{\alpha\sqrt{2\pi}} \left(1 + \sqrt{\varepsilon} \frac{Mq^3}{6(V + \vartheta^2)^{5/2}} \right) \exp\left(-\frac{q^2}{2(V + \vartheta^2)}\right).$$

Полагая $\vartheta = 0$ и подставляя в качестве q выражение (П8), получаем первые члены разложения по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ ожидаемых потерь случайной величины $\varepsilon^{-1/2}[Y^{\varepsilon} - m - \varepsilon \Delta m]$ в виде $-(1 + \sqrt{\varepsilon}\beta_{\alpha}\chi/6)\sigma\varphi(\beta_{\alpha})/\alpha$. Аналогично доказательству (23), подстановка двух других слагаемых из (П3) в (П9) дает выражения порядка $\varepsilon\Delta_{12}^{\varepsilon}(\alpha)$.

В случае $\Theta = 2$ предварительно заметим, что для процесса без переключений $\zeta^\varepsilon(t)$ имеет место свойство: если остановить данный процесс в фиксированный момент $s \in (0, T)$ и взять решения уравнений (13)–(15) как начальные для тех же уравнений на отрезке $[s, t]$, то получим аппроксимацию параметров распределения процесса для момента t . Необходимо доказать, что это свойство сохраняется при дополнительном преобразовании (20). Повторное применение леммы 1 с $K = \partial U_{11}^p$ показывает, что достаточно рассмотреть траектории процесса $\xi(t)$ в окрестности невозмущенной траектории, когда вначале достигается Π_1 и затем Π_2 . Для доказательства части а) определяем условное распределение $Y^\varepsilon = H\xi^\varepsilon(\tau_2^\varepsilon)$ при условии известного состояния $\xi^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon) \in \partial U_{11}^p$ на основании уже установленных аппроксимаций для случая одной границы, затем осуществляем усреднение по распределению $\xi^\varepsilon(\tau_1^\varepsilon)$, первые три момента которого также приближенно известны из случая одной границы. При этом учитываем однородность процесса $\xi^\varepsilon(t)$. Для доказательства (23), (24) дополнительно используется условие Г. Доказательство для $\Theta > 2$ проводится по индукции.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения 1.

А. Решение уравнения (4) имеет вид

$$Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = S_i \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} \exp\left(-0,5\varepsilon\delta_i^2 t + \sqrt{\varepsilon}\delta_i W_i'(t)\right) \left(u_i dt - \sqrt{\varepsilon}v_i u_i dW_i(t)\right). \quad (\text{П10})$$

Поскольку $ES_i^\varepsilon(t) = S_i$ для любого t , то

$$m_i = EY_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = E\left[E\left(Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) \mid \mathcal{F}_\infty^W\right)\right] = S_i E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} \left(u_i dt - \sqrt{\varepsilon}v_i u_i dW_i(t)\right) = S_i X_i.$$

Для фьючерса в (П10) имеется дополнительное слагаемое $-X_i S_i^\varepsilon(t_0)$, поэтому в этом случае $m_i = 0$.

Б. Эта часть является следствием более общего утверждения 3. Уравнение (13) в данном случае вырождено: $\gamma(t) \equiv 0$, а решения уравнений (14), (15) являются однородными многочленами относительно $S_i u_i$ степени 2 и 3 соответственно. Преобразование (20) сохраняет эти свойства, поэтому достаточно найти решение уравнений (14), (15) для трехкомпонентного портфеля и экстраполировать его на общий случай.

Доказательство утверждения 2 дано схематично.

Обозначим $\tau_{\min}^\varepsilon = \min(\tau_i^\varepsilon, \tau_j^\varepsilon)$.

Лемма 2. Пусть $\tau_i = \tau_j = \tau$, тогда

$$E\left(\tau_{\min}^\varepsilon\right)^k = \tau^k - k\tau^{k-0,5} \sqrt{0,5\varepsilon(v_i^2 + v_j^2)} / \pi + \varepsilon\Delta_k^\varepsilon, \quad k=1, \dots, 4, \quad (\text{П11})$$

где Δ_k^ε ограничены для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ при некотором $0 < \varepsilon_1 \leq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (Липцер, Ширяев, 1974), что плотность распределения момента первого достижения винеровским процессом прямой $a - bt$, где $a, t > 0$, равна

$$p(t) = at^{-3/2} \Phi((bt - a)/\sqrt{t}) \quad (\text{П12})$$

и выполнены соотношения:

$$\int_0^t p(s) ds = \Phi((bt - a)t^{-1/2}) + e^{2ab} \Phi(-(bt + a)t^{-1/2}), \quad (\text{П13})$$

$$\int_0^t s^{k+1} p(s) ds = \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b}\right) \int_0^t s^k p(s) ds, \quad k \geq 0. \quad (\text{П14})$$

Обозначим $p_i(t)$ плотность распределения τ_i^ε , тогда в (П12) $a = \tau/\sqrt{\varepsilon}v_i$, $b = 1/\sqrt{\varepsilon}v_i$ и аналогично для $p_j(t)$. В выражении

$$E\left[\tau_{\min}^\varepsilon\right]^k = \int_0^\infty \left[\int_0^t s^k p_j(s) ds \right] p_i(t) dt + \int_0^\infty \left[\int_0^t s^k p_i(s) ds \right] p_j(t) dt, \quad k=1, \dots, 4,$$

внутренние интегралы записываются в явном виде с помощью (П13), (П14). Далее отдельно рассматривается каждое слагаемое. Для $\exp(2\tau/\varepsilon v_i^2) \Phi(-(t+\tau)/(\sqrt{\varepsilon}t v_i))$ применим известное неравенство

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \Phi(x) \leq \Phi(-x) \leq \frac{1}{x} \Phi(x), \quad x > 0.$$

С использованием этих соотношений (П11) может быть проверено непосредственно для каждого $k=1, \dots, 4$.

Поскольку при различающихся τ_i утверждение 2 является частью утверждения 1, достаточно проверить, что при $\tau_i = \tau_j = \tau$ ковариация случайных величин $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon), Y_j^\varepsilon(t_0 + \tau_j^\varepsilon)$ имеет вид

$$\text{cov}(Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon), Y_j^\varepsilon(t_0 + \tau_j^\varepsilon)) = \varepsilon \rho_{ij} X_i X_j S_i S_j \delta_i \delta_j (t_0 + \tau/3) + \varepsilon^2 \Delta^\varepsilon.$$

В данном случае удобно представить $Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon)$ как решение уравнения (5):

$$Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) = X_i S_i^\varepsilon(t_0) - X_i S_i + \sqrt{\varepsilon} \delta_i S_i u_i \int_{t_0}^{t_0 + \tau_i^\varepsilon} g_i(t, W_i(t), W_i'(t)) dW_i'(t),$$

где $g_i = (\tau_i - (t - t_0) + \sqrt{\varepsilon} v_i [W_i(t) - W_i(t_0)]) \exp(-0,5\varepsilon \delta_i^2 t + \sqrt{\varepsilon} \delta_i W_i(t))$. Отсюда

$$\begin{aligned} E[Y_i^\varepsilon(t_0 + \tau_i^\varepsilon) Y_j^\varepsilon(t_0 + \tau_j^\varepsilon)] &= X_i X_j E[(S_i^\varepsilon(t_0) - S_i)(S_j^\varepsilon(t_0) - S_j)] + \\ &+ \varepsilon \delta_i \delta_j S_i S_j \rho_{ij} E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\min}^\varepsilon} g_i(t, W_i(t), W_i'(t)) g_j(t, W_j(t), W_j'(t)) dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно $X_i X_j S_i S_j (e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t_0} - 1)$. Второе после представления в виде $E[E(\cdot | \mathcal{F}_\infty^W)]$

упрощается до $\varepsilon \delta_i \delta_j S_i S_j u_i u_j \rho_{ij} E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\min}^\varepsilon} f e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t} dt$, где

$$\begin{aligned} f &= (\tau - (t - t_0))^2 + \sqrt{\varepsilon} v_i [W_i(t) - W_i(t_0)] (\tau - (t - t_0)) + \\ &+ \sqrt{\varepsilon} v_j [W_j(t) - W_j(t_0)] (\tau - (t - t_0)) + \varepsilon v_i v_j [W_i(t) - W_i(t_0)] [W_j(t) - W_j(t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

Представляя

$$(\tau - (t - t_0))^2 e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t} = (\tau - (t - t_0))^2 + (\tau - (t - t_0))^2 (e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j t} - 1),$$

для вклада первого слагаемого получаем

$$E \int_{t_0}^{t_0 + \tau_{\min}^\varepsilon} (\tau - (t - t_0))^2 dt = \tau^2 E \tau_{\min}^\varepsilon - \tau E (\tau_{\min}^\varepsilon)^2 + E (\tau_{\min}^\varepsilon)^3 / 3 = \tau^3 / 3 + \varepsilon \Delta^\varepsilon,$$

где последнее равенство следует из леммы 2.

Рассмотрим далее второе и третье слагаемые (П15). Требуется определить скорость убывания по ε выражения $E \int_0^{\tau_{\min}^\varepsilon} \exp(\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s) W_i(s) (\tau - s) ds$. Вычитая $E \int_0^\tau e^{\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s} W_i(s) (\tau - s) ds = 0$, получаем

$$E \int_{\tau}^{\tau_{\min}^\varepsilon} I(\tau_{\min}^\varepsilon \geq \tau) \exp(\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s) W_i(s) (\tau - s) ds + E \int_0^{\tau_{\min}^\varepsilon} I(\tau_{\min}^\varepsilon < \tau) \exp(\varepsilon \rho_{ij} \delta_i \delta_j s) W_i(s) (\tau - s) ds.$$

Первое слагаемое по абсолютной величине не превышает

$$E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^2 I(\tau_{\min}^\varepsilon \geq \tau) e^{\varepsilon \delta_i \delta_j \tau_i^\varepsilon} \max_{s \leq \tau_i^\varepsilon} W_i(s) \leq \sqrt{E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^4} \sqrt{E \left[e^{4\varepsilon \delta_i \delta_j \tau_i^\varepsilon} \left(\max_{s \leq \tau_i^\varepsilon} W_i(s) \right)^2 \right]}.$$

Аналогично для второго слагаемого:

$$E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^2 I(\tau_{\min}^\varepsilon < \tau) e^{\varepsilon \delta_i \delta_j \tau} \max_{s \leq \tau} W_i(s) \leq e^{\varepsilon \delta_i \delta_j \tau} \sqrt{E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^4} \sqrt{E \left(\max_{s \leq \tau} W_i(s) \right)^2}.$$

Из леммы 2 следует, что $E (\tau_{\min}^\varepsilon - \tau)^4 = \varepsilon \Delta^\varepsilon$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Балабушкин А.Н.** (1991). Прогнозирование состояния динамического объекта в момент достижения границы при малых возмущениях // *Автоматика и телемеханика*. № 11. С. 64–70. [**Balabushkin A.N.** (1991). The state prediction of dynamic object in the moment of boundary achieving under small disturbances. *Automatika i Telemekhanika*, 52, 11, 1533–1538 (in Russian).]
- Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** (1974). Статистика случайных процессов. М.: Наука. [**Liptser R. Sh., Shiryaev A.N.** (1974). *Statistics of random processes*. Moscow: Nauka (in Russian); **Liptser R. Sh., Shiryaev A.N.** (2001). *Statistics of random processes*. Berlin: Springer-Verlag.]
- Avellaneda M., Dong Y., Valkai B.** (2015). *Optimal portfolio liquidation and macro hedging*. Bloomberg quant seminar. Available at: <https://math.nyu.edu/~avellane/>

- Avellaneda M., Cont R.** (2013). *Close-out risk evaluation (CORE): A new risk management approach for central counterparties*. Working Paper. Available at: <http://ssrn.com/abstract=2247493>
- Boudt K., Peterson B., Croux C.** (2008). Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns. *J. Risk*, 11, 79–103.
- De Genaro A.** (2016). Systematic multi-period stress scenarios with an application to CCP risk management. *Journal of Banking & Finance, Elsevier*, 67 (C), 119–134.
- Fleming W.H.** (1974). Stochastically perturbed dynamical systems. *Rocky Mountain J. Math*, 4, 3, 407–433.
- Kim H.** (2014). *Optimal execution under liquidity constraints*. PhD Thesis. Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University. Available at: https://www.math.nyu.edu/~avellane/HSK_Thesis.pdf
- Jorion P.** (2007). *Value at risk: The new benchmark for managing financial risk*. N.Y.: McGraw Hill.
- Vicente L.A.B.G., Cerezetti F.V., Faria S.R. de, Iwashita T., Pereira O.R.** (2015). Managing risk in multi-asset class, multimarket central counterparties: The CORE approach. *J. Banking & Finance*, 51, 119–130.

Approximation to portfolio liquidation value with calculation of its skewness

© 2023 A.N. Balabushkin

A.N. Balabushkin,

BrokerCreditService, Moscow, Russia; e-mail: BalabushkinAN@msk.bcs.ru

Received 24.06.2022

Abstract. A boundary problem for a homogeneous multidimensional diffusion process is considered under the assumption of small perturbations. Approximations to the mean, second and third central moments of the process at the moment of the first crossing a given plane in phase space are presented as a solution of ordinary differential equations with an additional transformation (“projection onto the boundary”). The quantile of a linear combination of coordinates is estimated by the second order expansion in powers of a small parameter determining the magnitude of perturbations. In the first approximation, this expansion corresponds to the Gaussian distribution, the next term contains skewness. The result is extended to a process with multiple boundaries, upon reaching each of them the equation of the process changes. Such a model describes the liquidation of a portfolio of financial instruments in which the closing rate of each of the positions is a random process. The result is illustrated by two examples. In the first example a portfolio consists of linear instruments (such as stocks, futures), prices are correlated Geometric Brownian Motions with zero drift. The closing rates are constant, but with random noise due to daily fluctuations in trading volume. In this particular case approximations for the mean, variance, skewness, *VaR* and *CVaR* of the financial result of portfolio liquidation are given explicitly. In the second example, the liquidation of an exchange-traded option position is considered under the assumption that the closing rate depends on the ratio of the underlying price to the strike of the option. Numerical calculations demonstrate that taking into account skewness significantly increases the accuracy of estimates.

Keywords: diffusion process, boundary problem, geometrical Brownian motion, portfolio liquidation value, value-at-risk, Cornish–Fisher expansion.

JEL Classification: C02, C32, G20, G32.

For reference: **Balabushkin A.N.** (2023). Approximation to portfolio liquidation value with calculation of its skewness. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 105–118. DOI: 10.31857/S042473880024878-4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Сведение динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования

© 2023 И.А. Лесик, А.Г. Перевозчиков

И.А. Лесик,

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: lesik56@mail.ru

А.Г. Перевозчиков,

НПО «РусБИТех», Москва; e-mail: pere501@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.11.2022

Аннотация. В статье предлагается метод сведения дискретной динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования. Задачу можно решить методом последовательных приближений, основанным на численном методе решения, если отказаться от целочисленности элементов матрицы назначения. Равновесные цены можно рассчитать напрямую, и поэтому не требуется вариационной постановки внутренней задачи определения равновесных цен, основанной на теореме Дебре. Функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми, например норма разности в квадрате, и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления, которое исключается из уравнений динамики системы. Полученная блочная задача выпуклого программирования допускает декомпозицию с помощью замораживания переменных связи с соседними блоками на уровне предыдущей итерации. Это позволяет обосновать метод последовательных приближений для решения полученной задачи, основанный на методе Б.Т. Поляка. Приводится модельный пример его использования в динамическом расширении транспортной задачи по стоимости.

Ключевые слова: транспортная задача по стоимости, динамическое расширение задачи, исключение управлений, декомпозиция задачи, принцип сжимающих отображений, метод последовательных приближений.

Классификация JEL: O12, C51.

Для цитирования: Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2023). Сведение динамической модели рынка разработки программного обеспечения к блочной задаче выпуклого программирования // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 119–130. DOI: 10.31857/S042473880024879-5

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача определения оптимальных планов назначения исполнителей по работам в динамическом расширении транспортной задачи (ТЗ) по стоимости, поставленная в работе (Лесик, Перевозчиков, 2021). Управление формально осуществляется приращением планов, которые исключаются из уравнений динамики. Поэтому на каждом шаге показатель оптимальности, кроме транспортных расходов и фиксированных доплат, включает норму приращения планов и минимизация этого показателя позволяет уменьшить расходы и стабилизировать распределение ресурсов по работам. Полученная блочная задача выпуклого программирования допускает декомпозицию через замораживание переменных связи с соседними блоками на уровне предыдущей итерации. Это дает возможность обосновать метод последовательных приближений для решения полученной задачи, основанный на методе Б.Т. Поляка.

В существующих платформах PBS¹, LSF² (Platform LSF 7 Update 6, 2009), NQE³, I-SOFT (Ding et al., 2012), EASY⁴, LoadLeveler⁵ для решения транспортной задачи и ее частного случая задачи о назначениях

¹ PBS Works. Официальный сайт компании Altair Engineering, Inc. (<http://www.pbsworks.com/>).

² Platform LSF 7 Update 6. An Overview of New Features for Platform LSF Administrators. Официальный сайт компании Platform Computing Corporation (http://www.platform.com/workload-management/whatsnew_lst7u6.pdf).

³ См. сноску 1.

⁴ What is Condor? Официальный сайт продукта Condor (<http://www.cs.wisc.edu/condor/description.html>).

⁵ IBM Tivoli Workload Scheduler LoadLeveler. Официальный сайт компании «Интерфейс» (<http://www.interface.ru/home.asp?artId=6283>).

рассматривается в основном статический вариант задачи с горизонтом планирования один период. Неэффективность такого подхода особенно сильно проявляется в глобальных вычислительных системах, так как в системах такого типа ресурсы и заявки являются неоднородными (Сергиенко, Симоненко В., Симоненко А., 2016). Все это делает актуальной задачу динамического распределения исполнителей по заданиям, поставленную и изученную в настоящей работе.

Практическая значимость работы позволяет внедрить предложенную схему декомпозиции динамической модели в распределение ресурсов и заданий на рынке разработки программного обеспечения (РПО) для создания соответствующих цифровых транзакционных платформ (ЦТП) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021). Несмотря на постоянное увеличение объема сделок, на рынке РПО отсутствуют глобальные платформы по типу указанных выше универсальных платформ распределения заданий PBS, LSF, NQE, I-SOFT, EASY, LoadLeveler, которые могли бы быть использованы в динамическом алгоритме загрузки заданий хотя бы для получения начального плана, который в динамической модели является элементом управления. Это увеличивает число посредников в цепочке, ведущей от заказчика к исполнителю, что уменьшает получаемую исполнителем оплату произведенных работ до 10 раз по сравнению со стоимостью, которую готовы были платить заказчики (цену предложения). Таким образом, создание цифровой платформы на рынке РПО могло бы привести к более справедливому распределению доходов и увеличению величины общественного благосостояния. Максимизация же последнего равносильна, как известно, определению глобального равновесия на рынке РПО в соответствии с теоремой Дебре (Debreu, 1954).

В общетеоретическом плане концепция равновесия (Макаров, Рубинов, 1973) на распределенном рынке однородного товара относится к мезоэкономике (Мезоэкономика развития, 2011) и лежит в основе модели синтеза транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом и предложением, рассмотренной в работах (Васин, Григорьева, Лесик, 2017, 2018; Васин, Григорьева, Цыганов, 2017). К особенностям метода можно отнести то обстоятельство, что равновесные цены вычисляются напрямую, и поэтому не требуется вариационной постановки внутренней задачи. Функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми, например норма разности в квадрате, и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления. Такая постановка изучается в настоящей работе. Имея динамическое расширение задачи о назначении (ЗН) на узкие места (УМ), можно определить дополнительную прибыль транспортной системы (цифровой платформы) за счет использования фьючерсов.

Основным результатом работы является декомпозиция динамического расширения транспортной задачи по стоимости при отказе от целочисленности элементов матрицы назначения и построение методов последовательных приближений ее решения на основе алгоритма Поляка.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ПО СТОИМОСТИ

Пусть, как в обычной транспортной задаче, через $i = 1, \dots, m$ обозначены пункты производства (работчики программного обеспечения (ПО)) некоторого однородного товара (человеко-дней при стандартном 8-часовом дне чистого рабочего времени, определяемого по таймеру), через $j = 1, \dots, n$ — пункты его потребления (заказчики ПО). Даны величины: $a_i \geq 0$ — объем производства в пункте производства i ; $b_j \geq 0$ — объем потребления в пункте потребления j , отнесенные к одному дню (горизонту планирования).

Ищутся величины x_{ij} объемов перевозок из пункта i в пункт j , удовлетворяющие обычным транспортным ограничениям

$$x_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где предполагается, что

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j, \quad (2)$$

и минимизирующие функцию

$$I(x) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} x_{ij}. \quad (3)$$

Здесь A_{ij} — эффективность соответствующего назначения.

Таким образом, задача (1)–(3) является частным случаем обычной ТЗ, которую можно решить точно при помощи соответствующего пакета, реализующего венгерский метод (Корбут,

Финкильштейн, 1969, с. 307) расстановки пометок, подробно описанный в (Ашманов, 1981), имеющим сложность $O(N^3)$ (Сергиенко и др., 2016), где $N = n + m$ — общее число вершин соответствующего двудольного графа.

Конкретно для рынка РПО будем предполагать выполненными следующие предположения:

1) за единицу берется один программист, работающий полный день (8 часов);

2) горизонт планирования — 1 день;

3) прибыли заказчиков и исполнителей по контакту (i, j) равны разности цен $P_j - Q_i$ одного рабочего дня спроса P_j и предложения Q_i (последняя с учетом прибыли платформы, например 30%), умноженной на число кодировщиков x_{ij} , где $P_j \geq P \geq Q_i$, P — равновесная цена. Всего

$$(P_j - Q_i)x_{ij}. \quad (4)$$

Замечание. С учетом балансовых ограничений прибыли участников рынка разработки ПО не будут зависеть от распределения x_{ij} .

В самом деле,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (P_j - Q_i)x_{ij} = \sum_{j=1}^n P_j \sum_{i=1}^m x_{ij} - \sum_{i=1}^m Q_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n P_j b_j - \sum_{i=1}^m Q_i a_i \geq 0. \quad (5)$$

Поэтому для оптимизации распределения применяется критерий (3), где в качестве полезности назначений A_{ij} можно взять рейтинг соответствующего соединения (например, долю всех предыдущих соединений в их общем количестве за определенный период по ретроспективной информации). Это указывает на то, что желательно использовать ранее зарекомендовавшие себя пары «исполнитель — заказчик».

2. ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ТЗ ПО СТОИМОСТИ

Динамическое расширение ТЗ по стоимости можно получить по схеме, предложенной в работе (Васин, Григорьева, Лесик, 2018). При этом равновесные цены можно вычислить напрямую и поэтому не требуется вариационной постановки внутренней задачи. И функции изменения фазовых координат можно взять выпуклыми, например норма разности в квадрате, и не учитывать постоянных затрат при каждом переключении управления.

Запишем постановку динамической задачи, следуя работе (Лесик, Перевозчиков, 2021). Оказывается, что у основной системы нет начальных условий (по крайней мере вначале, а затем за начальное условие можно брать текущее значение плана). Далее для определенности будем считать, что начальное значение плана не определено. Поэтому введем еще (-1) -шаг и соответствующую компоненту управления с нулевыми начальными условиями:

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + u_{ij}(t), \quad t = -1, 0, \dots, T-1, \quad x_{ij}(-1) = 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Через $a_i(t), b_j(t)$ обозначим запасы и потребности в ресурсах в соответствии с первоначальными заявками. Можно считать, что управляющие воздействия ограничены условиями $-M_{ij}(t) \leq u_{ij}(t) \leq M_{ij}(t+1) \quad \forall i, j$, где $M_{ij}(t) = \min(a_i(t), b_j(t))$.

Множество допустимых управлений $[u(t), t = -1, 0, \dots, T-1]$, $u(t) = (u_{ij}(t), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через

$$W = \prod_{t=-1}^{T-1} W(t), \quad W(t) = \prod_{i,j} W_{ij}(t), \quad W_{ij}(t) = [-M_{ij}(t), M_{ij}(t+1)].$$

Показатель эффективности определим в виде интегрального функционала

$$J(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ -\sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^2(t) \right\}, \quad (7)$$

где $K > 0$ — достаточно большая штрафная константа за изменение элемента плана, связанная с необходимостью перераспределения некоторых исполнителей по работам.

Предполагается, что цены в заявках постоянны и упорядочены по неубыванию:

$$Q_1 \leq Q_2 \leq \dots \leq Q_m, \quad P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n, \quad (8)$$

$$Q_i \leq P(t) \leq P_j, \quad i = 1, \dots, m(t); \quad j = n(t), \dots, n, \quad (9)$$

где $P(t), m(t), n(t)$ — равновесная цена и максимальные и минимальные значения индексов i, j , удовлетворяющих неравенствам (9) в момент времени $t = -1, 0, \dots, T-1$. Тогда балансовые ограничения имеют вид фазовых ограничений:

$$a_i(t) = \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, m(t), \quad b_j(t) = \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t), \quad j = n(t), \dots, n, \quad x_{ij}(t) \geq 0, \quad t = -1, 0, \dots, T-1. \quad (10)$$

В силу линейности уравнений динамики (6) и выпуклости функции (7) по совокупности переменных в силу результатов (Васильев, 1981) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Функционал (7) представляет собой выпуклую функцию управления.

Далее для простоты будем рассматривать задачу с неуравновешенным балансом, когда

$$a_i(t) \geq \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, m(t), \quad b_j(t) \geq \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t), \quad j = n(t), \dots, n, \quad x_{ij}(t) \geq 0, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (11)$$

В этом случае условие (2) может не выполняться. Обозначим множества точек $x(t)$, удовлетворяющих (11), через $B(t)$.

Иногда вместо (7) используется недифференцируемый выпуклый показатель

$$J(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^+(t) \right\}, \quad (12)$$

где верхняя срезка разности равна

$$u_{ij}^+(t) = \max(u_{ij}(t), 0), \quad (13)$$

$$u_{ij}(t) = x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t) = \Delta x_{ij}(t). \quad (14)$$

То есть дополнительные расходы по выводу исполнителя на заказчика связаны только с увеличением объема x_{ij} назначения, а не с его уменьшением.

3. ДЕКОМПОЗИЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЗ ПО СТОИМОСТИ

Заменим в показателе (7) компоненты управления при помощи их выражения (14) через приращение фазовых координат

$$L(x) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^2(t) \right\}. \quad (15)$$

Этот показатель необходимо минимизировать при ограничениях

$$x \in B \triangleq \prod_{t=-1}^{T-1} B(t). \quad (16)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для компонент $x(t)$:

$$L_t(x) = K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}(t) - x_{ij}(t-1))^2 - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}(t) - x_{ij}(t+1))^2 = \\ = K \|x(t) - x(t-1)\|^2 - \langle A(t), x(t) \rangle + K \|x(t) - x(t+1)\|^2 \rightarrow \min \quad (17)$$

при фиксированных $x(t-1), x(t+1)$ и ограничениях

$$x(t) \in B(t). \quad (18)$$

Здесь $A(t)$ — соответствующая подматрица матрицы A . Для удобства изложения схемы декомпозиции $A(t), x(t)$ рассматриваются как вектор-строки, где в качестве компонент стоят строки.

Предполагается по умолчанию, что слагаемые в (17), содержащие $x(-1), x(T)$, отсутствуют. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Для любого решения x задачи минимизации (15) при ограничениях (16) его компоненты являются решением вспомогательной задачи (17)–(18).

Градиент показателя (17) по $x(t)$ при фиксированных $x(t-1), x(t+1)$ имеет вид

$$\nabla_{x(t)} L_t(x(t)) = 2K(x(t) - x(t-1)) - A(t) + 2K(x(t) - x(t+1)). \quad (19)$$

Получив градиенты (19), для решения вспомогательной задачи можно воспользоваться методом проекции градиента с постоянным шагом (Поляк, 1983, с. 185):

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)}(x^k(t) - a \nabla_{x(t)} L_t(x^k(t))), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

где k — номер шага; $a > 0$ — постоянный шаг метода; $P_{B(t)}(\cdot)$ — оператор проектирования на компоненту $B(t)$ множества допустимых управляющих воздействий $W(t)$. Очевидно, что внутренности множеств $B(t)$ не пусты. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 185) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. Пусть $L > 0$, где $L > 0$ — константа Липшица градиента (19) на множестве B . Тогда последовательность $[x^k(t)]$ в методе (20) сходится к множеству решений задачи минимизации (17) при ограничениях (18).

Рассмотрим диагональный процесс:

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)}(x^k(t) + a \nabla_{x(t)} L_t(x^k)) \quad \forall t, \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Введем норму $\|x\| = \max \|x(t)\|$. Тогда константа $L > 0$ будет ограничивать норму полного градиента показателя $L(x)$ на множестве B и теорема сходимости будет справедлива для процесса (21), который представляет собой покомпонентную запись метода проектирования градиента в задаче минимизации показателя (15) при ограничениях (16).

Таким образом, метод проекции градиента осуществляет декомпозицию исходной задачи на вспомогательные.

Модель позволяет учесть скидки на опт (Лесик, Перевозчиков, 2022) и посреднические менеджерам за вывод недостающих кодеров. В этом случае (15) превращается в

$$L(X) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} x_{ij}^2(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t) \right\},$$

т.е. квадратичная форма соответствует уже скидкам на опт, а кусочно-линейная — посредническим менеджерам за вывод недостающих кодеров. Соответственно меняется частный показатель:

$$L_t(X) = K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) + \langle Ax(t), x(t) \rangle + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1),$$

где $A(t) = aP(t)E$, где a — норма скидки на опт, $P(t)$ — равновесная цена текущего периода, E — единичная матрица соответствующей размерности, K — посреднические менеджерам. Это равенство имеет экономический смысл, поскольку складываются денежные величины. Например, равенство (17)

$$L_t(x) = K \|x(t) - x(t-1)\|^2 - \langle A(t), x(t) \rangle + K \|x(t) - x(t+1)\|^2$$

имеет смысл только в методе штрафных функций, поскольку абстрактная полезность, взятая со знаком «минус», складывается с абстрактным штрафом.

Замечание. Абстрактная полезность может быть нелинейной, например логарифмической по закону логарифма:

$$x_{ij} A_{ij}(x_{ij}) = a_{ij} \ln(1 + x_{ij}) \approx a_{ij} (x_{ij} - 0,5x_{ij}^2) = a_{ij} (1 - 0,5x_{ij}) x_{ij}; \quad x_{ij} \in (-1, 1];$$

что можно интерпретировать как переменную полезность $A_{ij}(x_{ij}) = a_{ij} (1 - 0,5x_{ij})$ (Лесик, Перевозчиков, 2022).

На практике наиболее применим денежный показатель, который можно связать с равновесной ценой дня:

$$L_t(x) = bP(t-1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) + aP(t) \|x(t)\|^2 + bP(t+1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1).$$

К нему максимально близок показатель с логарифмом

$$L_t(x) = bP(t-1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=n(t)}^n A_{ij} \ln(1 + x_{ij}) + bP(t+1) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1)$$

в силу приближенного равенства $A_{ij} \ln(1 + x_{ij}) \approx A_{ij} (x_{ij} - 0,5x_{ij}^2)$.

При $A_{ij} = 2aP(t)$ последний эквивалентен показателю по стоимости, в силу того что сумма линейных частей равна константе в силу балансовых ограничений.

4. СЛУЧАЙ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

Иногда вместо (15) используется недифференцируемый выпуклый показатель (12), который при исключении управлений принимает вид

$$L(x) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t) \right\},$$

где $\Delta x_{ij}^+(t) = \max(x_{ij}(t+1) - x_{ij}(t), 0)$.

Как и в разд. 3, будем рассматривать задачу с неуровновешенным балансом (11). Введем функции:

$$\begin{aligned} f_i^t(x(t)) &= \sum_{j=n(t)}^n x_{ij}(t) - a_i(t) \leq 0, i=1, \dots, m(t); \quad f^t(x(t)) = \max_i f_i^t(x(t)), \quad f(x) = \max_t f^t(x(t)); \\ g_j^t(x(t)) &= \sum_{i=1}^{m(t)} x_{ij}(t) - b_j(t) \leq 0, j=n(t), \dots, n; \quad g^t(x(t)) = \max_j g_j^t(x(t)), \quad g(x) = \max_t g^t(x(t)); \\ F(x) &= \max(f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу минимизации (21) на множестве допустимых значений, заданном агрегированным неравенством

$$F(x) \leq 0 \quad (22)$$

и условием принадлежности объемлющему параллелепипеду

$$x \in V = \bigotimes_t V^t, \quad V^t = \bigotimes_{i,j} V_{ij}^t, \quad V_{ij}^t = [0, M_{ij}(t)]. \quad (23)$$

Эту задачу можно решить методом Поляка (Поляк, 1983):

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= P_V(x^k - \lambda_k v^k), \quad k=0, 1, \dots, \\ v^k &\in \begin{cases} \partial L(x^k), & F(x^k) \leq 0, \\ \partial F(x^k), & F(x^k) > 0, \end{cases} \quad \lambda_k \rightarrow +0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty, \end{aligned} \quad (24)$$

где k — номер шага; λ_k — программный шаг метода; $P_V(x)$ — оператор проектирования на объемлющий параллелепипед V ; $\partial J(x), \partial F(x)$ — субдифференциалы выпуклых функций $J(x), F(x)$. Очевидно, что множество допустимых решений X ограничено и имеет внутренние точки. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 259) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 3. Последовательность $[x^k]$ в методе (24) сходится к множеству решений задачи минимизации (21) при ограничениях (22), (23).

Возможен, как в дифференцируемом случае, метод проекции субградиента:

$$x^{k+1}(t) = P_{B(t)}(x^k(t) - \lambda_k v_{x(t)}(x^k)) \quad \forall t, \quad k=0, 1, \dots, \quad (25)$$

где $v_{x(t)}(x^k)$ — компонента $x(t)$ субградиента функции $L_t(x^k)$

$$L_t(x) = K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t-1) - \sum_{i=1}^{m(t)} \sum_{j=1}^{n(t)} A_{ij} x_{ij}(t) + K \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(t+1),$$

λ_k — программный шаг метода, удовлетворяющий условиям (24).

Очевидно, что субградиенты $v_x(x)$ ограничены в совокупности на ограниченном замкнутом множестве B в силу полунепрерывности сверху субградиентного отображения $x \rightarrow v_x(x)$. Тогда согласно результатам (Поляк, 1983, с. 187) справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 4. Последовательность $[x^k]$ в методе (25) сходится к множеству решений задачи минимизации (17) при ограничениях (18).

Как и метод проекции градиента, метод (25) осуществляет декомпозицию задачи минимизации (17) при ограничениях (18), в отличие от алгоритма Поляка (24).

5. ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пример 1. Предположим, что в задаче с уравновешенным балансом

$$\|c_{ij}(0)\| = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ a_i(0)/b_j(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \|c_{ij}(1)\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a_i(1)/b_j(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = 2.$$

Шаг 0.

Тогда, исключая зависимые переменные из условий (10), приходим к задаче

$$I_0(x(0)) = c_{11}\{a_1(0) - (b_2(0) - x_{22}(0)) - (b_3(0) - x_{23}(0))\} + c_{21}(a_2(0) - x_{22}(0) - x_{23}(0)) + c_{12}(b_2(0) - x_{22}(0)) + c_{13}(b_3(0) - x_{23}(0)) + c_{22}x_{22}(0) + c_{23}x_{23}(0) = 29 - 2x_{22}(0) - 4x_{23}(0) \rightarrow \max \quad (26)$$

при ограничениях

$$a_1(0) - (b_2(0) - x_{22}(0)) - (b_3(0) - x_{23}(0)) \geq 0, \quad a_2(0) - x_{22}(0) - x_{23}(0) \geq 0, \quad b_2(0) - x_{22}(0) \geq 0, \quad b_3(0) - x_{23}(0) \geq 0, \quad x_{22}(0), \quad x_{23}(0) \geq 0, \quad (27)$$

или

$$a_2(0) \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq b_2(0) + b_3(0) - a_1(0), \quad b_2(0) \geq x_{22}(0) \geq 0, \quad b_3(0) \geq x_{23}(0) \geq 0, \quad (28)$$

или с учетом значения параметров (рис. 1)

$$4 \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq 2, \quad 3 \geq x_{23}(0) \geq 0. \quad (29)$$

Найдем точку максимума показателя (26) при ограничениях (29) геометрически. Получим точку статически-оптимального решения $x_{22}(0) = 2, x_{23}(0) = 0$. Собирая все найденные x_{ij} , запишем статически-оптимальное решение задачи на нулевом шаге:

$$\|x_{ij}(0)\| = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ a_i(0)/b_j(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Шаг 1. Исключая зависимые переменные, приходим к задаче

$$I_1(x) = c_{11}\{a_1(1) - (b_2(1) - x_{22}(1))\} + c_{21}(a_2(1) - x_{22}(1)) + c_{12}(b_2(1) - x_{22}(1)) + c_{22}x_{22}(1) = 22 - 2x_{22}(1) \rightarrow \max \quad (31)$$

при ограничениях

$$a_1(1) - (b_2(1) - x_{22}(1)) \geq 0, \quad a_2(1) - x_{22}(1) \geq 0, \quad b_2(1) - x_{22}(1) \geq 0, \quad x_{22}(1) \geq 0, \quad (32)$$

или

$$a_2(1) \geq x_{22}(1) \geq b_2(1) - a_1(1), \quad b_2(1) \geq x_{22}(1) \geq 0, \quad (33)$$

или с учетом значения параметров

$$4 \geq x_{22}(1) \geq 2. \quad (34)$$

Найдем точку максимума показателя (31) при ограничениях (34) геометрически. Получим точку статически-оптимального решения $x_{22}(1) = 2$. Собирая все найденные x_{ij} , запишем статически-оптимальное решение задачи на шаге 1:

$$\|x_{ij}(1)\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a_i(1)/b_j(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Замечание. Приведенный пример получается динамическим расширением примера из (Лесик, Перевозчиков, 2022) и дает точное решение

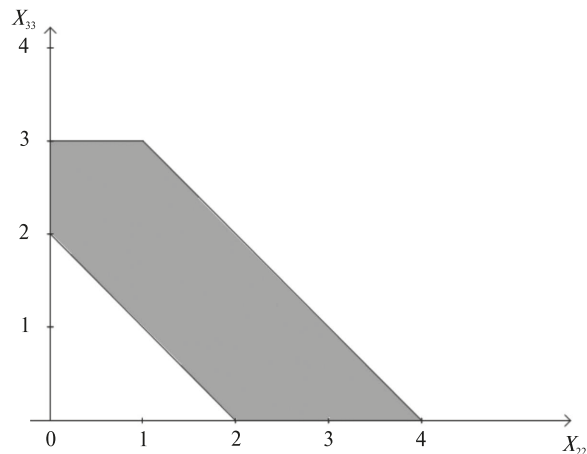


Рис. 1. Допустимая область на нулевом шаге

динамического расширения ТЗ по стоимости с исходной матрицей на два шага. На каждом шаге найденное оптимальное решение статической задачи по времени является решением по стоимости, причем решение второй задачи будет сужением первого 2×3 на подматрицу 2×2 , поэтому штраф за наращивание компонент решения

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \max(x_{ij}(1) - x_{ij}(0); 0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta x_{ij}^+(0);$$

$$\Delta x_{ij}^+(0) = \max(\Delta x_{ij}(0); 0)$$
(36)

будет равен нулю, т.е. минимальным. Эта задача содержит $2 + 1 = 3$ независимые переменные и может быть решена методом проекции градиента и служить для проверки его практической сходимости.

Для решения вспомогательной задачи проектирования множества $B(t)$ на каждом шаге можно использовать конечный метод сопряженных градиентов из (Поляк, 1983, с. 195) применительно к двойственной задаче (там же, с. 297).

Задача проектирования может быть поставлена как задача:

$$\min \left[\langle d, x \rangle + \frac{1}{2\gamma} \|x - a\|^2 \right], \quad Ax \leq b,$$
(37)

где

$$d = \bar{0}, \quad \gamma = 1.$$
(38)

Двойственная задача имеет вид:

$$\min \left[0, 5\gamma \|d + A^T y\|^2 - \langle y, Aa - b \rangle \right], \quad y \geq 0 = \min \left[0, 5\langle Ay, y \rangle - \langle y, e \rangle \right] \triangleq f(y), \quad y \geq 0,$$
(39)

где

$$A = AA^T, \quad e = Aa - b.$$
(40)

Исходная точка минимума связана с точкой минимума двойственной задачи формулой

$$x^* = a - \gamma (A^T y^* + d) = a - A^T y^*.$$
(41)

Градиент показателя (46) задается формулой

$$\nabla f(y) = Ay - e.$$
(42)

Пример 2. Рассмотрим задачу проектирования точки $a = (3, 3)^T$ на допустимое множество статической задачи на нулевом шаге в примере 1. Из рис. 1 видно, что проекцией будет точка $(2, 2)^T$.

Матрица A ограничений (29), векторы b, y будут иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A = AA^T$ и вектор e равны

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Метод сопряженных направлений:

$$y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(y^0) = -e = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Множество индексов I_0 и шаг β_0 равны $I_0 = \{i, y_i^0 = 0, \nabla f(y^0)_i > 0\} = \{2, 4\}; \beta_0 = 0$.

Сопряженный градиент

$$p^0, p_i^0 = \begin{cases} -\nabla f(y^0)_i, & i \notin I_0, \\ 0, & i \in I_0 \end{cases}$$

равен

$$p^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^1 = y^0 + \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \alpha_0 \in [0, \infty).$$

Найдем производную функции $F(\alpha_0) \triangleq f(y^0 + \alpha_0 p^0)$:

$$\begin{aligned} F'_{\alpha_0}(\alpha_0) &= \langle \nabla f(y^0 + \alpha_0 p^0), p^0 \rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \alpha_0 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 8\alpha_0 - 4 = 0 \Rightarrow \alpha_0^* = 0,5. \end{aligned}$$

Отсюда

$$y^1 = y^0 + 0,5p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(y^1) = y^1 - e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Множество индексов I_1 и шаг β_1 равны $I_1 = I_0 \cup \{i, y_i^1 = 0\} = \{2, 3, 4\}; I_1 \neq I_0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \Rightarrow y^2 = y^1 = y^*$.
Отсюда

$$x^* = a - A^T y^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

что совпадает с ранее найденной точкой.

Пример 3. В условиях примера 2 сделаем один шаг метода проекции субградиента (25). Тогда общий показатель (21) имеет вид:

$$\begin{aligned} L(x) &= -(29 - 2x_{22}(0) - 4x_{23}(0)) - (22 - 2x_{22}(1)) + \max[(x_{22}(1) - 2) - (x_{22}(0) + x_{23}(0) - 2)] + \\ &+ \max[(4 - x_{22}(1)) - (4 - x_{22}(0))] + \max[(4 - x_{22}(1)) - (4 - x_{22}(0) - x_{23}(0))] + \max[x_{22}(1) - x_{22}(0)] \end{aligned} \quad (43)$$

при ограничениях (29) и (34):

$$4 \geq x_{22}(0) + x_{23}(0) \geq 2, \quad 3 \geq x_{23}(0) \geq 0, \quad 4 \geq x_{22}(1) \geq 2.$$

В качестве начальных координат возьмем точку

$$x^0(0) = \begin{pmatrix} x_{22}^0(0) \\ x_{23}^0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^0(1) = x_{22}^0(1) = 4.$$

В этой точке только последний максимум в (43) положителен, поэтому субградиенты вычисляются по формулам:

$$v_{x(0)}(x^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_{x(1)}(x^0) = 2 + 1 = 3.$$

Теперь можно сделать первый шаг метода проекции субградиента:

$$x^1(0) = \mathbf{P}_{B(0)}(x^0(0) - \lambda_0 v_{x(0)}(x^0)) = \mathbf{P}_{B(0)}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{P}_{B(0)}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix},$$

$$x^1(1) = \mathbf{P}_{B(1)}(x^0(1) - \lambda_0 v_{x(1)}(x^0)) = \mathbf{P}_{B(1)}(4 - 1 \times 3) = 2.$$

Если нанести полученную точку на рис. 1, видно, что она близка к аналитическому решению модельного примера динамической задачи, полученному в примере 1: $x_{22}(0) = 2$, $x_{23}(0) = 0$, $x_{22}(1) = 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложена практически значимая методология распределения загрузки работ по исполнителям на рынке РПО, обеспечивающая стабилизацию планов назначения за счет уменьшения изменения этих планов. Показано, что задача определения оптимальных приращений планов сводится к блочной задаче выпуклого программирования и может быть решена методом проекции градиента в дифференцируемом случае и методом Поляка в негладком случае. Основным результатом работы является декомпозиция задачи на основе метода проекции градиента или метода Поляка.

Результаты работы позволяют применять их в транзакционных платформах на рынке РПО для динамической загрузки заданий (согласно терминологии, обоснованной в работе (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021)).

В статье построена динамическая модель загрузки заданий с двумя группами агентов — компаниями—разработчиками ПО и компаниями—заказчиками ПО, которые могут опередить свои резервные цены на рынке повременной аренды разработанного ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005). Дискриминируемыми агентами являются компании—заказчики ПО, которые оплачивают услуги оператора платформы в виде процентных надбавок, включенных оператором в цену работы компаний—разработчиков ПО. Имеются в виду платформы-рынки, взаимодействие экономических агентов на которых имеет эпизодический характер разовых сделок. Предполагается удаленное взаимодействие, т.е. возможность коммуникации между агентами, находящимися на любом расстоянии друг от друга. Допускается возможность масштабирования, т.е. теоретическое отсутствие ограничений для расширения поля взаимодействия (числа пользователей). Такое расширение возможно за счет перекрестного сетевого эффекта, когда численность одного вида пользователей влияет на численность другого вида (спрос порождает предложение, и наоборот).

Предполагается возможность ЦТП оказывать влияние на объем коммуникации через уровень и структуру цен. Исходя из базовых характеристик поля взаимодействия, платформа РПО относится к двусторонним рынкам. Для одноранговых (peer-to-peer) (Устюжанина, Дементьев, Евсюков, 2021) ЦТП, к которым относятся платформы на рынке РПО, организующие торговые транзакции, непосредственными агентами являются поставщики — агенты, разрабатывающие ПО, и потребители — агенты, использующие разработанное ПО для повременной сдачи в аренду. Операторы платформы на рынке РПО могут получать доход в виде платы пользователей за покупку. Пользователи получают доход в виде платы за повременное использование разработанных ПО в двухсекторной модели экономики (Васин, Морозов, 2005). Цены на такое ПО определяют резервные цены потребителей, по терминологии, принятой в указанной работе.

Настоящая статья является продолжением серии статей (Перевозчиков, Лесик, 2014; Лесик, Перевозчиков, 2016, 2020) о динамическом расширении статических моделей рынка с рынка инвестиций на рынок разработки программного обеспечения и использует разработанный там инструментарий, который может служить фундаментальной основой для построения соответствующих цифровых платформ. Предложенная схема динамического расширения задачи переносится на транспортную задачу с переменными коэффициентами, изученную в работе (Лесик, Перевозчиков, 2022).

В общетеоретическом плане схема решения динамической задачи, предложенная в настоящей статье, может считаться схемой декомпозиции, основанной на численном методе решения (Цурков, 1981, с. 111).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Ашманов С.А. (1981). Линейное программирование. М.: Наука. [Ashmanov S.A. (1981). *Linear programming*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Васильев Ф.П. (1981). Методы решения экстремальных задач. М.: Наука. [Vasil'ev F.P. (1981). *Methods for solving extreme problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А. (2017). Синтез транспортной системы многоузлового конкурентного рынка с переменным спросом // *Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова*. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс. № 55. С. 74–90. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2017). Synthesis of the transport system of a multi-node competitive market with variable demand. *Applied Mathematics and computer science: Proceedings of the Faculty of Computational mathematics and cybernatics of Lomonosov Moscow State University*. V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 55, 74–90 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Лесик И.А. (2018). Задача оптимизации транспортной системы энергетического рынка. В сб.: IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018). Труды. А.А. Васин, А.Ф. Измаилов (отв. ред.). С. 247–251. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Lesik I.A. (2018). The problem of optimizing the transport system of the energy market. In: *The collection of the IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018). Proceedings*. A.A. Vasin, A.F. Izmailov (resp. eds.), 247–251 (in Russian).]
- Васин А.А., Григорьева О.М., Цыганов Н.И. (2017). Оптимизация транспортной системы энергетического рынка // *Доклады Академии наук*. Т. 475. № 4. С. 377–381. [Vasin A.A., Grigor'eva O.M., Cyganov N.I. (2017). Optimization of the transport system of the energy market. *Reports of the Academy of Sciences*, 475, 4, 377–381 (in Russian).]
- Васин А.А., Морозов В.В. (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс. [Vasin A.A., Morozov V.V. (2005). *Game theory and models of mathematical economics*. Moscow: MAKS Press (in Russian).]
- Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. (1969). Дискретное программирование. Под ред. Д.Б. Юдина. М.: Наука. [Korbut A.A., Finkil'shteyn Yu.Yu. (1969): *Discrete programming* D.B. Yudin (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2016). Определение оптимальных объемов производства и цен реализации в линейной модели многопродуктовой монополии // *Экономика и математические методы*. Т. 52. № 1. С. 140–148. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2016). Determination of optimal production volumes and sales prices in a linear model of a multi-product monopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 52, 1, 140–148 (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2020). Динамическая модель инвестиций в научные исследования олигополии // *Экономика и математические методы*. Т. 56. № 2. С. 102–114. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2020). A dynamic model of investment in scientific research of an oligopoly. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 2, 102–114 (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2021). Динамическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе задачи о назначении на узкие места // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 4. С. 108–116. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2021). A dynamic model of software development based on the problem of assignment to bottlenecks. *Economics and Mathematical Methods*, 56, 4, 102–114 (in Russian).]
- Лесик И.А., Перевозчиков А.Г. (2022). Статическая модель рынка разработки программного обеспечения на основе транспортной задачи с квадратичными добавками по стоимости // *Экономика и математические методы*, 58, 3, 146–160. [Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2022): Market's static model for software development based on a transport problem with quadratic cost additions. *Economics and Mathematical Methods*, 58, 3, 94–101 (in Russian).]
- Макаров В.Л., Рубинов Ф.М. (1973). Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука. [Makarov V.L., Rubinov F.M. (1973). *Mathematical theory of economic dynamics and equilibrium*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Мезоэкономика развития (2011). Под ред. Г.Б. Клейнера. М.: Наука. [Mesoeconomics of development (2011). G.B. Kleiner (ed.). Moscow: Nauka (in Russian).]
- Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. (2014). Нестационарная модель инвестиций в основные средства предприятия. В сб.: *Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова*. Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 46, 76–88. [Perevozchikov A.G., Lesik I.A. (2014). Non-stationary model of investment in fixed assets of the enterprise. In: *Applied mathematics and computer science: Proceedings of the Faculty of Computational mathematics and cybernatics of Lomonosov Moscow State University*. V.I. Dmitriev (ed.). Moscow: MAKS Press, 46, 102–114 (in Russian).]

- Поляк Б.Т. (1983). Введение в оптимизацию. М.: Наука. [Polyak B.T. (1983). *Introduction to optimization*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Сергиенко А.М., Симоненко В.П., Симоненко А.В. (2016). Улучшенный алгоритм назначения для планировщиков заданий в неоднородных распределительных вычислительных системах // *Системні дослідження та інформаційні технології*. № 2. С. 20–35. [Sergienko A.M., Simonenko V.P., Simonenko A.V. (2016). Improved assignment algorithm for task schedulers in heterogeneous distributed computing systems. *System Research and Information Technologies*, 2, 20–35 (in Russian).]
- Устюжанина Е.В., Дементьев В.Е., Евсюков С.Г. (2021). Транзакционные цифровые платформы: задача обеспечения эффективности // *Экономика и математические методы*. Т. 57. № 1. С. 5–18. [Ustyuzhanina E.V., Dement'ev V.E., Evsyukov S.G. (2021). Transactional digital platforms: The task of ensuring efficiency. *Economics and Mathematical Methods*, 57, 1, 5–18 (in Russian).]
- Цурков В.И. (1981). Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука. [Tsurkov V.I. (1981). *Decomposition in large-dimensional problems*. Moscow: Nauka (in Russian).]
- Debreu G. (1954). Valuation equilibrium and Pareto optimum. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 40, 588–592.
- Ding X., Wang K., Gibbons P.B., Zhang X. (2012). BWS: Balanced work stealing for time-sharing multicores. *Proceedings of the 7th ACM European Conference on Computer Systems*. New York. *EuroSys.*, 365–378.

Reducing the dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming

© 2023 I.A. Lesik, A.G. Perevozchikov

I.A. Lesik,

Joint-Stock Company Scientific and Production Association “Russian basic information technology”, Moscow, Russia; e-mail: lesik56@mail.ru

A.G. Perevozchikov,

Joint-Stock Company Scientific and Production Association “Russian basic information technology”, Moscow, Russia; e-mail: pere501@yandex.ru

Received 08.11.2022

Abstract. The authors propose to reduce a discrete dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming, which can be solved by successive approximations based on contraction mapping, in case of abandoning the integer elements of the destination matrix. However, there are also peculiarities: equilibrium prices can be calculated directly and therefore a variational formulation of the internal problem of determining equilibrium prices based on Debreu's theorem is not required. The functions of phase coordinates' change can be taken as convex, for example, the norm of the difference squared, and do not take into account the fixed costs for each control switch, which is excluded from the equations of system's dynamics. The resulting block problem of convex programming allows decomposition by freezing the connection variables with neighboring blocks at the level of the previous iteration. It is shown that the operator on the right side of the resulting recurrent equation is compressive under fairly general conditions. This allows the authors to prove successive approximations for solving the resulting problem, based on the principle of contraction mapping. The authors give the model example of its use in the dynamic expansion of the transport problem according to the value.

Keywords: transport problem according to the value, problem's dynamic expansion, exclusion of controls, problem's decomposition, principle of contraction mapping, method of successive approximations.

JEL Classification: O12, C51.

For reference: Lesik I.A., Perevozchikov A.G. (2023). Reducing the dynamic model of the software development market to a block problem of convex programming. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 119–130. DOI: 10.31857/S042473880024879-5

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Анализ влияния нерационального поведения экономических агентов на устойчивость моделей общего равновесия с открытой экономикой

© 2023 Л.А. Серков, С.С. Красных

Л.А. Серков,

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь; e-mail: serkov.la@uiee.ru

С.С. Красных,

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь;
e-mail: sergeykrasnykh@yahoo.com*

Поступила в редакцию 05.04.2022

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-78-10134)¹.

Аннотация. Целью публикации является исследование влияния ограниченной рациональности агентов на устойчивость модели при одновременном сканировании спектра модельных параметров, что позволяет выявлять и анализировать области устойчивости модели в многомерном пространстве. В статье анализируется модель с открытой экономикой, в которой экономические агенты взаимодействуют с внешним миром. Оцениваются и сравниваются поведенческие модели, полученные при двух способах введения нерациональных ожиданий. Научная новизна состоит в выявлении параметров, влияющих на определенное поведение модели, и анализе изменения областей устойчивости модели с гетерогенными ожиданиями, связанными с открытостью экономики, в частности с воздействием реального и номинального эффективного обменного курса на экономику. Предполагается, что агенты могут быть либо недальновидными с краткосрочным прогнозом, либо дальновидными прогнозистами. Разница не имеет значения, когда агенты имеют рациональные ожидания, но имеет значение, когда часть из них формирует убеждения о будущем в соответствии с некоторыми эвристиками. Байесовские оценки на данных российской экономики показывают, что поведенческая модель, основанная на краткосрочных прогнозах, точнее соответствует эмпирическим данным, по сравнению с моделью, основанной на долгосрочных прогнозах, и даже по сравнению с моделью с рациональными ожиданиями агентов. Анализ устойчивости и стабильности проведен с помощью численной процедуры — отображение фильтрации Монте-Карло (MCF). MCF-анализ показывает, что наличие ограниченной рациональности агентов снижает стабильность и устойчивость моделей. Модель, основанная на предикторах долгосрочного прогнозирования, менее стабильна по сравнению с моделями краткосрочного прогнозирования и с рациональными ожиданиями агентов. Важным результатом является существенная доля областей с нестабильным поведением исследуемых моделей с гетерогенными ожиданиями агентов, в которых решения характеризуются взрывным характером. Все полученные результаты подтверждаются апостериорными байесовскими оценками этих параметров.

Ключевые слова: гетерогенные ожидания, краткосрочные и долгосрочные предикторы, метод Байеса, отображение фильтрации Монте-Карло, детерминированность, неопределенность, нестабильность, статистика Смирнова—Колмогорова.

Классификация JEL: D58.

Для цитирования: Серков Л.А., Красных С.С. (2023). Анализ влияния нерационального поведения экономических агентов на устойчивость моделей общего равновесия с открытой экономикой // Экономика и математические методы. Т. 59. № 1. С. 131–144. DOI: 10.31857/S042473880023067-2

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы идеи общего равновесия и модели на основе этого подхода (DSGE-модели) занимают важное место в макроэкономическом анализе (Kydland, Prescott, 1982; Малаховская, 2016; Уикенс, 2015). Основной подход состоит в оптимизации деятельности экономических агентов с рациональными ожиданиями (Muth, 1961; Sargent, Wallace, 1976). Однако эмпирические доказательства

¹ «Формализация процессов регионального развития на основе использования агент-ориентированного подхода в динамических стохастических моделях общего равновесия» (<http://rscf.ru/project/21-78-10134>).

обнаруживают существенную гетерогенность в формировании ожиданий (убеждений) экономических агентов, — в частности в формировании прогнозов инфляции (Andrade, Bihan, 2013; Branch, 2004), и отвергают рациональность поведения агентов (Hommes, 2021; Cornea-Madeira, Hommes, Massaro, 2019). Многочисленные данные и доказательства свидетельствуют о важности включения гетерогенных ожиданий в модели общего равновесия (Adam, 2007; Hommes, 2011).

Два популярных подхода к инкорпорации гетерогенных ожиданий в модель общего равновесия были предложены в (Branch, McGough, 2009; Massaro, 2013). В них предполагается, что по крайней мере часть населения формирует ожидания с помощью некоторых эвристик, которые различаются предполагаемым временным горизонтом прогнозов. Ориентируясь на краткосрочных прогнозистов, авторы (Branch, McGough, 2009) пришли к выводу, что совокупная динамика зависит от субъективных разнородных прогнозов на один период вперед. Вместо этого в работе (Massaro, 2013) предполагается, что агенты выбирают оптимальные планы прогнозов макроэкономических переменных на бесконечном горизонте, в результате прогнозируемая совокупная динамика зависит от долгосрочных прогнозов.

При введении в модель определенного правила политики (монетарного или фискального) необходимо следить, чтобы исследуемая система не стала неустойчивой или не порождала множественных равновесий. Например, в работах (Branch, McGough, 2009; Massaro, 2013; Preston, 2006) с помощью стандартного анализа устойчивости систем уравнений в пространстве состояний (путем анализа собственных значений матрицы) было показано сужение области стабильности и устойчивости моделей с гетерогенными ожиданиями. При этом в данных исследованиях рассматривался ограниченный набор параметров и было выявлено, что движущей силой такого поведения являлись параметры, связанные с монетарной политикой экономических властей. Поэтому актуально расширить и дополнить вышеприведенные результаты исследованием влияния всего спектра модельных параметров одновременно на чувствительность к устойчивости и стабильности экономической системы при ограниченно рациональных ожиданиях агентов. При этом формирование ожиданий экономических агентов считается важным инструментом экономической политики, поэтому экономические власти должны иметь информацию о динамических последствиях такой ограниченной рациональности, т.е. знать, как горизонт предсказания ограниченно рациональных агентов влияет на выбор альтернативных правил, стабилизирующих динамику соответствующих макроэкономических переменных (Gasteiger, 2014; Di Bartolomeo, Di Pietro, Giannini, 2016). Для этого необходимо исследовать влияние ограниченной рациональности экономических агентов на стратегию их поведения.

Представляется полезным распространить вышеприведенные выводы на модели с открытой экономикой, в которых возникают новые каналы, через которые, например, монетарные факторы могут влиять на экономику. Движения обменного курса, в частности, играют важную роль в передаточном процессе, связывающем колебания денежной массы с изменениями объема производства и инфляции. Поэтому встают вопросы, следует ли использовать и как применять денежно-кредитную политику для стабилизации обменных курсов.

Цель публикации — исследование влияния ограниченной рациональности агентов на стабильность и устойчивость² исследуемой модели с открытой экономикой при одновременном сканировании всего спектра модельных параметров, что позволяет выявлять и анализировать области устойчивости модели в многомерном пространстве.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОЖИДАНИЯМИ АГЕНТОВ

Приводимая в статье модель является модифицированной версией DSGE-модели с открытой экономикой и с рациональными ожиданиями агентов, описанной в работе (Gali, Monacelli, 2005). Ранее подобная модель исследовалась в работе (Серков, Елизаров, 2016). Модель состоит из рассматриваемой малой экономики (домашней экономики) и экономики остального мира. Поскольку каждая экономика имеет нулевую меру, ее решения в области внутренней политики никак не влияют на остальной мир. Мировая экономика представлена в виде континуума малых открытых экономик, распределенных в единичном интервале. Предполагается, что все экономики (отдельных стран) имеют одинаковую рыночную структуру, технологии и предпочтения экономических агентов. Для этих экономик выполняется закон единой цены. Структурные уравнения моделей,

² Пояснение понятий стабильности и устойчивости приведено в разд. 4.

относящихся к классу систем рациональных ожиданий, выводятся из задач максимизации полезности потребителей и максимизации прибыли фирм.

Типичная малая открытая экономика населена единичным континуумом репрезентативных z -домохозяйств, $z \in [0,1]$ ³, стремящихся максимизировать ожидаемую дисконтированную сумму значений функции полезности и функции затраченного на труд времени:

$$\max E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [U(C_t) - V(N_t)] \right\},$$

где функция полезности $U(C_t) \equiv \psi_t C_t^{1-\sigma} / (1-\sigma)$ и функция затрат времени на труд $V(N_t) \equiv N_t^{1+\phi} / (1+\phi)$; E_0 — оператор рациональных ожиданий экономических агентов (в данном случае домашних хозяйств); β — коэффициент дисконтирования ($0 < \beta < 1$); σ — параметр, обратный эластичности межвременного замещения; ϕ — параметр, обратный эластичности предложения труда; N_t — объем отработанных часов; ψ_t — шок предпочтений домашних хозяйств⁴. Композитный индекс потребления — $C_t = [(1-\alpha)^{1/\eta} C_{H,t}^{(\eta-1)/\eta} + \alpha^{1/\eta} C_{F,t}^{(\eta-1)/\eta}]^{\eta/(\eta-1)}$, где $C_{H,t}, C_{F,t}$ — индексы потребления отечественных и импортных товаров и услуг. Параметр α определяет долю импортных товаров в индексе потребительских цен, или степень открытости экономики; η — эластичность замещения отечественных и импортных товаров и услуг ($\eta > 0$). Индексы потребления отечественных и импортных товаров и услуг описываются CES-функцией агрегации:

$$C_{H,t} = \left(\int_0^1 C_{H,t}(j)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} dj \right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)}, \quad C_{F,t} = \left(\int_0^1 C_{i,t}^{(\gamma-1)/\gamma} di \right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

где ε — эластичность замещения между разновидностью j товаров и услуг, производимых в отечественной экономике ($j \in [0,1]$, $\varepsilon > 1$). Параметр γ характеризует взаимную заменяемость товаров, произведенных в разных странах (индекс i — определяет экономику i этих стран ($i \in [0,1]$). $C_{i,t}$ — индекс

потребления благ, импортируемых из страны i и потребляемых домохозяйствами в отечественной экономике, $C_{i,t} = \left(\int_0^1 C_{i,t}(j)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} dj \right)^{\varepsilon/(\varepsilon-1)}$.

Индивидуальное домохозяйство максимизирует свое благосостояние в момент времени t при следующем однопериодном бюджетном ограничении:

$$P_{H,t}(j)C_{H,t}(j) + P_{i,t}(j)C_{i,t}(j) + E_t\{Q_{t,t+1}D_{t+1}\} \leq D_t + W_tN_t + Tr_t.$$

Соответственно, максимизация дисконтированной суммы значений функции полезности и функции затраченного индивидуальным домохозяйством времени на труд (для моментов времени $t = 0, 1, \dots$) производится при следующей последовательности бюджетных ограничений:

$$\int_0^1 P_{H,t}(j)C_{H,t}(j)dj + \iint P_{i,t}(j)C_{i,t}(j)diddj + E_t\{Q_{t,t+1}D_{t+1}\} \leq D_t + W_tN_t + Tr_t, \quad t = 0, 1, \dots,$$

где $P_{H,t}(j)$ — индекс цен отечественных благ j ; $P_{i,t}(j)$ — индекс цен благ, импортируемых из страны i ; $D_{t,t+1}$ — номинальные затраты на приобретение агрегированного портфеля ценных бумаг; $Q_{t,t+1}$ — стохастический фактор дисконтирования; $R_t^{-1} = E_t\{Q_{t,t+1}\}$; R_t^{-1} — цена безрисковых однопериодных обязательств; W_t — номинальная заработная плата; Tr_t — суммарные трансферты (налоги).

Фирмы производят дифференцируемые продукты в соответствии с линейной производственной функцией $Y_t = A_t N_t$; где A_t — совокупная факторная производительность ($a_t \equiv \log A_t$). Предполагается жесткость цен и гибкость заработных плат. Фирмы устанавливают цены в соответствии с подходом (Calvo, 1983; Christiano, Eichenbaum, Evans, 2005). Часть фирм $(1-\theta)$ пересматривает цены в каждом периоде, другая часть θ , не изменяющая цен, индексирует их в каждом периоде. Для упрощения накопление капитала (домохозяйствами и фирмами) в модели не рассматривается.

Приведем основные уравнения модели в логлинеаризованном виде (относительно соответствующих стационарных состояний).

Уравнения структуры экономики рассматриваемой страны:

$$\tilde{y}_t = E_t\{\tilde{y}_{t+1}\} - \omega_a / \sigma(r_t - E_t\{\pi_{H,t+1}\} - r_{n,t}) + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (1)$$

$$r_{n,t} = -((\sigma(1+\phi)(1-\rho_a))/(\sigma+\phi\omega_a))a - \phi\Theta_a(\rho_{y^*} - 1)y_t^*, \quad (2)$$

³ В дальнейшем индекс z -домохозяйств будет опускаться ввиду их репрезентативности.

⁴ В отличие от модели в работе (Galí, Monacelli, 2005) в исследуемой модели присутствуют серийно коррелированные шоки предпочтений домашних хозяйств, приводящие к шокам в разрыве выпуска (уравнение (1)).

$$\pi_{H,t} = \beta E_t \{\pi_{H,t+1}\} + \kappa_a \tilde{y}_t + \varepsilon_{\pi,t}, \quad (3)$$

$$\kappa_a = \lambda(\phi + \sigma / \omega_a), \quad \omega_a = 1 + \alpha(2 - \alpha)(\sigma\eta - 1),$$

$$\lambda = (1 - \beta\theta)(1 - \theta) / \theta, \quad \Theta_a = \sigma(1 - \omega_a) / (\sigma + \phi\omega_a),$$

$$y_t = \tilde{y}_t + \bar{y}_t, \quad (4)$$

$$\bar{y}_t = \Omega_a a_t + \Theta_a y_t^*, \quad (5)$$

$$\Omega_a = \omega_a(1 + \phi)(\sigma + \phi\omega_a),$$

$$y_t = y_t^* + (\omega_a / \sigma)s_t, \quad (6)$$

$$\pi_t = \pi_{H,t} + \alpha(s_t - s_{t-1}), \quad (7)$$

$$q_t = (1 - \alpha)s_t, \quad (8)$$

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_{a,t}, \quad (9)$$

$$nx_t = (\alpha\Lambda / \omega_a)(y_t - y_t^*), \quad (10)$$

$$\Lambda = (2 - \alpha)(\sigma\eta - 1) + (1 - \sigma),$$

$$r_t = \rho r_{t-1} + (1 - \rho)(\phi_\pi \pi_t + \phi_{\tilde{y}} \tilde{y}_t + \phi_q \Delta q_t) + \varepsilon_{r,t}. \quad (11)$$

Уравнения структуры экономики остального мира:

$$a_t^* = \rho_a^* a_{t-1}^* + \varepsilon_{a,t}^*, \quad (12)$$

$$y_t^* = \rho_{y^*} y_{t-1}^* + \varepsilon_{y,t}^*, \quad (13)$$

$$\pi_t^* = \rho_{\pi^*} \pi_{t-1}^* + \varepsilon_{\pi,t}^*. \quad (14)$$

Все переменные в этих уравнениях выражены в логарифмах отклонения от соответствующих стационарных состояний.

Уравнение (1) — динамическая кривая IS (уравнение Эйлера) — отражает зависимость разрыва выпуска $\tilde{y}_t$ (отклонение объема выпуска от равновесного уровня выпуска при гибких ценах) от ожидаемого будущего разрыва выпуска $E_t \{\tilde{y}_{t+1}\}$ и отклонения реальной процентной ставки от естественной процентной ставки $r_{n,t}$ (процентной ставки при гибких ценах), которая определяется уравнением (2). Отметим, что шок разрыва выпуска $\varepsilon_{\tilde{y},t}$, вследствие ограничения на ресурсы ($y_t = c_t + \alpha\omega s_t / \sigma$), включает шок предпочтений домашних хозяйств, пропорциональный возмущению $\dot{E}_t \psi_{t+1} - \psi_t$, и шок условий торговли, пропорциональный разности $E_t s_{t+1} - s_t$.

Уравнение (3) — уравнение кривой Филипса — показывает, что текущая инфляция π_t зависит от будущей инфляции и разрыва выпуска. Уравнение (4) выражает взаимосвязь между объемом выпуска y_t , разрывом выпуска $\tilde{y}_t$ и равновесным уровнем выпуска при гибких ценах $\bar{y}_t$. Уравнение (5) характеризует уровень выпуска при гибких ценах через совокупную факторную производительность a_t и объем выпуска мировой экономики y_t^* .

Уравнение (6) — уравнение взаимосвязи между объемами выпуска в отечественной и мировой экономике. Переменная s_t отвечает за условия торговли (terms of trade), т.е. s_t — индекс, выражающий соотношение экспортных и импортных цен. Уравнение (7) — уравнение взаимосвязи между инфляцией π_t , определяемой по индексу потребительских цен, и внутренней инфляцией⁶ $\pi_{H,t}$ (без учета цен импортных товаров и услуг). Уравнение (8) — уравнение взаимосвязи эффективного реального обменного курса q_t с условиями торговли s_t .

Уравнение (9) является авторегрессионным уравнением (AR(1)) для совокупной факторной производительности. Уравнение (10) — уравнение торгового баланса. Уравнение (11) — правило Тейлора для номинальной процентной ставки r_t (gross nominal interest rate), где ρ — коэффициент сглаживания процентной ставки.

Параметры $\phi_\pi, \phi_{\tilde{y}}, \phi_q$ отражают степень реакции центрального банка на динамику целевых переменных монетарной политики (инфляции, разрыва выпуска и изменения эффективного реального обменного курса⁷ q_t).

⁵ В дальнейшем верхний индекс «*» относится к мировой экономике.

⁶ Инфляция, измеряемая индексом цен на отечественную продукцию. Этот термин используется в зарубежных публикациях и в отчетах Банка России.

⁷ В разд. 3 будет рассмотрено, к каким изменениям в устойчивости модели приводит замена эффективного реального обменного курса на эффективный номинальный обменный курс.

Уравнение (12) — авторегрессионное уравнение (AR(1)) для совокупной факторной производительности в зарубежной экономике. В отличие от модели (Galí, Monacelli, 2005), в которой переменные зарубежного объема выпуска y_t^* и инфляции π_t^* являются эндогенными, в рассматриваемой модели для упрощения⁸ эти переменные введены как экзогенные и изменяются в соответствии с уравнениями (13)–(14).

Модель содержит семь экзогенных шоков и является динамической стохастической моделью общего равновесия с рациональными ожиданиями агентов. Методы решения ее требуют выполнения ограничений, определяемых так называемыми условиями Бланшара–Кана, на структурные параметры (Blanchard, Kahn, 1980; Sims, 2002).

2. ГЕТЕРОГЕННЫЕ ОЖИДАНИЯ АГЕНТОВ С КРАТКО- И ДОЛГОСРОЧНЫМИ ПРОГНОЗАМИ

Для ограниченно рациональных недалековидных агентов (с краткосрочным прогнозом) уравнения для динамической IS-кривой и кривой Филипса (уравнения (1) и (3) для рациональных агентов) имеют вид:

$$\tilde{y}_t = \int_0^1 E_{i,t}^B [\tilde{y}_{i,t+1} - \omega_a / \sigma(r_t - \pi_{i,H,t+1} - r_{n,t})] di + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (15)$$

$$\pi_{H,t} = \int_0^1 E_{i,t}^B [\beta \pi_{i,H,t+1} + \kappa_a \tilde{y}_{i,t}] di + \varepsilon_{\pi,t}, \quad (16)$$

а для ограниченно рациональных агентов с бесконечным горизонтом прогнозирования эти уравнения⁹ —

$$\tilde{y}_t = \int_0^1 [E_{i,t}^L \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} ((1-\beta)\tilde{y}_s - \beta / \sigma(r_s - \pi_{H,s+1} - r_{n,s}))] di + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (17)$$

$$\pi_{H,t} = \int_0^1 [E_{i,t}^L \sum_{s=t}^{\infty} (\theta\beta)^{s-t} ((1-\theta)\beta\pi_{H,s+1} + \kappa_a \tilde{y}_s)] di + \varepsilon_{\pi,t}. \quad (18)$$

Операторы $E_{i,t}^B, E_{i,t}^L$ — операторы ожиданий для агентов с кратко- и долгосрочным прогнозом соответственно. Легко проверить, что при рациональных ожиданиях агентов уравнения (15) и (17) сводятся к уравнению (1), а уравнения (16) и (18) к уравнению (3). В этом случае горизонт прогнозирования не играет роли.

Предположим, что популяция агентов подразделяется на две группы: одна из них с долей χ имеет рациональные ожидания, оставшаяся $(1-\chi)$ формирует ограниченно рациональные ожидания.

Агрегирование по популяции рациональных агентов с долей χ приводит к уравнению

$$\int_0^{\chi} E_{i,t} y_{i,t+1} di = \chi E_t y_{t+1}. \quad (19)$$

Оставшаяся часть агентов $(1-\chi)$ обладает когнитивными ограничениями и использует эвристики для прогнозирования макропеременных.

Формирование ожиданий у недалековидных агентов с краткосрочным прогнозированием (SSF — short-sighted forecast), согласно (Branch, McGough, 2009), происходит на основе простого линейного правила, соответствующего стандартной форме адаптивных ожиданий:

$$E_{t-1}^B(y_t) = \Xi y_{t-1}, \quad (20)$$

где Ξ — параметр адаптации (параметр доверия агентов к этому правилу):

$$\Xi = \begin{cases} < 1 & \text{— для адаптивных ожиданий;} \\ > 1 & \text{— для экстраполяционных ожиданий;} \\ = 1 & \text{— для наивных ожиданий.} \end{cases}$$

⁸ В разд. 3 показано, к каким изменениям в устойчивости модели приводит данное упрощение модели.

⁹ Подробный вывод представлен в работе (Massaro, 2013).

Применяя закон итерации ожиданий, получаем

$$E_{i,t}^B y_{t+1} = \Xi^2 y_{t-1}, \quad (21)$$

а при агрегировании—

$$\int_{\chi} E_{i,t}^B y_{t+1} di = (1-\chi) \Xi^2 y_{t-1}. \quad (22)$$

Учитывая (19) и (22), уравнения (15) и (16) принимают вид:

$$\tilde{y}_t = \chi E_t \tilde{y}_{t+1} + (1-\chi) \Xi^2 \tilde{y}_{t-1} - \left[\omega_a (r_t - \chi E_t \pi_{H,t+1} - (1-\chi) \Xi^2 \pi_{H,t-1} - r_{n,t}) \right] / \sigma + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \quad (23)$$

$$\pi_{H,t} = \beta (\chi E_t \pi_{H,t+1} + (1-\chi) \Xi^2 \pi_{H,t-1}) + \kappa_a \tilde{y}_t + \varepsilon_{\pi,t}. \quad (24)$$

Агенты с длинным горизонтом прогнозирования (LHF — long-horizon forecasters), согласно (Massaro, 2013), формируют свои убеждения на основе предыдущих представлений (Diks, Weide, 2005). Предиктор (параметр прогнозирования) каждого агента $\theta_{i,t} \in \Theta \quad \forall i \in [0,1]$ оценивается в соответствии с квадратом ошибки предыдущего прогноза. Убеждения LHF-агентов распределены по нормальному закону, эволюция которого характеризуется средним значением, равным y_{t-1} , и конечной дисперсией, уменьшающей разницу в представлениях и действиях агентов.

Агрегируя данные в популяции LHF-агентов, получаем

$$\int_{\chi} E_{i,t}^L y_{t+1} f(i) di = (1-\chi) \int_{\Theta} \theta_{i,y,t} f(i) di = (1-\chi) \alpha_b y_{t-1}, \quad (25)$$

где $E_t^L y_s = \alpha_b^{s-t} \theta_{y,t}$, $s \in [t, \infty]$, и, соответственно, $E_t^L y_{t+1} = \alpha_b \theta_{y,t}$; $E_t^L \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} y_s = \theta_{y,t} / (1-\alpha_b \beta)$; α_b — параметр, характеризующий меру межвременной ограниченной рациональности¹⁰.

Учитывая (25), уравнения (17)–(18) принимают вид¹¹:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t = \chi E_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \left[(1-\beta) \tilde{y}_s - \beta / \sigma (r_s - \pi_{H,s+1} - r_{n,s}) \right] + (1-\chi) \left[\tilde{y}_{t-1} - \left\{ \beta [(1-\beta)(r_t - r_{n,t}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_b \beta (r_{t-1} - r_{n,t-1}) - \alpha_b \pi_{H,t-1}] / \sigma (1-\beta) \right\} + \varepsilon_{\tilde{y},t}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\pi_{H,t} = \chi E_t \sum_{s=t}^{\infty} (\theta \beta)^{s-t} \left[(1-\theta) \beta \pi_{H,s+1} + \kappa_a \tilde{y}_s \right] + (1-\chi) \left[\frac{\alpha_b \kappa_a}{1-\alpha_b \theta \beta} \tilde{y}_{t-1} + \frac{\alpha_b (1-\theta) \beta}{1-\alpha_b \theta \beta} \pi_{H,t-1} \right] + \varepsilon_{\pi,t}. \quad (27)$$

Таким образом, исходные уравнения (1) и (3) модели с рациональными ожиданиями экономических агентов следует заменить на уравнения (23) и (24) для SSF-агентов и (26), (27) — для LHF-агентов. Остальные уравнения модели (1)–(14) остаются прежними.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. ДАННЫЕ И ОЦЕНКА МОДЕЛЕЙ

Так как целью исследования является анализ влияния гетерогенных ожиданий на стабильность и устойчивость моделей, то в работе анализируются параметры трех видов моделей: с рациональными ожиданиями агентов и с ожиданиями в виде краткосрочного и *долгосрочного прогнозирования*¹². Параметры определялись методом Байеса на данных российской экономики. Этот метод сочетает процесс калибровки и эконометрического оценивания методом максимального правдоподобия (An, Schorfheide, 2007; Del Negro, Schorfheide, 2008; Geweke, 1999).

Для анализа моделей использовались логарифмы квартальных данных для российской экономики с I квартала 2000 г. по IV квартал 2018 г. по пяти эндогенным макроэкономическим переменным¹³: реальный ВВП (в постоянных ценах 2008 г.), индекс потребительских цен, внутренняя инфляция, эффективный реальный обменный курс рубля и номинальная процентная ставка¹⁴.

¹⁰ В статье (Massaro, 2013) параметр $\alpha_b = 1$.

¹¹ С более подробным выводом уравнений (26) и (27) можно ознакомиться в (Massaro, 2013).

¹² Все расчеты проводились с использованием пакета прикладных программ «Matlab».

¹³ Источником данных являются официальные сайты Росстата и ЦБ.

¹⁴ Так как число шоков модели превышает число наблюдаемых переменных, дополнительно проводилась идентификация параметров модели.

Последняя оценивалась по средневзвешенной ставке по кредитам, выданным юридическим лицам. При расчете внутренней инфляции параметр α (степень открытости экономики) принимался равным среднему значению за рассматриваемый период доли импорта в индексе потребительских цен, $\alpha = 0,26$. Для временного ряда реального ВВП удалялась трендовая составляющая с помощью фильтра первой разности переменных по методике (Gorodnichenko, Ng, 2010) и схемы выбора фильтров (Burnside, 1998). При этом фильтр первой разности переменных сравнивался с односторонним фильтром Ходрика–Прескотта. При сравнении использовались моменты второго порядка. Логарифм сглаженного с помощью фильтра реального ВВП трактуется как показатель разрыва выпуска. Остальные временные ряды получались вычитанием из текущих среднего значения. Циклические компоненты всех рядов трактовались как отклонения от долгосрочного равновесия (стационарного состояния). Значение коэффициента дисконтирования $\beta = 0,99$ фиксировалось. Это — стандартный выбор значения для данного коэффициента.

Априорные и апостериорные распределения для структурных параметров модели с рациональными ожиданиями (RE), модели с краткосрочным (SSF) и долгосрочным прогнозированием (LHF) показаны в табл. 1. Априорные распределения центрированы на значениях калиброванных параметров работы (Gali, Monacelli, 2005), кроме χ и Ξ . Значения последних выбраны, как в (Branch, McGough, 2009; Massaro, 2013). Символами $\sigma_{\varepsilon_a}, \sigma_{\varepsilon_r}, \sigma_{\varepsilon_\pi}, \sigma_{\varepsilon_{\bar{y}}}, \sigma_{\varepsilon_a^*}, \sigma_{\varepsilon_r^*}, \sigma_{\varepsilon_\pi^*}, \sigma_{\varepsilon_{\bar{y}}^*}$ обозначены стандартные отклонения соответствующих шоков. Из данных табл. 1. следует, что значения апостериорных

Таблица 1. Априорные и апостериорные оценки параметров исследуемых моделей

Параметр	Априорное распределение		Апостериорное распределение		
			RE	SSF	LHF
	Тип (функция)	Среднее	Среднее	Среднее	Среднее
φ	Гамма	2,000 (0,500)	2,025 (0,487)	2,016 (0,616)	2,421 (0,413)
φ_π	Гамма	1,500 (0,500)	1,786 (0,356)	2,225 (0,567)	2,216 (0,569)
$\varphi_{\bar{y}}$	Гамма	0,360 (0,125)	0,411 (0,090)	0,490 (0,143)	0,511 (0,183)
φ_q	Гамма	0,800 (0,250)	1,102 (0,412)	1,115 (0,454)	0,789 (0,367)
α_b	Бета	0,500 (0,200)	—	—	0,709 (0,211)
Ξ	Гамма	0,600 (0,200)	—	0,398 (0,183)	—
θ	Бета	0,700 (0,200)	0,711 (0,178)	0,762 (0,186)	0,856 (0,167)
η	Гамма	1,000 (0,500)	0,911 (0,454)	0,841 (0,467)	0,869 (0,609)
σ	Гамма	1,500 (0,500)	0,976 (0,309)	1,643 (0,289)	1,331 (0,421)
ρ	Бета	0,500 (0,125)	0,672 (0,167)	0,693 (0,151)	0,811 (0,131)
ρ_a	Бета	0,800 (0,100)	0,703 (0,178)	0,705 (0,187)	0,756 (0,167)
ρ_ψ	Бета	0,800 (0,100)	0,803 (0,146)	0,805 (0,177)	0,896 (0,187)
ρ_{a^*}	Бета	0,800 (0,100)	0,816 (0,181)	0,894 (0,178)	0,910 (0,193)
ρ_{y^*}	Бета	0,800 (0,100)	0,817 (0,161)	0,777 (0,174)	0,856 (0,148)
ρ_{π^*}	Бета	0,800 (0,100)	0,790 (0,182)	0,745 (0,159)	0,865 (0,168)
σ_{ε_a}	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,039 (0,005)	0,046 (0,003)	0,065 (0,006)
$\sigma_{\varepsilon_{\bar{y}}}$	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,022 (0,006)	0,048 (0,004)	0,068 (0,006)

Окончание таблицы 1.

Параметр	Априорное распределение		Апостериорное распределение		
			RE	SSF	LHF
	Тип (функция)	Среднее	Среднее	Среднее	Среднее
σ_{ε_π}	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,023 (0,003)	0,041 (0,007)	0,062 (0,009)
σ_{ε_r}	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,027 (0,004)	0,052 (0,006)	0,069 (0,009)
$\sigma_{\varepsilon_a}^*$	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,018 (0,005)	0,016 (0,006)	0,022 (0,007)
$\sigma_{\varepsilon_y}^*$	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,019 (0,003))	0,019 (0,002)	0,029 (0,009)
$\sigma_{\varepsilon_\pi}^*$	Обратная гамма	0,040 (2,000)	0,077 (0,009)	0,076 (0,007)	0,081 (0,007)
Логарифм предельного правдоподобия			343,32	365,54	332,43

Примечание. В скобках указаны значения стандартных отклонений.

Таблица 2. Значения стандартного отклонения для эмпирических данных и переменных исследуемых моделей

Временной ряд	Данные	RE	SSF	LHF
Разрыв выпуска	0,0165	0,0187	0,0149	0,0352
Индекс потребительских цен	0,0032	0,0039	0,0041	0,0079
Внутренняя инфляция	0,0023	0,0035	0,0032	0,0048
Эффективный реальный обменный курс рубля	0,0054	0,0031	0,0061	0,0090

оценок параметров модели SSF более близки к таковым для модели с рациональными ожиданиями по сравнению с моделью LHF. Логарифм функции маргинального правдоподобия для модели SSF больше, чем для модели с рациональными ожиданиями, и намного превышает значение для модели LHF, т.е. модель SSF более соответствует эмпирическим данным по сравнению с другими моделями.

Для более полной картины в табл. 2. приведены значения стандартного отклонения для эмпирических данных и временных рядов соответствующих переменных трех моделей. Как видно из этой таблицы, стандартные отклонения переменных для модели SSF ближе к эмпирическим данным по сравнению с моделями RE и LHF.

4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛЬНОСТИ МОДЕЛИ

В байесовском подходе определение области детерминированности модели является принципиальным шагом. Поэтому необходимо расширить и исследовать пространство всего спектра параметров, чтобы обнаружить те, которые приводят уравнения к неопределенным или нестабильным областям. В дальнейшем изложении под детерминированностью будет подразумеваться существование единственного решения исследуемой системы уравнений. Недетерминированность означает наличие неопределенности (множество решений) и нестабильности (решения взрывного характера).

Влияние параметров анализируемой модели на ее детерминированность численно проверялось с помощью отображения фильтрации Монте-Карло (MCF), позволяющей исследовать большое пространство параметров. Отображение MCF является процедурой обнаружения параметров, которые способны привести модель в неопределенные и нестабильные области (Ratto, 2008; Saltelli et al., 2004). Эта процедура выполняет многопараметрическое моделирование методом Монте-Карло выборки параметров модели ($X_1, \dots, X_k$) из априорных диапазонов и анализирует чувствительность уравнений модели к изменению параметров.

Преимущество MCF-отображения по сравнению со стандартным анализом устойчивости систем уравнений в пространстве состояний (путем анализа собственных значений матрицы) заключается в том, что посредством этого метода можно анализировать весь спектр параметров модели одновременно. Это позволяет применять данную процедуру при анализе средне- и многомерных моделей.

Выполняя моделирование методом Монте-Карло выборки значений параметров модели из априорных диапазонов, получаем для каждого параметра X_i , $i=1, \dots, k$ два подмножества значений — $(X_i | B)$ размером n и $(X_i | \bar{B})$ размером $\bar{n}$; $n + \bar{n} = N$, где N — общий размер выборки, сформированной методом Монте-Карло. Эти два подмножества значений параметров распределены в соответствии с функциями плотности вероятности $f_n(X_i | B)$ и $f_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$. Соответствующими кумулятивными функциями распределения являются $F_n(X_i | B)$ и $F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$.

Если функции $F_n(X_i | B)$ и $F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$ различаются для данного параметра X_i , то данный параметр может стать причиной «плохого поведения» модели, если его значение попадает в область подмножества $\bar{B}$. Форма функции $F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$ определяет, какие значения параметра порождают такое поведение модели. Если функция $F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$ находится левее функции $F_n(X_i | B)$, это означает, что скорее всего маленькие значения параметра X_i вызовут попадание уравнений в область неопределенности. Если функция $F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$ находится правее функции $F_n(X_i | B)$, то большие значения параметра X_i будут отвечать за попадание уравнений в область неопределенности.

Для получения численных результатов тестируется статистика, которая определяет наибольшее расстояние между функциями $F_n(X_i | B)$ и $F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$. Формально (так называемая) d-статистика Смирнова–Колмогорова определяется как

$$d_{n,\bar{n}}(X_i) = \sup \| F_n(X_i | B) - F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B}) \|.$$

Статистика Смирнова–Колмогорова используется для тестирования гипотезы, при каком уровне значимости p вычисленное значение $d_{n,\bar{n}}$ определяет отклонение нулевой гипотезы $F_n(X_i | B) = F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$ в пользу альтернативной $F_n(X_i | B) \neq F_{\bar{n}}(X_i | \bar{B})$.

В табл. 3 представлены значения d-статистики Смирнова–Колмогорова для исследуемых моделей¹⁵. Как следует из полученных данных, ответственными за устойчивость и стабильность моделей являются параметры, связанные с монетарной политикой и ожиданиями агентов. При этом значения $d_{n,\bar{n}}$ моделей с рациональными ожиданиями (RE) для областей с детерминированным и неопределенным поведением совпадают. Области с нестабильным поведением для этих моделей отсутствуют. Кроме того, для модели с рациональными ожиданиями агентов значимым оказался только параметр ϕ_π , характеризующий реакцию процентной ставки на изменение внутренней инфляции. При этом модели с рациональными ожиданиями, как уже отмечалось выше, более стабильные по сравнению с моделями с гетерогенными ожиданиями агентов. Соответственно, SSF-модели более устойчивы по сравнению с моделями LHF (табл. 3).

Таблица 3. Значения статистики Смирнова–Колмогорова для значимых параметров исследуемых моделей

Параметр	Детерминированность поведения			Нестабильность поведения		Неопределенность поведения		
	RE	SSF	LHF	SSF	LHF	RE	SSF	LHF
ϕ_π	0,411* (0,000)	0,212* (0,000)	0,242* (0,000)	0,062* (0,000)	0,132* (0,000)	0,411* (0,000)	0,729* (0,000)	0,514* (0,000)
χ	—	0,332* (0,000)	0,311* (0,000)	0,332* (0,000)	0,265* (0,000)	—	0,632* (0,000)	0,363* (0,000)
Ξ	—	0,514* (0,000)		0,621* (0,000)		—	0,143* (0,000)	
α_b	—	—	0,567* (0,000)		0,654* (0,000)			0,667* (0,000)
$\phi_{\bar{y}}$	0,015 (1,000)	0,025 (0,561)	0,051 (0,516)	0,014 (1,000)	0,039 (0,883)	0,015 (1,000)	0,165 (0,298)	0,186 (0,212)
ϕ_q	0,010 (1,000)	0,012 (1,000)	0,011 (1,000)	0,012 (1,000)	0,013 (1,000)	0,010 (1,000)	0,032 (1,000)	0,096 (0,811)
Доля областей с соответствующим поведением для исследуемых моделей, %	68	59	48	37	39	32	4	13

Примечание. Символом «*» обозначены значимые значения d-статистики. В скобках указаны значения уровня значимости p . Остальные структурные параметры (см. табл. 1) являются не значимыми для всех трех моделей.

¹⁵ Приведены значения статистики только для значимых параметров моделей и параметров, связанных с монетарной политикой.

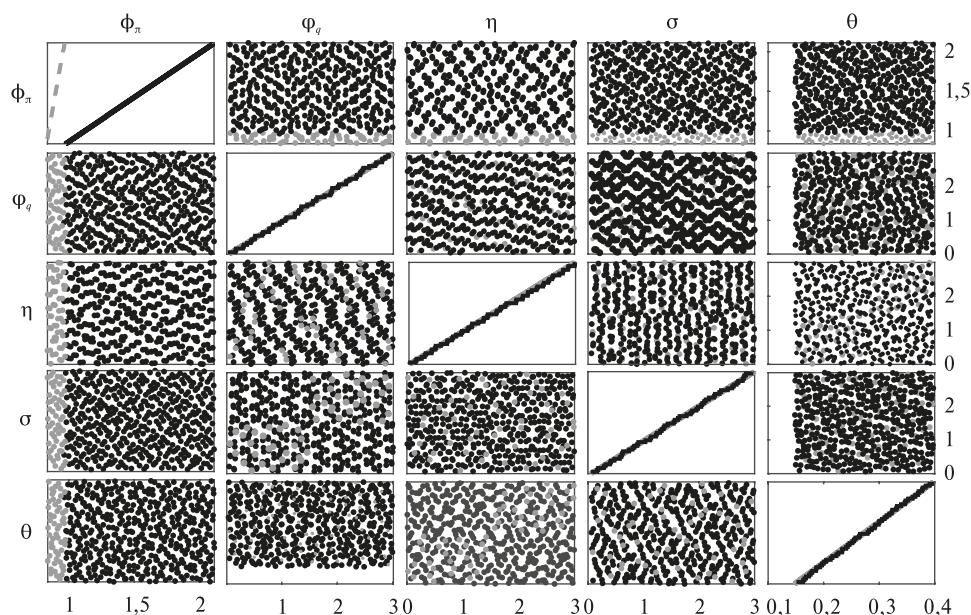


Рис. 1. Двумерные проекции параметров с областями детерминированности модели с рациональными ожиданиями агентов

Примечание. Области детерминированности окрашены черным цветом, неопределенности — серый цвет. По диагонали показаны графические результаты теста Смирнова–Колмогорова для анализа стабильности решений. Черная сплошная линия — $F_n(X_i | B)$, серая пунктирная — $F_n(X_i | \bar{B})$. Коэффициенты ϕ_π и ϕ_q характеризуют реакцию процентной ставки на изменение внутренней инфляции и реального эффективного обменного курса соответственно. Определение остальных параметров дано в описании модели.

Для SSF- и LHF-моделей значения $d_{n,\pi}$ для областей с детерминированным и неопределенным поведением не совпадают. В этих моделях присутствуют области нестабильного поведения, где решения имеют взрывной характер. Причем процентная доля этих областей — намного выше по сравнению с долей областей с неопределенным поведением (см. табл. 3). Для этих моделей значимыми и определяющими поведение модели будут параметры ϕ_π , χ и Ξ . Для модели SSF при уровне значимости меньше двух процентов недетерминированное поведение модели может определять также σ — параметр, обратный эластичности межвременного замещения потребления.

Анализ показал, что параметры ϕ_y , ϕ_q не значимы для поведения всех трех видов моделей¹⁶, т.е. реакция процентной ставки на разрыв выпуска и изменение реального эффективного обменного курса не будет определяющей для поведения моделей. Замена эффективного реального обменного курса на номинальный в уравнении (10) действительно привела к тому, что параметр, определяющий реакцию процентной ставки на изменение номинального курса, оказался значимым для всех исследуемых моделей. Но при этом резко снизилась доля областей с детерминированным поведением. Например, для моделей с SSF и LHF эта доля составляла меньше 12%. Поэтому авторы не приводят данной статистики.

Как отмечалось выше, переменные зарубежного объема выпуска y_i^* и инфляции π_i^* являются экзогенными (уравнения (12)–(13)). Замена этих переменных на эндогенные¹⁷ приводит к тому, что во всех моделях дополнительным к вышеперечисленным значимым для поведения моделей параметром становится реакция зарубежной процентной ставки на изменение инфляции в остальном мире (правило Тейлора для остального мира).

Частичная визуализация полученных результатов показана на рис. 1 (модель с рациональными ожиданиями агентов) и рис. 2 (модель SSF). Хорошо заметно, что только параметр реакции

¹⁶ Незначимость реакции процентной ставки на разрыв выпуска в контексте детерминированности для исследуемых моделей является отличием от работ (Branch, McGough, 2009; Massaro, 2013).

¹⁷ Ввиду ограниченного формата публикации эти уравнения не приводятся.

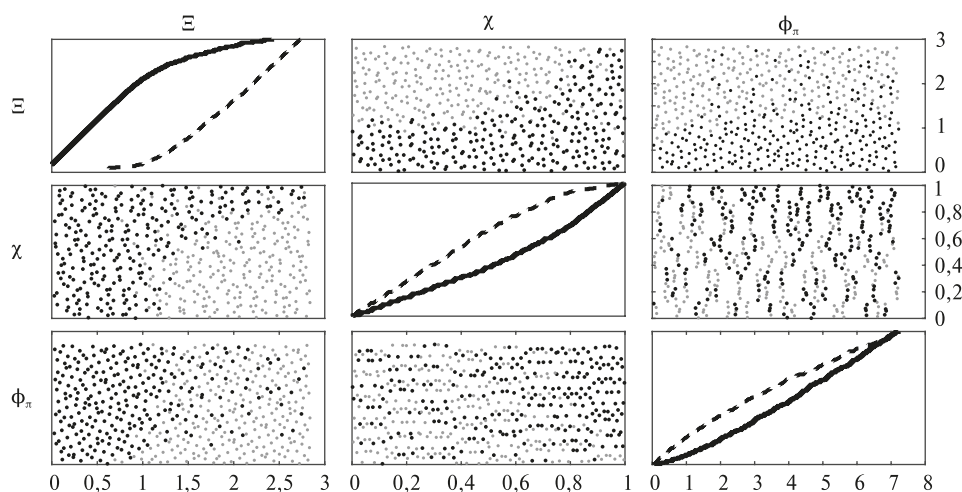


Рис. 2. Двумерные проекции значимых параметров с областями детерминированности модели SSF

Примечание. Области детерминированности окрашены черным цветом, недетерминированности — серый цвет. По диагонали — графические результаты теста Смирнова–Колмогорова для анализа стабильности решений. Черная сплошная линия — $F_n(X_i|B)$, серая пунктирная — $F_n(X_i|\bar{B})$; ϕ_π — коэффициент, характеризующий реакцию процентной ставки на изменение внутренней инфляции; χ — доли агентов с рациональными ожиданиями и Ξ — параметр адаптации.

процентной ставки на изменение внутренней инфляции определяет детерминированность поведения для модели с рациональными ожиданиями агентов. Для этого параметра функции $F_n(X_i|B)$ и $F_n(X_i|\bar{B})$ не совпадают и характер их поведения свидетельствует о том, что детерминированное поведение модели существует при значении данного параметра больше единицы. Двумерные проекции двух областей пространства параметров также приведены на рис. 1.

На рис. 2 показаны результаты для модели SSF. Из проекций видно, что все три приведенных параметра являются значимыми для детерминированного поведения модели. По характеру формы (степени изгиба) этих функций можно сделать выводы о количественных значениях параметров, определяющих детерминированность поведения. Например, значение параметра адаптации Ξ для приемлемого поведения модели должно быть меньше единицы. Аналогичные рассуждения приводят к выводам, что значение параметра χ для детерминированного поведения модели должно быть больше 0,6, а параметра ϕ_π — больше 2. Это означает, что реакция процентной ставки на изменение уровня внутренней инфляции в моделях с гетерогенными ожиданиями должна быть более значительной по сравнению с аналогичной реакцией для модели с рациональными ожиданиями агентов. Аналогичный вид имеют двумерные проекции значимых параметров для моделей LHF, поэтому они не приводятся. Все приведенные результаты подтверждаются апостериорными оценками для этих параметров в табл. 1.

Таким образом, процедура отображения MCF оказывается очень полезной при выборе политики выбора определенных правил, позволяющих манипулировать значимыми макропеременными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье анализировалось влияние ограниченной рациональности агентов на стабильность и устойчивость исследуемой модели с открытой экономикой при одновременном сканировании всего спектра модельных параметров. Исследование устойчивости и стабильности проведено с помощью численной процедуры отображения фильтрации Монте-Карло (MCF). Анализ показал, что реакция процентной ставки на изменение разрыва выпуска и изменение реального эффективного обменного курса не влияет на детерминированное поведение исследуемых моделей открытой экономики. Реакция процентной ставки на изменение номинального эффективного обменного курса оказалась значимой для детерминированного поведения модели, но при этом стабильность и устойчивость моделей резко уменьшается. Однако отличие от цитированных в статье работ состоит в том, что разрыв выпуска не стал значимой переменной для устойчивости модели.

Исследование показало, что реакция процентной ставки на изменение уровня внутренней инфляции в моделях с гетерогенными ожиданиями должна быть более значительной по сравнению с аналогичной реакцией для модели с рациональными ожиданиями агентов.

МСФ-анализ продемонстрировал, что инкорпорирование гетерогенных ожиданий снижает стабильность и устойчивость моделей. При этом модель, основанная на предикторах долгосрочного прогнозирования (LHF), менее стабильна по сравнению с другими моделями (RE и SSF). Важным результатом является существенная доля областей с нестабильным поведением моделей SSF и LHF, где решения характеризуются взрывным характером. Все приведенные результаты подтверждаются апостериорными оценками для этих параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Малаховская О.А.** (2016). Использование моделей DSGE для прогнозирования: есть ли перспектива // *Вопросы экономики*. № 12. С. 129–146. DOI: 10.32609/0042-8736-2016-12-129-146 [Malakhovskaya O.A. (2016). Using DSGE models for forecasting: Is there a prospect? *Voprosy Ekonomiki*, 12, 129–146. DOI: 10.32609/0042-8736-2016-12-129-146 (in Russian).]
- Серков Л.А., Елизаров Д.Б.** (2016). Влияние непредвиденных шоков на поведение макроэкономических показателей в рамках гипотезы об адаптивном обучении агентов // *Известия УрГЭУ*. № 2. С. 135–150. [Serkov L.A., Elizarov D.B. (2016). The influence of unforeseen shocks on the behavior of macroeconomic indicators in the framework of the hypothesis of adaptive learning of agents. *Izvestiya USUE*, 2, 135–150 (in Russian).]
- Уикенс М.** (2015). Макроэкономическая теория: подход динамического общего равновесия. М.: РАНХиГС. [Wickens M. (2015). *Macroeconomic theory: A dynamic general equilibrium approach*. Moscow: RANEPa (in Russian).]
- Adam K.** (2007). Optimal monetary policy with imperfect common knowledge. *Journal of Monetary Economics*, 54 (2), 267–301. DOI: 10.1016/j.jmoneco.2005.08.020
- An S., Schorfheide F.** (2007). Bayesian analysis of DSGE models. *Econometric Reviews*, 26, 113–172. DOI: 10.1080/07474930701220071
- Andrade P., Bihan H. le** (2013). Inattentive professional forecasters. *Journal of Monetary Economics*, 60 (8), 967–982. DOI: 10.1016/j.jmoneco.2013.08.005
- Blanchard O., Kahn C.** (1980). The solution of linear difference models under rational expectations. *Econometrica*, 48 (5), 1305–1311. DOI: 10.2307/1912186
- Branch W.** (2004). The theory of rationally heterogeneous expectations: Evidence from survey data on inflation expectations. *The Economic Journal*, 114 (497), 592–621. DOI: 10.1111/j.1468-0297.2004.00233.x
- Branch W., McGough B.** (2009). A new Keynesian model with heterogeneous expectations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33 (5), 1036–1051.
- Burnside C.** (1998). Detrending and business cycle facts: A comment. *Journal of Monetary Economics*, 41, 513–532.
- Calvo G.** (1983). Staggered prices in a utility maximizing framework. *Journal of Monetary Economics*, 12, 383–398.
- Christiano L., Eichenbaum M., Evans C.** (2005). Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy. *Journal of Political Economy*, 103, 51–78.
- Cornea-Madeira A., Hommes C., Massaro D.** (2019). Behavioral heterogeneity in U.S. inflation dynamics. *Journal of Business and Economic Statistics*, 37 (2), 288–300. DOI: 10.1080/07350015.2017.1321548
- Del Negro M., Schorfheide F.** (2008). Forming priors for DSGE models (and how it affects the assessment of nominal rigidities). *Journal of Monetary Economics*, 55 (7), 1191–1208.
- Di Bartolomeo G., Di Pietro M., Giannini B.** (2016). Optimal monetary policy in a new Keynesian model with heterogeneous expectations. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 73, 373–387. DOI: 10.1016/j.jedc.2016.10.003
- Diks C., Weide R. van der** (2005). Herding, a-synchronous updating and heterogeneity in memory in a CBS. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29 (4), 741–763.
- Gali J., Monacelli T.** (2005). Monetary policy and exchange rate volatility in a small open economy. *Review of Economic Studies*, 3, 707–734.
- Gasteiger E.** (2014). Heterogeneous expectations, optimal monetary policy, and the merit of policy inertia. *Journal of Monetary, Credit and Banking*, 46 (7), 1533–1554. DOI: 10.1111/jmcb.12149

- Geweke J.** (1999). Using simulation methods for Bayesian econometric models: Inference. *Econometric Reviews*, 18, 1–126.
- Gorodnichenko Y., Ng S.** (2010). Estimation of DSGE models when the data are persistent. *Journal of Monetary Economics*, 57, 325–340.
- Hommes C.** (2021). Behavioral and experimental macroeconomics and policy analysis: A complex systems approach. *Journal of Economic Literature*, 1 (59), 149–219. DOI: 10.1257/jel.20191434
- Hommes C.** (2011). The heterogeneous expectations hypothesis: Some evidence from the lab. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 35 (1), 1–24.
- Kydland F., Prescott E.** (1982). Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 50 (6), 1345–1370.
- Massaro D.** (2013). Heterogeneous expectations in monetary DSGE models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37 (3), 680–692.
- Muth J.F.** (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*, 29, 315–335.
- Preston B.** (2006). Adaptive learning, forecast-based instrument rules and monetary policy. *Journal of Monetary Economics*, 53 (3), 507–535.
- Ratto M.** (2008). Analysing DSGE models with global sensitivity analysis. *Computational Economics*, 31 (2), 115–139.
- Saltelli A., Tarantola C., Campolongo F., Ratto M.** (2004). *Sensitivity analysis in practice: A guide to assessing scientific models*. Chichester: John Wiley and Sons.
- Sargent T., Wallace N.** (1976). Rational expectation and the theory of economic policy. *Journal of Monetary Economics*, 2, 169–183.
- Sims C.** (2002). Solving rational expectations models. *Computational Economics*, 20, 1–20.

Analysis of the influence of heterogeneous expectations of economic agents on the stability of general equilibrium models with an open economy

© 2023 L.A. Serkov, S.S. Krasnykh

L.A. Serkov,

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; e-mail: serkov.la@uiecr.ru

S.S. Krasnykh,

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia; e-mail: sergeykrasnykh@yahoo.com

Received 05.04.2022

This study was supported by the Russian Science Foundation (project 21-78-10134)¹⁸.

Abstract. The purpose of the publication is to study the influence of bounded rationality of agents on the ability of economic authorities to choose alternative policy rules that stabilize the dynamics of the relevant significant macroeconomic variables by simultaneously analyzing the entire range of model parameters. The scientific novelty lies in the fact that models with an open economy are analyzed, in which economic agents interact with the outside world. The article evaluates and compares behavioral neo-Keynesian models obtained with two alternative ways of introducing heterogeneous expectations. It is assumed that agents can be either short-sighted with a short-term forecast, or far-sighted forecasters. The difference does not matter when the agents have rational expectations, but it does matter when some of them form beliefs about the future according to some heuristics. Bayesian estimates based on the data of the Russian economy show that the behavioral model based on short-term forecasts is better correlated with empirical data than the model based on long-term forecasts and even compared to the model with rational expectations of agents. Stability and stability analysis was carried out using a numerical procedure — Monte-Carlo Filtration Mapping (MCF). This procedure generalizes and supplements the results obtained for a more limited set of parameters of low-dimensional models in which agents do not interact with the outside world. MCF-analysis shows that incorporating heterogeneous expectations reduces the stability and robustness of models. At the same time, a model based on predictors of long-term forecasting is less stable compared to models of short-term forecasting and with rational expectations of agents. An important result is a significant proportion of areas with unstable behavior of the studied models with heterogeneous expectations of agents, in which solutions are characterized by an explosive nature. With the help of Smirnov–Kolmogorov statistics, significant parameters were identified that determine the deterministic behavior of all analyzed models. An interesting result is: the response of the interest rate to changes in the output gap and changes in the real effective exchange rate do not affect the deterministic behavior of the models under study. All obtained results are confirmed by a posteriori Bayesian estimates for these parameters. The findings provide guidance to economists who study the processes of expectation formation with the help of microdata.

Keywords: heterogeneous expectations, short-term and long-term predictors, Bayes method, Monte-Carlo filtering display, determinism, uncertainty, instability, Smirnov–Kolmogorov statistics.

JEL Classification: D58.

For reference: **Serkov L.A., Krasnykh S.S.** (2023). Analysis of the influence of heterogeneous expectations of economic agents on the stability of general equilibrium models with an open economy. *Economics and Mathematical Methods*, 59, 1, 131–144. DOI: 10.31857/S042473880023067-2

¹⁸ “Formalization of regional development processes on the basis of agent-oriented approach in dynamic stochastic general equilibrium modeling” (<http://rscf.ru/project/21-78-10134/>).



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АКАДЕМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

НА БАЗЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
с 1994 года



Преподаватели – ведущие русские ученые

- более 30% – доктора наук
- более 45% – кандидаты наук



Стажировки в:

- ведущих научно-исследовательских организациях
- органах государственной власти
- крупнейших общественных организациях
- бизнес-структурах



Интеграция науки
и образования



Бюджетные
места



Насыщенная
студенческая жизнь



Отсрочка от армии

БАКАЛАВРИАТ

МАГИСТРАТУРА

АСПИРАНТУРА

НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ:

• История •

• Философия •

• Политология •

• Социология •

• Международные отношения •

• Зарубежное регионоведение •

• Востоковедение и африканистика •

• Психология •

• Культурология •

• Археология •

• Менеджмент •

• Юриспруденция •

• Экономика •

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ



Горячая линия: +7 (499) 238-04-12



facebook.com/gaugn



instagram.com/gaugn_/_



gaugn.ru



E-mail: info@gaugn.ru



vk.com/gaugn



Лицензия 90Л01 № 0009385 регистр. № 2323 от 9 августа 2016 г.
Свидетельство о государственной аккредитации № 3207 от 24 июля 2019 г.



ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НА БАЗЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ЭКОНОМИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА РАН



БАКАЛАВРИАТ

Экономика
Экономическая логистика
Менеджмент организации
Менеджмент в СМИ и рекламе



МАГИСТРАТУРА

Экономика и управление наукой,
технологиями и инновациями
Общий и стратегический
менеджмент



АСПИРАНТУРА

Экономика

ЦЭМИ РАН — крупнейший центр отечественной и мировой экономической науки, собравший под своей эгидой целое созвездие блестящих ученых с мировыми именами. Теоретические дисциплины преподают ведущие ученые, а практические занятия — специалисты бизнес-школ и консультанты по управлению, маркетингу и финансам.

Студенты факультета с первых дней могут проходить стажировки в ведущих научных институтах, принимать участие в различных проектах, международных симпозиумах и конференциях.

Выпускники факультета получают фундаментальную экономическую подготовку, умение квалифицированно разбираться во всех разделах и современных течениях экономической и управленческой науки, что дает им дополнительные преимущества для трудоустройства в органах государственного управления, коммерческих и консалтинговых компаниях, исследовательских центрах, рекламных и информационных агентствах, а также в сфере науки и высшего образования.

5 ПРИЧИН ПОСТУПИТЬ В ГАУГН



ВЫДАЮЩИЕСЯ ПРЕПОДАВАТЕЛИ

Ученые из научно-исследовательских институтов РАН, включая академиков, членов-корреспондентов, докторов и кандидатов наук.



ВОСТРЕБОВАННОСТЬ ВЫПУСКНИКОВ

Выпускники востребованы на рынке труда. Контакты с будущими работодателями устанавливаются во время практики.



МЕЖДУНАРОДНОЕ СОТРУДНИЧЕСТВО

Некоторые лекции читают приглашенные специалисты из других стран. Большое внимание уделяется языковой подготовке.



УДОБСТВО

Факультеты находятся в Москве в непосредственной близости от метро. Обучение в магистратуре и аспирантуре в основном проходит в вечернее время. Подать документы можно онлайн.



СТУДЕНЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Студенты ГАУГН могут участвовать в многочисленных студенческих клубах («Что? Где? Когда?», Клуб политического анализа, Китайский разговорный клуб и др.).