

ISSN 0374-0641

Том 59, Номер 4

Апрель 2023



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 59, номер 4, 2023

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Об асимптотической устойчивости и предельной ограниченности решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием
А. Ю. Александров 435
- К исследованию робастной экспоненциальной устойчивости непрерывных и дискретных систем
О. Г. Антоновская 446
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Обратная задача по определению неизвестного коэффициента уравнения колебания балки в бесконечной области
У. Д. Дурдыев 456
- Спектральные свойства оператора в задаче о колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей
Д. А. Загора 467
- Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B -оператором Киприянова
Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов, С. А. Рошупкин, Е. Л. Санина 483
-

УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

- О некоторых свойствах решений систем линейных разностных уравнений с периодическими правыми частями
А. О. Игнатьев 494
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Начально-краевая задача для течения жидкости с памятью в трёхмерной сетеподобной области
Е. С. Барановский 501
- Специальный вариант метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений
Н. С. Габбасов 512
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Об одном классе задач управления со смешанными ограничениями <i>А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин</i>	520
Стабилизация дифференциально-разностной системы запаздывающего типа <i>А. В. Метельский</i>	531
Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов <i>А. С. Фурсов, П. А. Крылов</i>	554

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Асимптотика релаксационных циклов в обобщённом логистическом уравнении с запаздыванием <i>С. А. Кащенко</i>	563
--	-----

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.929.4

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
И ПРЕДЕЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ
ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

© 2023 г. А. Ю. Александров

Для некоторого класса нелинейных систем дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием исследуются условия асимптотической устойчивости нулевого решения и предельной ограниченности решений. Для получения таких условий предлагаются специальные конструкции функционалов Ляпунова–Красовского полного типа. Находятся оценки времени переходных процессов и проводится анализ влияния возмущений на динамику систем. Кроме того, исследуется случай, когда в системах имеются переключения режимов функционирования, и определяются условия, при выполнении которых асимптотическая устойчивость или предельная ограниченность сохраняются при любых допустимых законах переключения.

DOI: 10.31857/S0374064123040015, EDN: AMGSLQ

Введение. Исследование устойчивости нелинейных систем с запаздыванием представляет собой актуальную проблему современной теории управления [1–6]. В последние годы интерес к ней значительно возрос в связи с появлением задач управления мультиагентными и киберфизическими системами [7]. Хорошо известно [2, 8], что запаздывание может существенно влиять на устойчивость и другие динамические характеристики систем. Следует отметить, что во многих прикладных задачах запаздывание не является малым. Кроме того, информация о его величине может быть недоступна. В таких случаях необходимо получить условия, гарантирующие заданное поведение системы при любом запаздывании.

Прямой метод Ляпунова является основным инструментом анализа устойчивости нелинейных систем. Для систем с запаздыванием его применение базируется или на подходе Разумихина, или на функционалах Ляпунова–Красовского. Эти подходы достаточно хорошо развиты для линейных систем [2, 8–11]. Ряд важных и интересных результатов получен для определённых классов нелинейных систем с запаздыванием (см., например, [1, 3, 8, 12–14] и библиографию в них). Однако в целом проблема нахождения функций Ляпунова–Разумихина и функционалов Ляпунова–Красовского для нелинейного случая недостаточно изучена.

В данной статье исследуется нелинейная дифференциально-разностная система специального вида, представляющая собой сложную систему, описывающую взаимодействие двух подсистем, одна из которых линейная, а вторая – нелинейная и однородная. Такие уравнения могут быть получены в критическом случае нескольких нулевых собственных чисел матрицы системы линейного приближения [15, гл. 2, § 4]. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях на нелинейности данную систему можно рассматривать как классическую систему Лурье непрямого управления с запаздыванием в канале обратной связи [16, гл. 4, § 5; 17, гл. 2, § 5; 18, §§ 7.5, 11.2].

Предлагается оригинальная конструкция функционала Ляпунова–Красовского, с помощью которой получаются условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость или предельную ограниченность решений изучаемой системы при любом постоянном неотрицательном запаздывании. Выводятся оценки времени переходных процессов. Исследуется влияние возмущений на динамику системы. Рассматривается случай, когда в системе имеются переключения режимов функционирования, и определяются условия, при выполнении которых асимптотическая устойчивость или предельная ограниченность сохраняются при любых допустимых законах переключения.

1. Постановка задачи. Пусть задана система дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + g_1(y(t)) + g_2(y(t - \tau)), \quad \dot{y}(t) = Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t - \tau)). \quad (1)$$

Здесь $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, A и C – постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $m \times n$ соответственно, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные при $y \in \mathbb{R}^m$ однородные порядка $\mu > 0$ векторные функции соответствующих размерностей, τ – постоянное неотрицательное запаздывание.

Каждое решение системы (1) при $t \geq t_0$ определяется начальными условиями: начальным моментом $t_0 \geq 0$ и начальной вектор-функцией $\varphi(\theta)$. Будем считать, что начальные функции принадлежат пространству непрерывных функций $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^{n+m})$ с равномерной нормой $\|\varphi\|_\tau = \max_{\theta \in [- \tau, 0]} \|\varphi(\theta)\|$, а под $\|\cdot\|$ будем понимать евклидову норму вектора. Для каждого $t \geq 0$ через $(x_t^T, y_t^T)^T$ обозначим отрезок решения $(x_t^T, y_t^T)^T$, т.е.

$$(x_t^T, y_t^T)^T : \theta \mapsto (x^T(t + \theta), y^T(t + \theta))^T$$

при $\theta \in [- \tau, 0]$.

Система (1) имеет нулевое решение. Исследуем условия, при выполнении которых это решение будет асимптотически устойчивым при любом неотрицательном запаздывании. Кроме того, заметим, что во многих прикладных задачах требуется, чтобы все решения изучаемой системы были ограничены. Особый интерес представляет ситуация, когда в фазовом пространстве системы существует компактная область такая, что каждое решение за конечное время попадает в эту область и остаётся там при дальнейшем возрастании времени. Указанное свойство называют *предельной ограниченностью* или *диссипативностью* (см. [8, § 5.4; 19, гл. 4, § 17]). Поэтому, наряду с условиями асимптотической устойчивости, определим условия предельной ограниченности решений системы (1).

Следует отметить, что при $\tau = 0$ устойчивость соответствующей системы (1) исследовалась в статье [20] на основе метода декомпозиции. Однако в [20] предполагалось, что рассматриваемая система являлась сингулярной (в левой части первой подсистемы в качестве множителя при $\dot{x}(t)$ присутствует малый положительный параметр), не проводился анализ диссипативности и не учитывалось влияние запаздывания на динамику системы.

В настоящей работе, в отличие от [20], вместо метода декомпозиции используются специальные конструкции функций Ляпунова и функционалов Ляпунова–Красовского. В.Л. Харитонов разработал теорию функционалов Ляпунова–Красовского полного типа для линейных дифференциально-разностных систем [9]. В статьях [14, 21, 22] предложены подходы для построения функционалов полного типа для некоторых классов нелинейных систем. В данной работе указанные подходы распространяются на системы вида (1). Построенные функционалы полного типа позволяют не только определить условия асимптотической устойчивости и предельной ограниченности, но и получить оценки времени переходных процессов, а также исследовать влияние возмущений на динамику системы. Кроме того, проводится анализ устойчивости и предельной ограниченности для соответствующих систем с переключениями режимов функционирования.

2. Построение функционала Ляпунова–Красовского. Пусть выполнены следующие предположения.

Предположение 1. Система

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

асимптотически устойчива.

Предположение 2. Нулевое решение однородной системы

$$\dot{y}(t) = f_1(y(t)) + f_2(y(t)) - CA^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t)))$$

асимптотически устойчиво.

Замечание 1. Предположения 1 и 2 представляют собой некоторый аналог известных условий абсолютной устойчивости для системы Лурье непрямого управления (см. [16, с. 94]).

Замечание 2. Известно [15, теоремы 36, 38; 23], что при выполнении предположений 1 и 2 для любых чисел $\nu_1 > 2$ и $\nu_2 > 2$ существуют функции Ляпунова $V_1(x)$ и $V_2(y)$, обладающие следующими свойствами:

- а) $V_1(x)$ и $V_2(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$;
- б) $V_1(x)$ и $V_2(y)$ – положительно определённые функции;
- в) $V_1(x)$ и $V_2(y)$ – однородные функции порядка ν_1 и ν_2 соответственно;
- г) функции

$$\left(\frac{\partial V_1(x)}{\partial x}\right)^T Ax, \quad \left(\frac{\partial V_2(y)}{\partial y}\right)^T (f_1(y) + f_2(y) - CA^{-1}(g_1(y) + g_2(y)))$$

отрицательно определены.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда если $\mu > 1$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geq 0$, а если $0 < \mu < 1$, то решения системы (1) равномерно предельно ограничены при любом $\tau \geq 0$.

Доказательство. Сначала рассмотрим функцию

$$V(x, y) = V_1(x) + V_2(y) - \left(\frac{\partial V_2(y)}{\partial y}\right)^T CA^{-1}x, \quad (2)$$

где $V_1(x)$ и $V_2(y)$ – однородные порядка ν_1 и ν_2 соответственно функции Ляпунова, обладающие свойствами, указанными в замечании 2.

Дифференцируя функцию (2) в силу системы (1), получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), y(t)) &= \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^T (Ax(t) + g_1(y(t)) + g_2(y(t - \tau))) + \\ &+ \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^T (f_1(y(t)) + f_2(y(t - \tau))) - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^T CA^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t - \tau))) - \\ &- (Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t - \tau)))^T \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} CA^{-1}x(t) = \\ &= \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^T Ax(t) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^T (f_1(y(t)) + f_2(y(t)) - CA^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t)))) + \\ &+ \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x}\right)^T (g_1(y(t)) + g_2(y(t - \tau))) - \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^T (f_2(y(t)) - f_2(y(t - \tau))) + \\ &+ \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^T CA^{-1}(g_2(y(t)) - g_2(y(t - \tau))) - \\ &- (Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t - \tau)))^T \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} CA^{-1}x(t). \end{aligned}$$

Далее в соответствии с подходом, разработанным в [21, 22], выбираем функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x_t, y_t) &= V(x(t), y(t)) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y}\right)^T \int_{t-\tau}^t (f_2(y(\theta)) - CA^{-1}g_2(y(\theta))) d\theta + \\ &+ \int_{t-\tau}^t (\beta + \alpha(\tau - t + \theta)) \|y(\theta)\|^{\nu_2 + \mu - 1} d\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где α, β – положительные параметры, а функция $V(x, y)$ определена по формуле (2).

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(x_t, y_t) &= \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x} \right)^T A x(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^T (f_1(y(t)) + f_2(y(t)) - C A^{-1}(g_1(y(t)) + g_2(y(t)))) - \\ &- \alpha \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta + (\beta + \alpha\tau) \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} - \beta \|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1} + \\ &+ \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x} \right)^T (g_1(y(t)) + g_2(y(t-\tau))) - (C x(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau)))^T \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} C A^{-1} x(t) + \\ &+ (C x(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t-\tau)))^T \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} \int_{t-\tau}^t (f_2(y(\theta)) - C A^{-1} g_2(y(\theta))) d\theta. \end{aligned}$$

Учитывая свойства однородных функций (см. [15, с. 112, 118]), получаем оценки

$$\begin{aligned} b_1 \|x(t)\|^{\nu_1} + b_2 \|y(t)\|^{\nu_2} - b_3 \|x(t)\| \|y(t)\|^{\nu_2-1} - b_4 \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta + \\ + \beta \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta \leq \tilde{V}(x_t, y_t) \leq b_5 \|x(t)\|^{\nu_1} + b_6 \|y(t)\|^{\nu_2} + b_3 \|x(t)\| \|y(t)\|^{\nu_2-1} + \\ + b_4 \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta + (\beta + \alpha\tau) \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta, \\ \dot{\tilde{V}}(x_t, y_t) \leq -b_7 \|x(t)\|^{\nu_1} - (b_8 - \beta - \alpha\tau) \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} - \alpha \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta - \\ - \beta \|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1} + b_9 \|x(t)\|^{\nu_1-1} (\|y(t)\|^\mu + \|y(t-\tau)\|^\mu) + \\ + b_{10} (\|x(t)\| + \|y(t)\|^\mu + \|y(t-\tau)\|^\mu) \|y(t)\|^{\nu_2-2} \left(\|x(t)\| + \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta \right). \end{aligned}$$

Здесь $b_1, \dots, b_{10}$ – положительные постоянные.

Выберем и зафиксируем значения параметров α и β так, чтобы выполнялось условие

$$\beta + \alpha\tau < \frac{b_8}{4}. \quad (4)$$

С использованием неравенств Юнга и Гёльдера (см. [24, с. 53, 54, 169]) нетрудно показать, что для любых положительных чисел p_1, p_2 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} b_3 \|x(t)\| \|y(t)\|^{\nu_2-1} + b_4 \|y(t)\|^{\nu_2-1} \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta \leq \\ \leq b_3 \left(\frac{1}{\nu_1} (p_1 \|x(t)\|)^{\nu_1} + \frac{\nu_1-1}{\nu_1} \left(\frac{\|y(t)\|^{\nu_2-1}}{p_1} \right)^{\nu_1/(\nu_1-1)} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_4 \tau^{(\nu_2-1)/(\nu_2+\mu-1)} \|y(t)\|^{\nu_2-1} \left(\int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta \right)^{\mu/(\nu_2+\mu-1)} \leq \\
& \leq b_3 \left(\frac{1}{\nu_1} (p_1 \|x(t)\|)^{\nu_1} + \frac{\nu_1-1}{\nu_1} \left(\frac{\|y(t)\|^{\nu_2-1}}{p_1} \right)^{\nu_1/(\nu_1-1)} \right) + b_4 \tau^{(\nu_2-1)/(\nu_2+\mu-1)} \times \\
& \times \left(\frac{\nu_2-1}{\nu_2+\mu-1} p_2^{-(\nu_2+\mu-1)/(\nu_2-1)} \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + \frac{\mu}{\nu_2+\mu-1} p_2^{(\nu_2+\mu-1)/\mu} \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta \right).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом выводятся неравенства для слагаемых

$$\begin{aligned}
& b_9 \|x(t)\|^{\nu_1-1} (\|y(t)\|^\mu + \|y(t-\tau)\|^\mu) + \\
& + b_{10} (\|x(t)\| + \|y(t)\|^\mu + \|y(t-\tau)\|^\mu) \|y(t)\|^{\nu_2-2} \left(\|x(t)\| + \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta \right)
\end{aligned}$$

из оценки производной функционала.

В результате получим, что если $\mu > 1$,

$$\nu_1 < \nu_2, \quad \frac{\mu+1}{2} < \frac{\nu_2+\mu-1}{\nu_1} < \mu, \quad (5)$$

то найдётся число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(b_1 \|x(t)\|^{\nu_1} + b_2 \|y(t)\|^{\nu_2} + \beta \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta \right) \leq \tilde{V}(x_t, y_t) \leq \\
& \leq 2 \left(b_5 \|x(t)\|^{\nu_1} + b_6 \|y(t)\|^{\nu_2} + (\beta + \alpha\tau) \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta \right), \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{V}}(x_t, y_t) \leq -\frac{1}{2} \left(b_7 \|x(t)\|^{\nu_1} + b_8 \|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} + \alpha \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta \right) \quad (7)$$

при

$$\|x(t)\|^{\nu_1} + \|y(t)\|^{\nu_2} + \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta < \delta_1, \quad (8)$$

а если $0 < \mu < 1$,

$$\nu_2 < \nu_1, \quad \mu < \frac{\nu_2+\mu-1}{\nu_1} < \frac{\mu+1}{2}, \quad (9)$$

то найдётся число $\delta_2 > 0$ такое, что неравенства (6) и (7) справедливы при

$$\|x(t)\|^{\nu_1} + \|y(t)\|^{\nu_2} + \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta > \delta_2. \quad (10)$$

Значит [8, теорема 5.2.1; 9, § 2.11; 22], (3) – функционал Ляпунова–Красовского полного типа для системы (1), гарантирующий при $\mu > 1$ асимптотическую устойчивость нулевого

решения, а при $0 < \mu < 1$ – равномерную предельную ограниченность решений. Теорема доказана.

Замечание 3. Известно [2, § 3.3; 10, гл. 6], что при $\mu = 1$ выполнение предположений 1 и 2 не гарантирует асимптотической устойчивости нулевого решения или предельной ограниченности решений для соответствующей системы (1) при любом неотрицательном запаздывании.

3. Оценки решений и анализ динамики возмущённой системы. Покажем, что с помощью построенного функционала можно получить оценки времени переходных процессов в системе (1).

Теорема 2. Пусть $\mu > 1$ и выполнены предположения 1, 2. Тогда для любого $\tau \geq 0$ и любого числа $\rho \in ((\mu+1)/2, \mu)$ существуют положительные постоянные $a_1, a_2, a_3, \tilde{\delta}$ такие, что если начальная функция $\varphi(\theta)$ для решения $(x^T(t), y^T(t))^T$ системы (1) удовлетворяет условию

$$\|\varphi\|_\tau < \tilde{\delta}, \quad (11)$$

то

$$\|x(t)\| \leq a_1(1 + a_3 t)^{-\rho/(\mu-1)}, \quad \|y(t)\| \leq a_2(1 + a_3 t)^{-1/(\mu-1)} \quad (12)$$

при $t \geq 0$.

Доказательство. Строим функционал Ляпунова–Красовского по формуле (3), где величины α и β удовлетворяют условию (4).

Для заданного $\rho \in ((\mu+1)/2, \mu)$ положим $\nu_2 = \rho\nu_1$. Если ν_1 достаточно велико, то условия (5) будут выполнены. Находим $\delta_1 > 0$ так, чтобы из неравенства (8) следовало выполнение оценок (6) и (7).

Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Поэтому существует $\tilde{\delta} > 0$ такое, что если выполнено условие (11), то для соответствующего решения $(x^T(t), y^T(t))^T$ при всех $t \geq 0$ будут справедливы соотношения (6)–(8). Тогда (см. доказательство теоремы 1 в работе [22]) функционал (3) на этом решении будет удовлетворять дифференциальному неравенству

$$\dot{\tilde{V}}(x_t, y_t) \leq -\tilde{b}\tilde{V}^{1+(\mu-1)/\nu_2}(x_t, y_t), \quad \tilde{b} = \text{const} > 0,$$

интегрируя которое и используя нижнюю оценку в (6), приходим к неравенствам (12). Теорема доказана.

Замечание 4. В случае $0 < \mu < 1$ с помощью построенного функционала можно оценить область предельной ограниченности и время попадания решений в эту область.

Действительно, получаем следующий алгоритм нахождения требуемых оценок:

1. Выбираем числа $\nu_1 > 2$ и $\nu_2 > 2$, удовлетворяющие условиям (9), и строим функционал Ляпунова–Красовского $\tilde{V}(x_t, y_t)$ по формуле (3), где для параметров α, β выполнено неравенство (4).

2. Находим $\delta_2 > 0$ так, чтобы из (10) следовало, что имеют место оценки (6) и (7).

3. Можем указать числа $\Delta > 0, \hat{b} > 0$ такие, что

$$\dot{\tilde{V}}(x_t, y_t) \leq -\hat{b}\tilde{V}^{1+(\mu-1)/\nu_2}(x_t, y_t) \quad (13)$$

при $\tilde{V}(x_t, y_t) \geq \Delta$.

4. Используя дифференциальное неравенство (13), получаем, что если $t_0 \geq 0, \tilde{V}(x_{t_0}, y_{t_0}) \leq \Delta$, то $\tilde{V}(x_t, y_t) \leq \Delta$ при всех $t \geq t_0$, а если $t_0 \geq 0, \tilde{V}(x_{t_0}, y_{t_0}) > \Delta$, то $\tilde{V}(x_t, y_t) \leq \Delta$ при всех $t \geq t_0 + T$, где $T = \nu_2(\tilde{V}^{(1-\mu)/\nu_2}(x_{t_0}, y_{t_0}) - \Delta^{(1-\mu)/\nu_2})/((1-\mu)\hat{b})$.

5. В качестве оценки области предельной ограниченности выбираем область

$$b_1\|x\|^{\nu_1} + b_2\|y\|^{\nu_2} \leq 2\Delta. \quad (14)$$

6. Задаем число $\tilde{\Delta} > 0$. Пусть $\omega = \sup_{\|\varphi\|_\tau \leq \tilde{\Delta}} \tilde{V}(\varphi)$. Тогда если начальная функция решения

удовлетворяет условию $\|\varphi\|_\tau \leq \tilde{\Delta}$, то при $t \geq \max\{0; \nu_2(\omega^{(1-\mu)/\nu_2} - \Delta^{(1-\mu)/\nu_2})/((1-\mu)\hat{b})\}$ это решение будет находиться в области (14).

Далее, наряду с (1), рассмотрим соответствующую возмущённую систему

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + g_1(y(t)) + g_2(y(t - \tau)) + Q(t, x(t), y(t), y(t - \tau)), \\ \dot{y}(t) &= Cx(t) + f_1(y(t)) + f_2(y(t - \tau)) + R(t, x(t), y(t), y(t - \tau)).\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь $t \geq 0$, векторные функции $Q(t, x, y, u)$, $R(t, x, y, u)$ непрерывны при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$.

Предположение 3. Существует число $\gamma_1 > 0$ такое, что в области $t \geq 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| < \gamma_1$ справедливы оценки

$$\|Q(t, x, y, u)\| \leq c_1(\|x\|^\eta + \|y\|^\zeta + \|u\|^\zeta), \quad \|R(t, x, y, u)\| \leq c_2(\|x\|^\eta + \|y\|^\zeta + \|u\|^\zeta), \quad (16)$$

где c_1 , c_2 , η , ζ – положительные постоянные.

Предположение 4. Существует число $\gamma_2 > 0$ такое, что в области $t \geq 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| > \gamma_2$ справедливы оценки (16), а при $t \geq 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| \leq \gamma_2$ функции $Q(t, x, y, u)$, $R(t, x, y, u)$ ограничены.

Теорема 3. Пусть $\mu > 1$ и выполнены предположения 1–3. Тогда, если

$$\eta > 1, \quad \zeta > \mu, \quad (17)$$

нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geq 0$.

Пусть $0 < \mu < 1$ и выполнены предположения 1, 2, 4. Тогда, если

$$0 < \eta < 1, \quad 0 < \zeta < \mu, \quad (18)$$

решения системы (15) равномерно предельно ограничены при любом $\tau \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим функционал (3), в котором параметры α , β удовлетворяют условию (4). Продифференцируем его в силу возмущённой системы и получим

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t, y_t) &= W(x_t, y_t) + \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x} \right)^T Q(t, x(t), y(t), y(t - \tau)) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^T R(t, x(t), y(t), y(t - \tau)) - \\ &- R^T(t, x(t), y(t), y(t - \tau)) \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} \left(CA^{-1}x(t) - \int_{t-\tau}^t (f_2(y(\theta)) - CA^{-1}g_2(y(\theta))) d\theta \right) - \\ &- \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^T CA^{-1}Q(t, x(t), y(t), y(t - \tau)).\end{aligned}$$

Здесь $W(x_t, y_t)$ – производная функционала (3) в силу системы (1).

Пусть $\mu > 1$. При $t \geq 0$, $\|x(t)\| + \|y(t)\| + \|y(t - \tau)\| < \gamma_1$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t, y_t) &\leq W(x_t, y_t) + \tilde{b}_1(\|x(t)\|^{\nu_1-1} + \|y(t)\|^{\nu_2-1})(\|x(t)\|^\eta + \|y(t)\|^\zeta + \|y(t - \tau)\|^\zeta) + \\ &+ \tilde{b}_2\|y(t)\|^{\nu_2-2}(\|x(t)\|^\eta + \|y(t)\|^\zeta + \|y(t - \tau)\|^\zeta) \left(\|x(t)\| + \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta \right),\end{aligned}$$

где $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ – положительные постоянные. Снова используя неравенства Юнга и Гёльдера, нетрудно проверить, что если порядки однородности функций $V_1(x)$ и $V_2(y)$ удовлетворяют условиям

$$\nu_1 < \nu_2, \quad \max \left\{ \frac{\mu+1}{2}, \frac{\mu}{\eta} \right\} < \frac{\nu_2 + \mu - 1}{\nu_1} < \mu$$

и выполнены неравенства (17), то найдётся число $\bar{\delta} > 0$ такое, что при $\|(x_t^T, y_t^T)^T\|_\tau < \bar{\delta}$ справедливы оценки (6) и (7).

В случае $0 < \mu < 1$ аналогичным образом показывается, что при выполнении предположений 1, 2, 4 и неравенств (18) решения возмущённой системы будут равномерно предельно ограничены. Теорема доказана.

4. Условия асимптотической устойчивости и предельной ограниченности для системы с переключениями. Исследуем теперь систему вида (1) с переключениями режимов функционирования:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + g_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + g_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)), \\ \dot{y}(t) &= Cx(t) + f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)).\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, A и C – постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $m \times n$ соответственно, $\sigma = \sigma(t)$ – кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\sigma(t) : [-\tau, +\infty) \mapsto \{1, \dots, N\}$, $f_j^{(s)}(y)$ и $g_j^{(s)}(y)$ – непрерывные при $y \in \mathbb{R}^m$ однородные порядка $\mu > 0$ векторные функции, причём верхний индекс означает номер функции из соответствующего семейства, $j = 1, 2$, $s = \overline{1, N}$, τ – постоянное неотрицательное запаздывание. Предполагаем, что функция $\sigma(t)$ на любом ограниченном промежутке имеет конечное число точек разрыва. Такие законы переключения будем называть *допустимыми*.

Система (19) относится к классу систем с асинхронными переключениями. Известно, что асинхронные переключения имеют место во многих прикладных задачах в случаях, когда управление в системе зависит от режима функционирования и требуется некоторое время для идентификации активной подсистемы и применения соответствующего регулятора [6, 25].

Пусть A – неособая матрица. Рассмотрим семейство однородных подсистем

$$\dot{y}(t) = f_1^{(s)}(y(t)) + f_2^{(s)}(y(t)) - CA^{-1}(g_1^{(s)}(y(t)) + g_2^{(s)}(y(t))), \quad s = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Предположение 5. Нулевые решения подсистем из семейства (20) асимптотически устойчивы, причём для этого семейства существует общая функция Ляпунова $\bar{V}(y)$, обладающая следующими свойствами:

- а) $\bar{V}(y)$ дважды непрерывно дифференцируема при всех $y \in \mathbb{R}^m$;
- б) $\bar{V}(y)$ – положительно определённая функция;
- в) $\bar{V}(y)$ – однородная функция порядка $\lambda \geq 2$;
- г) функции

$$\left(\frac{\partial \bar{V}(y)}{\partial y} \right)^T (f_1^{(s)}(y(t)) + f_2^{(s)}(y(t)) - CA^{-1}(g_1^{(s)}(y(t)) + g_2^{(s)}(y(t)))), \quad s = \overline{1, N},$$

отрицательно определены.

Замечание 5. Некоторые подходы к проверке предположения 5 разработаны в статьях [26, 27].

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 1 и 5. Тогда если $\mu > 1$, то нулевое решение системы (19) асимптотически устойчиво при любом $\tau \geq 0$ и любом допустимом законе переключения, а если $0 < \mu < 1$, то решения системы (19) равномерно предельно ограничены при любом $\tau \geq 0$ и любом допустимом законе переключения.

Доказательство. Задаём числа $\nu_1 > 2$, $\nu_2 > 2$ и строим функционал Ляпунова–Красовского по формуле

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t, x_t, y_t) &= V_1(x(t)) + V_2(y(t)) + \int_{t-\tau}^t (\beta + \alpha(\tau - t + \theta)) \|y(\theta)\|^{\nu_2 + \mu - 1} d\theta - \\ &- \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^T CA^{-1}x(t) + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^T \int_{t-\tau}^t (f_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta)) - CA^{-1}g_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta))) d\theta.\end{aligned}$$

Здесь α , β – положительные параметры, $V_2(y) = \bar{V}^{\nu_2/\lambda}(y)$, а $V_1(x)$ и $\bar{V}(y)$ – однородные порядка ν_1 и λ функции Ляпунова, обладающие свойствами, указанными в замечании 2 и предположении 5 соответственно.

Продифференцируем этот функционал в силу системы (19). Получим

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}}(t, x_t, y_t) = & \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x} \right)^T Ax(t) + \left(\frac{\partial V_1(x(t))}{\partial x} \right)^T (g_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + g_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau))) + \\ & + \left(\frac{\partial V_2(y(t))}{\partial y} \right)^T (f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t))}(y(t)) - CA^{-1}(g_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + g_2^{(\sigma(t))}(y(t)))) - \\ & - \alpha \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta + (\beta + \alpha\tau)\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} - \beta\|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1} - \\ & - (Cx(t) + f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)))^T \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} CA^{-1}x(t) + \\ & + (Cx(t) + f_1^{(\sigma(t))}(y(t)) + f_2^{(\sigma(t-\tau))}(y(t-\tau)))^T \frac{\partial^2 V_2(y(t))}{\partial y^2} \int_{t-\tau}^t (f_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta)) - \\ & - CA^{-1}g_2^{(\sigma(\theta))}(y(\theta))) d\theta \leq -p_1\|x(t)\|^{\nu_1} - (p_2 - \beta - \alpha\tau)\|y(t)\|^{\nu_2+\mu-1} - \\ & - \alpha \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^{\nu_2+\mu-1} d\theta - \beta\|y(t-\tau)\|^{\nu_2+\mu-1} + p_3\|x(t)\|^{\nu_1-1}(\|y(t)\|^\mu + \|y(t-\tau)\|^\mu) + \\ & + p_4(\|x(t)\| + \|y(t)\|^\mu + \|y(t-\tau)\|^\mu)\|y(t)\|^{\nu_2-2} \left(\|x(t)\| + \int_{t-\tau}^t \|y(\theta)\|^\mu d\theta \right). \end{aligned}$$

Здесь p_1 , p_2 , p_3 , p_4 – положительные постоянные.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

5. Пример. Пусть система (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bh(y(t-\tau)), \quad \dot{y}(t) = Cx(t) + Dh(y(t-\tau)), \quad (21)$$

где $t \geq 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$, A , B , C , D – постоянные матрицы размерности 2×2 , $h(y) = (y_1^\mu, y_2^\mu)^T$, $\mu > 1$, – рациональное число с нечётными числителем и знаменателем, τ – постоянное неотрицательное запаздывание. Такие уравнения соответствуют системе непрямого управления с двумя нелинейными исполнительными органами и запаздыванием в канале обратной связи [16, гл. 4, § 5; 18, §§ 7.5, 11.2].

Определим условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (21). Будем считать, что A – неособая матрица. Чтобы проверить условие предположения 2, построим однородную систему

$$\dot{y}(t) = (D - CA^{-1}B)h(y(t)). \quad (22)$$

Рассмотрим случай, когда

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где a – некоторая постоянная.

Для системы (21) с такими матрицами предположение 1 выполнено тогда и только тогда, когда $a < 0$, а уравнения (22) принимают вид

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 1/a & 1 \\ 4 & -1 + 1/a \end{pmatrix} h(y(t)). \quad (24)$$

Заметим, что (24) – система Важевского [17, гл. 9; 28]. Следовательно [28, пример 9], для асимптотической устойчивости её нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы матрица этой системы была гурвицевой.

Применяя теорему 1, получаем, что при выполнении условия $-1/3 < a < 0$ нулевое решение системы (21) с матрицами (23) асимптотически устойчиво при любом неотрицательном запаздывании.

Заключение. Для рассматриваемых классов систем предложены оригинальные конструкции функционалов Ляпунова–Красовского полного типа, с помощью которых установлены новые условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения или предельную ограниченность решений при любом постоянном запаздывании. В качестве направления дальнейших исследований отметим развитие предложенных подходов для анализа устойчивости и предельной ограниченности систем с переменным запаздыванием и с обобщённо-однородными нелинейностями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Karafyllis I., Malisoff M., Mazenc F., Pepe P. Recent Results on Nonlinear Delay Control Systems. Cham, 2016.
2. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Basel, 2014.
3. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. P. 1667–1694.
4. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Об одном способе математического моделирования электрических сигналов // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 867–881.
5. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.П. Стратегии прицеливания в направлении квазиградиентов в задачах оптимального управления системами с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1515–1524.
6. Liu G., Hua C., Guan X. Asynchronous stabilization of switched neutral systems: a cooperative stabilizing approach // Nonlin. Anal.: Hybrid Systems. 2019. № 33. P. 380–392.
7. Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. М.; Ижевск, 2015.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
9. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices. Boston, 2013.
10. Ммышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
11. Метельский А.В. Одновременная стабилизация семейства дифференциальных систем с запаздыванием динамической обратной связью по состоянию // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1516–1535.
12. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W., Richard J.P. Weighted homogeneity for time-delay systems: finite-time and independent of delay stability // IEEE Trans. Automatic Control. 2016. V. 61. № 1. P. 210–215.
13. Schiffer J., Fridman E., Ortega R., Raisch J. Stability of a class of delayed port-hamiltonian systems with application to microgrids with distributed rotational and electronic generation // Automatica. 2016. V. 74. P. 71–79.
14. Aleksandrov A., Efimov D. Stability analysis of switched homogeneous time-delay systems under synchronous and asynchronous commutation // Nonlin. Anal.: Hybrid Systems. 2021. V. 42. Art. 101090.
15. Зубов В.И. Устойчивость движения. М., 1973.
16. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М., 1970.
17. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.
18. Liao X., Yu P. Absolute Stability of Nonlinear Control Systems. New York; Heidelberg, 2008.
19. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
20. Косов А.А., Козлов М.В. Об асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2019. № 3. С. 45–54.

21. Александров А.Ю., Жабко А.П., Печерский В.С. Функционалы полного типа для некоторых классов однородных дифференциально-разностных систем // Сб. тр. VIII межд. науч. конф. "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий". Воронеж, 21–26 сентября 2015 г. Воронеж, 2015. С. 5–8.
22. Efimov D., Aleksandrov A. Analysis of robustness of homogeneous systems with time delays using Lyapunov–Krasovskii functionals // Int. J. Robust Nonlin. Control. 2021. V. 31. № 9. P. 3730–3746.
23. Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Systems Control Lett. 1992. V. 19. P. 467–473.
24. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М., 1948.
25. Zheng D., Zhang H., Zhang J.A., Zheng W., Su S.W. Stability of asynchronous switched systems with sequence-based average dwell time approaches // J. Franklin Inst. 2020. V. 357. № 4. P. 2149–2166.
26. Васильев С.Н., Косов А.А. Анализ динамики гибридных систем с помощью общих функций Ляпунова и множественных гомоморфизмов // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 27–46.
27. Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Platonov A.V. On the asymptotic stability of switched homogeneous systems // Syst. Control Lett. 2012. V. 61. № 1. P. 127–133.
28. Мартынюк А.А., Оболенский А.Ю. Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 8. С. 1392–1407.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 18.12.2022 г.

После доработки 25.02.2023 г.

Принята к публикации 22.03.2023 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.926

К ИССЛЕДОВАНИЮ РОБАСТНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Предложена методика получения достаточных условий робастной экспоненциальной устойчивости параметрически неопределённой системы. Данная методика применяется для исследования как непрерывных, так и дискретных параметрически неопределённых систем. Общая функция Ляпунова выбрана в виде положительно определённой квадратичной формы, которая является функцией Ляпунова для системы при конкретном значении параметра и удовлетворяет ограничениям на первую производную (первую разность). Применение предложенной методики проиллюстрировано на конкретных примерах.

DOI: 10.31857/S0374064123040027, EDN: AMNDUT

Введение. Важное место в теории систем занимает проблема робастной устойчивости, т.е. устойчивости систем при наличии неопределённости. В этом случае задача состоит в получении условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем [1, 2]. Параметрическая неопределённость означает, что структура системы известна, а параметры могут отличаться от номинальных. В некоторых специальных случаях робастная устойчивость может быть установлена эффективно. Одним из них является случай интервальности параметров непрерывной системы [1, с. 187–189]. К семейству таких систем применима теорема Харитонова [3], согласно которой робастная устойчивость эквивалентна устойчивости четырёх так называемых угловых систем (вернее, угловых полиномов, которые называют полиномами Харитонова) [1, с. 189]. Однако в общем случае, когда параметрическая неопределённость является более сложной, непосредственная проверка робастной устойчивости семейства систем сложна. Кроме того, задача получения условий робастной устойчивости дискретных систем оказалась достаточно сложной [4] даже в случае интервальности коэффициентов. (В работе [4] в качестве одной из причин возникновения трудностей в дискретном случае указывается несовместимость между областью устойчивости (единичный круг) и областью изменения коэффициентов (прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат).) Поэтому, наряду с необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости, часто используются подходы, основанные на определении достаточных условий робастной устойчивости. В частности, известен подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределённых семейств [2, с. 117]. При этом следует отметить и тот факт, что может представлять интерес и сама задача построения общей квадратичной функции Ляпунова семейства систем.

1. О существовании общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределённой непрерывной системы. Рассмотрим автономную линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(q)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где q – параметр, изменяющийся на заданном множестве $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$, и квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$V(x) = x^T K x \quad (K^T = K). \quad (2)$$

Элементы $n \times n$ -матриц $A(q)$ и K вещественные. Первая производная $\dot{V}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (1) также является квадратичной формой:

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T(q)K + KA(q))x. \quad (3)$$

В дальнейшем матрицу $A^T(q)K + KA(q)$ квадратичной формы (3) будем обозначать через $A_K(q)$. Очевидно, что матрица $A_K(q)$ симметрична: $A_K(q) = A_K^T(q)$. Пусть $A_K(q) = (A_{km}(q))_{k,m=1}^n$. Если $A(q) = (a_{ik}(q))_{i,k=1}^n$ и $K = (K_{ik})_{i,k=1}^n$, то для элементов матрицы $A_K(q)$ очевидны равенства

$$A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n (K_{im}a_{ik}(q) + K_{ik}a_{im}(q)), \quad k, m = \overline{1, n},$$

в которых учтена симметричность матрицы K ($K_{ik} = K_{ki}$ для всех $k, i = \overline{1, n}$).

Предположим, что при некотором значении параметра $q = q_0$ из множества $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$ корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1), имеют отрицательные действительные части. Тогда, согласно теоремам работ [5, 6], если положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой производной (3) на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ равно $\delta_0 V_0$, то $2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i \leq \delta_0 < 0$ и параметры (2) удовлетворяют уравнению

$$\det(A_{km}(q_0) - \mu K_{km})_{k,m=1}^n = 0, \quad (4)$$

где $\mu = \delta_0$.

Все корни уравнения (4) действительны [7, гл. 10, § 6], причём наибольший из них [6, 8] есть $\mu_n = \max_{x \neq 0} (\dot{V}(x)/V(x))$.

Левая часть уравнения (4) представляет собой определитель, все элементы которого линейны относительно μ , поэтому её можно записать в виде многочлена степени n относительно μ . Запишем уравнение (4) в виде $P_n(\mu) = 0$, где

$$P_n(\mu) = \mu^n + a_1(q_0)\mu^{n-1} + a_2(q_0)\mu^{n-2} + \dots + a_{n-1}(q_0)\mu + a_n(q_0), \quad (5)$$

$$a_k(q_0) = (-1)^k (\det K)^{-1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \det K^{i_1, i_2, \dots, i_k}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$a_n(q_0) = (-1)^n (\det K)^{-1} \det A_K(q_0), \quad (6)$$

матрица $K^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ на одноимённые столбцы матрицы $A_K(q_0)$. Многочлен (5), (6) получается из (4), если раскрыть определитель и разделить полученный многочлен на коэффициент при старшей степени μ .

Пусть значение параметра изменилось. Тогда и коэффициенты системы изменятся, а система запишется как

$$\dot{x} = (A(q_0) + \Delta A(q))x, \quad (7)$$

где $\Delta A(q) = (\Delta a_{ij}(q))_{i,j=1}^n$, $\Delta a_{ij}(q) = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)$, $i, j = \overline{1, n}$. Если считать функцию (2) неизменной, то уравнение (4) примет вид

$$\det(A_K(q_0) + (\Delta A)_K(q) - \mu K) = 0, \quad (8)$$

где $(\Delta A)_K(q) = (\Delta A_{km}(q))_{k,m=1}^n$,

$$\Delta A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n (K_{ik}\Delta a_{im}(q) + K_{im}\Delta a_{ik}(q)) \quad (k, m = \overline{1, n}), \quad (9)$$

а вместо многочлена (5) получим многочлен

$$\begin{aligned} P_n^\Delta(\mu)(q) &= \mu^n + (a_1(q_0) + \Delta a_1(q))\mu^{n-1} + (a_2(q_0) + \Delta a_2(q))\mu^{n-2} + \dots \\ &\dots + (a_{n-1}(q_0) + \Delta a_{n-1}(q))\mu + a_n(q_0) + \Delta a_n(q), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Delta a_k(q)$ – сумма произведений всех миноров матрицы $(\Delta A)_K(q)$ до порядка k включительно на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1, i_2, \dots, i_k}$. В частности, коэффициент $\Delta a_n(q)$ равен

$$\Delta a_n(q) = \frac{(-1)^n}{\det K} \sum_{p=1}^n \omega_p(q), \quad (11)$$

здесь

$$\omega_1(q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta A_{ij}(q) A_j^i, \quad \omega_n = \det (\Delta A)_K(q)$$

и

$$\omega_p(q) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \left| \begin{array}{cccc} \Delta A_{i_1, j_1}(q) & \Delta A_{i_1, j_2}(q) & \dots & \Delta A_{i_1, j_p}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta A_{i_p, j_1}(q) & \Delta A_{i_p, j_2}(q) & \dots & \Delta A_{i_p, j_p}(q) \end{array} \right| A_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_p}, \quad p = \overline{2, n-1},$$

где A_j^i – алгебраическое дополнение элемента $A_{ij}(q_0)$ в матрице $A_K(q_0)$, $A_{j_1, \dots, j_k}^{i_1, \dots, i_k}$ – алгебраическое дополнение минора матрицы $A_K(q_0)$, построенного на строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, \dots, j_k$. Многочлен (10), (11) получается из уравнения (8) при учёте (9), если раскрыть определитель и разделить полученный многочлен на коэффициент при старшей степени μ .

Задача состоит в определении условий, при которых квадратичная функция Ляпунова, построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (7) при всех значениях параметра из отрезка $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$.

Следует отметить, что все корни уравнения (4) действительны, наибольший и наименьший из них соответствуют наибольшему и наименьшему значениям величины $\dot{V}/V$ [6, 8], т.е. отрицательность их подтверждает отрицательность первой производной в силу системы, а значит, и тот факт, что положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова. При этом в случае когда все корни характеристического уравнения различны, для любого $\delta_0 \in [2 \max_{i=\overline{1, n}} \operatorname{Re} \lambda_i, 0)$ можно построить функцию (2), удовлетворяющую ограничению

$\max_{V=V_0} (\dot{V}/V) = \delta_0$ (см. [9, 10]). Например, если все корни характеристического уравнения действительны и различны, причём $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n, \quad (12)$$

приводящее систему к каноническому виду

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1, n}, \quad A = \operatorname{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

(У матрицы B её k -й столбец является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению λ_k , $k = \overline{1, n}$.) Тогда в канонических переменных квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0} (\dot{V}/V) = \delta_0$, где $2\lambda_n \leq \delta_0 < 0$, можно искать в виде

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2} K_{ii} \xi_i^2 + K_{n-1, n-1} \xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1, n} \xi_{n-1} \xi_n + K_{nn} \xi_n^2, \quad (13)$$

где $K_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$, а

$$K_{n-1, n}^2 = (1 - R(\delta_0)) K_{n-1, n-1} K_{nn}, \quad R(\delta_0) = (\lambda_{n-1} - \lambda_n)^2 (\lambda_{n-1} + \lambda_n - \delta_0)^{-2},$$

при этом корнями уравнения (4) будут числа $\mu_1 = 2\lambda_1, \dots, \mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}$, $\mu_{n-1} = 2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) - \delta_0$, $\mu_n = \delta_0$, причём $\mu_{\max} = \delta_0$.

Если все корни характеристического уравнения различны, но имеющие наибольшие действительные части корни $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$ являются комплексно-сопряжёнными, то функцию Ляпунова для канонической системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0} (\dot{V}/V) = \delta_0$, можно искать в виде (13) [8], где

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta_0)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2), \quad C(\delta_0) = (\delta_0 - 2\alpha)^2\beta^{-2} + 4,$$

считая равными между собой коэффициенты $K_{i-1,i-1} = K_{ii}$, если переменные ξ_{i-1} , ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, для которых $\operatorname{Re} \lambda_{i-1,i} < \alpha$. Аналогично можно рассмотреть и другие случаи для корней характеристического уравнения [10]. Возвращаясь к исходным переменным, получаем искомую функцию Ляпунова.

В дальнейшем будем предполагать, что квадратичная функция Ляпунова для значения параметра $q = q_0$ построена (неважно каким способом). Получить условия отрицательности корней уравнения (8) с построенной функцией Ляпунова при всех $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$ можно как непосредственным анализом корней этого уравнения, так и применяя метод D -разбиений [11, с. 86–107; 12], различные критерии устойчивости [1, с. 76–84]. Другим методом получения условия отрицательности корней уравнения (8) при $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$ может быть применение теоремы Харитонова [1, с. 188].

Рассмотрим интервальный полином

$$P(\mu) = \mu^n + [a_1]\mu^{n-1} + [a_2]\mu^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]\mu + [a_n], \quad (14)$$

в котором $[a_k] = [\underline{a}_k, \bar{a}_k]$, $\underline{a}_k \leq a_k + \Delta a_k(q) \leq \bar{a}_k$ при $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$, $k = \overline{1, n}$, и четыре “угловых” полинома (полиномы Харитонова)

$$P_I(\mu) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\mu + \bar{a}_{n-2}\mu^2 + \bar{a}_{n-3}\mu^3 + \dots, \quad (15)$$

$$P_{II}(\mu) = \bar{a}_n + \underline{a}_{n-1}\mu + \underline{a}_{n-2}\mu^2 + \bar{a}_{n-3}\mu^3 + \dots, \quad (16)$$

$$P_{III}(\mu) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1}\mu + \underline{a}_{n-2}\mu^2 + \underline{a}_{n-3}\mu^3 + \dots, \quad (17)$$

$$P_{IV}(\mu) = \underline{a}_n + \bar{a}_{n-1}\mu + \bar{a}_{n-2}\mu^2 + \underline{a}_{n-3}\mu^3 + \dots \quad (18)$$

Коэффициенты в полиномах P_I – P_{IV} являются крайними возможными значениями интервальных коэффициентов; при этом они чередуются парами (пара нижних – пара верхних), начиная с коэффициента a_n для полиномов P_I , P_{III} и с коэффициента a_{n-1} для полиномов P_{II} , P_{IV} .

В силу теоремы Харитонова если все корни полиномов (15)–(18) имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (14) тоже имеют отрицательные действительные части. В частности, все действительные корни полиномов (14) отрицательны, первая производная функции (2) в силу системы при всех рассматриваемых значениях параметра отрицательно определена, и квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова систем вида (7) с определёнными выше Δa_k . А это означает, что получены условия робастной экспоненциальной устойчивости системы.

Теорема 1. Если действительные части всех корней полиномов (15)–(18) отрицательны, то положительно определённая квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова параметрически неопределённой непрерывной системы (1). В частности, семейство (1) робастно экспоненциально устойчиво.

Замечание 1. Таким образом, для установления робастной экспоненциальной устойчивости интервального семейства (1) достаточно:

- 1) при некотором фиксированном q_0 для системы семейства (1) построить квадратичную функцию Ляпунова V ;
- 2) отыскать границы изменения коэффициентов полиномов (10);
- 3) для полученного интервального семейства полиномов проверить, что корни всех четырёх “угловых” полиномов Харитонова имеют отрицательные действительные части.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = (-3 + q)x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + (-3 + q)x_2, \quad \dot{x}_3 = (-1 + q)x_3, \quad (19)$$

имеющую состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Будем предполагать, что параметр изменяется на отрезке $-0.25 \leq q \leq 0.25$. При $q = 0$ система (19) принимает вид

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2, \quad \dot{x}_3 = -x_3. \quad (20)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (20), равны $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$. Для матрицы B преобразования координат, приводящего систему (20) к каноническому виду

$$\dot{\xi}_1 = -4\xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = -2\xi_2, \quad \dot{\xi}_3 = -\xi_3,$$

имеем

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Квадратичную функцию Ляпунова для системы (20), удовлетворяющую условию

$$\max_{V=V_0>0} \dot{V}/V = \delta_0 = -1 \quad (-2 = 2 \max_i \lambda_i < \delta_0 < 0),$$

будем искать в виде

$$\tilde{V}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = K_{11}\xi_1^2 + K_{22}\xi_2^2 + K_{23}\xi_2\xi_3 + K_{33}\xi_3^2, \quad K_{23}^2 = (1 - R(-1))K_{22}K_{33}, \quad (21)$$

где

$$R(-1) = \frac{(-2+1)^2}{(-2-1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

При $K_{11} = 2$, $K_{22} = 6$, $K_{33} = 8$ получаем $K_{23} = 6$, а в переменных x_1 , x_2 , x_3 – квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + 8x_3^2. \quad (22)$$

Проверим, будет ли функция (22) функцией Ляпунова для всех значений параметра $-0.25 \leq q \leq 0.25$.

Первая производная (22) в силу системы (19) есть

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3) = & (-10 + 4q)x_1^2 + (-4 + 4q)x_1x_2 + (-10 + 4q)x_2^2 + \\ & + (-18 + 12q)x_1x_3 + (-18 + 12q)x_2x_3 + (-16 + 16q)x_3^2. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (8) в этом случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -10 + 4q - 2\mu & -2 + 2q - \mu & -9 + 6q - 3\mu \\ -2 + 2q - \mu & -10 + 4q - 2\mu & -9 + 6q - 3\mu \\ -9 + 6q - 3\mu & -9 + 6q - 3\mu & -16 + 16q - 8\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Следует отметить, что это уравнение может быть также записано в виде

$$P_3(\mu) = \mu^3 + 2(7 - 3q)\mu^2 + (53 - 56q + 12q^2)\mu + (40 - 106q + 56q^2 - 8q^3) = 0. \quad (23)$$

Корнями этого уравнения являются $\mu_1 = -8 + 2q$, $\mu_2 = -5 + 2q$, $\mu_3 = -1 + 2q$. Все они отрицательны при $-0.25 \leq q \leq 0.25$, т.е. функция (22) будет оставаться функцией Ляпунова системы (19) при этих значениях параметра. (Следует отметить, что $\mu_3 = -1$ при $q = 0$.)

Эта же задача может быть решена с помощью теоремы Харитонов. “Угловые” полиномы в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$P_I(\mu) = 16.875 + 39.75\mu + 15.5\mu^2 + \mu^3, \quad P_{II}(\mu) = 70.125 + 39.75\mu + 12.5\mu^2 + \mu^3,$$

$$P_{III}(\mu) = 70.125 + 67.25\mu + 12.5\mu^2 + \mu^3, \quad P_{IV}(\mu) = 16.875 + 67.25\mu + 15.5\mu^2 + \mu^3.$$

Рассмотрим полином $P_I(\mu)$. Условиями того, что полином третьей степени имеет все корни с отрицательной действительной частью, являются соотношения [1, с. 80]

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_3 \quad (24)$$

(следствие критерия Эрмита–Билера для полиномов степени $n = 3$). В случае полинома $P_I(\mu)$ все коэффициенты положительны и $39.75 \cdot 15.5 > 16.875 \cdot 1$. Значит, действительные части всех корней полинома $P_I(\mu)$ отрицательны в силу (24). Все остальные полиномы исследуются аналогично. Но если все корни рассмотренных полиномов имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (23) тоже имеют отрицательные действительные части. Таким образом, все (действительные) корни полиномов (23) отрицательны, и квадратичная форма (22) является общей функцией Ляпунова систем вида (19), т.е. получены условия робастной экспоненциальной устойчивости системы.

Замечание 2. Квадратичная функция Ляпунова, удовлетворяющая ограничению на её первую производную в силу линеаризованной системы, как правило, строится для получения различных оценок для нелинейной системы [13]. Поэтому актуальной будет и задача построения общей квадратичной функции Ляпунова множества систем, обладающей определённым “запасом” знакоотрицательности, т.е. также удовлетворяющей ограничению на первую производную, скажем $\dot{V}/V \leq \tilde{\delta}$ ($2 \max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i < \tilde{\delta} < 0$). Для решения этой задачи заменой $w = \mu - \tilde{\delta}$ приведём полином (5) к виду

$$\tilde{P}_n(w) = w^n + \tilde{a}_1 w^{n-1} + \tilde{a}_2 w^{n-2} + \dots + \tilde{a}_{n-1} w + \tilde{a}_n \quad (25)$$

и будем исследовать его по описанной выше методике. Но тогда из условия $\operatorname{Re} w_i < 0$ для корней полинома (25) будет следовать, что $\operatorname{Re} \mu_i < \tilde{\delta}$ для корней полинома $P_n(\mu)$.

2. О существовании общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределённой дискретной системы. Рассмотрим параметрически неопределённую дискретную систему (линейное точечное отображение)

$$\bar{x} = A(q)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (26)$$

где q – параметр, изменяющийся на заданном множестве $[\underline{q}, \bar{q}]$, и квадратичную форму с постоянными коэффициентами (2).

Элементы $n \times n$ -матриц $A(q)$ и K вещественные. Первая разность $\Delta V(x)$ квадратичной формы (2) при $q = q_0$ в силу системы (26) также является квадратичной формой:

$$\Delta V(x) = x^T (A^T(q)KA(q) - K)x. \quad (27)$$

В дальнейшем матрицу $A^T(q)KA(q) - K$ квадратичной формы (27) будем обозначать через $A_K(q)$. Очевидно, что матрица $A_K(q)$ симметрична: $A_K(q) = A_K^T(q)$. Пусть $A_K(q) = (A_{km}(q))_{k,m=1}^n$. Если $A(q) = (a_{ik}(q))_{i,k=1}^n$ и $K = (K_{ik})_{i,k=1}^n$, то для элементов матрицы $A_K(q)$ очевидны равенства

$$A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} a_{ik}(q) a_{jm}(q) - K_{km}, \quad k, m = \overline{1, n}, \quad (28)$$

в которых учтена симметричность матрицы K ($K_{ij} = K_{ji}$ для всех $j, i = \overline{1, n}$).

Предположим, что при некотором значении параметра $q = q_0$ из множества $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$ корни $z_1, z_2, \dots, z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ отображения (26), лежат внутри единичного круга. Тогда, согласно теореме работы [5], если положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова отображения (26) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой разности (27) на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ равно $\delta_0 V_0$, то $\max_i |z_i|^2 - 1 \leq \delta_0 < 0$ и параметры (2) удовлетворяют уравнению (4), в котором $\mu = \delta_0$.

Пусть значение параметра изменилось. Тогда и коэффициенты отображения (26) изменятся и оно примет вид

$$\bar{x} = (A(q_0) + \Delta A(q))x, \quad (29)$$

где $\Delta A = (\Delta a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\Delta a_{ij}(q) = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)$ ($i, j = \overline{1, n}$). И если считать функцию (2) неизменной, уравнение (4) примет вид (8), где $(\Delta A)_K = (\Delta A_{km})_{k,m=1}^n$, а

$$\Delta A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}(a_{ik}(q_0)\Delta a_{jm}(q) + a_{jm}(q_0)\Delta a_{ik}(q) + \Delta a_{jm}(q)\Delta a_{ik}(q)), \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Подобно предыдущему случаю запишем уравнение (4) в виде $P_n(\mu) = 0$, где многочлен P_n определяется в силу (5), (6), а уравнение (8) – в виде $P_n^\Delta(\mu)(q) = 0$, где многочлен P_n^Δ определён в (10). Задача состоит в определении условий, при которых квадратичная функция Ляпунова, построенная для отображения (26), будет оставаться функцией Ляпунова и для отображения (29) при $\underline{q} \leq q \leq \bar{q}$.

Следует отметить, что все корни уравнения (4) действительны, причём наибольший и наименьший корни (4) соответствуют наибольшему и наименьшему значениям $\Delta V/V$ [8], т.е. отрицательность всех корней (4) подтверждает отрицательность первой разности в силу функций последования отображения, а значит, и тот факт, что положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова. При этом, если все корни характеристического уравнения различны, для любого $\delta_0 \in [\max_{i,n}(|z_i|^2 - 1), 0)$ можно построить функцию (2), удовлетворяющую ограничению $\max_{V=V_0}(\Delta V/V) = \delta_0$ [9, 10]. Например, если все корни характеристического уравнения действительны и различны, причём $|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n| < 1$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат (12), приводящее отображение к каноническому виду

$$\bar{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1, n}, \quad A = \text{diag}[z_1, \dots, z_n].$$

(Столбцы матрицы B являются собственными векторами матрицы A , соответствующими собственным значениям $z_1, z_2, \dots, z_n$.) Тогда в канонических переменных квадратичную функцию Ляпунова с $\max_{V=V_0}(\Delta V/V) = \delta_0$ можно искать в виде (13), где $(z_n^2 - 1 \leq \delta_0 < 0)$

$$K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta_0))K_{n-1,n-1}K_{nn}, \quad R(\delta_0) = (1 + \delta_0)(z_{n-1} - z_n)^2(z_{n-1}z_n - 1 - \delta_0)^{-2}.$$

При этом (см. [10, 14]) корнями уравнения (4) будут числа $\mu_1 = z_1^2 - 1, \dots, \mu_{n-2} = z_{n-2}^2 - 1, \mu_{n-1} = (z_{n-1}^2 + z_n^2 - 2) - \delta_0, \mu_n = \delta_0$, т.е. в данном случае $\mu_{\max} = \delta_0$.

Если все корни характеристического уравнения различны, но наибольшие по модулю корни $z_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$ являются комплексно-сопряжёнными, то для канонической системы дифференциальных уравнений функцию Ляпунова с $\max_{V=V_0}(\Delta V/V) = \delta_0$ можно искать в виде (13) [9], где

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta_0)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2),$$

а $C(\delta_0) = (\delta_0 + 1 - (\alpha^2 + \beta^2))^2(1 + \delta_0)^{-1}\beta^{-2} + 4$, считая равными между собой коэффициенты $K_{i-1,i-1} = K_{ii}$, если переменные ξ_{i-1}, ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряжённых

корней характеристического уравнения, для которых $|z_i| < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Аналогично можно рассмотреть и другие случаи корней характеристического уравнения. Возвращаясь к исходным переменным, получаем искомую функцию Ляпунова.

В дальнейшем будем предполагать, что квадратичная функция Ляпунова для значения параметра $q = q_0$ построена. Подобно случаю непрерывной динамической системы рассмотрим интервальный полином (14) и четыре “угловых” полинома (полиномы Харитоновы) (15)–(18), где коэффициенты A_{kt} определяются равенствами (28). В силу теоремы Харитонova если все корни полиномов (15)–(18) имеют отрицательные действительные части, то корни всего параметрически неопределённого семейства полиномов имеют отрицательные действительные части, т.е. все действительные корни полиномов (14) отрицательны, первая разность функции (2) в силу функций последования отображения при всех рассматриваемых значениях параметра отрицательно определена, квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова отображений вида (26), значит, получены условия робастной экспоненциальной устойчивости дискретной динамической системы.

Теорема 2. *Если действительные части всех корней полиномов (15)–(18) отрицательны, то положительно определённая квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова параметрически неопределённой линейной автономной дискретной системы (26). В частности, семейство (26) робастно экспоненциально устойчиво.*

Замечание 3. Таким образом, для установления робастной экспоненциальной устойчивости интервального семейства (26) достаточно:

- 1) при некотором фиксированном q_0 для отображения семейства (26) построить квадратичную функцию Ляпунова V ;
- 2) отыскать границы изменения коэффициентов полиномов (10);
- 3) для полученного интервального семейства полиномов проверить, что у всех четырёх “угловых” полиномов Харитонova корни имеют отрицательные действительные части.

Пример 2. Рассмотрим точечное отображение

$$\bar{x}_1 = (0.3 + q)x_1 + 0.1x_2, \quad \bar{x}_2 = 0.1x_1 + (0.3 + q)x_2, \quad \bar{x}_3 = (0.1 + q)x_3, \quad (30)$$

имеющее неподвижную точку $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Будем предполагать, что параметр изменяется на отрезке $-0.05 \leq q \leq 0.05$. При $q = 0$ отображение (30) принимает вид

$$\bar{x}_1 = 0.3x_1 + 0.1x_2, \quad \bar{x}_2 = 0.1x_1 + 0.3x_2, \quad \bar{x}_3 = 0.1x_3. \quad (31)$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ отображения (31), равны $z_1 = 0.1$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.4$. Для матрицы B преобразования координат, приводящего отображение (31) к каноническому виду

$$\bar{\xi}_1 = 0.1\xi_1, \quad \bar{\xi}_2 = 0.2\xi_2, \quad \bar{\xi}_3 = 0.4\xi_3,$$

имеем

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичную функцию Ляпунова для системы (31), удовлетворяющую условию

$$\max_{V=V_0} \Delta V/V = \delta_0 = -0.76 \quad (-0.84 = \max_i (z_i^2 - 1) < \delta_0 < 0),$$

будем искать в виде (21), где

$$R(-0.76) = \frac{(-0.76 + 1)(0.4 - 0.2)^2}{(0.4 \cdot 0.2 - 1 + 0.76)^2} = 0.375.$$

При $K_{11} = 4$, $K_{22} = 4\sqrt{10}$, $K_{33} = 4\sqrt{10}$ получаем $K_{23} = 10$, а в переменных x_1 , x_2 , x_3 – форму

$$V(x_1, x_2, x_3) = (2\sqrt{10} + 5)x_1^2 + (2\sqrt{10} - 5)x_2^2 + 4x_3^2. \quad (32)$$

Проверим, будет ли функция (32) функцией Ляпунова для всех значений параметра $-0.05 \leq q \leq 0.05$. Первая разность формы (32) в силу системы (30) есть

$$\Delta V(x_1, x_2, x_3) = [(2\sqrt{10} + 5)((0.3 + q)^2 - 1) + 0.01(2\sqrt{10} - 5)]x_1^2 + 8\sqrt{100.1}(0.3 + q)x_1x_2 + \\ + [(2\sqrt{10} - 5)((0.3 + q)^2 - 1) + 0.01(2\sqrt{10} + 5)]x_2^2 + 4[(0.1 + q)^2 - 1]x_3^2.$$

Уравнение (8) в таком случае может быть переписано в виде уравнения

$$P_3(\mu) = 15\mu^3 + [15(1 - (0.1 + q)^2) + 30(1 - (0.3 + q)^2) - 1.3]\mu^2 + \\ + [(1 - (0.1 + q)^2)(30(1 - (0.3 + q)^2) - 1.3) + 15(30((0.3 + q)^2) - 0.01)^2]\mu + \\ + (1 - (0.1 + q)^2)[15 - 30(0.3 + q)^2 - 1.3 + 15(30((0.3 + q)^2) - 0.01)^2] = 0 \quad (33)$$

с корнями

$$\mu_1 = (0.1 + q)^2 - 1, \quad \mu_2 = \frac{1}{3}[3(0.3 + q)^2 + 0.13 - \sqrt{6(0.3 + q)^2 + 0.1}] - 1, \\ \mu_3 = \frac{1}{3}[3(0.3 + q)^2 + 0.13 + \sqrt{6(0.3 + q)^2 + 0.1}] - 1.$$

Все они являются отрицательными при $-0.05 \leq q \leq 0.05$, т.е. функция (32) будет оставаться функцией Ляпунова системы (30) при этих значениях параметра. (Следует отметить, что $\mu_3 = -0.76$ при $q = 0$.)

Эта задача может быть решена и с помощью теоремы Харитонова. Поскольку при $-0.05 \leq q \leq 0.05$ для коэффициентов полинома $P_3(\mu)$ будут иметь место ограничения

$$a_0(q) = 15, \quad 39.68 \leq a_1(q) \leq 41.78, \quad 24.65 \leq a_2(q) \leq 26.80, \quad 9.985 \leq a_3(q) \leq 11.837,$$

“угловыми” полиномами в рассматриваемом случае будут

$$P_I(\mu) = 9.985 + 24.65\mu + 41.78\mu^2 + 15\mu^3, \quad P_{II}(\mu) = 11.837 + 24.65\mu + 39.68\mu^2 + 15\mu^3, \\ P_{III}(\mu) = 11.837 + 26.80\mu + 39.68\mu^2 + 15\mu^3, \quad P_{IV}(\mu) = 9.985 + 26.80\mu + 41.78\mu^2 + 15\mu^3.$$

Рассмотрим полином $P_I(\mu)$. Как уже указывалось, условиями того, что полином третьей степени имеет все корни с отрицательной действительной частью, являются соотношения (24). В случае полинома $P_I(\mu)$ все коэффициенты положительны и $24.65 \cdot 41.78 > 9.985 \cdot 15$. Значит, действительные части всех корней полинома $P_I(\mu)$ отрицательны в силу (24). Все остальные полиномы исследуются аналогично. Но если все корни рассмотренных полиномов имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (33) отрицательны и квадратичная форма (32) является общей функцией Ляпунова семейства дискретных систем (30). Таким образом, получены условия робастной экспоненциальной устойчивости дискретной системы (30).

Замечание 4. Задача построения общей квадратичной функции Ляпунова множества систем, обладающей определённым “запасом” знакоотрицательности первой разности, для семейства дискретных динамических систем (26) также решается аналогично непрерывному случаю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М., 2002.
2. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М., 2014.
3. Харитонов В.Л. Об устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
4. Джзурри Э.И. Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. Вып. 5. С. 5–38.

5. Антоновская О.Г. О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1562–1563.
6. Антоновская О.Г. О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295–302.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.
8. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2 (501). С. 19–23.
9. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
10. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
11. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М., 2010.
12. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость и Д-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. Вып. 7. С. 10–18.
13. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 12–18.
14. Антоновская О.Г. О пределах изменения первой разности квадратичной функции Ляпунова на заданном её сечении // Мат. моделирование и оптимальное управление. Вестн. Нижегородского гос. ун-та. 2001. № 1 (26). С. 65–70.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 17.03.2020 г.
После доработки 28.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956+517.968.2

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. У. Д. Дурдиев

Для уравнения поперечных колебаний однородной балки рассматривается прямая начальная задача в бесконечной области, для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки. Приводится решение прямой задачи с помощью фундаментальных решений и доказываются существование и единственность этого решения. Получены оценки устойчивости для решения обратной задачи. С помощью принципа сжатых отображений Банаха доказаны теоремы существования и единственности решения обратной задачи.

DOI: 10.31857/S0374064123040039, EDN: AMTHCF

Введение. Балка – это конструктивный элемент (предназначенный для восприятия преимущественно осевой нагрузки), который сопротивляется нагрузкам, приложенным сбоку к её оси. Нагрузки, приложенные к балке, вызывают силы реакции в точках её опоры. Суммарный эффект всех сил, действующих на балку, заключается в создании поперечных сил и изгибающих моментов внутри неё, которые, в свою очередь, вызывают внутренние напряжения, деформации и прогибы балки. Балки характеризуются способом опирания, профилем (формой поперечного сечения), условиями равновесия, длиной и материалом.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин имеют важные приложения в проектировании конструкций, теории устойчивости вращающихся валов, теории колебаний кораблей и трубопроводов и описываются дифференциальными уравнениями порядков выше второго [1–3].

В последние годы возрос интерес к исследованию прямых и обратных задач для уравнения колебаний балки [4–21]. В статье [7] представлен метод восстановления параметров закрепления вязкоупругого стержня с переменной жёсткостью, жёстко закреплённого на одном конце и имеющего вязкоупругие связи на другом при известных смещениях, заданных (измеренных) в двух точках. В работе [11] для уравнения поперечных колебаний однородной балки, свободно опирающейся на концы, рассмотрена прямая начально-краевая задача и для неё изучена обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости. Численные решения краевых задач для уравнения поперечных колебаний балки приведены в работах [22–24].

Обратные задачи – одни из самых важных, на наш взгляд, математических задач в технических науках и математике, потому что дают возможность ввести необходимые параметры задачи напрямую. Они имеют широкое применение в идентификации систем, оптике, акустике, теории связи, обработке сигналов, геофизике, дистанционном зондировании, машинном обучении и во многих других областях. Обратные задачи математической физики изучены для многих классов дифференциальных уравнений. Так, например, такие задачи для простейшего уравнения гиперболического типа изучались в монографии [25]. Методика доказательств локальных теорем существования и единственности решения, теорем единственности и условной устойчивости для обратных динамических задач, а также численные подходы к нахождению их решения рассмотрены в работах [26–37] (см. также библиографию в них).

В данной статье рассмотрены прямая задача для уравнения колебания бесконечной балки, т.е. задача Коши и обратная задача по определению коэффициента, зависящего от времени при младшем члене этого уравнения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную балку под действием внешней силы $G(x, t)$. Вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвёртого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} + Q(t)u = G(x, t),$$

где ρ – плотность балки, S – площадь поперечного сечения балки, E – модуль упругости материала балки, J – момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси; балка по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $Q(t)$.

Разделив на ρS , запишем это уравнение в следующем виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

где $a^2 = EJ/(\rho S)$, $q(t) = Q(t)/(\rho S)$ и $f(x, t) = G(x, t)/(\rho S)$. Уравнение (1) рассмотрим в полуплоскости $D = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ вместе с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Прямая задача. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую (1), (2) и условию

$$u(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_t^1(D \cup \{t = 0\}) \cap C(\overline{D}). \quad (3)$$

При этом функции $q(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ считаются заданными и достаточно гладкими.

Обратная задача. Найти коэффициент $q(t)$, если решение задачи Коши (1)–(3) удовлетворяет условию

$$u(0, t) = g(t), \quad (4)$$

где $g(t)$ – заданная достаточно гладкая функция, кроме того, $|g(t)| \geq g_0 > 0$.

Пусть функция $u(x, t)$ – решение задачи Коши (1)–(3). Преобразуем обратную задачу (1)–(4). Для этого обозначим четвёртую производную $u(x, t)$ по переменной x через $v(x, t)$, т.е. $v(x, t) := u_{xxxx}(x, t)$. Продифференцировав (1) и (2) четырежды по x , имеем

$$v_{tt} + a^2 v_{xxxx} + q(t)v = f_{xxxx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$v|_{t=0} = \varphi^{(4)}(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi^{(4)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Для того чтобы найти дополнительное условие для функции $v(x, t)$, положим $x = 0$ в (1) и, используя равенства (3) и (4), получим

$$v|_{x=0} = \frac{1}{a^2} [f(0, t) - q(t)g(t) - g''(t)], \quad t > 0. \quad (7)$$

Через $D_T := \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$ обозначим полосу толщины T , где $T > 0$ – произвольное фиксированное число.

Замечание. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x) \in C_b^{(4)}(\mathbb{R})$, $f(x, t) \in C_b^{(4)}(D_T)$, где $C_b^{(4)}$ – класс ограниченных функций с точностью до производных четвёртого порядка, и верны следующие условия:

$$\frac{\partial^{(i)} u}{\partial x}(0, 0) = \varphi^{(i)}(0), \quad \frac{\partial^{(i)} u_t}{\partial x}(0, 0) = \psi^{(i)}(0), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Тогда из (5)–(7) можно вывести задачу (1)–(4).

2. Исследование прямой задачи. Воспользуемся результатами работы [6], в которой решение задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

построено с помощью фундаментальных решений в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G_1(x, t, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) G_2(x, t, \xi) d\xi, \quad (8)$$

где

$$G_1(x, t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \sin \left[\frac{(\xi - x)^2}{4at} + \frac{\pi}{4} \right], \quad G_2(x, t, \xi) = \frac{1}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2} \sin(a\lambda^2 t) \cos(\lambda(\xi - x)) d\lambda.$$

В статье [6] показано, что функции $G_i(x, t, \xi)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют следующим условиям:

$$(A_1) \quad G_1(x, t, \xi) \in C^\infty(D);$$

$$(A_2) \quad G_2(x, t, \xi) \in C^\infty(D);$$

$$(B_1) \quad \lim_{t \rightarrow +0} G_1(x, t, \xi) = \infty;$$

$$(B_2) \quad \lim_{t \rightarrow +0} G_2(x, t, \xi) = 1;$$

$$(C_1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x, t, \xi) d\xi = 1;$$

$$(C_2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_2(x, t, \xi)}{\partial t} d\xi = 1;$$

$$(C_3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} G_2(x, t, \xi) d\xi = 2t.$$

Фактически функция $G_1(x, t, \xi)$ является частной производной от $G_2(x, t, \xi)$ по переменной t , т.е. $\partial G_2(x, t, \xi)/\partial t = G_1(x, t, \xi)$.

В уравнении (5), перенося слагаемое $q(t)v(x, t)$ в правую часть, введём обозначение

$$F(x, t) \equiv f_{xxxx}(x, t) - q(t)v(x, t).$$

При $F(x, t) \neq 0$ воспользуемся принципом Дюамеля и с учётом (8) для решения прямой задачи (5), (6) получим интегральное уравнение

$$v(x, t) = v_0(x, t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} v_0(x, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_2(x, t, \xi) d\xi + \\ & + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $C^m(\mathbb{R})$ – класс m раз непрерывно дифференцируемых и ограниченных в $\mathbb{R}$ функций, а $C_{x,t}^{m,k}(D_T)$ – класс m раз по x и k раз по t непрерывно дифференцируемых и ограниченных при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ в области D_T функций.

Справедлива следующая

Лемма. Если $q(t) \in C[0, T]$, $f(x, t) \in C_{x,t}^{6,0}(D_T)$, $\varphi(x) \in C^8(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^6(\mathbb{R})$, кроме того, функции $\varphi^{(8)}(x)$, $\varphi^{(6)}(x)$, $\psi^{(6)}(x)$, $\partial^6 f(x, t)/\partial x^6$, $\varphi^{(4)}(x)$, $\psi^{(4)}(x)$, $f_{xxxx}(t)$, $x^4 \varphi^{(4)}(x)$, $x^4 \psi^{(4)}(x)$, $x^4 f_{xxxx}(t)$, $x^8 \psi^{(4)}(x)$ и $x^8 f_{xxxx}(t)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то существует единственное классическое решение интегрального уравнения (9) такое, что $v(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D_T)$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений и рассмотрим последовательность функций, определённых формулами

$$v_n(x, t) = - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v_{n-1}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где $v_0(x, t)$ определена в (10).

Положим $\varphi_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(4)}(x)|$, $\psi_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi^{(4)}(x)|$, $q_0 = \max_{0 < t \leq T} |q(t)|$, $f_1 = \max_{0 < t \leq T} |f_0(t)|$, где $f_0(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{xxxx}(x, t)|$. Используя (11) и условия (C_1) , (C_3) , оценим $v_n(x, t)$ в области D_T следующим образом:

$$|v_0(x, t)| \leq \varphi_0 + 2T\psi_0 + T^2 \|f_0\| =: \lambda_0, \quad |v_1(x, t)| \leq \lambda_0 q_0 \int_0^t 2(t - \tau) d\tau = 2\lambda_0 q_0 \frac{t^2}{2!},$$

$$|v_2(x, t)| \leq \lambda_0 q_0^2 \int_0^t 2(t - \tau) \tau^2 d\tau = 2^2 \lambda_0 q_0^2 \frac{t^4}{4!}, \quad \dots$$

Таким образом, для всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ получим оценки

$$|v_n(x, t)| \leq \lambda_0 (2q_0)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$

из которых следует, что ряд

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t)$$

сходится равномерно в области D_T , так как его можно мажорировать в D_T с помощью сходящегося числового ряда

$$\lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q_0 T^2)^n}{(2n)!},$$

а значит, имеет место следующая оценка решения интегрального уравнения (9):

$$|v(x, t)| \leq \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2q_0 T^2)^n}{(2n)!} = \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0} T), \quad (x, t) \in D_T. \quad (12)$$

Теперь докажем, что решение интегрального уравнения (9) действительно является классическим решением задачи (1)–(3). Сначала проверим выполнение начальных условий.

Отметим, что при $t \rightarrow +0$ и выполнении условий (A_1) – (C_3) интегралы в правой части (10) расходятся. Введём обозначение $\eta \equiv (\xi - x)/2\sqrt{at}$ и преобразуем эти интегралы. Если функция $\varphi^{(4)}(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то несобственные интегралы в правой части (10) сходятся равномерно при $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда, переходя к пределу при $t \rightarrow +0$, в силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta = 1$$

получим

$$\lim_{t \rightarrow +0} v(x, t) = \varphi^{(4)}(x).$$

Для доказательства выполнения второго начального условия найдём частную производную по t от функции (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} &= \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \eta \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) dt - \\ &\quad - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда и из приведённых выше рассуждений получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} &= \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) dt - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Если $\varphi^{(5)}(\pm\infty) = 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0(x, t)}{\partial t} &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) dt - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Если функции $\varphi^{(6)}(x)$ и $\psi^{(4)}(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то, переходя к пределу при $t \rightarrow +0$, в силу равенства

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) dx = 0$$

находим

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \psi^{(4)}(x).$$

Если докажем, что функция $v_0(x, t)$, определяемая формулой (10), будет из класса (3), то в силу (11) легко видеть, что все функции $v_n(x, t)$ будут принадлежать тому же классу. Тогда из общей теории интегральных уравнений следует, что $v(x, t) \in C_{x,t}^{4,2}(D) \cap C_t^1(D \cup \{t = 0\}) \cap C(\overline{D})$, т.е. функция $v(x, t)$ является классическим решением задачи Коши (5), (6).

С этой целью вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial t^2} &= \sqrt{\frac{a^3}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(7)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \eta \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\ &+ \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \eta \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_{xxxx}(x, t) - \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \zeta \sin\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta d\tau = \\
& = \sqrt{\frac{a^3}{\pi t}} \left[\frac{1}{2} \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) \varphi^{(7)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(8)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\
& + \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) \psi^{(5)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\
& + f_{xxxx}(x, t) + \sqrt{\frac{a}{\pi(t-\tau)}} \int_0^t \left\{ \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) f_{\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \right. \\
& \left. + \sqrt{a(t-\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \cos\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta \right\} d\xi.
\end{aligned}$$

Если $\varphi^{(7)}(\pm\infty) = 0$, $\psi^{(5)}(\pm\infty) = 0$ и $f_{xxxx}(\pm\infty, t) = 0$, то получим выражение

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v_0(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(8)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \sin\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(6)}(x + 2\eta\sqrt{at}) \cos\left(\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\eta + \\
& + f_{xxxx}(x, t) + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(x + 2\zeta\sqrt{a(t-\tau)}, \tau) \cos\left(\zeta^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\zeta d\xi. \quad (13)
\end{aligned}$$

Далее аналогично вычисляется $\partial^4 v_0(x, t)/\partial x^4$.

Таким образом, если функции $\varphi^{(8)}(x)$, $\psi^{(6)}(x)$ и $\partial^6 f(x, t)/\partial x^6$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то несобственные интегралы в (13) сходятся равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$. И если функции $\varphi^{(4)}(x)$, $\psi^{(4)}(x)$, $f_{xxxx}(t)$, $x^4 \varphi^{(4)}(x)$, $x^4 \psi^{(4)}(x)$, $x^4 f_{xxxx}(t)$, $x^8 \psi^{(4)}(x)$ и $x^8 f_{xxxx}(t)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то несобственные интегралы в $\partial^4 v_0(x, t)/\partial x^4$ также сходятся равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$. Лемма доказана.

Теперь оценим норму разности между решением исходного интегрального уравнения (9) и решением этого же уравнения с возмущёнными функциями $\tilde{q}$, $\tilde{f}_{xxxx}$, $\tilde{\varphi}^{(4)}$ и $\tilde{\psi}^{(4)}$, определяющими $\tilde{v}(x, t)$:

$$\tilde{v}(x, t) = \tilde{v}_0(x, t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\tau) \tilde{v}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}^{(4)}(\xi) G_1(x, t, \xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^{(4)}(\xi) G_2(x, t, \xi) d\xi + \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (15)
\end{aligned}$$

Тогда для $v - \tilde{v}$ с помощью (9) и (14) получим линейное интегральное уравнение

$$v(x, t) - \tilde{v}(x, t) = v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (q(\tau) - \tilde{q}(\tau)) v(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)) \tilde{q}(\tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau,$$

откуда выводится следующее неравенство:

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)| \leq |v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t)| + \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T) \|q - \tilde{q}\| + \\ + \tilde{q}_0 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |(v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau))| G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (16)$$

где $\tilde{q}_0 = \max_{t \in [0, T]} |\tilde{q}_0(t)|$. Из равенств (10) и (15) следует оценка

$$|v_0(x, t) - \tilde{v}_0(x, t)| \leq \|\varphi^{(4)} - \tilde{\varphi}^{(4)}\| + 2T \|\psi^{(4)} - \tilde{\psi}^{(4)}\| + \frac{T^2}{2} \|f_{xxxx} - \tilde{f}_{xxxx}\|$$

или

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|_0 \leq \sigma (\|\varphi^{(4)} - \tilde{\varphi}^{(4)}\| + \|\psi^{(4)} - \tilde{\psi}^{(4)}\| + \|f_{xxxx} - \tilde{f}_{xxxx}\| + \|q - \tilde{q}\|),$$

где $\sigma = \max\{1, \tilde{q}_0, 2T, T^2/2, \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T)\}$.

Применив метод последовательных приближений к неравенству (16)

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)|_n \leq \tilde{q}_0 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |v(\xi, \tau) - \tilde{v}(\xi, \tau)| G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad n \in \mathbb{N},$$

получим оценку

$$|v(x, t) - \tilde{v}(x, t)| \leq \sigma \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T) (\|\varphi^{(4)} - \tilde{\varphi}^{(4)}\| + \|\psi^{(4)} - \tilde{\psi}^{(4)}\| + \|f_{xxxx} - \tilde{f}_{xxxx}\| + \|q - \tilde{q}\|), \quad (17)$$

которая будет использована в следующем пункте. Неравенство (17) является оценкой устойчивости решения задачи Коши (5), (6), единственность которого также следует из (17).

3. Исследование обратной задачи (5)–(7). Положив в (9) $x = 0$ и используя дополнительное условие (7), после несложных преобразований получим следующее интегральное уравнение для определения $q(t)$:

$$q(t) = q_0(t) + \frac{a^2}{g(t)} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau, \quad (18)$$

где

$$q_0(t) = \frac{1}{g(t)} \left[f(0, t) - g''(t) - a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi) G_1(x, t - \tau, \xi) d\xi - \right. \\ \left. - a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(4)}(\xi) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi - a^2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau \right].$$

Решение интегрального уравнения (9) зависит от функции q , т.е. $v = v(x, t; q)$. Введём оператор A , определяя его правой частью (18):

$$A[q](t) = q_0(t) + \frac{a^2}{g(t)} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) v(\xi, \tau; q) G_2(x, t - \tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) запишется в виде

$$q(t) = A[q](t). \quad (20)$$

Пусть $\|q_{00}\| = \max_{0 \leq t \leq T} |q_0(t)|$. Зафиксируем число $\rho > 0$ и рассмотрим шар

$$B_T(q_0, \rho) := \{q(t) : q(t) \in C[0, T], \|q - q_0\| \leq \rho\}.$$

Теорема 1. Если выполнены условия леммы, $g(t) \in C^2[0, T]$, $\|g(t)\| \geq g_0 > 0$, $\varphi(0) = g(0)$ и $\psi(0) = g'(0)$, то существует такое число $T^* \in (0, T]$, что обратная задача (1)–(4) имеет единственное решение $q(t) \in [0, T^*]$.

Доказательство. Докажем сначала, что для достаточно малого $T > 0$ оператор A переводит шар $B_T(q_0, \rho)$ в себя, т.е. из условия $q(t) \in B_T(q_0, \rho)$ следует, что $A[q](t) \in B_T(q_0, \rho)$. Действительно, для любой функции $q(t) \in C[0, T]$ функция $A[q](t)$, определяемая формулой (19), принадлежит классу $C[0, T]$. Более того, оценивая норму разностей, находим, что

$$\|A[q] - q_0\| \leq \frac{a^2 \lambda_0 q_0 T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T).$$

Здесь мы воспользовались оценкой (12). Заметим, что функция, стоящая в правой части этого неравенства, монотонно возрастает с увеличением T , а из того что функция $q(t)$ принадлежит шару $B_T(q_0, \rho)$ следует неравенство

$$q_0 \leq \rho + q_{00}. \quad (21)$$

Следовательно, мы только усилим неравенство, если заменим q_0 в этом соотношении выражением $\rho + q_{00}$. Выполнив эту замену, получим оценку

$$\|A[q] - q_0\| \leq \frac{a^2 \lambda_0 (\rho + q_{00}) T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T).$$

Пусть T_1 – положительный корень уравнения

$$R_1(T) = \frac{a^2 \lambda_0 (\rho + q_{00}) T^2}{g_0} \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T) = \rho.$$

Тогда для $T \in [0, T_1]$ имеем $A[q](t) \in B_T(q_0, \rho)$.

Теперь рассмотрим две функции $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$, принадлежащие шару $B_T(q_0, \rho)$, и оценим расстояние между их образами $A[q](t)$ и $A[\tilde{q}](t)$ в пространстве $C[0, T]$. Функция $\tilde{v}(x, t)$, соответствующая $\tilde{q}(t)$, удовлетворяет интегральному уравнению (14) с функциями $\varphi^{(4)} = \tilde{\varphi}^{(4)}$ и $f_{xxxx} = \tilde{f}_{xxxx}$. Составим разность $A[q](t) - A[\tilde{q}](t)$ с помощью уравнений (9), (14) и оценим её норму

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leq \frac{a^2 T^2}{2g_0} [\|v\| \|q - \tilde{q}\| + \|\tilde{q}\| \|v - \tilde{v}\|].$$

Используя оценки (12) и (17) с $\varphi^{(4)} = \tilde{\varphi}^{(4)}$ и $f_{xxxx} = \tilde{f}_{xxxx}$, запишем последнее неравенство в виде

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leq \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2q_0}T) (1 + \sigma \tilde{q}_0) \|q - \tilde{q}\|. \quad (22)$$

Функции $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$ принадлежат шару $B_T(q_0, \rho)$, поэтому для каждой из них выполняется неравенство (21). Отметим, что функции в правой части (22) при множителе $\|q - \tilde{q}\|$ монотонно возрастают с увеличением $\|q\|$, $\|\tilde{q}\|$ и T .

Следовательно, замена $\|q\|$ и $\|\tilde{q}\|$ в неравенстве (22) (в том числе в σ) на $\rho + q_{00}$ только усилит его. Таким образом, имеем

$$\|A[q](t) - A[\tilde{q}(t)]\| \leq \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T) (1 + \sigma(\rho + q_{00})) \|q - \tilde{q}\|.$$

Пусть T_2 – положительный корень уравнения

$$R_2(T) = \frac{a^2 T^2}{2g_0} \lambda_0 \operatorname{ch}(\sqrt{2(\rho + q_{00})}T)(1 + \sigma(\rho + q_{00})) = 1.$$

Тогда для $T \in [0, T_2]$ расстояние между функциями $A[q](t)$ и $A[\tilde{q}](t)$ в пространстве $C[0, T]$ не превышает расстояния между функциями $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$, умноженного на $R_2(T) < 1$. Следовательно, если выбрать $T^* = \min(T_1, T_2)$, то оператор A будет сжимающим в шаре $B_T(q_0, \rho)$. Следовательно, согласно теореме Банаха, оператор A имеет единственную неподвижную точку в шаре $B_T(q_0, \rho)$, т.е. существует единственное решение уравнения (20). Теорема доказана.

Пусть T – произвольное положительное фиксированное число. Рассмотрим множество $\Omega(\delta_0)$ ($\delta_0 > 0$ – некоторое фиксированное число) заданных функций f, φ, ψ, g , для которых выполнены все условия теоремы 1 и

$$\max\{\|f\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)}, \|\varphi\|_{C^8(\mathbb{R})}, \|\psi\|_{C^6(\mathbb{R})}, \|g\|_{C^2[0,T]}\} \leq \delta_0.$$

Через $Q(\delta_1)$ обозначим класс функций $q(t) \in C[0, T]$, удовлетворяющих неравенству $\|q\| \leq \delta_1$ с некоторым фиксированным положительным числом δ_1 .

Теорема 2. Пусть функции $f, \varphi, \psi, g, \tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{g} \in \Omega(\delta_0)$ и $q, \tilde{q} \in Q(\delta_1)$. Тогда для решения обратной задачи справедлива следующая оценка устойчивости:

$$\|q - \tilde{q}\| \leq c(\|f - \tilde{f}\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g - \tilde{g}\|_{C^2[0,T]}), \quad (23)$$

где постоянная c зависит только от T, δ_0 и δ_1 .

Доказательство. Используя (18), запишем уравнение для $\tilde{q}(t)$ и составим разность $q(t) - \tilde{q}(t)$. Оценивая это выражение с учётом неравенств (12) и (17), получаем

$$\begin{aligned} |q - \tilde{q}|(t) &\leq c_0(\|f - \tilde{f}\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g - \tilde{g}\|_{C^2[0,T]}) + \\ &+ c_1 \int_0^t |q - \tilde{q}|(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (24)$$

где c_0 и c_1 зависят от тех же констант, что и c . Из (24), используя неравенство Гронуолла, получаем неравенство

$$|q - \tilde{q}|(t) \leq c_0 \exp(c_1 T)(\|f - \tilde{f}\|_{C_{x,t}^{6,0}(D_T)} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^8(\mathbb{R})} + \|\psi - \tilde{\psi}\|_{C^6(\mathbb{R})} + \|g - \tilde{g}\|_{C^2[0,T]}), \quad t \in [0, T],$$

откуда следует оценка (23), если положить $c = c_0 \exp(c_1 T)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует теорема единственности для любого $T > 0$.

Теорема 3. Пусть функции q, f, φ, ψ, g и $\tilde{q}, \tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{g}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1, причём если $q = \tilde{q}, f = \tilde{f}, \varphi = \tilde{\varphi}, \psi = \tilde{\psi}, g = \tilde{g}$ для $(x, t) \in D_T$, то $q(t) = \tilde{q}(t), t > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-02-2023-939).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Strutt J., Baron Rayleigh. The Theory of Sound. London, 1877.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966.
3. Крылов А.Н. Вибрация судов. М., 2012.
4. Ascanelli A., Cicognani M., Colombini F. The global Cauchy problem for a vibrating beam equation // J. Differ. Equat. 2009. V. 47. P. 1440–1451.

5. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
6. *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
7. *Ватульян А.О., Васильев Л.В.* Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. № 4. С. 449–456.
8. *Ахтямов А.М., Ильязов М.А.* Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152–162.
9. *Ватульян А.М., Бурьян А.Ю., Осипов А.В.* Об идентификации переменной жёсткости при анализе поперечных колебаний балки // Вестн. Донского гос. техн. ун-та. 2010. Т. 10. № 6. С. 825–833.
10. *Loktionov A.P.* Inverse Cauchy problem for beams in building structures // Building and Reconstruction. 2022. V. 2. P. 13–25.
11. *Дурдиев У.Д.* Обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 37–44.
12. *Сабитов К.Б.* Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. Р. 364–374.
13. *Сабитов К.Б., Фадеева О.В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 1. С. 51–66.
14. *Marinov T.T., Vatsala A.S.* Inverse problem for coefficient identification in the Euler–Bernoulli equation // Comput. and Math. with Appl. 2008. V. 56. P. 400–410.
15. *Artur Maciag, Anna Pawinska.* Solution of the direct and inverse problems for beam // Comp. Appl. Math. 2016. V. 35. P. 187–201.
16. *Maciag A., Pawinska A.* Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the trefftz functions // J. of Theoretical and Appl. Mechanics. 2013. V. 51. № 3. P. 543–552.
17. *Guojin Tan, Jinghui Shan, Chunli Wu, Wensheng Wang.* Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // Adv. in Mech. Engin. 2017. V. 9. № 11. P. 1–17.
18. *Moaveni S., Hyde R.* Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // Inverse Problems in Science and Engineering. 2016. V. 24. № 6. P. 990–1010.
19. *Jin-De Chang, Bao-Zhu Guo.* Identification of variable spacial coefficients for a beam equation from boundary measurements // Automatica. 2007. V. 43. P. 732–737.
20. *Cheng-Hung Huang, Chih-Chun Shih.* An inverse problem in estimating simultaneously the time-dependent applied force and moment of an Euler–Bernoulli beam // CMES. 2007. V. 21. № 3. P. 239–254.
21. *Hiroaki Katori.* Inverse problems for an Euler–Bernoulli beam: identification of bending rigidity and external loads // World J. of Mechanics. 2018. V. 8. P. 192–199.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 4. С. 48–68.
23. *Доев В.С.* Поперечные колебания балок. М., 2016.
24. *Baysal O., Hasanov A.* Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90.
25. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
26. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 553–572.
27. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23. № 2. С. 63–80.
28. *Durdiev D., Rahmonov A.* A multidimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation // Turkish J. of Math. 2022. V. 46. № 6. P. 2250–2263.
29. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001. Т. 4. № 3. С. 259–268.
30. *Карчевский А.Л.* Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20. № 4. С. 35–43.
31. *Дурдиев У.Д.* Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189.

32. Дурдиев У.Д. Задача об определении коэффициента реакции в дробном уравнении диффузии // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1220–1229.
33. Дурдиев У.Д. Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 4. С. 26–32.
34. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian J. of Math. and Comput. Appl. 2019. V. 7. № 2. P. 4–19.
35. Durdiev U.D., Totieva Zh.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Methods in the Appl. Sci. 2019. V. 42. № 18. P. 7440–7451.
36. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Methods in the Appl. Sci. 2022. V. 45. № 14. P. 8374–8388.
37. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // Ukr. Math. J. 2022. V. 73. № 11. P. 1723–1740.

Бухарский государственный университет,
Узбекистан,
Бухарское отделение Института математики
имени В.И. Романовского, Узбекистан

Поступила в редакцию 08.12.2022 г.
После доработки 27.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958+517.984.5

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА
В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СМЕСИ
ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© 2023 г. Д. А. Загора

Исследуется задача о нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких сжимаемых жидкостей, заполняющей ограниченную область трёхмерного пространства с бесконечно гладкой границей. Доказано, что существенный спектр задачи представляет собой конечный набор отрезков, расположенных на действительной оси. Оставшийся спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и расположен на действительной оси, за исключением, быть может, конечного числа комплексносопряжённых собственных значений. Спектр задачи содержит подпоследовательность собственных значений с предельной точкой в бесконечности и степенным асимптотическим распределением.

DOI: 10.31857/S0374064123040040, EDN: AMZKDH

1. Постановка задачи и формулировка основного утверждения. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью $n \geq 2$ вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится внутри области Ω . Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный из Ω .

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях смеси. Разыскивая решения соответствующей линеаризованной однородной задачи, зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, где λ – спектральный параметр, придём к следующей системе уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^n L_{ij} \mathbf{u}_j + \nabla \left(\frac{c_i^{1/2} \rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}} \right) - \frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) &= \lambda \mathbf{u}_i, \quad x \in \Omega, \\ \frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}} \operatorname{div} (\rho_{i0} \mathbf{u}_i) &= \lambda \rho_i, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(x)$ ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$) – поле скоростей i -й компоненты смеси, $\rho_i = \rho_i(x)$ – симметризованная динамическая плотность, $\rho_{i0} = \rho_{i0}(x_3) := \rho_{i0}(0) \exp(-g c_i^{-1} x_3)$ – плотность i -й компоненты смеси в состоянии равновесия, g – ускорение свободного падения, $c_i > 0$, $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ – заданные физические константы, $L_{ij} := -\mu_{ij} \Delta - (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \nabla \operatorname{div}$. Матрицы вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$ подчинены условиям

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} \geq 0. \quad (2)$$

Математическое исследование моделей движения многокомпонентных сред началось относительно недавно. Представление о различных моделях, а также возникающих при этом математических задачах, можно получить из монографий [1] и [2], а также обзора [3]. В работах [4, 5] получены первые результаты по слабой разрешимости нелинейной модели многокомпонентной смеси, заполняющей всё пространство $\mathbb{R}^3$. В следующей работе тех же авторов [6] изучается вопрос единственности решения в случае отсутствия внешних сил и взаимодействия между компонентами смеси. Значимые результаты по разрешимости нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область, получены в [7]. Система (1) следует из эволюционной задачи, возникающей при линеаризации нелинейной модели из [7] относительно состояния покоя.

Далее система (1) будет трактоваться в виде следующей спектральной задачи для замкнутого оператора $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}. \quad (3)$$

Определение 1. Существенным спектром оператора $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$, состоящее из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым.

Определим матрицы $\Phi := \text{diag}(c_1\rho_{10}(x_3), \dots, c_n\rho_{n0}(x_3))$ и $\mathbf{R} := \text{diag}(\rho_{10}(x_3), \dots, \rho_{n0}(x_3))$.

Основным утверждением работы является следующая

Теорема. Спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ расположен на действительной положительной полуоси, за исключением, быть может, конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \Lambda_E \cup \Lambda_L$, где

$$\Lambda_E := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \Phi) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}\},$$

$$\Lambda_L := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda(3\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \Phi) = 0, \quad x \in \partial\Omega\}.$$

Множество $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}) = c^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$c := \frac{1}{6\pi^2} \int_{\Omega} (\text{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2} + 2 \text{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2}) d\Omega. \quad (5)$$

Замечание 1. Из условий (2) следует, что $2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda} > 0$. Отсюда и из условия $\Phi > 0$ очевидно, что множество Λ_E представляет собой объединение n отрезков, расположенных на положительной полуоси. Таким же образом устроено и множество Λ_L .

В случае $n = 1$ с некоторыми изменениями спектральная задача (1) изучена в [8]. При этом исследование опиралось на результаты статьи [9], в которой бесконечная дифференцируемость границы $\partial\Omega$ существенна. В настоящей работе следуем тому же плану. Отметим, что в [10] с использованием результатов статьи [11] рассмотрен существенный спектр линейаризованного оператора Навье–Стокса в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, с C^2 -гладкой границей. При этом не применялась техника псевдодифференциальных операторов.

2. Операторная формулировка спектральной задачи. Введём векторное гильбертово пространство с весом $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})$, $j = \overline{1, n}$, со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})} := \int_{\Omega} \rho_{j0}(x_3) \mathbf{u}(x) \cdot \overline{\mathbf{v}(x)} d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})}^2 = \int_{\Omega} \rho_{j0}(x_3) |\mathbf{u}(x)|^2 d\Omega,$$

а также подпространство гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ единичной коразмерности:

$$L_{2, \rho_{j0}}(\Omega) := \{f \in L_2(\Omega) : (f, \rho_{j0}^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Введём основное гильбертово пространство $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ с естественно определённым на нём скалярным произведением и соответствующей нормой, где

$$\mathcal{H}_1 := \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0}) = \{\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^T : \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0}), \quad j = \overline{1, n}\},$$

$$\mathcal{H}_2 := \bigoplus_{j=1}^n L_{2, \rho_{j0}}(\Omega) = \{\rho := (\rho_1, \dots, \rho_n)^T : \rho_j \in L_{2, \rho_{j0}}(\Omega), \quad j = \overline{1, n}\}.$$

Здесь и далее знак T означает операцию транспонирования.

Через $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ будем обозначать векторные и скалярные пространства Соболева со стандартными скалярными произведениями и нормами, а $\mathbf{L}_2(\Omega) \equiv \mathbf{L}_2(\Omega, 1)$.

Далее через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ и $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1; \mathcal{H}_2)$ обозначены алгебра линейных ограниченных операторов и класс линейных компактных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}) := \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}; \mathcal{H})$.

Введём оператор $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$L\mathbf{u} := \left(\frac{1}{\rho_{10}} \sum_{j=1}^n L_{1j} \mathbf{u}_j, \dots, \frac{1}{\rho_{n0}} \sum_{j=1}^n L_{nj} \mathbf{u}_j \right)^T, \quad \mathcal{D}(L) := \bigoplus_{j=1}^n \{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) : \mathbf{u}_j = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega \}. \quad (6)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2). Тогда оператор L самосопряжён и положительно определён в $\mathcal{H}_1$, $L^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Энергетическое пространство $\mathcal{H}_L$ оператора L находится по формуле

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{D}(L^{1/2}) = \bigoplus_{j=1}^n \{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u}_j = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega \}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_L \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму

$$L_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} \nabla u_j^{(l)} \cdot \overline{\nabla v_i^{(l)}} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_j \overline{\operatorname{div} \mathbf{v}_i} d\Omega, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_L.$$

Из (2) следует, что $\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda} > 0$. Пусть $\|\mathbf{M}\|$ и $\gamma(\mathbf{M})$ – норма и нижняя грань матрицы $\mathbf{M}$ соответственно. Используя неравенство Фридрихса (см. [12, гл. 18, теорема 18.1]), найдём

$$L_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{\gamma(\mathbf{M})}{2} \min\{1, C_1^{-1}\} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^3 \int_{\Omega} (|\nabla u_j^{(l)}|^2 + |u_j^{(l)}|^2) d\Omega = \frac{\gamma(\mathbf{M})}{2} \min\{1, C_1^{-1}\} \|\mathbf{u}\|_{\bigoplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2,$$

$$L_0(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \dots \leq \max\{\|\mathbf{M}\|, 3\|\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}\|\} \|\mathbf{u}\|_{\bigoplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^1(\Omega)}^2 \quad \text{для любого } \mathbf{u} \in \mathcal{H}_L.$$

Здесь во второй строке опущен ряд простых оценок. Отсюда следует, что (плотно определённая) квадратичная форма $L_0(\cdot, \cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [13, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [13, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L_0 такой, что

$$L_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (L_0 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \quad \text{для любых } \mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{H}_L,$$

$$\mathcal{D}(L_0) = \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}_L : \text{существует } \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1 \text{ такой, что } L_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \text{ для любого } \mathbf{v} \in \mathcal{H}_L \}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_L$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω , тогда с использованием тождества Бэтти найдём, что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_L$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} (L_0 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} &= L_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} L_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i} d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} \sum_{l=1}^3 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial \mathbf{n}} \overline{v_i^{(l)}} dS + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n (\mu_{ij} + \lambda_{ij}) \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}_j \cdot \overline{(\mathbf{v}_i \mathbf{n})} dS = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} L_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i} d\Omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^n L_{ij} \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i \right)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})}, \end{aligned}$$

а значит, $L_0 \mathbf{u} = L \mathbf{u}$ (см. (6)), поскольку $\mathcal{H}_L$ плотно в $\mathcal{H}_1$. Далее, элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0)$ – это в точности обобщённое решение (см. [12, гл. 11, определение 11.1]) краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^n L_{ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{1, n},$$

при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})$. Из теоремы об априорных оценках (см., например, [14, теорема 2.2]) следует, что $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{D}(L)$. Тогда $L_0 = L$. Компактность оператора L^{-1} следует из компактности вложения $\mathcal{H}_L$ в $\mathcal{H}_1$. Лемма доказана.

Введём оператор $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ по закону

$$T\mathbf{u} := \left(-\frac{1}{\rho_{10}} \sum_{j=1}^n a_{1j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1), \dots, -\frac{1}{\rho_{n0}} \sum_{j=1}^n a_{nj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_n) \right)^T, \quad \mathcal{D}(T) := \mathcal{H}_1. \quad (7)$$

Лемма 2. Оператор T ограничен, самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Напомним, что $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Отсюда имеем неравенства

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 &= \sum_{i=1}^n \left\| -\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})}^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \right\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}) \right)^2 \leq n \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 (\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)})^2 \leq \\ &\leq 4n^2 \max_{i,j} \{a_{ij}^2\} \sum_{j=1}^n \|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \leq \frac{4n^2 \max_{i,j} \{a_{ij}^2\}}{\min_j \min_{x \in \Omega} \rho_{j0}(x_3)} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 \quad \text{для любого } \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1, \end{aligned}$$

т.е. оператор T ограничен в $\mathcal{H}_1$: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Далее для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned} (T\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = - \sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \\ &= - \sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{j<i} a_{ji}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \sum_{i>j} a_{ij} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

т.е. оператор T самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. Лемма доказана.

Введём оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ по следующему закону:

$$\begin{aligned} B\mathbf{u} &:= \left(-\frac{c_1^{1/2}}{\rho_{10}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{10}\mathbf{u}_1), \dots, -\frac{c_n^{1/2}}{\rho_{n0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{n0}\mathbf{u}_n) \right)^T, \\ \mathcal{D}(B) &:= \bigoplus_{j=1}^n \{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j) \in \mathbf{L}_2(\Omega), \quad \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial\Omega \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Лемма 3. Сопряжённый оператор $B^* : \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ имеет вид

$$B^*\rho = \left(\nabla \left(\frac{c_1^{1/2} \rho_1}{\rho_{10}^{1/2}} \right), \dots, \nabla \left(\frac{c_n^{1/2} \rho_n}{\rho_{n0}^{1/2}} \right) \right)^T, \quad \mathcal{D}(B^*) = \bigoplus_{j=1}^n \{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \}.$$

Доказательство. По определению сопряжённого оператора имеем

$\mathcal{D}(B^*) = \{ \rho \in \mathcal{H}_2 : \text{существует } \eta \in \mathcal{H}_2 \text{ такой, что } (B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, \eta)_{\mathcal{H}_1} \text{ для любых } \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B) \}$,
а значит, $\rho \in \bigoplus_{j=1}^n \{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \} = \mathcal{D}(B^*)$. Отсюда теперь следует, что

$$\begin{aligned} (B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} &= \sum_{j=1}^n \left(-\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j), \rho_j \right)_{L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)} = - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{c_j^{1/2} \overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j) d\Omega = \\ &= - \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} c_j^{1/2} \rho_{j0}^{1/2} \overline{\rho_j} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}) dS + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \rho_{j0} \mathbf{u}_j \nabla \left(\frac{c_j^{1/2} \overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \right) d\Omega = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{u}_j, \nabla \left(\frac{c_j^{1/2} \rho_j}{\rho_{j0}^{1/2}} \right) \right)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{j0})} = (\mathbf{u}, B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} \quad \text{для любого } \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B), \quad \rho \in \mathcal{D}(B^*). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введём оператор $A := L + T$ (см. (6), (7)). Из лемм 1, 2 и определения оператора B (см. (8)) следует, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(L^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Оператор B замыкаем, так как оператор B^* плотно определён (см. [13, гл. V, § 3, п. 1] и лемму 3). Следовательно, операторы $BA^{-1/2}$, BA^{-1} ограничено действуют из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$:

$$Q := BA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad BA^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2). \quad (9)$$

Лемма 4. Оператор $A^{-1/2}B^*$ замыкаем, $\overline{A^{-1/2}B^*} = Q^*$, $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$. Аналогичные утверждения верны и для оператора $A^{-1}B^*$.

Доказательство. Учитывая $Q^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, для любых $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$ имеем

$$(Q\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, A^{-1/2}B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} = (\mathbf{u}, Q^*\rho)_{\mathcal{H}_1}.$$

Отсюда следует, что $Q^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}B^*$, оператор $A^{-1/2}B^*$ ограничен на $\mathcal{D}(B^*)$ и расширяется по непрерывности (можно считать, что замыкается) до оператора Q^* . Лемма доказана.

Наша цель – записать максимальную L_2 -реализацию оператора системы (1) в виде операторной блок-матрицы с использованием введённых в (6)–(9) операторов. Сужение максимальной L_2 -реализации оператора системы (1) на $\mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ с использованием введённых операторов можно записать в виде

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}. \quad (10)$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_0}$ есть замкнутый максимальный аккретивный оператор, т.е. других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_0$ нет. Этот оператор $\overline{\mathcal{A}_0}$ и будет максимальной L_2 -реализацией оператора системы (1). Подобные построения для операторных блоков проводились в работах [11, 15, 16] и др. Тем не менее приведём полное доказательство.

Лемма 5. Оператор $\mathcal{A}_0$ замыкаем, и $\overline{\mathcal{A}_0} =: \mathcal{A}$ – замкнутый максимальный аккретивный оператор. Оператор $\mathcal{A}$ представим в следующем виде:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q^* \\ -Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -QA^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & QQ^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1/2}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{\xi = (\mathbf{u}, \rho)^T \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A)\}. \quad (11)$$

Доказательство. 1. Оператор $\mathcal{A}_0$ (см. (10)), очевидно, плотно определён. Далее, легко проверить, что для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ будет выполнено $\operatorname{Re}(\mathcal{A}_0\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq 0$, т.е. оператор $\mathcal{A}_0$ аккретивен, а значит, допускает замыкание (см. [17, гл. I, § 4, п. 2]).

Найдём замыкание оператора $\mathcal{A}_0$, используя сначала включение $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть

$$\xi_n := (\mathbf{u}_n, \rho_n)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \quad \xi_n \rightarrow \xi := (\mathbf{u}, \rho)^T, \quad \mathcal{A}_0\xi_n \rightarrow \xi_0 := (\mathbf{u}_0, \rho_0)^T. \quad (12)$$

Отсюда имеем $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n \in \mathcal{D}(A)$ и $\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n = \mathbf{u}_n + (BA^{-1})^*\rho_n \rightarrow \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho$, $A(\mathbf{u}_n + A^{-1}B^*\rho_n) \rightarrow \mathbf{u}_0$. Оператор A самосопряжён, а значит, замкнут, поэтому имеем включение $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)$ и равенство $A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) = \mathbf{u}_0$.

Далее, из (12) следует, что $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$, $-B\mathbf{u}_n \rightarrow \rho_0$. Но оператор B , как отмечено выше, замыкаем, а значит, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ и $-\overline{B}\mathbf{u} = \rho_0$.

Таким образом, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ и $\overline{\mathcal{A}_0}\xi = \xi_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho) \\ -\overline{B}\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \{\xi = (\mathbf{u}, \rho)^T \in \mathcal{H} : \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B}), \mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ (см. лемму 1 и (8)). Отсюда следует равенство $(BA^{-1})^* = (BA^{-1/2}A^{-1/2})^* = A^{-1/2}(BA^{-1/2})^* = A^{-1/2}Q^*$ (см. (9)). Теперь из включения $\mathbf{u} + (BA^{-1})^*\rho = \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A^{1/2})$ линеал, следует,

что $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\overline{B})$. Таким образом, условие $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0})$ можно опустить, а выражение $\overline{B}\mathbf{u}$ записать в виде $\overline{B}\mathbf{u} = (\overline{B}A^{-1/2})A^{1/2}\mathbf{u} = QA^{1/2}\mathbf{u}$. Из проведённых рассуждений теперь получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_0} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho) \\ -QA^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \{\xi = (\mathbf{u}, \rho)^T \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \mathbf{u} + A^{-1/2}Q^*\rho \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (11) является естественной областью определения для каждой факторизации, обе факторизации определяют один и тот же оператор $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_0}$.

2. Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}$ максимален. Аккретивность оператора $\mathcal{A}$ следует из аккретивности $\mathcal{A}_0$, однако может быть проверена и непосредственно. Действительно, если $\xi = (\mathbf{u}, \rho)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Отсюда и из факторизации (11) оператора $\mathcal{A}$ с симметричными крайними сомножителями найдём, что $\operatorname{Re}(\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 \geq 0$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Для доказательства максимальности оператора $\mathcal{A}$ достаточно установить (см. [17, гл. I, § 4, п. 2, теорема 4.3]), что $\rho(\mathcal{A}) \cap \{\lambda < 0\} \neq \emptyset$, где $\rho(\mathcal{A})$ – резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ непосредственно проверяется (см. (15)), что

$$\mathcal{A} - \lambda I = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Введём оператор-функцию $L(\lambda) := I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q$. Очевидно, что при $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L(\lambda)$ самосопряжён и положительно определён, а значит, существует, ограничен и задан на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $L^{-1}(\lambda)$: $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Из последней факторизации при $\lambda < 0$ тогда найдём, что существует

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} &= \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ -\lambda^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1}Q^* \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & \lambda^{-1}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)Q^* \\ -\lambda^{-1}QL^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -\lambda^{-1} - \lambda^{-2}QL^{-1}(\lambda)Q^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \\ L(\lambda) &= I - \lambda A^{-1} - \lambda^{-1}Q^*Q, \end{aligned} \quad (14)$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Лемма доказана.

Таким образом, спектральную задачу (1) можно записать в виде (3) с замкнутым максимальным аккретивным оператором $\mathcal{A}$.

Замечание 2. Формула (14) при всех $\lambda \notin \sigma(L(\lambda)) \cup \{0\}$, где $\sigma(L(\lambda))$ – спектр оператор-функции $L(\lambda)$, даёт представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$. Из (14), в частности, вытекает, что $\sigma(\mathcal{A}) \setminus \{0\} \subset \sigma(L(\lambda))$. Более того, из факторизации (13) и теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см. [18, гл. XVII, § 3, теорема 3.1]) следует, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) \subset \sigma_{\text{ess}}(L(\lambda))$. Можно доказать, что $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{ess}}(L(\lambda))$.

Замечание 3. Имеют место факторизации Шура–Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Пусть

$$A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k), \quad k, l = 1, 2, \quad A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2), \quad D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}.$$

Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \quad (16)$$

3. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведём определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [14; 19; 20, § 1; 21]), необходимые для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathfrak{L}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad D := (D_1, D_2, D_3) &:= \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, -i\frac{\partial}{\partial x_2}, -i\frac{\partial}{\partial x_3} \right), \\ \mathbf{v}(x) &:= (v_1(x), \dots, v_m(x))^T, \quad \mathbf{f}(x) := (f_1(x), \dots, f_m(x))^T. \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{L}(x, \xi)$, $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, – полиномиальная матрица, получаемая из (17) заменой символа D на ξ . Будем считать далее, что (17) определяет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [19, с. 375], а также [14]).

Определение 2 (см. [19, с. 376]). Оператор $\mathfrak{L}(x, D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi \det \mathfrak{L}(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi \det \mathfrak{L}(x, \xi) = \det \pi \mathfrak{L}(x, \xi)$, где $\pi \mathfrak{L}$ – главная часть матрицы $\mathfrak{L}$. О выделении главной части системы Дуглиса–Ниренберга см. в [19, с. 377].

Возьмём произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$ и введём, согласно [20, 21], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задаётся бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2, 3$, параметров y_1, y_2 , которые выбираются так, что $y_i = \text{const}$ есть линии кривизны. Или в векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1, y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введём координаты y_1, y_2, y_3 , где y_3 – расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x = z(y') + y_3 N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задаётся так, чтобы направление векторного произведения $\partial z / \partial y_1 \times \partial z / \partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$, а начало координат находилось в точке z_0 . Пусть $E_i(y')$, $i = 1, 2$, – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $(\partial z / \partial y_i)(\partial z / \partial y_j) = E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Рассмотрим теперь систему краевых условий

$$\mathfrak{B}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (18)$$

где $\mathfrak{B}(x, D)$ – матрица размера $r \times m$, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Запишем операторы краевой задачи (17), (18) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi \mathfrak{L}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \pi \mathfrak{L}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\right), \quad \pi \mathfrak{B}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \pi \mathfrak{B}\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\right).$$

Определение 3 (см. [19, с. 380], а также [20, с. 12]). Краевая задача (17), (18) называется *эллиптической*, если выполнено определение 2 и условие Шапиро–Лопатинского:

$$\text{rank} \int_{\gamma+} \pi \mathfrak{B}(0, \xi', \xi_3) (\pi \mathfrak{L}(0, \xi', \xi_3))^{-1} (I_m, \xi_3 I_m) d\xi_3 = r$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Здесь I_m – единичная матрица в $\mathbb{R}^m$, а через $(I_m, \xi_3 I_m)$ обозначена составная матрица размера $m \times 2m$, γ_+ – спрямляемый контур в верхней ξ_3 -полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3 -корни уравнения $\det \pi \mathfrak{L}(0, \xi', \xi_3) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро–Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения.

Лемма 6 (см. [20, с. 14]). В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^2 (1 - K_j y_3)^{-1} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_j} + N_i \frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j , $j = 1, 2$, – главные кривизны поверхности $\partial\Omega$.

Введём некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^2 E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_l}{\partial y_j} \xi_j, \quad l = 1, 2, 3, \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \quad (19)$$

тогда $\beta^T N = 0$, $N^T \beta = 0$, $N^T N = 1$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi|^2 := \beta^T \beta = E_1^{-1} \xi_1^2 + E_2^{-1} \xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение:

$$|\xi|^2 := \alpha^T \alpha = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

Лемма 7 (см. [20, с. 15]). Во введённой выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов:

$$\sigma_0\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\operatorname{div}) = i\alpha^T, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -(|\xi'|^2 + \xi_3^2).$$

Лемма 8 (см. [20, с. 16]). Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3 -полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} &= \frac{\pi}{|\xi'|}, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 d\xi_3}{|\xi|^2} = \pi i, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 d\xi_3}{|\xi|^2} = -\pi |\xi'|, \quad \int_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|^3}, \\ \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3 d\xi_3}{|\xi|^4} &= 0, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2 d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|}, \quad \int_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3 d\xi_3}{|\xi|^4} = \pi i, \quad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2. \end{aligned}$$

4. О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$. Напомним (см. определение 1), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}$ не является фредгольмовым. Можно проверить, что система из (1) составляет невырожденную систему Дуглиса–Ниренберга (см. [19, с. 375], а также [14]). Из работы [9] следует, что оператор $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Выделим из системы и краевого условия в (1) главные части:

$$\sum_{j=1}^n L_{ij} \mathbf{u}_j + c_i^{1/2} \rho_{i0}^{1/2} \nabla \rho_i = \mathbf{0}, \quad c_i^{1/2} \rho_{i0}^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{u}_i - \lambda \rho_i = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(x, D)$ матричный дифференциальный оператор системы из (1) – это матрица размера $4n \times 4n$, а через $\mathfrak{B}(x, D) := (I_{3n}, 0_{3n \times n})$ матрицу, отвечающую граничным условиям из (1) – это матрица размера $3n \times 4n$, $0_{3n \times n}$ – нулевая матрица соответствующего размера. В этом случае главная часть $\pi \mathfrak{L}_\lambda(x, D)$ оператора $\mathfrak{L}_\lambda(x, D)$ определяется системой (20), а $\pi \mathfrak{B}(x, D) = \mathfrak{B}(x, D)$.

Таким образом, существенный спектр исследуемой задачи будет состоять из точек $\lambda \in \mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевой задачи (20).

Лемма 9. *Дифференциальный оператор $\mathfrak{L}_\lambda(x, D)$ эллиптивен в замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ при $\lambda \notin \Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}\}.$$

Доказательство. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathfrak{L}_\lambda(x, D)) = \pi \mathfrak{L}_\lambda(x, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, системы (1), определяемый системой (20):

$$\pi \mathfrak{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^T & -\lambda I_n \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Здесь и далее знак $\otimes$ означает тензорное (кронекеровское) произведение матриц. Основные свойства тензорного произведения можно найти в [22, гл. 8, п. 8.2]. Матрицы вязкостей и плотностей имеют вид $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Phi} = \text{diag}(c_1 \rho_{10}(x_3), \dots, c_n \rho_{n0}(x_3))$.

Обозначим

$$\pi \mathfrak{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^T & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (22)$$

и применим факторизацию (16) при $E_1 = \mathbb{C}^{3n}$, $E_2 = \mathbb{C}^n$. С учётом $\xi^T \xi = |\xi|^2$ непосредственными вычислениями проверяется (см. (2) и замечание 1), что

$$A_{11}^{-1} = (\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T)^{-1} = \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \xi \xi^T).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} &= -\lambda I_n - (\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^T) (\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T)^{-1} (\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi) = \\ &= -\lambda I_n - (\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^T) \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \xi \xi^T) (\mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi) = \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^{1/2} - \mathbf{\Phi}^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n = \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2} (I_n - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n = \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} ((2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n = \\ &= \mathbf{\Phi}^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Phi}^{1/2} - \lambda I_n = \mathbf{\Phi}^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \mathbf{\Phi}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Через $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1} \xi, \mathbf{a}^\perp, \mathbf{b}^\perp)$ обозначим матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi|^{-1} \xi$, $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ($|\mathbf{a}^\perp| = |\mathbf{b}^\perp| = 1$), где $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ортогональны ξ и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\Gamma_\xi^T \Gamma_\xi = I_3, \quad \Gamma_\xi^T \xi = (|\xi|, 0, 0)^T =: |\xi| \mathbf{e}_1, \quad \Gamma_\xi^T \xi \xi^T \Gamma_\xi = \text{diag}(|\xi|^2, 0, 0) =: |\xi|^2 P_1. \quad (24)$$

Обозначим $S_\xi := I_n \otimes \Gamma_\xi$, тогда $S_\xi^T S_\xi = I_n \otimes I_3 = I_{3n}$. Из (16), (22)–(24) и теоремы Лапласа о вычислении определителей теперь найдём (см. определение 2), что

$$\pi \det \mathfrak{L}_\lambda(x, \xi) = \det \pi \mathfrak{L}_\lambda(x, \xi) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T & 0_{3n \times n} \\ 0_{n \times 3n} & \Phi^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \Phi^{-1/2} \end{pmatrix} = \\
&= \det S_\xi^T (\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T) S_\xi \det (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \det (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) = \\
&= \det (\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 \Gamma_\xi^T \Gamma_\xi + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \Gamma_\xi^T \xi \xi^T \Gamma_\xi) \det (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \det (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) = \\
&= \det (\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes |\xi|^2 P_1) \det (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \det (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) = \\
&= (|\xi|^2)^{3n} \det (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \det^2 \mathbf{M} \det (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \det (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) = \\
&= (-1)^n |\xi|^{6n} \det^2 \mathbf{M} \det (\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \Phi) \neq 0
\end{aligned} \tag{25}$$

для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_E$. Лемма доказана.

Лемма 10. Задача (1) эллиптически при $\lambda \notin \Lambda_E \cup \Lambda_L$, где

$$\Lambda_L = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det (\lambda(3\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \Phi) = 0, \quad x \in \partial\Omega\}.$$

Доказательство. Прежде всего будем считать, что $\lambda \notin \Lambda_E$, поскольку по лемме 9 на множестве Λ_E оператор $\mathfrak{L}_\lambda(x, D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (1) не является эллиптической (см. определение 3). Дальнейшее доказательство разобьём на несколько шагов.

1. Зафиксируем $z_0 \in \partial\Omega$ и введём в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано в п. 3. Запишем операторную матрицу системы (1) в локальной системе координат и выделим из неё главную часть, которая представляет собой операторную матрицу системы (20), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней системы имеет вид (21) с заменой ξ на α (см. (19) и лемму 7). При этом $\det \pi \mathfrak{L}_\lambda(0, \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (25) с заменой $|\xi|^2$ на $\alpha^T \alpha = \xi'^2 + \xi_3^2$. Уравнение $\det \pi \mathfrak{L}_\lambda(0, \xi', \xi_3) = 0$ имеет $3n$ -кратные ξ_3 -корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$ (см. (25)).

2. Найдём выражение для подынтегральной матрицы в определении 3. Обозначим

$$\pi \mathfrak{L}_\lambda(0, \xi', \xi_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \alpha \alpha^T & \Phi^{1/2} \otimes i\alpha \\ \Phi^{1/2} \otimes i\alpha^T & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{26}$$

и найдём матрицу, обратную к $\pi \mathfrak{L}_\lambda(0, \xi', \xi_3)$, с помощью факторизации (16) при $E_1 = \mathbb{C}^{3n}$, $E_2 = \mathbb{C}^n$. С учётом $\alpha^T \alpha = (\beta^T + \xi_3 N^T)(\beta + \xi_3 N) = \beta^T \beta + \xi_3^2 = \xi'^2 + \xi_3^2 = |\xi|^2$ (см. (19)) непосредственными вычислениями проверяется (см. (2) и замечание 1), что

$$\begin{aligned}
A_{11}^{-1} &= (\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \alpha \alpha^T)^{-1} = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha \alpha^T).
\end{aligned} \tag{27}$$

Отсюда следуют (см. аналогичные вычисления в (23)) равенства

$$\begin{aligned}
D_2^{-1} &= (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} = (\Phi^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \Phi^{-1/2})^{-1} = \\
&= \Phi^{1/2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \Phi^{-1/2} \otimes I_1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Из (26)–(28) имеем

$$\begin{aligned}
&A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} D_2^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} = \\
&= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} (\Phi^{1/2} \otimes i\alpha) \Phi^{1/2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \Phi^{-1/2} \otimes I_1 (\Phi^{1/2} \otimes i\alpha^T) A_{11}^{-1} = \\
&= A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} \Phi (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \alpha \alpha^T \times \\
&\times \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha \alpha^T) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} \frac{1}{|\xi|^2} \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \otimes \alpha\alpha^T = \\
&= A_{11}^{-1} - \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha\alpha^T) \frac{1}{|\xi|^2} \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \otimes \alpha\alpha^T = \\
&= A_{11}^{-1} - \frac{1}{|\xi|^4} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \otimes \alpha\alpha^T = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha\alpha^T) - \\
&\quad - \frac{1}{|\xi|^4} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \otimes \alpha\alpha^T = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} ((\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} + \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1}) \otimes \alpha\alpha^T) = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} ((\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} + \\
&\quad + (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) + \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1}) \otimes \alpha\alpha^T) = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} ((\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} + I_n + \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1}) \otimes \alpha\alpha^T) = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (\mathbf{M}^{-1} + \lambda(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1}) \otimes \alpha\alpha^T) = \\
&= \frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (\Phi - \lambda(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha\alpha^T), \quad (29) \\
&-A_{11} A_{12} D_2^{-1} = -\frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha\alpha^T) (\Phi^{1/2} \otimes i\alpha) \times \\
&\quad \times \Phi^{1/2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \Phi^{-1/2} \otimes I_1 = \\
&= -\frac{i}{|\xi|^2} (\mathbf{M}^{-1} - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \mathbf{M}^{-1}) \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \Phi^{-1/2} \otimes \alpha = \\
&= -\frac{i}{|\xi|^2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} \Phi(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \Phi^{-1/2} \otimes \alpha = \\
&= -\frac{i}{|\xi|^2} (\Phi^{1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})) \Phi^{-1} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \otimes \alpha = \\
&= -\frac{i}{|\xi|^2} (\Phi^{1/2} - \lambda \Phi^{-1/2} (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \otimes \alpha = -\frac{i}{|\xi|^2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}))^{-1} \Phi^{1/2} \otimes \alpha. \quad (30)
\end{aligned}$$

Из определения 3 с учётом представления (26), факторизации (16) и формул (29), (30) теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (1) требуется показать, что ранг следующей матрицы равен $3n$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_+} \pi \mathfrak{B}(0, \xi', \xi_3) (\pi \mathfrak{L}_\lambda(0, \xi', \xi_3))^{-1} (I_{4n}, \xi_3 I_{4n}) d\xi_3 = \\
&= \int_{\gamma_+} (I_{3n}, 0_{3n \times n}) \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} D_2^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11} A_{12} D_2^{-1} \\ *_{n \times 3n} & *_{n \times n} \end{pmatrix} (I_{4n}, \xi_3 I_{4n}) d\xi_3 =
\end{aligned}$$

$$= \int_{\gamma_+} \left(\frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{A}))^{-1} (\Phi - \lambda(\mathbf{M} + \mathbf{A})) \mathbf{M}^{-1} \otimes \alpha \alpha^T), \right. \\ \left. - \frac{i}{|\xi|^2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{A}))^{-1} \Phi^{1/2} \otimes \alpha \right) (I_{4n}, \xi_3 I_{4n}) d\xi_3. \quad (31)$$

Здесь γ_+ – спрямляемый контур в верхней ξ_3 -полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3 = i|\xi'|$, а символами $*_{n \times 3n}$, $*_{n \times n}$ обозначены несущественные для вычислений матрицы соответствующих размеров.

3. Проведём вспомогательные вычисления. Пусть $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ – матрицы размера $n \times n$. Из (19) следует, что $\alpha \alpha^T = (\beta + \xi_3 N)(\beta^T + \xi_3 N^T) = \beta \beta^T + \xi_3(\beta N^T + N \beta^T) + \xi_3^2 N N^T$. Используя формулы из леммы 8, теперь вычислим

$$\mathcal{M} := \int_{\gamma_+} \left(\frac{1}{|\xi|^4} (\mathbf{N} \otimes |\xi|^2 I_3 + \mathbf{P} \otimes \alpha \alpha^T), \frac{1}{|\xi|^2} \mathbf{C} \otimes \alpha \right) (I_{4n}, \xi_3 I_{4n}) d\xi_3 = \\ = \int_{\gamma_+} \left(\mathbf{N} \otimes \frac{1}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \otimes \frac{1}{|\xi|^4} \alpha \alpha^T, \mathbf{C} \otimes \frac{1}{|\xi|^2} \alpha, \mathbf{N} \otimes \frac{\xi_3}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \otimes \frac{\xi_3}{|\xi|^4} \alpha \alpha^T, \mathbf{C} \otimes \frac{\xi_3}{|\xi|^2} \alpha \right) d\xi_3 = \\ = \int_{\gamma_+} \left(\mathbf{N} \otimes \frac{1}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \otimes \left[\frac{1}{|\xi|^4} \beta \beta^T + \frac{\xi_3}{|\xi|^4} (\beta N^T + N \beta^T) + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4} N N^T \right], \mathbf{C} \otimes \left[\frac{\xi_3}{|\xi|^2} \beta + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} N \right], \right. \\ \left. \mathbf{N} \otimes \frac{\xi_3}{|\xi|^2} I_3 + \mathbf{P} \otimes \left[\frac{\xi_3}{|\xi|^4} \beta \beta^T + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4} (\beta N^T + N \beta^T) + \frac{\xi_3^3}{|\xi|^4} N N^T \right], \mathbf{C} \otimes \left[\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2} \beta + \frac{\xi_3^3}{|\xi|^2} N \right] \right) d\xi_3 = \\ = \left(\mathbf{N} \otimes \frac{\pi}{|\xi'|} I_3 + \mathbf{P} \otimes \left[\frac{\pi}{2|\xi'|^3} \beta \beta^T + \frac{\pi}{2|\xi'|} N N^T \right], \mathbf{C} \otimes \left[\frac{\pi}{|\xi'|} \beta + \pi i N \right], \right. \\ \left. \mathbf{N} \otimes \pi i I_3 + \mathbf{P} \otimes \left[\frac{\pi}{2|\xi'|} (\beta N^T + N \beta^T) + \pi i N N^T \right], \mathbf{C} \otimes (\pi i \beta - \pi |\xi'| N) \right). \quad (32)$$

Через $\Gamma_\alpha := (|\xi'|^{-1} \beta, \mathbf{a}^\perp, N)$ обозначим матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi'|^{-1} \beta$, $\mathbf{a}^\perp$, N , где $\mathbf{a}^\perp$ ортогонален β и N , а $|\mathbf{a}^\perp| = 1$. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\Gamma_\alpha^T \Gamma_\alpha = I_3, \quad \Gamma_\alpha^T \beta = (|\xi'|, 0, 0)^T =: |\xi'| \mathbf{e}_1, \quad \Gamma_\alpha^T N = (0, 0, 1)^T =: \mathbf{e}_3,$$

$$\Gamma_\alpha^T \beta \beta^T \Gamma_\alpha = \text{diag}(|\xi'|^2, 0, 0) =: |\xi'|^2 P_1, \quad \Gamma_\alpha^T N N^T \Gamma_\alpha = \text{diag}(0, 0, 1) =: P_3. \quad (33)$$

Обозначим $S_\alpha := I_n \otimes \Gamma_\alpha$, тогда $S_\alpha^T S_\alpha = I_n \otimes I_3 = I_{3n}$. Из (32), (33) найдём

$$\mathcal{N} := S_\alpha^T \mathcal{M} \text{diag}(S_\alpha, I_n \otimes I_1, S_\alpha, I_n \otimes I_1) = \left(\frac{\pi}{|\xi'|} [\mathbf{N} \otimes I_3 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \otimes (P_1 + P_3)], \pi \mathbf{C} \otimes (\mathbf{e}_1 + i \mathbf{e}_3), \right. \\ \left. \pi i [\mathbf{N} \otimes I_3 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \otimes (2P_3 - i(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^T))], \pi i |\xi'| \mathbf{C} \otimes (\mathbf{e}_1 + i \mathbf{e}_3) \right). \quad (34)$$

Далее несложно вычислить, что спектр матрицы $2P_3 - i(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^T)$ состоит из собственного значения $\lambda = 0$ кратности один и собственного значения $\lambda = 1$ кратности два. Обозначим через $\mathbf{T}$ матрицу, столбцами которой являются собственные элементы, а также соответствующий присоединённый элемент матрицы $2P_3 - i(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^T)$, отвечающий точке $\lambda = 1$. Тогда

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения (см. (33)):

$$\begin{aligned} T^{-1}(2P_3 - i(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^T))T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ T^{-1}(P_1 + P_3)T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_3) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (34), (35) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= (I_n \otimes T^{-1})\mathcal{N} \operatorname{diag} (I_n \otimes T, I_n \otimes I_1, I_n \otimes T, I_n \otimes I_1) = \\ &= \left(\frac{\pi}{|\xi'|} \left[\mathbf{N} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \pi\sqrt{2}\mathbf{C} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ &\pi i \left[\mathbf{N} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right], \pi i \sqrt{2}|\xi'| \mathbf{C} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Матрица $\mathcal{S}$ имеет размер $3n \times 8n$. Из теоремы Лапласа о вычислении определителей следует, что любой минор матрицы $\mathcal{S}$ порядка $3n$, который может быть отличен от нуля, непременно содержит в качестве множителя определитель $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P})$. Таким образом, если $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P}) = 0$, то $\operatorname{rank} \mathcal{S} < 3n$. С другой стороны, рассматривая минор матрицы $\mathcal{S}$, составленный из $3n$ строк и первых $3n$ столбцов, найдём, что

$$\det \frac{\pi}{|\xi'|} \left(\mathbf{N} \otimes I_3 + \frac{1}{2} \mathbf{P} \otimes (I_3 - P_1) \right) = \frac{\pi^{3n}}{|\xi'|^{3n}} \det \mathbf{N} \det^2 \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right) \neq 0$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, если только $\det \mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

Из проведённых рассуждений и равенств $\operatorname{rank} \mathcal{M} = \operatorname{rank} \mathcal{N} = \operatorname{rank} \mathcal{S}$ (см. (32), (34), (36)) следует, что $\operatorname{rank} \mathcal{M} = 3n$ для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, если только $\det \mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N} + 1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

4. Применим проведённые рассуждения к матрице (31), являющейся частным случаем матрицы $\mathcal{M}$. Соответствующие матричные компоненты $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ легко определяются из сравнения $\mathcal{M}$ и матрицы (31). Учитывая, что $\det \mathbf{N} = \det \mathbf{M}^{-1} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{N} + \frac{1}{2} \mathbf{P} \right) &= \det \left(\mathbf{M}^{-1} - \frac{1}{2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \Lambda))^{-1} (\Phi - \lambda(\mathbf{M} + \Lambda)) \mathbf{M}^{-1} \right) = \\ &= \det \left(\frac{1}{2} (\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \Lambda))^{-1} (\Phi - \lambda(3\mathbf{M} + \Lambda)) \mathbf{M}^{-1} \right) = \frac{\det(\Phi - \lambda(3\mathbf{M} + \Lambda))}{2^n \det \mathbf{M} \det(\Phi - \lambda(2\mathbf{M} + \Lambda))} \neq 0 \end{aligned}$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$, найдём, что ранг матрицы (31) равен $3n$ для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$ (при этом также $\lambda \notin \Lambda_E$, как отмечено в начале доказательства). По определению 3 задача (1) эллиптична при $\lambda \notin \Lambda_E \cup \Lambda_L$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Справедливо равенство $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \Lambda_E \cup \Lambda_L$. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Из определения 1, лемм 9, 10 и результатов [9] следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 5 доказано, что оператор $\mathcal{A}$ является максимальным аккретивным оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}$ непрерывно обратим при отрицательных λ и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [13, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] или [18, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) следует, что множество $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана.

5. Локализация и асимптотика дискретного спектра оператора $\mathcal{A}$. Доказательство факта, что не вещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ (или оператора $\mathcal{A}^{-1}$, если он существует) состоит из конечного числа симметричных относительно вещественной оси пар собственных значений конечной кратности, состоит в проверке принадлежности оператора $\mathcal{A}^{-1}$ классу Хелтона: $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. [23, гл. III, § 5, определение 5.1, следствие 5.21]). Чтобы не приводить здесь множество сопутствующих определений и терминов, сформулируем желаемое следствие из [23, гл. III, § 5, следствие 5.21 и пример 5.23] в виде следующего предложения.

Предложение. Определим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ оператор

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 & -S_3^* \\ S_3 & S_2 \end{pmatrix}, \quad T_1 = T_1^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \quad T_2 = T_2^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2),$$

$$S_1 = S_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad S_2 = S_2^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2), \quad S_3 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Пусть $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_2) = \emptyset$. Тогда не вещественный спектр оператора $\mathcal{T}$ состоит из конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности.

Лемма 12. Не вещественный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности.

Доказательство. Покажем, что $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$. Предположим противное, тогда существует такой элемент $0 \neq \xi = (\mathbf{u}, \rho)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, что (см. лемму 5)

$$\mathcal{A}\xi = \begin{pmatrix} A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\rho) \\ -QA^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(\rho, QA^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_2} = 0$, а значит, $(A^{1/2}(A^{1/2}\mathbf{u} + Q^*\rho), \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} = \|A^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 = 0$ и $\mathbf{u} = 0$. Тогда $A^{1/2}Q^*\rho = 0$, а значит, $\rho = 0$, так как $\text{Ker } Q^* = \{0\}$ (см. лемму 3, (9) и лемму 4).

Таким образом, точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. По лемме 11 точка $\lambda = 0$ – регулярная точка оператора $\mathcal{A}$: $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Отсюда и из второй факторизации в лемме 5 следует, что (неотрицательный) оператор QQ^* является положительно определённым в $\mathcal{H}_2$, а значит, существует $(QQ^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Из второй факторизации в лемме 5 теперь найдём, что

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (QQ^*)^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1}QA^{-1/2} & -A^{-1/2}Q^*(QQ^*)^{-1} \\ (QQ^*)^{-1}QA^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из представления $A = L + T$, лемм 1 и 2 следует, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет структуру оператора $\mathcal{T}$ из предложения. Утверждение леммы теперь следует из $\sigma((QQ^*)^{-1}) \cap \{0\} = \emptyset$ и предложения. Лемма доказана.

Лемма 13. Спектр оператора $\mathcal{A}$ содержит подпоследовательность собственных значений с асимптотическим поведением (4), (5).

Доказательство. 1. Покажем, что собственные значения оператора L имеют асимптотическое распределение

$$\lambda_k(L) = c^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1))$$

при $k \rightarrow \infty$ с константой c , определённой формулой (5).

Действительно, указанная асимптотическая формула следует из работы [24, § 1, п. 3] с константой

$$c = \frac{1}{24\pi^3} \int_{\Omega} d\Omega \int_{|\xi|=1} \text{tr} \{ (a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2})^{3/2} \} dS(\xi), \quad (37)$$

где $a_0 := \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{A}) \otimes \xi \xi^T$, $b_0 := \mathbf{R} \otimes I_3$. Учитывая, что

$$\text{tr} \{ (a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2})^{3/2} \} = \text{tr} \{ (a_0^{1/2}b_0^{-1}a_0^{1/2})^{-3/2} \} = \text{tr} \{ (b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2})^{-3/2} \},$$

вычислим собственные значения матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$. Используя (24) и теорему Лапласа о вычислении определителей, найдём соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \det(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2} - \lambda I_{3n}) &= \det(\mathbf{R}^{-1/2}(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T - \lambda \mathbf{R} \otimes I_3) \mathbf{R}^{-1/2}) = \\ &= \det^2 \mathbf{R}^{-1/2} \det((I_n \otimes \Gamma_\xi^T)(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi \xi^T - \lambda \mathbf{R} \otimes I_3)(I_n \otimes \Gamma_\xi)) = \\ &= \det \mathbf{R}^{-1} \det(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes |\xi|^2 P_1 - \lambda \mathbf{R} \otimes I_3) = \\ &= |\xi|^{6n} \det \mathbf{R}^{-1} \det(\mathbf{M} \otimes I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes P_1 - \mathbf{R} \otimes \lambda |\xi|^{-2} I_3) = \\ &= |\xi|^{6n} \det \mathbf{R}^{-1} \det((2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \lambda |\xi|^{-2} \mathbf{R}) \det^2(\mathbf{M} - \lambda |\xi|^{-2} \mathbf{R}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что спектр матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$ состоит из трёх множеств:

$$\{\lambda_k^{(1)} = |\xi|^2 \lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}), \quad \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(3)} = |\xi|^2 \lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})\}_{k=1}^n,$$

где $\lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})$, $\lambda_k(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})$, $k = \overline{1, n}$, – собственные значения соответствующих матриц. Из (37) и проведённых рассуждений теперь найдём, что

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{24\pi^3} \int_{\Omega} d\Omega \int_{|\xi|=1} \left(\sum_{k=1}^n (\lambda_k^{(1)})^{-3/2} + 2 \sum_{k=1}^n (\lambda_k^{(2)})^{-3/2} \right) dS(\xi) = \\ &= \frac{1}{24\pi^3} \int_{\Omega} (\text{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2} + 2 \text{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2}) d\Omega \int_{|\xi|=1} \frac{dS(\xi)}{|\xi|^3} = \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \int_{\Omega} (\text{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2} + 2 \text{tr}(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2})^{-3/2}) d\Omega. \end{aligned}$$

2. Из представления $A = L + T = (I + TL^{-1})L$ вытекает, что оператор A является *слабым возмущением* оператора L . Отсюда и из степенной асимптотики собственных значений оператора L следует (см., например, [25]), что главные члены асимптотик собственных значений этих операторов совпадают.

Из (13) следует, что собственные значения оператора A и оператор-функции $L(\lambda)$ совпадают. Наличие же у оператор-функции (пучка операторов) $L(\lambda)$ последовательности собственных значений с указанным в лемме асимптотическим распределением следует из теоремы о сравнении спектров [25, теорема 1.2]. Лемма доказана.

Утверждения сформулированной выше теоремы следуют из лемм 11–13.

Заключение. Исследован спектр оператора в задаче о нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область трёхмерного пространства с бесконечно гладкой границей. Доказано, что существенный спектр задачи представляет собой конечный набор отрезков, расположенных на действительной оси. Оставшийся спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и расположен на действительной оси, за исключением, быть может, конечного числа комплексно-сопряжённых собственных значений. Спектр задачи содержит подпоследовательность собственных значений с предельной точкой в бесконечности и степенным асимптотическим распределением. Отсюда следует, в частности, что в рассматриваемой модели существует не более конечного числа осциллирующих собственных колебательных режимов. Все остальные собственные колебания являются апериодически затухающими. Можно показать, что если нижние грани матриц вязкостей будут “достаточно большими”, то осциллирующих режимов вообще не будет. Аналогичные факты, как известно, имеют место и для однокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости.

Далее, опираясь на доказанные результаты, предполагается исследовать задачу о малых движениях описанной системы, решить задачу о вынужденных колебаниях, а также обосновать разложение решений эволюционной задачи по системе корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в предположении постоянства стационарных плотностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М., 1987.
2. Rajagopal K.L., Tao L. Mechanics of Mixtures. Ser. Adv. Math. Appl. Sci. V. 35. River Edge, 1995.
3. Mamontov A.E., Prokudin D.A. Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20. № 2. P. 179–195.
4. Frehse J., Goj S., Málek J. A Stokes-like system for mixtures // Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics II. Intern. Math. Ser. / Eds. M.Sh. Birman, S. Hildebrandt, V.A. Solonnikov, and N.N. Uraltseva. Dordrecht, Norwell, New York, London, 2002. P. 119–136.
5. Frehse J., Goj S., Málek J. On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden–Fowler type higher-order equations // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36. № 4. P. 1259–1281.
6. Frehse J., Goj S., Málek J. A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum // Appl. Math. 2005. V. 50. P. 527–541.
7. Мамонтов А.Е., Прокудин Д.А. Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей // Изв. РАН. Сер. Мат. 2018. Т. 82. № 1. С. 151–197.
8. Пал П.К., Масленникова В.Н. Спектральные свойства операторов в задаче о колебании сжимаемой жидкости во вращающихся сосудах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 3. С. 529–534.
9. Grubb G., Geymonat G. The essential spectrum of elliptic systems of mixed order // Math. Ann. 1977. V. 227. P. 247–276.
10. Faierman M., Fries R.J., Mennicken R., Möller M. On the essential spectrum of the linearized Navier–Stokes operator // Integr. Equat. Oper. Theory. 2000. V. 38. № 1. P. 9–27.
11. Atkinson F.V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A.A. The essential spectrum of some matrix operators // Math. Nachr. 1994. V. 167. P. 5–20.
12. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
14. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дагглиса–Л. Ниренберга. II // Тр. Мат. ин-та имени В.А. Стеклова. 1966. Т. 92. С. 233–297.
15. Mennicken R., Shkalikov A.A. Spectral decomposition of symmetric operator matrices // Math. Nachr. 1996. V. 179. P. 259–273.
16. Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. Эволюционная и спектральная задачи, порождённые проблемой малых движений вязкоупругой жидкости // Тр. Санкт-Петербургского мат. о-ва. 1988. Т. 6. С. 5–33.
17. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
18. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. Classes of Linear Operators. V. 1. Basel; Boston; Berlin, 1990.
19. Волевич Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Мат. сб. 1965. Т. 68 (110). № 3. С. 373–416.
20. Кожевников А.Н. Функциональные методы математической физики. М., 1991.
21. Kozhevnikov A., Skubachevskaya T. Some applications of pseudo-differential operators to elasticity // Hokkaido Math. J. 1997. V. 26. № 2. P. 297–322.
22. Ланкастер П. Теория матриц. М., 1973.
23. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.
24. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1977. Т. 14. № 11. С. 5–58.
25. Маркус А.С., Мацаев В.И. Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша // Мат. сб. 1984. Т. 123 (165). № 3. С. 391–406.

Крымский федеральный университет
имени В.И. Вернадского,
г. Симферополь

Поступила в редакцию 22.12.2022 г.
После доработки 18.02.2023 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.22

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С СИНГУЛЯРНЫМ
 Δ_B -ОПЕРАТОРОМ КИПРИЯНОВА© 2023 г. Л. Н. Ляхов, Ю. Н. Булатов,
С. А. Рощупкин, Е. Л. Санина

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа для Δ_B -оператора Киприянова, называются K -гармоническими. В работе приведены и доказаны следующие свойства K -гармонических функций: интегральное представление типа Грина C^2 -функций, теорема о сферическом среднем, принцип максимума. В качестве следствия доказана единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

DOI: 10.31857/S0374064123040052, EDN: ANDKDD

1. Основные обозначения и определения. Через $\mathbb{R}_n$ будем обозначать евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, а через $\mathbb{R}_n^+$ – n -полупространство, определённое неравенствами $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Пусть мультииндекс $-\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n)$ имеет фиксированные отрицательные параметры: $-1 < -\gamma_i < 0$. Сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = x^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x^{-\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad \gamma_i > 0,$$

называется *оператором Киприянова* [1]. Данный оператор целесообразно применять к функциям, чётным по каждой координате своего аргумента, так как в этом случае существует

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{1}{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=0}.$$

Пусть $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$. Учитывая особенность операторов Бесселя, будем полагать, что область Ω^+ прилегает к сингулярным координатным гиперплоскостям $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, оператора Δ_B . Тогда граница области Ω^+ состоит из двух частей: $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Gamma^0 \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$. Область $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ получена объединением Ω^+ со своими зеркальными отражениями от координатных гиперплоскостей $x_i = 0$. Граница Γ области Ω предполагается гладкой в окрестности $\Gamma \cap \Gamma^0$ (условие гладкости границы И.А. Киприянова [2, § 3.1]). Это условие также предполагает, что рассматриваемые функции в области Ω^+ должны иметь гладкое чётное продолжение через границу Γ^0 по отношению к каждой координате x_i . В связи с этим вводим следующее

Определение 1. Функцию $f = f(x)$, определённую в m -полупространстве $\mathbb{R}_m^+ \subset \mathbb{R}_n$ ($m \leq n$), будем называть *m -чётной (по Киприянову)*, если она допускает чётное продолжение по каждой из координат $x_i \in \mathbb{R}_m^+$, $i = \overline{1, m}$, своего аргумента с сохранением класса функций своей принадлежности.

В частности, если $u \in C^k(x_i \in [0, \infty))$, то u – i -чётная функция, если все её производные по x_i , $i = \overline{1, n}$, нечётного порядка $\ell \leq k$ равны нулю при $x_i = +0$. Такое определение чётности введено в монографии [2, с. 21]. Функции, удовлетворяющие определению 1, принято называть *чётными по Киприянову*.

Из определения 1 вытекает, что каждую из областей Ω^+ и Ω^- , как правило, удобно считать частично замкнутыми, т.е. считать границу Γ^0 границей симметрии, и поэтому полагаем $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ и $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$. Точки, принадлежащие $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^0$ или $\Omega^- = \Omega^- \cup \Gamma^0$,

будем называть *s-внутренними*. Аналогично подобласть $\Omega_*^+ = \Omega_*^+ \cup \Gamma_*^0$ области Ω^+ , имеющую общую границу $\Gamma_*^0 \subset \Gamma^0$, будем называть *s-подобластью* области Ω^+ . Это же касается и соответствующей подобласти области Ω^- .

Заметим также, что гладкость границы Γ области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ в окрестности сингулярных гиперплоскостей $x_i = 0$ связана с возможностью корректно ввести локальные координаты с центром в точках пересечения границы Γ с координатной гиперплоскостью $x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 2. Функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$ называется *K-гармонической функцией* в области Ω^+ , если $\Delta_{B-\gamma} u = 0$ в каждой точке Ω^+ .

Важную роль в наших рассуждениях играет многомерный Т-псевдосдвиг

$$\mathbb{T}^y f(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+,$$

одномерные составляющие которого определены в [3] формулами

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1} f(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i, x^i)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i, \quad (1)$$

где для сокращения записи положили

$$x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}.$$

Конструкция (1) возникла в работе [3] в виде интегрального оператора, связывающего решения $u = \mathbb{J}_\mu$ сингулярного уравнения Бесселя $B_{-\gamma} u(s) + t^2 u(s) = 0$ разных аргументов ($s = x_i$ и $s = y_i$), в виде теоремы сложения $\mathbb{J}_{\mu_i}$ -функций Бесселя

$$\mathbb{J}_{\mu_1}(\xi t) \mathbb{J}_{\mu}(\eta t) = \mathbb{T}_\xi^\eta \mathbb{J}_{\mu_i}(x_i t), \quad \mu_i = \frac{\gamma_i + 1}{2}.$$

Отметим, что оператор (1) связан с оператором обобщённого сдвига Пуассона [4]

$$T_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi f(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i, x^i) \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i$$

формулой

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} = (x_i y_i)^{\gamma_i+1} T_{x_i}^{y_i} (x_i^{-(\gamma_i+1)} f(x_i, x^i)),$$

которая, по сути, и применяется в статье [3].

Основным свойством Т-псевдосдвига, используемым в этой работе, является равенство*)

$$B_{-\gamma_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x),$$

из которого в многомерном случае вытекает теорема о коммутативности Т-псевдосдвига и оператора Киприянова $\Delta_{B-\gamma}$:

$$\Delta_{B-\gamma} \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B-\gamma} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Введём весовую билинейную форму

$$(u, v)_{-\gamma} = \int_{\mathbb{R}_n^+} u(x) v(x) x^{-\gamma} dx, \quad x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$$

*) Для обобщённых сдвигов, определяемых формулой Пуассона [4], это свойство доказано в книге [2, формула (1.8.5)] и в общем случае в работе [5].

на функциональном пространстве $L_2^\gamma = \{f(x) : x^{-\gamma}f(x) \in \mathbb{R}_n^+\}$ (обычно называемым *пространством Лебега–Киприянова*).

Операторы $\mathbb{T}$ -псевдосдвига и оператор Киприянова $\Delta_{B-\gamma}$ симметричны (см. [3]) в следующем смысле:

$$(\Delta_{B-\gamma}u, v)_{-\gamma} = (u, \Delta_{B-\gamma}v)_{-\gamma}, \quad (\mathbb{T}^y u(x), v(x))_{-\gamma} = (u, \mathbb{T}^y v(x))_{-\gamma}.$$

Более востребованным в этих исследованиях оказался оператор

$$\mathbb{T}^y = x^{\gamma+1} \mathbb{T}^y, \quad (2)$$

где $x^{\gamma+1} = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i+1}$, $\gamma_i+1 > 1$, одномерные составляющие которого определены равенством

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \frac{\Gamma((\gamma_i+3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i+2)/2)} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} f(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} \sin^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i. \quad (3)$$

Б.М. Левитан ввёл понятие “оператора обобщённого сдвига”, который должен удовлетворять четырём условиям (см. [6, с. 17–18]). Оператор (1) не удовлетворяет условиям 2° и 4° из этой книги*), поэтому называется (как и в [3]) $\mathbb{T}$ -псевдосдвигом. Но он симметричен: $\mathbb{T}_x^y = \mathbb{T}_y^x$, что важно при исследовании свёрток В.А. Какичева на основе $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (см. [7, 8]).

Оператор $\mathbb{T}_{x_i}^{y_i}$, напротив, не симметричен, но удовлетворяет условию 2° , где роль “единичного” элемента играет точка $x_i = 0$, т.е. именно для этой точки выполнено равенство

$$\mathbb{T}^y f(0) = f(y).$$

Доказательство достаточно просто следует из формулы (1), поскольку

$$(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)|_{x_i=0} = \sqrt{y_i^2} = y_i > 0.$$

Условие 4° Б.М. Левитана в определении оператора $\mathbb{T}$ в нашей работе заменено более простым в доказательстве условием ограниченности интегрируемой функции: если $f(x_i, x^i) \in C$ ($x_i \in [0, \infty)$) и $\max_{x_i \in [0, \infty)} f(x) = M$, то $\max_{x_i \in [0, \infty)} \mathbb{T}^y f(x) = M$. Это утверждение доказано далее в лемме 3.

Отметим, что в более ранних работах Б.М. Левитана условием 4° было именно условие “ограниченности в лебеговых классах функций” (см., например, работу [9]).

На основе изложенного выше будем называть оператор (2) *обобщённым $\mathbb{T}$ -сдвигом*. По-видимому, $\mathbb{T}$ -сдвиг принадлежит классу обобщённых сдвигов Б.М. Левитана (т.е. выполняются все условия 1° – 4° [6]), но в рамках этих исследований необходимо лишь условие ограниченности $\mathbb{T}$ -сдвига непрерывной функции.

2. К-формулы Грина. Многие свойства K -гармонических функций вытекают из соответствующих аналогов формул Грина, отвечающих оператору $\Delta_{B-\gamma}$ (*К-формулы Грина*).

Пусть u и v – n -чётные функции, принадлежащие классу функций $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega}^+)$, и $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$, $-\gamma_i < -\gamma_i < 0$.

Утверждение. Для $\Delta_{B-\gamma}$ оператора Киприянова справедлива первая К-формула Грина

$$\int_{\Omega^+} v \Delta_{B-\gamma} u x^{-\gamma} dx = - \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} x^{-\gamma} dx + \int_{\Gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \overline{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+, \quad (4)$$

где $\overline{\nu}$ – направление внешней нормали к границе Γ^+ области Ω^+ .

*) **Условие 2° .** Функция $f \in C$ и существует “единичный” элемент s_0 такой, что $T^{s_0} f(t) = f(t)$.

Условие 4° . Функция $f \in C$, тогда $F(s, t) = T^s f(t)$ непрерывна по совокупности точек (s, t) .

Доказательство. Имеем

$$\int_{\Omega^+} v \Delta_{B-\gamma} u x^{-\gamma} dx = \int_{\Omega^+} v \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \prod_{k=1}^n x_k^{-\gamma_k} dx = \int_{\Omega^+} v \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^{-\gamma_k} dx.$$

Применив формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^+} v \Delta_{B-\gamma} u x^{-\gamma} dx &= \int_{\Gamma^+} v \left(\sum_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^{-\gamma_k} d\Gamma^+ - \\ &- \int_{\Omega^+} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} x^\gamma dx = \int_{\Gamma^+} v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \prod_{k=1}^n x_k^{-\gamma_k} d\Gamma^+ - \int_{\Omega^+} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} x^\gamma dx. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Приведём несколько простых следствий из равенства (4).

Если в (4) $u = v$, то

$$\int_{\Omega^+} u \Delta_{B-\gamma} u x^{-\gamma} dx = - \int_{\Omega^+} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 x^{-\gamma} dx + \int_{\Gamma^+} u \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} dx. \quad (5)$$

Если в (4) $v = 1$, тогда

$$\int_{\Omega^+} \Delta_{B-\gamma} u x^{-\gamma} dx = \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+. \quad (6)$$

Если в (6) функция u K -гармоническая, то из определения 2 следует равенство

$$\int_{\Gamma^+} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} x^{-\gamma} d\Gamma^+ = 0. \quad (7)$$

Условие K -гармоничности. Если равенство (7) справедливо в любой s -подобласти области Ω^+ , то u — K -гармоническая функция в Ω^+ .

Действительно, если функция u K -гармоническая в Ω^+ , то равенство (7) выполнено в любой s -подобласти области Ω^+ , что с очевидностью вытекает из (6).

Наоборот, пусть равенство (7) выполняется в любой s -подобласти области Ω^+ . Тогда из (6) следует, что $\Delta_{B-\gamma} u = 0$ в любой s -внутренней точке области Ω^+ , т.е. выполнено требование определения K -гармоничности функции u в области Ω^+ .

Формулы (5)–(7) называют следствиями из первой K -формулы Грина (4) (чаще просто K -формулами Грина). Вторая K -формула Грина получается из (4) после интегрирования по частям в объёмном интеграле и применения обычной формулы Грина:

$$\int_{\Omega^+} (v \Delta_{B-\gamma} u - u \Delta_{B-\gamma} v) x^{-\gamma} dx = \int_{\Gamma^+} \left(v \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} - u \frac{\partial v}{\partial \bar{\nu}} \right) x^\gamma d\Gamma^+.$$

3. Интегральное представление Грина n -чётных функций. В работе [1] получено следующее представление оператора Киприянова в сферических координатах $x = r\theta$, $|\theta| = 1$:

$$\Delta_{B-\gamma} = B_{n-|\gamma|-1} - \frac{1}{r^2} \Delta_{B-\gamma}(\theta), \quad (8)$$

где

$$B_{n-|\gamma|-1} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-|\gamma|-1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

а $\Delta_{B-\gamma}(\theta)$ – оператор Киприянова–Бельтрами на сфере.

Используя (8), нетрудно доказать, что функция $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n-|\gamma| > 2$ и $|x| \neq 0$ является K -гармонической. Действительно, переходя в выражении $\Delta_{B-\gamma}|x|^{2-n+|\gamma|}$ к сферическим координатам, с учётом (8) получим

$$\Delta_{B-\gamma}|x|^{2-n+|\gamma|} = B_{n-|\gamma|-1}r^{2-n+|\gamma|} = ((2-n+|\gamma|)(1-n+|\gamma|) + (2-n+|\gamma|)(n-|\gamma|-1))r^{-n+|\gamma|} = 0.$$

Функция $|x|^{2-n+|\gamma|}$ при $n-|\gamma| > 0$ называется *сингулярным (элементарным) решением* оператора Киприянова $\Delta_{B-\gamma}$. Если же $n-|\gamma| \leq 2$, то сингулярным решением будет функция $|x|^{2-n+|\gamma|} \ln |x|$, что проверяется аналогично. Полученные далее результаты справедливы для обоих сингулярных решений. Однако мы приведём доказательство наиболее простого в описании случая, а именно $n-\gamma > 2$.

4. Основные леммы о $\mathbb{T}$ -сдвиге. Напомним, что многомерный $\mathbb{T}$ -сдвиг определён выражением (2), поэтому достаточно рассмотреть одномерный случай $\mathbb{T}$ -сдвига.

4.1. Перестановочность $\mathbb{T}$ -сдвига.

Лемма 1. Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то

$$(\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (f(y), \mathbb{T}^y g(x))_{-\gamma}.$$

Доказательство. Учитывая, что $-\gamma = 1 - 2\mu$, имеем равенства

$$\begin{aligned} (f(y), \mathbb{T}^y g(x))_{-\gamma} &= x^{-2\mu} \int_0^\infty \int_0^\pi (xy)^{2\mu} f(y) \frac{g(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha})}{(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha})^{2\mu}} \sin^{2\mu} \alpha d\alpha y^{1-2\mu} dy = \\ &= x^{-2\mu} (\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma}. \end{aligned}$$

Здесь использовалось свойство перестановочности $\mathbb{T}$ -псевдосдвига (см. [3]). Лемма доказана.

4.2. Коммутируемость с оператором $B_{-\gamma_i}$. Для удобства введём обозначение $x = (x_i, x^i)$.

Лемма 2. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая i -чётная функция, $0 < \gamma_i < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тогда

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x).$$

Доказательство. Для $\mathbb{T}$ -псевдосдвига равенство

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} (B_{-\gamma})_{x_i} f(x)$$

вытекает из теоремы сложения $\mathbb{J}$ -функций Бесселя [3]. Отсюда получаем

$$(B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = x_i^{-2\mu_i} (B_{-\gamma_i})_{y_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) = x_i^{-2\mu_i} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i} (B_{-\gamma_i})_{x_i} f(x) = \mathbb{T}_{x+i}^{y_i} B_{-\gamma_i} f(x).$$

Лемма доказана.

Отметим, что леммы 1 и 2 в многомерном случае $\mathbb{T}^x = \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{x_i}$ примут следующий вид.
Лемма 1'. Если f и g – функции, суммируемые с весом $x^{-\gamma}$, то

$$(\mathbb{T}^y f(x), g(y))_{-\gamma} = (f(y), \mathbb{T}^y g(x))_{-\gamma}, \quad x, y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Лемма 2'. Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая i -чётная функция, $0 < \gamma_i < 1$ и $x^{-\gamma} f(x) \in L_2(0, \infty)$. Тогда

$$(\Delta_{B_{-\gamma}})_y \mathbb{T}^y f(x) = \mathbb{T}^y \Delta_{B_{-\gamma}} f(x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4.3. Ограниченность $\mathbb{T}$ -сдвига непрерывной функции.

Лемма 3. Пусть $f \in C(\overline{\Omega^+})$. Если $\max_{x \in \Omega^+} |f(x)| = M$, то $\max_{x \in \Omega^+} |\mathbb{T}^y f(x)| = M$.

Доказательство. Продолжим функции u и v нулём в область $\Omega_1^+ = \mathbb{R}_n^+ \setminus \overline{\Omega^+}$.

Достаточно доказать это утверждение для одномерного $\mathbb{T}$ -сдвига. Наибольшее значение выражение (3) принимает при $x_i = y_i$ и $\alpha_i \rightarrow 0$. Но при $x_i = y_i$

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x)| &\leq \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{y_i^{\gamma_i+1} M}{(x_i^{\frac{\alpha_i}{2}} y_i)^{\gamma_i+1}} \Big|_{x_i=y_i} |\sin \alpha_i|^{\gamma_i+1} d\alpha_i = \\ &= \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \int_0^\pi \frac{M}{|2(1 - \cos \alpha_i)|^{(\gamma_i+1)/2}} |\sin \alpha_i|^{\gamma_i+1} d\alpha_i = \\ &= M \frac{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i = M, \end{aligned}$$

поскольку, согласно определению B -функции Эйлера,

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos^{\gamma_i+1} \alpha_i d\alpha_i = B\left(\frac{\gamma_i + 2}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma((\gamma_i + 2)/2)}{\Gamma((\gamma_i + 3)/2)}.$$

Лемма доказана.

5. Представление Грина n -чётных функций. Учитывая симметричность $\mathbb{T}$ -сдвига в $\mathbb{R}_n^+$ (лемма 1') и его коммутируемость с $\Delta_{B_{-\gamma}}$ -оператором Киприянова (лемма 2'), имеем

$$\int_{\Omega^+} \mathbb{T}^y v(x) \Delta_{B_{-\gamma}} u(y) y^{-\gamma} dy = \int_{\Omega^+} v(y) \mathbb{T}^y (\Delta_{B_{-\gamma}} u)(x) y^{-\gamma} dy = \int_{\Omega^+} v(y) (\Delta_{B_{-\gamma}})_y \mathbb{T}^y u(x) y^\gamma dy.$$

В следующей теореме доказывается K -формула Грина представления n -чётных функций, которая в нашем случае будет вытекать из правой части записанного выше равенства.

Теорема 1. Пусть n -чётная функция $u \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, $v = |x|^{2-n+|\gamma|}$, $n - |\gamma| > 2$, и $\mathbb{T}$ – сдвиг, определённый в (2). Имеет место следующая формула Грина:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(n+|\gamma|-2)|S_1^+(n)|^{-\gamma}} \left(\int_{\Gamma^+} \left(v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^y u(x)}{\partial \overline{\nu}_y} - \mathbb{T}^y u(x) \frac{\partial v(y)}{\partial \overline{\nu}} \right) y^{-\gamma} d\Gamma^+ - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega^+} v(y) \Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^y u(x) y^{-\gamma} dy \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Поскольку функция $y^{-\gamma} v = y^{-\gamma} |y|^{2-n+|\gamma|}$ при $n > 2$ имеет особенность в начале координат (считается точкой $\Omega^+ \cup \Gamma^0$), то для применения K -формулы Грина (4)

необходимо вырезать из области Ω^+ n -полушар $|y| < \varepsilon$. Полученную в результате область обозначим Ω_ε^+ . Тогда

$$\int_{\Omega_\varepsilon^+} v(y)(\Delta_{B_{-\gamma}})_y \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dy = \int_{\Gamma^+ \cup S_\varepsilon^+(n)} v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial \bar{y}} y^{-\gamma} \left\{ \frac{d\Gamma^+}{dS^+} \right\} - \int_{\Omega_\varepsilon^+} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial y} y^{-\gamma} dy.$$

Интегрирование по частям в последнем слагаемом правой части этого равенства даёт

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon^+} v(y) \Delta_{B_{-\gamma}} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dy &= \int_{\Gamma^+ \cup S_\varepsilon^+(n)} v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial \bar{v}} \left\{ \frac{d\Gamma^+}{dS^+} \right\} - \\ &- \int_{\Gamma^+ \cup S_\varepsilon^+(n)} \left(\frac{\partial v(y)}{\partial \bar{v}} \right) \mathbb{T}^* u(x) y^\gamma \left\{ \frac{d\Gamma^+}{dS^+} \right\} = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь учитывалось, что $\Delta_{B_{-\gamma}} v = 0$ в области Ω_ε^+ .

Теперь в правой части (10) выделим интегрирование по поверхности n -полусферы $S_\varepsilon^+(n)$:

$$\int_{S_\varepsilon^+(n)} v(y) \frac{\partial \mathbb{T}^* u(x)}{\partial \bar{v}} y^{-\gamma} dS^+ - \int_{S_\varepsilon^+(n)} \frac{\partial v(y)}{\partial \bar{v}} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dS^+ = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \quad (11)$$

Учитывая, что вектор нормали к сфере направлен вдоль радиуса, получаем

$$I_1(\varepsilon) = \int_{S_1^+(n)} \varepsilon^{2-n-|\gamma|} \left(\frac{\partial \mathbb{T}^{r\theta} u(x)}{\partial r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} (\varepsilon\theta)^{-\gamma} \varepsilon^{n-1} dS_1 = \varepsilon \int_{S_1^+(n)} \frac{\partial \mathbb{T}^{r\theta} u(x)}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} \theta^{-\gamma} dS_1.$$

Отсюда, поскольку $\mathbb{T}^* x$ -сдвиг – ограниченный оператор в пространстве непрерывно дифференцируемых функций (см. лемму 3), следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) = \varepsilon \int_{S_1^+(n)} \frac{\partial \mathbb{T}^{r\theta} u(x)}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} \theta^{-\gamma} dS_1 = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим интеграл $I_2(\varepsilon)$. Имеем равенства

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon) &= \int_{S_\varepsilon^+(n)} \frac{\partial r^{2-n+|\gamma|}}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dS_\varepsilon = (2-n+|\gamma|) \varepsilon^{1-n-|\gamma|} \int_{S_1^+(n)} \mathbb{T}^{\varepsilon\theta} u(x) \varepsilon^{|\gamma|} \theta^{-\gamma} \varepsilon^{n-1} dS_1(n) = \\ &= (2-n+|\gamma|) \int_{S_1^+(n)} \mathbb{T}^{\varepsilon\theta} u(x) \theta^{-\gamma} dS_1 = (2-n+|\gamma|) \int_{S_1^+(n)} \mathbb{T}^{\varepsilon\theta} u(x) \theta^{-\gamma} dS_1, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\varepsilon) = (2-n+|\gamma|) u(x) \int_{S_1^+} \theta^{-\gamma} dS_1 = (2-n-|\gamma|) |S_1^+(n)|_{-\gamma} u(x). \quad (13)$$

Подставляя пределы (12) и (13) в (11), а затем переходя к пределу в (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем равенство (9). Теорема доказана.

6. Сферическое среднее K -гармонической функции. Из равенства (см. лемму 2)

$$\Delta_{B-\gamma} \mathbb{T}^* u f(x) = \mathbb{T}^* u(x) \Delta_{B-\gamma} f(x)$$

вытекает, что функции f и $\mathbb{T}^* u f(x)$ одновременно K -гармонические.

Теорема 2. Пусть функция $u(x)$ является K -гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ – единичная n -полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в области Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{1}{|S_r^+(n)|_\gamma} \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}^* u(x) y^{-\gamma} dS_r(y). \quad (14)$$

Доказательство. Напомним, что по договоренности, принятой при определении области Ω^+ , внутренней подобластью этой области является подобласть, возможно(!), прилегающая к границе Γ^0 . Вначале предположим, что хотя бы одна из координат центра шара не нулевая, т.е. для некоторого $i \in \overline{1, n}$ выполняется условие $x_i \geq 2\delta > 0$. Радиус сферы r выбирается таким, чтобы вся сфера (разумеется, и шар) лежала в области K -гармоничности функции u и начало координат при этом не оказалось на сфере радиуса r с центром в точке x (т.е. выбираемый нами радиус $r < \delta$ или $r > 2\delta$). Тогда $|y| > 0$ и, следовательно, функция $v = |y|^{2-n-|\gamma|}$ бесконечно дифференцируема в любой точке сферы.

Для K -гармонической функции формула (9) примет вид

$$u(x) = \frac{1}{(n-|\gamma|-2)|S_1(n)|_{-\gamma}} \times \\ \times \int_{S_1(n)} \left[r^{2-n+|\gamma|} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \mathbb{T}^{r\theta} u(x) \right) - \mathbb{T}^{r\theta} u(x) \frac{-\partial r^{2-n+|\gamma|}}{\partial r} \right] (r\theta)^{-\gamma} r^{n-1} dS_1(\theta).$$

Так как шаг сдвига $y = r\theta$ не выводит функцию $\mathbb{T}^* u(x)$ за пределы области K -гармоничности, то здесь исчезнет первое слагаемое (см. формулу (7)) и

$$u(x) = \frac{1}{|S_{1,x}(n)|_\gamma} \int_{S_{1,x}(n)} \mathbb{T}^{r\theta} u(x) (\theta)^{-\gamma} dS_1(\theta).$$

Отсюда с очевидностью следует (14).

Пусть теперь все координаты центра шара равны нулю. В этом случае в формуле представления функции (9) отсутствует обобщенный сдвиг и нужно доказать формулу

$$u(0) = \frac{1}{|S_{1,0}(n)|_\gamma} \int_{S_{1,0}(n)} u(r\theta) (\theta)^\gamma dS_1(\theta),$$

которая на самом деле уже известна. Её доказательство для одной особой переменной приведено в работе [9] (см. также [10, 11]) и без особых затруднений переносится на многомерный обобщенный сдвиг Пуассона. Теорема доказана.

Принципиальной особенностью формулы (14) является то, что интегрирование происходит по n -полусфере с центром в начале координат, а точка интегрирования принадлежит сфере с центром в точке $x \in \Omega^+$, вообще говоря, не совпадающей с началом координат. Эта особенность исчезает, если нет весовой нагрузки на оси координат, т.е. если все $\gamma_i = 0$.

Имеет место теорема о среднем при интегрировании по n -полушару в $\mathbb{R}_n^+$ (ср. [12]).

Теорема 3. Пусть функция u является K -гармонической в области $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$ и $S_r^+(n)$ – единичная n -полусфера с центром в начале координат, целиком лежащая в Ω^+ . Тогда

$$u(x) = \frac{n+|\gamma|}{|\mathbb{H}_R(n)|_\gamma} \int_{|x|<R} \mathbb{T}^{r\theta} u(x) x^\gamma dS_r, \quad (15)$$

где $\Pi_R(n) = \{x : |x| < R\}^+ - n$ -полушар в $\mathbb{R}_n^+$ с центром в начале координат и радиуса R , весовой объём которого равен

$$|\Pi_R(n)|_\gamma = \frac{R^{n+|\gamma|}}{2^n} |S_1^+(n)|_\gamma.$$

Учитывая, что

$$|S_r^+(n)|_{-\gamma} = \frac{r^{n+|\gamma|-1}}{2^n} |S_1^+(n)|_\gamma,$$

перепишем равенство (14) в виде

$$r^{n+|\gamma|-1} |S_1^+(n)|_{-\gamma} u(x) = \int_{S_r^+(n)} \mathbb{T}^{*r\theta} u(x) x^\gamma dS_1.$$

Проинтегрируем это равенство по r на отрезке $[0, R]$ и получим формулу (15). Теорема доказана.

7. Экстремальное свойство K -гармонических функций. Для классических гармонических функций экстремальное свойство вытекает из теоремы о среднем гармонике в ограниченной области. В исследуемом случае область Ω^+ прилегает к границе, образованной координатными гиперплоскостями в $\mathbb{R}_n^+$, следовательно, части этих гиперплоскостей тоже оказываются границами области Ω^+ , однако они всего лишь границы симметрии.

Теорема 4. K -гармоническая функция $u(x) \not\equiv \text{const}$ в Ω^+ принимает экстремальные значения ($\sup$ и $\inf$) на границе Γ^+ области B -гармоничности:

$$\min_{x \in \Gamma^+} u(x) < u(x) < \max_{x \in \Gamma^+} u(x).$$

Доказательство. Предположим противное, т.е., например, что $\sup u = u(x_0)$, x_0 – внутренняя точка Ω^+ .

Применив формулу среднего значения (14) с центром в точке x_0 и такого радиуса, чтобы сфера целиком лежала в Ω^+ , получим

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_r(n)|_\gamma} \int_{S_r} \mathbb{T}^y u(x_0) y^\gamma dS_1(y). \quad (16)$$

Так как $u(x) \neq \text{const}$, то на сфере должна присутствовать точка y' , в которой функция u (среди всех значений на этой сфере) принимает наибольшее значение $u(y') = M'$. Обобщённый $\mathbb{T}$ -сдвиг действует ограниченно (лемма 3), а тогда из (16) следует, что

$$u(x_0) = M \leq \frac{M'}{|S_r(n)|_\gamma} |S_r(n)|_\gamma = M',$$

т.е. $u(x_0) = M \leq M'$, что возможно, если $u(x) = \text{const}$ внутри этой сферы. Напомним, что для точек пересечения $\Gamma^0 \cap \Gamma$ выполнено условие Киприянова, поэтому существует конечное покрытие области Ω^+ шарами, в которых функция u K -гармонична и, значит, постоянна: $u(x) = M$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $u \in C_{\text{ev}}^1(\Omega^+)$ – K -гармоническая функция в частично замкнутой области $\Omega^+ = \Omega^+ \cup \Gamma^O$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω^+ .

Будем говорить, что n -чётная функция $u = u(x)$ непрерывна на бесконечности и принимает там значение a , если она непрерывна вне некоторого n -полусфера в $\mathbb{R}_n^+$ и $\lim_{\substack{x \in \mathbb{R}_n^+ \\ \|x\| \rightarrow \infty}} u = a$.

Обозначим через $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$ область, прилегающую к координатным гиперплоскостям по границе Γ^0 .

Следствие 2. Если $u \in C_{\text{ev}}^1(\overline{\Omega_1^+})$ – B -гармоническая функция в частично замкнутой области $\overline{\Omega_1^+} = \Omega_1^+ \cup \Gamma^0$ и $u(\infty) \equiv \lim_{\substack{x \in \mathbb{R}_n^+ \\ \|x\| \rightarrow \infty}} u = 0$, то

$$|u(x)| \leq \max_{x \in \Gamma^+} |u(x)|, \quad x \in \overline{\Omega_1^+}.$$

В частности, если $u|_{\Gamma^+} = 0$ и $u(\infty) = 0$, то $u(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_1^+$.

Следствие 3. Если последовательность K -гармонических функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ равномерно сходится на границе Γ^+ области B -гармоничности Ω^+ , то она равномерно сходится на $\overline{\Omega^+}$. Это справедливо для области Ω_1^+ , если дополнительно известно, что $u_k(\infty) = 0$.

Доказательства следствий 1 и 2 отличаются от доказательств классических утверждений для гармонических функций лишь обозначениями (см., например, [13, § 24]).

8. Постановка и единственность решения внутренней и внешней задач Дирихле.

Внутренняя задача Дирихле. Пусть Ω^+ – конечная область в $\mathbb{R}_n^+$, прилегающая к координатным гиперплоскостям по границе Γ^0 , и функция φ задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$. Найти функцию $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, удовлетворяющую в области Ω^+ уравнению Пуассона $\Delta_{B-\gamma} u = f$ и граничным условиям $u|_{\Gamma^+} = \varphi$.

Теорема 5. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения задачи: u_1 и u_2 . Тогда функция $u = u_1 - u_2$ является K -гармонической: $\Delta_{B-\gamma} u = 0$, и поэтому согласно следствию 1 равна нулю, т.е. $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

Внешняя задача Дирихле. Пусть $\Omega_1^+ = \overline{\mathbb{R}_n^+} \setminus \Omega^+$ и функция φ задана и непрерывна на части границы $\Gamma^+ \in \mathbb{R}_n^+$.

Теорема 6. Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона с оператором Киприянова имеет единственное решение.

Доказательство. Поскольку область Ω^+ предполагается ограниченной, то существует сфера достаточно большого радиуса R , включающая в себя эту область. Из условия убывания решения следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число R , что на этой сфере S_R выполняется условие $u(x)|_{S_R} < \varepsilon$. Область $G^+ = \mathbb{R}_n^+ \setminus \Omega^+$, разумеется, конечная. Если u_1 и u_2 – два решения внешней задачи Дирихле, то функция $u = u_1 - u_2$ K -гармоническая в замкнутой области G^+ с граничным условием $|u| < 2\varepsilon$ на границе ∂G^+ . Согласно следствию 2 $|u(x)| < 2\varepsilon$ в Ω^+ , а поскольку число ε произвольное, то это возможно только если $u = 0$, т.е. когда $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

В заключение обратим внимание на одну особенность этих исследований, отмеченную рецензентом: не найдено аналогичных исследований по отношению к B -гармоническим функциям, определяемым равенством $\Delta_{B-\gamma} u = 0$, $\gamma_i > 0$. На самом деле аналогичные результаты для B -гармонических функций легко вытекают из схемы доказательств этой работы, если заменить Т-сдвиг обобщённым сдвигом Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B -гармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1610–1620.
2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М., 1997.

3. *Ляхов Л.Н., Булатов Ю.Н., Рошупкин С.А., Санина Е.Л.* Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B -оператора Киприянова // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 12. С. 1654–1665.
4. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. Вып. 2 (42). С. 102–143.
5. *Ляхов Л.Н.* Построение ядер Дирихле и Валле–Пуссона–Никольского для j -бесселевых интегралов Фурье // Тр. Московского мат. о-ва. 2015. Т. 76. Вып. 1. С. 67–84.
6. *Левитан Б.М.* Теория операторов обобщённого сдвига. М., 1973.
7. *Какимов В.А.* О свёртках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук. 1967. № 2. С. 48–57.
8. *Бритвина Л.Е.* Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 298–300.
9. *Левитан Б.М.* Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. № 1 (29). С. 3–112.
10. *Киприянова Н.И.* Формула среднего значения для собственных функций сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 11. С. 1998–2001.
11. *Киприянова Н.И., Ляхова С.Л.* Формула среднего значения для регулярных решений сингулярного дифференциального уравнений Гельмгольца и Шредингера // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 1. С. 14–16.
12. *Киприянова Н.И.* Теорема о среднем для B -полигармонического уравнения // Изв. вузов. 1998. № 5 (432). С. 31–34.
13. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Воронежский государственный университет,
Елецкий государственный университет
имени И.А. Бунина,
Липецкий государственный педагогический
университет имени П.П. Семёнова-Тян-Шанского

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.
После доработки 24.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2023 г. А. О. Игнатъев

Рассматриваются однородная и неоднородная системы линейных разностных уравнений с коэффициентами, являющимися N -периодическими функциями дискретного времени. Для однородных систем получены достаточные условия существования периодических и почти периодических решений. Для неоднородных систем показано, что необходимым и достаточным условием существования N -периодического решения является наличие ограниченного решения. Установлены необходимые и достаточные условия ортогональности фундаментальной матрицы однородной системы. Приводятся иллюстрирующие примеры.

DOI: 10.31857/S0374064123040064, EDN: ANEVSL

Введение. Обозначим: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, а также, следуя [1, 2], $\mathbb{N}_q = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq q\}$, $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Рассмотрим систему линейных разностных уравнений

$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n), \quad (1)$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – дискретное время, $y(n) = (y_1(n), \dots, y_k(n))^T: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^k$ – искомая функция (здесь и в дальнейшем знак T обозначает операцию транспонирования), а

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & \dots & a_{1k}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & \dots & a_{2k}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}(n) & a_{k2}(n) & \dots & a_{kk}(n) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g(n) = \begin{pmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \vdots \\ g_k(n) \end{pmatrix}$$

– заданные $k \times k$ - и $k \times 1$ -матрицы соответственно, элементами которых являются действительные периодические функции с периодом N , определённые при $n \in \mathbb{Z}$. Наряду с системой (1), рассмотрим соответствующую ей линейную однородную систему

$$y(n+1) = A(n)y(n). \quad (2)$$

Предполагаем, что матрица $A(n)$ в системах (1) и (2) является невырожденной при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Изучению линейных разностных уравнений посвящено большое количество исследований, из которых отметим работы [3–11]. Практические приложения линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами предложены в [12–14]. Однако не всегда такие уравнения имеют периодические или почти периодические решения, описывающие регулярно повторяющиеся процессы и составляющие важный класс решений разностных уравнений (так как многие процессы, которые можно задать с помощью разностных уравнений, являются периодическими). Изучению таких решений посвящено множество работ (см., например, [13–16]). А. Пуанкаре в исследовании автономных дифференциальных систем придавал особое значение изучению периодических решений, поскольку они в существенном определяют поведение остальных, не периодических, решений указанных систем. Периодические решения представляют собой простейший вид колебательных движений и являются, фактически, единственным

типом решений, которые можно целиком наблюдать, так как вся эволюция периодического решения полностью определяется его поведением на конечном промежутке времени.

В случае $k = 1$, т.е. если (1) – скалярное уравнение, в статье [17] доказана следующая

Теорема А. Пусть $A(n)$ и $b(n)$ являются N -периодическими функциями дискретного времени $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $A(n+N) = A(n)$ и $b(n+N) = b(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и функция $A(n)$ отлична от нуля при всех n . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\prod_{i=1}^N |A(i)| < 1$, то уравнение (1) имеет единственное равномерно асимптотически устойчивое периодическое решение с периодом N ;

2) если $|\prod_{i=0}^{N-1} A(N-i)|^{-1} > 1$, то у уравнения (1) имеется неустойчивое периодическое решение с периодом N .

В статье [18], как и в [17], система (1) также рассмотрена при $k = 1$. Решается задача: может ли это скалярное уравнение иметь сильно нерегулярные периодические решения^{*)}, отличные от постоянных? Доказана

Теорема Б. Скалярное линейное уравнение (1), в котором функции $A(n)$ и $b(n)$ периодичны с одним и тем же периодом, не имеет сильно нерегулярных периодических решений.

В работе [5] рассмотрено скалярное линейное разностное уравнение вида (1), где $A(n)$ и $g(n)$ – периодические функции с периодом N . Получено необходимое и достаточное условие существования N -периодического решения периода. Статья [19] посвящена получению достаточных условий существования асимптотически периодических решений у линейного разностного уравнения

$$a_n^r x(n+r) + \dots + a_n^1 x(n+1) + a_n^0 x(n) = d(n), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

где $d(n)$ – дискретная N -периодическая функция, a_n^i , $i = \overline{0, r}$, – константы такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i = 0$, $i = \overline{0, r}$, и $a_n^r \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. В статье [20] изучаются нелинейные скалярные разностные уравнения вида $x(n+1) = f_n(x(n))$, где функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, периодичны с периодом N , т.е. $f_n(x) \equiv f_{n+N}(x)$ для $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Получено условие существования и устойчивости периодического решения с периодом N .

Периодические функции являются частным случаем почти периодических функций. В работах [21, 22] доказано, что существует система линейных разностных уравнений вида (2), где $n \in \mathbb{Z}$ и элементы матрицы $A(n)$ почти периодические функции, не имеющая почти периодического решения, кроме тривиального.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании периодических и почти периодических решений линейных систем разностных уравнений при других (отличных от [5, 17–22]) условиях.

1. О существовании N -периодических решений систем (1) и (2).

Теорема 1. У системы (1) тогда и только тогда существует N -периодическое решение, когда у неё существует ограниченное решение.

Доказательство. Если у системы (1) существует N -периодическое решение, то оно будет и ограниченным.

Покажем теперь, что если у этой системы существует ограниченное решение, то существует также и N -периодическое решение. Зафиксируем какой-либо начальный момент n_0 дискретного времени, и пусть вектор $y_0 \in \mathbb{R}^k$ – положение в момент n_0 решения $y(n) = y(n, n_0, y_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, системы (1). Рассмотрим однородную систему (2). Её решение $\varphi(n, n_0, y_0)$ с теми же начальными условиями имеет представление $\varphi(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0$, где $\Phi(n, n_0)$ – фундаментальная матрица системы (2). При этом общее решение системы (1) можно записать в виде [4, с. 79]

$$y(n, n_0, y_0) = \Phi(n, n_0)y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)g(r). \quad (3)$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой частное решение системы (1).

^{*)} Если в уравнении (1) функции $A(n)$ и $b(n)$ периодичны с периодом N , то периодическое решение этого уравнения с периодом M называется *сильно нерегулярным*, когда числа N и M взаимно просты.

Введём следующее обозначение:

$$\mathcal{F}_s \equiv \sum_{n_0+(s-1)N}^{n_0+sN-1} \Phi(n_0 + sN, r+1)g(r), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Так как система (2) является N -периодической, то для любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $\Phi(n + N, n) = \Phi(n_0 + N, n_0)$. Поэтому для доказательства существования N -периодического решения у системы (1) нужно показать, что система уравнений

$$\Phi(n_0 + N, n_0)y_0 + \mathcal{F}_1 = y_0 \quad (4)$$

имеет решение относительно вектора y_0 . При решении этой задачи следует рассмотреть два случая:

$$\mathcal{F}_1 = \mathbf{0}^T \quad (5)$$

и

$$\mathcal{F}_1 \neq \mathbf{0}^T, \quad (6)$$

где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) - 1 \times k$ -матрица.

В первом случае задача сводится к существованию N -периодического решения однородной системы (2), но она всегда имеет N -периодическое решение, в качестве которого можно взять тривиальное (нулевое) решение.

Рассмотрим второй случай, т.е. когда справедливо неравенство (6). Обозначив $\Phi(n_0 + N, n_0) - I =: B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ (здесь и далее I – единичная $k \times k$ -матрица), систему (4) запишем в виде

$$By_0 = b, \quad (7)$$

где $b = -\mathcal{F}_1 = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Покажем, что система линейных уравнений (7) имеет решение относительно вектора y_0 . Будем доказывать от противного: предположим, что у этой системы решения нет. Это означает, что ранг матрицы B меньше ранга расширенной матрицы $B | b$, где

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kk} \end{pmatrix}, \quad B|b = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1k} & b_1 \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2k} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1} & B_{k2} & \dots & B_{kk} & b_k \end{pmatrix}.$$

Так как строки матрицы B линейно зависимы, из теоремы Кронекера–Капелли вытекает, что существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю, при которых

$$\alpha_1(B_{11}, \dots, B_{1k}) + \alpha_2(B_{21}, \dots, B_{2k}) + \dots + \alpha_k(B_{k1}, \dots, B_{kk}) = (0, 0, \dots, 0),$$

но $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_k b_k \neq 0$. Таким образом, установлено, что при таких $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ справедливы соотношения

$$\alpha(\Phi(n_0 + N, n_0) - I) = \mathbf{0} \quad (8)$$

и $\alpha b \neq 0$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ – матрица-строка.

Умножив справа последовательно обе части равенства (8) на $\Phi(n_0 + N, n_0)$, получим

$$\alpha(\Phi^2(n_0 + N, n_0) - \Phi(n_0 + N, n_0)) = \mathbf{0}, \quad \alpha(\Phi^3(n_0 + N, n_0) - \Phi^2(n_0 + N, n_0)) = \mathbf{0}, \quad \dots,$$

откуда и из (8) следует, что

$$\alpha \Phi^s(n_0 + N, n_0) = \alpha \quad \text{при любом натуральном } s. \quad (9)$$

Обозначим

$$y_1 = y(n_0 + N, n_0, y_0), \quad y_2 = y(n_0 + 2N, n_0, y_0), \quad \dots, \quad y_s = y(n_0 + sN, n_0, y_0), \quad \dots$$

Пользуясь формулой (3), последовательно находим

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi(n_0 + N, n_0)y_0 + \mathcal{F}_1, \\ y_2 &= y(n_0 + 2N, n_0 + N, y_1) = \Phi(n_0 + 2N, n_0 + N)y_1 + \mathcal{F}_2 = \\ &= \Phi(n_0 + 2N, n_0 + N)[\Phi(n_0 + N, n_0)y_0 + \mathcal{F}_1] + \mathcal{F}_2, \quad \dots \\ \dots, \quad y_s &= \Phi(n_0 + sN, n_0 + (s-1)N)y_{s-1} + \mathcal{F}_s. \end{aligned}$$

Так как элементы матриц $A(n)$ и $g(n)$ периодичны с периодом N , заключаем, что

$$\Phi(n_0 + N, n_0) = \Phi(n_0 + 2N, n_0 + N) = \dots = \Phi(n_0 + sN, n_0 + (s-1)N) \quad (10)$$

и

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \dots = \mathcal{F}_s. \quad (11)$$

Вследствие равенств (10) и (11) выражение для y_s принимает вид

$$y_s = \Phi^s(n_0 + N, n_0)y_0 + (\Phi^{s-1}(n_0 + N, n_0) + \Phi^{s-2}(n_0 + N, n_0) + \dots + \Phi(n_0 + N, n_0) + I)\mathcal{F}_1.$$

Умножая обе части последнего равенства слева на α и используя условия (9), получаем

$$\alpha y_s = \alpha y_0 + s\alpha \mathcal{F}_1.$$

Учитывая, что $\alpha \mathcal{F}_1 \neq 0$, имеем $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\alpha y_s\| = \infty$. Отметим, что никаких ограничений на начальный вектор y_0 мы не накладывали, т.е. получено, что это предельное соотношение выполняется при любом y_0 . Но это противоречит тому, что существует ограниченное решение системы (1). Полученное противоречие доказывает утверждение о том, что система линейных уравнений (7) имеет решение относительно y_0 , т.е. система разностных уравнений (1) имеет периодическое решение периода N . Теорема доказана.

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы, при выполнении условия (5) у системы (2), согласно теории Флоке, существует нетривиальное N -периодическое решение тогда и только тогда, когда единица является мультипликатором системы (2), т.е. собственным значением матрицы $\Phi(n_0 + N, n_0)$.

Доказанная теорема переносит теорему Массеры [23] на периодические системы разностных уравнений. В статьях [24–26] теорема Массеры переносится на другие классы линейных уравнений. Отметим, что системы линейных разностных уравнений вида (1) с периодическими правыми частями могут не иметь ни периодических, ни ограниченных решений. В качестве иллюстрации воспользуемся примером из статьи [9].

Пример 1. Скалярное разностное уравнение (1), т.е. $k = 1$, в котором коэффициент и свободный член заданы равенствами

$$A(2n-1) = -2, \quad A(2n) = -1/2 \quad \text{и} \quad g(2n-1) = -2, \quad g(2n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

является периодичным с периодом $N = 2$ и имеет общее решение $y(2n-1) = C - 3 + 2n$, $y(2n) = -2C + 4 - 4n$, где C – произвольная постоянная. Нетрудно убедиться в том, что у этого уравнения нет ни периодических, ни ограниченных решений.

Рассмотрим однородную систему линейных разностных уравнений (2), элементами матрицы $A(n)$ которой являются периодические функции $a_{ij}(n)$, $i, j = \overline{1, k}$, с периодом N . Пусть $n_0 = 0$ и $\Phi(n, 0) = Y(n)$ – фундаментальная матрица, т.е. матрица, столбцами которой являются линейно независимые решения системы (2). Более того, эту матрицу будем считать нормированной, т.е. такой, что выполняются равенства

$$Y(n+1) = A(n)Y(n), \quad Y(0) = I. \quad (12)$$

Теорема 2. Если в системе разностных уравнений (2) элементы матрицы $A(n)$ периодичны с периодом N и $A(N-1)A(N-2) \dots A(0) = I$, то все решения этой системы будут периодическими функциями дискретного времени n периода N .

Доказательство. Пусть $Y(n)$ – нормированная фундаментальная матрица, т.е. матрица, для которой выполняются соотношения (12). Согласно [3, леммы 3.29 и 3.33] $Y(n+N) = Y(n)C$, где $C = Y(N) = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$. Вследствие условия теоремы верно равенство $A(N-1)A(N-2)\cdots A(0) = I$. Поэтому $Y(n+N) = Y(n)$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Рассмотрим систему разностных уравнений (2) при $k = 2$, где

$$A(3n) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(3n+1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(3n+2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы матрицы $A(n)$ периодичны с периодом $N = 3$ и

$$A(3n+2)A(3n+1)A(3n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, согласно теореме 2, все решения этой системы разностных уравнений будут периодическими с периодом $N = 3$.

2. О почти периодических решениях системы (2). Приведём определение почти периодической функции дискретной переменной.

Определение [27, с. 45]. Функция $f(n)$, определённая на множестве целых чисел, называется *почти периодической*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $l = l(\varepsilon)$, что среди любых последовательных l целых чисел найдётся хотя бы одно число p , для которого справедливо неравенство $|f(n+p) - f(n)| < \varepsilon$ для $n \in \mathbb{Z}$. При этом целое число p называется ε -*почти периодом* функции $f(n)$.

Отметим, что все периодические функции являются также и почти периодическими. Это следует из определений периодической и почти периодической функций. Если функция $f(t)$ является непрерывной периодической функцией вещественной переменной t , то $f(n)$, где n – дискретная переменная ($n \in \mathbb{Z}$), является функцией почти периодической. Например, функция $\sin n$ почти периодическая. Почти периодические функции обладают следующим свойством [28, с. 27].

Свойство. Сумма и произведение почти периодических функций суть также почти периодические функции.

Пусть $A(n)$ – периодическая матрица периода N , а $Y(n)$ – нормальная фундаментальная матрица системы (2), удовлетворяющая условиям (12). Столбцами этой матрицы являются линейно независимые решения системы (2). Так как элементами матрицы $A(n)$ являются периодические функции периода N , то, согласно [3, лемма 3.29], существует невырожденная $k \times k$ -матрица B такая, что

$$Y(n+N) = Y(n)B^N, \quad \text{где} \quad B^N = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0).$$

Матрица B^N называется *матрицей монодромии*. В [3, с. 155] доказана следующая

Теорема 3. Для каждой фундаментальной матрицы $Y(n)$ системы (2) существует невырожденная периодическая матрица $P(n)$ периода N такая, что $Y(n) = P(n)B^n$. Если $z(n)$ – решение системы $z(n+1) = Bz(n)$, то $y(n) = P(n)z(n)$.

Отметим, что элементы матриц $P(n)$ и B в общем случае являются комплекснозначными. Воспользовавшись теоремой 3 и сформулированным свойством, получаем, что верна

Теорема 4. Если все собственные числа λ_i , $i = \overline{1, k}$, матрицы B различны и $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1, k}$, то все решения системы (2) будут почти периодическими.

Пример 3. Рассмотрим систему разностных уравнений (2) при $k = 3$, где

$$A(3n) = \begin{pmatrix} 7/27 & 14/3 & 2/3 \\ -2/27 & 3 & 1/6 \\ -7/27 & -4 & -1/6 \end{pmatrix}, \quad A(3n+1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(3n+2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Правые части этой системы периодичны с периодом $N = 3$. Находим матрицу монодромии

$$B^3 = A(2)A(1)A(0) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 20/27 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Корнями её характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} 1/3 - \mu & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 - \mu & 1 \\ 20/27 & -1/3 & 1/3 - \mu \end{pmatrix} = -\mu^3 + \mu^2 - \mu + 1 = 0$$

являются числа $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = i$, $\mu_3 = -i$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Все эти корни различны и $|\mu_1| = |\mu_2| = |\mu_3| = 1$. Следовательно, собственные значения λ_1 , λ_2 , λ_3 матрицы B также различны и $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Согласно теореме 4 все решения рассматриваемой системы будут почти периодическими. Так как одно из собственных значений матрицы B^3 равно единице, на основании теории Флоке можно утверждать, что среди всех решений у этой системы имеются нетривиальные периодические решения с периодом $N = 3$.

3. Об ортогональности фундаментальной матрицы системы (2). Будем считать, что $n_0 = 0$ и $\Phi(n, n_0) = \Phi(n, 0) = Y(n)$. Более того, матрицу $Y(n)$ считаем нормированной, т.е. для неё выполняются соотношения (12).

Теорема 5. Нормированная фундаментальная матрица $Y(n)$ ортогональна тогда и только тогда, когда матрица $A(n)$ ортогональна.

Доказательство. Вначале предположим, что $Y(n)$ ортогональна, т.е.

$$Y(n)Y^T = I. \quad (13)$$

Покажем, что

$$A(n)A^T(n) = I. \quad (14)$$

Заметим, что системы (2) и

$$Y^T(n+1) = Y^T(n)A^T(n) \quad (15)$$

эквивалентны [29, с. 130]. Из соотношения $Y(n+1)Y^T(n+1) = I$ и уравнений (2), (15) получаем $A(n)Y(n)Y^T(n)A^T(n) = I$, откуда следует $A(n)A^T(n) = I$ в силу (13).

Теперь предположим, что выполняется равенство (14). Докажем, что матрица $Y(n)$ ортогональна. Из равенства (14) следует, что $A^T(n)A(n) = I$, откуда имеем $Y^T(n+1)Y(n+1) = Y^T(n)A^T(n)A(n)Y(n) = Y^T(n)Y(n) = C$, где C – некоторая постоянная матрица. Так как $Y(0) = Y^T(0) = I$, то $C = I$. Отсюда получаем $Y^T(n)Y(n) = I$, что доказывает ортогональность фундаментальной матрицы $Y(n)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что ситуация с разностной системой в теореме 5 отличается от ситуации в случае системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье [30] показано, что нормированная фундаментальная матрица $X(t)$ системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$ будет ортогональной при всех t тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов $A(t)$ является кососимметрической при всех t , т.е. $A(t) \equiv -A^T(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen S., Liu X. Stability analysis of discrete-time coupled systems with delays // J. of the Franklin Institute. 2020. № 357. P. 9942–9959.
2. Игнатьев А.О. Метод функций Ляпунова в системах разностных уравнений: устойчивость относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 407–415.
3. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. New York, 2005.
4. Lakshmikantham V., Trigiante D. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications. New York, 2002.

5. *Agarwal R., Popena J.* Periodic solutions of first order linear difference equations // *Math. Comput. Modelling.* 1995. V. 22. № 1. P. 11–19.
6. *Савченко А.Я., Игнатъев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. Киев, 1989.
7. *Giang D.V.* Linear difference equations and periodic sequences over finite fields // *Acta Math. Vietnam.* 2016. V. 41. № 1. P. 171–181.
8. *Hasil P., Vesely M.* Limit periodic homogeneous linear difference systems // *Appl. Math. Comput.* 2015. V. 265. P. 958–972.
9. *Janglajew K., Schmeidel E.* Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations // *Adv. Difference Equat.* 2012. V. 195.
10. *Agarwal R.* Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods, and Applications. V. 228. New York, 2000.
11. *Agarwal R., Wong P.* Advanced Topics in Difference Equations. Dordrecht, 1997.
12. *Gasull A.* Difference equations everywhere: some motivating examples // *Difference Equations, Discrete Dynamical Systems and Applications* / Eds. S. Elaydi et al. 2019. V. 287. P. 129–167.
13. *Elaydi S., Sacker R.* Periodic difference equations, population biology and the Cushing–Henson conjectures // *Math. Biosci.* 2006. V. 201. № 1–2. P. 195–207.
14. *Elaydi S., Sacker R.* Global stability of periodic orbits of non-autonomous difference equations and population biology // *J. Differ. Equat.* 2005. V. 208. № 1. P. 258–273.
15. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* On the stability of discrete systems // *Integral Methods in Science and Engineering.* Boston, 2006. P. 105–116.
16. *Ignatyev A.O., Ignatyev O.A.* On the stability in periodic and almost periodic difference systems // *J. Math. Anal. Appl.* 2006. V. 313. № 2. P. 678–688.
17. *Zhang S., Liu P., Gopalsamy K.* Almost periodic solutions of nonautonomous linear difference equations // *Appl. Analysis: an Int. J.* 2002. V. 81. № 2. P. 281–301.
18. *Деменчук А.К.* О сильно нерегулярных периодических решениях линейного дискретного уравнения первого порядка // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* 2020. Т. 56. № 1. С. 30–35.
19. *Popena J., Schmeidel E.* Asymptotically periodic solution of some linear difference equations // *Facta Univ. Ser. Math. Inform.* 1999. V. 14. P. 31–40.
20. *Clark M.E., Gross L.J.* Periodic solutions to nonautonomous difference equations // *Math. Biosci.* 1990. V. 102. № 1. P. 105–119.
21. *Vesely M.* Construction of almost periodic sequences with given properties // *Electron. J. Differ. Equat.* 2008. V. 126.
22. *Vesely M.* Almost periodic homogeneous linear difference systems without almost periodic solutions // *J. Difference Equat. Appl.* 2012. V. 18. № 10. P. 1623–1647.
23. *Massera J.L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // *Duke Math. J.* 1950. V. 17. № 4. P. 457–475.
24. *Makay G.* On some possible extensions of Massera’s theorem // *Electronic J. of Qualit. Theory of Differ. Equat.* 2000. V. 16. P. 1–8.
25. *Zubelevich O.* A note on theorem of Massera // *Regul. Chaotic Dyn.* 2006. V. 11. № 4. P. 475–481.
26. *Li Y., Lin Z., Li Z.* A Massera type criterion for linear functional differential equations with advanced and delay // *J. Math. Anal. Appl.* 1996. V. 200. P. 717–725.
27. *Corduneanu C.* Almost Periodic Functions. New York, 1989.
28. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
29. *Мишина А.П., Проскуряков И.В.* Справочная математическая библиотека. Высшая алгебра. М., 1965.
30. *Vleck F.S.V.* A note on the relation between periodic and orthogonal fundamental solutions of linear systems // *Amer. Math. Monthly.* V. 71. № 4. P. 406–408.

Институт прикладной математики и механики,
г. Донецк

Поступила в редакцию 26.12.2022 г.
После доработки 10.03.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.78

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ В ТРЁХМЕРНОЙ СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

© 2023 г. Е. С. Барановский

Рассматривается начально-краевая задача для интегро-дифференциальной системы, описывающей трёхмерное течение неньютоновской жидкости с памятью в сетеподобной области. При постановке задачи используются краевые условия Дирихле для поля скоростей и давления, а также условия трансмиссии типа Кирхгофа во внутренних узлах сети. Доказана теорема о существовании и единственности непрерывного по времени слабого решения. Кроме того, выведено энергетическое равенство, которому удовлетворяет это решение.

DOI: 10.31857/S0374064123040076, EDN: ANHXKP

1. Введение и постановка задачи. В последние годы интенсивно развивается теория уравнений в частных производных на сетях (геометрических графах), стратифицированных множествах и сетеподобных областях. Эта теория находит разнообразные приложения, в частности, применяется при математическом анализе процессов тепло- и массопереноса в областях со сложной геометрической структурой [1–3].

В большинстве гидродинамических моделей с сетеподобной областью течения в качестве уравнений движения используются классические уравнения Навье–Стокса или некоторые их упрощения. Эти уравнения выводятся на основе гипотезы о линейной связи между тангенциальным напряжением и скоростью сдвига. Данная гипотеза, называемая *законом вязкого трения Ньютона*, подтверждается для большинства низкомолекулярных жидкостей. Однако при изучении динамики высокомолекулярных соединений и сред, склонных к структурообразованию, обнаружены различные отклонения от “ньютоновского” поведения [4, 5]. Жидкости, не подчиняющиеся при своем течении закону трения Ньютона, принято называть *неньютоновскими*. К ним относятся, например, жидкости с памятью [6, 7], реологические характеристики которых зависят от предыстории деформаций и напряжений. В соответствующих реологических моделях содержатся некоторые интегралы по времени с интервалами от нуля (либо даже от $-\infty$) до текущего момента времени. Это определяет актуальность исследований интегро-дифференциальных уравнений, заданных на сетевых носителях.

В настоящей статье изучается линейная интегро-дифференциальная система, возникающая при моделировании течения неньютоновской жидкости с памятью в трёхмерной сетеподобной области $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, где

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^N \mathcal{P}_i, \quad \mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^M \mathcal{Q}_j;$$

$\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{Q}_j$ – ограниченные локально-липшицевы области в $\mathbb{R}^3$, причём

$$\mathcal{P}_i \cap \mathcal{Q}_j = \emptyset \quad \text{для любых } i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M};$$

$$\overline{\mathcal{P}_i} \cap \overline{\mathcal{P}_k} = \emptyset \quad \text{для любых } i, k = \overline{1, N}, \quad i \neq k;$$

$$\overline{\mathcal{Q}_j} \cap \overline{\mathcal{Q}_l} = \emptyset \quad \text{для любых } j, l = \overline{1, M}, \quad j \neq l.$$

Заметим, что множество $\tilde{\mathcal{P}}$ можно рассматривать как модель трубопроводной сети [8], предполагая, что $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N$ – трубы, а $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_M$ – узловые места (узлы), в которых соединяются трубы.

Предположим, что граница каждого узла Q_j , $j = \overline{1, M}$, имеет лишь одну связную компоненту и существуют ровно m_j областей $P_{j_1}, P_{j_2}, \dots, P_{j_{m_j}}$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{m_j} \leq N$, таких, что $\overline{Q_j} \cap \overline{P_{j_k}} \neq \emptyset$ для каждого $k = \overline{1, m_j}$.

Через Υ обозначим множество j таких, что $m_j \geq 2$. Если $j \in \Upsilon$, будем говорить, что Q_j – *внутренний узел*. В случае когда $j \in \{1, \dots, M\} \setminus \Upsilon$, узел Q_j будем называть *внешним узлом*.

Пусть $\Pi_{j_n} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{Q_j} \cap \overline{P_{j_n}}$ – поверхность примыкания трубы P_{j_n} к узлу Q_j . Предположим, что Π_{j_n} – плоская поверхность и для каждой области P_i существуют ровно два узла Q_{i_1} и Q_{i_2} таких, что

$$\overline{P_i} \cap \overline{Q_{i_1}} \neq \emptyset, \quad \overline{P_i} \cap \overline{Q_{i_2}} \neq \emptyset.$$

Тогда для каждого $i = \overline{1, N}$ однозначно определена пара чисел (i'_1, i'_2) такая, что

$$\overline{P_i} \cap \overline{Q_{i_1}} = \Pi_{i_1 i'_1}, \quad \overline{P_i} \cap \overline{Q_{i_2}} = \Pi_{i_2 i'_2}.$$

Через Γ_i обозначим боковую поверхность трубы P_i , $i = \overline{1, N}$, т.е.

$$\Gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial P_i \setminus (\Pi_{i_1 i'_1} \cup \Pi_{i_2 i'_2}).$$

Введём также следующие обозначения: $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^N (\Pi_{i_1 i'_1} \cup \Pi_{i_2 i'_2})$ – объединение поверхностей примыкания труб к узлам, $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ – объединение боковых поверхностей труб.

Пусть $\mathbf{n}: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^3$ – вектор-функция такая, что

$$\mathbf{n}|_{\Pi_{i_1 i'_1} \cup \Pi_{i_2 i'_2}} = \mathbf{n}_i|_{\Pi_{i_1 i'_1} \cup \Pi_{i_2 i'_2}}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i(\mathbf{x})$ – внешняя (по отношению к области P_i) единичная нормаль к поверхности ∂P_i в точке $\mathbf{x} \in \partial P_i$.

Рассмотрим начально-краевую задачу, описывающую течение несжимаемой неньютоновской жидкости с памятью через систему труб $\mathcal{P}$ на промежутке времени $[0, T]$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \int_0^t \beta(s, t) \nabla^2 \mathbf{u}(\cdot, s) ds + \nabla \pi = \mathbf{f} \quad \text{в } \mathcal{P} \times (0, T), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \mathcal{P} \times (0, T), \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma \times (0, T), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_{\tan} = \mathbf{0}, \quad \pi = -\zeta + C \quad \text{на } \Pi \times (0, T), \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{в } \mathcal{P}, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{m_j} \int_{\Pi_{jk}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Pi = 0 \quad \text{для каждого } j \in \Upsilon, \quad (6)$$

где $\mathbf{u}: \mathcal{P} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ – скорость течения жидкости; $\pi: \mathcal{P} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – давление; η – коэффициент вязкости ($\eta > 0$); $\beta: [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция памяти (ядро вязкоупругости), $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, \infty)$; $\mathbf{f}: \mathcal{P} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ – поле внешних сил; функция $\zeta: \Pi \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ описывает давление на компонентах Π ; $\mathbf{u}_0: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$ – поле скоростей в начальный момент времени; $\mathbf{u}_{\tan}$ – касательная составляющая вектора $\mathbf{u}$, т.е. по определению $\mathbf{u}_{\tan} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$; символы ∇ и div обозначают соответственно градиент и дивергенцию по пространственным переменным x_1, x_2, x_3 ; $\nabla^2 \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа. Для упрощения предполагается, что

плотность жидкости равна единице. Произвольная константа C во втором равенстве из (4) отражает факт, что при задании давления важен только его перепад [9].

Соотношение (1) – это уравнение нестационарного движения вязкой жидкости с памятью в стоковом приближении, т.е. без учёта конвективных ускорений. В частном случае, когда $\beta(s, t) \equiv 0$, приходим к линеаризованным эволюционным уравнениям Навье–Стокса [2]. Если $\beta(s, t) \equiv b \exp(-a(t-s))$, где $a > 0$ и $b > 0$, то система (1), (2) сводится к линеаризованным уравнениям движения несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Олдройда [10–12]. Мы не будем ограничиваться конкретным выбором функции памяти – рассмотрим общую ситуацию, предполагая только, что функция β является неотрицательной и непрерывной.

Отметим, что равенство (2) выражает свойство несжимаемости жидкости, а краевое условие (3) означает, что жидкость прилипает к боковым стенкам труб. Наряду с условием прилипания, в моделях неньютоновской гидродинамики также широко используются различные условия пристенного проскальзывания (см., например, [13–15]). Краевые условия (4) задают касательную составляющую вектора скорости и давление на участках примыкания труб к узлам. Равенства (6) – это условия трансмиссии типа Кирхгофа, обеспечивающие выполнение закона сохранения массы во внутренних узлах сети.

Основная цель настоящей статьи – доказать однозначную разрешимость начально-краевой задачи (1)–(6) в слабой постановке. Работа организована следующим образом. В п. 2 рассматриваются необходимые функциональные пространства и вводится определение слабого решения. В п. 3 сформулирован основной результат работы – теорема о существовании и единственности непрерывного по времени слабого решения при естественных допущениях относительно данных задачи, а также приводится энергетическое равенство, которому удовлетворяет слабое решение. В п. 4 установлены некоторые вспомогательные результаты, в частности, получены оценки норм слабого решения в пространствах $L^\infty(0, T; L^2(\mathcal{P}))$ и $L^2(0, T; W^{1,2}(\mathcal{P}))$. Доказательству теоремы существования и единственности посвящён последний пункт.

2. Слабая формулировка задачи. Через $\mathcal{V}_\Pi(\mathcal{P})$ обозначим множество вектор-функций $\nu: \overline{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ таких, что $\nu|_{\overline{\mathcal{P}}_i} \in C^\infty(\overline{\mathcal{P}}_i) \stackrel{\text{def}}{=} C^\infty(\overline{\mathcal{P}}_i) \times C^\infty(\overline{\mathcal{P}}_i) \times C^\infty(\overline{\mathcal{P}}_i)$, $i = \overline{1, N}$, $\operatorname{div} \nu = 0$ в $\mathcal{P}$, $\nu = 0$ на Γ , $\nu_{\tan} = 0$ на Π и для каждого $j \in \Upsilon$ выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{m_j} \int_{\Pi_{jk}} \nu \cdot n \, d\Pi = 0.$$

Обозначим через $H_\Pi(\mathcal{P})$ замыкание множества $\mathcal{V}_\Pi(\mathcal{P})$ в декартовом произведении пространств Лебега $L^2(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathcal{P}) \times L^2(\mathcal{P}) \times L^2(\mathcal{P})$, а через $V_\Pi(\mathcal{P})$ – замыкание $\mathcal{V}_\Pi(\mathcal{P})$ в декартовом произведении пространств Соболева $W^{1,2}(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} W^{1,2}(\mathcal{P}) \times W^{1,2}(\mathcal{P}) \times W^{1,2}(\mathcal{P})$.

В пространствах $H_\Pi(\mathcal{P})$ и $V_\Pi(\mathcal{P})$ введём скалярные произведения и нормы по формулам

$$(v, w)_{H_\Pi(\mathcal{P})} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{P}} v \cdot w \, dx, \quad \|v\|_{H_\Pi(\mathcal{P})} \stackrel{\text{def}}{=} (v, v)_{H_\Pi(\mathcal{P})}^{1/2},$$

$$(v, w)_{V_\Pi(\mathcal{P})} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{P}} \nabla v : \nabla w \, dx, \quad \|v\|_{V_\Pi(\mathcal{P})} \stackrel{\text{def}}{=} (v, v)_{V_\Pi(\mathcal{P})}^{1/2},$$

где символ “:” используется для обозначения скалярного произведения 3×3 -матриц.

Поскольку $\operatorname{meas}(\Gamma_i) > 0$, $i = \overline{1, N}$, то из следующей леммы вытекает, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{V_\Pi(\mathcal{P})}$ определено корректно, а норма $\|\cdot\|_{V_\Pi(\mathcal{P})}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\mathcal{P})}$.

Лемма 1 [16, § II.5]. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$. Если $S \subset \partial\Omega$ и $\operatorname{meas}(S) > 0$, то существует константа $K_0 = K_0(\Omega, S)$ такая, что

$$\|\omega\|_{L^2(\Omega)} \leq K_0(\Omega, S) \left(\|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)} + \int_S |\omega| \, dS \right), \quad \omega \in W^{1,2}(\Omega).$$

Будем предполагать, что выполнены следующие два условия:

(i) функция $\beta: [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ непрерывна;

(ii) выполнены включения: $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathcal{P}))$, $\zeta \in L^2(0, T; L^2(\Pi))$ и $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_\Pi(\mathcal{P})$.

Лемма 2. Если пара $(\mathbf{u}, \pi)$ – классическое решение начально-краевой задачи (1)–(6), то выполняется равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} + \eta(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} + \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} = \\ = \int_{\Pi} \zeta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \end{aligned} \quad (7)$$

для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})$ и любого $t \in [0, T]$.

Доказательство. Умножим обе части равенства (1) на вектор-функцию $\mathbf{v}$ скалярно в пространстве $\mathbf{L}^2(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} - \underbrace{\eta(\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}}_{=J_1} - \underbrace{\left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla^2 \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}}_{=J_2} + \\ + \underbrace{(\nabla \pi, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}}_{=J_3} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} J_1 = \eta \int_{\mathcal{P}} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \eta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i d\mathbf{x} = \eta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i n_j d\Pi - \eta \sum_{i,j=1}^3 \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \\ = \eta \int_{\Pi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} d\Pi - \eta \int_{\mathcal{P}} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} = \eta \int_{\Pi} \frac{\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Pi - \eta \int_{\mathcal{P}} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме того, так как $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в $\mathcal{P} \times (0, T)$ и $\mathbf{u}_{\tan} = \mathbf{0}$ на $\Pi \times (0, T)$, то $\partial(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})/\partial \mathbf{n} = 0$ на $\Pi \times (0, T)$. Поэтому из (9) следует, что

$$J_1 = -\eta(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}. \quad (10)$$

Аналогично получаем

$$J_2 = - \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}. \quad (11)$$

Далее, применяя интегрирование по частям, с учётом равенства $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ в $\mathcal{P}$ находим

$$\begin{aligned} J_3 = \int_{\mathcal{P}} \nabla \pi \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \pi}{\partial x_i} v_i d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Pi} \pi v_i n_i d\Pi - \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{P}} \pi \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Pi} \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi - \int_{\mathcal{P}} \pi \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Pi} \pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi, \end{aligned}$$

откуда, принимая во внимание краевое условие $\pi = -\zeta + C$ на $\Pi \times (0, T)$, выводим следующее равенство:

$$J_3 = - \int_{\Pi} \zeta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi + C \int_{\Pi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{\Pi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = 0,$$

поэтому формула (12) упрощается и принимает вид

$$J_3 = - \int_{\Pi} \zeta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi. \quad (13)$$

Наконец, подставляя (10), (11) и (13) в равенство (8), приходим к соотношению (7). Лемма доказана.

Лемма 2 приводит к следующему определению.

Определение. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(6) будем называть вектор-функцию $\mathbf{u}: \mathcal{P} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ такую, что

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})) \cap C([0, T]; \mathbf{H}_{\Pi}(\mathcal{P})), \quad \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$$

и выполнено равенство (7) в смысле скалярных распределений на интервале $(0, T)$.

Через $\mathbf{U}(\beta, \mathbf{f}, \zeta, \mathbf{u}_0)$ обозначим множество слабых решений задачи (1)–(6). Ниже будет показано, что это множество состоит из единственного элемента при естественных допущениях относительно данных β , $\mathbf{f}$, ζ и $\mathbf{u}_0$.

3. Основной результат работы.

Теорема. Пусть выполнены условия (i) и (ii). Тогда начально-краевая задача (1)–(6) имеет единственное слабое решение $\mathbf{u}$ и для него справедливо энергетическое равенство

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + 2\eta \int_0^{\tau} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 dt + 2 \int_0^{\tau} \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) \right)_{L^2(\mathcal{P})} dt = \\ & = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + 2 \int_0^{\tau} \int_{\Pi} \zeta(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Pi dt + 2 \int_0^{\tau} (\mathbf{f}(\cdot, t), \mathbf{u}(\cdot, t))_{L^2(\mathcal{P})} dt, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство этой теоремы приводится в п. 5.

4. Вспомогательные результаты. Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – гильбертовы пространства и имеет место цепочка вложений

$$\mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{Y} \simeq \mathbf{Y}^* \hookrightarrow \mathbf{X}^*,$$

где каждое пространство плотно в последующем пространстве и вложения непрерывны. Если функция ψ принадлежит пространству $L^2(0, T; \mathbf{X})$, а её обобщённая производная $d\psi/dt$ принадлежит пространству $L^2(0, T; \mathbf{X}^*)$, то функция ψ почти всюду равна некоторой непрерывной функции из отрезка $[0, T]$ в $\mathbf{Y}$ и, кроме того, справедливо равенство

$$\frac{d}{dt} \|\psi\|_{\mathbf{Y}}^2 = 2 \left\langle \frac{d\psi}{dt}, \psi \right\rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}}$$

почти всюду на $(0, T)$, где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{X}^* \times \mathbf{X}}$ обозначают отношение двойственности между пространством $\mathbf{X}$ и сопряжённым пространством $\mathbf{X}^*$.

Доказательство этой леммы приводится в монографии [17, гл. III, § 1].

Пусть $\gamma_\Pi: \mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Pi)$ – линейный непрерывный оператор такой, что $\gamma_\Pi \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}|_\Pi$ для любой вектор-функции $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{V}_\Pi(\mathcal{P})$. Существование, единственность и непрерывность оператора γ_Π , называемого *оператором следа*, вытекает из классических результатов о следах функций, принадлежащих пространствам Соболева (см., например, [18, § 2.4]).

Лемма 4. Если $\mathbf{u} \in \mathbf{U}(\beta, \mathbf{f}, \zeta, \mathbf{u}_0)$, то справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \max_{\tau \in [0, T]} \left(\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^\tau \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})}^2 ds \right) \leq \\ & \leq e^{K(\beta, T, \eta)T} \left(\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \frac{\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\mathcal{P}))}^2}{K(\beta, T, \eta)} + \frac{2\|\gamma_\Pi\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P}), \mathbf{L}^2(\Pi))}^2 \|\zeta\|_{\mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Pi))}^2}{\eta} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$K(\beta, T, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\eta^2} \max_{t \in [0, T]} \int_0^t \beta^2(s, t) ds + 1 > 0.$$

Доказательство. Отождествляя пространства $\mathbf{H}_\Pi(\mathcal{P})$ и сопряжённое к нему $\mathbf{H}_\Pi^*(\mathcal{P})$ в соответствии с теоремой представления Рисса, приходим к цепочке вложений

$$\mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P}) \hookrightarrow \mathbf{H}_\Pi(\mathcal{P}) \simeq \mathbf{H}_\Pi^*(\mathcal{P}) \hookrightarrow \mathbf{V}_\Pi^*(\mathcal{P}).$$

Заметив, что имеет место включение

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}_\Pi^*(\mathcal{P})),$$

и применив лемму 3 в предположении, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P}), \quad \mathbf{Y} = \mathbf{H}_\Pi(\mathcal{P}), \quad \boldsymbol{\psi} = \mathbf{u},$$

получаем, что почти всюду на $(0, T)$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 = 2 \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \right\rangle_{\mathbf{V}_\Pi^*(\mathcal{P}) \times \mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})}. \quad (16)$$

Поскольку $\mathbf{u}$ – слабое решение начально-краевой задачи (1)–(6), то

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} \right\rangle_{\mathbf{V}_\Pi^*(\mathcal{P}) \times \mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})} + \eta (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} + \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{v} \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} = \\ & = \int_\Pi \zeta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Pi + (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \end{aligned} \quad (17)$$

для любой вектор-функции $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})$.

Подставляя $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(\cdot, t)$ в (17) и принимая во внимание (16), приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + 2\eta \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})}^2 + 2 \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{u}(\cdot, t) \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} = \\ & = 2 \int_\Pi \zeta(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\Pi + 2(\mathbf{f}(\cdot, t), \mathbf{u}(\cdot, t))_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}. \end{aligned} \quad (18)$$

Затем, применяя неравенства Гёльдера и Юнга, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + 2\eta \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 &\leq \eta \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 + K(\beta, T, \eta) \eta \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds + \\ &+ \frac{2}{\eta} \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 \|\gamma_{\Pi}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 + \frac{\|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2}{K(\beta, T, \eta)} + K(\beta, T, \eta) \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 &\leq K(\beta, T, \eta) \left(\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds \right) + \\ &+ \frac{2}{\eta} \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 \|\gamma_{\Pi}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 + \frac{\|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2}{K(\beta, T, \eta)}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t от 0 до τ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^{\tau} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds &\leq \\ &\leq \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + K(\beta, T, \eta) \int_0^{\tau} \left(\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^t \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds \right) dt + \\ &+ \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \int_0^{\tau} \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 dt + \frac{2\|\gamma_{\Pi}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2}{\eta} \int_0^{\tau} \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 dt. \end{aligned}$$

Наконец, применив лемму Гронуолла–Беллмана, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \max_{\tau \in [0, T]} \left(\|\mathbf{u}(\cdot, \tau)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^{\tau} \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds \right) &\leq \\ &\leq e^{K(\beta, T, \eta)T} \left(\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 + \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \int_0^T \|\mathbf{f}(\cdot, t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})}^2 dt + \frac{2\|\gamma_{\Pi}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2}{\eta} \int_0^T \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 dt \right), \end{aligned}$$

из которой и вытекает требуемое неравенство (15). Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы. Для нахождения слабого решения $\mathbf{u}$ построим последовательность приближённых решений $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ по методу Фаэдо–Галёркина, а затем осуществим предельный переход при $m \rightarrow \infty$, используя равномерную ограниченность норм $\{\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0, T; \mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P}))}\}_{m=1}^{\infty}$.

Приближённые решения будем искать в виде сумм:

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m g_{mj}(t) \mathbf{v}_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \quad t \in (0, T),$$

где $g_{mj}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ – неизвестные функции и $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{\infty}$ – полная последовательность в $\mathbf{V}_{\Pi}(\mathcal{P})$, образующая ортонормированный базис в $\mathbf{H}_{\Pi}(\mathcal{P})$.

Зафиксируем произвольное натуральное число m . Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{v}_k \right)_{L^2(\mathcal{P})} + \eta (\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{v}_k)_{L^2(\mathcal{P})} + \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}_m(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{v}_k \right)_{L^2(\mathcal{P})} = \\ = \int_{\Pi} \zeta \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} d\Pi + (\mathbf{f}, \mathbf{v}_k)_{L^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0, T), \quad k = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{x}, 0) = \sum_{k=1}^m (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_k)_{L^2(\mathcal{P})} \mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P}. \quad (20)$$

Линейная интегро-дифференциальная система (19) с начальным условием (20) единственным образом определяет функции g_{mk} на всём отрезке $[0, T]$. Выведем независящие от параметра m оценки решений задачи (19), (20).

Предположим, что вектор-функция $\mathbf{u}_m$ удовлетворяет (19) и (20). Умножим обе части (19) на $g_{mk}(t)$. Складывая полученные равенства по $k = \overline{1, m}$, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \mathbf{u}_m \right)_{L^2(\mathcal{P})} + \eta (\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{u}_m)_{L^2(\mathcal{P})} + \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}_m(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{u}_m \right)_{L^2(\mathcal{P})} = \\ = \int_{\Pi} \zeta \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} d\Pi + (\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)_{L^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (21)$$

Умножим обе части равенства (21) на 2. С помощью элементарных преобразований приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + 2\eta \|\mathbf{u}_m\|_{V_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 + 2 \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}_m(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{u}_m \right)_{L^2(\mathcal{P})} = \\ = 2 \int_{\Pi} \zeta \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} d\Pi + 2(\mathbf{f}, \mathbf{u}_m)_{L^2(\mathcal{P})}, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Затем, применяя неравенства Гёльдера и Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + 2\eta \|\mathbf{u}_m\|_{V_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 \leq \\ \leq \eta \|\mathbf{u}_m\|_{V_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 + K(\beta, T, \eta) \eta \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\cdot, s)\|_{V_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds + \frac{2}{\eta} \|\zeta\|_{L^2(\Pi)}^2 \|\gamma_{\Pi}\|_{\mathcal{L}(V_{\Pi}(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 + \\ + \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + K(\beta, T, \eta) \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\mathcal{P})}^2, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \|\mathbf{u}_m\|_{V_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 \leq K(\beta, T, \eta) \left(\|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^t \|\mathbf{u}_m(\cdot, s)\|_{V_{\Pi}(\mathcal{P})}^2 ds \right) + \\ + \frac{2}{\eta} \|\zeta\|_{L^2(\Pi)}^2 \|\gamma_{\Pi}\|_{\mathcal{L}(V_{\Pi}(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 + \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\mathcal{P})}^2, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (22)$$

Проинтегрируем обе части неравенства (22) по t от 0 до τ :

$$\begin{aligned} & \|u_m(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^\tau \|u_m(\cdot, s)\|_{V_\Pi(\mathcal{P})}^2 ds \leq \\ & \leq \|u_m(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + K(\beta, T, \eta) \int_0^\tau \left(\|u_m(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^t \|u_m(\cdot, s)\|_{V_\Pi(\mathcal{P})}^2 ds \right) dt + \\ & + \frac{2}{\eta} \|\gamma_\Pi\|_{\mathcal{L}(V_\Pi(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 \int_0^\tau \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 dt + \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \int_0^\tau \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 dt. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства с помощью леммы Гронолла–Беллмана выводим оценку

$$\begin{aligned} & \|u_m(\cdot, \tau)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^\tau \|u_m(\cdot, s)\|_{V_\Pi(\mathcal{P})}^2 ds \leq \\ & \leq e^{K(\beta, T, \eta)\tau} \left(\|u_m(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \frac{2}{\eta} \|\gamma_\Pi\|_{\mathcal{L}(V_\Pi(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 \int_0^\tau \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \int_0^\tau \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 dt \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Полагая $\tau = T$ в (23) и принимая во внимание соотношения

$$\|u_m(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 = \sum_{k=1}^m (u_0, v_k)_{L^2(\mathcal{P})}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathcal{P})}^2, \quad m \in \mathbb{N},$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|u_m(\cdot, T)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \eta \int_0^T \|u_m(\cdot, s)\|_{V_\Pi(\mathcal{P})}^2 ds \leq \\ & \leq e^{K(\beta, T, \eta)T} \left(\|u_0\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 + \frac{2}{\eta} \|\gamma_\Pi\|_{\mathcal{L}(V_\Pi(\mathcal{P}), L^2(\Pi))}^2 \int_0^T \|\zeta(\cdot, t)\|_{L^2(\Pi)}^2 dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{K(\beta, T, \eta)} \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\mathcal{P})}^2 dt \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что правая часть неравенства (24) не зависит от m . Следовательно, имеет место равномерная по m ограниченность норм $\{\|u_m\|_{L^2(0, T; V_\Pi(\mathcal{P}))}\}_{m=1}^\infty$. Поэтому, переходя к подпоследовательности (если это необходимо), получаем, что

$$u_m \rightarrow u \text{ слабо в } L^2(0, T; V_\Pi(\mathcal{P})) \text{ при } m \rightarrow \infty \quad (25)$$

для некоторой вектор-функции u из пространства $L^2(0, T; V_\Pi(\mathcal{P}))$.

Умножим обе части равенства (19) на произвольную C^∞ -гладкую функцию φ с носителем, содержащимся в интервале $(0, T)$, и проинтегрируем по t от 0 до T . Применяв интегрирование по частям к первому слагаемому из левой части полученного равенства, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi' dt + \eta \int_0^T (\nabla \mathbf{u}_m, \nabla \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi dt + \int_0^T \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}_m(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{v}_k \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi dt = \\ = \int_0^T \left(\int_{\Pi} \zeta \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} d\Pi \right) \varphi dt + \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi dt, \quad k = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (26)$$

где штрих обозначает классическую производную по t .

Принимая во внимание слабую сходимость (25), перейдём к пределу при $m \rightarrow \infty$ в равенстве (26) и в результате получим

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mathbf{u}, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi' dt + \eta \int_0^T (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi dt + \int_0^T \left(\int_0^t \beta(s, t) \nabla \mathbf{u}(\cdot, s) ds, \nabla \mathbf{v}_k \right)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi dt = \\ = \int_0^T \left(\int_{\Pi} \zeta \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} d\Pi \right) \varphi dt + \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_k)_{\mathbf{L}^2(\mathcal{P})} \varphi dt \end{aligned} \quad (27)$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^\infty$ — полная последовательность в пространстве $\mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})$, равенство (27) останется справедливым, если в нем заменить $\mathbf{v}_k$ на произвольную вектор-функцию $\mathbf{v}$ из пространства $\mathbf{V}_\Pi(\mathcal{P})$. Отсюда, в частности, следует включение

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}_\Pi^*(\mathcal{P})).$$

Поэтому, снова используя лемму 3, получаем, что $\mathbf{u} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}_\Pi(\mathcal{P}))$.

Кроме того, с учётом соотношения (20) нетрудно проверить, что для вектор-функции $\mathbf{u}$ выполнено начальное условие $\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0$. Таким образом, установлено, что $\mathbf{u}$ — слабое решение начально-краевой задачи (1)–(6).

Покажем теперь, что найденное нами слабое решение $\mathbf{u}$ является единственным. Предположим, что

$$\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_{**} \in \mathbf{U}(\beta, \mathbf{f}, \zeta, \mathbf{u}_0), \quad \tilde{\mathbf{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{**}.$$

Очевидно, что имеет место включение $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{U}(\beta, \mathbf{0}, 0, \mathbf{0})$. Тогда, согласно лемме 4, получаем, что $\tilde{\mathbf{u}} \equiv \mathbf{0}$ и, следовательно, $\mathbf{u}_* \equiv \mathbf{u}_{**}$.

Наконец, интегрируя обе части равенства (18) по t от 0 до τ , выводим энергетическое равенство (14). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Panasenko G., Pileckas K.* Flows in a tube structure: equation on the graph // J. of Math. Phys. 2014. V. 55. Art. ID 081505.
2. *Provotorov V.V., Provotorova E.N.* Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain // Вестн. Санкт-Петербургского ун-та. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 4. С. 431–443.
3. *Baranovskii E.S., Provotorov V.V., Artemov M.A., Zhabko A.P.* Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: existence results // Symmetry. 2021. V. 13. № 7. Art. ID 1300.
4. *Astarita G., Marucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. New York, 1974.

5. *Cioranescu D., Girault V., Rajagopal K.R.* Mechanics and Mathematics of Fluids of the Differential Type. Cham, 2016.
6. *Брутян М.А., Крапивский П.Л.* Гидродинамика неньютоновских жидкостей // Итоги науки и техники. Сер. Комплексные и специальные разделы механики. 1991. Т. 4. С. 3–98.
7. *Saut J.-C.* Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids // Lect. on the Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations. Part 3. Somerville, 2013. P. 325–393.
8. *Baranovskii E.S.* A novel 3D model for non-Newtonian fluid flows in a pipe network // Math. Methods in the Appl. Sci. 2021. V. 44. № 5. P. 3827–3839.
9. *Рагулин В.В.* К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления и напора // Динамика сплошной среды. 1976. Т. 27. С. 78–92.
10. *Oskolkov A.P., Shadiev R.* Towards a theory of global solvability on $[0, \infty)$ of initial-boundary value problems for the equations of motion of Oldroyd and Kelvin–Voight fluids // J. of Math. Sci. 1994. V. 68. P. 240–253.
11. *Oskolkov A.P.* Smooth global solutions of initial boundary-value problems for the equations of Oldroyd fluids and of their ϵ -approximations // J. of Math. Sci. 1998. V. 89. P. 1750–1763.
12. *Bir B., Goswami D.* On a three step two-grid finite element method for the Oldroyd model of order one // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2021. Bd. 101. № 11. Art. ID e202000373.
13. *Beirão da Veiga H.* On the regularity of flows with Ladyzhenskaya shear dependent viscosity and slip and non-slip boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. 2005. V. 58. P. 552–577.
14. *Baranovskii E.S., Artemov M.A.* Global existence results for Oldroyd fluids with wall slip // Acta Applicandae Mathematicae. 2017. V. 147. № 1. P. 197–210.
15. *Baranovskii E.S.* Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Comm. on Pure and Appl. Anal. 2019. V. 18. № 2. P. 735–750.
16. *Galdi G.P.* An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations. Steady-State Problems. New York, 2011.
17. *Temam R.* Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. Amsterdam; New York; Oxford, 1977.
18. *Nečas J.* Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Heidelberg, 2012.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.11.2021 г.

После доработки 21.02.2023 г.

Принята к публикации 24.02.2023 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72+519.642.2

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. Н. С. Габбасов

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для отыскания его приближённого решения в пространстве обобщённых функций предложен и обоснован специальный вариант обобщённого метода коллокации.

DOI: 10.31857/S0374064123040088, EDN: ANOUZQ

Введение. Настоящая работа посвящена приближённому решению линейного интегро-дифференциального уравнения (ИДУ)

$$Ax \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds = y(t), \quad (1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, q}$, и $p \in \mathbb{Z}^+$ являются фиксированными; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определёнными свойствами “гладкости” точечного характера, а x – искомая функция. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, важен вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность данной задачи. При обсуждении этого вопроса вполне естественно учитывать, что в случае $p = 0$ ИДУ (1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что УТР широко применяются в различных приложениях, в частности, УТР встречаются в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и приведённую в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщённых функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщённых функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно функционала “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1) и УТР соответствующие идеи и результаты для УТР можно успешно использовать для корректной постановки задачи для уравнения (1), разработки и теоретического обоснования приближённых методов его решения в пространствах обобщённых функций.

ИДУ (1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщённых функций типа D . В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ (1) в некотором пространстве типа D обобщённых функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближённого решения в пространствах обобщённых функций с

соответствующим теоретическим обоснованием. Определённые результаты в этой области получены в работах [8, 9], где предложены и обоснованы прямые проекционные методы приближённого решения ИДУ вида (1), основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов.

В настоящей статье разработан обобщённый вариант метода коллокации, специально приспособленный к приближённому решению ИДУ (1) в пространстве типа D обобщённых функций. Основное внимание уделено обоснованию построенного метода в смысле [10, гл. 1], а именно доказана теорема существования и единственности решения соответствующего приближённого уравнения, установлены оценки погрешности приближённого решения и доказана безусловная сходимость последовательности приближённых решений к точному решению однозначно разрешимого ИДУ (1). Также исследованы вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

1. О пространствах основных и обобщённых функций. Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на отрезке I функций с обычной макс-нормой и $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ множество всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [11]). Назовём его *классом “точечно-гладких” функций* (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим основное в наших исследованиях пространство

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \{y \in C\{m; 0\} : y^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\},$$

где число $p \in \mathbb{Z}^+$ удовлетворяет неравенству $p < m$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2)$$

где $T : Y \rightarrow C$ – “характеристический” оператор класса Y , определённый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t).$$

Лемма 1 [8]. *i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (3)$$

причём $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$, $i = \overline{p, m-1}$.

ii) Пространство Y по норме (2) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций, в котором введём специальную норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)|, \quad z \in C^{(p)}, \quad (4)$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2 [8]. *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (4) полно и нормально вложено в пространство C .*

Следствие 1. *Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C$.*

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \{z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, p-1}\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщённых функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad (5)$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и её “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t)y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0), \quad y \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}. \quad (6)$$

Очевидно, что векторное пространство X банахово относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \quad (7)$$

2. О полиномиальном приближении “точечно-гладких” функций. Введём следующий класс алгебраических полиномов:

$$\Pi_p^{m+l} \equiv \text{span} \{t^i\}_p^{m+l}, \quad l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть $\Gamma_n \equiv \Gamma_{4n+m-p} : Y \rightarrow \Pi_p^{m+4n-1}$ – оператор, ставящий в соответствие любой функции $y \in Y$ полином $\Gamma_n y$, однозначно определяемый условиями

$$\begin{aligned} (T\Gamma_n y - Ty)(\nu_j) &= 0, \quad (T\Gamma_n y)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}, \\ (\Gamma_n y - y)^{\{i\}}(0) &= 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\{\nu_j\}_1^n$ – система узлов Чебышёва первого рода.

Лемма 3. Оператор Γ_n действует согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{4n+m-p}(y; t) \equiv t^m (\Phi_n T y)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad y \in Y, \quad (9)$$

где $\Phi_n \equiv \Phi_{4n-1} : C \rightarrow \Pi_0^{4n-1}$ – интерполяционный оператор, который всякой функции $f \in C$ ставит в соответствие полином $\Phi_n f$, однозначно определённый из $4n$ условий

$$(\Phi_n f)(\nu_j) = f(\nu_j), \quad (\Phi_n f)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Доказательство. Искомый полином $\Gamma_n y \in \Pi_p^{m+4n-1}$ представим в виде

$$\Gamma_n y \equiv \sum_{i=p}^{4n+m-1} \alpha_i t^i = \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i + t^m P_{4n-1}(t), \quad P_{4n-1} \equiv \sum_{i=0}^{4n-1} \alpha_{m+i} t^i. \quad (11)$$

При этом на основании леммы 1 имеем

$$P_{4n-1}(t) = (T\Gamma_n y)(t), \quad \alpha_i = (\Gamma_n y)^{\{i\}}(0)/i!, \quad i = \overline{p, m-1}. \quad (12)$$

Тогда из (11) с учётом равенств (12), (8) и (10) вытекает соотношение (9). Лемма доказана.

Одно из аппроксимативных свойств полиномиального оператора Γ_n в пространстве Y устанавливает

Лемма 4. Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leq d_1 \omega\left(Ty; \frac{\ln n}{n}\right), \quad (13)$$

где $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ , $0 < \Delta \leq 2$ (здесь и далее d_i , $i = 1, 2$, – некоторые константы, значения которых не зависят от натурального числа n).

Справедливость леммы 4 легко следует из леммы 1, соотношений (9), (2) и оценки [12]:

$$\|f - \Phi_n f\|_C \leq d_1 \omega\left(f; \frac{\ln n}{n}\right), \quad f \in C. \quad (14)$$

Далее введём в рассмотрение множество

$$Q_p^{4n+m-1} \equiv \{y \in \Pi_p^{4n+m-1} : (Ty_n)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}\}.$$

Лемма 5. Оператор $\Gamma_n : Y \rightarrow Q_p^{4n+m-1}$ является проекционным.

Доказательство. Пусть $y_n \in Q_p^{4n+m-1}$ – произвольный полином, $H_{ji}(t)$, $i = \overline{0, 3}$, $j = \overline{1, n}$, – фундаментальные полиномы Эрмита степени $4n - 1$ по узлам $\{\nu_j\}_1^n$ (см., например, [13, с. 63]). Тогда очевидно равенство

$$(Ty_n)(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^3 (Ty_n)^{(i)}(\nu_j) H_{ji}(t) = \sum_{j=1}^n (Ty_n)(\nu_j) H_{j0}(t) \equiv (\Phi_n Ty_n)(t). \quad (15)$$

Теперь из соотношений (9), (15) и леммы 1 следует, что $\Gamma_n y_n = y_n$. Лемма доказана.

3. Обобщённый метод коллокации на основе специального интерполяционного полинома. Пусть задано ИДУ (1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать, что $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I,$$

$$V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds, \quad (16)$$

где $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, $p < m$; $y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}$; ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y, \quad i = \overline{0, m-p-1}, \quad (17)$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Приближённое решение ИДУ (16) построим в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+4n} \delta^{\{i\}}(t), \quad (18)$$

$$g_n \equiv (Jz_n)(t), z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{4n-1} c_i t^i, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (19)$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s) ds,$$

при этом $J : C \rightarrow C^{(p)}$, $(Jz)^{(i)} = J_{p-i-1}z$, $i = \overline{0, p-1}$, $DJz = z$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{0, 4n+m-p-1}$, найдём согласно нашему методу из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(4n+m-p)$ -го порядка:

$$(T\rho_n)(\nu_j) = 0, \quad (TUx_n)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \quad (20)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближённого решения, а $\{\nu_j\}_1^n$ – использованная выше система узлов коллокации.

Следуя работе [14], примем соглашения, полезные при оформлении результатов по обоснованию приближённых методов. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, СЛАУ (20) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$, и последовательность приближённых решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (16) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (18)–(20) обоснованно применим к уравнению (16)”. Во-вторых, для погрешности приближённого решения введём специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка этой величины определяет скорость сходимости приближённых решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (16).

Для вычислительного алгоритма (16)–(20) справедлива

Теорема 1. Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в пространстве X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 из [8]), то прямой метод (18)–(20) обоснованно применим к уравнению (16), причём

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \quad (21)$$

где $\omega_t(h; \Delta)$ – частный модуль непрерывности функции $h(t, s)$ по переменной t ; $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T\psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $\Delta_n \equiv n^{-1} \ln n$.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (16) можно представить в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}, \quad (22)$$

в котором оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (18)–(20) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства основных пространств. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(4n+m-p)$ -мерное подпространство элементов вида (18) таких, что $(TUx_n)^{(k)}(\nu_j) = 0$, $k = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, n}$, а за $Y_n \subset Y$ примем класс Q_p^{4n+m-1} .

Покажем теперь, что система (18)–(20) эквивалентна линейному уравнению

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n Kx_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \Gamma_n y \in Y_n. \quad (23)$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ – решение уравнения (23), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n \tau_n^* = 0$, $\tau_n^* \equiv Kx_n^* - y$. В силу равенств (18), (19) и (9) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + \Phi_n T\tau_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1} (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!} \equiv 0. \quad (24)$$

На основании (3) очевидно, что тождество (24) равносильно системе

$$(z_n^* + \Phi_n T\tau_n^*)(t) \equiv 0, \quad (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}. \quad (25)$$

Подробно изучим первое тождество в (25). С учётом условий (10) и соотношений $\Phi_n z_n^* = z_n^*$, $z_n^* = TUz_n^* = TUx_n^* = TVx_n^*$ рассматриваемое тождество принимает вид

$$(T\rho_n^*)(\nu_j) = 0, \quad (TUx_n^*)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y.$$

Далее, поскольку $Vx_n^* = Uz_n^*$, имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (Vx_n^* + Kx_n^* - y)^{\{i\}}(0) \equiv (Uz_n^* + \tau_n^*)^{\{i\}}(0) = (\tau_n^*)^{\{i\}}(0), \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Следовательно, система (25) принимает вид

$$(T\rho_n^*)(\nu_j) = 0, \quad (TUx_n^*)^{(k)}(\nu_j) = 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Итак, СЛАУ (20) имеет единственное решение $\{c_j^*\}_{j=0}^{4n+m-p-1}$, т.е. решение уравнения (23) является решением системы (18)–(20).

Для получения обратного утверждения достаточно провести изложенные выше рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнения (23).

Покажем теперь “близость” операторов A и A_n на подпространстве X_n в условиях (17). Используя уравнения (16) и (23), представления (3) и (9), норму (2), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y = \|TKx_n - \Phi_n TKx_n\|_C. \quad (26)$$

На основании (16), (5) и (6) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+4n} \psi_i(t),$$

и тогда справедливо равенство

$$(TKx_n)(t) = \int_{-1}^1 h(t, s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+4n} f_i(t). \quad (27)$$

В силу (27), (14), леммы 2 и определения (7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$\begin{aligned} \|TKx_n - \Phi_n TKx_n\|_C &\equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - \Phi_n^t h)(t, s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+4n} (f_i - \Phi_n f_i)(t) \right| \leq \\ &\leq 2d_1 \|g_n\|_C \omega_t(h; \Delta_n) + d_1 \sum_i |c_{i+4n}| \omega(f_i; \Delta_n) \leq 2d_1 \|g_n\|_{(p)} \omega_t(h; \Delta_n) + d_1 \|x_n\|_X \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \leq \\ &\leq d_2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right] \|x_n\|_X, \quad d_2 \equiv 2d_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (26) и (28) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq d_2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right]. \quad (29)$$

На основании оценок (29) и (13) из теоремы 7 работы [10, с. 19] вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (21).

Следствие 2. Если h (по t), f_i , $i = \overline{0, m-p-1}$, и Ty принадлежат классу $C^{(1)}$, то в условиях теоремы 1 верна оценка $\Delta x_n^* = O(\Delta_n)$.

4. Об устойчивости и обусловленности предложенного метода. На практике приближённое уравнение (23), в силу неточности задания его элементов, решается, вообще говоря, только приближённо. Например, уравнение (23) заменяется уравнением вида

$$B_n x_n = u_n, \quad x_n \in X_n, \quad u_n \in Y_n,$$

в котором $B_n : X_n \rightarrow Y_n$ – линейный оператор, причём A_n и B_n , а также $y_n \equiv \Gamma_n y$ и u_n , “близки” в определённом смысле. Следовательно, возникает необходимость исследования на устойчивость прямых методов решения уравнения (22).

Далее снова рассмотрим операторное уравнение (22). Величина $\mu \equiv \mu(A) \equiv \|A\| \|A^{-1}\|$ называется *числом обусловленности* оператора A и уравнения (22) (см., например, [10, с. 24]); уравнение (22) называется *хорошо обусловленным*, если μ невелико, и *плохо обусловленным* – в противном случае.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 справедливы следующие утверждения:

i) прямой метод (18)–(20) для ИДУ (16) устойчив относительно малых возмущений исходных данных СЛАУ (20);

ii) при достаточно больших n существуют числа $\mu_n \equiv \mu(A_n)$ для приближённого уравнения (23), причём

$$\mu_n \leq c\mu, \quad 1 \leq c \leq 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad n \geq n_1(\varepsilon), \quad \lim \mu_n = \mu,$$

т.е. если ИДУ (16) хорошо обусловлено, то СЛАУ (20) также хорошо обусловлена.

Доказательство следует из теорем 11–13 работы [10, с. 22–25] с учётом того, что в условиях теоремы 1 при достаточно больших n аппроксимирующие операторы A_n непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_2.$$

5. Замечания.

1. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теоремы 1, а именно, из неё вытекает простое следствие: если исходные данные (h, f_i, Ty) уравнения (16) принадлежат классу C^1 , то в условиях теоремы 1 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(\Delta_n)$.

2. В силу определения нормы в $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности x_n^* приближённых решений к $x^* = A^{-1}y$ в метрике $D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ следует обычная сходимость в пространстве обобщённых функций, т.е. слабая сходимость.

3. Если $p = m = 0$, то ИДУ (16) преобразуется в интегральное уравнение Фредгольма второго рода в пространстве C , а предложенный вычислительный алгоритм (18)–(20) – в соответствующий вариант метода коллокации для уравнения второго рода, причём $Ty \equiv y$ и $h \equiv K$. Поэтому теорема 1 охватывает соответствующие результаты по обоснованию данного варианта метода коллокации для приближённого решения уравнений второго рода в классе C , при этом погрешность характеризуется оценкой $\|x_n^* - x^*\|_C = O[\omega_t(K; \Delta_n) + \omega(y; \Delta_n)]$.

4. Результат теоремы 2 по устойчивости предложенного метода позволяет найти численное решение исследуемых уравнений с любой наперёд заданной степенью точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // *SIAM J. Math. Anal.* 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М., 1972.
3. *Бжизатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // *Дифференц. уравнения.* 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщённых функций // *Изв. вузов. Математика.* 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщённых функций. Казань, 2006.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2012.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2003.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габбасов Н.С.* Коллокационные методы для одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 2022. Т. 58. № 9. С. 1234–1241.
10. *Габдуллаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.
11. *Прессдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // *Мат. исследования.* 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
12. *Olarly F.* Asupra ordinului de aproximatie prin polyinoame de interpolare de tip Hermite-Fejer en noduri cvadrupe // *An. Univ. Timisoara. Ser. Sti. Mat.-Fiz.* 1965. № 3. P. 227–234.
13. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций. Саратов, 1990.
14. *Габбасов Н.С.* Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Дифференц. уравнения.* 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.

Набережночелнинский институт
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 28.12.2022 г.
После доработки 28.12.2022 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.

УДК 517.977.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ
СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2023 г. А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин

Исследована задача оптимального управления с нерегулярным смешанным ограничением, линейным по переменной управления. Предложены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для такого класса задач. Рассмотрены соответствующие примеры.

DOI: 10.31857/S037406412304009X, EDN: ANTGIC

Введение. В работе исследуется один класс задач оптимального управления с нерегулярным смешанным ограничением, которое линейно по управляющему параметру. Приведём пример такой нерегулярной задачи.

Пример 1. Зафиксируем произвольную точку $a \in (0, 1)$. На фиксированном отрезке $[0, 1]$ рассмотрим следующую одномерную задачу оптимального управления с закреплёнными концами:

$$\begin{cases} \int_0^1 x(t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = u(t), \\ (t-a)u(t) - x(t) \leq 0, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

В этой задаче существует допустимое управление, которое имеет вид $\bar{u}(t) = 0$ при $t \leq a$, $\bar{u}(t) = 1/(1-a)$ при $t > a$. Соответствующая ему траектория имеет вид $\bar{x}(t) = 0$ при $t \leq a$, $\bar{x}(t) = (t-a)/(1-a)$ при $t > a$. Покажем, что этот процесс оптимален.

Для произвольного допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$, используя интегрирование по частям, имеем

$$\int_0^1 x(t) dt \geq \int_0^1 (t-a)u(t) dt = \int_0^1 (t-a)\dot{x}(t) dt = (t-a)x(t)|_0^1 - \int_0^1 x(t) dt.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\int_0^1 x(t) dt \geq \frac{1-a}{2}.$$

Однако в то же время

$$\int_0^1 \bar{x}(t) dt = \frac{1-a}{2},$$

что доказывает искомое утверждение.

В задаче (1) нарушаются условия регулярности смешанных ограничений при $t = a$. Применим формально к этой задаче известные условия оптимальности. Имеем

$$H(x, u, t, \psi, \lambda) = \psi u - \lambda x.$$

Поэтому $\dot{\psi}(t) = \lambda + \nu(t)$ – измеримая ограниченная неотрицательная функция, где $\lambda \geq 0$ – константа, ν – множитель Лагранжа, отвечающий за смешанные ограничения. Вместе с тем условие Эйлера–Лагранжа даёт

$$\psi(t) = (t - a)\nu(t).$$

Из этих двух равенств следует, что $\nu(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция при $t \neq a$ и имеет место равенство $(t - a)\dot{\nu}(t) = \lambda$. Отсюда получим

$$\nu(t) = \nu(0) + \int_0^t \frac{\lambda}{s - a} ds.$$

Однако функция $\nu(t)$ неотрицательна, поэтому неограниченность интеграла влечёт за собой, что $\lambda = 0$ и, следовательно, $\nu(t)$ постоянна при $t < a$ и $t > a$. Поскольку $\lambda = \psi(a) = 0$, то здесь известное условие нетривиальности

$$\lambda + |\psi(t)| > 0 \text{ для любого } t \in [0, 1]$$

нарушено в точке $t = a$, в которой условие максимума неинформативно.

Рассмотрим ещё один двумерный пример задачи с фиксированным левым и свободным правым концами.

Пример 2. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{cases} -\int_0^1 x^1(t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}^1(t) = u(t), \\ \dot{x}^2(t) = 2t, \\ tu(t) - x^2(t) \leq 0, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь очевиден оптимальный процесс $\bar{u}(t) = t$, $\bar{x}(t) = (\bar{x}^1(t), \bar{x}^2(t)) = (t^2/2, t^2)$. Условие регулярности смешанных ограничений нарушается при $t = 0$. Применим формально принцип максимума. Имеем

$$H(x, u, \psi, t, \lambda) = \psi_1 u + 2t\psi_2 + \lambda x^1.$$

Значит, $\dot{\psi}_1(t) = -\lambda$, $\psi_1(1) = 0$, в то время как $\dot{\psi}_2(t) = -\nu(t)$, $\psi_2(1) = 0$. Условие Эйлера–Лагранжа даёт равенство

$$\psi_1(t) = t\nu(t) \text{ для п.в. } t \in [0, 1].$$

Отсюда, поскольку $\nu(t)$ ограничена, $\psi_1(0) = 0$, следовательно, $\psi_1 = 0$ и $\lambda = 0$. Значит, $\nu = 0$ и, таким образом, $\psi_2 = 0$. Получили, что все множители Лагранжа равны нулю одновременно. Поэтому следует вывод, что функция $\nu(t)$ может не быть ограниченной в задаче с нерегулярными смешанными ограничениями.

Эти примеры демонстрируют, что класс существенно ограниченных измеримых функций является слишком узким, чтобы гарантировать включение для множителя Лагранжа, отвечающего нерегулярным смешанным ограничениям. Поэтому возникает естественный вопрос о более широком пространстве для этого множителя и соответственно об уточнённых необходимых условиях оптимальности для задач со смешанными ограничениями, которые не удовлетворяют известному условию регулярности. В настоящей работе предпринимается попытка найти такие пространство и условия, в частном случае, ограничений, линейных по переменной управления. Оказывается, что, как и в случае чистых фазовых ограничений, здесь возможно ограничиться запасом борелевских мер.

1. Постановка задачи, определения и основной результат. На фиксированном отрезке времени рассмотрим задачу оптимального управления со смешанными ограничениями

$$\begin{cases} \Phi(x_0, u(\cdot)) := \varphi(p) + \int_0^1 f_0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, 1], \\ g(x(t), t) + \langle u(t), a(t) \rangle \leq 0, \\ u(t) \in U \text{ для п.в. } t, \\ p \in S. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $p = (x_0, x_1)$, $x_0 = x(0)$, $x_1 = x(1)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов. Множества $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и $S \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ выпуклы и компактны. Отображения $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми. При этом считается, что f – линейное отображение по переменной управления u , т.е.

$$f(x, u, t) = f_1(x, t) + F(x, t)u,$$

а f_0 – выпуклая функция по u .

Пара функций (x, u) называется *процессом управления*, если $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна, $u(\cdot)$ измерима и существенно ограничена, и $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ для п.в. $t \in [0, 1]$. Процесс управления называется *допустимым*, если он удовлетворяет всем наложенным ограничениям задачи (3). Напомним, что допустимый процесс $(\bar{x}, \bar{u})$ называется *сильным минимумом* в задаче (3), если существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого допустимого процесса (x, u) такого, что $|x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon_0$ для любого $t \in [0, 1]$, имеет место неравенство $\Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \leq \Phi(x_0, u(\cdot))$, где $\bar{x}_0 = \bar{x}(0)$.

Введём обозначение

$$U(x, t) := \{u \in U : r(x, u, t) \leq 0\},$$

где $r(x, u, t) := g(x, t) + \langle a(t), u \rangle$. Рассмотрим подмножество $U_R(x, t)$ множества $U(x, t)$, которое состоит из точек $u \in U(x, t)$, отвечающих следующему условию непрерывности: для любой окрестности O_u точки u найдётся окрестность O_x точки x такая, что $U(y, t) \cap O_u \neq \emptyset$ при всех $y \in O_x$. На простом примере проиллюстрируем как устроено множество точек непрерывности $U_R(x, t)$.

Рассмотрим случай, когда $U = \{u \in \mathbb{R}^m : |u| \leq 1\}$ – единичный шар. Зафиксируем точку $t_* \in [0, 1]$ и пусть $a_* = a(t_*) \neq 0$. Пусть $\Gamma(x)$ обозначает гиперплоскость $g(x, t_*) + \langle a_*, u \rangle = 0$. Тогда имеют место несколько случаев.

1. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ касается сферы $S^{m-1} = \partial U$ в точке u_* , и векторы u_* и a_* сонаправлены. В этом случае $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$ как следствие непрерывности функции g .

2. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ пересекает сферу S^{m-1} более чем в одной точке. Тогда, очевидно, также имеем $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$.

3. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ касается сферы S^{m-1} в точке u_* , и векторы u_* и a_* разнонаправлены. При этом в любой окрестности x существует хотя бы одно положительное значение функции $g(\cdot, t_*) + \langle a_*, u_* \rangle$. В этом случае $U_R(x, t_*) = \emptyset$.

4. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ касается сферы S^{m-1} в точке u_* , и векторы u_* и a_* разнонаправлены. При этом $g(y, t_*) \leq -\langle a_*, u_* \rangle$ для всех y из некоторой окрестности точки x . Тогда $U_R(x, t_*) = U(x, t) = \{u_*\}$.

5. Гиперплоскость $\Gamma(x)$ не пересекает сферу S^{m-1} . В этом случае $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$.

Таким образом, в разобранный пример всегда имеем равенство $U_R(x, t_*) = U(x, t_*)$, за исключением случая 3, в котором $U_R(x, t_*) = \emptyset \neq U(x, t_*)$.

Положим $\Theta(x, t) := \text{cl } U_R(x, t)$, если $a(t) \neq 0$, и $\Theta(x, t) := U$, если $a(t) = 0$.

Условие непрерывности, с помощью которого определяется $\Theta(x, t)$, является некоторым общим предположением. Необходимо привести достаточные условия для проверки включения $u \in U_R(x, t)$. Сделаем это.

Обозначим через $N_U(u)$ нормальный конус ко множеству в точке, т.е.

$$N_U(u) = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle v, w - u \rangle \leq 0 \text{ для любых } w \in U\}.$$

Будем говорить, что точка $u \in U(x, t)$ *регулярна*, если при $u \in U_0(x, t)$ выполняется условие $a(t) \notin -N_U(u)$, где $U_0(x, t) = \{u \in U : r(x, u, t) = 0\}$. Для каждой регулярной точки $u \in U(x, t)$ имеет место включение $u \in U_R(x, t)$. Этот факт вытекает из теоремы устойчивости Робинсона [1]. Действительно, регулярность точки u означает выполнение условия Робинсона для вариационной системы

$$\begin{pmatrix} r(x, u, t) \\ u \end{pmatrix} \in (-\infty, 0] \times U,$$

которое заключается в том, что ядро сопряжённого оператора производной по u отображения слева имеет тривиальное пересечение с нормальным конусом ко множеству справа.

Рассмотрим функцию

$$\gamma(x, t) := \min_{u \in U_0(x, t)} \max_{q \in N_U(u)^* \cap B_1(0)} \langle a(t), q \rangle,$$

где K^* означает сопряжённый конус, $B_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ε с центром в x . Если $U_0(x, t) = \emptyset$, то по определению $\gamma(x, t) = +\infty$. Из того, что многозначные отображения $U_0(x, t)$ и $N_U(u)$ полунепрерывны сверху, а значит, $N_U(u)^*$ полунепрерывно снизу, непосредственно вытекает, что $\gamma(x, t)$ является полунепрерывной снизу функцией. Отсюда также имеем, что эта функция – борелевская, что используем ниже. Кроме того, $\gamma(x, t) \geq 0$.

Пусть E – заданное измеримое множество на прямой и $\tau \in E$. Обозначим через $\mathcal{F}(\tau; E)$ семейство *замкнутых* подмножеств $D \subseteq E$, которые обладают тем свойством, что $\tau \in D$ и точка τ является точкой плотности множества D .

Рассмотрим функцию Гамильтона–Понтрягина (см. [2, гл. 1, с. 24])

$$\mathcal{H}(x, u, t, \psi, \lambda) := \langle \psi, f(x, u, t) \rangle - \lambda f_0(x, u, t).$$

Сформулируем принцип максимума.

Определение 1. Процесс управления $(\bar{x}, \bar{u})$ *удовлетворяет принципу максимума*, если существуют множители Лагранжа: число $\lambda \geq 0$, вектор-функция с ограниченным изменением $\psi(t)$ и борелевская мера $\eta \geq 0$ такие, что выполняются следующие условия:

условие нетривиальности

$$\lambda + |\psi(0)| + \|\eta\| \neq 0;$$

сопряжённое уравнение

$$\psi(t) = \psi(0) - \int_0^t \mathcal{H}'_x(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s, \psi(s), \lambda) ds + \int_{[0, t]} g'_x(\bar{x}(s), s) d\eta, \quad t \in (0, 1]; \quad (4)$$

условия трансверсальности

$$(\psi(0), -\psi(1)) \in \lambda \varphi'(\bar{p}) + N_S(\bar{p}); \quad (5)$$

условие максимума

$$\max_{u \in \Theta(\bar{x}(t), t)} \mathcal{H}(\bar{x}(t), u, t, \psi(t), \lambda) \leq \mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda) \quad \text{для п.в. } t \in [0, 1]; \quad (6)$$

условие Эйлера–Лагранжа, которое принимает вид: для п.в. $t \in [0, 1]$ существует множество $D \in \mathcal{F}(t; [0, 1])$ такое, что

$$H'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda) \in a(t) \mathcal{D}_\eta(t; D) + N_U(\bar{u}(t)), \quad (7)$$

где $\mathcal{D}_\eta(t; D)$ – обобщённая производная меры η в смысле предела^{*)}

$$\mathcal{D}_\eta(t; D) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta(D \cap B_\varepsilon(t))}{2\varepsilon};$$

условие дополняющей нежёсткости, которое состоит из двух частей:

(а) для п.в. $t \in E := \{s \in [0, 1] : r(\bar{x}(s), \bar{u}(s), s) < 0\}$ существует множество $D \in \mathcal{F}(t; E)$ такое, что

$$\mathcal{D}_\eta(t; D) = \{0\}; \quad (8)$$

(б) для любого отрезка $[c, d] \subseteq \{t \in [0, 1] : a(t) = 0\}$ имеет место равенство

$$\int_{[c, d]} g(\bar{x}(t), t) d\eta = 0.$$

Кроме того, при каждом $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ таких, что

$$B_\varepsilon(t) \cap [0, 1] \subseteq \{s \in [0, 1] : U_R(\bar{x}(s), s) \neq \emptyset\},$$

имеет место оценка

$$\int_{B_\varepsilon(t) \cap [0, 1]} \gamma(\bar{x}(s), s) d\eta \leq \text{const} \cdot \varepsilon. \quad (9)$$

Множество D в условиях (7) и (8) можно взять одним и тем же для п.в. $t \in E$.

Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема. Пусть процесс управления $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ является сильным минимумом в задаче (3). Тогда $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ удовлетворяет принципу максимума.

Приведём небольшой комментарий. Условие максимума (6) принимает нестандартную форму, так как максимум берётся по некоторому подмножеству $\Theta(\bar{x}(t), t)$ исходного допустимого множества $U(\bar{x}(t), t)$. Это подмножество содержит замыкание регулярных точек допустимого множества, но может оказаться пустым. В таком случае максимум полагается равным $-\infty$. Заметим, что неравенство (6) может быть строгим, а условие максимума в форме (6) обобщает аналогичное условие из статьи [3].

Обратимся к условию Эйлера–Лагранжа (7). Поскольку скалярная монотонная функция $\eta([0, t])$ почти всюду дифференцируема, а её производная почти всюду совпадает с плотностью абсолютно непрерывной компоненты меры $m(t) := d\eta_{ac}/dt$, из (7) несложно с помощью леммы об измеримом селекторе выводится существование такой функции $\xi \in L_1([0, 1]; \mathbb{R})$, что справедливо включение

$$H'_u(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda) - \xi(t)a(t) \in N_U(\bar{u}(t)).$$

При этом $\xi(t) \in [0, m(t)]$ для п.в. $t \in [0, 1]$. Поскольку множество D можно взять одним и тем же и в (7), и в (8), то для функции $\xi(\cdot)$ из (8) также имеем равенство

$$\xi(t)r(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) = 0 \quad \text{для п.в. } t.$$

Приходим к условию Эйлера–Лагранжа в форме, предложенной в книге [4, гл. 1]. Осуществим и обратный переход, а значит, имеют место эквивалентные формы записи некоторых условий оптимальности из числа представленных здесь и в [4].

Рассмотрим условие дополняющей нежёсткости. Вторая часть этого условия, справедливая при $a(t) = 0$, стандартна, т.е. такая же, как и в обычном принципе максимума для задачи с фазовыми ограничениями. Относительно же первой его части, ввиду условия “п.в.” в (8),

^{*)} Здесь $\limsup$ означает множество всех предельных точек, или так называемый верхний предел в смысле Куратовского (см. [3]).

ничто не “запрещает” мере η иметь атом в любой точке отрезка $[0, 1]$, где $a(t) \neq 0$. Однако этот факт может оказаться в противоречии с оценкой (9) при наличии подходящих условий регулярности. Перейдём к таким условиям.

Определение 2. Траектория $\bar{x}(\cdot)$ называется *регулярной* в точке $t_0 \in [0, 1]$ относительно смешанных ограничений, если для любой точки $u \in U_0(\bar{x}(t_0), t_0)$ существует такое $d = d(u, t_0) \in N_U(u)^* \cap S^{m-1}$, что выполняется неравенство $\langle a(t_0), d \rangle > 0$. Траектория регулярна относительно смешанных ограничений, если она регулярна в каждой точке $t \in [0, 1]$ равномерно по t , т.е. существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $\langle a(t), d(u, t) \rangle > \alpha_0$ для всех $t \in [0, 1]$ и $u \in U_0(\bar{x}(t), t)$.

Рассмотрим точку $t_0 \in [0, 1]$, в которой траектория регулярна относительно смешанных ограничений. Из теоремы устойчивости Робинсона [1] вытекает, что $U_R(\bar{x}(t), t) \neq \emptyset$ для всех t из некоторой окрестности точки t_0 . С другой стороны, в силу определений и свойства компактности несложно проверяется, что $\gamma(\bar{x}(t_0), t_0) > 0$. Поскольку γ полунепрерывна снизу, отсюда в силу (9) следует, что мера η абсолютно непрерывна в окрестности точки t_0 и, более того, липшицева (т.е. её производная Радона–Никодима существенно ограничена). Тогда, как несложно видеть, в окрестностях таких регулярных точек t_0 принцип максимума из определения 1 превращается в обычный принцип максимума, справедливый для регулярных смешанных ограничений (см. [5–7]).

Рассмотрим теперь точку $t_0 \in [0, 1]$ такую, что $a(t) = 0$ для всех t из некоторой окрестности t_0 . В такой окрестности, очевидно, будут выполнены условия обычного принципа максимума для задач с фазовыми ограничениями, и, в частности, если $a(t) = 0$ для любого $t \in [0, 1]$, то определение 1 представляет собой известный принцип максимума в форме Дубовицкого–Миллутина [8, 9].

2. Доказательство теоремы 1. Предположения линейности и выпуклости позволяют воспользоваться методом штрафов (см. [6, гл. 2]). Пусть i – произвольное натуральное число. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим штрафную задачу

$$\begin{cases} \Phi_i(x_0, u(\cdot)) := \Phi(x_0, u(\cdot)) + i \int_0^1 (r(x(t), u(t), t)^+)^2 dt + \\ + |p - \bar{p}|^2 + \varepsilon \int_0^1 |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt \rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ p \in S, \\ |x(t) - \bar{x}(t)| \leq \varepsilon \text{ для любого } t \in [0, 1], \\ u(t) \in U \text{ для п.в. } t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (10)$$

В силу предположений линейности и выпуклости, поскольку U – компакт, решение задачи (10) существует по теореме А.Ф. Филиппова [10]. Обозначим это решение через $(x_{0,i}, u_i(\cdot))$, а через $x_i(\cdot)$ и p_i – траекторию и концевой вектор соответственно. Используя стандартные рассуждения, основанные на секвенциальной компактности, переходя к подпоследовательности, имеем сходимости $p_i \rightarrow p$, $u_i \xrightarrow{w} u$ слабо в $\mathbb{L}_2([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ для некоторых $p = (x_0, x_1)$ и $u(\cdot)$. Тогда $x_i(t) \rightrightarrows x(t)$ равномерно на отрезке $[0, 1]$, где $x(\cdot)$ – абсолютно непрерывная функция такая, что $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ и $x(0) = x_0$.

Покажем что процесс управления $(x(\cdot), u(\cdot))$ допустим в исходной задаче (3). Действительно, имеем $\Phi_i(x_{0,i}, u_i(\cdot)) \leq \Phi_i(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$, откуда

$$\int_0^1 (r(x_i(t), u_i(t), t)^+)^2 dt \leq \frac{\text{const}}{i}.$$

Отсюда при $i \rightarrow \infty$ следует, что $u(t) \in U(x(t), t)$ для п.в. $t \in [0, 1]$, так как выпуклый функционал, стоящий в левой части, слабо полунепрерывен снизу. При этом также используется

тот факт, что выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве слабо замкнуто. Также очевидно, что $p \in S$. Таким образом, $(x(\cdot), u(\cdot))$ – допустимый процесс в задаче (3).

Докажем, что $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ и $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$. Имеем

$$\Phi(x_{0,i}, u_i(\cdot)) + |p_i - \bar{p}|^2 + \varepsilon \int_0^1 |u_i(t) - \bar{u}(t)|^2 dt \leq \Phi_i(x_{0,i}, u_i(\cdot)) \leq \Phi_i(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) = \Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)).$$

Используя слабую полунепрерывность снизу и переходя к пределу в последнем выражении, получаем неравенство

$$\Phi(x_0, u(\cdot)) + |p - \bar{p}|^2 + \varepsilon \int_0^1 |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt \leq \Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)).$$

Однако процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ допустим, поэтому $\Phi(x_0, u(\cdot)) \geq \Phi(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))$. Тогда $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$, $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$. Таким образом, установлено, что $x_i(t) \rightrightarrows \bar{x}(t)$, $u_i(t) \xrightarrow{w} \bar{u}(t)$ при $i \rightarrow \infty$, $t \in [0, 1]$. Более того, в силу полученной оценки $u_i(\cdot) \rightarrow \bar{u}(\cdot)$ сильно в пространстве L_2 после перехода к подпоследовательности можно считать, что $u_i(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ для п.в. $t \in [0, 1]$.

Используя то, что $|x_i(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$ для всех t и всех достаточно больших i , применим к штрафной задаче известный принцип максимума (см., например, [11, теорема 6.27]). Существуют число $\lambda_i \geq 0$ и абсолютно непрерывная функция $\psi_i(\cdot)$, которые одновременно не равны нулю, такие, что имеют место равенства

$$\dot{\psi}_i(t) = -\mathcal{H}'_x(x_i(t), u_i(t), t, \psi_i(t), \lambda_i) + 2\lambda_i i r(x_i(t), u_i(t), t)^+ g'_x(x_i(t), t), \quad (11)$$

$$(\psi_i(0), -\psi_i(1)) \in \lambda_i \varphi'(p_i) + N_S(p_i) + 2\lambda_i(p_i - \bar{p}), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \max_{u \in U} (\mathcal{H}(x_i(t), u, t, \psi_i(t), \lambda_i) - \lambda_i i (r(x_i(t), u, t)^+)^2 - \lambda_i \varepsilon |u - \bar{u}(t)|^2) = \\ & = \mathcal{H}(x_i(t), u_i(t), t, \psi_i(t), \lambda_i) - \lambda_i i (r(x_i(t), u_i(t), t)^+)^2 - \lambda_i \varepsilon |u_i(t) - \bar{u}(t)|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

для п.в. $t \in [0, 1]$.

Из условия максимума (6) вытекает уравнение Эйлера–Лагранжа в форме

$$\mathcal{H}'_u(x_i(t), u_i(t), t, \psi_i(t), \lambda_i) - 2\lambda_i i r(x_i(t), u_i(t), t)^+ a(t) - 2\lambda_i \varepsilon (u_i(t) - \bar{u}(t)) \in N_U(u_i(t)) \quad (14)$$

для п.в. $t \in [0, 1]$.

Из метода штрафов следует, что

$$i \int_0^1 (r(x_i(t), u_i(t), t)^+)^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Обозначим через η_i абсолютно непрерывную борелевскую меру такую, что

$$\eta_i(B) = 2\lambda_i i \int_B r(x_i(t), u_i(t), t)^+ dt.$$

Пронормируем множители Лагранжа следующим образом:

$$\lambda_i + |\psi_i(0)| + \|\eta_i\| = 1. \quad (16)$$

Из (16), используя слабую-* секвенциальную компактность в пространстве борелевских мер и переходя к подпоследовательности, имеем сходимость $\eta_i \xrightarrow{w} \eta$ для некоторой борелевской меры η на $\sigma([0, 1])$. При этом $\|\eta_i\| \rightarrow \|\eta\|$. Также в силу компактности имеем $\lambda_i \rightarrow \lambda$

для некоторого числа $\lambda \geq 0$ и $\psi_i(t) \rightarrow \psi(t)$ для некоторой функции ψ с ограниченным изменением на $[0, 1]$. Причём сходимость имеет место для всех точек непрерывности функции ψ , включая концы отрезка времени. Здесь учтено то, что последовательность функций $\psi_i(t)$ равномерно ограничена. Это несложно вытекает из (11), (16) и неравенства Гронуолла. Существование искомой функции $\psi(t)$ следует из теоремы Хелли.

Теперь перейдём последовательно к пределу в условиях (11)–(14). Переходя к пределу в (11) стандартным образом, используя интегральную форму представления, получаем (4). Переходя к пределу в (12), используя свойство полунепрерывности сверху предельного нормального конуса, приходим к условию (5).

Перейдём к пределу в условии максимума (13). По определению множества $U_R(x, t)$ для всех $t \in [0, 1]$: $a(t) \neq 0$ и $u \in U_R(\bar{x}(t), t)$ при каждом достаточно большом i существует вектор $v_i \in U(x_i(t), t)$ такой, что $|v_i - u| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому, подставляя при заданном t в условие максимума (13) в качестве u вектор v_i и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, приходим к условию

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t), u, t, \psi(t), \lambda) - \lambda \varepsilon |u - \bar{u}(t)|^2 \leq \mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda)$$

для любого $u \in U_R(\bar{x}(t), t)$ и п.в. t таких, что $a(t) \neq 0$. При этом мы использовали тот факт, что в силу (15) с точностью до подпоследовательности можно считать, что

$$i(r(x_i(t), u_i(t), t)^+)^2 \rightarrow 0 \text{ для п.в. } t \in [0, 1].$$

Для п.в. $t \in [0, 1]$ таких, что $a(t) = 0$, очевидно, имеем

$$\max_{u \in U} (\mathcal{H}(\bar{x}(t), u, t, \psi(t), \lambda) - \lambda \varepsilon |u - \bar{u}(t)|^2) = \mathcal{H}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t, \psi(t), \lambda).$$

Перейдём к пределу в (14). По теореме Егорова для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество E_δ : $\ell(E_\delta) \geq 1 - \delta$, на котором последовательность функций $u_i(t)$ сходится равномерно к $\bar{u}(t)^*$. Рассмотрим точку $t_0 \in E_\delta$ такую, что t_0 есть точка плотности E_δ и одновременно точка аппроксимативной непрерывности $\bar{u}(t)$. Известно, что почти все точки множества обладают такими свойствами. Рассмотрим измеримое подмножество $D = D(t_0, \delta) \subseteq E_\delta$, для которого $t_0 \in D$ и справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell(D \cap [t_0 - h, t_0 + h])}{2h} = 1; \\ \text{ii)} \quad & \lim_{t \xrightarrow{D} t_0} \bar{u}(t) = \bar{u}(t_0). \end{aligned}$$

Модификация множества D , которая для упрощения изложения опускается, позволяет считать, что D – замкнутое множество с сохранением свойств i), ii), и более того, что предельная мера η непрерывна в точках τ_j , σ_j , где τ_j , σ_j определяются из следующей формулы для открытого дополнения:

$$(0, 1) \setminus D = \bigcup_j (\tau_j, \sigma_j).$$

Здесь используется тот факт, что любое измеримое множество можно аппроксимировать по мере изнутри замкнутым множеством.

Интегрируя (14) на множестве $D \cap B_\epsilon(t_0)$, где $\epsilon > 0$ выбрано так, что точки $t_0 \pm \epsilon$ суть точки непрерывности η , и переходя к пределу сначала при $i \rightarrow \infty$, а потом и по $\epsilon \rightarrow 0$, с учётом равномерной сходимости функций $u_i(t)$ и сходимости по построению

$$\int_{D \cap B_\epsilon(t_0)} a(t) d\eta_i \rightarrow \int_{D \cap B_\epsilon(t_0)} a(t) d\eta$$

приходим к равенству (7) в точке t_0 . При этом конвексификация правой части в (7) возникает из-за интегрирования. Поскольку множествами E_δ можно исчерпать с точностью до п.в. отрезок $[0, 1]$, получаем условие (7) для п.в. $t \in [0, 1]$.

^{*}) Здесь ℓ означает меру Лебега на прямой.

Докажем условие дополняющей нежёсткости (8). Положим

$$Z := \{t \in [0, 1] : r(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) < 0\}.$$

Рассмотрим точку $t_0 \in Z \cap E_\delta$, являющуюся точкой плотности $Z \cap E_\delta$. Как и выше, рассмотрим замкнутое множество $D \subseteq Z \cap E_\delta$, удовлетворяющее свойству i), такое, что мера η непрерывна в точках τ_j , σ_j (см. выше). Тогда в силу равномерной сходимости на множестве D при малом $\epsilon > 0$ таком, что точки $t_0 \pm \epsilon$ также точки непрерывности η , имеем

$$\eta_i(D \cap B_\epsilon(t_0)) = 2\lambda_i \int_{D \cap B_\epsilon(t_0)} r(x_i(t), u_i(t), t)^+ dt = 0.$$

Отсюда в силу слабой-* сходимости мер имеем, что $\eta(D \cap B_\epsilon(t_0)) = 0$. Поскольку множествами E_δ можно исчерпать с точностью до п.в. всё множество Z , приходим к условию (3). Вторая часть условий, справедливая при $a(t) = 0$, вытекает непосредственно из предела (15).

Докажем оценку (9). Возьмём число $\alpha > 0$ и положим

$$U_\alpha(x, t) := \{u \in U : |r(x, u, t)| \leq \alpha\},$$

$$\gamma_\alpha(t) := \min_{u \in U_\alpha(B_\alpha(\bar{x}(t)), t)} \max_{q \in (N_U(u))^* \cap B_1(0)} \langle a(t), q \rangle.$$

Заметим, что функция $\gamma_\alpha(t)$ полунепрерывна снизу и $\gamma_{\alpha_1}(t) \leq \gamma_{\alpha_2}(t)$ при $\alpha_2 < \alpha_1$. Также очевидно, что $\gamma_0(t) = \gamma(\bar{x}(t), t)$.

Рассмотрим точку $t_0 \in [0, 1]$, в некоторой окрестности $O = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ которой множество $U_R(\bar{x}(t), t)$ всюду непусто. Пусть η непрерывна на границе такой окрестности. Из условия непустоты множества и условия максимума (13) следует, что $r(x_i(t), u_i(t), t)^+ \rightrightarrows 0$ равномерно на O . Поэтому, умножая скалярно (13) на произвольный вектор $q \in (N_U(u_i(t)))^* \cap B_1(0)$, приходим к оценке

$$\int_O \gamma_\alpha(t) d\eta_i \leq \text{const} \cdot \ell(O).$$

Переходя здесь к пределу, используя свойства полунепрерывности снизу и слабой-* сходимости мер, получаем соотношения

$$\int_O \gamma_\alpha(t) d\eta \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_O \gamma_\alpha(t) d\eta_i \leq \text{const} \cdot \ell(O).$$

Остаётся заметить, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma_\alpha(t) = \gamma_0(t)$. Поэтому по теореме Б. Леви (см. [12, с. 299]), переходя к пределу в последнем неравенстве, приходим к оценке (9). Если η имеет атомы на границе O , то $\gamma_0(t)$ автоматически обнуляется в таких точках, и поэтому все предельные переходы выше сохраняются.

Полученные множители Лагранжа зависят от $\varepsilon > 0$, поэтому нужен ещё один предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$ в полученных условиях. Но этот предельный переход совершается по схеме, аналогичной описанной выше. Теорема доказана.

3. Приложение. Рассмотрим приложение полученной теоремы к двум примерам, разобранным во введении. Для этого будем рассматривать задачи (1) и (2) с дополнительным ограничением $u \in B_c(0)$, где $c := \|\bar{u}\|_{L_\infty} + 1$. Такое ограничение введено формально, чтобы удовлетворить требованиям теоремы о компактности множества U . Оно не влияет на минимум задачи и дальнейшие рассуждения.

Начнём с задачи (1). Из оценки (9) следует, что мера η абсолютно непрерывна при $t \neq a$. Положим $m(t) := d\eta/dt$ для п.в. t . Сопряжённое уравнение (4) имеет вид

$$d\psi(t) = \lambda dt + d\eta,$$

поэтому при $t \neq a$ функция $\psi(t)$ также абсолютно непрерывна, и имеют место соотношения

$$\dot{\psi}(t) = \lambda + m(t), \quad \psi(t) = (t - a)m(t),$$

где последнее равенство справедливо в силу условия Эйлера–Лагранжа (7).

Тогда функция $m(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \neq a$ и $(t - a)\dot{m}(t) = \lambda$. Значит, $m(t) = \lambda \ln(t - a) + \text{const}$ при $t > a$, что влечёт за собой $\lambda = 0$, так как $m(t) \geq 0$. Покажем, что $\eta(\{a\}) = 0$. Действительно, в противном случае из сопряжённого уравнения имеем, что $\psi(t)$ разрывна в точке $t = a$. Однако из условия Эйлера–Лагранжа вытекает, что $\psi(t)$ непрерывна в $t = a$, поскольку $m(t)$ интегрируема. Таким образом, получаем следующий набор множителей: $\lambda = 0$, $\eta = c_1 \ell$ на $[0, a]$ и $\eta = c_2 \ell$ на $[a, 1]$, $\psi(t) = c_1(t - a)$ на $[0, a]$ и $\psi(t) = c_2(t - a)$ на $[a, 1]$, где c_1 и c_2 – неотрицательные константы такие, что $c_1 + c_2 > 0$.

Перейдём ко второму примеру. Условия принципа максимума дают равенства

$$d\psi_1(t) = -\lambda dt, \quad d\psi_2(t) = -d\eta, \quad \psi_1(t) dt = t d\eta.$$

Вместе с тем $\psi_1(1) = 0$, $\psi_2(1) = 0$.

Из (9) следует, что мера η абсолютно непрерывна при $t > 0$. Поэтому для п.в. t имеем

$$\dot{\psi}_1(t) = -\lambda, \quad \dot{\psi}_2(t) = -m(t), \quad \psi_1(t) = tm(t),$$

где $m(t) = d\eta/dt$.

Отсюда, поскольку $m(t)$ суммируема, $\psi_1(0) = 0$, из условий трансверсальности имеем, что $\psi_1(t) \equiv 0$ и $\lambda = 0$. Значит, $m(t) = 0$ для п.в. t . Поэтому единственный с точностью до нормировки набор множителей Лагранжа, удовлетворяющий условиям оптимальности, будет следующим:

$$\lambda = 0, \quad \eta = \delta(0), \quad \psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = \begin{cases} -1, & t = 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Одной из первых работ по задачам со смешанными ограничениями является статья [13]. Смешанные ограничения рассматривались также, например, в работах [14, гл. 6, с. 282; 15, гл. 5; 16, с. 283; 17–21].

Заключение. Теорема дополняет результаты других авторов о необходимых условиях оптимальности в задачах управления с нерегулярными смешанными ограничениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20131).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Robinson Stephen M. Regularity and stability for convex multivalued functions // Mathematics of Operations Research. 1976. V. 1. № 2. P. 130–143.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
3. Arutyunov A.V., Karamzin D.Y., Pereira F.L., Silva G.N. Investigation of regularity conditions in optimal control problems with geometric mixed constraints // Optimization. 2016. V. 65. P. 185–206.
4. Милютин А.А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М., 2001.
5. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М., 1979.
6. Арutyunov А.В. Условия экстремума. М., 1997.
7. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М., 2004.
8. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 395–453.
9. Dmitruk A. V. On the development of Pontryagin's maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin // Control and Cybernetics. 2009. V. 38. № 4a. P. 923–958.

10. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1959. № 2. С. 25.
11. Mordukhovich B.S. Variational Analysis and Generalized Differentiation. V. II. Applications. Berlin, 2006.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968.
13. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенства // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1968. Т. 8. № 4. С. 725–779.
14. Neustadt L.W. Optimization. Princeton, 1976.
15. Тер-Крикоров А.М. Оптимальное управление и математическая экономика. М., 1977.
16. Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Calculus of Variations and Optimal Control. Providence, 1998.
17. de Pinho M.R., Vinter R.B., Zheng H. A maximum principle for optimal control problems with mixed constraints // IMA J. Math. Control Inform. 2001. V. 18. P. 189–205.
18. Clarke F., de Pinho M.R. Optimal control problems with mixed constraints // SIAM J. Control Optim. 2010. V. 48. P. 4500–4524.
19. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого минимума в общей задаче оптимального управления. М., 1971.
20. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Принцип максимума в линейных задачах с выпуклыми смешанными ограничениями // Zeitschrift für Analysis und Anwendungen. 1985. Bd. 4 (2). S. 133–191.
21. Becerril J.A., de Pinho M.D.R. Optimal control with nonregular mixed constraints: an optimization approach // SIAM J. on Control and Optimization. 2021. V. 59. № 3. P. 2093–2120.

Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 22.01.2023 г.
После доработки 22.01.2023 г.
Принята к публикации 24.02.2023 г.

УДК 517.977+517.929

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

© 2023 г. А. В. Метельский

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы с соизмеримыми запаздываниями обоснованы алгоритмы построения регуляторов, обеспечивающих асимптотическую, финитную или полную стабилизацию данной системы. Отличительная черта предложенного подхода в том, что не требуется априорная информация о расположении корней характеристического квазиполинома исходной системы. Результаты проиллюстрированы примерами.

DOI: 10.31857/S0374064123040106, EDN: ANUSHI

Введение. Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^m A_i x(t - ih) + \sum_{i=0}^m b_i u(t - ih), \quad t > 0. \quad (1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – n -вектор решения системы (1) ($n \geq 2$); знак T означает операцию транспонирования; u – скалярное управление; $h > 0$ – заданное число (запаздывание); A_i – постоянные матрицы ($m \geq 1$); b_i – постоянные столбцы; $x(t)$, $u(t)$, $t < 0$, – кусочно-непрерывные функции.

Обозначим $A(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda + \dots + A_m \lambda^m$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел), E_n – единичная матрица n -го порядка, $W(p, e^{-ph}) = pE_n - A(e^{-ph})$ – характеристическая матрица ($p \in \mathbb{C}$), $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$ – характеристический квазиполином однородной ($u = 0$) системы (1). Здесь и далее $|\cdot|$ – определитель квадратной матрицы. Множество корней $\sigma = \{p \in \mathbb{C} : w(p, e^{-ph}) = 0\}$ характеристического уравнения с учётом их кратностей называют *спектром системы* (1). Поскольку коэффициенты характеристического квазиполинома $w(p, e^{-ph})$ действительны, то комплексные числа входят в σ сопряжёнными парами.

Задача асимптотической стабилизации заключается в замыкании системы (1) обратной связью по состоянию, обеспечивающей замкнутой системе спектр с отрицательными действительными частями (асимптотически устойчивый спектр). В данной работе задача асимптотической стабилизации решается посредством динамического регулятора.

Рассмотрены также задачи финитной и полной стабилизации замкнутой системы. Под *финитной стабилизацией* понимается полное успокоение [1, с. 358] системы (1) (обнуление фазовых переменных), замкнутой регулятором, за конечное время. Полная стабилизация предполагает финитную стабилизацию системы (1) с одновременной асимптотической стабилизацией замкнутой системы.

Обозначим $b(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_m \lambda^m$. Система (1) называется *спектрально управляемой*, если

$$\text{rank} [pE_n - A(e^{-ph}), b(e^{-ph})] = n, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Это условие является достаточным для асимптотической стабилизации, а также необходимым и достаточным для финитной и полной стабилизации системы (1). Задачи финитной и полной стабилизации системы (1) решаются в данной работе через обеспечение замкнутой системе конечного спектра (спектральное приведение).

Основу одного из направлений асимптотической стабилизации [2–4] системы с запаздыванием образует задача FSA (finite spectrum assignment) – назначения замкнутой системе произвольного конечного спектра [5–7], в частности, асимптотически устойчивого. Задача приведения системы запаздывающего типа к некоторому конечному (не произвольному) спектру

рассмотрена в статье [8]. Перечисленные задачи известны как задачи управления спектром дифференциальной системы. Они обобщены задачей модальной управляемости [9, 10], которая заключается в назначении замкнутой системе наперёд заданного характеристического квазиполинома с действительными коэффициентами.

Задача стабилизации систем с последействием и связанные с ней задачи управления спектром образуют ядро математической теории управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями. Исследованию финитной стабилизации линейных автономных систем с запаздыванием посвящены работы [11–14]. Задача полного успокоения систем неполного ранга в классе программных управлений изучена в статьях [11, 12]. В статьях [13, 14] построены динамические регуляторы для систем дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений с последействием. Исследуемые задачи различаются определениями стабилизации, используемыми регуляторами (статическими [4, 6, 10] и динамическими [13, 14]), типом системы управления (запаздывающий [4, 11–14], нейтральный [5, 9], дифференциально-алгебраический [14]), характером запаздываний (сосредоточенные запаздывания, как у системы (1), или распределённые [4, 7, 10], кроме того, запаздывания могут быть соизмеримыми и несоизмеримыми [10]) и т.д.

Как и в работах [7, 9, 15], для построения обратных связей, обеспечивающих асимптотическую, финитную или полную стабилизацию системы (1), используется вспомогательная функция $K(p, \lambda)$ (см. ниже (14), (48)), позволяющая указать линейный алгоритм замыкания системы в терминах стандартных операций над полиномами и полиномиальными матрицами.

1. Модальная управляемость и FSA-регулятор. Построим динамический регулятор, обеспечивающий замкнутой системе (1) заданный характеристический квазиполином

$$d(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} \gamma_i(\lambda) p^{n+1-i}, \quad \lambda = e^{-ph}, \quad (3)$$

где $\gamma_0(\lambda) = 1$, $\gamma_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, – полиномы с действительными коэффициентами, тем самым решим задачу модальной управляемости для системы (1). Выбрав в качестве квазиполинома полином, имеющий корни с отрицательными действительными частями, получим для системы (1) асимптотический стабилизатор.

Замечание 1. Квазиполином вида (3), т.е. монический полином со старшим членом $p^{\tilde{n}}$ и с коэффициентами от λ , будем называть *квазиполиномом запаздывающего типа степени $\tilde{n}$* .

Пусть в системе (1) $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$, $b(\lambda) = (b_1(\lambda), \dots, b_n(\lambda))^T$. Запишем матрицу

$$F_\varphi(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n-1}(\lambda) & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & -a_{n,n-1}(\lambda) & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) \\ \varphi_1(\lambda) & \dots & \varphi_{n-1}(\lambda) & \varphi_n(\lambda) & \varphi_{n+1}(p, \lambda) \end{bmatrix}, \quad p, \lambda \in \mathbb{C},$$

последняя строка которой образована полиномами с действительными коэффициентами, которые будут определены далее.

Рассмотрим алгебраические дополнения к элементам (начиная с первого) последней строки матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$:

$$M(p, \lambda) = (M_1(p, \lambda), \dots, M_n(p, \lambda), M_{n+1}(p, \lambda))^T, \quad M_{n+1}(p, \lambda) = w(p, \lambda). \quad (4)$$

При выполнении условия (2) система полиномиальных уравнений

$$M_i(p, \lambda) = 0, \quad (p, \lambda) \in \mathbb{C}^2, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

относительно переменных p , λ может иметь лишь конечное [15] (в частности, пустое) множество решений. Поэтому редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$) для системы полиномов (4) обязательно содержит полином $d_0(p)$ с действительными коэффициентами, множество корней которого обозначим

$$P_0 = \{p_k \in \mathbb{C} : d_0(p_k) = 0, \quad k = \overline{1, \mu}\}.$$

Старший коэффициент полинома $d_0(p)$ равен единице. В частности, возможно, что $d_0(p) = 1$ и тогда $P_0 = \emptyset$.

По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином

$$\tilde{\varphi}^T(p, \lambda) = (\tilde{\varphi}_1(p, \lambda), \dots, \tilde{\varphi}_{n+1}(p, \lambda))$$

такой, что справедливо разложение

$$\tilde{\varphi}^T(p, \lambda)M(p, \lambda) = d_0(p). \quad (6)$$

Пусть $\nu = \deg d_0(p) \geq 0$ и $r = \nu - n$. Согласно [15] равенство (6) можно преобразовать к виду

$$(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda))M(p, \lambda) = d_0(p). \quad (7)$$

Здесь $\varphi_{n+1}(p, \lambda) = \sum_{j=0}^r \check{\varphi}_j(\lambda)p^j$, $\check{\varphi}_r(\lambda) = 1$, если $r \geq 0$; $\varphi_{n+1}(p, \lambda) = 0$, если $r < 0$. Полиномы $\varphi_i(\lambda)$, $i = \overline{1, n}$; $\check{\varphi}_i(\lambda)$, $i = \overline{0, r}$, можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (7). Разложение (7) можно также получить через построение базиса Грёбнера или с помощью алгоритма Евклида, рассматривая полиномы $M_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, как полиномы от λ с дробно-рациональными коэффициентами, зависящими от p . В таком случае полином $d_0(p)$ кроме значений $p_k \in P_0$ может иметь и другие корни.

Замечание 2. В силу системы (5) значения $p_k \in P_0$ войдут в состав корней всякого полинома $\hat{d}_0(p)$, полученного из равенства

$$(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda))M(p, \lambda) = \hat{d}_0(p) \quad (8)$$

при подходящем выборе векторного полинома $(\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_{n+1}(p, \lambda))$. Поэтому значения $p_k \in P_0$ будем называть *инвариантными спектральными значениями*, а полином $d_0(p)$ – *инвариантным полиномом*. Равенство вида (8) будет осуществимо и в случае нарушения условия (2) в конечном множестве точек $p \in \mathbb{C}$. Это следует также из теоремы Гильберта о нулях, применённой к системе полиномов (4).

Равенство (7) равносильно следующему:

$$|F_\varphi(p, \lambda)| = d_0(p).$$

Замечание 3. При построении искомого регулятора используется требование: различным корням p_i полинома $d_0(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Если набор корней полинома $d_0(p)$ содержит комплексно-сопряжённую пару инвариантных спектральных значений $p_{k_1, 2} = \alpha \pm i\beta$ такую, что $\sin(\beta h) = 0$, то $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_1, 2} h}$. Для решения данной ситуации введём в регуляторе “дробные” запаздывания: $\omega = h/k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда матрица системы (1) примет вид

$$A(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda^k + \dots + A_m \lambda^{km}.$$

Натуральное k можно выбрать так, чтобы $\sin(\beta h/k) \neq 0$ для всех пар $p_{k_1, 2} = \alpha \pm i\beta$ таких, что $\lambda_{k_1} = \lambda_{k_2} = e^{-p_{k_1, 2} h}$. Тогда различным значениям $p_i \in P_0$ будут соответствовать разные $\lambda_i = e^{-p_i h/k}$. Считаем далее это требование выполненным.

Введём матрицу

$$F_\psi(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) \\ \psi_1 & \dots & \psi_n & \psi_{n+1} \end{bmatrix},$$

где $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n, \psi_{n+1})$ – действительный вектор, образованный числами или полиномами. Её определитель $\Delta(p, \lambda) = |F_\psi(p, \lambda)|$, очевидно, равен

$$\Delta(p, \lambda) = M_1(p, \lambda)\psi_1 + \dots + M_n(p, \lambda)\psi_n + M_{n+1}(p, \lambda)\psi_{n+1}. \quad (9)$$

Справедлива

Лемма [15, лемма 1]. При выполнении условия (2) для произвольного набора чисел $P_0 = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, \mu}\}$ найдётся действительный вектор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n, \psi_{n+1})$ такой, что

$$\Delta(p_i, e^{-p_i h}) = M_1(p_i, e^{-p_i h})\psi_1 + \dots + M_n(p_i, e^{-p_i h})\psi_n + M_{n+1}(p_i, e^{-p_i h})\psi_{n+1} \neq 0, \quad p_i \in P_0. \quad (10)$$

Таким образом, вектор Ψ можно получить, исходя из (10), как указано в работе [15] при доказательстве леммы 1, и затем записать полином $\Delta(p, \lambda)$ согласно (9) (см. ниже пример 3).

Замечание 4. В работе [15] в лемме 1 взято $\psi_{n+1} = 1$, хотя, как очевидно из приведённого там доказательства, это необязательно. Полином $\Delta(p, \lambda)$, удовлетворяющий условию (10), можно строить и с полиномиальными коэффициентами:

$$\Psi(p, \lambda) = (\psi_1(p, \lambda), \dots, \psi_{n+1}(p, \lambda)).$$

В частности, в качестве полинома $\Delta(p, \lambda)$, удовлетворяющего условию (10), можно брать элементы базиса Грёбнера для системы полиномов (4) или их линейные комбинации. Соответствующий выбранному полиному $\Delta(p, \lambda)$ набор коэффициентов $\Psi(p, \lambda)$ можно найти методом неопределённых коэффициентов из равенства (9) (см. ниже примеры 1, 2).

При построении регулятора модальной управляемости системы (1) будем оперировать характеристической матрицей ($\lambda = e^{-ph}$) замкнутой системы

$$\tilde{A}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) \\ g_1(p, \lambda) & \dots & g_n(p, \lambda) & g_{n+1}(p, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

которую для краткости будем называть системой (11). Регулятор, обеспечивающий замкнутой системе характеристический квазиполином (3), задаётся последней строкой, где $g_i(p, \lambda)$ – линейные комбинации полиномов и дробно-рациональных функций. Вид этих функций конкретизируется в зависимости от решаемой задачи (см. далее теоремы 1–3 и примеры 1–3).

Убрать из конечного спектра замкнутой системы инвариантные спектральные значения $p_k \in P_0$ в классе регуляторов с сосредоточенными запаздываниями не представляется возможным (см. замечание 2), поэтому в регулятор добавлены распределённые запаздывания. Как следствие, в (11) $g_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, – функции, содержащие полиномы относительно p , λ и члены вида

$$\tilde{g}(p, \lambda) = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{i=0}^{l_k} \tilde{f}_{ki}(\lambda) \int_0^h e^{-(p-p_k)s} \frac{s^i}{i!} ds \quad (12)$$

с полиномиальными коэффициентами $\tilde{f}_{ki}(\lambda)$; p_k , $k = \overline{1, \mu}$, – различные корни полинома $d_0(p)$, l_k – их алгебраические кратности.

В операторной записи уравнений системы (11) λ – оператор сдвига, p – оператор дифференцирования: $p^i \lambda^j x_k(t) = x_k^{(i)}(t - jh)$ ($i, j \geq 0$ – целые числа). Интегралам вида (12) соответствуют члены с распределённым запаздыванием:

$$\lambda^l \int_0^h e^{-(p-p_k)s} s^i ds x_j(t) = \int_0^h e^{p_k s} s^i x_j(t - lh - s) ds$$

($i, l \geq 0$ – целые числа). После применения к членам с комплексно-сопряжёнными $p_{k1,2}$ формулы Эйлера все коэффициенты системы (11) должны быть действительными величинами.

Вычисляя интегралы вида (12), получаем целые дробно-рациональные функции ($\lambda = e^{-ph}$, $\lambda_k = e^{-p_k h}$):

$$\int_0^h e^{-(p-p_k)s} \frac{s^i}{i!} ds = \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \frac{d^i}{dp^i} \frac{(\lambda - \lambda_k)}{\lambda_k(p - p_k)}, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (13)$$

Именно в терминах таких функций будем конструировать векторный полином $(g_1(p, \lambda), \dots, g_{n+1}(p, \lambda))$.

Введём функцию [15]

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d(p, \lambda)). \quad (14)$$

Здесь $q(\lambda)$ – полином с действительными коэффициентами; полином $\Delta(p, \lambda) = \Psi M(p, \lambda)$ и вектор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1})$ описаны выше в соотношениях (9), (10); $d(p, \lambda)$ – желаемый квази-полином ($\lambda = e^{-ph}$) замкнутой системы (11).

Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнено условие спектральной управляемости (2). Для того чтобы замкнутая система (11) имела заданный характеристический квазиполином $d(p, e^{-ph})$ вида (3), достаточно:

1) найти полиномы $d_0(p)$, $\Phi(p, \lambda)$, $\Delta(p, \lambda)$ и вектор Ψ из условий (7), (10) соответственно;

2) выбрать полином $q(\lambda)$ так, чтобы функция

$$f(p, \lambda) = K(p, \lambda)/d_0(p) \quad (15)$$

при $\lambda = e^{-ph}$ была целой ($p \in \mathbb{C}$);

3) в системе (11) положить

$$(g_1(p, \lambda), \dots, g_{n+1}(p, \lambda)) = -f(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - q(\lambda)\Psi. \quad (16)$$

Доказательство. Разлагая характеристический определитель $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ замкнутой системы (11), (16) по последней строке, получаем

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -f(p, \lambda)\Phi(p, \lambda)M(p, \lambda) - q(\lambda)\Psi M(p, \lambda).$$

Ввиду (7), (9), (15) имеем

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -f(p, \lambda)d_0(p) - q(\lambda)\Delta(p, \lambda) = -K(p, \lambda) - q(\lambda)\Delta(p, \lambda).$$

Заменив $K(p, \lambda)$ согласно (14), получим требуемый квазиполином

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -(-(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d(p, \lambda))) - q(\lambda)\Delta(p, \lambda) = d(p, \lambda).$$

Теорема доказана.

Если необходимо, систему (11), (16) приводим к нормальной форме. Выполняя элементарные операции над её строками, из функций $g_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, убираем полиномы относительно переменной p . Для этого выбираем среди первых n элементов последней строки матрицы (11) элемент (пусть его номер i_0), содержащий одночлен $p^{m_1}\xi(\lambda)$ с наибольшей степенью m_1 относительно p . Умножая i_0 -ю строку (она содержит одночлен $p - a_{i_0, i_0}(\lambda)$) на $-p^{m_1-1}\xi(\lambda)$ и прибавляя к последней строке, понижаем степень переменной p . Повторяя этот процесс, приведём последнюю строку к виду, где переменная p будет присутствовать в виде одночлена только в $(n+1)$ -й позиции. В результате в последней строке получим элементы $\bar{g}_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, включающие полиномы от λ и целые дробно-рациональные функции вида (13) с полиномиальными коэффициентами от λ . Поскольку старший член квазиполинома $d(p, \lambda)$ относительно p имеет вид p^{n+1} , то функция $g_{n+1}(p, \lambda)$ заменится на функцию $p + \bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$, где $\bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$ имеет тот же вид, что и $\bar{g}_i(p, \lambda)$. Чтобы записать уравнения замкнутой системы, целые дробно-рациональные функции заменяем интегралами вида (12). Эта процедура в развёрнутой форме продемонстрирована в примере 1.

Поясним, как реализовать условие 2) теоремы 1, т.е. как построить полином $q(\lambda)$.

Полином $q(\lambda)$ может быть найден как решение интерполяционной задачи. Напомним, что $P_0 = \{p_k \in \mathbb{C} : d_0(p_k) = 0, \quad k = \overline{1, \mu}\}$ – множество различных корней полинома $d_0(p)$, l_k – их

алгебраические кратности. Ввиду замечания 3 все числа множества $\Lambda_0 = \{\lambda_k = e^{-p_k h} : p_k \in P_0, k = \overline{1, \mu}\}$ также различны. Условие 2) теоремы 1 равносильно следующему:

$$\left. \frac{d^i}{dp^i} (q(e^{-ph}) \Delta(p, e^{-ph}) + d(p, e^{-ph})) \right|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in P_0, \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1, \mu}. \quad (17)$$

Поскольку выполнено условие 1) теоремы 1, то согласно лемме $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$ при любом $k \in \overline{1, \mu}$. Поэтому при каждом $k = \overline{1, \mu}$ из уравнения (17) найдём

$$q^{(i)}(\lambda_k), \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1, \mu}, \quad \lambda_k = e^{-p_k h} \in \Lambda_0. \quad (18)$$

Для комплексно-сопряжённых чисел $p, \bar{p}$ числа $\lambda = e^{-ph}, \bar{\lambda} = e^{-\bar{p}h}$ также комплексно-сопряжены. Поэтому система (17) для комплексно-сопряжённых пар $\{p_0, \bar{p}_0\} \in P_0$ имеет комплексно-сопряжённые решения

$$(q(\bar{\lambda}_0), q^{(1)}(\bar{\lambda}_0), \dots, q^{(l_0-1)}(\bar{\lambda}_0)) = (\bar{q}(\lambda_0), \bar{q}^{(1)}(\lambda_0), \dots, \bar{q}^{(l_0-1)}(\lambda_0)), \quad l_0 \in \{l_k, k = \overline{1, \mu}\}.$$

Окончательно полином $q(\lambda)$ получаем как интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра по значениям (18), найденным из системы (17). Согласно [16, с. 110] полином $q(\lambda)$, построенный по интерполяционным значениям (18), будет иметь действительные коэффициенты.

Предложенная схема построения регулятора модальной управляемости не требует знания какой-либо информации о спектре системы (1). Выбрав в качестве $d(p, \lambda)$ произвольный полином $d(p)$ (в частности, можно обеспечить $\operatorname{Re} p < 0$), получим FSA-регулятор системы (1).

2. Построение асимптотического стабилизатора в общем случае. Если при каком-либо значении $p_0 \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{rank} [p_0 E_n - A(e^{-p_0 h}), b(e^{-p_0 h})] < n,$$

то вектор алгебраических дополнений (4) $M(p_0, e^{-p_0 h}) = 0$. Разлагая определитель характеристической матрицы (11) по последней строке, образованной целыми функциями, получаем, что $|\tilde{A}(p_0, e^{-p_0 h})| = 0$, т.е. значение p_0 остаётся в спектре замкнутой системы при любом выборе регулятора с разностными и интегральными членами. Если $\operatorname{Re} p < 0$, то это значение не препятствует асимптотической устойчивости замкнутой системы (11). Отсюда вытекает следующий критерий (см. [2]) асимптотической стабилизируемости системы (1):

$$\operatorname{rank} [p E_n - A(e^{-ph}), b(e^{-ph})] = n, \quad \operatorname{Re} p \geq 0, \quad p \in \mathbb{C}. \quad (19)$$

Множество различных спектральных значений

$$P^+ = \{p \in \mathbb{C} : w(p, e^{-ph}) = 0, \operatorname{Re} p \geq 0\}$$

для однородной системы ($u = 0$) вида (1) конечно [2].

Замечание 5. Этапы проверки условий (2), (19) приведены в п. 3.

При построении асимптотического стабилизатора рассмотрим три случая.

2.1. Если наряду с условием (19) имеет место условие спектральной управляемости (2), то согласно п. 1 замкнутой системе (11) можно назначить произвольный самосопряжённый спектр (см. теорему 1).

2.2. Рассмотрим случай, когда выполняется условие (19), но спектральное условие (2) нарушается в конечном числе точек $\operatorname{Re} p < 0$. Тогда редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$) для системы полиномов (4) содержит инвариантный полином $d_0(p)$ с множеством корней

$$P_0 = \{p_k \in \mathbb{C} : d_0(p_k) = 0, \quad k = \overline{1, \mu}\}$$

(см. замечание 2). Полином $d_0(p)$ представим в виде $d_0(p) = \tilde{d}_0(p) d_1(p)$ согласно следующему условию. Для корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ выполняется условие $\operatorname{Re} p \geq 0$, для корней полинома

$d_1(p) - \operatorname{Re} p < 0$. Ввиду критерия асимптотической устойчивости требуется заменить множество корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ (обозначим его $\tilde{P}_0$): $\tilde{P}_0 \subseteq P^+$. Полиномы $\tilde{d}_0(p)$, $d_1(p)$ взаимно просты, так как наборы их корней различны.

Характеристический квазиполином замкнутой системы возьмём в виде

$$d(p, e^{-ph}) = d_1(p)d_2(p, e^{-ph}), \quad (20)$$

где $d_2(p, e^{-ph})$ – произвольный квазиполином запаздывающего типа или полином

$$(d_2(p, e^{-ph}) = d_2(p)),$$

для всех корней которого $\operatorname{Re} p < 0$. За счёт квазиполинома $d_2(p, e^{-ph})$ обеспечим, чтобы степень N характеристического квазиполинома $d(p, e^{-ph})$ была $N \geq n + 1$.

Замечание 6. Для части корней полинома $d_1(p)$ может быть выполнено равенство

$$\operatorname{rank} [pE_n - A(e^{-ph}), b(e^{-ph})] = n. \quad (21)$$

Если степень полинома $d_1(p)$ больше, чем $n + 1$, то, взяв $d_2(p, e^{-ph}) = 1$ и включив часть корней полинома $d_1(p)$, для которых имеет место (21), в множество $\tilde{P}_0$ нулей, подлежащих замене, можно понизить степень характеристического полинома $d(p, e^{-ph}) = d_1(p)$ замкнутой системы. При этом к полиному $\tilde{d}_0(p)$ от полинома $d_1(p)$ добавится множитель, соответствующий этим корням. Если число корней полинома $d_1(p)$ (с учётом кратности), для которых условие (21) не выполняется, больше, чем $n + 1$, то степень характеристического полинома $d(p, e^{-ph}) = d_1(p)$ также будет больше, чем $n + 1$.

Модифицируем приведённую выше схему построения асимптотического стабилизатора для данного случая.

Функцию $K(p, \lambda)$ возьмём в виде

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d_2(p, \lambda)). \quad (22)$$

Вектор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1})$, в частности, векторный полином $\Psi(p, \lambda) = (\psi_1(p, \lambda), \dots, \psi_{n+1}(p, \lambda))$ (см. замечание 4), подбираем таким, чтобы

$$\Delta(p_i, \lambda_i) = M_1(p_i, \lambda_i)\psi_1 + \dots + M_{n+1}(p_i, \lambda_i)\psi_{n+1} \neq 0, \quad \lambda_i = e^{-p_i h}, \quad p_i \in \tilde{P}_0. \quad (23)$$

Это возможно, так как согласно условию (19)

$$(M_1(p_i, \lambda_i), \dots, M_{n+1}(p_i, \lambda_i)) \neq 0, \quad \lambda_i = e^{-p_i h}, \quad p_i \in \tilde{P}_0. \quad (24)$$

Полином $q(\lambda)$ строим таким, чтобы функция

$$f(p, e^{-ph}) = K(p, e^{-ph})/\tilde{d}_0(p), \quad p \in \mathbb{C}, \quad (25)$$

была целой. Поэтому интерполяционные значения для полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения

$$\left. \frac{d^i}{dp^i} (q(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + d_2(p, e^{-ph})) \right|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0, \quad i = 0, \tilde{l}_k - 1, \quad k = \overline{1, \tilde{\mu}}, \quad (26)$$

где $p_k \in \tilde{P}_0$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$, – различные корни полинома $\tilde{d}_0(p)$, $\tilde{l}_k$ – их алгебраические кратности. Согласно лемме на корнях полинома $\tilde{d}_0(p)$ $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$, поэтому уравнение (26) при всех $i = 0, \tilde{l}_k - 1$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$ имеет единственное решение.

Замечание 7. При интерполировании полинома $q(\lambda)$ используется требование: различным корням $p_i \in \tilde{P}_0$ полинома $\tilde{d}_0(p)$ должны соответствовать разные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Способ обеспечения этого требования, если оно нарушается, указан в замечании 3.

Построение асимптотического стабилизатора для данного случая подытожим следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выполнен критерий асимптотической стабилизируемости (19), а условие спектральной управляемости (2) нарушается в конечном числе точек – корнях полинома $d_1(p)$, $\operatorname{Re} p < 0$.

Для того чтобы замкнутая система (11) имела асимптотически устойчивый характеристический квазиполином $d(p, e^{-ph}) = d_1(p)d_2(p, e^{-ph})$ запаздывающего типа степени $N \geq n+1$ (или полином, если $d_2(p, e^{-ph}) = d_2(p)$), где $d_2(p, e^{-ph})$ – произвольный асимптотически устойчивый квазиполином, достаточно:

1) найти полиномы $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)$, $\Phi(p, \lambda)$, $\Delta(p, \lambda)$ и вектор Ψ из условий (7), (23) соответственно;

2) построить полином $q(\lambda)$ как решение интерполяционной задачи (26), чтобы функция (25) была целой;

3) в системе (11) положить

$$(g_1(p, \lambda), \dots, g_{n+1}(p, \lambda)) = -f(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - q(\lambda)d_1(p)\Psi. \quad (27)$$

Доказательство. Разлагая характеристический определитель $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ замкнутой системы (11), (27) по последней строке, ввиду (7), (9), (25) имеем

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -K(p, \lambda)/\tilde{d}_0(p)(\tilde{d}_0(p)d_1(p)) - q(\lambda)d_1(p)\Delta(p, \lambda) = -(K(p, \lambda) + q(\lambda)\Delta(p, \lambda))d_1(p).$$

Заменяя $K(p, \lambda)$ согласно (22), получаем требуемый квазиполином

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = -(-q(\lambda)\Delta(p, \lambda) - d_2(p, \lambda) + q(\lambda)\Delta(p, \lambda))d_1(p) = d(p, \lambda).$$

Теорема доказана.

Систему (11), замкнутую регулятором (27), приводим к нормальной форме, как это указано в п. 1. Выполняя элементарные операции над её строками, в последней строке получим функции $\bar{g}_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, включающие полиномы от λ и целые дробно-рациональные функции вида (13) с полиномиальными коэффициентами от λ . Поскольку старший член квазиполинома $d(p, \lambda) = |\tilde{A}(p, \lambda)|$ относительно p имеет вид p^N , то функция $g_{n+1}(p, \lambda)$ заменится на функцию $p + \bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$ или $p^s + \sum_{i=1}^{s-1} \hat{g}_i(\lambda)p^{s-i} + \bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$, если $s = N - n \geq 2$, где $\hat{g}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s-1}$, – некоторые полиномы; функция $\bar{g}_{n+1}(p, \lambda)$ того же вида, что и $\bar{g}_i(p, \lambda)$. При записи уравнений замкнутой системы целые дробно-рациональные функции заменяем интегралами вида (12). Если $s \geq 2$, то понадобятся ещё вспомогательные переменные

$$\dot{x}_{n+1}(t) = \tilde{x}_1(t), \quad \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t), \quad \dots, \quad \dot{\tilde{x}}_{s-2}(t) = \tilde{x}_{s-1}(t) \quad (28)$$

для приведения замкнутой системы к нормальной форме.

Отметим, что в рассмотренном случае замкнутой системе можно обеспечить не только асимптотическую устойчивость, но и конечный спектр, выбрав полином в качестве

$$d_2(p, e^{-ph}) = d_2(p).$$

2.3. Предположим, что выполняется условие (19), но спектральное условие (2) нарушается в бесконечном числе точек. Это означает, что все миноры n -го порядка матрицы (2) при $\lambda = e^{-ph}$ обращаются в нуль в бесконечном числе точек $p \in \mathbb{C}$. Соответственно система уравнений (5) при $\lambda = e^{-ph}$ имеет бесконечно много корней. Известно [17, лемма 3.2], что в таком случае система квазиполиномов (4) ($\lambda = e^{-ph}$) имеет общий множитель-квазиполином, обозначим его $\tilde{d}(p, e^{-ph})$. Из разложения характеристического определителя (11) по последней строке, образованной функциями $g_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n}$, включающими полиномы от p , λ и целые дробно-рациональные функции вида (13) с полиномиальными коэффициентами от λ , очевидно, что квазиполином $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ остаётся в характеристическом определителе

замкнутой системы. При выполнении условия (19) все его корни лежат в левой полуплоскости: $\operatorname{Re} p < 0$; если это не так, то система (1) не может быть стабилизирована.

Ввиду сказанного, редуцированный базис Грёбнера (в словарном порядке $\lambda > p$) для системы полиномов (4) содержит (см. замечание 2) инвариантный полином $\tilde{d}(p, \lambda)d_0(p)$, где $d_0(p)$ – некоторый полином с множеством корней

$$P_0 = \{p_i \in \mathbb{C} : d_0(p_i) = 0, \quad i = \overline{1, \mu}\},$$

в частности, $d_0(p) = 1$. Как и в предыдущем случае, полином $d_0(p)$ представим в виде $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)\tilde{d}_1(p)$. Для корней полинома $\tilde{d}_0(p)$ $\operatorname{Re} p \geq 0$ и выполняется ранговое условие (19), для корней полинома $\tilde{d}_1(p)$ $\operatorname{Re} p < 0$.

По свойству базиса Грёбнера найдётся векторный полином

$$\Phi(p, \lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda))$$

такой, что $\Phi(p, \lambda)M(p, \lambda) = \tilde{d}(p, \lambda)d_0(p)$.

Обозначим $d_1(p, \lambda) = \tilde{d}(p, \lambda)\tilde{d}_1(p)$ – квазиполином, для всех корней которого $\operatorname{Re} p < 0$. Следовательно,

$$\Phi(p, \lambda)M(p, \lambda) = d_1(p, \lambda)\tilde{d}_0(p). \quad (29)$$

Согласно критерию асимптотической устойчивости требуется заменить все спектральные значения $p_k \in \tilde{P}_0 \subseteq P^+$, являющиеся корнями полинома $\tilde{d}_0(p)$. В множество $\tilde{P}_0$ можно добавить и часть корней полинома $\tilde{d}_1(p)$, для которых имеет место (21) (см. замечание 6).

Сконструируем последнюю строку матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$ (см. (11)) такой, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы $d(p, e^{-ph})$ степени $N \geq n + 1$ имел вид

$$d(p, \lambda) = d_1(p, \lambda)d_2(p) = \tilde{d}(p, \lambda)\tilde{d}_1(p)d_2(p), \quad \lambda = e^{-ph}, \quad (30)$$

где $d_2(p)$ – произвольный полином или квазиполином ($d_2(p, \lambda), \lambda = e^{-ph}$), все корни которого имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} p < 0$. В частности, возможно и $d_2(p) = 1$.

Функцию $K(p, \lambda)$ возьмём в виде

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d_2(p)), \quad (31)$$

где, как и в п. 1, $\Delta(p, \lambda) = \Psi M(p, \lambda)$, Ψ – $(n + 1)$ -вектор. Вектор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1})$ или векторный полином $\Psi(p, \lambda) = (\psi_1(p, \lambda), \dots, \psi_{n+1}(p, \lambda))$ (см. замечание 4) подбираем (лемма) таким, чтобы полином $\Delta(p, \lambda)$ удовлетворял (23). Это возможно ввиду (24).

Интерполяционный полином Лагранжа–Сильвестра $q(\lambda)$ строим таким, чтобы функция (25) была целой. Интерполяционные значения для построения полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения (26), где вместо $d_2(p, e^{-ph})$ берём полином $d_2(p)$. На корнях полинома $\tilde{d}_0(p)$ согласно (23) $\Delta(p_k, e^{-p_k h}) \neq 0$, поэтому уравнение (26) относительно $q^{(i)}(\lambda_k)$, $\lambda_k = e^{-p_k h}$, при всех $i = 0, \tilde{l}_k - 1$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$ имеет единственное решение. Интерполирование полинома $q(\lambda)$ возможно ввиду замечания 3.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнено условие (19), а условие спектральной управляемости (2) нарушается в бесконечном числе точек – корней квазиполинома $d_1(p, e^{-ph})$, $\operatorname{Re} p < 0$. Для того чтобы замкнутая система (11) имела асимптотически устойчивый характеристический квазиполином $d(p, e^{-ph})$ вида (30) ($\lambda = e^{-ph}$), достаточно:

1) найти полином $\Delta(p, \lambda)$ и $(n + 1)$ -вектор Ψ , а также полиномы $d_1(p, \lambda)$, $\tilde{d}_0(p)$, $\Phi(p, \lambda)$ из условий (23), (29) соответственно;

2) полином $q(\lambda)$ взять как решение интерполяционной задачи (26) (с заменой $d_2(p, e^{-ph})$ на $d_2(p)$), чтобы функция (25) была целой;

3) в системе (11) положить

$$(g_1(p, \lambda), \dots, g_{n+1}(p, \lambda)) = -f(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - q(\lambda)d_1(p, \lambda)\Psi. \quad (32)$$

Доказательство равенства $|\tilde{A}(p, \lambda)| = d(p, \lambda)$, как и в теоремах 1, 2, проводится через разложение характеристического определителя $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ замкнутой системы (11), (32) по последней строке.

Выполняя элементарные операции над строками, замкнутую систему (11), (32) приводим к нормальной форме, как это указано в п. 2.2.

Выделим общие элементы теорем 2, 3:

$\tilde{d}_0(p)$ – полином (см. (25)), корни которого (все имеют $\operatorname{Re} p \geq 0$) удаляются из спектра замкнутой системы;

$d_2(p, \lambda)$ – квазиполином или полином $d_2(p)$ (см. (22), (31)), корни которого (все имеют $\operatorname{Re} p < 0$) добавляются в спектр замкнутой системы;

$d_1(p)$ – полином (см. (20)) или $d_1(p, \lambda)$ – квазиполином (см. (30)), корни которого (все имеют $\operatorname{Re} p < 0$) остаются в спектре замкнутой системы.

3. Схема проверки условий (2), (19). Выделим этапы проверки названных условий и резюмируем ситуации, возникающие при построении асимптотического стабилизатора.

1. Вычисляем алгебраические дополнения к последней строке матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$ и получаем систему полиномов (4).

2. Находим редуцированный базис Грёбнера для системы полиномов (4) в порядке $\lambda > p$.

3. Пусть базис Грёбнера содержит инвариантный полином $d_0(p)$ (в частности, возможно $d_0(p) = 1$), тогда на корнях полинома $d_0(p)$ (множество P_0) проверяем условия

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in P_0. \quad (33)$$

3.1. Если условия (33) имеют место или если $d_0(p) = 1$, то выполнены условие спектральной управляемости (2) и, как следствие, условие (19). Значит, система (1) асимптотически стабилизируема и, более того, ей можно назначить произвольный конечный спектр (см. теорему 1).

3.2. Если условия (33) выполняются для множества $\tilde{P}_0 = \{p \in P_0 : \operatorname{Re} p \geq 0\}$ корней полинома $\tilde{d}_0(p)$:

$$M(p, e^{-ph}) \neq 0, \quad p \in \tilde{P}_0, \quad (34)$$

и не выполняются для некоторых $p \in P_0$, $\operatorname{Re} p < 0$, то система (1) асимптотически стабилизируема с частично заданным конечным спектром (см. теорему 2).

4. Пусть базис Грёбнера содержит инвариантный полином $\tilde{d}(p, \lambda)d_0(p)$, где $\tilde{d}(p, \lambda)$ – общий множитель для всех элементов базиса, зависящий от λ . В частности, возможно $d_0(p) = 1$.

4.1. Если все корни квазиполинома $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} p < 0$, то на корнях $p \in \tilde{P}_0 = \{p \in P_0 : \operatorname{Re} p \geq 0\}$ полинома $\tilde{d}_0(p)$ проверяем условия (34). Если они выполняются, то справедливо условие (19). Система асимптотически стабилизируема с бесконечным спектром, включающим корни квазиполинома $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ (см. теорему 3).

4.2. Если хотя бы один корень квазиполинома $\tilde{d}(p, e^{-ph})$ не удовлетворяет условию $\operatorname{Re} p < 0$ или/и хотя бы один корень $p \in \tilde{P}_0$ полинома $\tilde{d}_0(p)$ не удовлетворяет (34), то условие (19) не имеет места и система (1) не может быть асимптотически стабилизируема.

Условие $\operatorname{Re} p < 0$ для всех корней квазиполинома запаздывающего типа

$$\tilde{d}(p, \lambda) = p^{\tilde{n}} + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \gamma_i(\lambda) p^{\tilde{n}-i}, \quad \lambda = e^{-ph},$$

можно проверить, применив какой-либо критерий асимптотической устойчивости (см., например, [4, лемма 2.2]) к системе с характеристическим определителем

$$\begin{vmatrix} p & 0 & \dots & 0 & \gamma_{\tilde{n}}(\lambda) \\ -1 & p & \dots & 0 & \gamma_{\tilde{n}-1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p & \gamma_2(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & -1 & p + \gamma_1(\lambda) \end{vmatrix} = \tilde{d}(p, \lambda), \quad \lambda = e^{-ph}.$$

Замечание 8. Множество спектральных значений P^+ для системы (1) с бесконечным спектром конечно [2]. Допустим, что ранговое условие (19) выполняется на некотором множестве, включающем множество P^+ . Если построенный регулятор заменяет лишь конечное множество спектральных значений, включая P^+ , то квазиполиномы исходной и замкнутой систем имеют бесконечно много общих корней и, ввиду леммы 3.2 из работы [17], общий множитель-квазиполином $w_0(p, e^{-ph})$. Следовательно, процедура замены конечной части бесконечного спектра системы (1) возможна, лишь если квазиполином исходной системы разлагается на множители

$$w(p, e^{-ph}) = w_0(p, e^{-ph})\delta(p),$$

где $\delta(p)$ – полином, часть корней которого заменяется. Замена только части корней неразложимого квазиполинома $w_0(p, e^{-ph})$ невозможна, даже если для них выполняется ранговое условие (19).

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка из работы [2, система (5.1)]

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\pi/2)\lambda & 0 \\ a + b\lambda & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (b_1, b_2)^T, \quad h = 1. \quad (35)$$

Система (35) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином ($\lambda = e^{-ph}$):

$$w(p, \lambda) = p^2 + p(\pi/2)\lambda.$$

В [2] отмечается, что данный квазиполином имеет корни

$$p_1 = 0, \quad p_2 = i\pi/2, \quad p_3 = -i\pi/2,$$

i – мнимая единица; остальные корни имеют отрицательные действительные части. Там же приведены ограничения

$$b_1 \neq 0, \quad (a + b)b_1 + (\pi/2)b_2 \neq 0 \quad (36)$$

на буквенные коэффициенты, обеспечивающие асимптотическую стабилизацию системы (35). Заметим, что хотя условия (36) получены из критерия (19), они гарантируют большее, а именно, спектральную управляемость системы (35). Этот факт есть следствие замечания 8.

Построим стабилизатор для системы (35) с конкретными числовыми параметрами $a = b = b_1 = 1, \quad b_2 = 0$:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -(\pi/2)\lambda & 0 \\ \lambda + 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (1, 0)^T, \quad h = 1, \quad (37)$$

взятыми с учётом условий (36). Действуем согласно обоснованной выше схеме построения асимптотического стабилизатора.

1. Запишем систему (4) алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$:

$$M(p, \lambda) = (M_1(p, \lambda), M_2(p, \lambda), M_3(p, \lambda))^T = (p, \lambda + 1, p^2 + p(\pi/2)\lambda)^T.$$

2. Находим базис Грёбнера в порядке $\lambda > p$: $\{p, \lambda + 1\}$. Значит, $d_0(p) = p$ – инвариантный полином, множество $P_0 = \{0\}$ и $p = 0$ – единственное инвариантное значение.

3. Для системы полиномов $M(p, \lambda)$ выполняется условие (33):

$$M(p, e^{-ph})|_{p=0} = (0, 2, 0) \neq 0.$$

Таким образом, для системы (37) справедлива теорема 1. Значит, система (37) спектрально управляема и замкнутой системе можно назначить произвольный характеристический полином, например, $d(p, \lambda) = (p + 1)(p + 2)(p + 3)$.

Из уравнения (7), где $(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), 0)$ – полиномы с неопределёнными коэффициентами, $d_0(p) = p$, заключаем, что $\Phi(p, \lambda) = (1, 0, 0)$. Полином $\varphi_3(\lambda)$ заведомо равен нулю, так как $\deg d_0(p) < 2$.

Полином $\Delta(p, \lambda)$ находим из условия (10). Очевидно, что данному условию удовлетворяет элемент базиса Грёбнера $\lambda + 1$, поэтому для $\Delta(p, \lambda) = \lambda + 1$ обязательно найдётся вектор $\Psi(p, \lambda)$ согласно равенству (9). Очевидно, что $\Psi = (0, 1, 0)$.

Записываем (см. (14)) функцию

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d(p, \lambda)) = -(q(\lambda)(\lambda + 1) + (p + 1)(p + 2)(p + 3)).$$

Интерполяционное значение $q(1) = -3$ для полинома $q(\lambda)$ получаем из уравнения (17):

$$(q(e^{-ph})(e^{-ph} + 1) + (p + 1)(p + 2)(p + 3))|_{p=0} = 0.$$

Следовательно, $q(\lambda) = -3$.

Таким образом, асимптотический стабилизатор (последняя строка характеристической матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$ замкнутой системы (11)) имеет вид

$$(g_1(p, \lambda), g_2(p, \lambda), g_3(p, \lambda)) = -(K(p, \lambda)/p)\Phi(p, \lambda) - (-3)\Psi = \left(p^2 + 6p + 11 + \frac{3(1 - \lambda)}{p}, 3, 0\right).$$

Умножая первую строку характеристической матрицы

$$\tilde{A}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p + (\pi/2)\lambda & 0 & -1 \\ -1 - \lambda & p & 0 \\ p^2 + 6p + 11 + \frac{3(1 - \lambda)}{p} & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

на $-p$ и прибавляя к последней строке, получаем

$$\left(11 - \frac{\pi}{2}\lambda(p + 6) + \frac{3(1 - \lambda)}{p}, 3, p + 6\right).$$

Далее, умножая первую строку характеристической матрицы на $(\pi/2)\lambda$ и прибавляя к последней, приводим последнюю строку к виду

$$\left(\frac{1}{4}(\pi^2\lambda^2 - 12\pi\lambda + 44) + \frac{3(1 - \lambda)}{p}, 3, p + \frac{1}{2}(12 - \pi\lambda)\right).$$

Чтобы записать уравнения замкнутой системы, целые дробно-рациональные функции заменяем интегралами вида (12):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{2}\pi x_1(t - 1) + u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1(t - 1), \\ \dot{u}(t) &= -6u(t) + \frac{1}{2}\pi u(t - 1) - 11x_1(t) + 3\pi x_1(t - 1) - \\ &\quad - \frac{1}{4}\pi^2 x_1(t - 2) - 3 \int_0^1 x_1(t - s) ds - 3x_2(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Вычислив характеристический определитель замкнутой системы (38), получим $d(p, \lambda) = (p + 1)(p + 2)(p + 3)$, т.е. построенный регулятор решает задачу асимптотической стабилизации системы (37).

Проверим наличие статического регулятора. Для этого характеристический полином замкнутой системы возьмём второй степени: $d(p, \lambda) = (p + 1)(p + 2)$. Повторив проделанные выкладки, имеем

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)(1 + \lambda) + (p + 1)(p + 2)), \quad q(\lambda) = -1.$$

Величины $d_0(p)$, $\Phi(p, \lambda)$, Ψ имеют прежний вид. Значит, последнюю строку матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$ запишем как

$$(g_1(p, \lambda), g_2(p, \lambda), g_3(p, \lambda)) = -(K(p, \lambda)/d_0(p))\Phi(p, \lambda) - q(\lambda)\Psi = \left(p + 3 + \frac{1 - \lambda}{p}, 1, 0\right).$$

Вычитая из этой строки первую строку матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$, получаем статический стабилизатор

$$u(t) = -3x_1(t) + \frac{\pi}{2}x_1(t-1) - \int_0^1 x_1(t-s)ds - x_2(t), \quad t > 0, \quad (39)$$

который обеспечивает замкнутой системе (37), (39) характеристический полином $d(p, \lambda) = (p+1)(p+2)$.

Обратим внимание на тот факт, что при построении регулятора информация о расположении спектральных значений однородной ($u=0$) системы (37), взятая из работы [2], никак не использовалась.

4. Регулятор финитной стабилизации. Под финитной стабилизацией понимается задача полного успокоения системы (1) посредством динамического дифференциально-разностного регулятора по типу обратной связи по состоянию. Задача полного успокоения системы (1) [1, с. 358] заключается в обеспечении за счёт выбора $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, тождеств

$$x(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv 0, \quad t \geq t_1, \quad (40)$$

где $t_1 > 0$ – некоторый фиксированный момент времени, не зависящий от начальной функции $x(t)$, $t < 0$.

Регулятор финитной стабилизации будем строить, оперируя характеристической матрицей замкнутой системы (1) ($\lambda = e^{-ph}$):

$$\tilde{A}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) & 0 \\ g_1(p, \lambda) & \dots & g_n(p, \lambda) & g_{n+1}(p, \lambda) & a_1(\lambda) \\ v_1(p, \lambda) & \dots & v_n(p, \lambda) & v_{n+1}(p, \lambda) & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Здесь $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, – некоторые полиномы с действительными коэффициентами, задающие искомым регулятор. Предположим, что обратная связь, обеспечивающая (40), построена. Тождества (40) означают точечную вырожденность [17] системы (41) в направлениях, выделяющих её первые $n+1$ фазовые переменные. Этот факт стал основой оригинального подхода к построению динамических регуляторов финитной стабилизации [18], синтезированного в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть выполнено условие спектральной управляемости (2). Для того чтобы замкнутая система (41) удовлетворяла тождествам (40), достаточно выполнить условия:

- 1) $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, – полиномы;
- 2) $|\tilde{A}(p, \lambda)| = d(p)$ – полином степени $N \geq n+2$;
- 3) $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(p - a_2(e^{-ph}))/d(p)$, $p \in \mathbb{C}$, – целые функции.

Доказательство. Считаем, что две последние строки матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$, т.е. полиномы $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, выбраны такими, что $|\tilde{A}(p, \lambda)| = d(p)$ – характеристический полином степени $N \geq n+2$. Согласно критерию точечной вырожденности [17], основанному на теореме Винера–Пэли, для тождеств (40) достаточно, чтобы элементы первых $n+1$ строк матрицы $\tilde{A}^{-1}(p, e^{-ph})$, $p \in \mathbb{C}$, были целыми функциями. Учитывая структуру обратной матрицы, достаточно, чтобы целыми были функции $A_{ij}(p, e^{-ph})/d(p)$, $i = \overline{1, n+2}$, $j = \overline{1, n+1}$, где $A_{ij}(p, \lambda)$ – алгебраические дополнения к элементам $\tilde{a}_{ij}(p, \lambda)$ первых $n+1$ столбцов характеристической матрицы (41).

Каждое из алгебраических дополнений $A_{ij}(p, \lambda) = (-1)^{i+j}m_{ij}(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+2}$, $j = \overline{1, n+1}$, можно вычислить, разлагая дополнительный минор $m_{ij}(p, \lambda)$ по последнему столбцу. Поэтому для выполнения критерия точечной вырожденности, гарантирующего тождество (40), наряду с условиями 1) и 2), достаточно условия, что $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(p - a_2(e^{-ph}))/d(p)$, $p \in \mathbb{C}$, – целые функции. Теорема доказана.

5. Вычисление коэффициентов финитного стабилизатора. Поясним как построить полиномы $d(p)$, $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, такими, чтобы выполнить условия 2) и 3) теоремы 4.

5.1. Выбор полинома $d(p)$ и полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Инвариантный полином $d_0(p)$ находим, как указано в п. 1, через вычисление базиса Грёбнера. Поскольку элементы двух последних строк матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$ – полиномы, то равенство из условия 2) теоремы 4 справедливо при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Учитывая, что инвариантные спектральные значения $p_i \in P_0$ (корни полинома $d_0(p)$) удовлетворяют системе (5) при подходящих значениях $\lambda \in \mathbb{C}$, из разложения определителя $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ по двум последним строкам (теорема Лапласа) заключаем, что корни полинома $d_0(p)$ остаются в конечном спектре замкнутой системы (41). Поэтому полином $d(p)$ берём в виде $d(p) = d_0(p)d_1(p)$, где $d_1(p)$ – произвольный полином с действительными коэффициентами, старший член которого $p^{N-\nu}$, где $N \geq n+2$ – степень полинома $d(p)$, $\nu = \deg d_0(p)$ – степень полинома $d_0(p)$.

Неравенство $N \geq n+2$ всегда можно обеспечить за счёт выбора полинома $d_1(p)$. Набор корней полинома $d_1(p)$ формируем с учётом приведённого выше замечания 3: различным корням p_i полинома $d_1(p)$ должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$. Таким образом, это требование должно быть выполнено для всех корней полинома $d(p)$.

Пусть характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы имеет вид

$$d(p) = \prod_{i=1}^{s_1} (p - p_i)^{r_i}, \quad p_i \in \tilde{P}, \quad (42)$$

где $\tilde{P} = \{p_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, s_1}\}$ – его различные действительные или комплексно-сопряжённые корни с алгебраическими кратностями r_i . Заметим, что $P_0 \subseteq \tilde{P}$. Обозначим $\tilde{\Lambda} = \{e^{-p_i h} : p_i \in \tilde{P}, i = \overline{1, s_1}\}$.

Для обеспечения условия 3) теоремы 4 необходимо и достаточно, чтобы корни полинома $d(p)$ (см. (42)) были корнями функций $a_1(e^{-ph})$, $(p - a_2(e^{-ph}))$ не меньшей кратности. Поэтому возьмём (см. [18])

$$a_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{s_1} (\lambda - \lambda_i)^{r_i}, \quad \lambda_i = e^{-p_i h} \in \tilde{\Lambda}. \quad (43)$$

Чтобы функция $(p - a_2(e^{-ph}))/d(p)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы для всех $p_i \in \tilde{P}$ значения функции $p - a_2(e^{-ph})$ и её производных по переменной p обращались в нуль:

$$(p - a_2(e^{-ph}))^{(k)}|_{p=p_i} = 0, \quad i = \overline{1, s_1}, \quad k = \overline{0, r_i - 1}.$$

Поэтому для всех $\lambda_i = e^{-p_i h} \in \tilde{\Lambda}$ ($p_i \in \tilde{P}$) должны выполняться равенства

$$a_2(\lambda_i) = p_i \in \tilde{P}, \quad a_2^{(k)}(\lambda_i) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{h \lambda_i^k}, \quad k = \overline{1, r_i - 1}, \quad \text{если } r_i > 1, \quad i = \overline{1, s_1}. \quad (44)$$

Согласно сформулированной лемме находим вектор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1})$ и полином $\Delta(p, \lambda)$ (см. (9), где, как и раньше, P_0 – множество корней полинома $d_0(p)$). Обозначим

$$\hat{M}(p, \lambda) = (\Delta(p, \lambda), d_0(p))^T.$$

Для построения векторного полинома $(v_1(p, \lambda), \dots, v_{n+1}(p, \lambda))$ понадобится условие

$$\hat{M}(a_2(\lambda), \lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (45)$$

Допустим, что оно при некотором $\lambda^* \in \mathbb{C}$ нарушено:

$$\Delta(a_2(\lambda^*), \lambda^*) = 0, \quad d_0(a_2(\lambda^*)) = 0,$$

тогда $a_2(\lambda^*) = p_i \in P_0$. Если $\lambda^* = \lambda_i \in \tilde{\Lambda}$, то $\lambda_i = e^{-p_i h}$, и в силу (44) $\Delta(p_i, e^{-p_i h}) = 0$, $p_i \in P_0$, что противоречит (10). Значит, $\lambda^* \notin \tilde{\Lambda}$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, \mu_1}\}$ – множество различных чисел таких, что при некотором $p_i \in P_0$ выполняется $\Delta(p_i, \lambda_k) = 0$. В силу условия (2) это множество конечно. Если множество $\Lambda \setminus \tilde{\Lambda}$ непусто, то к интерполяционным условиям (44) добавим равенства (если они не следуют из (44))

$$a_2(\lambda_i) = p^0 \quad (p^0 \in \mathbb{R} : p^0 \notin P_0, \quad \lambda_i \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}). \quad (46)$$

Значение p^0 можно взять одним и тем же для всех $\lambda_i \in \Lambda \setminus \tilde{\Lambda}$. Условие (45) выполнено.

Таким образом, полином $a_2(\lambda)$ найдём как решение известной в теории полиномов интерполяционной задачи (44), (46), т.е. как полином Лагранжа–Сильвестра [16, с. 104].

5.2. Выбор полиномов $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$. Построением полиномов $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, согласно п. 5.1, выполнение условия 3) теоремы 4 обеспечено. Выбором полиномов $g_i(p, \lambda)$, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, реализуем условие 2) той же теоремы.

Согласно соотношению (7) строим полином $\Phi(p, \lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda))$ таковой, что

$$d_0(p) = \Phi(p, \lambda)M(p, \lambda), \quad (47)$$

где $M(p, \lambda)$ – система полиномов (4).

Введём функцию

$$K(p, \lambda) = (a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(p, \lambda) + d(p))/(a_2(\lambda) - p), \quad (48)$$

где $q(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ – полином. Справедлива следующая

Теорема 5. Пусть выполнено условие спектральной управляемости (2). Для того чтобы замкнутая система (41) имела характеристический полином $d(p)$ (см. условие 2) теоремы 4) степени $N \geq n+2$, достаточно:

- 1) выбрать векторный полином $q(\lambda)$ таким, чтобы функция $K(p, \lambda)$ была полиномом;
- 2) векторный полином $f(p, \lambda) = (f_1(p, \lambda), f_2(p, \lambda))$ взять таким, чтобы

$$f(p, \lambda)\hat{M}(p, \lambda) = K(p, \lambda); \quad (49)$$

3) в системе (41) положить

$$\begin{aligned} g(p, \lambda) &= (g_1(p, \lambda), \dots, g_{n+1}(p, \lambda)) = -f_2(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - f_1(p, \lambda)\Psi, \\ v(p, \lambda) &= (v_1(p, \lambda), \dots, v_{n+1}(p, \lambda)) = q_2(\lambda)\Phi(p, \lambda) + q_1(\lambda)\Psi. \end{aligned} \quad (50)$$

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы 5 система (41), (50) имеет выбранный характеристический полином $d(p)$. Разлагая определитель $|\tilde{A}(p, \lambda)|$ характеристической матрицы по последнему столбцу, получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{A}(p, \lambda)| &= (p - a_2(\lambda))g(p, \lambda)M(p, \lambda) - a_1(\lambda)v(p, \lambda)M(p, \lambda) = \\ &= (p - a_2(\lambda))(-f_2(p, \lambda)\Phi(p, \lambda) - f_1(p, \lambda)\Psi)M(p, \lambda) - a_1(\lambda)(q_2(\lambda)\Phi(p, \lambda) + q_1(\lambda)\Psi)M(p, \lambda). \end{aligned}$$

Учитывая (9), (47)–(49), имеем требуемый результат:

$$|\tilde{A}(p, \lambda)| = (p - a_2(\lambda))(-f_2(p, \lambda)d_0(p) - f_1(p, \lambda)\Delta(p, \lambda)) - a_1(\lambda)(q_2(\lambda)d_0(p) + q_1(\lambda)\Delta(p, \lambda)) =$$

$$\begin{aligned}
&= (p - a_2(\lambda))(-f(p, \lambda)\hat{M}(p, \lambda)) - a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(p, \lambda) = \\
&= (p - a_2(\lambda))(-K(p, \lambda)) - a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(p, \lambda) = d(p).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 9. Пусть $\rho_1 = \deg_p f_1(p, \lambda)$. Поскольку $\deg d_0(p) = \nu$, то в равенстве (49) можно обеспечить $\rho_1 \leq \nu - 1$. Если степень переменной p полинома $f_1(p, \lambda)$ не меньше, чем ν , то представим его в виде $f_1(p, \lambda) = \tilde{f}_2(p, \lambda)d_0(p) + \tilde{f}_1(p, \lambda)$, где $\tilde{f}_i(p, \lambda)$, $i = 1, 2$, – некоторые полиномы, $\deg_p \tilde{f}_1(p, \lambda) \leq \nu - 1$. Это возможно, так как полином $d_0(p)$ имеет старший член вида p^ν . Тогда

$$K(p, \lambda) = \tilde{f}_1(p, \lambda)\Delta(p, \lambda) + (\tilde{f}_2(p, \lambda) + \tilde{f}_2(p, \lambda)\Delta(p, \lambda))d_0(p).$$

При нахождении полинома $\Delta(p, \lambda)$ можно взять $\psi_{n+1} = 1$ (см. замечание 4), и тогда его старший член будет p^n . Соответственно, степень полинома $f_2(p, \lambda)$ можно сделать меньше n .

5.3. Вычисление векторного полинома $q(\lambda)$. Покажем как выбрать векторный полином $q(\lambda) = (q_1(\lambda), q_2(\lambda))$ таким, чтобы функция $K(p, \lambda)$ была полиномом. Ввиду теоремы Безу векторный полином $q(\lambda)$ должен обеспечивать тождество

$$a_1(\lambda)q(\lambda)\hat{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda)) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Согласно (43), (44) все корни полинома $a_1(\lambda)$ являются корнями $d(a_2(\lambda))$ не меньшей кратности, поэтому полином $q(\lambda)$ нужно искать как решение полиномиального уравнения

$$q(\lambda)\hat{M}(a_2(\lambda), \lambda) + d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ввиду условия (45) полиномы $\Delta(a_2(\lambda), \lambda)$, $d_0(a_2(\lambda))$ взаимно просты. Поэтому, следуя алгоритму Евклида, получаем векторный полином $\tilde{q}(\lambda) = (\tilde{q}_1(\lambda), \tilde{q}_2(\lambda))$ такой, что

$$\tilde{q}(\lambda)\hat{M}(a_2(\lambda), \lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (51)$$

и, следовательно, полином

$$q(\lambda) = -\tilde{q}(\lambda)d(a_2(\lambda))/a_1(\lambda) \quad (52)$$

построен.

5.4. Нахождение векторного полинома $f(p, \lambda)$. Полином $K(p, \lambda)$ запишем как

$$K(p, \lambda) = ((d(p) - d(p)\tilde{q}^T(\lambda)\hat{M}(p, \lambda)) + (d(p)\tilde{q}^T(\lambda)\hat{M}(p, \lambda) + a_1(\lambda)q^T(\lambda)\hat{M}(p, \lambda)))/(a_2(\lambda) - p).$$

Заменяя $d(p)$ в первой скобке на $d(p) = d_1(p)d_0(p) = (0, d_1(p))\hat{M}(p, \lambda)$ и $q(\lambda)$ ввиду (52) во второй скобке, получаем

$$K(p, \lambda) = \left(\frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p, \lambda)}{a_2(\lambda) - p}(0, d_1(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda) \right) \hat{M}(p, \lambda). \quad (53)$$

Здесь согласно теореме Безу

$$(1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p, \lambda))/(a_2(\lambda) - p), (d(p) - d(a_2(\lambda)))/(a_2(\lambda) - p)$$

– полиномы.

Взяв полином

$$f(p, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p, \lambda)}{a_2(\lambda) - p}(0, d_1(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda), \quad (54)$$

с учётом (53) имеем равенство (49). Таким образом, полиномы в двух последних строках матрицы (41), задающие регулятор финитной стабилизации, согласно требованиям теорем 4, 5 построены.

5.5. Приведение замкнутой системы к нормальной форме. Осталось показать, что система (41), (50) приводится к системе запаздывающего типа в нормальной форме. Используя n первых строк системы (41), последние две строки элементарными преобразованиями, как указано в п. 1, приведём к виду

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\lambda) & \dots & \tilde{g}_n(\lambda) & \tilde{g}_{n+1}(p, \lambda) & a_1(\lambda) \\ \tilde{v}_1(\lambda) & \dots & \tilde{v}_n(\lambda) & \tilde{v}_{n+1}(p, \lambda) & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Если в полиноме $\tilde{v}_{n+1}(p, \lambda)$ степень p больше нуля, то представим его в виде

$$\tilde{v}_{n+1}(p, \lambda) = \hat{v}(p, \lambda)(p - a_2(\lambda)) + \tilde{v}_{n+1}(\lambda).$$

Последний столбец преобразованной характеристической матрицы домножим на $-\hat{v}(p, \lambda)$ и, прибавив к предпоследнему, получим

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_1(\lambda) & \dots & \tilde{g}_n(\lambda) & \tilde{g}_{n+1}(p, \lambda) & a_1(\lambda) \\ \tilde{v}_1(\lambda) & \dots & \tilde{v}_n(\lambda) & \tilde{v}_{n+1}(\lambda) & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Так как переменная p присутствует только в элементах главной диагонали и $|\tilde{A}(p, \lambda)| = d(p)$, то полином $\tilde{g}_{n+1}(p, \lambda)$ будет иметь вид

$$p^s + \sum_{i=1}^s \hat{g}_i(\lambda)p^{s-i}, \quad s = N - n - 1;$$

$\hat{g}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s}$, – некоторые полиномы.

Таким образом, регулятор финитной стабилизации

$$u(t) = x_{n+1}(t),$$

$$x_{n+1}^{(s)}(t) = -\tilde{g}_1(\lambda)x_1(t) - \dots - \tilde{g}_n(\lambda)x_n(t) - \sum_{i=1}^s \hat{g}_i(\lambda)x_{n+1}^{(s-i)}(t) - a_1(\lambda)x_{n+2}(t),$$

$$\dot{x}_{n+2}(t) = -\tilde{v}_1(\lambda)x_1(t) - \dots - \tilde{v}_n(\lambda)x_n(t) - \tilde{v}_{n+1}(\lambda)x_{n+1}(t) + a_2(\lambda)x_{n+2}(t).$$

Если $s \geq 2$, то, введя вспомогательные переменные (см. (28)), из системы (41), (50) получим систему с характеристической матрицей

$$\hat{A}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p - a_{11}(\lambda) & \dots & -a_{1,n}(\lambda) & -b_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n,1}(\lambda) & \dots & p - a_{n,n}(\lambda) & -b_n(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \tilde{g}_1(\lambda) & \dots & \tilde{g}_n(\lambda) & \hat{g}_s(\lambda) & \hat{g}_{s-1}(\lambda) & \dots & p + \hat{g}_1(\lambda) & a_1(\lambda) \\ \tilde{v}_1(\lambda) & \dots & \tilde{v}_n(\lambda) & \tilde{v}_{n+1}(\lambda) & 0 & \dots & 0 & p - a_2(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Для краткости систему с характеристической матрицей (57) будем называть системой (57), а набор фазовых переменных обозначать, как и раньше, $(x_1, \dots, x_N)$.

Итак, все условия теорем 4, 5 реализованы и замкнутая система (57) записана в нормальной форме. Первые $N - 1 \geq n + 1$ строки матрицы, обратной к характеристической матрице (57), образованы целыми функциями экспоненциального типа. Если старшая степень λ в i -й

строке матрицы $(\hat{A}(p, \lambda))^{-1}$ равна α_i , $i = \overline{1, N-1}$, то согласно теореме Винера–Пэли [17] переменные $x_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, N-1}$, $t \geq \alpha_i h$. Таким образом, при $t \geq t_1 = \tilde{\alpha}h$, $\tilde{\alpha} = \max\{\alpha_i : i \in \overline{1, N-1}\}$, тождества (40) выполнены и, значит, финитный стабилизатор построен.

Процедуру построения финитного стабилизатора проиллюстрируем примером.

Пример 2. Пусть объект управления описывается системой (1) второго порядка с матрицами

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (1, 0)^T, \quad h = \ln 2. \quad (58)$$

Система (58) имеет бесконечный спектр, её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ $w(p, \lambda) = p^2 - \lambda$. Запишем алгебраические дополнения к элементам последней строки матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$:

$$M(p, \lambda) = (M_1(p, \lambda), M_2(p, \lambda), M_3(p, \lambda)) = (\lambda, p, p^2 - \lambda).$$

Согласно п. 3 проверяем наличие условия спектральной управляемости (2).

Находим базис Грёбнера $(\lambda > p)$: $\{p, \lambda\}$ для системы полиномов $M(p, \lambda)$. Значит, $d_0(p) = p$ – инвариантный полином и $p = 0$ – единственное инвариантное значение, множество $P_0 = \{0\}$.

При $p = 0$ значение $\lambda = e^{-0h} = 1$, поэтому $M(p, \lambda)|_{p=0} = (1, 0, -1) \neq 0$. Поскольку выполняется условие (33), то система (58) спектрально управляема. Таким образом, регулятор финитной стабилизации существует.

Согласно равенству (7) методом неопределённых коэффициентов находим вектор

$$\Phi(p, \lambda) = (\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), 0) = (0, 1, 0).$$

Полином $\varphi_3(p, \lambda)$ заведомо равен нулю, так как степень $d_0(p)$ меньше двух.

Полином $\Delta(p, \lambda)$ должен удовлетворять условию (10). Поэтому можно взять элемент базиса Грёбнера: $\Delta(p, \lambda) = \lambda$. Вектор Ψ находим методом неопределённых коэффициентов. В данном случае, очевидно, $\Psi = (0, 1, 0)$.

Согласно п. 5.1 строим полиномы $d(p)$, $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$. Характеристический полином замкнутой системы $d(p) = d_0(p)d_1(p)$ возьмём в виде

$$d(p) = p(p+1)(p+2)(p+3).$$

Таким образом,

$$\tilde{P} = \{0, -1, -2, -3\}, \quad \tilde{\Lambda} = \{1, 2, 4, 8\}, \quad d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3).$$

По формулам (43), (44) (функции $a_1(e^{-ph})/d(p)$, $(a_2(e^{-ph})-p)/d(p)$ должны быть целыми) получаем полиномы

$$a_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-8), \quad a_2(\lambda) = -\frac{1}{168}(\lambda-1)(3\lambda^2-46\lambda+248).$$

Через вычисление базиса Грёбнера для системы полиномов

$$\tilde{M}(a_2(\lambda), \lambda) = (\Delta(a_2(\lambda), \lambda), d_0(a_2(\lambda)))$$

проверяем условие (45) – оно выполняется, так как получаем $\{1\}$.

Векторный полином $\tilde{q}(\lambda)$ найдём с помощью алгоритма Евклида согласно (51):

$$\tilde{q}(\lambda) = (1/248(3\lambda^2 - 49\lambda + 294), 21/31).$$

Отсюда (см. (52))

$$q(\lambda) = \left(-\frac{(3\lambda^2-49\lambda+294)(3\lambda^2-46\lambda+248)(3\lambda^2-43\lambda+208)(3\lambda^2-37\lambda+146)(3\lambda^2-25\lambda+94)}{197555355648}, \right.$$

$$- \frac{(3\lambda^2 - 46\lambda + 248)(3\lambda^2 - 43\lambda + 208)(3\lambda^2 - 37\lambda + 146)(3\lambda^2 - 25\lambda + 94)}{1175924736} \Bigg).$$

Согласно (54) находим векторный полином $f(p, \lambda)$ с компонентами

$$\begin{aligned} f_1(p, \lambda) &= \frac{1}{1175924736} (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 8)(3\lambda^2 - 49\lambda + 294)(3\lambda^2 - 43\lambda + 208) \times \\ &\quad \times (3\lambda^2 - 37\lambda + 146)(3\lambda^2 - 25\lambda + 94), \\ f_2(p, \lambda) &= -p^2 + \frac{p(3\lambda^3 - 49\lambda^2 + 294\lambda - 1256)}{168} + \frac{-40033\lambda^2 + 110544\lambda - 155488}{7056} + \\ &\quad + \frac{-9\lambda^6 + 294\lambda^5 - 4165\lambda^4 + 33324\lambda^3}{28224}. \end{aligned}$$

По формулам (50) получаем элементы двух последних строк характеристической матрицы (41) замкнутой системы. Следуя п. 5.5 (см. выражения (55), (56)), приводим замкнутую систему к нормальной форме и вычисляем матрицу, присоединённую к характеристической матрице (57). Элементы первых трёх строк полученной матрицы имеют старшую степень относительно λ , равную 12, и при $\lambda = e^{-ph}$ есть целые функции экспоненциального типа. Согласно теореме Винера–Пэли при $t \geq 12h$ тождества (40) выполнены и, значит, финитный стабилизатор построен.

6. Регулятор полной стабилизации. Регулятор полной стабилизации, наряду с тождествами (40), должен обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Поэтому для построения такого регулятора синтезируем обоснованные выше алгоритмы асимптотической и финитной стабилизации.

Характеристическую матрицу замкнутой системы будем искать в виде (41), где $g_i(p, \lambda)$ – целые дробно-рациональные функции, описанные в п. 1, $v_i(p, \lambda)$, $i = \overline{1, n+1}$, $a_i(\lambda)$, $i = \overline{1, 2}$, – некоторые полиномы с действительными коэффициентами.

Следуя п. 1, построим звено обратной связи, заменяющее инвариантные спектральные значения (корни полинома $d_0(p)$) исходной однородной ($u = 0$) системы (1).

Согласно соотношениям (7), (10) находим полиномы

$$d_0(p) = \Phi(p, \lambda)M(p, \lambda), \quad \Phi(p, \lambda) = (\varphi_1(\lambda), \dots, \varphi_n(\lambda), \varphi_{n+1}(p, \lambda)), \quad \Delta(p, \lambda) = \Psi M(p, \lambda)$$

и вектор $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_{n+1})$.

Выбираем характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы степени $n+2$, все корни которого имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} p < 0$. Единственное дополнительное требование к полиному $d(p)$: различным корням p_i должны соответствовать различные значения $\lambda_i = e^{-p_i h}$ (см. замечание 3).

Аналогично (14) записываем функцию

$$\hat{K}(p, \lambda) = -(\hat{q}(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d(p)).$$

Функция $\hat{K}(p, e^{-ph})/d_0(p)$, $p \in \mathbb{C}$, должна быть целой, поэтому, как и в п. 1, полином $\hat{q}(\lambda)$ строим по интерполяционным значениям $\hat{q}^{(i)}(\lambda_k)$, $i = \overline{0, l_k - 1}$, $k = \overline{1, \mu}$, $\lambda_k = e^{-p_k h} \in \Lambda_0$, найденным из уравнения

$$\left. \frac{d^i}{dp^i} (\hat{q}(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + d(p)) \right|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in P_0, \quad i = \overline{0, l_k - 1}, \quad k = \overline{1, \mu}.$$

Убеждаемся, что

$$(-\hat{q}(\lambda); -\hat{K}(p, \lambda)/d_0(p))\hat{M}(p, \lambda) = -\hat{q}(\lambda)\Delta(p, \lambda) - (\hat{K}(p, \lambda)/d_0(p))/d_0(p) = d(p). \quad (59)$$

Следуя пп. 4, 5, конструируем внешний контур регулятора, обеспечивающий финитную стабилизацию замкнутой системы. По формулам пп. 5.1, 5.3 строим полиномы $a_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, векторный полином $\tilde{q}(\lambda)$. Векторный полином $f(p, \lambda)$ берём вида

$$f(p, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p, \lambda)}{a_2(\lambda) - p}(-\hat{q}(\lambda); -\hat{K}(p, \lambda)/d_0(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda).$$

В силу (52), (59) получаем

$$f(p, \lambda)\hat{M}(p, \lambda) = K(p, \lambda),$$

где, как и раньше, функция $K(p, \lambda)$ задаётся формулой (48) и согласно п. 5.3 является полиномом. Векторные полиномы $g(p, \lambda)$, $v(p, \lambda)$ берём вида (50).

Таким образом, все условия теоремы 5 выполнены. Замкнутая система (41), (50) имеет асимптотически устойчивый характеристический полином $d(p)$, и ввиду теоремы 4 всякое её решение удовлетворяет тождествам (40). Регулятор полной стабилизации построен.

Замечание 10. Пусть полином $d_0(p)$ представим в виде произведения двух полиномов $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)$, причём для корней полинома $d_1(p)$ $\operatorname{Re} p < 0$ и $\deg d_1(p) \leq n + 2$. Тогда характеристический полином $d(p)$ степени $n + 2$ замкнутой системы можно взять в виде $d(p) = d_1(p)d_2(p)$. Здесь $d_2(p)$ – произвольный полином (см. замечание 3), для корней которого $\operatorname{Re} p < 0$ ($d_2(p) = 1$, если $\deg d_1(p) = n + 2$). В таком случае полагаем (см. п. 2.2)

$$\hat{K}(p, \lambda) = -(\hat{q}(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d_2(p));$$

$$\left. \frac{d^i}{dp^i}(\hat{q}(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + d_2(p)) \right|_{p=p_k} = 0, \quad p_k \in \tilde{P}_0, \quad i = \overline{0, \tilde{l}_k - 1}, \quad k = \overline{1, \tilde{\mu}},$$

где $p_k \in \tilde{P}_0$, $k = \overline{1, \tilde{\mu}}$, – различные корни полинома $\tilde{d}_0(p)$, $\tilde{l}_k$ – их алгебраические кратности;

$$f(p, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)\hat{M}(p, \lambda)}{a_2(\lambda) - p}(-\hat{q}(\lambda)d_1(p); -\hat{K}(p, \lambda)/\tilde{d}_0(p)) + \frac{d(p) - d(a_2(\lambda))}{a_2(\lambda) - p}\tilde{q}(\lambda)$$

и применяем теорему 5.

Согласно п. 5.5 (см. выражения (55), (56)) приводим замкнутую систему к нормальной форме и определяем момент времени $t_1 > 0$, начиная с которого имеют место тождества (40).

Заключение. Рассмотрены задачи модальной управляемости, построения FSA-регулятора и построения обратных связей, обеспечивающих асимптотическую, финитную или полную стабилизацию системы (1).

Названные задачи решены в рамках единого подхода, использующего вспомогательную функцию $K(p, \lambda)$ (см. выше (14), (48)). Это позволяет всякий раз указать линейный алгоритм замыкания системы динамическим регулятором в терминах стандартных операций над полиномами и полиномиальными матрицами.

Задачи финитной и полной стабилизации системы (1) решаются через обеспечение замкнутой системе конечного спектра (спектральное приведение). Последнее возможно ввиду того, что для разрешимости названных задач необходима спектральная управляемость исходной системы.

Задача асимптотической стабилизации решена в общем случае, без допущения спектральной управляемости исходной системы. Для решения этой задачи система замыкается динамическим регулятором. В классе статических регуляторов задача асимптотической стабилизации по предложенной схеме может не иметь решения. Проиллюстрируем такую ситуацию примером.

Пример 3. Рассмотрим систему второго порядка

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda/2 & -1 + 3\lambda/4 - \lambda^2/8 \\ -1 + \lambda/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = (0; -2\lambda + \lambda^2/4)^T, \quad h = \ln 2. \quad (60)$$

Её характеристический квазиполином $(\lambda = e^{-ph})$ имеет вид

$$w(p, \lambda) = p^2 + p\lambda/2 + \lambda^3/32 - 5\lambda^2/16 + \lambda - 1.$$

Построим асимптотический стабилизатор для системы (60), следуя обоснованной в п. 2 схеме. Находим алгебраические дополнения (4) к элементам последней строки матрицы $F_\varphi(p, \lambda)$:

$$\begin{aligned} M(p, \lambda) &= (M_1(p, \lambda), M_2(p, \lambda), M_3(p, \lambda))^T = \\ &= \left(-\frac{(\lambda-8)(\lambda-4)(\lambda-2)\lambda}{32}, \frac{(\lambda-8)\lambda(2p+\lambda)}{8}, p^2 + \frac{p\lambda}{2} + \frac{\lambda^3}{32} - \frac{5\lambda^2}{16} + \lambda - 1 \right)^T. \end{aligned}$$

Вычисляем редуцированный базис Грёбнера в порядке $\lambda > p$:

$$\{(p-1)(p+1)(p+2)(p+3), -(1+p)(2p^2-2p-3\lambda), 32p^3+96p^2-32p+3\lambda^3-30\lambda^2+48\lambda-96\}.$$

Отсюда заключаем, что инвариантный полином $d_0(p) = (p-1)(p+1)(p+2)(p+3)$ и множество $P_0 = \{-3, -2, -1, 1\}$. Согласно теореме 2 $d_0(p) = \tilde{d}_0(p)d_1(p)$, где $\tilde{d}_0(p) = p-1$ (соответственно $\tilde{P}_0 = \{1\}$) и $d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$.

Для системы полиномов $M(p, \lambda)$ проверяем условие (33). Для $p = 1$ оно выполняется:

$$M(p, e^{-ph})|_{p=1} = (173/256, 75/64, 315/512) \neq 0.$$

Для остальных инвариантных значений $p \in P_0$ условие (33) не имеет места:

$$M(p, e^{-ph}) = 0, \quad p \in \{-3, -2, -1\}. \quad (61)$$

Поскольку для этих значений $\operatorname{Re} p < 0$, то согласно теореме 2 система (1) асимптотически стабилизируема с частично заданным конечным спектром, а именно в силу равенств (61) значения $\{-3, -2, -1\}$ останутся в спектре замкнутой системы при любом выборе регулятора с разностными и интегральными членами (см. п. 2). Это видно из разложения характеристического определителя (11) по последней строке. Таким образом, порядок замкнутой системы будет больше двух, что исключает существование статического интегро-разностного регулятора.

Из уравнения (7), где $(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \varphi_3(\lambda))$ – полиномы с неопределёнными коэффициентами, $d_0(p) = (p-1)(p+1)(p+2)(p+3)$, находим вектор

$$\Phi(p, \lambda) = \left(-\frac{\lambda^2 - 30\lambda + 152}{32}, \frac{\lambda^2 - 11\lambda + 34}{8}, p^2 + p\left(5 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 112\lambda + 192}{32} \right).$$

Полином $\Delta(p, \lambda)$ и вектор $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ определяем из условия (23) при $\tilde{P}_0 = \{1\}$:

$$\Delta(1, 1/2) = \frac{315\psi_1}{512} - \frac{75\psi_2}{64} + \frac{173\psi_3}{256} \neq 0,$$

поэтому можно взять $\Psi = (16, -30, 0)$, и тогда

$$\Delta(p, \lambda) = \frac{(8-\lambda)\lambda(16+30p+2\lambda^2+3\lambda)}{4}.$$

Из теоремы 2 следует, что полином $d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$ соответствует значениям, которые остаются в спектре. Характеристический определитель замкнутой системы степени $N \geq n+1$ имеет вид $d(p, e^{-ph}) = d_2(p, e^{-ph})d_1(p)$. Возьмём $d_2(p, e^{-ph}) = 1$, тогда характеристический полином замкнутой системы $d(p) = d_1(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$.

В данном случае функция $K(p, \lambda)$ имеет вид (см. (22))

$$K(p, \lambda) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + d_2(p, \lambda)) = -(q(\lambda)\Delta(p, \lambda) + 1).$$

Единственное интерполяционное значение $q(1/2) = -1/45$ для полинома $q(\lambda)$ находим из уравнения (26), где $\tilde{P}_0 = \{1\}$:

$$(q(e^{-ph})\Delta(p, e^{-ph}) + (p+1)(p+2)(p+3))|_{p=1} = 0,$$

поэтому $q(\lambda) = -1/45$.

Согласно теореме 2 асимптотический стабилизатор (последняя строка характеристической матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$ замкнутой системы (11)) имеет вид (27):

$$(g_1(p, \lambda), g_2(p, \lambda), g_3(p, \lambda)) = -(K(p, \lambda)/(p-1))\Phi(p, \lambda) - (-1/45)d_1(p)\Psi.$$

Элементарными операциями над строками матрицы $\tilde{A}(p, \lambda)$ приводим её последнюю строку к виду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\lambda-8)(\lambda-6)(2\lambda^2+3\lambda+46)}{180} + \frac{(1-2\lambda)(\lambda^2-30\lambda+152)(\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-180)}{5760(p-1)}, \right. \\ & \frac{(\lambda-8)(\lambda^2-10\lambda+48)(2\lambda^2+3\lambda+46)}{1440} - \frac{(1-2\lambda)(\lambda^2-11\lambda+34)(\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-180)}{1440(p-1)}, \\ & \left. p + \frac{12-\lambda}{2} + \frac{(1-2\lambda)(\lambda-8)(\lambda^2-10\lambda+48)(\lambda^3-6\lambda^2+8\lambda-180)}{5760(p-1)} \right). \end{aligned} \quad (62)$$

При записи уравнений замкнутой системы заменяем целые дробно-рациональные функции $(1-2\lambda)/(p-1)$ интегралами вида (12):

$$\int_0^h e^{-s(p-1)} ds = \frac{1-2\lambda}{p-1}.$$

Характеристический определитель системы (60), (62) равен $d(p) = (p+1)(p+2)(p+3)$, значит построенный регулятор обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Отличительная черта предложенного в работе подхода состоит в том, что при проверке критерия асимптотической стабилизации (19) и построении регуляторов не требуется априорная информация о расположении корней характеристического квазиполинома исходной системы. Этот факт подтверждают разобранные примеры 1–3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
2. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
3. Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
4. Hu G.-D., Hu R. Numerical optimization for feedback stabilization of linear systems with distributed delays // J. of Comput. and Appl. Math. 2020. V. 371. Art. 112706.
5. Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V. On pole assignment and stabilizability of linear systems of neutral type systems // Topics in Time-Delay Systems. Lect. Not. in Control and Inf. Sci. V. 388. Berlin, 2009. P. 85–93.
6. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Trans. on Autom. Control. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
7. Метельский А.В. Задача назначения конечного спектра для системы запаздывающего типа // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 5. С. 692–701.
8. Булатов В.И. Спектральная приводимость систем с запаздыванием // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. 1979. № 3. С. 78–80.

9. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521.
10. Zaitsev V., Kim I. Arbitrary coefficient assignment by static output feedback for linear differential equations with non-commensurate lumped and distributed delays // Mathematics. 2021. № 9. P. 2158.
11. Метельский А.В. О построении успокаивающих управлений для дифференциально-разностных систем с соизмеримыми запаздываниями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 12. С. 1989–1995.
12. Хартовский В.Е. Об управлении не полностью управляемыми дифференциально-разностными системами с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 47–58.
13. Метельский А.В. Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
14. Метельский А.В., Хартовский В.Е. Синтез регуляторов успокоения решения вполне регулярных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 547–558.
15. Метельский А.В. Одновременная стабилизация семейства дифференциальных систем с запаздыванием динамической обратной связью по состоянию // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1516–1535.
16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
17. Kappel F. On degeneracy of functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1976. V. 22. № 2. P. 250–267.
18. Карпук В.В., Метельский А.В. Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 19–28.

г. Минск

Поступила в редакцию 29.01.2023 г.

После доработки 19.02.2023 г.

Принята к публикации 24.02.2023 г.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМОЙ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПЕРЕКЛЮЧАЮЩИХ СИГНАЛОВ

© 2023 г. А. С. Фурсов, П. А. Крылов

Исследована задача об устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы, замкнутой линейной статической обратной связью по состоянию. Введено понятие допустимого управления для заданного множества переключающих сигналов и получено конструктивное условие проверки указанного свойства для произвольной линейной обратной связи. Сформулировано достаточное условие устойчивости нулевого положения равновесия переключаемой аффинной системы, замкнутой допустимым управлением.

DOI: 10.31857/S0374064123040118, EDN: ANVLXF

Введение. Как известно [1; 2, с. 10], кусочно-линейные системы могут быть эффективно использованы для аппроксимации нелинейных аффинных управляемых систем вида

$$\dot{x} = g(x) + p(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с достаточно гладкими функциями $g(x)$, $p(x)$ и скалярным управлением u . Под кусочно-линейной системой обычно понимают динамическую систему, имеющую различную линейную динамику в разных областях непрерывного пространства состояний. Если говорить более точно, то аппроксимирующие линейные системы имеют вид

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u, \quad x \in X_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

и фактически являются аффинными, поэтому далее будем называть кусочно-линейные аппроксимации *кусочно-аффинными*. Здесь множества X_i образуют некоторое разбиение пространства состояний $\mathbb{R}^n$ системы (1). Как правило, эти множества представляют собой замкнутые выпуклые многогранники, которые могут пересекаться только своими гранями. Под выпуклым многогранником понимаем выпуклое множество, ограниченное некоторым числом гиперплоскостей. При этом в общем случае многогранник может быть неограниченным. Далее замкнутые выпуклые многогранники разбиения будем обозначать через $\overline{M}_i$.

Алгоритмы управления, в частности стабилизирующие регуляторы, разрабатываемые для кусочно-аффинных аппроксимаций (2), позволяют успешно применять их и для исходных нелинейных систем (1) [2, с. 97; 3]. При этом для обоснования работоспособности указанных регуляторов можно использовать как численное моделирование, так и аналитические методы, например, аппарат дифференциальных включений.

В теории автоматического управления важнейшими задачами являются исследование устойчивости положения равновесия замкнутой системы (с реализованным алгоритмом управления) и стабилизация неустойчивого положения равновесия управляемого объекта, причём, как правило, в таких задачах идет речь о нулевом положении равновесия. В рамках рассматриваемого подхода к управлению нелинейными объектами вида (1), основанного на переходе к кусочно-аффинным аппроксимациям этих систем, далее в настоящей работе основное внимание будет уделено анализу устойчивости нулевого положения равновесия кусочно-аффинных систем, замкнутых линейной статической обратной связью вида $u = -\theta^T x$, т.е. систем

$$\dot{x} = (A_i - b_i \theta^T) x + v_i, \quad x \in \overline{M}_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где $v_1 = 0$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, а $\overline{M}_i$ – замкнутые выпуклые многогранники, образующие некоторое разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Под решением системы (3) обычно понимают абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{x} = (A_i - b_i \theta^T)x + v_i \quad (4)$$

внутри каждого многогранника $\overline{M}_i$ и доопределяемую на границах между этими многогранниками тем или иным способом, например, в соответствии с методом простейшего выпуклого доопределения [4, с. 40].

Исследованию устойчивости нулевого положения равновесия кусочно-аффинных систем посвящено достаточно большое количество работ различных авторов (см., например, библиографию в работе [2]). При этом, как правило, условия устойчивости формулируются на основе метода функций Ляпунова, в частности, кусочно-квадратичных функций Ляпунова.

Необходимо отметить, что устойчивость положения равновесия кусочно-аффинной системы (3) существенно зависит от разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранники $\overline{M}_i$. Так, в работе [2, с. 56] сформулировано достаточное условие экспоненциальной устойчивости положения равновесия кусочно-аффинной системы, основанное на разрешимости решений линейных матричных неравенств и обеспечивающее существование кусочно-квадратичной функции Ляпунова для данной системы. При этом решения линейных матричных неравенств должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям (что, вообще говоря, сильно усложняет проверку их существования), а сами неравенства включать матрицы, описывающие границы областей разбиения. В результате за счёт вариации областей разбиения можно влиять на свойства решений указанных матричных неравенств. Например, в работе [5] удалось добиться более простых условий на решения линейных матричных неравенств за счёт существенного упрощения областей разбиения. Таким образом, задача анализа устойчивости положения равновесия кусочно-аффинной системы остаётся актуальной с точки зрения конструктивности получаемых условий устойчивости.

Заметим, что для каждого фиксированного управления $u = -\theta^T x$ замкнутую кусочно-аффинную систему (3) можно рассматривать (в случае, если на границах многогранников отсутствуют скользящие режимы) как переключаемую систему [6, с. 5], для которой переключающий сигнал $\sigma(x)$ является кусочно-постоянной функцией состояния. При этом значение переключающего сигнала постоянно внутри каждого многогранника разбиения и различно для внутренних точек разных многогранников, т.е. $\sigma(x) = i$, если $x \in M_i$ (через M_i обозначаем множество внутренних точек многогранника $\overline{M}_i$). Тогда разбиение пространства состояний на m многогранников можно определить заданием соответствующего переключающего сигнала.

Пусть теперь заданы семейство открытых аффинных режимов (управление u считаем неопределённым)

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u, \quad i = \overline{1, m},$$

и некоторое множество S переключающих сигналов, определяющих различные разбиения пространства состояний $\mathbb{R}^n$. Тогда получим управляемую переключаемую аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S, \quad v_1 = 0, \quad (5)$$

для которой, так же как и для системы (3), можно поставить задачу анализа устойчивости нулевого положения равновесия при её замыкании заданной обратной связью $u = u(x)$ ($u(0) = 0$). Именно эта задача и является предметом исследования настоящей работы. Ниже будут даны более точные определения и формулировки, а пока отметим, что такая задача может возникать в случае управления системами с неопределённостями, например, когда значения функций $g(x)$, $p(x)$ и касательные гиперплоскости для функции $g(x)$ нелинейной системы (1) известны лишь для некоторого конечного множества точек $\{x_1, \dots, x_m\}$ в пространстве состояний. В этом случае кусочно-аффинная аппроксимация может быть построена лишь по указанному набору узлов, при этом выбор разбиения пространства состояний на области активности построенных аффинных режимов становится неоднозначным, в связи с чем в таком случае естественно рассматривать кусочно-аффинную аппроксимацию как переключаемую аффинную систему (5) на некотором множестве S переключающих сигналов.

1. Основные определения и постановка задачи. Прежде чем перейти к точной постановке задачи, введём некоторые необходимые понятия. Рассмотрим разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на m замкнутых выпуклых многогранников $\overline{M}_i$, $i = \overline{1, m}$. При этом считаем, что $0 \in M_1$. Так как пара выпуклых многогранников, не имеющих общих внутренних точек, может иметь не более одной общей грани, то в описанном разбиении каждый многогранник имеет не более $m - 1$ граней.

Пусть $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_{ij}, x \rangle = d_{ij}\}$ – плоскость, содержащая общую грань многогранников $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$. Здесь n_{ij} – вектор нормали к плоскости P_{ij} , направленный в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $d_{ij} \in \mathbb{R}$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Далее рассмотрим всевозможные наборы чисел $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$, удовлетворяющие условиям:

- 1) $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \{1, \dots, m\}$;
- 2) $2 \leq p \leq m$;
- 3) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$.

Каждому такому набору сопоставим множество $\overline{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \bigcap_{i=1}^p \overline{M}_{\alpha_i}$. Пусть $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \overline{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \overline{M}_k$. Тогда множество

$$\Gamma = \bigcup_{\substack{(\alpha_1 \dots \alpha_p) \\ \alpha_1 < \dots < \alpha_p}} \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

содержит все граничные точки заданного разбиения евклидова пространства на выпуклые многогранники. Заметим, что:

- 1) в общем случае некоторые множества $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ могут быть пустыми;
- 2) $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \Gamma_{\beta_1 \dots \beta_p}$, если набор $(\beta_1 \dots \beta_p)$ может быть получен некоторой перестановкой чисел из набора $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$;
- 3) любые два различных множества $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ и $\Gamma_{\beta_1 \dots \beta_r}$ не пересекаются.

Далее для удобства будем полагать $\Gamma_i = M_i$ и $\overline{\Gamma}_i = \overline{M}_i$, а также $n_{ij} = 0$, $d_{ij} = 1$, если $\Gamma_{ij} = \emptyset$. Легко видеть, что с учётом введённых понятий аналогично [2, с. 24] любое разбиение евклидова пространства на m выпуклых многогранников может быть описано набором нормалей n_{ij} и соответствующих чисел d_{ij} . Обозначим через $N = [n_{ijk}]$ трёхмерную матрицу размера $m \times m \times n$, для которой коэффициент n_{ijk} является k -й компонентой вектора n_{ij} , и через $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^m$ – матрицу из $\mathbb{R}^{m \times m}$. При этом, очевидно, $n_{ji} = -n_{ij}$, $d_{ji} = -d_{ij}$ (в случае, если $n_{ij} = 0$, считаем, что $d_{ij} = d_{ji} = 1$). Для удобства полагаем $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$. Через F обозначим некоторое множество пар (N, D) , задающих различные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ на m выпуклых многогранников.

Теперь рассмотрим переключаемую скалярную по входу аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \quad (6)$$

где $\sigma(x; N, D) : \mathbb{R}^n \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), задаваемая парой $(N, D) \in F$ и принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i ; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ ; $b_\sigma = b \circ \sigma$ и $v_\sigma = v \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$, $v : I \rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$. Через $\Gamma(N; D)$ будем обозначать множество граничных точек разбиения, задаваемого парой $(N, D) \in F$.

Значение функции $\sigma(x; N, D)$ в каждой точке $x \notin \Gamma(N; D)$ определяет активный режим (подсистему) функционирования (A_i, b_i, v_i) переключаемой системы (6), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u.$$

Для того чтобы доопределить значения переключающего сигнала на множестве $\Gamma(N; D)$, необходимо задать для системы (6) конкретный алгоритм управления u .

Итак, замкнём систему (6) линейной обратной связью $u = -\theta^T x$:

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma \theta^T x, \quad \sigma \in S(F). \quad (7)$$

Пусть $\bar{A}_i = A_i - b_i \theta^T$. Рассматриваемую обратную связь будем считать *допустимой*, если выполнено следующее условие.

Условие А. Для любой пары $(N, D) \in F$ и любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ($\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \neq \emptyset$) верно, что для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что для любого номера $\alpha_k \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, для которого $n_{\alpha_i \alpha_k} \neq 0$, выполняется неравенство

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle < 0.$$

Фактически при выполнении этого условия в каждой точке границы многогранников существует единственный способ выбрать режим α_i таким образом, чтобы векторное поле выбранного режима в данной точке было направлено строго внутрь соответствующего многогранника. В этом случае можно естественным образом доопределить значения переключающего сигнала на границе, положив, учитывая условие А, $\sigma(x) = \alpha_i$.

Теперь остаётся заметить, что при выполнении данного условия и указанного выше доопределения переключающих сигналов решение замкнутой переключаемой системы (7) для любого начального условия $x(0)$ и любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ существует в смысле А.Ф. Филиппова [4, с. 40, 59] и единственно.

Замечание. При выполнении условия А любой переключающий сигнал $\sigma \in S(F)$, рассматриваемый вдоль траекторий замкнутой системы (7), является непрерывной справа функцией времени $\sigma(x(t))$.

Будем говорить, что нулевое решение замкнутой переключаемой системы (7) *глобально равномерно устойчиво*, если для любого фиксированного $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей кусочно-аффинной системы глобально асимптотически устойчиво.

Постановка задачи. Для заданной допустимой обратной связи $u = -\theta^T x$ исследовать нулевое решение замкнутой системы (7) на глобальную равномерную устойчивость.

2. О допустимых управлениях. Прежде чем перейти к проблеме исследования устойчивости положения равновесия переключаемой аффинной системы, рассмотрим вопрос о построении конструктивного алгоритма проверки условия А для заданной обратной связи $u = -\theta^T x$. Оказывается, что основные шаги такого алгоритма можно свести к проверке совместности ряда систем линейных неравенств [7, с. 53].

Действительно, вначале заметим, что из условия 1 следует, что любое непустое множество $\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ данного разбиения проходимо траекториями этой системы только в одну сторону. Более точно, верна следующая

Лемма. Пусть для разбиения $(N, D) \in F$ системы (7), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^T x$, выполнено равенство $\sigma(x_*; N, D) = \alpha_i$ для некоторого $x_* \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$. Тогда $\sigma(x; N, D) = \alpha_i$ для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. найдётся такое $\hat{x} \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$, что $\sigma(\hat{x}; N, D) = \alpha_j$. Тогда по условию А

$$\max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_i}} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} x_* + v_{\alpha_i} \rangle < 0, \quad \max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_j}} \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_j} x_* + v_{\alpha_j} \rangle \geq 0$$

и

$$\max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_j}} \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_j} \hat{x} + v_{\alpha_j} \rangle < 0, \quad \max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_i}} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} \hat{x} + v_{\alpha_i} \rangle \geq 0,$$

где $L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_r} = \{\alpha_l \in \{\alpha_1 \dots \alpha_p\} : l \neq r, n_{\alpha_r \alpha_l} \neq 0\}$.

Рассмотрим на $\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ функцию

$$\varphi(x) = \max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_i}} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle - \max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_j}} \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_j} x + v_{\alpha_j} \rangle.$$

Так как по условию $\sigma(x_*; N, D) = \alpha_i$ и по предположению $\sigma(\hat{x}; N, D) = \alpha_j$, то $\varphi(x_*) < 0$ и $\varphi(\hat{x}) > 0$. Далее, пусть $\gamma = \gamma(q)$, $q \in [0, 1]$, – однопараметрическая непрерывная кривая на $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, соединяющая точки x_* и $\hat{x}$. В силу непрерывности скалярного произведения функция $\lambda(q) = \varphi(\gamma(q))$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и при этом $\lambda(0) > 0$, а $\lambda(1) < 0$. Следовательно, найдётся такое $\tilde{q} \in (0, 1)$, что $\lambda(\tilde{q}) = 0$ (если $\lambda(q)$ имеет более одного нуля на интервале $(0, 1)$, то пусть $\tilde{q}$ будет минимальным из них). Но тогда для $\tilde{x} = \gamma(\tilde{q}) \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$ имеем $\varphi(\tilde{x}) = 0$. Отсюда следует, что

$$\max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_j}} \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_j} \tilde{x} + v_{\alpha_j} \rangle = 0, \quad \max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_i}} \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} \tilde{x} + v_{\alpha_i} \rangle = 0.$$

Тогда в силу условия А должен найтись номер $\alpha_r \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, для которого будет выполнено неравенство

$$\max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\alpha_r}} \langle n_{\alpha_r \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_r} \tilde{x} + v_{\alpha_r} \rangle < 0,$$

сохраняющее в силу непрерывности скалярного произведения свой знак в некоторой окрестности точки $\tilde{q}$ на отрезке $[0, 1]$. В этом случае найдётся такое $\varepsilon > 0$, что будут выполнены одновременно два равенства

$$\sigma(x(\gamma(\tilde{x} - \varepsilon)); N, D) = \alpha_i, \quad \sigma(x(\gamma(\tilde{x} - \varepsilon)); N, D) = \alpha_r,$$

что противоречит выполнению условия А на множестве $\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$. Из полученного противоречия следует, что $\sigma(x; N, D) = \alpha_i$ для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$. Лемма доказана.

С учётом доказанной леммы далее будем использовать запись $\sigma(\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}; N, D) = \alpha_i$, понимая под этим, что $\sigma(x; N, D) = \alpha_i$ для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}$.

Опишем теперь введённые выше множества граничных точек произвольного разбиения (N, D) на языке линейных неравенств. Очевидно, что для любого $i \in I = \{1, \dots, m\}$

$$x \in \bar{M}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{i1}, x \rangle \leq d_{i1}, \\ \dots \\ \langle n_{im}, x \rangle \leq d_{im}. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда для любого набора $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$

$$x \in \bar{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bar{M}_{\alpha_1}, \\ \dots \\ x \in \bar{M}_{\alpha_p}. \end{cases} \quad (9)$$

Для любого подмножества $J \subset I$ и любого индекса $i \notin J$

$$x \in \bar{M}_i \setminus \bigcup_{j \in J} \bar{M}_j \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n_{ij}, x \rangle < d_{ij} & \text{при всех } j \in J, \\ \langle n_{ik}, x \rangle \leq d_{ik} & \text{при всех } k \in I \setminus J. \end{cases} \quad (10)$$

Далее, учитывая, что

$$\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \bar{\Gamma}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \setminus \left(\bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \bar{M}_k \right) = \left(\bigcap_{i=1}^p \bar{M}_{\alpha_i} \right) \setminus \left(\bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \bar{M}_k \right) = \bigcap_{i=1}^p \left(\bar{M}_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \bar{M}_k \right),$$

имеем

$$x \in \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \bar{M}_{\alpha_1} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \bar{M}_k, \\ \dots \\ x \in \bar{M}_{\alpha_p} \setminus \bigcup_{k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_p} \bar{M}_k. \end{cases} \quad (11)$$

Используя системы линейных неравенств (8)–(11), сформулируем критерий о допустимых управлениях, который фактически позволяет построить численную процедуру проверки выполнения условия А для фиксированной линейной обратной связи $u = -\theta^T x$ и заданного разбиения (N, D) .

Теорема 1. *Линейная обратная связь $u = -\theta^T x$ является допустимым управлением для системы (6) тогда и только тогда, когда для каждого разбиения $(N, D) \in F$ и каждого набора $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, выполнено одно из следующих условий:*
система линейных неравенств

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle &< d_{\alpha_s h} \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle &\leq d_{\alpha_s g} \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \end{aligned} \quad (12)$$

не имеет решений;

существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что для каждого $\alpha_k \in L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\alpha_i}$ соответствующая система линейных неравенств

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle &< d_{\alpha_s h} \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle &\leq d_{\alpha_s g} \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \\ \langle \bar{A}_{\alpha_i}^T n_{\alpha_i \alpha_k}, x \rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i} \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

не имеет решений.

Доказательство. Необходимость. Вначале заметим, что в силу свойств скалярного произведения выполнено равенство

$$\langle n_{\alpha_i \alpha_k}, \bar{A}_{\alpha_i} x + v_{\alpha_i} \rangle = \langle \bar{A}_{\alpha_i}^T n_{\alpha_i \alpha_k}, x \rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i} \rangle.$$

Далее, пусть управление $u = -\theta^T x$ является допустимым. Зафиксируем произвольное разбиение $(N, D) \in F$ и рассмотрим для него некоторое непустое множество $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Тогда в силу условия А и леммы найдётся единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что $\sigma(\Gamma_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}; N, D) = \alpha_i$, т.е.

$$\max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\alpha_i}} \{ \langle \bar{A}_{\alpha_i}^T n_{\alpha_i \alpha_k}, x \rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i} \rangle \} < 0 \quad (14)$$

для каждого $x \in \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Но тогда для данного α_i все системы (13) должны быть несовместны, так как в противном случае будет нарушено условие (14). С другой стороны, если найдётся ещё один номер $\alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, отличный от α_i и такой, что системы

$$\begin{aligned} \langle n_{\alpha_s h}, x \rangle &< d_{\alpha_s h} \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \\ \langle n_{\alpha_s g}, x \rangle &\leq d_{\alpha_s g} \text{ при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \\ \langle \bar{A}_{\alpha_j}^T n_{\alpha_j \alpha_k}, x \rangle + \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, v_{\alpha_j} \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

не имеют решений при всех $\alpha_k \in L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\alpha_j}$, то тогда для всех $x \in \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$

$$\max_{\alpha_k \in L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\alpha_j}} \{ \langle \bar{A}_{\alpha_j}^T n_{\alpha_j \alpha_k}, x \rangle + \langle n_{\alpha_j \alpha_k}, v_{\alpha_j} \rangle \} < 0.$$

Отсюда следует, что номер α_i , для которого выполняется неравенство (14), не является единственным, что противоречит выполнению условия А для множества $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$. Необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Действительно, пусть при некотором фиксированном управлении $u = -\theta^T x$ и произвольном разбиении (N, D) для любого непустого $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \Gamma(N, D)$ такого,

что $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что все соответствующие системы (13) являются несовместными. Тогда для любого $x \in \Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ справедливо неравенство (14), из чего и следует выполнение условия А для рассматриваемого разбиения (N, D) . В силу произвольности рассматриваемого разбиения получаем, что управление $u = -\theta^T x$ является допустимым. Теорема доказана.

Заметим, что проверка на совместность систем (12), (13) может быть осуществлена на основе известного рангового критерия совместности систем линейных неравенств (см., например, [7, с. 53]).

Теорема 1 фактически предоставляет возможность построения численной процедуры проверки выполнения условия А для любого фиксированного разбиения $(N, D) \in F$. И если множество F содержит конечное число таких пар, то проверку условия А для всего множества можно выполнить, последовательно перебирая все различные разбиения. Однако возникает вопрос, можно ли подобную численную процедуру построить в случае, когда множество F содержит бесконечное число разбиений? Оказывается, это можно сделать, когда оно допускает линейную параметризацию.

Действительно, пусть множество разбиений F можно представить в виде параметрического семейства вида

$$F = \{(N, D(\kappa))\}, \quad (15)$$

где $N = [n_{ijk}]$ — фиксированная матрица размерности $m \times m \times n$, а $D(\kappa)$ — матрица, элементы которой линейно зависят от параметров $\kappa_1, \dots, \kappa_r$, а именно

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^1 \kappa_1 + \dots + d_{ij}^r \kappa_r, \quad d_{ij}^k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, r},$$

где вектор $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_r)$ удовлетворяет линейным ограничениям

$$\Phi \kappa \leq \varphi, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{l \times r}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^l,$$

для некоторого натурального l . При этом если $n_{ij} = 0$, то $d_{ij}^0 = 1$ и $d_{ij}^1 = \dots = d_{ij}^r = 0$. Теперь можно сформулировать критерий о допустимых управлениях для множества $F = \{(N, D(\kappa))\}$, который является прямым следствием теоремы 1.

Следствие. *Линейная обратная связь $u = -\theta^T x$ является допустимым управлением для системы (6) с множеством разбиений (15) тогда и только тогда, когда для каждого набора $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$ такого, что $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, выполнено одно из следующих условий:*

система линейных неравенств

$$\langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h}^0 + d_{\alpha_s h}^1 \kappa_1 + \dots + d_{\alpha_s h}^r \kappa_r \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leq d_{\alpha_s g}^0 + d_{\alpha_s g}^1 \kappa_1 + \dots + d_{\alpha_s g}^r \kappa_r \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\},$$

$$\Phi \kappa \leq \varphi$$

не имеет решений;

существует единственный номер $\alpha_i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ такой, что для каждого $\alpha_k \in L_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^{\alpha_i}$ соответствующая система линейных неравенств

$$\langle n_{\alpha_s h}, x \rangle < d_{\alpha_s h}^0 + d_{\alpha_s h}^1 \kappa_1 + \dots + d_{\alpha_s h}^r \kappa_r \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } h \in I \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\},$$

$$\langle n_{\alpha_s g}, x \rangle \leq d_{\alpha_s g}^0 + d_{\alpha_s g}^1 \kappa_1 + \dots + d_{\alpha_s g}^r \kappa_r \quad \text{при всех } \alpha_s \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \text{ и } g \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\},$$

$$\Phi \kappa \leq \varphi, \quad \langle \overline{A}_{\alpha_i}^T n_{\alpha_i \alpha_k}, x \rangle + \langle n_{\alpha_i \alpha_k}, v_{\alpha_i} \rangle \geq 0$$

не имеет решений.

Заметим, что следствие даёт возможность построить численную процедуру проверки выполнения условия А для переключаемой аффинной системы, допускающей линейную параметризацию на основе ранговых критериев совместности систем линейных неравенств.

3. Достаточное условие устойчивости замкнутой переключаемой аффинной системы. Рассмотрим систему (7) при некотором допустимом управлении $u = -\theta^T x$. Прежде чем сформулировать достаточное условие устойчивости нулевого решения полученной замкнутой системы, введём понятие графа дискретных состояний для произвольного переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ этой системы.

Заметим, что рассматриваемая замкнутая система (7) при фиксированном переключающем сигнале $\sigma \in S(F)$ фактически является гибридной системой, для описания которой можно использовать так называемый граф дискретных состояний. В данном случае под дискретными состояниями можно понимать номера режимов замкнутой системы (7). Таким образом, каждому переключающему сигналу $\sigma \in S(F)$ системы (7), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^T x$, сопоставим ориентированный граф состояний $G(\sigma)$, вершинами которого являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \rightarrow j$ будет означать существование траектории соответствующей системы, при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j . Напомним, что ориентированный граф G является *слабо связным*, если соответствующий ему неориентированный граф связный.

Теорема 2. Пусть для системы (7), замкнутой допустимым управлением $u = -\theta^T x$, все матрицы $A_i - b_i \theta^T$, $i = \overline{1, m}$, не имеют собственных значений на мнимой оси и для любого переключающего сигнала $\sigma \in S(F)$ соответствующий ориентированный граф $G(\sigma)$ слабо связный и не содержит циклов. Пусть подсистема системы (7) с индексом 1 асимптотически устойчива, а для остальных режимов ($i = \overline{2, m}$) и для любого $\sigma \in S(F)$ выполнены следующие условия:

1) матрица $A_i - b_i \theta^T$ устойчива или область функционирования режима i (многогранник M_i) ограничена;

2) $x_0^i \notin \Gamma(N, D)$, где $x_0^i \equiv (A_i - b_i \theta^T)^{-1} v_i$ – стационарное решение аффинной системы, являющейся i -м режимом переключаемой системы (7);

3) $\sigma(x_0^i; N, D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (7) глобально равномерно устойчиво.

Доказательство. Пусть для замкнутой системы (7) выполнены условия теоремы. Зафиксировав некоторый переключающий сигнал $\sigma^* \in S(F)$ и начальное условие $x(0) = x^* \in M_i$, $i \in \{2, \dots, m\}$ (не ограничивая общности считаем, что начальное значение x^* не лежит на границе разбиения), рассмотрим соответствующее решение $x^*(t)$. Очевидно, что $\sigma(x^*(0); N, D) = i$. Покажем, что найдётся такое t_1 , для которого $\sigma^*(x^*(t_1); N, D) \neq i$.

Действительно, если матрица $A_i - b_i \theta^T$ устойчива, то тогда система (4) асимптотически устойчива и $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = x_0^i$. В силу условий 2), 3) теоремы $x_0^i \notin \overline{M}_i$. Следовательно, найдётся такое $t_1 > 0$, для которого $x^*(t_1) \notin \overline{M}_i$. А так как по определению переключающий сигнал может принимать значение i только в точках, принадлежащих замкнутому многограннику $\overline{M}_i$, то $\sigma^*(x^*(t_1); N, D) \neq i$.

В случае если матрица $A_i - b_i \theta^T$ неустойчива, то по условию 1) область функционирования режима i ограничена. Пусть $z_1(t), \dots, z_n(t)$ – нормальный базис [8, с. 139] системы (4) при $v_i = 0$. Тогда любое решение системы (4) можно представить в виде

$$x(t) = c_1 z_1(t) + \dots + c_n z_n(t) + x_0^i, \quad c_l \in \mathbb{R}.$$

Поскольку матрица $A_i - b_i \theta^T$ не имеет собственных значений на мнимой оси, то показатели Ляпунова вектор-функций из рассматриваемого базиса либо строго положительны, либо строго отрицательны. Пусть функции $z_1(t), \dots, z_p(t)$ имеют строго отрицательные показатели Ляпунова, а $z_{p+1}(t), \dots, z_n(t)$ – строго положительные. Если для решения $x^*(t)$ с начальным условием $x(0) = x^* \in M_i$ выполняются равенства $c_l = 0$ при всех $l > p$, то это решение стремится к точке $x_0^i \notin \overline{M}_i$, а если $c_l \neq 0$ хотя бы для одного номера $l > p$, то в силу свойства несжимаемости [8, с. 142] нормального базиса линейной однородной системы соответствующее решение $x^*(t)$ неограниченное. Тогда в силу приведённых рассуждений и ограниченности замкнутого многогранника $\overline{M}_i$ найдётся такое $t_1 > 0$, для которого $x^*(t_1) \notin \overline{M}_i$ и, следовательно, $\sigma^*(x^*(t_1); N, D) \neq i$. Из этого следует, что в соответствующем графе $G(\sigma^*)$ из любой вершины с номером $i = \{2, \dots, m\}$ выходит хотя бы одно ребро. Поскольку

известно [9], что в ориентированном графе без циклов есть хотя бы один сток (вершина, из которой не выходит ни одного ребра), то, следовательно, вершина с номером 1 – единственный сток рассматриваемого графа $G(\sigma^*)$.

Из приведённых выше рассуждений следует, что вдоль любой траектории системы (7) при произвольном $\sigma^* \in S(F)$ любой i -й режим ($i = \{2, \dots, m\}$) может быть активным непрерывно лишь конечное время и не может повторяться бесконечное число раз в силу отсутствия циклов в соответствующем графе $G(\sigma^*)$. И поскольку количество различных режимов у системы (7) конечно, то для любых начальных условий за конечное время траектория попадет в многогранник M_1 и не сможет уже его покинуть при $t \rightarrow \infty$, так как вершина с номером 1 является стоком графа $G(\sigma^*)$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x(t)$ системы (7). Пусть $t^* > 0$ – такой момент времени, что $x(t) \in M_1$ при $t \geq t^*$. Тогда при $t \geq t^*$ эта траектория является решением системы

$$\dot{x} = (A_1 - b_1 \theta^T)x,$$

для которой по условию теоремы матрица $A_1 - b_1 \theta^T$ устойчива. Тогда $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем, что норма любого решения системы (7) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Отсюда, учитывая, что $0 \in M_1$ и, следовательно, многогранник M_1 содержит некоторую окрестность нуля, можно сделать вывод [6, с. 27] о глобальной асимптотической устойчивости системы (7). Теорема доказана.

В заключение отметим, что практическое применение сформулированного достаточного условия глобальной равномерной устойчивости переключаемой аффинной системы (6) при замыкании её обратной связью $u = -\theta^T x$ состоит из двух основных шагов. Первый шаг заключается в проверке допустимости выбранного управления и может быть реализован численно в соответствии с теоремой 1. Второй шаг состоит в проверке выполнения условия теоремы 2, что, в частности, предполагает построение графов дискретных состояний замкнутой системы (7) для заданных переключающих сигналов. К сожалению, пока для этой задачи не найдено конструктивного решения в общем случае. В связи с этим предметом дальнейших исследований авторов настоящей работы является разработка численно реализуемого метода построения графа дискретных состояний для системы (6), замкнутой допустимым управлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rewienski M., White J.* Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // *Linear Algebra and its Appl.* 2006. V. 415. P. 426–454.
2. *Johansson M.* Piecewise Linear Control System. Berlin; Heidelberg, 2003.
3. *Rodrigues L., How J.* Synthesis of piecewise-affine controllers for stabilization of nonlinear systems // *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control.* 2004. V. 3. P. 2071–2076.
4. *Филуппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
5. *Li C., Chen G., Liao X.* Stability of piecewise affine systems with application to chaos stabilization // *Chaos.* 2007. V. 17. P. 023123.
6. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, 2003.
7. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. М., 1968.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
9. *Frayssier H., Mendez P., Rosenstiehl P.* Bipolar orientations revisited // *Discrete Appl. Math.* 1995. V. 56. P. 426–454.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
имени А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.
После доработки 22.03.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

АСИМПТОТИКА РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЦИКЛОВ
В ОБОБЩЁННОМ ЛОГИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2023 г. С. А. Кащенко

Асимптотическими методами исследованы решения модифицированного логистического уравнения с запаздыванием, содержащего большой параметр. Приведён результат о существовании и устойчивости релаксационного цикла.

DOI: 10.31857/S037406412304012X, EDN: AOJNDZ

Введение. Исследованию логистического уравнения с запаздыванием

$$\dot{u} = \lambda[1 - u(t - 1)]u \quad (1)$$

посвящено множество литературы (см., например, [1–7]). Принято считать, что функция $u(t)$ описывает динамику изменения плотности популяции, поэтому $u(t) \geq 0$. Параметр λ называют *мальтузианским коэффициентом*. При значениях λ близких к $\pi/2$ наблюдается бифуркация Андронова–Хопфа. Асимптотика соответствующего цикла приведена в [7, 8]. При $\lambda \gg 1$ в (1) имеется устойчивый релаксационный цикл $u^0(t, \lambda)$ с периодом $T^0(\lambda)$. Его асимптотика рассмотрена в статье [9]. Отметим, что все неотрицательные решения (1) при всех достаточно больших t удовлетворяют оценке $u(t) \leq \exp \lambda$.

В настоящей работе предложены результаты исследования более общего уравнения

$$\dot{u} = \lambda[1 - F(u(t - 1))]u. \quad (2)$$

Ограничимся рассмотрением двух наиболее значимых случаев, иллюстрирующих отличия в динамике уравнения (2) от (1). В одном из них предполагаем, что $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \infty$, а в другом $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = A < \infty$ ($A > 1$); функцию $F(u)$ считаем монотонно возрастающей.

1. Первый случай. Пусть $F(u) = u^\alpha$, $\alpha > 0$. В (2) произведём замену $u^\alpha = v$ и получим классическое логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{v} = \alpha\lambda[1 - v(t - 1)]v. \quad (3)$$

При выборе подходящим способом параметра λ решениями уравнения (3) могут быть как устойчивые гармонические колебания ($\alpha \sim \lambda^{-1}\pi/2$), так и релаксационные колебания (при $\alpha \gg 1$). При $\alpha\lambda < \pi/2$ состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ асимптотически устойчиво. Отметим ещё (см. [4, 5, 10]), что при $\alpha\lambda \leq 37/24$ все положительные решения уравнения (3) стремятся к единице при $t \rightarrow \infty$.

Интересно рассмотреть случай, когда $F(u) = \gamma \ln u$, где $\gamma > 0$. После замены $u = \exp v$ приходим к линейному уравнению

$$\dot{v} = \lambda[1 - \gamma v(t - 1)]. \quad (4)$$

При $0 < \lambda\gamma < \pi/2$ все решения (4) стремятся к состоянию равновесия $u_0 \equiv \gamma^{-1}$, а значит, все решения (3) при $t \rightarrow \infty$ стремятся к состоянию равновесия $\exp(\gamma^{-1})$. При $\lambda\gamma > \pi/2$ решения (4) (и (3)) неограничены при $t \rightarrow \infty$. Если же $\lambda\gamma = \pi/2$, то для (4) и (3) имеется устойчивое однопараметрическое семейство периодических решений $v = \gamma^{-1} + c \cos(t\pi/2 + \varphi)$,

$u = \exp(\gamma^{-1} + c \cos(t\pi/2 + \varphi))$. Обратим внимание, что в случае когда $F(u) = \gamma \ln(1 + u)$ все решения уравнения (2) ограничены при $t \rightarrow \infty$.

2. Второй случай. В качестве примера для иллюстрации динамических особенностей (2) фиксируем функцию

$$F(u) = u(1 + \alpha u)^{-1}, \quad \alpha = A^{-1} < 1. \quad (5)$$

Основное предположение состоит в том, что параметр λ является достаточно большим ($\lambda \gg \gg 1$). Ниже *медленно осциллирующим* называется такое решение уравнения (2), у которого расстояние между соседними корнями функции $u(t) - 1 = 0$ больше, чем время запаздывания, равное единице. Отметим, что (также как и для (1)) для (2) и (5) имеются и быстро осциллирующие решения. Их асимптотику при $\lambda \gg 1$ здесь не приводим, поскольку все они неустойчивы.

Решение $u(t, \tau)$ уравнения (3) с начальным условием, заданным в момент $t = \tau$, имеет вид

$$u(t, \tau) = u(\tau, \tau) \exp \left[\lambda \int_{\tau}^t (1 - F(u(s - 1, \tau))) ds \right]. \quad (6)$$

Для того чтобы сформулировать основной результат, введём обозначение $t_0 = 1 + (A - 1)^{-1}$.

Теорема. Пусть выполнено равенство (5). Тогда при всех достаточно больших λ уравнение (2) имеет асимптотически орбитально устойчивое медленно осциллирующее периодическое решение $u_0(t, \lambda)$ с периодом $T_0(\lambda)$, для которого справедливы оценки

$$u_0(t, \lambda) = \begin{cases} \exp(\lambda t(1 + o(1))), & t \in [0, 1], \\ \exp[\lambda(1 + (1 - A)(t - 1))(1 + o(1))], & t \in [1, t_0 + 1], \\ \exp[\lambda(t - A - t_1^0)(1 + o(1))], & t \in [t_0 + 1, T_0(\lambda)], \end{cases} \quad T_0(\lambda) = A^2(A - 1)^{-1} + o(1).$$

Доказательство. Фиксируем произвольно значение $\delta \in (0, 1/2)$. Обозначим через S множество таких функций $\varphi(s) \in C_{[-1, 0]}$, для которых выполнены условия

$$\varphi(0) = 1, \quad 0 \leq \varphi(s) \leq \exp(\lambda \delta s) \quad \text{для } s \in [-1, 0]. \quad (7)$$

Исследуем асимптотику всех решений $u(t, \varphi)$ с начальными условиями $\varphi(s) \in S$, заданными при $t = 0$. Отметим, что все фигурирующие выражения вида $o(1)$ выполняются равномерно по всем $\varphi(s) \in S$. Положим в формуле (6) $\tau = 0$ и используем соотношение (7). Тогда на отрезке $t \in [0, 1]$ имеем асимптотическое равенство

$$u(t, \varphi) = \exp(\lambda(1 + o(1))t).$$

Затем положим в (6) $\tau = 1$, тогда при $t \in [1, t_0 + 1]$ приходим к формуле

$$u(t, \varphi) = \exp[\lambda(1 + (1 - A)(t - 1))(1 + o(1))]. \quad (8)$$

Ниже через $t_1(\varphi)$ и $t_2(\varphi)$ будем обозначать первый и второй положительные корни уравнения $u(t, \varphi) = 1$. Отметим, что для $t_1(\varphi)$ выполнено соотношение $t_1(\varphi) = t_0 + o(1)$. При $t \in [t_1(\varphi) + 1, t_2(\varphi)]$ положим в (6) $\tau = t_1(\varphi) + 1$ и из (8) приходим к равенству

$$u(t, \varphi) = \exp[\lambda(1 + o(1))(1 - A + t - (t_1(\varphi) + 1))].$$

Отсюда получаем, что $t_2(\varphi) = A^2(A - 1)^{-1} + o(1)$.

Оператор последования Π введём по правилу

$$\Pi(\varphi(s)) = u(s + t_2(\varphi), \varphi).$$

В итоге

$$\Pi(\varphi(s)) \in S \quad \text{и} \quad \Pi S \in S, \quad (9)$$

где S – множество функций, удовлетворяющих условиям (7).

Воспользуемся общими утверждениями (см., например, [11, с. 227–236]) о существовании неподвижной точки отображения множества в себя. Тогда из (9) следует существование в S неподвижной точки $\varphi_0(s)$ оператора Π . Тем самым функция $u_0(t, \lambda) = u(t, \varphi_0)$ является периодической с периодом $T_0(\lambda) = t_2(\varphi_0)$. Простое, но громоздкое обоснование устойчивости решения $u_0(t, \lambda)$ здесь не приводим. Детально необходимые для этого построения изложены в монографии [10, с. 128–136]. Теорема доказана.

Заметим, что явная формула (5) приведена лишь для примера. Утверждение теоремы и её доказательство сохраняют силу и для произвольной положительной функции $F(u)$, удовлетворяющей предельному равенству $F(u) \rightarrow A$ при $u \rightarrow \infty$.

Отметим наиболее важные отличия при $\lambda \gg 1$ цикла $u_0(t, \lambda)$ уравнения (2) при условии (5) и релаксационного цикла $u^0(t, \lambda)$ уравнения (1). Значения их максимумов примерно одни и те же, а значения их минимумов и периодов $T_0(\lambda)$ и $T^0(\lambda)$ отличаются существенно:

$$\min_t u_0(t, \lambda) = \exp(\lambda(1 - A + o(1))), \quad \min_t u^0(t, \lambda) = \exp(-\exp(\lambda(1 + o(1)))),$$

$$T_0(\lambda) = A^2(A - 1)^{-1} + o(1), \quad T^0(\lambda) = \lambda^{-1}(1 + o(1)) \exp \lambda.$$

На рисунке приведены графики функций $u_0(t, \lambda)$ и $u^0(t, \lambda)$ при $\lambda = 3$, $\alpha = 0.4$.

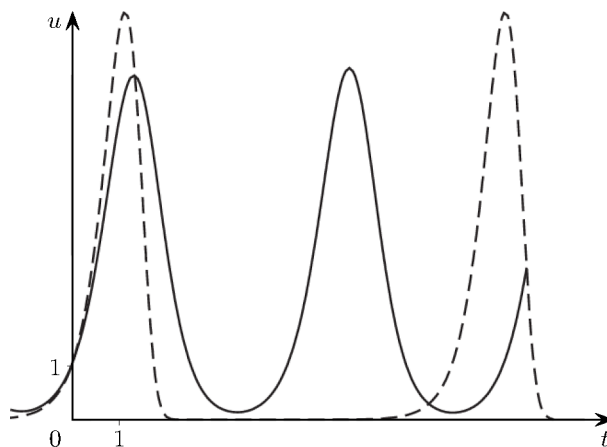


Рисунок. Графики функций $u_0(t, \lambda)$ (сплошная кривая) и $u^0(t, \lambda)$ (штриховая).

Заключение. В математической экологии функция $F(u(t - 1))$ в уравнении (2) характеризует сопротивление внешней среды. Нами показано, что ограничение на эту функцию $F(u) \leq A$ в экстремальной ситуации при $\lambda \gg 1$ способствует стабилизации колебаний. Имеется в виду, что колебания становятся “безопаснее”: наименьшее значение для $u_0(t, \lambda)$ существенно больше, чем $u^0(t, \lambda)$, период $T_0(\lambda)$ для $u_0(t, \lambda)$ существенно меньше, чем период $T^0(\lambda)$ для $u^0(t, \lambda)$. Отметим ещё, что в статье [12] приведены результаты динамики решений для некоторых уравнений с запаздыванием, обобщающих уравнение (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Murray J.D. Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications. Interdisciplinary Applied Mathematics. V. 18. New York, 2003.
2. Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Applied Mathematical Sciences. V. 119. New York, 1996.
3. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Mathematics in Science and Engineering. V. 191. Boston, 1993.

4. *Wright E.M.* A non-linear difference-differential equation // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1955. Bd. 194. S. 66–87.
5. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2020. № 9. С. 39–55.
6. *May R.M.* Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton, 1974.
7. *Кащенко С.А.* Бифуркации в логистическом уравнении с запаздыванием и малыми возмущениями // Изв. вузов. Математика. 2020. № 10. С. 47–64.
8. *Oster G., Guckenheimer J.* Bifurcation phenomena in population models // The Hopf Bifurcation and Its Applications. Appl. Math. Sci. New York, 1976. V. 19. P. 327–353.
9. *Kashchenko S.A.* Asymptotics of the solutions of the generalized hutchinson equation // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. V. 47. P. 470–494.
10. *Кащенко С.А.* Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием. М., 2020.
11. *Edwards R.E.* Functional Analysis. Theory and Applications. New York, 1965.
12. *Кащенко С.А.* Периодические решения нелинейных уравнений, обобщающих логистические уравнения с запаздыванием // Мат. заметки. 2017. Т. 102. С. 216–230.

Региональный научно-образовательный
математический центр
“Центр интегрируемых систем”, г. Ярославль,
Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 21.01.2022 г.
После доработки 17.03.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.