

---

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

---

УДК 517.956.225+517.956.227

# ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ОКОЛО КОНТУРА НА ГРАНИЦЕ ТОНКОЙ ОБЛАСТИ

© 2024 г. С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург

e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 07.01.2024 г., после доработки 20.09.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Исследована спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа в трёхмерной тонкой области переменной толщины, принимающей максимальное значение всюду на гладком замкнутом контуре внутри продольного сечения или на границе последнего. Найдены асимптотические представления собственных значений, включающие в качестве членов собственные значения уравнения гармонического осциллятора на оси или полуоси, а также некоторого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на указанном контуре. Установлено, что собственные функции сугубо локализованы около контура.

*Ключевые слова:* задача Дирихле, тонкая область, асимптотика собственных значений

DOI: 10.31857/S0374064124120073, EDN: IPEUNZ

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $\omega$  — область на плоскости  $\mathbb{R}^2$   $\exists y = (y_1, y_2)$  с липшицевой границей  $\partial\omega$  и компактным замыканием  $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ ;  $\gamma$  — простой замкнутый гладкий класса  $C^\infty$  (ср. с 1° в п. 7) контур внутри  $\omega$  и  $\mathcal{V}_d$  — его  $d$ -окрестность, где определена естественная система криволинейных координат  $(n, s)$ , причём  $d > 0$  и  $\bar{\mathcal{V}}_d \subset \omega$ ,  $n$  — ориентированное расстояние до  $\gamma$ ,  $n > 0$  вне области, ограниченной контуром, а  $s$  — длина дуги на нём, измеренная против часовой стрелки. Сведём масштабированием характерный размер фигуры  $\omega$  к единице, т.е. сделаем декартовы координаты  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  и все геометрические параметры безразмерными, в частности, малый положительный параметр  $\varepsilon$ .

В тонкой области (рис. 1, a)

$$\Omega^\varepsilon = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in \omega, z = x_3 \in (0, \varepsilon h(y))\} \quad (1)$$

рассмотрим задачу Дирихле

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad (2)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon, \quad (3)$$

и её вариационную постановку

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{при всех } \psi \in H_0^1(\Omega^\varepsilon). \quad (4)$$

Здесь  $\nabla = \text{grad}$ ,  $\Delta_x$  — оператор Лапласа,  $\lambda^\varepsilon$  — спектральный параметр,  $(\cdot, \cdot)_{\Omega^\varepsilon}$  — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Pi)$  и  $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$  — пространство Соболева

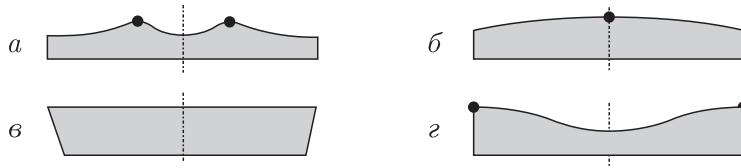


Рис. 1. Частные примеры сечения областей вращения. Максимумы профильной функции отмечены точками

функций, удовлетворяющих условию (3). Кроме того,  $h$  — положительная профильная функция, непрерывная в  $\bar{\omega}$  и гладкая в  $\mathcal{V}_d$ , на которую наложим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} h(y) &= h_0 \quad \text{на } \gamma, \quad h(y) < h_0 \quad \text{при } y \in \bar{\omega} \setminus \gamma, \\ h(y) &= h_0 - a(s)n^2 + O(|n|^3), \quad y \in \mathcal{V}_d, \quad a \in C^\infty(\gamma), \quad a > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Спектр задачи (4) (или (2), (3) в дифференциальной форме) является дискретным и образует положительную монотонную последовательность нормальных собственных значений

$$0 < \lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_q^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

а соответствующие собственные функции  $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon, \dots, u_q^\varepsilon, \dots \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$  можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где  $\delta_{p,q}$  — символ Кронекера. Первое собственное значение  $\lambda_1^\varepsilon$  простое, а собственную функцию  $u_1^\varepsilon$  фиксируем положительной в области  $\Omega^\varepsilon$ .

Аналогичным (2), (3) задачам Дирихле в различных постановках посвящено большое количество публикаций (см. [1–6] и др.), которые, впрочем, относятся к случаю строгого глобального максимума профильной функции  $h$  в единственной точке  $y_\bullet \in \omega$  (рис. 1, б), т.е.

$$\begin{aligned} h(y) &< h_\bullet \quad \text{при } y \in \omega \setminus \{y_\bullet\}, \quad h(y) = h_\bullet - a_\bullet(y) + \tilde{a}_\bullet(y), \quad \tilde{a}_\bullet(y - y_\bullet) = O(|y - y_\bullet|^3), \\ a_\bullet(y_\bullet + t(y - y_\bullet)) &= t^2 a_\bullet(y), \quad t > 0, \quad a_\bullet(y) \geq c_\bullet |y - y_\bullet|^2, \quad c_\bullet > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае асимптотика членов последовательности (6) принимает вид

$$\lambda_k^\varepsilon = \pi^2 h_\bullet^{-2} \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} \mu_k + O(\varepsilon^{-1/2}),$$

где  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  — положительная неограниченная последовательность собственных значений дифференциального уравнения в частных производных на плоскости

$$-\Delta_\xi \mathbf{w}(\xi) + 2\pi^2 h_\bullet^{-3} a_\bullet(\xi) \mathbf{w}(\xi) = \mu \mathbf{w}(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Соответствующие собственные функции  $\mathbf{w}_k$  затухают при  $|\xi| = \varepsilon^{-1/2} |y - y_\bullet| \rightarrow +\infty$  с экспоненциальной скоростью, и аналог этого свойства передаётся собственным функциям  $u_k^\varepsilon$  исходной задачи в тонкой области (1), которые тем самым приобретают качества внутреннего пограничного слоя.

В противоположность указанным результатам далее изучается ситуация

$$a(s) = a_0, \quad (9)$$

обеспечивающая локализацию собственных функций задачи (2), (3) около всей линии

$$\gamma^\varepsilon = \{x: y \in \gamma, z = \varepsilon h(y)\} \subset \partial\Omega^\varepsilon. \quad (10)$$

При переменном коэффициенте  $a$  в формуле (5) опять наблюдается концентрация собственных функций  $u_k^\varepsilon$  около точки максимума  $s_\#$  функции  $\gamma \ni s \mapsto a(s)$  (процедура построения асимптотики собственных значений приведена в п. 7, 2°).

Концентрация собственных функций около контура на границе наблюдалась (см. [7]) и в смешанной краевой задаче в тонкой области при постановке условий Неймана на скошенной боковой поверхности (рис. 1, в), однако только для окружности  $\partial\omega$  — в противном случае локализация происходит около точки максимальной кривизны срединного сечения. Происхождение эффекта иное, чем в данной работе: его порождает захваченная волна в задаче на полуполосе с искривлённом торцом (см. [7, 8]), которая (задача) описывает явление пограничного слоя. При этом эффект, разумеется, полностью исчезает, если область  $\Omega^\varepsilon$  — прямой цилиндр  $\omega \times (0, \varepsilon)$ . Подчеркнём, что в рассматриваемой задаче (2), (3) при ограничениях (5) и (9) локализация происходит вне зависимости от кривизны контура  $\gamma$  и младших членов формулы Тейлора для профильной функции  $h$ , которые влияют лишь на коэффициенты предельного уравнения. Кроме того, распределение собственных функций вдоль всего контура оказывается не только на асимптотических конструкциях, но и на самой процедуре обоснования асимптотики, особенно на вычислении в теореме 3 пределов

$$\beta_{1m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\lambda_m^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_1 \varepsilon^{-1}), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

— наиболее сложном результате, проверка которого потребовала разработки новых технических приёмов.

Формальный асимптотический анализ представлен в п. 2, где найдено несколько серий собственных значений с явной асимптотикой, а обоснование асимптотик — в пп. 3, 5, 6, где выведены оценки асимптотических остатков в представлениях собственных значений и функций, а также вычислен предел (11). В п. 4 установлено экспоненциальное затухание собственных функций при удалении от линии (10). Наконец, в п. 7 сформулированы открытые вопросы и обсуждены доступные обобщения, в частности, перечислены изменения в асимптотической процедуре для ситуации  $\gamma = \partial\omega$ , в которой контур  $\gamma$  — гладкое ребро, например, плоско-вогнутой линзы  $\Omega^\varepsilon$  (рис. 1, г).

## 2. ФОРМАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА

Собственные пары {значение; функция} задачи (2), (3) ищем в виде (см. комментарии в п. 1 замечания 1)

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon^{-1} \mu + \beta + \dots, \quad (12)$$

$$u^\varepsilon(x) = \sin(\pi \zeta h(y)^{-1}) (v(s)w(\eta) + \varepsilon^{1/2} w'(\eta, s) + \varepsilon w''(\eta, s)) + \dots \quad (13)$$

Здесь многоточие заменяет младшие асимптотические члены, несущественные в предпринимаемом формальном анализе, а числа  $\mu$ ,  $\beta$  и функции  $v$  на контуре  $\gamma$  и  $w$ ,  $w'$ ,  $w''$  на оси  $\mathbb{R}$  подлежат определению. Кроме того, введены растянутые координаты

$$\zeta = \varepsilon^{-1} z, \quad \eta = \varepsilon^{-1/2} n, \quad (14)$$

причём составляющие  $w$ ,  $w'$ ,  $w''$  экспоненциально затухают при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , т.е. истолковываются как внутренние пограничные слои. Сначала выведем дифференциальные уравнения, из которых найдём собственные пары  $\{\mu; w\}$  и  $\{\beta; v\}$  в anzaxах (12) и (13).

Оператор Лапласа в криволинейных координатах  $(n, s, z)$  принимает вид

$$\Delta = J(n, s)^{-1} \partial_n J(n, s) \partial_n + J(n, s)^{-1} \partial_s J(n, s)^{-1} \partial_s + \partial_z^2,$$

где  $J(n, s) = 1 + \kappa(s)n$  — якобиан и  $\kappa(s)$  — кривизна в точке  $s \in \gamma$ , вообще говоря, знакоперемен-ная, т.е. отрицательная на вогнутых участках. При переходе к растянутым координатам (14) получаем расщепление

$$\Delta = \varepsilon^{-2} \partial_\zeta^2 + \varepsilon^{-1} \partial_\eta^2 + \varepsilon^{-1/2} \kappa(s) \partial_\eta + \varepsilon^0 (\partial_s^2 - \kappa(s)^2 \eta \partial_\eta) + \dots \quad (15)$$

Формула Тейлора

$$h(n, s) = h_0 - a_0 n^2 - a'(s) n^3 - a''(s) n^4 + O(|n|^5) \quad (16)$$

с коэффициентами (9) и  $a', a'' \in C^\infty(\gamma)$  приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\pi^2}{h_0^2} \right) \sin \left( \frac{\pi z}{\varepsilon h(y)} \right) &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \sin \left( \frac{\pi \zeta}{h(y)} \right) \frac{h(y)^2 - h_0^2}{h(y)^2 h_0^2} = \\ &= -\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \sin \left( \frac{\pi \zeta}{h(y)} \right) \frac{2}{h_0^3} n^2 \left( a_0 + a'(s) n + \left( a''(s) + \frac{3a_0}{2h_0} \right) n^2 + O(|n|^3) \right) = \\ &= -\frac{\pi^2}{\varepsilon} \sin \left( \frac{\pi \zeta}{h(y)} \right) \frac{2}{h_0^3} \eta^2 \left( a_0 + \varepsilon^{1/2} a'(s) \eta + \varepsilon \left( a''(s) + \frac{3a_0}{2h_0} \right) \eta^2 + O(\varepsilon^{3/2} |\eta|^3) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Подставим разложения (12), (13) и (15), (17) в уравнение (2) и соберём коэффициенты при  $\varepsilon^{-1}$  и  $\varepsilon^{-1/2}$ . В первую очередь получим уравнение гармонического осциллятора

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + B^2 \eta^2 w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

с параметром  $B = \pi \sqrt{2a_0 h_0^{-3}}$ . Собственные значения

$$\mu_k = B(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

известны (см., например, монографию [9]), а соответствующие собственные функции  $w_k \in C^\infty(\mathbb{R})$ , исчезающие на бесконечности со скоростью  $O(|\eta|^{k-1} e^{-B\eta^2/2})$ , нормируем в пространстве Лебега  $L^2(\mathbb{R})$ , причём первую зафиксируем положительной. Они оказываются чётными при  $k = 2\ell - 1$  и нечётными при  $k = 2\ell$ ; здесь  $\ell \in \mathbb{N}$ . Сложноустроенные явные формулы для функции  $w_k$  (см. [9]) востребованы не будут.

Зафиксируем индекс  $k$  и припишем его членам анзацев (12) и (13). Очередное уравнение

$$\begin{aligned} -\partial_\eta^2 w'_k(\eta, s) - B^2 \eta^2 w'_k(\eta, s) - \mu_k w'_k(\eta, s) &= f'_k(\eta, s) := \\ &:= v(s) (\kappa(s) \partial_\eta w_k(\eta) - 2\pi^2 h_0^{-3} a'(s) \eta^3 w_k(\eta)), \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (20)$$

имеет экспоненциально затухающее на бесконечности решение

$$w'_k(\eta, s) = v(s) \mathbf{w}'_k(\eta, s), \quad (21)$$

так как в силу упомянутого свойства чётности/нечётности собственной функции выполнено условие его разрешимости

$$\int_{\mathbb{R}} w_k(\eta) f'_k(\eta, s) d\eta = 0. \quad (22)$$

**Замечание 1.** 1. Именно по причине безусловной разрешимости уравнения (20) в представление (12) не включено слагаемое порядка  $\varepsilon^{-1/2}$ .

2. При составлении уравнений (18) и (20) удалось пренебречь слагаемыми, возникающими при дифференцировании по переменным  $n$  и  $s$  множителя  $\sin(\cdot)$  в представлении (13):

$$\begin{aligned} \kappa(s)v(s)w_k(\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)\right), \quad w_k(\eta)\left(v(s)\frac{\partial}{\partial s}+2\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)\right), \\ v(s)\left(w_k(\eta)\frac{\partial}{\partial n}+2\frac{\partial w_k}{\partial n}(\eta)\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Первое выражение  $-v(s)w_k(\eta)(\partial_n h(y)/h(y))\mathcal{Z}(y, \zeta)$  с множителем  $\mathcal{Z}(y, \zeta) = (\pi\zeta/h(y))\cos(\pi\zeta/h(y))$  мало, так как  $\partial_n h(y) = 2\varepsilon^{1/2}a\eta + O(\varepsilon|\eta|^2)$  в силу формул (14) и (16). С учётом соотношения  $\partial_s h(y) = O(|n|^3) = O(\varepsilon^{3/2}|\eta|^3)$  второе выражение в (23) приобретает даже меньший порядок, т.е. его и предыдущее можно не принимать во внимание и на следующем шаге итерационного процесса: полиномиальный рост при  $|\eta| \rightarrow \infty$  гасится за счёт экспоненциального затухания сомножителя  $w_k(\eta)$ . Вместе с тем третье выражение в (23) представимо в виде

$$\begin{aligned} -v(s)(w_k(\eta)\partial_n^2 h(y) + 2\partial_n w_k(\eta)\partial_n h(y))h(y)^{-1}\mathcal{Z}(y, \zeta) + \dots = \\ = -2a_0 h_0^{-1}v(s)(w_k(\eta) + 2\eta\partial_\eta w_k(\eta))\mathcal{Z}(y, \zeta) + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

и его приходится учитывать при составлении уравнения для  $w_k''$ . При этом для компенсации главного члена невязки (24) введём в разложение (13) дополнительный член

$$\mathcal{W}_k(\eta, \zeta, s) = \frac{a_0}{h_0}v(s)(w_k(\eta) + 2\eta\partial_\eta w_k(\eta))\frac{\zeta^2}{2}\sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right), \quad (25)$$

который после умножения на  $\varepsilon^2$  порождает в главном невязку  $v(s)\mathcal{F}_k(\eta, s)\sin(\pi\zeta/h(y))$  нужного вида, причём

$$\mathcal{F}_k(\eta, s) = -a_0 h_0^{-1}(w_k(\eta) + 2\eta\partial_\eta w_k(\eta)). \quad (26)$$

Условие разрешимости ещё одного уравнения

$$\begin{aligned} -\partial_\eta^2 w_k''(\eta, s) - B^2\eta^2 w_k''(\eta, s) - \mu_k w_k''(\eta, s) = f_k''(\eta, s) := \\ := (\partial_s^2 v(s) + \beta v(s))w_k(\eta) + v(s)\mathbf{f}_k''(\eta, s) + v(s)\mathcal{F}_k(\eta, s), \quad \eta \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (27)$$

возникшего на третьем шаге процедуры и составленного при учёте формул (13), (15) и (26), принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения на контуре

$$-\partial_s^2 v(s) + b_k(s)v(s) = \beta v(s), \quad s \in \gamma, \quad (28)$$

при этом коэффициент  $b_k$  находится по формуле

$$b_k(s) = \int_{\mathbb{R}} w_k(\eta)(\mathbf{f}_k''(\eta, s) + \mathcal{F}_k(\eta, s))d\eta, \quad (29)$$

где подынтегральное выражение включает функции (26) и

$$\mathbf{f}''(\eta, s) = \kappa(s)^2\eta\partial_\eta w_k(\eta) + \frac{2\pi^2}{h_0^3}\left(a''(s) + \frac{3a}{2h_0}\right)\eta^2 w_k(\eta) - \kappa(s)\partial_\eta \mathbf{w}_k'(\eta, s) + \frac{2\pi^2}{h_0^3}a'(s)\eta^3 \mathbf{w}_k'(\eta, s).$$

Отметим, что множитель  $\mathbf{w}'_k(\eta, s)$  в решении (21) уравнения (20) определён с точностью до слагаемого  $\mathbf{c}'(s)w_k(\eta)$ , выбор которого не влияет на величину (29) по причине (22).

При выполнении соотношения (28) уравнение (27) становится разрешимым, вторая производная  $\partial_s^2 v$  исчезает из него, а само решение принимает аналогичный (21) вид

$$w''_k(\eta, s) = v(s)\mathbf{w}''_k(\eta, s). \quad (30)$$

Итак, определена ещё одна предельная задача (28). Следующее утверждение легко выводится на основе стандартных сведений по обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, [10, 11]).

**Лемма 1.** *Спектр предельного уравнения (28) является дискретным и образует монотонную неограниченную последовательность собственных значений*

$$\beta_{k1} \leq \beta_{k2} \leq \beta_{k3} \leq \dots \leq \beta_{km} \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (31)$$

причём их кратности не превосходят двух. Соответствующие собственные функции можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(v_{kp}, v_{kq})_\gamma = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

### 3. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon := H_0^1(\Omega^\varepsilon)$  введём скалярное произведение

$$\langle u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\nabla u^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad (33)$$

и положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор  $\mathcal{T}^\varepsilon$ :

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{при всех } u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \quad (34)$$

Нужные свойства билинейной формы (33) обеспечены неравенством Фридрихса, происходящим от условий Дирихле (3). Оператор  $\mathcal{T}^\varepsilon$  компактный, т.е. согласно теоремам 10.1.5 и 10.2.2 из [12] его существенный спектр — одна точка  $\tau = 0$ , а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность нормальных собственных значений

$$\tau_1^\varepsilon \geq \tau_2^\varepsilon \geq \tau_3^\varepsilon \geq \dots \geq \tau_m^\varepsilon \geq \dots \rightarrow 0.$$

Сравнив формулы (33), (34) и (4), видим, что вариационная постановка задачи (2)–(4) эквивалентна абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon \quad \text{в пространстве } \mathcal{H}^\varepsilon$$

со спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = (\lambda^\varepsilon)^{-1}. \quad (35)$$

Следующее утверждение, известное как лемма о “почти собственных” значениях и векторах (см. [13]), обеспечено спектральным разложением резольвенты (см., например, монографию [12, гл. 6]).

**Лемма 2.** Пусть  $U^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$  и  $t^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  таковы, что

$$\|U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon U^\varepsilon - t^\varepsilon U^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: \delta^\varepsilon \in [0, t^\varepsilon]. \quad (36)$$

Тогда у оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  есть собственное значение  $\tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$ , подчинённое неравенству

$$|t^\varepsilon - \tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon| \leq \delta^\varepsilon,$$

а для любого  $\delta_*^\varepsilon \in (\delta^\varepsilon, t^\varepsilon)$  найдётся столбец коэффициентов  $\mathcal{C}^\varepsilon = (\mathcal{C}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$ , при котором выполнены соотношения

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{\ell=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} \mathcal{C}_\ell^\varepsilon \mathcal{U}_\ell^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\delta^\varepsilon}{\delta_*^\varepsilon}, \quad \sum_{\ell=\mathcal{N}^\varepsilon}^{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1} |\mathcal{C}_\ell^\varepsilon|^2 = 1, \quad (37)$$

где  $\tau_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \tau_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  — набор всех собственных значений оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  из замкнутого сегмента  $[t^\varepsilon - \delta_*^\varepsilon, t^\varepsilon + \delta_*^\varepsilon]$ , а соответствующие собственные векторы  $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  подчинены условиям ортогональности и нормировки

$$\langle \mathcal{U}_p^\varepsilon, \mathcal{U}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}. \quad (38)$$

Согласно равенствам (12) и (35) в качестве компонент “почти собственной” спектральной пары возьмём выражения

$$t_{km}^\varepsilon = \varepsilon^2 (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km})^{-1}, \quad (39)$$

$$U_{km}^\varepsilon(x) = \|\chi V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \chi(y) V_{km}^\varepsilon(x), \quad (40)$$

где  $k, m \in \mathbb{N}$ , а  $\mu_k$  и  $\beta_m$  — собственные значения из последовательностей (19) и (31); при этом можно считать, что срезающая функция  $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{V}_d)$ , удовлетворяющая условиям

$$\chi(x) = 1 \quad \text{при } x \in \mathcal{V}_{d/2}, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (41)$$

зависит только от переменной  $n$ . Кроме того,

$$V_{km}^\varepsilon(x) = \sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right) v_m(s) (w_k(\eta) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{w}'_k(\eta, s) + \varepsilon \mathbf{w}''_k(\eta, s)) + \varepsilon^2 \mathcal{W}_k(\eta, \zeta, s). \quad (42)$$

Составляющие формулы (42) найдены в п. 2 и заданы равенствами (21), (30) и (25), причём в них фигурируют собственные функции  $w_k$  и  $v_m$  из уравнений (18) и (28) соответственно. Наличие в (42), (25) и (40)  $\sin(\pi\zeta/h(y))$  и срезки  $\chi(y)$  обеспечивает выполнение условий Дирихле (3), а значит,  $U_{km}^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ .

Оценим величину  $\delta_{km}^\varepsilon$  из формулы (36), найденную по паре (39), (40):

$$\begin{aligned} \delta^\varepsilon &= \sup |\langle \mathcal{T}^\varepsilon U_{km}^\varepsilon - t_{km}^\varepsilon U_{km}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon| = \\ &= t_{km}^\varepsilon \|V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\nabla_x (\chi V_{km}^\varepsilon), \nabla_x \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_{km}) (\chi V_{km}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}| = \\ &= t^\varepsilon \|V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup |(\Delta_x V_{km}^\varepsilon + (\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_{km}) V_{km}^\varepsilon, \chi \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + ([\Delta_x, \chi] V_{km}^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}|. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon$ , т.е.  $\|\Psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq 1$  и согласно одномерному неравенству Фридрихса

$$\|\Psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_h \varepsilon^2 \|\partial_z \Psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_h \varepsilon^2. \quad (44)$$

Рассмотрим сумму  $I_{km}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)$  скалярных произведений между последними знаками модуля в формуле (43). Сразу же заметим, что коэффициенты коммутатора  $[\Delta_x, \chi]$  отличны от нуля только на множестве  $\{x \in \Omega^\varepsilon : \text{dist}(y, \gamma) \in [d/2, d]\}$ , где сумма (42) приобретает порядок  $e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}$  при некотором  $\vartheta > 0$  ввиду экспоненциального затухания функций  $w_k$ ,  $\mathbf{w}'_k$ ,  $\mathbf{w}''_k$  и  $\mathcal{W}_k$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Включённые в определение (40), (42) функции были построены в п. 2 так, чтобы выполнялась оценка

$$|\Delta_x V_{km}^\varepsilon(x) + (\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_m) V_{km}^\varepsilon(x)| \leq c_{k,m} (|n| + \sqrt{\varepsilon}) (1 + |\eta|)^N e^{-B\eta^2/2}, \quad y \in \mathcal{V}_d. \quad (45)$$

При учёте неравенства (44) находим, что

$$|I_{km}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon)| \leq c_{km} \|\Psi^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| \left( \sqrt{\varepsilon} \varepsilon^{-\theta/\varepsilon} + \left( \iint_0^d (|n| + \sqrt{\varepsilon})^2 \left( 1 + \frac{|n|}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^{2N} e^{-B|n|^2/\varepsilon} d|n| dz \right)^{1/2} \right) \leq C_{km} \varepsilon^{9/4}.$$

Кроме того, в лемме 3 будет проверено соотношение

$$\|\chi V_{km}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \geq c_{km} \varepsilon^{-1/4}. \quad (46)$$

В результате приходим к неравенству  $\delta_{km}^\varepsilon \leq c_{km} \varepsilon^{9/2}$ . Согласно лемме 2 существует собственное значение  $\tau_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon$  с каким-то номером  $N^\varepsilon(km) \in \mathbb{N}$ , для которого верна оценка

$$|\tau_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon - t_{km}^\varepsilon| \leq c_{km} \varepsilon^{9/2}. \quad (47)$$

Теперь в силу соотношений (39) и (35) имеем

$$|\lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_k \varepsilon^{-1} - \beta_{km}| \leq c_{km} \varepsilon^{5/2} \lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km}). \quad (48)$$

Отсюда в силу импликации ( $|a - b| \leq c \Rightarrow a - c \leq b \Rightarrow a \leq 2b$  при  $2c \leq a$  для неотрицательных  $a$ ,  $b$  и  $c$ ) и простых алгебраических преобразований вытекает, что

$$\lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon \leq 2(\pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1} + \beta_{km}) \quad \text{при} \quad 2c_{km} \varepsilon^{5/2} (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km}) \leq 1,$$

$$|\lambda_{N^\varepsilon(km)}^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_k \varepsilon^{-1} - \beta_{km}| \leq 2c_{km} \varepsilon^{1/2} (\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_k + \varepsilon^2 \beta_{km})^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{km}].$$

Величина  $\varepsilon_{km} > 0$  подобрана исходя из условия, возникшего в верхней строке последнего списка.

Нужная оценка получена. Убедимся теперь в том, что для кратного собственного значения  $\beta_{km} = \beta_{km+1}$  имеются два разных члена последовательности (6), удовлетворяющих упомянутой оценке. Напомним, что собственное значение  $\mu_k$  простое, собственная функция  $w_k$  нормирована в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$ , а собственные функции  $v_m$  и  $v_{m+1}$  подчинены условиям ортогональности и нормировки (32).

**Лемма 3.** Для функций  $V_{km}^\varepsilon$  и  $V_{km+1}^\varepsilon$ , отвечающих кратному собственному значению  $\beta_{km} = \beta_{km+1}$  уравнения (28), справедливо соотношение

$$\left| \langle \chi V_{kp}^\varepsilon, \chi V_{kq}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \frac{\pi^2 \delta_{p,q}}{2h_0^2 \sqrt{\varepsilon}} \right| \leq c_{km}, \quad p, q = m, m+1. \quad (49)$$

**Доказательство.** Более простые выкладки, чем в замечании 1, показывают, что

$$\left\| \chi \partial_z V_{kp}^\varepsilon - w_k v_p \frac{\partial}{\partial z} \sin \left( \frac{\pi \zeta}{h(y)} \right); L^2(\Omega^\varepsilon) \right\|^2 + \|\nabla_y (\chi V_{kp}^\varepsilon); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_{km}.$$

Осталось продифференцировать синус и проинтегрировать результат по  $(0, \varepsilon h(y)) \ni z$ , учитывая экспоненциальное затухание функции  $w_k$  и формулы (5), (32), а также

$$dx = J(n, s) dn ds dz, \quad \nabla_x = (\partial_n, J(n, s)^{-1} \partial_s, \partial_z). \quad (50)$$

Лемма доказана.

Применим вторую часть леммы 2 и возьмём

$$\delta^\varepsilon = \delta_{km}^\varepsilon \leq c_{km} \varepsilon^{9/2} \quad \text{и} \quad \delta_*^\varepsilon = \delta^\varepsilon / \varrho,$$

но число  $\varrho \in (0, 1)$  выберем далее. При  $p = m, m+1$  обозначим через  $\mathcal{C}_p^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$  и  $\mathcal{S}_p^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$  столбцы коэффициентов и линейные комбинации собственных векторов  $\mathcal{U}_{N^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{N^\varepsilon + \mathcal{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  из формулы (37) в лемме 2. При учёте соотношений (38) получим, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_q^\varepsilon \cdot \mathcal{C}_q^\varepsilon - \delta_{p,q}| &= |\langle \mathcal{S}_p^\varepsilon, \mathcal{S}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq \\ &\leq |\langle \mathcal{S}_p^\varepsilon, \mathcal{S}_q^\varepsilon - U_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| + |\langle \mathcal{S}_p^\varepsilon - U_p^\varepsilon, U_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| + |\langle U_p^\varepsilon, U_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq 2\varrho + 2\varrho + \mathbf{C}_{km} \varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \quad (51)$$

Мажоранта для последнего слагаемого в средней части формулы (51) находится при помощи оценки (49) в лемме 3, которую (оценку) применяем дважды: сначала при  $p = q$  для вычисления нормы  $\|V_p^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|$ , а затем и при разных  $p$  и  $q$ . Отметим, что неравенство (49) также обеспечивает использованное ранее соотношение (46).

Итак, при достаточно малых  $\varrho > 0$  и  $\varepsilon > 0$  столбцы  $\mathcal{C}_m^\varepsilon$  и  $\mathcal{C}_{m+1}^\varepsilon$  “почти ортонормированы” в пространстве  $\mathbb{R}^{\mathcal{X}^\varepsilon}$ , что возможно лишь в случае  $\mathcal{X}^\varepsilon \geq 2$ , т.е. по крайней мере два разных собственных значения  $\tau_{N^\varepsilon(k, m)}^\varepsilon$  и  $\tau_{N^\varepsilon(k, m+1)}^\varepsilon$  удовлетворяют неравенству (47) с новой мажорантой  $c_{km} \varrho^{-1} \varepsilon^{9/2}$ . Задаваясь подходящей величиной  $\varrho > 0$  и повторив выкладку (48) в слегка изменённых условиях, приходим к исходному утверждению.

**Теорема 1.** Для любых  $k, m \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные величины  $\varepsilon_{km}$ ,  $C_{km}$  и собственное значение  $\lambda_{N^\varepsilon(k, m)}^\varepsilon$  задачи (2), (3), что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{km}]$  выполнено неравенство

$$|\lambda_{N^\varepsilon(k, m)}^\varepsilon - \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} - \mu_k \varepsilon^{-1} - \beta_{km}| \leq C_{km} \varepsilon^{1/2}. \quad (52)$$

Здесь  $\mu_k$  и  $\beta_{km}$  — собственные значения (19) и (31) обыкновенных дифференциальных уравнений (18) и (28) соответственно.

Неравенство (52) показывает, что найденная в п. 2 конструкция (12) в самом деле представляет собой асимптотику некоторого собственного значения  $\lambda_{N^\varepsilon(k, m)}^\varepsilon$  задачи (2), (3), однако теорема 1 не указывает его номер  $N^\varepsilon(k, m)$  в последовательности (6). Разумеется, в случае  $k > 1$  такой номер не может оказаться общим для всех малых значений параметра  $\varepsilon$ , так как зависит от параметра  $\varepsilon$  и стремится к бесконечности: по той же теореме количество собственных значений на интервале  $(0, \pi^2 h_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_k \varepsilon^{-1})$  неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Ниже будет проверено, что  $N^\varepsilon(1, m) = m$  при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{1m}]$ , т.е. члены последовательности (31) с  $k = 1$  дают пределы (11). Кроме того, будут получены асимптотические формулы для функций  $u_m^\varepsilon$ .

#### 4. ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть  $\lambda_m^\varepsilon$  — собственное значение задачи (2), (3), удовлетворяющее неравенству

$$\lambda_m^\varepsilon \leq \pi^2 \varepsilon^{-2} h_0^{-2} + \Lambda_m \varepsilon^{-1} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_m] \quad (53)$$

с некоторыми положительными постоянными  $\varepsilon_m$  и  $\Lambda_m$ . Для подбираемых далее величин  $\theta > 0$  и  $r > 0$  введём непрерывную кусочно-гладкую весовую функцию

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y) = e^{\theta n^2/\varepsilon}, \quad x \in \Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y) = \begin{cases} e^{\theta r^2}, & x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \\ e^{\theta d^2/\varepsilon}, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_d^\varepsilon. \end{cases} \quad (54)$$

Здесь и далее  $\Omega_t^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon \cap \mathcal{V}_d : |n| < t\}$  при  $t \in (0, d]$ . Подставим в интегральное тождество (4) пробную функцию  $\psi^\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \mathcal{Y}_k^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ , где  $\mathcal{Y}_m^\varepsilon = \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon$ . После несложных преобразований, включающих коммутирование оператор-градиента и весовой функции, выводим равенство

$$\|\nabla_x \mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon(\mathcal{R}_\varepsilon^\theta)^{-1} \nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \lambda_m^\varepsilon \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (55)$$

Заметим, что  $\nabla_x \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(x) = 0$  при  $x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon \cup (\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_d^\varepsilon)$  и

$$\mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y)^{-1} |\nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y)| \leq 2\theta \rho(y) \varepsilon^{-1} \quad \text{при } x \in \Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad (56)$$

где  $\rho(y) = \text{dist}(y, \gamma)$ . Продолжим преобразования при учёте формул (7) и (53):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \Lambda_m e^{2\theta r^2} &\geq \frac{1}{\varepsilon} \Lambda_m e^{2\theta r^2} \|u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 \geq \left( \lambda_m^\varepsilon - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} \right) \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 = \\ &= \|\nabla_x \mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon(\mathcal{R}_\varepsilon^\theta)^{-1} \nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \lambda_m^\varepsilon \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} \|\mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon^2} \|\mathcal{W}_\varepsilon^\theta \mathcal{Y}_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2. \end{aligned}$$

Согласно формулам (53), (56) и неравенству Фридрихса на отрезке  $(0, \varepsilon h(y))$  находим, что весовой множитель в последней норме удовлетворяет оценкам

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^\theta(y) &= \frac{\pi^2}{h(y)^2} - \frac{\pi^2}{h_0^2} \geq c_\omega^h \rho(y)^2 \quad \text{при } x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \\ \mathcal{W}_\varepsilon^\theta(y) &= \frac{\pi^2}{h(y)^2} - 4\theta^2 \rho(y)^2 - \frac{\pi^2}{h_0^2} - \Lambda_m \varepsilon \geq \frac{c_\omega^h}{2} \rho(y)^2 \quad \text{при } x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon \end{aligned}$$

с малым  $\theta > 0$  и большим  $r > 0$ . При этом использованы соотношения  $\rho(y) > r\sqrt{\varepsilon}$  на множестве  $\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon$  и

$$\frac{1}{h(y)^2} - \frac{1}{h_0^2} \geq C_\omega^h \rho(y)^2 \quad \text{при } y \in \omega, \quad C_\omega^h > 0,$$

которые обеспечены определением множества  $\Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon$  и условиями (5). Зафиксировав подходящие положительные  $\theta$  и  $r$ , получаем, что

$$\|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq 2(c_\omega^h)^{-1} \Lambda_m e^{2\theta r^2} \varepsilon = C_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad \theta \in (0, \theta_m].$$

Благодаря нормировке собственных функций в  $L^2(\Omega^\varepsilon)$  множитель  $\rho$  в этой оценке можно заменить множителем  $\rho_\varepsilon$ :

$$\rho_\varepsilon(y) = \rho(y), \quad x \in \Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad \rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} r\sqrt{\varepsilon}, & x \in \Omega_{r\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon, \\ d, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_d^\varepsilon. \end{cases} \quad (57)$$

Теперь подставим в интегральное тождество (4) произведение  $\psi^\varepsilon = \rho_\varepsilon^2 \mathcal{R}_\varepsilon^{2\theta} u_k^\varepsilon$ . Аналогично формуле (55) выводим, что

$$\|\nabla_x(\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \lambda_m^\varepsilon \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_k^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|u_m^\varepsilon \nabla_y(\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (58)$$

Левая часть (58) оценивается снизу разностью

$$\frac{1}{2} \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \nabla_x u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|u_m^\varepsilon \nabla_y(\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta); L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (59)$$

По доказанному и в силу предположения (53) первое слагаемое в правой части (58) не превосходит  $c_m^1 \varepsilon^{-1}$ . Поскольку  $|\nabla_y \rho_\varepsilon(x)| \leq 1$ , второе слагаемое в (58) и вычитаемое в разности (59) меньше суммы

$$\begin{aligned} & 2 \|\mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 + 2 \|\rho_\varepsilon u_m^\varepsilon \nabla_y \mathcal{R}_\varepsilon^\theta; L^2(\Omega_d^\varepsilon \setminus \Omega_{\sqrt{\varepsilon}}^\varepsilon)\|^2 \leq \\ & \leq \frac{2}{r^2 \varepsilon} \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \frac{2\theta^2}{\varepsilon^2} \|\rho_\varepsilon^2 \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 \leq 2C_m \left( \frac{1}{r^2} + d^2 \theta^2 \right) \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{c_m^2}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Заметив, что приведённые выкладки остаются верными при  $\theta = 0$ , сформулируем полученный результат.

**Теорема 2.** Для собственной функции  $u_m^\varepsilon$  задачи (2), (3), отвечающей собственному значению (53), найдутся такие положительные величины  $\theta_m$ ,  $C_m$  и  $\varepsilon_m$ , что справедливо неравенство

$$\varepsilon^2 \|\rho_\varepsilon \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \nabla_x u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u_m^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq C_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad \theta \in [0, \theta_m], \quad (60)$$

причём  $\mathcal{R}_\varepsilon^\theta$  и  $\rho_\varepsilon$  — весовые функции (54) и (57).

## 5. СХОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ПАР

Зафиксируем номер  $p \in \mathbb{N}$  собственного значения в последовательности (6). Поскольку теорема 1 ставит в соответствие каждому собственному значению  $\beta_{1m}$  при  $m = \overline{1, p}$  своё собственное значение задачи (2), (3), то существуют такие положительные  $\varepsilon_p$  и  $c_p$ , что

$$\lambda_p^\varepsilon - \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} - \varepsilon^{-1} \mu_1 \leq \lambda_{N^\varepsilon(1,p)}^\varepsilon - \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} - \varepsilon^{-1} \mu_1 \leq c_p. \quad (61)$$

Здесь  $\mu_1$  — первый элемент последовательности (19), а собственное значение  $\lambda_{N^\varepsilon(1,p)}^\varepsilon$  из теоремы 1. Следовательно, вдоль некоторой положительной монотонной бесконечно малой последовательности  $\{\varepsilon_{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  (индекс  $j$  в дальнейших формулах для краткости опускаем) имеет место сходимость

$$\lambda_p^\varepsilon - \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} - \varepsilon^{-1} \mu_1 \rightarrow \hat{\beta}_p. \quad (62)$$

Положим  $\mathbf{u}_p^\varepsilon = \chi u_p^\varepsilon$  и подставим в интегральное тождество (4) пробную функцию  $\psi^\varepsilon = \chi \phi^\varepsilon$ , где  $\phi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d^\varepsilon)$ ,  $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{V}_d)$  — срезающая функция (41), а  $\Omega_d^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : y \in \mathcal{V}_d\}$ . После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & (\nabla_x \mathbf{u}_p^\varepsilon, \nabla_x \phi^\varepsilon)_{\Omega_d^\varepsilon} - \lambda_p^\varepsilon (\mathbf{u}_p^\varepsilon, \phi^\varepsilon)_{\Omega_d^\varepsilon} = \\ & = -(\mathbf{u}_p^\varepsilon \Delta_x \chi, \phi^\varepsilon)_{\Omega_d^\varepsilon} - 2(\nabla_x \mathbf{u}_p^\varepsilon, \phi^\varepsilon \nabla_x \chi)_{\Omega_d^\varepsilon} = O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}} \|\phi^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|), \quad \vartheta > 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Соотношение  $\alpha = O(\delta)$ , как обычно, означает, что найдутся такие положительные величины  $c_\alpha$  и  $\delta_\alpha$ , что  $|\alpha| \leq c_\alpha \delta$  при  $\delta \in (0, \delta_\alpha]$ .

Далее по возможности индекс  $p$  не указываем, а для функций, переведённых в локальные координаты  $n$  и  $s$ , сохраняем обозначения. Положим

$$\mathbf{w}^\varepsilon(y) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon h(y)}} \int_0^{\varepsilon h(y)} \sin\left(\frac{\pi z}{\varepsilon h(y)}\right) \mathbf{u}^\varepsilon(x) dz =: \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \mathbf{u}^\varepsilon(x) dz, \quad (64)$$

$$\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^\varepsilon(x) - \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \mathbf{w}^\varepsilon(y). \quad (65)$$

Отметим, что  $\|\mathbf{S}^\varepsilon(y, \cdot); L^2(0, \varepsilon h(y))\| = 1$  при  $y \in \mathcal{V}_d$  для определённого формулой (64) “нормированного синуса”. Кроме того, введём функции

$$\mathbf{v}^\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\mathbb{R}} w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{w}^\varepsilon(n, s) ds, \quad (66)$$

$$\mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) = \mathbf{w}^\varepsilon(n, s) - \varepsilon^{-1/4} w_1(\varepsilon^{-1/2} n) \mathbf{v}^\varepsilon(s). \quad (67)$$

Поскольку  $u^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega_d^\varepsilon})$ , то все возникшие функции гладкие, но для них, при необходимости продолженных нулём, выполнены включения  $\mathbf{w}^\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{V}_d)$ ,  $\mathbf{w}_\perp^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_d^\varepsilon)$  и  $\mathbf{v}^\varepsilon \in H^1(\Gamma)$ ,  $\mathbf{v}_\perp^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R} \times \Gamma)$ . Наконец, вытекающие из определений (64)–(67) условия ортогональности

$$\int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) dz = 0 \quad \text{при всех } y \in \mathcal{V}_d, \quad (68)$$

$$\int_{\mathbb{R}} w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) dn = 0 \quad \text{при всех } s \in \Gamma \quad (69)$$

обеспечивают неравенства Пуанкаре

$$\int_0^{\varepsilon h(y)} |\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z)|^2 dz \geq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 h(y)^2} \int_0^{\varepsilon h(y)} |\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z)|^2 dz \quad \text{при всех } y \in \mathcal{V}_d, \quad (70)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^\varepsilon}{\partial n}(n, s) \right|^2 dn + \frac{B^2}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)|^2 n^2 dn \geq \frac{\mu_2}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)|^2 dn \quad \text{при всех } s \in \Gamma. \quad (71)$$

Формулы (7), (60), (65), (67) и условие ортогональности (68) показывают, что

$$\begin{aligned} 1 + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}) &= \|\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 = \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon + \mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^{-1/4} \mathbf{v}^\varepsilon w_1 + \mathbf{w}_\perp^\varepsilon); L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 = \\ &= \int_{\Omega_d^\varepsilon} |\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(x)|^2 dx + \int_{\Gamma} \int_{-d}^d \int_0^{\varepsilon h(y)} |\mathbf{S}^\varepsilon(y, z)|^2 dz (1 + n\kappa(s)) \left( \varepsilon^{-1/4} w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}^\varepsilon(s) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) \right)^2 dn ds. \end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл  $\mathbf{I}^\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^\varepsilon &= \int_{\Gamma} |\mathbf{v}^\varepsilon(s)|^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + \sqrt{\varepsilon}\eta) |w_1(\eta)|^2 d\eta + 2\varepsilon^{-1/4} \int_{\Gamma} \int_{-d}^d (1 + n\kappa(s)) \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) dn ds + \\ &+ \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}) = \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + 2\mathbf{I}_\mathbf{v}^\varepsilon + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_\mathbf{v}^\varepsilon = \varepsilon^{-1/4} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} n\kappa(s) \mathbf{v}^\varepsilon(s) w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s) dn ds, \quad \max_{n \in \mathbb{R}} \left( |n| w_1\left(\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1/2} \right) \leq c_w \varepsilon^{1/2},$$

$$|\mathbf{I}_\mathbf{v}^\varepsilon| \leq c_\kappa \varepsilon^{1/4} (c_w \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathbb{R} \times \Gamma)\|^2).$$

Здесь учтены чётность и экспоненциальное затухание первой (положительной) собственной функции  $w_1$  уравнения (18), а также условие ортогональности (69).

Перечисленные формулы поочерёдно приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathbb{R} \times \Gamma)\|^2 + \|\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 &\leq c_1, \\ |1 - \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 - \|\mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathbb{R} \times \Gamma)\|^2 - \|\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2| &\leq c_2 \varepsilon^{1/4}. \end{aligned} \quad (72)$$

Для оценки второго и третьего вычитаемых, в частности, понадобятся следующие весовые оценки.

**Лемма 4.** *Существуют такие положительные  $\theta_m$ ,  $\varepsilon_m$  и  $\mathbf{c}_m$ , что справедливо неравенство*

$$\|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^{\theta_m} \mathbf{w}_m^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^{\theta_m} \mathbf{v}_{m\perp}^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq \mathbf{c}_m \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_m]. \quad (73)$$

**Доказательство.** В силу определения (64) имеем

$$\|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta \mathbf{w}^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}_\varepsilon(y, z)^2 dz \int_0^{\varepsilon h(y)} \rho(y)^2 \mathcal{R}_\varepsilon^\theta(y)^2 \chi(n)^2 |u^\varepsilon(x)|^2 dz \leq \|\rho \mathcal{R}_\varepsilon^\theta u^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq C \varepsilon.$$

Осталось воспользоваться соотношениями (65) и (67), а также упоминавшимся свойством затухания собственной функции  $w_1$  уравнения (18). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим равенство (63) при  $\phi^\varepsilon = \mathbf{u}^\varepsilon$  и перепишем его в виде

$$O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}) = \|\partial_z \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|\partial_n \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|J^{-1} \partial_s \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 - \lambda^\varepsilon \|\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2, \quad (74)$$

где  $\vartheta > 0$ . Положив  $C^\varepsilon(y, z) = \cos(\pi h(y)^{-1} \zeta)$ , получим

$$\begin{aligned} \|\partial_z \mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 &= \|\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \\ &+ \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \frac{2\pi^2}{\varepsilon^3 h(y)^3} C^\varepsilon(y, z)^2 dz |\mathbf{w}^\varepsilon(y)|^2 dy + 2 \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \sqrt{\frac{2\pi^2}{\varepsilon^3 h(y)^3}} C^\varepsilon(y, z) \mathbf{w}^\varepsilon(y) \partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) dz dy \geq \\ &\geq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} (\|\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \|h^{-1} \mathbf{w}^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2). \end{aligned} \quad (75)$$

При этом были выполнены дифференцирование и интегрирование по переменной  $z$ , а последний интеграл обращён в нуль при помощи формулы интегрирования по частям (“перекинули” производную  $\partial_z$ ) и первого условия ортогональности (68). Важно то, что в силу ограничений (61) и (5) при малом  $\varepsilon > 0$  справедливо вытекающее из (70) неравенство

$$\frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \|\partial_z \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 \geq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2} \|h^{-1} \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 \geq \left( \lambda^\varepsilon + \frac{2\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} \right) \|\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2. \quad (76)$$

Ввиду условий (5) и (9) выполнены соотношения

$$|\partial_s \mathbf{S}^\varepsilon(y, z)| \leq c \varepsilon^{-1/2} |n|^3 \quad \text{и} \quad |\partial_n \mathbf{S}^\varepsilon(y, z)| \leq c \varepsilon^{-1/2} |n| \quad \text{при } x \in \Omega_d^\varepsilon. \quad (77)$$

Пренебрегая дополнительным множителем  $n^2$  в оценке производной по  $s$ , продифференцируем условие ортогональности (68) и получим

$$\left| \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) \nabla_y \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) dz \right| = \left| \int_0^{\varepsilon h(y)} \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \nabla_y \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz \right| \leq c \frac{|n|}{\sqrt{\varepsilon}} |\mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z)|. \quad (78)$$

Преобразуем пару слагаемых из суммы (74) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \|\mathfrak{d}\mathbf{u}^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 = \|\mathfrak{d}(\mathbf{w}_\perp^\varepsilon + \mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon w_1 + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon)); L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 = \\
 & = \|\mathfrak{d}\mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + 2 \int_{\Omega_d^\varepsilon} \mathfrak{d}\mathbf{w}_\perp^\varepsilon \mathfrak{d}\mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon w_1 + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon) dx + \varepsilon^{-1/2} \|\mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon w_1); L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + \\
 & + \|\mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}_\perp^\varepsilon); L^2(\Omega_d^\varepsilon)\|^2 + 2\varepsilon^{-1/4} \int_{\Omega_d^\varepsilon} \mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}^\varepsilon w_1) \mathfrak{d}(\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{v}_\perp^\varepsilon) dx =: I_{\mathbf{w}}^\varepsilon + 2I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^\varepsilon + I_{\mathbf{v}}^\varepsilon + I_{\perp}^\varepsilon + 2I_{\perp\mathbf{v}}^\varepsilon. \quad (79)
 \end{aligned}$$

Согласно второй формуле в (50) под  $\mathfrak{d}$  понимаем  $J^{-1}\partial_s$  или  $\partial_n$  и соответственно далее будем приписывать к выражениям  $I_{\dots}^\varepsilon$  верхние индексы  $s$  или  $n$ . В обоих случаях сохраним величины  $I_{\mathbf{w}}^{\varepsilon s}$  и  $I_{\mathbf{w}}^{\varepsilon n}$ , а величины  $I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon s}$  и  $I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon n}$  преобразуем:

$$\begin{aligned}
 |I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon s}| &= \left| \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz J(n, s)^{-2} \partial_s(\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon(s)w_1(\eta) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) dy + \right. \\
 &+ \left. \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \partial_s \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz J(n, s)^{-2} (\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon(s)w_1(\eta) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) \partial_s dy \right| \leqslant \\
 &\leqslant c \left( \|\rho \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| (\|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\partial_s \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|) + \right. \\
 &+ \left. \|\partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| (\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\rho \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|) \right) \leqslant \\
 &\leqslant c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_s \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| + \|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\partial_s \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|), \\
 |I_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^{\varepsilon n}| &= \left| \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_n \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz (\varepsilon^{-3/4}\mathbf{v}^\varepsilon(s)\partial_\eta w_1(\eta) + \partial_s \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) dy + \right. \\
 &+ \left. \int_{\mathcal{V}_d} \int_0^{\varepsilon h(y)} \partial_n \mathbf{w}_\perp^\varepsilon(y, z) \partial_n \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) dz (\varepsilon^{-1/4}\mathbf{v}^\varepsilon(s)w_1(\eta) + \mathbf{v}_\perp^\varepsilon(n, s)) dy \right| \leqslant \\
 &\leqslant c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_n \mathbf{w}_\perp^\varepsilon; L^2(\Omega_d^\varepsilon)\| + \|\partial_n \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\| + \|\partial_n \mathbf{v}_\perp^\varepsilon; L^2(\mathcal{V}_d)\|).
 \end{aligned}$$

Здесь сначала использованы соотношения (77) и (78), а затем весовая оценка (73) с учётом экспоненциального затухания собственной функции  $w_1$  (при вычислении интегралов по  $\eta$  после растяжения координаты  $n$ ).

Рассмотрим остальные слагаемые в (79). Для  $I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon s}$  выводим формулу

$$\begin{aligned}
 & |I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon s} - \|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2| \leqslant \\
 & \leqslant c\varepsilon^{-1/2} \int_{\Omega_d^\varepsilon} (|J(n, s)^{-2} - 1| |\mathbf{S}^\varepsilon(y, z)| \partial_s \mathbf{v}^\varepsilon(s) + |n|^3 |\mathbf{v}^\varepsilon(s)|) \mathbf{S}^\varepsilon(y, z) |\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon(s)| w_1(\eta)^2 dy dz \leqslant \\
 & \leqslant c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_s \mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 + \|\mathbf{v}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2). \quad (80)
 \end{aligned}$$

Наконец, оставим величину  $I_{\perp}^{\varepsilon s}$  без изменений, но для  $I_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon s}$  при помощи условия ортогональности (69), сохраняющегося для производной  $\partial_s \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}$ , напишем оценку

$$\begin{aligned} |I_{\perp}^{\varepsilon s}| &\leq c\varepsilon^{-1/4} \left| \int_{\Omega_d^{\varepsilon}} w_1(\eta) \left( |J(n, s)|^2 - 1 \right) |\mathbf{S}^{\varepsilon}(y, z)|^2 |\partial_s \mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| |\partial_s \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| + \right. \\ &\quad \left. + J(n, s)^{-2} |\partial_s \mathbf{S}^{\varepsilon}(y, z)| w_1(\eta) (|\mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| |\partial_s(\mathbf{S}^{\varepsilon}(y, z) \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s))| + |\mathbf{S}^{\varepsilon}(y, z)| |\partial_s \mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)|) \right) dx \right| \leq \\ &\leq c\sqrt{\varepsilon} (\|\partial_s \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\| + \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|) (\|\partial_s \mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\| + \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|). \end{aligned}$$

В случае производной  $\mathbf{d} = \partial_n$  величины  $I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon n}$ ,  $I_{\perp}^{\varepsilon n}$  и  $I_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n}$  из суммы (79) обрабатываются по-другому, а именно с привлечением последних слагаемых из формул (75) и (74). Выписывая выражения, содержащие только функцию  $\mathbf{v}^{\varepsilon}$ , находим, что

$$\begin{aligned} &I_{\mathbf{v}}^{\varepsilon n} + \pi^2 \varepsilon^{-5/2} \|h^{-1} \mathbf{v}^{\varepsilon} w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \varepsilon^{-1/2} \|\mathbf{v}^{\varepsilon} w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \|\mathbf{v}^{\varepsilon} \partial_n w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + \frac{\pi^2}{\varepsilon^{5/2}} \int_{\mathcal{V}_d} \left( \frac{1}{h(y)^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) (\mathbf{v}^{\varepsilon}(s))^2 (w_1(\eta))^2 dy - \frac{\mu_1}{\varepsilon^{3/2}} \|\mathbf{v}^{\varepsilon} w_1; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + O(1) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|^2 \int_{\mathbb{R}} \left( \left| \frac{dw_1}{d\eta}(\eta) \right|^2 + (B\eta^2 - \mu_1) |w_1(\eta)|^2 \right) d\eta + O(1) = O(1). \end{aligned}$$

Здесь учтены вытекающие из формул (5) и (50) соотношения

$$\begin{aligned} J(n, s) \left( \frac{1}{h(y)^2} - \frac{1}{h_0^2} \right) &= \frac{2a_0}{h_0^3} n^2 + b(s) n^3 + O(n^4) = Bn^2 + b(s) n^3 + O(n^4), \\ \int_{-d}^d n^3 |w_1(\eta)|^2 dn &= O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}), \quad \vartheta > 0, \quad \int_{-d}^d n^4 |w_1(\eta)|^2 dn = O(\varepsilon^{5/2}), \end{aligned} \quad (81)$$

а также интегральное тождество для собственной пары  $\{\mu_1; w_1\}$  уравнения гармонического осциллятора. Далее имеем

$$I_{\perp}^{\varepsilon n} + \pi^2 \varepsilon^{-2} \|h^{-1} \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 = \mathbf{I}_{\perp}^{\varepsilon n} - \mathbf{I}_{\mu}^{\varepsilon n} + \tilde{\mathbf{I}}_{\perp}^{\varepsilon n} + O(1),$$

$$\mathbf{I}_{\mu}^{\varepsilon n} = \frac{\mu_1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2, \quad \mathbf{I}_{\perp}^{\varepsilon n} = \mathbf{I}_{\perp \infty}^{\varepsilon n} + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}), \quad \vartheta > 0,$$

$$\mathbf{I}_{\perp \infty}^{\varepsilon n} = \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} J(n, s) \left( \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}}{\partial n}(n, s) \right|^2 + Bn^2 |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)|^2 \right) dn ds \geqslant$$

$$\geqslant (1 - d\kappa_{\max}) \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \left( \left| \frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}}{\partial n}(n, s) \right|^2 + Bn^2 |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)|^2 \right) dn ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\mu_2}{\varepsilon} (1 - d\kappa_{\max}) \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)|^2 dn ds \geqslant \frac{\mu_2}{\varepsilon} \frac{1 - d\kappa_{\max}}{1 + d|\kappa_{\min}|} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2,$$

$$|\tilde{\mathbf{I}}_{\perp}^{\varepsilon n}| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathcal{V}_d} \rho(y)^3 |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(y)|^2 dy \leq \frac{\delta}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 + \frac{C}{\delta} \mathbf{I}_{\rho}^{\varepsilon n},$$

$$\mathbf{I}_{\rho}^{\varepsilon n} = \frac{1}{\varepsilon^3} \|\rho^3 \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^3} \left( \max_{\rho \in [0, d]} \rho^2 e^{-\theta \rho^2/\varepsilon} \right)^2 \|\rho \mathcal{R}_{\varepsilon}^{\theta} \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 = O(1).$$

В выкладках помимо формул (81) применены неравенство Пуанкаре (71) и весовая оценка (73).

Таким образом, при выборе малых величин  $d > 0$  и  $\delta > 0$  выполняется неравенство

$$I_{\perp}^{\varepsilon n} + \pi^2 \varepsilon^{-2} \|h^{-1} \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - \lambda^{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \geq \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 - C_{\perp}^{\varepsilon}. \quad (82)$$

Последнее слагаемое в сумме (79) допускает представление

$$\begin{aligned} I_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n} &= \frac{1}{\varepsilon^{3/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) \partial_{\eta} w_1(\eta) \partial_n \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) dn ds + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) w_1(\eta) \partial_n \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) dn ds + \tilde{I}_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n} + O(e^{-\vartheta/\sqrt{\varepsilon}}). \end{aligned} \quad (83)$$

При этом были выполнены дифференцирование по  $n$  и интегрирование по  $z \in (0, \varepsilon h(y))$ , а затем интегрирование распространено на всю ось  $\mathbb{R} \ni n$  при учёте экспоненциального затухания составляющих  $w_1$  и  $\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}$ . В итоге для составляющих представления (83) оказываются верными оценки

$$|b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| \leq c_b |n|, \quad |\partial_n b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| \leq c_b, \quad |\tilde{I}_{\perp \mathbf{v}}^{\varepsilon n}| \leq c \sqrt{\varepsilon} \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\| \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|.$$

Преобразуем интегралы  $I_{\perp \mathbf{v}1}^{\varepsilon n}$  и  $I_{\perp \mathbf{v}2}^{\varepsilon n}$  из правой части формулы (83):

$$I_{\perp \mathbf{v}1}^{\varepsilon n} = -\frac{1}{\varepsilon^{5/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) \partial_{\eta}^2 w_1(\eta) \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) dn ds, \quad (84)$$

$$\begin{aligned} |I_{\perp \mathbf{v}2}^{\varepsilon n}| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{v}^{\varepsilon}(s)| (|\partial_n b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| w_1(\eta) + |b_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| \varepsilon^{-1/2} |\partial_{\eta} w_1(\eta)|) |\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s)| dn ds \leq \\ &\leq c \varepsilon^{1/4} \|\mathbf{v}^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\| \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|. \end{aligned}$$

К интегралу (84) присоединим следующие интегралы (из последних слагаемых в формулах (75) и (74)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \left( \left( \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h^2} - \lambda^{\varepsilon} \right) \mathbf{v}^{\varepsilon} w_1, \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon} \right)_{\mathcal{V}_d} &= I_{\perp B \mu}^{\varepsilon n} + O(\varepsilon^{1/4}) (\|\mathbf{v}^{\varepsilon}; (\Gamma)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2), \\ I_{\perp B \mu}^{\varepsilon n} &= \frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{v}^{\varepsilon}(s) \mathbf{v}_{\perp}^{\varepsilon}(n, s) \left( B^2 \frac{n^2}{\varepsilon^2} - \frac{\mu_1}{\varepsilon} \right) w_1(\eta) dn ds. \end{aligned} \quad (85)$$

Интегралы (84) и (85) взаимно уничтожаются, так как  $\{\mu_1; w_1\}$  — собственная пара обыкновенного дифференциального уравнения (18).

Соберём полученные соотношения для членов формулы (74), зафиксировав малые положительные  $\delta$ ,  $d$  и  $\varepsilon_p$ . На основании ключевых неравенств (76), (80) и (82) выводим окончательную оценку

$$\varepsilon^{-2} \|\mathbf{w}_{p \perp}^{\varepsilon}; L^2(\Omega_d^{\varepsilon})\|^2 + \|\partial_s \mathbf{v}_p^{\varepsilon}; L^2(\Gamma)\|^2 + \varepsilon^{-1} \|\mathbf{v}_{p \perp}^{\varepsilon}; L^2(\mathcal{V}_d)\|^2 \leq C_p \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p] \quad (86)$$

(восстановили индекс  $p \in \mathbb{N}$ ). Таким образом, вдоль подпоследовательности возникшей в (62) бесконечно малой последовательности  $\{\varepsilon_{(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$  (обозначение не меняем) имеют место сходимости

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{p \perp}^{\varepsilon} &\rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_d^{\varepsilon}), \quad \mathbf{v}_{p \perp}^{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L^2(\mathcal{V}_d), \\ \mathbf{v}_p^{\varepsilon} &\rightarrow \widehat{\mathbf{v}}_p \quad \text{слабо в } H^1(\Gamma) \quad \text{и сильно в } L^2(\Gamma), \quad \text{причём } \|\widehat{\mathbf{v}}_p; L^2(\Gamma)\| = 1. \end{aligned} \quad (87)$$

Последнее равенство обеспечено формулами (72) и (86).

**Теорема 3.** Сходимости (62) и (87) дают собственную пару  $\{\hat{\beta}_p; \hat{v}_p\} \in \mathbb{R}_+ \times H^1(\Gamma)$  спектрального уравнения (28).

**Доказательство.** При помощи конструкций из п. 2 для каждой функции  $\psi \in C^\infty(\Gamma)$  построим пробную функцию  $\Psi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$  в интегральном тождестве (4), которое перепишем следующим образом:

$$0 = (u_p^\varepsilon, \Delta \Psi^\varepsilon + \lambda^\varepsilon \Psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}. \quad (88)$$

Согласно формулам (21), (30) и (25) положим

$$\Psi^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/4} \chi(y) (\psi(s) w_1(\eta) + \varepsilon^{1/2} \psi(s) \mathbf{w}'_1(\eta, s) + \varepsilon \psi(s) \mathbf{w}''_1(\eta, s) + \mathcal{W}_1(\eta, \zeta, s)).$$

Поскольку  $\psi$  не является собственной функцией уравнения (28), вместо оценки (45) малости невязки “почти собственной” функции (42) (в упрощённом виде) получаем соотношение

$$\left| \Delta \Psi^\varepsilon(x) + \left( \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} + \frac{\mu_1}{\varepsilon} \right) \Psi^\varepsilon(x) - \varepsilon^{-1/4} w_1(\eta) (\partial_s^2 \psi(s) - b_1(s) \psi(s)) \right| \leq c_\psi \varepsilon^{1/4}.$$

В результате в силу формул (66) и (62), (87) переход к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в равенстве (88) даёт интегральное тождество

$$(\hat{v}_p, \partial_s \psi - b_1 \psi - \hat{\beta}_p \psi)_\Gamma = 0 \quad \text{при всех } \psi \in C^\infty(\Gamma),$$

из которого интегрированием по частям выводим уравнение (28). Теорема доказана.

На основании теоремы 3 получим информацию о спектре (6).

**Теорема 4.** Номер  $N^\varepsilon(1, m)$  собственного значения  $\lambda_{N^\varepsilon(1, m)}^\varepsilon$  в оценке (52) совпадает с номером  $m$  в упорядоченной последовательности (6) собственных значений задачи (2), (3).

**Доказательство.** Пусть индекс  $m \in \mathbb{N}$  таков, что  $\beta_{1m} < \beta_{1m+1}$ . При выводе сходимости (62) было установлено, что  $N^\varepsilon(1, m) \geq m$ . Если  $N^\varepsilon(1, m) > m$ , то в последовательности (6) найдётся такое собственное значение  $\lambda_\#^\varepsilon$ , что соответствующая собственная функция  $u_\#^\varepsilon$  ортогональна в  $L^2(\Omega^\varepsilon)$  другим  $m$  собственным функциям, отвечающим собственным значениям

$$\lambda_p^\varepsilon \leq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 h_0^2} + \frac{\mu_1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} (\beta_m + \beta_{m+1}).$$

По формулам (66), (11), (87) введём собственную пару  $\{\beta_\#; v_\#\}$  уравнения (28), причём согласно сильной сходимости в пространстве  $L^2(\Gamma)$  и упрощённой оценке (49) из леммы 3 функция  $v_\# \in H^1(\Gamma)$  остаётся ортогональной в  $L^2(\Gamma)$  другим  $m$  собственным функциям  $v_{1p}$  — они отвечают собственным значениям  $\beta_{1p} < \beta_{1m+1}$ , что противоречит способу образования последовательности (31) при  $k = 1$ , а значит, утверждение теоремы доказано.

## 6. АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Построенная формальная асимптотика (13) собственных функций  $u_m^\varepsilon$  задачи (2), (3) обосновывается при помощи второй части леммы 2. Покажем как это делается на примере простого собственного значения из последовательности (31) при  $k = 1$ , однако саму теорему сформулируем в полном объёме, так как обобщения традиционны и просты. Кроме того, далее обсуждаются лишь собственные функции, отвечающие собственным значениям из первой асимптотической серии собственных значений (случай  $k = 1$  в теореме 1), так как при  $k > 1$  соответствующие формулы становятся абсолютно неявными.

**Теорема 5.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$  и  $\beta_{1m} = \beta_{1m+\varkappa_k-1}$  — собственное значение обыкновенного дифференциального уравнения (31) с кратностью  $\varkappa_m \in \{1, 2\}$ . Найдутся такие положительные величины  $\varepsilon_m$ ,  $c_m$  и ортогональная  $\varkappa_m \times \varkappa_m$ -матрица  $b_{(m)}^\varepsilon$  со столбцами  $b_{(m)}^{\varepsilon m}$ ,  $b_{(m)}^{\varepsilon m+\varkappa_m-1}$ , при которых для собственных функций  $u_m^\varepsilon$  и  $u_{m+\varkappa_m-1}^\varepsilon$  задачи (2), (3), подчинённых условиям ортогональности и нормировки (7), выполнены соотношения

$$\varepsilon \|\nabla_x u_q^\varepsilon - \nabla_x u_{(as)q}^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| + \|u_q^\varepsilon - u_{(as)q}^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon)\| \leq C_m \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при } q = m, m + \varkappa_m - 1 \quad u \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_m], \quad (89)$$

$$u_{(as)q}^\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon^{3/2} h(y)}} \sin\left(\frac{\pi \zeta}{h(y)}\right) \sum_{p=k}^{k+\varkappa_k-1} b_{(q)p}^{\varepsilon k} \chi(n) v_p(s) w_1(\eta),$$

где  $\chi$  — срезающая функция (41),  $\zeta$  и  $\eta$  — растянутые координаты (14);  $w_1$  и  $v_k$ ,  $v_{k+\varkappa_k-1}$  — собственные функции уравнений (18) и (28), при этом  $w_1$  — нормированная в пространстве  $L^2(\mathbb{R})$ , а  $v_k$  и  $v_{k+\varkappa_k-1}$  — удовлетворяющие соотношению (31).

**Доказательство.** Если  $\varkappa_m = 1$  и  $\beta_{1m}$  — простое собственное значение, то согласно теореме 4 найдётся такая постоянная  $\varrho_m > 0$ , что на замкнутом сегменте

$$[\varepsilon^2(\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_1 + \beta_m) - \varrho_m \varepsilon^{9/4}, \varepsilon^2(\pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon \mu_1 + \beta_m) + \varrho_m \varepsilon^{9/4}]$$

располагается единственное собственное значение  $\tau_m^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$ . Таким образом, в суммах из формулы (37) появляется только по одному слагаемому, а столбец  $C_m^\varepsilon$  превращается в скаляр  $\pm 1$ . Осталось воспользоваться формулой (13), отбросив “лишние” члены анзаца при учёте разных нормировок (7) и (38), (33) собственных функций и собственных векторов. Теорема доказана.

**Замечание 2.** В предположении о гладкости профильной функции  $h$  изложенную в п. 2 процедуру можно продолжить и построить бесконечные формальные асимптотические ряды для собственных пар. Хотя, как известно (см., например, [14, гл. 7]), такое “уточнение” приводит к несоразмерным росту множителя  $C_m$  и уменьшению границы  $\varepsilon_k$  изменения параметра  $\varepsilon$  в неравенствах вида (89), подобные конструкции могут быть полезными при выводе поточечных оценок разности  $u_k^\varepsilon - u_{(as)k}^\varepsilon$ , поскольку легкодоступные априорные гёльдеровские оценки решений задач в тонких областях являются весовыми и содержат степени малого параметра с отрицательными показателями.

## 7. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

1° *Гладкость.* Из-за применения “длинной” формулы Тейлора (16) для построения и обоснования собственных пар задачи (2), (3) требуется большая гладкость профильной функции  $h$ , чем, например, в ситуации (8) (см. рис. 1, б и сп. работу [6]). С другой стороны, производные непрерывной функции  $h$  могут претерпевать разрывы на контуре  $\gamma$  (см. сечение “плиты с острым хребтом” на рис. 2, б), т.е.

$$h(y) = h_0 + |n|^\alpha (a + \tilde{h}(y)), \quad y \in \mathcal{V}_d, \quad \alpha \in (0, 1), \quad a > 0, \quad \tilde{h} \in C^\infty(\mathcal{V}_d). \quad (90)$$



**Рис. 2.** Плоское изображение тонкого многогранника (а) и сечения области с негладким верхним основанием (б). Максимумы профильной функции отмечены точками

Идеи построения асимптотики приведены в статье [5], где при условии одной точки максимума (см. рис. 2, a) показано, в частности, что вместо второго растяжения координат (14) нужно использовать замену  $n \mapsto \eta = \varepsilon^{-2/(2+\alpha)}n$  (ср. далее формулы (91) и (94)). Вместе с тем требования к функции  $\tilde{h}$  в соотношении (90), обеспечивающие эффект локализации около всей линии  $\gamma$ , и даже сам формальный асимптотический анализ остаются неизвестными.

Полностью открытыми являются вопросы построения асимптотики в случае кусочно-гладкого или разомкнутого контура  $\gamma$ , причём основная неясность связана с постановкой условий сопряжения в угловых точках и краевых условий в концевых точках.

2° *Непостоянный коэффициент a.* Пусть в формулах (5)

$$\begin{aligned} a(s) &= a_0 - A(s - s_0)^{2q} + O(|s - s_0|^{2q+1}), \quad A > 0, \quad q \in \mathbb{N}, \\ a(s) &< a_0 \quad \text{при} \quad s \in \gamma \setminus \{s_0\}, \end{aligned}$$

т.е. функция  $a$  имеет строгий глобальный максимум в точке  $s_0 \in \gamma$ . Тогда в согласии с асимптотическим анализом, проведённым в [5, 6], дополним замены координат (14) следующей:

$$s \mapsto \xi = \varepsilon^{1/(q+1)}(s - s_0). \quad (91)$$

Повторение с некоторыми изменениями асимптотической процедуры из п. 2 применительно к разложениям собственных пар исходной задачи

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \pi^2 h_0^{-2} + \varepsilon^{-1} \mu + \varepsilon^{(1-q)/(1+q)} \beta + \dots, \quad (92)$$

$$u^\varepsilon(x) = \sin\left(\frac{\pi\zeta}{h(y)}\right)(w(\eta)v(\xi) + \dots) + \dots \quad (93)$$

даёт помимо уравнения (18) похожее обыкновенное дифференциальное уравнение на оси

$$-\partial_\xi^2 v(\xi) + 2\pi^2 A h_0^{-3} \xi^{2q} v(\xi) = \beta v(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (94)$$

Спектр этого уравнения является дискретным и образует последовательность собственных значений вида (31), а соответствующие собственные функции  $v_m \in C^\infty(\mathbb{R})$  затухают при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  с экспоненциальной скоростью  $o(e^{-\vartheta|\xi|^{2q}})$ ,  $\vartheta > 0$ . Представление (93) подсказывает, что для собственных функций задачи (2), (3) характерна концентрация около точки  $(s_0, \varepsilon h_0)$  на линии (10), однако это свойство, а также формулы (92)–(94) ещё нуждаются в строгом обосновании.

При  $q = 1$  уравнение (94) совпадает с уравнением гармонического осциллятора, а при  $q = 1/2$  сходно с уравнением Эйри (см., например, [9] и [15] соответственно).

3° *Локализация около боковой поверхности.* Предположим, что контур  $\gamma$ , на котором профильная функция  $h$  принимает максимальное значение (см. формулы (5)), совпадает с (гладкой) границей сечения области (1) (см. рис. 1, г). Предельной задачей для пары  $\{\mu_k, w_k\}$  является задача Дирихле на полуоси

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + B^2 \eta^2 w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in (-\infty, 0), \quad w(0) = 0, \quad (95)$$

собственные значения которой имеют вид (19) с чётными натуральными  $k$ . У задачи Дирихле на полуоси для уравнения (20) возникает требующее выполнения условия разрешимости, поскольку

$$\int_{-\infty}^0 w_k(\eta) f'_k(\eta, s) d\eta = -v(s) a'(s) \frac{2\pi^2}{h_0^3} \int_{-\infty}^0 \eta^3 |w_k(\eta)|^2 d\eta =: v(s) a'(s) M_k \quad \text{и} \quad M_k > 0. \quad (96)$$

Как и в работе [7], во избежание локализации собственной функции около какой-либо точки следует предположить, что коэффициент в третьем члене  $a'n^3$  формулы Тейлора (16) —

постоянная  $a' = a'_0$ , и ввести в разложение (12) собственного значения новое слагаемое  $\varepsilon^{-1/2}\mu'$ , где  $\mu' = -a'_0 M_k$ , в соответствии с формулами (96) и (20).

При замене условия Дирихле на боковой поверхности  $\gamma \times (0, \varepsilon h_0)$  условием Неймана вместо  $w(0) = 0$  нужно использовать  $\partial_\eta w(0) = 0$  в задаче (95), а в формуле (19) для собственных значений брать нечётные индексы  $k$ , тогда выражение (96) изменится.

Установленные в статье утверждения можно применить к описанным формам тонкой области — предложенные способы вывода оценок нуждаются в достаточно понятных модификациях.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friedlander, L. On the spectrum of narrow periodic waveguides / L. Friedlander, M. Solomyak // Russ. J. Math. Phys. — 2008. — V. 15, № 4. — P. 238–242.
2. Friedlander, L. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip / L. Friedlander, M. Solomyak // Israel J. Math. — 2009. — V. 170. — P. 337–354.
3. Borisov, D. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains / D. Borisov, P. Freitas // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 2009. — V. 26, № 2. — P. 547–560.
4. Borisov, D. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains / D. Borisov, P. Freitas // J. Funct. Anal. — 2010. — V. 258, № 3. — P. 893–912.
5. Назаров, С.А. Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках / С.А. Назаров // Сиб. мат. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 655–672.
6. Nazarov S.A. Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains / S.A. Nazarov, E. Perez, J. Taskinen // Trans. Amer. Math. Soc. — 2016. — V. 368, № 7. — P. 4787–4829.
7. Камоцкий, И.В. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области / И.В. Камоцкий, С.А. Назаров // Проблемы мат. анализа. Вып. 19. — Новосибирск : Научная книга, 1999. — С. 105–148.
8. Cardone, G. The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends / G. Cardone, T. Durante, S.A. Nazarov // SIAM J. Math. Anal. — 2010. — V. 42, № 6. — P. 2581–2609.
9. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (релятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2012. — 343 с.
11. Simmons G.F. Differential Equations with Applications and Historical Notes / G.F. Simmons. — New York : McGraw-Hill, 1972. — 764 р.
12. Бирман, М.Ш. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / М.Ш. Бирман, М.З. Соломяк. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 264 с.
13. Вишник М.И. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишник, Л.А. Люстерник // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.
14. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки / С.А. Назаров. — Новосибирск : Научная книга, 2002. — 408 с.
15. Бабич В.М. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В.М. Бабич, В.С. Булдырев. — М. : Наука, 1972. — 456 с.

**LOCALIZATION OF EIGENFUNCTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM  
NEAR A CONTOUR AT THE BOUNDARY OF A THIN DOMAIN**

© 2024 / S. A. Nazarov

*Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, Saint Petersburg, Russia  
e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

We consider the spectral Dirichlet problem for the Laplace operator in a thin three-dimensional domain of a variable thickness which admits a maximum value at a smooth closed contour either inside the longitudinal cross-section, or at its boundary. We find out asymptotic expansions of the eigenvalues which involve eigenvalues of the harmonic oscillator at the axis or the half-axis as well as of a certain second order ordinary differential equation at the contour. The eigenfunctions are localized in the vicinity of the contour.

*Keywords:* Dirichlet problem, thin domain, asymptotics of eigenvalues

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 124041500009-8).

REFERENCES

1. Friedlander, L. and Solomyak, M., On the spectrum of narrow periodic waveguides, *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, vol. 15, no. 4, pp. 238–242.
2. Friedlander, L. and Solomyak, M., On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip, *Israel J. Math.*, 2009, vol. 170, pp. 337–354.
3. Borisov, D. and Freitas, P., Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains, *Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire*, 2009, vol. 26, no. 2, pp. 547–560.
4. Borisov, D. and Freitas, P., Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains, *J. Funct. Anal.*, 2010, vol. 258, no. 3, pp. 893–912.
5. Nazarov, S.A., The localization for eigenfunctions of the Dirichlet problem in thin polyhedra near the vertices, *Siberian Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 517–532.
6. Nazarov S.A., Perez, E., and Taskinen, J., Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains, *Transactions of the American Mathematical Society*, 2016, vol. 368, no. 7, pp. 4787–4829.
7. Kamotskii, I.V. and Nazarov, S.A., On eigenfunctions localized in a neighborhood of the lateral surface of a thin domain, *J. Math. Sci.*, 2000, vol. 101, no. 2, pp. 2941–2974.
8. Cardone, G., Durante, T., and Nazarov, S.A., The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends, *SIAM J. Math. Anal.*, 2010, vol. 42, no. 6, pp. 2581–2609.
9. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Amsterdam: Elsevier, 2013.
10. Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1992.
11. Simmons, G.F., *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, New York: McGraw-Hill, 1972.
12. Birman, M.Sh. and Solomyak, M.Z., *Spectral Theory of Selfadjoint Operators in Hilbert Space*, Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1987.
13. Vishik, M.I. and Lyusternik, L.A., Regular degeneration and a boundary layer for linear differential equations with a small parameter, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122.
14. Nazarov S.A., *Asymptoticheskaya teoriya tonkikh plastin i sterzhej. Ponizhenie razmernosti i integral'nye otsenki* (Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Dimension Reduction and Integral Estimates), Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 2002.
15. Babich, V.M. and Buldyrev, V.S., *Short-Wavelength Diffraction Theory. Asymptotic Methods*, Berlin: Springer-Verlag, 1991.