ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1616–1622

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ДВУМЕРНОМ АНТИПЕРРОНОВСКОМ ЭФФЕКТЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Н. А. Изобов[1], А. В. Ильин[2]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, г. Минск*

[2]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

e-mail: [1]izobov@im.bas-net.by, [2]iline@cs.msu.su

Поступила в редакцию 10.09.2024 г., после доработки 10.09.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Реализован двумерный антиперроновский эффект смены всех положительных характеристических показателей линейного приближения на четыре различных отрицательных показателя для четырёх нетривиальных решений дифференциальной системы с возмущением высшего порядка малости.

Ключевые слова: характеристический показатель Ляпунова, возмущение высшего порядка, смена показателей, эффект Перрона, антиперроновский эффект

DOI: 10.31857/S0374064124120031, EDN: IPQRNQ

Антиперроновский эффект [1–3] смены показателей (противоположный перроновскому [4–7]) предполагает существование линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и положительными характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а также возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

с бесконечно дифференцируемой вектор-функцией $f(t,y)\colon [t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ из класса малых возмущений, имеющей нетривиальные решения с отрицательными показателями Ляпунова.

Для линейных возмущений $f(t,y) \equiv Q(t)y$:

1) экспоненциально убывающих ($\lambda[Q] \equiv \overline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| < 0$), эти решения составляют [1] $(n-1)$-мерное подпространство во всём множестве решений системы (2) (теперь уже линейной);

2) исчезающих на бесконечности ($Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$), *все* решения системы (2) имеют [2] отрицательные показатели.

Более сложным является случай возмущений $f(t,y)$ высшего порядка малости $m > 1$ в окрестности начала координат $y = 0$ — так называемых *m-возмущений*, определяемых условием

$$\|f(t,y)\| \leqslant C_f\|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \mathrm{const}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{3}$$

когда двумерный антиперроновский эффект реализован [3] на единственном построенном решении $Y(t)$ системы (2) с показателем $\lambda[Y] < 0$.

Возникает вопрос о реализации рассматриваемого эффекта на большем числе экспоненциально убывающих решений системы (2) с m-возмущением. Положительный ответ содержит доказательство приведённой ниже теоремы, устанавливающей реализацию двумерного антиперроновского эффекта на четырёх нетривиальных решениях с различными отрицательными показателями системы (2) с возмущением (3) высшего порядка малости в окрестности начала координат $y=0$.

Для векторов $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ и временно́й полуоси $T_0=[t_0,+\infty)$, $t_0\geqslant 0$, определим двумерные $S_1^2=\{y\in\mathbb{R}^2\colon\, y\geqslant 0\}$, $S_2^2=\{y\in\mathbb{R}^2\colon\, y_2\geqslant 0\geqslant y_1\}$, $S_3^2=\{y\in\mathbb{R}^2\colon\, y\leqslant 0\}$, $S_4^2=\{y\in\mathbb{R}^2\colon\, y_1\geqslant 0\geqslant y_2\}$ и так называемые пространственно-временны́е $\mathbb{R}_i^2=S_i^2\times T_0$, $i=\overline{1,4}$, октанты.

Справедлива следующая (анонсированная в [8])

Теорема. *Для любых параметров $\lambda>0$, $m_4\geqslant m_3\geqslant m_2\geqslant m_1>1$, $\theta>1$ существуют:*

1) двумерная линейная система (1) с характеристическими показателями $\lambda_1(A)=$ $=\lambda_2(A)=\lambda>0$;

2) бесконечно дифференцируемое m_1-возмущение $f(t,y)\colon [t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условию (3), одновременно являющееся m_i-возмущением в пространственно-временно́м октанте $\mathbb{R}_i^2$ при всяком $i=\overline{1,4}$,

такие, что возмущённая система (2) имеет решения $Y_i\subset\mathbb{R}_i^2$, $i=\overline{1,4}$, с показателями

$$\lambda[Y_i]=-\lambda\frac{\theta+1}{\theta m_i-1}<0. \tag{4}$$

Доказательство. 1. Построение системы линейного приближения. Введём следующие обозначения:

$$t_k=\theta^k,\quad k\geqslant 1;\quad \varepsilon(t)\equiv\exp\{-t^2\},\quad t\geqslant t_0\geqslant 1;\quad \alpha=\lambda(\theta+1)(\theta-1)^{-1},$$
$$e_{\beta\gamma}(\tau,\tau_1,\tau_2)\equiv\beta+(\gamma-\beta)\exp\bigl\{-(\tau-\tau_1)^{-2}\exp\{-(\tau-\tau_2)^{-2}\}\bigr\},\quad \tau\in(\tau_1,\tau_2),$$

— функция Гелбаума–Олмстеда [9, с. 54], принимающая на концах интервала (τ_1,τ_2) значения β и γ и нулевые значения своих односторонних производных любого порядка.

Коэффициенты необходимой системы

$$\dot{x}=\operatorname{diag}[a_1(t),a_2(t)]x\equiv A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad t\geqslant t_0, \tag{5}$$

линейного приближения определим равенствами [3]

$$a_2(t)=\begin{cases}-\alpha, & t\in[t_{2k},t'_{2k+1}],\ \ t'_k\equiv t_k-\varepsilon(t_k),\\ e_{-\alpha,\alpha}(t,t'_{2k+1},t_{2k+1}], & k\geqslant 0,\end{cases}$$
$$a_2(t)=\begin{cases}\alpha, & t\in[t_{2k+1},t'_{2k+2}],\ \ k\geqslant 0,\\ e_{\alpha,-\alpha}(t,t'_{2k+2},t_{2k+2}), & t\in[t'_{2k+2},t_{2k+2}],\end{cases}$$
$$a_1(t)=-a_2(t),\quad t\in[t_{2k},t_{2k+2}],\ \ k\geqslant 0. \tag{6}$$

Построенная таким образом на полуоси $[t_0,+\infty)$ система (5) линейного приближения имеет характеристические показатели [3] $\lambda_1(A)=\lambda_2(A)=\lambda$.

2. Построение возмущения высшего порядка. На отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$ определим необходимое возмущение с начальным значением $f(t_{2k},y)=0$ и первой компонентой

$$f_1(t,y)\equiv 0,\quad y\in\mathbb{R}^2,\quad t\in[t_{2k},t_{2k+1}].$$

Вторую компоненту f_2 будем строить с помощью вспомогательных бесконечно дифференцируемых функций

$$E\equiv E(\tau,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)=\begin{cases} e_{01}(\tau,\tau_1,\tau_2), & \tau\in[\tau_1,\tau_2),\\ 1, & \tau\in[\tau_2,\tau_3],\\ e_{10}(\tau,\tau_3,\tau_4), & \tau\in(\tau_3,\tau_4]\end{cases} \tag{7}$$

и зависящих от одной пространственной переменной $y_1\in\mathbb{R}$ функций

$$F_i(y_1,k)=(-1)^i y_1^{m_i}\times\begin{cases} E(y_1,0,\varepsilon,1-\varepsilon,1), & y_1\in[0,1],\ \ \varepsilon=\varepsilon(t_k),\\ 0, & y_1>1,\ \ y\in S_i,\ \ i=1,4,\end{cases} \tag{8}$$

$$F_i(y_1,k)=(-1)^{i-1}(-y_1)^{m_i}\times\begin{cases} 0, & y_1<-1,\ \ y\in S_i,\ \ i=2,3,\\ E(y_1,-1,\varepsilon-1,-\varepsilon,0), & y_1\in[-1,0].\end{cases} \tag{9}$$

На рассматриваемом отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$ компоненту $f_2(t,y_1)$ определим равенствами

$$f_2(t,y_1)=\begin{cases} 0, & t\in[t_{2k},t''_{2k+1}],\ \ t''_{2k+1}\equiv t_{2k+1}-1,\ \ \varepsilon=\varepsilon(t_{2k+1}),\\ d_i(2k+1)E(t,t''_{2k+1},t''_{2k+1}+\varepsilon,t_{2k+1}-\varepsilon,t_{2k+1})F_i(y_1,2k+1), & \\ & t\in[t''_{2k+1},t_{2k+1}],\ \ y_1\in\mathbb{R},\ \ i=\overline{1,4},\end{cases}$$

в которых постоянные $d_i(2k+1)>0$ подлежат последующему определению при построении решений возмущённой системы.

Бесконечная дифференцируемость функции $f_2(t,y_1)$ обеспечивается аналогичным свойством функций Гелбаума–Олмстеда и нулевыми значениями их односторонних производных любого порядка в концевых точках промежутков определения, а также значениями этих функций в указанных точках.

Необходимо также отметить, что в соответствии с определением (8), (9) функций $F_i(y_1,k)$ вторая компонента $f_2(t,y_1)$ принимает отрицательные значения для $t\in(t''_{2k+1},t_{2k+1})$, $y_1\neq 0$, $i=1,2$, и положительные для тех же t и y_1, но для $i=3,4$, что позволяет уменьшить абсолютные значения компонент решений и, следовательно, их показатели.

3. Построение решений возмущённой системы на отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$. Введём величины

$$\beta_1(m_i)=\theta\beta_2(m_i)-(\theta-1)\alpha,\quad \beta_2(m_i)=-\alpha\frac{\theta-1}{\theta m_i-1},\quad i=\overline{1,4}, \tag{10}$$

и с их помощью определим начальные значения

$$Y_i(t_{2k})=((-1)^{i-1}e^{\beta_1(m_i)t_{2k}},c_{2k}e^{\beta_2(m_i)t_{2k}})^{\mathrm{т}},\quad i=1,2,$$

$$Y_i(t_{2k})=((-1)^{i}e^{\beta_1(m_i)t_{2k}},-c_{2k}e^{\beta_2(m_i)t_{2k}})^{\mathrm{т}},\quad i=3,4,$$

четырёх необходимых решений на отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$. Здесь множитель c_{2k} обусловлен определением сглаживания коэффициента $a_2(t)$ и имеет значение [3]

$$c_{2k}=c_{2k}(t_{2k}),\quad c_{2k}(t)=\exp\biggl\{\int\limits_{t'_{2k}}^{t}\exp\{-\alpha+e_{\alpha,-\alpha}(\tau,t'_{2k},t_{2k})\}\,d\tau\biggr\},$$

удовлетворяющее оценкам

$$\exp\{-2\alpha\varepsilon(t_{2k})\}\leqslant c_{2k}(t)\leqslant 1,\quad t\in[t'_{2k},t_{2k}].$$

В соответствии с нулевым значением первой компоненты $f_1(t,y)$ возмущения $f(t,y)$ на всём отрезке $[t_{2k},t_{2k+1}]$ и начальными значениями

$$|y_{1i}(t_{2k})|=\exp\{\beta_1(m_i)t_{2k}\},\quad i=\overline{1,4},$$

для первой компоненты решений $Y_i(t)$ имеем представление

$$|y_{1i}(t)| = |y_{1i}(t_{2k})| \exp\left\{ \int\limits_{t_{2k}}^{t} a_1(\tau)\, d\tau \right\} =$$

$$= e^{\beta_1(m_i)t_{2k}+\alpha(t-t_{2k})} \times \begin{cases} 1, & t \in [t_{2k}, t'_{2k+1}],\ t'_{2k+1} \equiv t_{2k+1} - \varepsilon(t_{2k+1}), \\ c_{2k+1}(t), & t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}], \end{cases} \quad i = \overline{1,4}, \tag{11}$$

в котором функция $c_{2k+1}(t)$ и её значение $c_{2k+1} = c_{2k+1}(t_{2k+1})$ удовлетворяют оценкам

$$\exp\{-2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})\} \leqslant c_{2k+1}(t) \leqslant 1, \quad t \in [t'_{2k+1}, t_{2k+1}]. \tag{12}$$

При этом на всём отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ компоненты $y_{11}(t)$ и $y_{14}(t)$ принимают только положительные значения, а компоненты $y_{12}(t)$ и $y_{13}(t)$ — только отрицательные.

По определению (10) величин $\beta_1(m_i)$ и $\beta_2(m_i)$ выполнено соотношение

$$\beta_1(m_i)t_{2k} + \alpha(t_{2k+1} - t_{t_{2k}}) = \beta_2(m_i)t_{2k+1}, \tag{13}$$

поэтому первая компонента $y_{1i}(t)$ принимает значения

$$y_{1i}(t_{2k+1}) = c_{2k+1} e^{\beta_2(m_i)t_{2k+1}} \times \begin{cases} 1, & i = 1, 4, \\ -1, & i = 2, 3. \end{cases} \tag{14}$$

Промежуточная оценка

$$|y_{1i}(t)| \leqslant e^{\beta_2(m_i)t}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}],$$

также следует из определения (10) и неравенства

$$\chi_i(t) \equiv t^{-1}[\beta_1(m_i)t_{2k} + \alpha(t - t_{2k})] \leqslant \chi_i(t_{2k+1}) = \beta_2(m_i), \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \quad i = \overline{1,4}.$$

Из представления (11), соотношения (13) и левого неравенства в (12) имеем оценки

$$|y_{1i}(t)| \geqslant \exp\{-\alpha[1 + 2\varepsilon(t_{2k+1})] + \beta_2(m_i)t_{2k+1}\} >$$
$$> \exp\{-\alpha(2 + t_{2k+1})\} \equiv \psi(k), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}], \quad k \geqslant 1.$$

Последнее неравенство справедливо в силу очевидных неравенств

$$\beta_2(m_i) > -\alpha, \quad i = \overline{1,4}; \quad \varepsilon(t_{2k+1}) < 1/e, \quad t_{2k+1} \geqslant 1.$$

В свою очередь, для величины $\psi(k)$ более сильное неравенство $\ln\psi(k) \geqslant -t_{2k}^2$, $k \geqslant k_0$, следует из выбора номера $k_0 \geqslant 1$, удовлетворяющего условию $t_{k_0} \geqslant 2(1+\alpha)$. Доказанное неравенство

$$|y_{1i}(t)| \geqslant \varepsilon(t_{2k}), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}], \quad k \geqslant k_0,$$

позволяет для второй компоненты $f_2(t, y_1)$ по её определению и с учётом равенств (8), (9) получить представление

$$f_2[t, y_{1i}(t)] = (-1)^{\varphi(i)} d_i(2_{k+1}) |y_{1i}(t)|^{m_i} E(t, t''_{2k+1}, t''_{2k+1} + \varepsilon, t_{2k+1} - \varepsilon, t_{2k+1}),$$
$$\varepsilon = \varepsilon(t_{2k+1}), \quad t \in [t_{2k+1} - 1, t_{2k+1}], \quad i = \overline{1,4}. \tag{15}$$

Здесь $\varphi(i)=1$ при $i=1,2$ и $\varphi(i)=2$ при $i=3,4$. Это позволяет на отрезке $[t_{2k+1}-1,t_{2k+1}]$ уменьшить к моменту $t=t_{2k+1}$ абсолютные значения второй компоненты $y_{2i}(t)$ решений $Y_i(t)$ до необходимой величины $\exp\{\beta_1(m_i)t_{2k+1}\}$, $i=1,4$.

Как и в работе [3], из соотношений (11)–(14) легко следует существование такой постоянной $r>0$, для которой выполнены оценки

$$|y_{1i}(t)|^{m_i}e^{-\alpha}>r\,\exp\{m_i\beta_2(m_i)t_{2k+1}\},\quad t\in[t_{2k+1}-1,t_{2k+1}]. \tag{16}$$

Вторые компоненты $y_{2i}(t)$ решений $Y_i(t)$ являются решениями неоднородного уравнения

$$\dot y_2=a_2(t)y_2+f_2[t,y_{1i}(t)],\quad t\in[t_{2k},t_{2k+1}],\quad i=\overline{1,4}, \tag{17}$$

в котором возмущение $f_2[t,y_{1i}(t)]$ принимает нулевые значения при $t\in[t_{2k},t_{2k+1}-1]$, $i=\overline{1,4}$, и ненулевые, определяемые равенствами (15), на промежутке $(t_{2k+1}-1,t_{2k+1})$. Коэффициент $a_2(t)$ линейного приближения (5) определён равенствами (6).

Из уравнения (17) для вторых компонент $y_{2i}(t)$ имеем представления

$$y_{2i}(t)=\begin{cases}y_{2i}(t_{2k})\exp\{-\alpha(t-t_{2k})\}\equiv z_i(t), & t\in[t_{2k},t_{2k+1}-1],\\ \tilde z_i(t)+(-1)^{\varphi(i)}d_i(2k+1)J_i(t_{2k+1}-1,t), & t\in[t_{2k+1}-1,t_{2k+1}],\end{cases} \tag{18}$$

где

$$J_i(t_{2k+1}-1,t)\equiv\int\limits_{t_{2k+1}-1}^{t}E\exp\biggl\{\int\limits_{\tau}^{t}a_2(\xi)\,d\xi\biggr\}|y_{1i}(\tau)|^{m_i}\,d\tau,\quad t\in[t_{2k+1}-1,t_{2k+1}],$$

$$\tilde z_i(t)=\begin{cases}z_i(t), & t\in[t_{2k+1}-1,t'_{2k+1}],\\ z_i(t)\tilde c_{2k+1}(t)\equiv z_i(t)\exp\biggl\{\int\limits_{t'_{2k+1}}^{t}[\alpha+e_{-\alpha\alpha}(\tau,\ldots)]\,d\tau\biggr\}, & t\in(t'_{2k+1},t_{2k+1}].\end{cases} \tag{19}$$

При этом для положительной функции $\tilde c_{2k+1}(t)$ и значения $\tilde c_{2k+1}=\tilde c_{2k+1}(t_{2k+1})$ выполнены аналогичные (12) оценки

$$1\leqslant\tilde c_{2k+1}(t)\leqslant e^{2\alpha\varepsilon(t_{2k+1})},\quad t\in[t'_{2k+1},t_{2k+1}].$$

Для функции $z_i(t)$ в силу неравенства $\beta_2(m_i)>-\alpha$ справедлива оценка

$$|z_i(t)|\leqslant\exp\{\beta_2(m_i)t\},\quad t\in[t_{2k},t_{2k+1}],$$

а для $\tilde z_i(t_{2k+1})$ — соотношения

$$|\tilde z(t_{2k+1})|=c_{2k}\tilde c_{2k+1}\exp\{\beta_2(m_i)t_{2k}-\alpha(t_{2k+1}-t_{2k})\}\overset{(10)}{=}c_{2k}\tilde c_{2k+1}\exp\{m_i\beta_2(m_i)t_{2k+1}\}, \tag{20}$$

причём знаки слагаемых в равенстве (18) противоположны. Это позволяет выбором постоянной $d_i(2k+1)>0$ получить необходимую оценку всей суммы. Указанный выбор осуществим из равенства

$$y_{2i}(t_{2k+1})\equiv\tilde z_i(t_{2k+1})+(-1)^{\varphi(i)}J_i(t_{2k+1}-1,t_{2k+1})d_i(2k+1)=\operatorname{sgn}(y_{2i}(t_{2k}))\exp\{\beta_1(m_i)t_{2k+1}\}. \tag{21}$$

По определению (7) функции E для интеграла в (19) на основании оценки (16) справедливы неравенства

$$J_i(t_{2k+1}-1,t_{2k+1})>J_i(t_{2k+1}-1+\varepsilon,t_{2k+1}-\varepsilon)>\exp\{m_i\beta_2(m_i)t_{2k+1}\},\quad i=\overline{1,4},$$

с учётом которых и равенства (20) получим из уравнения (21) необходимые представление для определения постоянной $d_i(2k+1)$ и оценку сверху

$$0 < d_i(2k+1) = \frac{|\tilde{z}_i(t_{2k+1})| - \exp\{\beta_1(m_i)t_{2k+1}\}}{J_i(t_{2k+1}-1, t_{2k+1})} < \frac{c_{2k}\tilde{c}_{2k+1}}{r[1-2\varepsilon(t_{2k+1})]} \leqslant r_0$$

с независящей от k постоянной r_0.

Таким образом, на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ построены система (2) с необходимым m_1-возмущением $f(t,y)$, $f(t_{2k+1}, y) \equiv 0$, $y \in \mathbb{R}^2$, являющимся m_i-возмущением в октанте $\mathbb{R}^2_i(k) \equiv \equiv S_i \times [t_{2k}, t_{2k+1}]$, $i = \overline{1,4}$, и её решения $Y_i(t) \subset \mathbb{R}^2_i$ с компонентами $y_{1i}(t)$, $y_{2i}(t)$, удовлетворяющими неравенствам

$$|y_{1i}(t)|, |y_{2i}(t)| \leqslant \exp\{\beta_2(m_i)t\}, \quad t \in [t_{2k}, t_{2k+1}], \quad i = \overline{1,4}.$$

Эти решения в момент времени $t = t_{2k+1}$ принимают значения

$$Y_i(t_{2k+1}) = ((-1)^{i-1}c_{2k+1}e^{\beta_2(m_i)t_{2k+1}}, e^{\beta_1(m_i)t_{2k+1}})^{\mathrm{т}}, \quad i = 1, 2,$$
$$Y_i(t_{2k+1}) = ((-1)^{i}c_{2k+1}e^{\beta_2(m_i)t_{2k+1}}, -e^{\beta_1(m_i)t_{2k+1}})^{\mathrm{т}}, \quad i = 3, 4,$$

являющиеся начальными значениями для построения возмущённой системы и её решений $Y_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, на отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$.

Начальные значения $Y_i(t_{2k+1})$ идентичны (с заменой y_1 и y_2 и наоборот) прежним значениям $Y_i(t_{2k})$, поэтому необходимые построения на отрезке $[t_{2k+1}, t_{2k+2}]$ совершенно аналогичны выполненным на предыдущем отрезке и фактически их повторяют (с заменой y_1 на y_2 и наоборот).

С помощью метода математической индукции распространим построения необходимой системы (2) и её решений $Y_i \subset \mathbb{R}^2_i$ на отрезке $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ на всю полуось $t \geqslant t_0 = \theta^{2k_0}$.

Построенная таким образом система (2) с необходимым возмущением $f(t,y)$ будет иметь решения $Y_i(t)$ с показателями $\lambda[Y_i] = \beta_2(m_i)$, $i = \overline{1,4}$. Теорема доказана.

Замечание. Очевидным выбором параметров $m_i > 1$, $i = \overline{1,4}$, можно реализовать отрицательные и все различные показатели (4).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изобов, Н.А. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 11. — С. 1450–1457.
2. Изобов, Н.А. Линейный вариант антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 11. — С. 1443–1452.
3. Изобов, Н.А. Существование антиперроновского эффекта смены положительных показателей системы линейного приближения на отрицательные при возмущениях высшего порядка малости / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2023. — Т. 59, № 12. — С. 1599–1605.
4. Perron, O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen / O. Perron // Math. Zeitschr. — 1930. — Bd. 32, H. 5. — S. 702–728.
5. Леонов, Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения / Г.А. Леонов. — М. : Ин-т компьют. исследований ; Ижевск : R&C Dynamics, 2006. — 168 с.

6. Изобов, Н.А. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 464–472.
7. Изобов, Н.А. Построение счётного числа различных суслинских множеств характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. — С. 1585–1589.
8. Изобов, Н.А. О числе экспоненциально убывающих решений возмущённой дифференциальной системы в двумерном антиперроновском эффекте / Н.А. Изобов, А.В. Ильин // Дифференц. уравнения. — 2024. — Т. 60, № 11. — С. 1583–1584.
9. Гелбаум, Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед ; пер. с англ. Б.И. Голубева ; под ред. П.Л. Ульянова. — М. : Мир, 1967. — 252 с.

CONSTRUCTION OF SOLUTIONS WITH NEGATIVE EXPONENTS OF A DIFFERENTIAL SYSTEM IN THE TWO-DIMENSIONAL ANTI-PERRON EFFECT UNDER HIGHER-ORDER PERTURBATIONS

© 2024 / N. A. Izobov[1], A. V. Il'in[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
[2]Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: [1]izobov@im.bas-net.by, [2]iline@cs.msu.su

The two-dimensional anti-Perron effect of changing all positive characteristic exponents of the linear approximation to four different negative exponents, respectively, of four non-trivial solutions of a differential system with a perturbation of higher order of smallness, has been realized.

Keywords: Lyapunov characteristic exponent, higher-order perturbation, change of exponents, Perron effect, anti-Perron effect

REFERENCES

1. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., On the existence of linear differential systems with all positive characteristic exponents of the first approximation and with exponentially decaying perturbations and solutions, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 11, pp. 1426–1433.
2. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Linear version of the anti-Perron effect of change of positive characteristic exponents to negative ones, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 11, pp. 1439–1449.
3. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Existence of an anti-Perron effect of change of positive exponents of the linear approximation system to negative ones under perturbations of a higher order of smallness, *Differ. Equat.*, 2023, vol. 59, no. 12, pp. 1591–1597.
4. Perron, O., Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, *Math. Zeitschr.*, 1930, Bd. 32, H. 5, S. 703–728.
5. Leonov, G.A., *Khaoticheskaya dinamika i klassicheskaya teoriya ustoichivosti dvizheniya* (Chaotic Dynamics and the Classical Theory of Motion Stability), Moscow; Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled., 2006.
6. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Construction of an arbitrary Suslin set of positive characteristic exponents in the Perron effect, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 449–457.
7. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., Constructing countably many distinct Suslin sets of characteristic exponents in the Perron effect of change of their values, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1539–1544.
8. Izobov, N.A. and Il'in, A.V., On the number of exponentially decreasing solutions of a perturbed differential system in the two-dimensional anti-Perron effect, *Differ. Uravn.*, 2024, vol. 60, no. 11, pp. 1583–1584.
9. Gelbaum, B.R. and Olmsted, J.M.H., *Counterexamples in Analysis*, San Francisco: Holden-Day, 1964.