

— ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ —

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ
МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С РЕЛЕЙНЫМ
ГИСТЕРЕЗИСОМ И ВОЗМУЩЕНИЕМ

© 2024 г. В. В. Евстафьева¹, М. Ю. Гусева²

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: ¹v.evstafieva@spbu.ru, ²st089778@student.spbu.ru

Поступила в редакцию 04.05.2024 г., после доработки 13.10.2024 г.; принята к публикации 31.10.2024 г.

Исследована n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая постоянную диагональную матрицу с вещественными собственными значениями, двухпозиционную релейную нелинейность гистерезисного типа с параметром и непрерывную периодическую функцию возмущения с параметром. В случае специального вида вектора обратной связи (один ненулевой элемент) получены условия на параметры системы, обеспечивающие существование единственного двухточечно-колебательного периодического решения с периодом, кратным периоду функции возмущения. Установлена функциональная зависимость параметра нелинейности от параметра функции возмущения. Изучено влияние значений параметра функции возмущения на существование решения. Предложен алгоритм нахождения параметров системы и момента первого переключения реле для случая, когда период решения задан. Теоретические результаты, в том числе разработанный алгоритм, проиллюстрированы на примере трёхмерной системы.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, релейная нелинейность с гистерезисом, периодическая функция возмущения, двухточечно-колебательное периодическое решение, точки и моменты переключения, пространство параметров системы

DOI: 10.31857/S0374064124120021, EDN: IPTIYC

ВВЕДЕНИЕ

Автоматические системы с релейными элементами охватывают широкий класс систем регулирования (см., например, [1–6]), различные типы релейных элементов представлены в монографии [7, с. 52]. В некоторых задачах теории автоматического управления и регулирования математические модели релейных систем описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [2–4]). Системы с реле являются существенно нелинейными [7, с. 11], поэтому аналитическое исследование их моделей — непростая задача [4]. В данной статье рассматривается неидеальное реле, операторное представление которого дано в монографии [8, с. 181].

Релейные системы могут обладать большим быстродействием (быстрые переключения) вследствие интенсивного управляющего воздействия, которое может стать причиной возникновения незатухающих колебаний (автоколебаний). Во многих системах режим автоколебаний нежелателен, поэтому для его устранения их подвергают внешнему периодическому воздействию [7, с. 12]. При условии захватывания частоты в динамике системы возникает требуемое гармоническое или субгармоническое вынужденное колебание с периодом, равным или кратным периоду внешнего воздействия соответственно.

В данной работе рассматривается многомерная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в канонической форме с постоянной диагональной матрицей в линейной её части, релейным гистерезисом и непрерывной периодической функцией возмущения в нелинейной части. Вектор обратной связи имеет специальный вид, а именно, один ненулевой элемент. В этом случае поверхности разрыва располагаются ортогонально одной из осей в пространстве состояний системы. Изучаются непрерывные двухточечно-колебательные периодические решения с двумя точками переключения на поверхностях разрыва в пространстве состояний системы и возвращением изображающей точки решения в каждую из точек переключения за одно и то же время (период).

Настоящая статья продолжает аналитическое исследование, начатое в работе [9] и развитое в [10–12], по вопросу существования в такой системе периодических решений с периодом, равным или кратным периоду функции возмущения. В [9] впервые даны определения двухточечно-колебательного решения, момента первой встречи с поверхностью переключения (поверхностью разрыва) и в случае неустойчивой линейной части системы доказана теорема существования решения с периодом, равным периоду функции возмущения. В [10] рассмотрена вещественная симметричная матрица системы с кратными собственными значениями и получены условия существования решения. В статье [11] разработан алгоритм выбора параметров нелинейности как управления, при которых система имеет единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение с двумя точками переключения за период, кратный периоду функции возмущения. В [12] доказан критерий существования единственного периодического решения с заданным периодом.

Согласно [7, с. 12] для разработки релейных автоматических систем необходимо уметь определять зависимость их режима работы от параметров отдельных элементов (в том числе релейных), а также вида и параметров внешнего воздействия. В связи с этим здесь рассматривается система с двумя параметрами в нелинейной части, относительно которых исследуется существование решения, при этом линейная часть системы может быть как устойчивой, так и неустойчивой, поскольку допускается наличие у матрицы одного положительного собственного значения. Получена новая теорема и предложен алгоритм нахождения значений параметров системы, которые отвечают существованию решения системы.

В последние годы для анализа нелинейных систем активно используется компьютерное моделирование, которое позволяет за короткое время исследовать большое число вариантов проектируемой системы и различных режимов её работы. Вычислительные эксперименты, как разновидность такого моделирования, использованы в настоящей работе и частично описаны в п. 5. Результаты данного исследования можно использовать при разработке автоматических релейных систем с гистерезисом на первых этапах компьютерного моделирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель релейной автоматической системы в виде приведённой (неособое преобразование см., например, в [12]) n -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 u(\sigma) + K_0 f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \quad (1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор состояний системы; A_0 — диагональная матрица с простыми, ненулевыми, вещественными собственными значениями λ_i , $i = \overline{1, n}$; $B_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0)^T$ и $K_0 = (k_1^0, \dots, k_n^0)^T$ — постоянные, ненулевые, вещественные векторы; $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ — постоянный, ненулевой, вещественный вектор, определяющий обратную связь в системе; (Γ, X) — скалярное произведение векторов Γ и X .

Разрывным оператором $u(\sigma)$ задана характеристика двухпозиционного реле с вещественными пороговыми нижним ℓ_1 и верхним ℓ_2 значениями, вещественными значениями выхода m_1, m_2 (пусть $m_1 < m_2$) и положительным гистерезисом (рис. 1). Согласно [8, с. 182] неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определённым на всех непрерывных входах. Описание реле далее приведём в соответствии с [13]. Непрерывная входная функция $\sigma(t), t \geq t_0$, преобразуется в выходную кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, определяемую по формуле

$$u(t) = \begin{cases} m_1, & \text{если } (\sigma(t) \leq \ell_1) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_1), \\ m_2, & \text{если } (\sigma(t) \geq \ell_2) \vee (\sigma(t) \in (\ell_1, \ell_2) \wedge \sigma(\xi(t)) = \ell_2), \\ u_0, & \text{если } \sigma(\tau) \in (\ell_1, \ell_2) \text{ для любого } \tau \in [t_0, t], \end{cases}$$

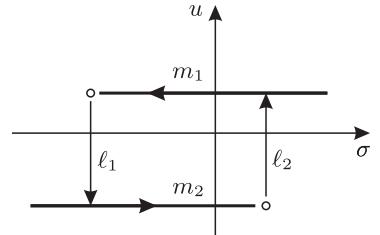


Рис. 1. Характеристика реле с положительным гистерезисом

где $\xi(t) = \sup\{\tau: \tau \leq t, \sigma(\tau) = \ell_1 \vee \sigma(\tau) = \ell_2\}$ и $u_0 = u(t_0) \in \{m_1, m_2\}$. Допустимыми состояниями реле называют все пары $(\sigma, u) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющие условию $(u = m_1 \wedge \sigma < \ell_2) \vee (u = m_2 \wedge \sigma > \ell_1)$. В релейных автоматических системах функция $\sigma(t)$ задаёт управляющий сигнал, $u(t)$ — управляющее воздействие.

Функция возмущения $f(t)$ задаётся определённой на $t \geq 0$ непрерывной, периодической функцией вида

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2),$$

где $f_0, f_1, f_2, \omega, \varphi_1$ и φ_2 — вещественные постоянные, причём $f_1 \neq 0, \omega > 0$. Период функции $f(t)$ равен $T = 2\pi/\omega$.

Ниже приведём общие сведения и определения из [9, 12] в обозначениях данной работы.

Определение 1. Точкой переключения называется состояние системы (1), при котором входная функция $\sigma(t)$ достигает одного из пороговых значений ℓ_μ , $\mu = 1, 2$, а выходная функция $u(t)$ при этом меняет значение выхода m_1 на m_2 или наоборот.

Определение 2. Гиперплоскостью (поверхностью) переключения называется гиперплоскость

$$L_\mu = \{X \in \mathbb{R}^n : (\Gamma, X) = \ell_\mu\}, \quad \mu = 1, 2.$$

Определение 3. Если в некоторый момент времени t' изображающая точка принадлежит гиперплоскости L_μ , $\mu = 1, 2$, то наименьший момент времени $t'' > t'$, в который изображающая точка принадлежит гиперплоскости $L_{3-\mu}$, называется моментом первой встречи изображающей точки с $L_{3-\mu}$.

Определение 4. Решение $X(\cdot)$ системы (1) называется двухточечно-колебательным с периодом возврата T_r на поверхность переключения, если в пространстве состояний существуют точки переключения X^1 и X^2 , в каждую из которых изображающая точка решения возвращается через время T_r , т.е. если $X^1 = X_0$ или $X^2 = X_0$, то для любого $\kappa \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $X_0 = X(t_0 + \kappa T_r)$, где $t_0 \geq 0$ — начальный момент времени, $T_r > 0$.

Определение 5. Двухточечно-колебательное с периодом возврата T_r решение $X(\cdot)$ системы (1) называется T_r -двуточечно-колебательным простейшего поведения, если существуют вещественные положительные числа τ_1 и τ_2 такие, что $\tau_1 + \tau_2 = T_r$, и точки $X^1 \in L_1$ и $X^2 \in L_2$, для которых выполняются следующие условия: 1) $X(t_0 + \kappa T_r) = X^1$ и $X(t_0 + \tau_1 + \kappa T_r) = X^2$, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; 2) для всех $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на полуинтервале $\Delta_\kappa^1 = [t_0 + \kappa T_r, t_0 + \tau_1 + \kappa T_r)$ имеет место равенство $u = m_1$, а на полуинтервале $\Delta_\kappa^2 = [t_0 + \tau_1 + \kappa T_r, t_0 + (\kappa + 1)T_r)$ — равенство $u = m_2$.

Заметим, что определение 5 выделяет из множества всевозможных двухточечно-колебательных решений такие, для которых на каждом временному промежутке $[t_0 + \kappa T_r, t_0 + (\kappa+1)T_r)$ изображающая точка только один раз попадает в X^1 и X^2 . В общем случае таких попаданий может быть больше.

В настоящей статье решение системы (1) рассматривается в соответствии с определением 5 в классе определённых на полуоси $t \geq t_0$ непрерывных вектор-функций $X(t)$ с начальным условием $X(t_0) = X^1$ таким, что $\sigma(t_0) = (\Gamma, X^1) = \ell_1$. Решение будем называть *Ψ -периодическим*, $\Psi > 0$, если $X(t+\Psi) = X(t)$ для всех $t \geq t_0$. В точке X^μ , $\mu = 1, 2$, происходит “сшивание” траекторий, заданных разными правыми частями системы (1) с $u(\sigma) = m_1$ или $u(\sigma) = m_2$. Число τ_μ называется *временем перехода* изображающей точки решения из точки X^μ в точку $X^{3-\mu}$, а времена перехода и точки переключения — *параметрами решения*. Согласно определению 3 значение $t_0 + \tau_1 + \kappa T_r$ является моментом первой встречи с гиперплоскостью L_2 , а значение $t_0 + (\kappa+1)T_r$ — моментом первой встречи с L_1 .

Следуя методу сечений пространства параметров [14, с. 22], рассмотрим вектор Γ в специальном виде, а именно, с одним ненулевым элементом, что соответствует сечению первого рода. Пусть s — индекс ненулевого элемента. Тогда систему (1) перепишем в координатном виде

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + b_i^0 u(\sigma) + k_i^0 f(t), \quad \sigma = \gamma_s x_s, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Здесь и далее b_s^0 , k_s^0 , γ_s — ненулевые элементы.

При таком выборе вектора Γ поверхности переключения ориентированы ортогонально оси x_s в пространстве состояний системы (2) и утверждение $X^\mu \in L_\mu$ равносильно выполнению равенства $\gamma_s x_s^\mu = \ell_\mu$, $\mu = 1, 2$.

Полагаем, что собственные значения матрицы A_0 , элементы векторов B_0 , K_0 , постоянные γ_s , m_1 , m_2 , ℓ_1 нелинейности и постоянные f_0 , f_1 , f_2 , ω , φ_2 функции возмущения заданы, а постоянные φ_1 и ℓ_2 являются параметрами системы (2). Отметим, что параметр φ_1 описывает фазу основной (ненулевой) составляющей периодического возмущения, а параметр ℓ_2 определяет ширину петли гистерезиса (зоны неоднозначности) и положение гиперплоскости L_2 в пространстве состояний системы.

Ставится следующая задача: исследовать пространство параметров системы (2) и найти области в этом пространстве, которые соответствуют существованию решения с начальным условием $x_i(t_0) = x_i^1$ и периодом возврата T_r , кратным периоду T функции возмущения, а также установить функциональные зависимости параметров системы и параметров решения.

Для аналитического представления решения используем формулу Коши

$$x_i(t) = e^{\lambda_i(t-\nu)} x_i(\nu) + \int_{\nu}^t e^{\lambda_i(t-\tau)} (b_i^0 m_\mu + k_i^0 f(\tau)) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = 1, 2,$$

где ν — начальный момент времени.

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Систему (2) представим в виде двухмерной подсистемы для $i = s$

$$\dot{x}_s(t) = \lambda_s x_s(t) + b_s^0 u(\sigma) + k_s^0 f(t), \quad \sigma(t) = \gamma_s x_s(t) \quad (3)$$

и остальных уравнений для $i = j$

$$\dot{x}_j(t) = \lambda_j x_j(t) + b_j^0 u(\sigma) + k_j^0 f(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq s. \quad (4)$$

Рассмотрим систему (3). Согласно определению 5 справедливы равенства

$$\sigma(t_0 + \kappa T_r) = \sigma(t_0 + (\kappa + 1)T_r) = \ell_1, \quad \sigma(t_0 + \kappa T_r + \tau_1) = \ell_2. \quad (5)$$

Далее выпишем решение задачи

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s(b_s^0 u(t) + k_s^0 f(t)), \quad \sigma(t_0) = \ell_1.$$

Используя формулу Коши, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= e^{\lambda_s(t-\nu)} \sigma(\nu) + \gamma_s \int_{\nu}^t e^{\lambda_s(t-\tau)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(\tau)) d\tau, \quad \nu = t_0 + \kappa T_r, \quad t \in \Delta_{\kappa}^1, \\ \sigma(t) &= e^{\lambda_s(t-\nu)} \sigma(\nu) + \gamma_s \int_{\nu}^t e^{\lambda_s(t-\tau)} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(\tau)) d\tau, \quad \nu = t_0 + \kappa T_r + \tau_1, \quad t \in \Delta_{\kappa}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

После соответствующих подстановок в (6) согласно равенствам (5) и замены переменной в интегралах получим

$$\begin{aligned} \ell_2 &= e^{\lambda_s \tau_1} \ell_1 + \gamma_s \int_0^{\tau_1} e^{\lambda_s(\tau_1-\xi)} (b_s^0 m_1 + k_s^0 f(t_0 + \kappa T_r + \xi)) d\xi, \\ \ell_1 &= e^{\lambda_s \tau_2} \ell_2 + \gamma_s \int_0^{\tau_2} e^{\lambda_s \xi} (b_s^0 m_2 + k_s^0 f(t_0 + (\kappa + 1)T_r - \xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

По условию задачи период возврата кратен периоду функции возмущения, т.е. $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому функция возмущения и, значит, интегралы в (7) не зависят от $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} Q_i(\tau, m_{\mu}) &= (b_i^0 m_{\mu} + k_i^0 f_0) / \lambda_i + k_i^0 H_i(\tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu = 1, 2, \\ H_i(\tau) &= \frac{f_1 \sin(\omega\tau + \varphi_1 + \delta_i^1)}{\sqrt{\lambda_i^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(2\omega\tau + \varphi_2 + \delta_i^2)}{\sqrt{\lambda_i^2 + 4\omega^2}}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta_i^{\alpha} = \arctg(\alpha\omega/\lambda_i) + \pi q_i$, $\alpha = 1, 2$, причём $q_i = 0$ при $\lambda_i > 0$ и $q_i = 1$ при $\lambda_i < 0$.

Система равенств (7) после интегрирования с учётом (8) при $i = s$ принимает вид

$$\begin{aligned} \ell_2 &= (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_1), \\ \ell_1 &= (\ell_2 + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_2)) e^{\lambda_s \tau_2} - \gamma_s Q_s(t_0, m_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Условия на параметры системы (9), при которых существуют $\tau_1 \in (0, T_r)$ и $\tau_2 = T_r - \tau_1$ в случае, когда $T_r = kT$, $k \in \mathbb{N}$, устанавливает

Теорема. Пусть при некотором $k \in \mathbb{N}$ справедливы следующие условия:

1) значение параметра φ_1 удовлетворяет неравенствам

$$m_1 < L < m_2, \quad (10)$$

$$\gamma_s(Q_s(t_0, m_1) e^{\lambda_s \tau_1} - Q_s(t_0 + \tau_1, m_1)) > \ell_1(1 - e^{\lambda_s \tau_1}), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{b_s^0} \left(\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 f_0 + \lambda_s k_s^0 H_s(t_0) \right), \\ \tau_1 &= kT + \lambda_s^{-1} \ln \Omega, \quad \Omega = \frac{m_2 - m_1}{(e^{\lambda_s kT} - 1)L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}}; \end{aligned} \quad (12)$$

2) значение параметра ℓ_2 вычисляется по формуле

$$\ell_2 = (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s \tau_1} - \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_1); \quad (13)$$

3) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \ell_2 - (\ell_1 + \gamma_s Q_s(t_0, m_1)) e^{\lambda_s(t-t_0)} + \gamma_s Q_s(t_0+t, m_1) &> 0, \quad t \in \Delta_0^1, \\ \ell_1 - (\ell_2 + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1, m_2)) e^{\lambda_s(t-\tau_1-t_0)} + \gamma_s Q_s(t_0 + \tau_1 + t, m_2) &< 0, \quad t \in \Delta_0^2. \end{aligned}$$

Тогда существует единственное T_r -двуточечноколебательное простейшего поведения решение системы (2) для $i = \overline{1, n}$, $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$x_i(t) = \begin{cases} e^{\lambda_i(t-\nu)} (x_i^1 + Q_i(\nu, m_1)) - Q_i(\nu+t, m_1), & \nu = t_0 + \kappa kT, \quad t \in \Delta_\kappa^1, \\ e^{\lambda_i(t-\nu)} (x_i^2 + Q_i(\nu, m_2)) - Q_i(\nu+t, m_2), & \nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1, \quad t \in \Delta_\kappa^2, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} x_s^\mu &= \ell_\mu / \gamma_s, \quad \mu = 1, 2, \\ x_j^1 &= \frac{e^{\lambda_j kT}}{1 - e^{\lambda_j kT}} \left(\frac{b_j^0 (m_2 - m_1)}{\lambda_j e^{\lambda_j \tau_1}} + Q_j(t_0, m_1) \right) - Q_j(t_0, m_2), \\ x_j^2 &= e^{\lambda_j \tau_1} (x_j^1 + Q_j(t_0, m_1)) - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq s, \end{aligned} \quad (14)$$

$Q_j(\tau, m_\mu)$ определяется по формуле (8), в которой $i = j$.

Доказательство. Рассмотрим систему равенств (9) с $\tau_2 = kT - \tau_1$ как систему уравнений относительно переменной $\tau_1 \in (0, kT)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. После сложения двух уравнений этой системы получим уравнение, из которого однозначно выражается значение τ_1 . Если имеют место неравенства (10), то $0 < e^{-\lambda_s kT} < \Omega < 1$ при $\lambda_s > 0$ и $1 < \Omega < e^{-\lambda_s kT}$ при $\lambda_s < 0$. Отсюда следует, что первое равенство из (12) имеет смысл и $\tau_1 \in (0, kT)$. Полученное значение τ_1 является решением системы (9), если удовлетворяет первому уравнению системы (9), что равносильно выполнению равенства (13). По предположению должно выполняться неравенство $\ell_2 > \ell_1$. Если в последнем неравенстве ℓ_2 заменить выражением из (13), то после преобразования получим соотношение (11).

Теперь докажем непосредственно теорему. Пусть имеют место условия 1), 2) теоремы и $\tau_2 = kT - \tau_1$. Тогда значение τ_1 , определяемое равенством (12), является решением системы (9) и принадлежит интервалу $(0, kT)$. При этом, как следует из неравенств (10) и (11), выполнено предположение, что $m_2 > m_1$ и $\ell_2 > \ell_1$.

Пусть выполняется условие 3) теоремы. Поскольку первое неравенство равносильно неравенству $\ell_2 - \sigma(t) > 0$ для всех $t \in [t_0, t_0 + \tau_1]$, второе — неравенству $\ell_1 - \sigma(t) < 0$ для всех $t \in [t_0 + \tau_1, t_0 + kT]$, то значение $t_0 + \tau_1$ является моментом первой встречи с L_2 , а значение $t_0 + kT$ — с L_1 , и справедливы равенства $\sigma(t_0 + \tau_1) = \ell_2$ и $\sigma(t_0 + \tau_1 + \tau_2) = \sigma(t_0 + kT) = \ell_1$. Исходя из построения системы (9) с начальным условием $\sigma(t_0) = \ell_1$ и $T_r = kT$, приходим к равенствам (5) для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и, значит, к равенствам $x_s^\mu = \ell_\mu / \gamma_s$, $\mu = 1, 2$, и утверждению

теоремы относительно решения системы (2) для $i=s$. Единственность решения $x_s(t)$ следует из того, что значение его параметра τ_1 определяется однозначно при некотором заданном $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь уравнения (4). После их интегрирования с учётом (8) для $i=j$ при известном значении τ_1 получим выражения для любого $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\begin{aligned} x_j(t) &= e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j(\nu) + Q_j(\nu, m_1)) - Q_j(\nu+t, m_1), \quad t \in \Delta_\kappa^1, \quad \nu = t_0 + \kappa kT, \\ x_j(t) &= e^{\lambda_j(t-\nu)}(x_j(\nu) + Q_j(\nu, m_2)) - Q_j(\nu+t, m_2), \quad t \in \Delta_\kappa^2, \quad \nu = t_0 + \kappa kT + \tau_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно условию 1) определения 5 должны выполняться равенства

$$x_j(t_0 + \kappa kT) = x_j(t_0 + (\kappa + 1)kT) = x_j^1, \quad x_j(t_0 + \kappa kT + \tau_1) = x_j^2. \quad (16)$$

После подстановок (16) в выражения (15) получим

$$\begin{aligned} x_j^2 &= (x_j^1 + Q_j(t_0, m_1))e^{\lambda_j \tau_1} - Q_j(t_0 + \tau_1, m_1), \\ x_j^1 &= (x_j^2 + Q_j(t_0 + \tau_1, m_2))e^{\lambda_j \tau_2} - Q_j(t_0, m_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (17) при ненулевых λ_j значения x_j^1 и x_j^2 определяются однозначно. Таким образом, получены формулы (15) для решения системы (2) при $i=j$ и начальных значений x_j^1 и x_j^2 , что совместно с формулами для $x_s(t)$ и x_s^1, x_s^2 отражено в утверждении теоремы. Теорема доказана.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

По условию задачи φ_1 является параметром функции возмущения. Рассмотрим L как функцию от этого параметра:

$$L(\varphi_1) = P_L \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_L, \quad (18)$$

где

$$P_L = -\frac{\lambda_s k_s^0 f_1}{b_s^0 \sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}, \quad C_L = -\frac{1}{b_s^0} \left(\frac{\lambda_s \ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 f_0 + \frac{\lambda_s k_s^0 f_2 \sin(\omega t_0 + \varphi_2 + \delta_s^2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right).$$

Далее воспользуемся равенством (12) и выпишем τ_1 как функцию от параметра φ_1 :

$$\tau_1(\varphi_1) = C_\tau^1 - \lambda_s^{-1} \ln(P_\tau \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_\tau^2), \quad (19)$$

где $C_\tau^1 = kT + \lambda_s^{-1} \ln(m_2 - m_1)$, $P_\tau = (e^{\lambda_s kT} - 1)P_L$, $C_\tau^2 = (e^{\lambda_s kT} - 1)C_L + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}$.

Отсюда получим

$$e^{\lambda_s \tau_1(\varphi_1)} = \frac{e^{\lambda_s kT}(m_2 - m_1)}{P_\tau \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_\tau^2}.$$

Воспользуемся равенством (13) и выпишем функцию

$$\ell_2(\varphi_1) = \lambda_s^{-1} \gamma_s b_s^0 (m_1 - L(\varphi_1)) e^{\lambda_s \tau_1(\varphi_1)} - \lambda_s^{-1} \gamma_s (b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0) - \gamma_s k_s^0 H_s(t_0 + \tau_1(\varphi_1))$$

или с учётом введённых выше обозначений

$$\begin{aligned} \ell_2(\varphi_1) &= \frac{P_{\ell_2}^1 \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_{\ell_2}^1}{P_\tau \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) + C_\tau^2} + C_{\ell_2}^2 + \\ &+ P_{\ell_2}^2 \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1 + \omega \tau_1(\varphi_1)) + P_{\ell_2}^3 \sin(2\omega t_0 + \varphi_2 + \delta_s^2 + 2\omega \tau_1(\varphi_1)), \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} P_{\ell_2}^1 &= -\lambda_s^{-1} \gamma_s b_s^0 P_L (m_2 - m_1) e^{\lambda_s k T}, \quad C_{\ell_2}^1 = \lambda_s^{-1} \gamma_s b_s^0 (m_2 - m_1) e^{\lambda_s k T} (m_1 - C_L), \\ C_{\ell_2}^2 &= -\lambda_s^{-1} \gamma_s (b_s^0 m_1 + k_s^0 f_0), \quad P_{\ell_2}^2 = -\frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}, \quad P_{\ell_2}^3 = -\frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}. \end{aligned}$$

Для определения допустимых значений параметра φ_1 , удовлетворяющих условиям 1) и 2) теоремы, предлагается использовать следующий порядок действий.

1. Вычисляем постоянные P_L , C_L и строим функцию $L(\varphi_1)$ по формуле (18).

2. Находим $L_{\inf} = \min\{P_L + C_L, -P_L + C_L\}$, $L_{\sup} = \max\{P_L + C_L, -P_L + C_L\}$, и если неравенства $L_{\inf} > m_1$, $L_{\sup} < m_2$ справедливы, то заключаем, что неравенства (10) выполняются для любого $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$. В противном случае решаем неравенство (10) относительно φ_1 . Имеем $m_1 - C_L < P_L \sin(\omega t_0 + \varphi_1 + \delta_s^1) < m_2 - C_L$, откуда $\varphi_1 \in D \subset [0, 2\pi]$, где

$$D = \begin{cases} (\arcsin(M_1), \arcsin(M_2)) \cup (\pi - \arcsin(M_2), \pi - \arcsin(M_1)), & \text{если } P_L > 0, \\ (\arcsin(M_2), \arcsin(M_1)) \cup (\pi - \arcsin(M_1), \pi - \arcsin(M_2)), & \text{если } P_L < 0, \end{cases}$$

$$M_\mu = (m_\mu - C_L)/P_L - \delta_s^1 - \omega t_0, \quad \mu = 1, 2.$$

3. Задаём $k \in \mathbb{N}$. Вычисляем постоянные P_τ^1 , C_τ^1 , C_τ^2 , строим функцию $\tau_1(\varphi_1)$ по формуле (19) и находим множество значений $E(\tau_1) \subset (0, kT)$, отвечающих множеству допустимых значений φ_1 .

4. Строим непрерывную функцию $\ell_2(\varphi_1)$ по формуле (20). Находим для неё нижнюю оценку

$$\ell_2^n = \frac{-|P_{\ell_2}^1| + C_{\ell_2}^1}{|P_\tau| + C_\tau^2} + C_\tau^2 - |P_{\ell_2}^2| - |P_{\ell_2}^3|,$$

и если $\ell_2^n > \ell_1$, то имеет место неравенство (11) для любого допустимого φ_1 . В случае если $\ell_2^n \leq \ell_1$, то находим её наименьшее значение на отрезке $[0, 2\pi]$ по формуле

$$\ell_2^{\inf} = \min \{ \ell_2(0), \ell_2(2\pi), \ell_2^{\min} \}, \quad (21)$$

где $\ell_2^{\min} = \ell_2(\varphi_1^{\min})$ — глобальный (абсолютный) минимум функции $\ell_2(\varphi_1)$ в точке φ_1^{\min} , и если $\ell_2^{\inf} > \ell_1$, то имеет место неравенство (11) для любого допустимого φ_1 . В противном случае решаем неравенство $\ell_2(\varphi_1) > \ell_1$, которое равносильно неравенству (11), и находим $\varphi_1 \in D^1 \subset [0, 2\pi]$.

5. Заключаем, что определены допустимые значения φ_1 , при которых условия 1) и 2) теоремы выполняются.

4. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ И РЕШЕНИЯ

Неравенства в условии 3) теоремы (далее *условия переключения*) представим в следующем виде:

$$\ell_2 - \sigma(t) > 0 \quad \text{для } t \in \Delta_0^1, \quad (22)$$

$$\ell_1 - \sigma(t) < 0 \quad \text{для } t \in \Delta_0^2, \quad (23)$$

где функция $\sigma(t)$ задаётся равенствами (6).

Допустим, что справедливы условия 1), 2) теоремы и для параметра φ_1 определён интервал допустимых значений $[\varphi_1^0, \varphi_1^*]$. Значение τ_1 , определяемое равенством (12), является временем перехода с L_1 на L_2 , а значение $t_0 + \tau_1$ — моментом переключения лишь тогда, когда выполняются условия переключения.

Ниже предлагается алгоритм, с помощью которого можно найти подходящее значение параметра φ_1 из интервала допустимых значений, рассчитанных по формуле

$$\varphi_1^r = \varphi_1^0 + (\varphi_1^* - \varphi_1^0)r/m, \quad r = \overline{0, m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

и соответствующие ему момент переключения $t_0 + \tau_1(\varphi_1)$ при заданном периоде kT и верхнее пороговое значение $\ell_2(\varphi_1)$.

Алгоритм.

1. Задаём значения $r = 0$ и $m \in \mathbb{N}$.
2. Рассчитываем $\tau_1(\varphi_1^r)$ и $\ell_2(\varphi_1^r)$ по формулам (19) и (20) соответственно.
3. Задаём точность $\varepsilon > 0$ и шаг $h \geq \varepsilon$.
4. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6), разность $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + h]$ с шагом h и переходим к п. 5.
- 4.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.1h$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t)$ для $t \in (t_0 + \tau^1, t_0 + \tau^1 + h)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 5.
5. Находим значение $t_0 + \tau^1$ переменной t , которое удовлетворяет условиям $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1) > 0$ и $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1 + h) < 0$. Если $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1) < \varepsilon$, то переходим к п. 6, в противном случае, когда $\ell_2(\varphi_1^r) - \sigma(t_0 + \tau^1) \geq \varepsilon$, переходим к п. 4.1.
6. Вычисляем разность $\rho_1 = \tau_1(\varphi_1^r) - \tau^1$.
 - 6.1. Если $\rho_1 < \varepsilon$, то заключаем, что $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ является моментом первого переключения с точностью до ε и переходим к п. 7.
 - 6.2. Если $\varepsilon \leq \rho_1 < h$, то возвращаемся к п. 4.1.
 - 6.3. Если $\rho_1 \geq h$, то приходим к выводу, что условие переключения (22) не выполняется, значение $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ не является моментом первого переключения; задаём следующее значение индекса $r_1 = r + 1$ и переопределяем его по формуле $r = r_1$. Если $r \leq m$, то вычисляем φ_1^r по формуле (24) и возвращаемся к п. 2. Если $r > m$, то переходим к п. 11.
7. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $\ell_1 - \sigma(t)$ для $t \in [t_0 + \tau_1(\varphi_1^r), t_0 + kT + h]$ с шагом h и переходим к п. 8.
- 7.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.1h$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $\ell_1(\varphi_1^r) - \sigma(t)$ для $t \in (t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2, t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2 + h)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 9.
8. Находим значение $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2$ переменной t , которое удовлетворяет неравенствам $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2) < 0$ и $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2 + h) > 0$. Если выполняется неравенство $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2) > -\varepsilon$, то переходим к п. 9, иначе, когда $\ell_1 - \sigma(t_0 + \tau_1(\varphi_1^r) + \tau^2) \leq -\varepsilon$, переходим к п. 7.1.
9. Вычисляем разность $\rho_2 = kT - \tau_1(\varphi_1^r) - \tau^2$.
 - 9.1. Если $\rho_2 < \varepsilon$, то заключаем, что $t_0 + kT$ является моментом второго переключения с точностью до ε и переходим к п. 10.
 - 9.2. Если $\varepsilon \leq \rho_2 < h$, то возвращаемся к п. 7.1.
 - 9.3. Если $\rho_2 \geq h$, то приходим к выводу, что условие переключения (23) не выполняется, значение $t_0 + kT$ не является моментом переключения, а kT — периодом решения; задаём следующее значение индекса $r_1 = r + 1$ и переопределяем его по формуле $r = r_1$. Если $r \leq m$, то вычисляем φ_1^r по формуле (24) и возвращаемся к п. 2. Если $r > m$, то переходим к п. 11.
10. Завершаем алгоритм выводом: для значения φ_1^r параметра φ_1 и верхнего порогового значения $\ell_2(\varphi_1^r)$ условия переключения выполняются, причём значения $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ и $t_0 + kT$ являются моментами переключения, а kT — периодом решения с точностью до ε .
11. Завершаем алгоритм выводом: условия переключения не выполняются, $t_0 + \tau_1(\varphi_1^r)$ и $t_0 + kT$ не являются моментами переключения с заданной точностью для $r = \overline{0, m}$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 0.1x_1 + u(\sigma) - 2f(t), \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u(\sigma) + f(t), \quad \dot{x}_3 = -2x_3 + u(\sigma) + 0.5f(t), \quad \sigma = -0.14x_1. \quad (25)$$

Здесь $u = -1.11$ и $\sigma < \ell_2$ или $u = 5.3$ и $\sigma > 0.75$, $f(t) = 1 + 2 \sin(t + \varphi_1) + 5 \sin(2t)$ с периодом $T = 2\pi$. Найдём значения параметров φ_1 и ℓ_2 , при которых существует решение (25) с начальным моментом времени t_0 и периодом возврата, равным или кратным периоду функции $f(t)$, т.е. $T_r = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Сначала найдём допустимые значения параметра φ_1 , удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы (условиям замкнутости траектории) согласно порядку действий, предложенных в п. 3. Расчёты выполнены в формате двойной точности (16 цифр), а результаты представлены с тремя десятичными знаками.

1. Пусть $t_0 = 0$. По формуле (18) строим функцию $L(\varphi_1) = 0.398 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 3.034$.
2. Находим $L_{\inf} = 2.636 > -1.11$ и $L_{\sup} = 3.432 < 5.3$. Неравенства (10) выполняются для любого $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.
3. Пусть $k = 1$. По формуле (19) строим функцию

$$\tau_1(\varphi_1) = 24.861 - 10 \ln(0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034)$$

и её график (рис. 2, а). Множеством значений $E(\tau_1)$, отвечающих множеству допустимых значений параметра φ_1 , является отрезок $[1.462, 2.153] \in (0, 2\pi)$.

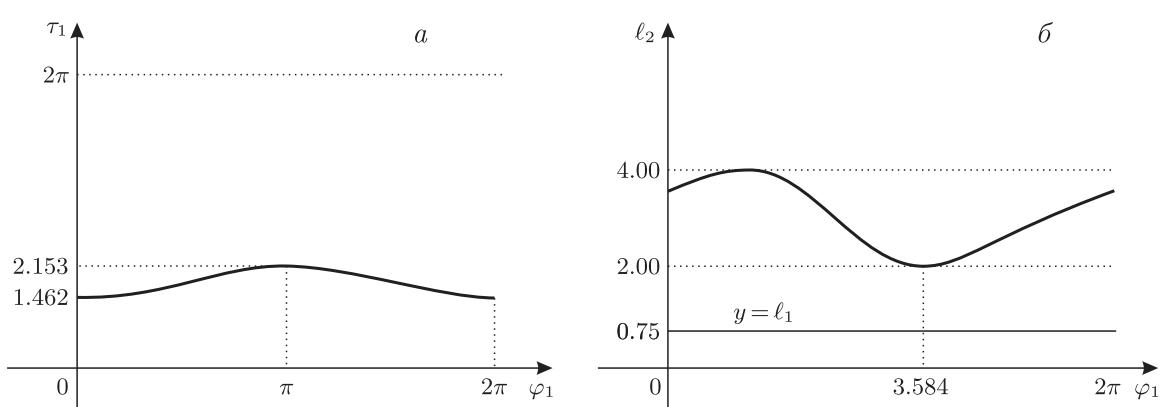


Рис. 2. Графики функций $\tau_1(\varphi_1)$ (а) и $\ell_2(\varphi_1)$ (б)

4. По формуле (20) строим функцию (рис. 2, б)

$$\begin{aligned} \ell_2(\varphi_1) = & \frac{6.695 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 69.715}{0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034} - 4.354 + \\ & + 0.699 \sin(-51.244 + 20 \ln(0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034)) + \\ & + 0.557 \sin(-\varphi_1 - 26.332 + 10 \ln(0.348 \sin(\varphi_1 + 1.471) + 10.034)). \end{aligned}$$

Имеем $\ell_2(\varphi_1) \geq \ell_2^n = 0.460$, а значит, $\ell_2^n < 0.75 = \ell_1$. В этом случае находим наименьшее значение функции $\ell_2(\varphi_1)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ по формуле (21). Итак, $\ell_2(0) = \ell_2(2\pi) = 3.563$ и $\ell_2^{\min} = \ell_2(3.584) = 2.072$. Тогда $\ell_2^{\inf} = 2.072 > 0.75 = \ell_1$, а значит, имеет место неравенство (11) для

любого допустимого φ_1 . Множеством значений $E(\ell_2)$, отвечающих множеству допустимых значений параметра φ_1 , является отрезок $[2.072, 3.999]$.

5. Заключаем, что условия 1) и 2) теоремы выполняются для любого $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$.

Далее представим результаты численной реализации предложенного в п. 4 статьи алгоритма по нахождению параметров системы и решения.

Рассмотрим **пример 1** с выполнением условий переключения (22), (23).

1. Задаём $r = 0$ (т.е. $\varphi_1^r = \varphi_1^0 = 0$) и $m = 6$.

2. По формулам (19) и (20) находим $\tau_1(0) = 1.462$ и $\ell_2(0) = 3.563$ соответственно.

3. Задаём $\varepsilon = 10^{-3}$ и $h = 0.1$.

4. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.563 - \sigma(t)$ для $t \in [0, 1.562]$ с шагом h и переходим к п. 5.

4.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.01$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.563 - \sigma(t)$ для $t \in (1.4, 1.5)$ с шагом $h_1 = 0.01$; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 5.1.

4.2. Задаём новый шаг $h_1 = 0.001$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.563 - \sigma(t)$ для $t \in (1.46, 1.47)$ с шагом $h_1 = 0.001$; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 5.2.

5. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.4$ удовлетворяет неравенствам $3.563 - \sigma(1.4) = 0.107 > 0$, $3.563 - \sigma(1.5) = -0.060 < 0$, и поскольку $3.563 - \sigma(1.4) = 0.107 > 10^{-3}$, то возвращаемся к п. 4.1.

5.1. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.46$ удовлетворяет неравенствам $3.563 - \sigma(1.46) = 0.004 > 0$, $3.563 - \sigma(1.47) = -0.012 < 0$, и так как $3.563 - \sigma(1.46) = 0.004 > 10^{-3}$, то возвращаемся к п. 4.2.

5.2. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.462$ удовлетворяет неравенствам $3.563 - \sigma(1.462) = 0.000 > 0$, $3.563 - \sigma(1.463) = -0.000 < 0$, и поскольку $3.563 - \sigma(1.462) = 0.000 < 10^{-3}$, то переходим к п. 6.

6. Находим $\rho_1 = \tau_1(0) - \tau^1 = 1.462 - 1.462 = 0.000$.

6.1. Имеем $\rho_1 < 10^{-3}$, а значит, $t_0 + \tau_1(0) = 1.462$ является моментом первого переключения с точностью до 10^{-3} ; переходим к п. 7.

7. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in [1.462, 2\pi + h]$ с шагом h ; переходим к п. 8.

7.1. Задаём новый шаг $h_1 = 0.01$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in (6.262, 6.362)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 8.1.

7.2. Задаём новый шаг $h_1 = 0.001$, рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in (6.282, 6.292)$ с шагом h_1 ; далее переопределяем шаг по формуле $h = h_1$ и переходим к п. 8.2.

8. Значение $t_0 + \tau_1(0) + \tau^2 = 6.262$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.262) = -0.008 < 0$, $0.750 - \sigma(6.362) = 0.020 > 0$, а поскольку $-0.008 < -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 7.1.

8.1. Значение $t_0 + \tau_1(0) + \tau^2 = 6.282$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.282) = -0.000 < 0$, $0.750 - \sigma(6.292) = 0.000 > 0$, и так как $-0.000 > -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 9.

8.2. Значение $t_0 + \tau_1(0) + \tau^2 = 6.283$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.283) = -0.000 < 0$, $0.750 - \sigma(6.284) = 0.000 > 0$, и поскольку $-0.000 > -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 9.1.

9. Имеем разность $\rho_2 = 2\pi - 6.282 = 0.001$, поскольку $\varepsilon \leq \rho_2 < h$, то возвращаемся к п. 7.2.

9.1. Имеем $\rho_2 = 2\pi - 6.283 = 0.000 < 10^{-3}$, а значит, $t_0 + 2\pi = 6.283$ является моментом второго переключения с точностью до 10^{-3} и переходим к п. 10.

10. Вывод: условия переключения выполняются; $t_0 + \tau_1 = t_0 + \tau^1 = 1.462$ и $t_0 + 2\pi = 6.283$ являются моментами переключения с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$ для $\varphi_1^0 = 0$ и $\ell_2 = 3.563$.

Рассмотрим теперь **пример 2** с нарушением условия переключения (23).

1. Задаём $r = 1$, т.е. $\varphi_1^r = \varphi_1^1 = \pi/3$.

2. Значения $\tau_1(\pi/3) = 1.601$ и $\ell_2(\pi/3) = 3.998$ находим по формулам (19) и (20) соответственно.

3. Задаём $\varepsilon = 10^{-3}$ и $h = 0.001$.

4. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $3.998 - \sigma(t)$ для $t \in [0, 1.602]$ с шагом h и переходим к п. 5.

5. Значение $t_0 + \tau^1 = 1.601$ удовлетворяет неравенствам $3.998 - \sigma(1.601) = 0.000 > 0$, $3.998 - \sigma(1.602) = -0.000 < 0$, и поскольку $0.000 < 10^{-3}$, то переходим к п. 6.

6. Находим разность $\rho_1 = \tau_1(\pi/3) - \tau^1 = 1.601 - 1.601 = 0.000$.

6.1. Имеем $\rho_1 < 10^{-3}$, а значит $t_0 + \tau_1(\pi/3) = 1.601$ является моментом первого переключения с точностью до 10^{-3} и переходим к п. 7.

7. Рассчитываем значения функции $\sigma(t)$ по формуле (6) и разность $0.750 - \sigma(t)$ для $t \in [1.601, 2\pi + h]$ с шагом h и переходим к п. 8.

8. Значение $t_0 + \tau_1(\pi/3) + \tau^2 = 6.219$ удовлетворяет неравенствам $0.750 - \sigma(6.219) = -0.000 < 0$, $0.750 - \sigma(6.220) = 0.000 > 0$, и так как $-0.000 > -10^{-3} = -\varepsilon$, то переходим к п. 9.

9. Разность $\rho_2 = 2\pi - 6.219 = 0.064 > 10^{-3}$ удовлетворяет неравенству $\rho_2 \geq h$, а значит условие переключения (23) не выполняется; значение $t_0 + 2\pi = 6.283$ не является моментом второго переключения с точностью до 10^{-3} ; задаём следующее значение индекса $r_1 = r + 1 = 2$ и переопределяем его по формуле $r = r_1$. Поскольку $r = 2 \leq 6$, то вычисляем φ_1^r по формуле (24) и возвращаемся к п. 2.

Результаты вычисления параметров системы и решения представлены в таблице. Координаты точек переключения рассчитаны по формулам (14) в случае, когда выполнены оба условия переключения. Таким образом, среди значений параметра φ_1 из отрезка $[0, 2\pi]$ с шагом, равным $\pi/3$, для $m = 6$ найдены два значения $\varphi_1^0 = \varphi_1^6 = 0$ и $\varphi_1^5 = 5\pi/3$, при которых выполняются все условия теоремы, а значит установлены значения параметров системы, при которых существуют 2π -периодические решения системы (25).

Таблица. Значения параметров системы и решения для $m = 6$, $\varepsilon = 10^{-3}$

Параметр	φ_1					
	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$4\pi/3$	$5\pi/3$
τ_1	1.462	1.601	1.945	2.153	2.006	1.660
ℓ_2	3.563	3.998	3.339	2.203	2.268	2.974
x_1^1	-5.357	—	—	—	—	-5.357
x_1^2	-25.451	—	—	—	—	-21.247
x_2^1	3.260	—	—	—	—	2.882
x_2^2	4.419	—	—	—	—	2.646
x_3^1	2.074	—	—	—	—	1.828
x_3^2	0.987	—	—	—	—	0.381

На рис. 3 представлена траектория 2π -периодического двухточечно-колебательного решения системы (25) для значения $\varphi_1 = 0$ с точками переключения $X^1 = (-5.357, 3.260, 2.074)^T$, $X^2 = (-25.451, 4.419, 0.987)^T$. Гиперплоскости переключения L_1 и L_2 задаются уравнениями $-0.14x_1 = 0.750$ и $-0.14x_1 = 3.563$ соответственно (ориентированы ортогонально оси x_1). Изображающая точка решения начинает своё движение в $X^1 \in L_1$ при $t_0 = 0$, за время $\tau_1 = 1.462$ попадает в $X^2 \in L_2$, затем за $\tau_2 = 4.821$ возвращается в начальную точку X^1 . Далее движение от L_1 до L_2 и обратно повторяется по этой траектории.

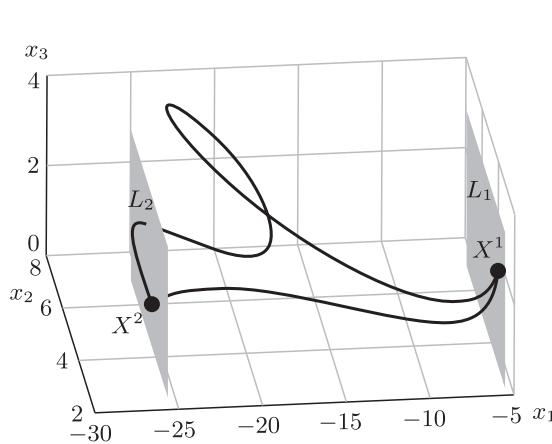


Рис. 3. Траектория 2π -периодического решения системы (25)

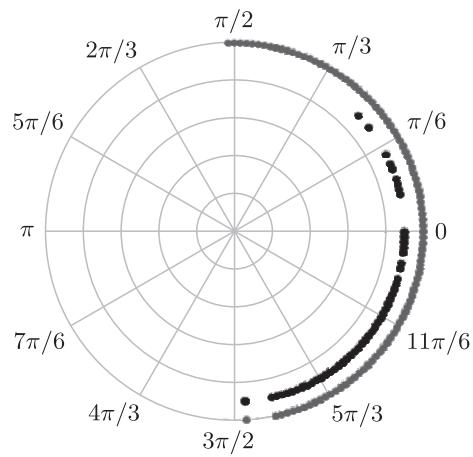


Рис. 4. Значения параметра φ_1

На рис. 4 приведены значения параметра φ_1 из отрезка $[0, 2\pi]$ с шагом, равным 0.01π , для $m = 200$ на окружности большего радиуса, когда выполняется условие переключения (22), на окружности меньшего радиуса, когда выполняется условие переключения (23).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00069).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А.Л. Медведский, П.А. Мелешенко, В.А. Нестеров [и др.] // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2020. — № 4. — С. 58–82.
2. Kamachkin, A.M. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay / A.M. Kamachkin, D.K. Potapov, V.V. Yevstafyeva // Int. J. Control. — 2020. — V. 93, № 4. — P. 763–770.
3. da Silva, C.E.L. Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations / C.E.L. da Silva, A. Jacquemard, M.A. Teixeira // J. Dyn. Control Syst. — 2020. — V. 26, № 1. — P. 17–44.
4. О существовании периодического режима в одной нелинейной системе / А.С. Фурсов, Р.П. Митрев, П.А. Крылов, Т.С. Тодоров // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 8. — С. 1104–1115.
5. Vasquez-Beltran, M.A. Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator / M.A. Vasquez-Beltran, B. Jayawardhana, R. Peletier // IEEE Control Syst. Lett. — 2021. — V. 5, № 3. — P. 1061–1066.
6. Fen, M.O. Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations / M.O. Fen, F. Fen // Turk. J. Math. — 2022. — V. 46, № 4. — P. 1369–1383.
7. Цыпкин, Я.З. Релейные автоматические системы / Я.З. Цыпкин. — М. : Наука, 1974. — 575 с.
8. Красносельский, М.А. Системы с гистерезисом / М.А. Красносельский, А.В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

9. Евстафьева, В.В. О существовании двухточечно-колебательных решений возмущённой релейной системы с гистерезисом / В.В. Евстафьева // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 169–178.
10. Євстаф'єва, В.В. Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці / В.В. Євстаф'єва // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73, № 5. — С. 640–650.
11. Евстафьева, В.В. Синтез управления возмущённой системой с неоднозначной нелинейностью / В.В. Евстафьева // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 44–64.
12. Евстафьева, В.В. Критерий существования двухточечно-колебательного решения возмущённой системы с реле / В.В. Евстафьева // Мат. заметки. — 2023. — Т. 114, № 2. — С. 260–273.
13. Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations / G.A. Leonov, M.M. Shumafov, V.A. Teshev, K.D. Aleksandrov // Differ. Equat. — 2017. — V. 53, № 13. — P. 1764–1816.
14. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления / В.М. Кунцевич, А.М. Лётов, Б.Н. Наумов [и др.]. — М. : Машиностроение, 1971. — 322 с.

STUDY OF PARAMETER SPACE OF MULTIDIMENSIONAL SYSTEM WITH RELAY HYSTERESIS AND PERTURBATION

© 2024 / V. V. Yevstafyeva¹, M. Yu. Guseva²

Saint Petersburg State University, Russia

e-mail: ¹*v.evstafieva@spbu.ru*, ²*st089778@student.spbu.ru*

The object of research is an n -dimensional system of ordinary differential equations that contains a constant diagonal matrix with real eigenvalues, two-position relay nonlinearity of hysteresis type with a parameter and a continuous periodic perturbation function with a parameter. In the case of a special type of feedback vector (one non-zero element), we obtain conditions for system parameters that ensure the existence of a unique two-point oscillatory periodic solution with a period multiple of the perturbation function period. We establish a functional dependence of the nonlinearity parameter on the perturbation function parameter. Influence of perturbation function parameter values on the existence of the solution is investigated. We offer an algorithm for seeking system parameters and the instant of the first relay switching in the case when the solution period is given. Theoretical results, including the proposed algorithm, are illustrated by the example of a three-dimensional system.

Keywords: system of ordinary differential equations, relay nonlinearity with hysteresis, periodic perturbation function, two-point oscillatory periodic solution, switching points and instants, system parameter space

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00069).

REFERENCES

1. Medvedskii, A.L., Meleshenko, P.A., Nesterov, V.A. [et al.], Unstable oscillating systems with hysteresis: problems of stabilization and control, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 533–556.
2. Kamachkin, A.M., Potapov, D.K., and Yevstafyeva, V.V., Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay, *Int. J. Control.*, 2020, vol. 93, no. 4, pp. 763–770.
3. da Silva, C.E.L., Jacquemard, A., and Teixeira, M.A., Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations, *J. Dyn. Control Syst.*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 17–44.
4. Fursov, A.S., Mitrev, R.P., Krylov, P.A., and Todorov, T.S., On the existence of a periodic mode in a nonlinear system, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 8, pp. 1076–1087.

5. Vasquez-Beltran, M.A., Jayawardhana, B., and Peletier, R., Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator, *IEEE Control Syst. Lett.*, 2021, vol. 5, no. 3, pp. 1061–1066.
6. Fen, M.O. and Fen, F., Quasilinear systems with unpredictable relay perturbations, *Turk. J. Math.*, 2022, vol. 46, no. 4, pp. 1369–1383.
7. Tsyplkin, Ya.Z., *Releinyye avtomaticheskie sistemy* (Relay Automatic Systems), Moscow: Nauka, 1974.
8. Krasnosel'skii, M.A. and Pokrovskii, A.V., *Sistemy s gisterezisom* (Systems with Hysteresis), Moscow: Nauka, 1983.
9. Yevstafyeva, V.V., On the existence of two-point oscillatory solutions of a perturbed relay system with hysteresis, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 155–164.
10. Yevstafyeva, V.V., Existence of two-point oscillatory solutions of a relay nonautonomous system with multiple eigenvalue of a real symmetric matrix, *Ukr. Math. J.*, 2021, vol. 73, no. 5, pp. 746–757.
11. Yevstafyeva, V.V., Control design for a perturbed system with an ambiguous nonlinearity, *Autom. Remote Control*, 2023, vol. 84, no. 3, pp. 226–239.
12. Yevstafyeva, V.V., Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay, *Math. Notes*, 2023, vol. 114, no. 2, pp. 212–222.
13. Leonov, G.A., Shumakov, M.M., Teshev, V.A., and Aleksandrov, K.D., Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 13, pp. 1764–1816.
14. Kuntsevich, V.M., Letov, A.M., Naumov, B.N. [et al.], *Tochnye metody issledovaniya nelineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Exact Analysis Methods for Nonlinear Automatic Control Systems), Moscow: Mashinostroenie, 1971.