ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 12, с. 1587–1600

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ НОРМАЛИЗАЦИИ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ БОГДАНОВА–ТАКЕНСА

 В. В. Басов

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: vlvlbasov@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.04.2024 г., после доработки 16.06.2024 г.; принята к публикации 03.10.2024 г.

Рассмотрена двумерная автономная система с квазиоднородным многочленом первой степени с весом $(1,2)$ в невозмущённой части. Проведена классификация невозмущённой части, согласно которой множество таких многочленов конструктивным образом разбито на восемь классов эквивалентности относительно квазиоднородных замен нулевой степени и в каждом классе выделена образующая, называемая канонической формой. Получены все структуры обобщённых нормальных форм для остававшейся неисследованной системы с одной из канонических форм в невозмущённой части. Методом резонансных уравнений и наборов осуществлена нормализация в системе с невозмущённой частью $(x_2, ax_1x_2+bx_1^3)$, что значительно усилило уже имеющиеся результаты исследований в одном из критических случаев классификации Богданова–Такенса.

Ключевые слова: обобщённая нормальная форма, квазиоднородный многочлен, резонансное уравнение

DOI: 10.31857/S0374064124120016, EDN: IPTQYI

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную вещественную автономную систему

$$\dot{x} = P_{(1,2)}^{[1]}(x) + X(x) \quad (x = \mathrm{colon}(x_1, x_2)), \tag{1}$$

невозмущённую часть которой образует квазиоднородный многочлен (КОМ) $P_{(1,2)}^{[1]}$ первой степени, а возмущение $X = \mathrm{colon}(X_1, X_2)$ разложено в сумму КОМ степени n с весом $(1,2)$, т.е. $X = \sum_{n=2}^{\infty} X^{[n]}(x_1, x_2)$, где $X_i^{[n]} = \sum_{q_1+2q_2-i=n} X_i^{[q_1,2q_2]} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ $(i=1,2)$.

Основной целью этой и многих других работ является получение различных обобщённых нормальных форм (ОНФ), формально эквивалентных системе (1).

Нормализацию системы (1) удобно осуществлять в два этапа.

Этап 1. Сначала к нормальной форме приводится невозмущённая часть системы (1). Для этого множество невозмущённых систем

$$\dot{x} = P_{(1,2)}^{[1]}(x), \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a\,x_2 + b\,x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= c\,x_1x_2 + d\,x_1^3, \end{aligned} \tag{2}$$

правые части которых, как и они сами, отождествляются с матрицей

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

разбивается на классы эквивалентности относительно квазилинейных замен нулевой степени. В каждом классе, основываясь на должным образом введённых принципах, выделяются образующие — наиболее простые системы, называемые *нормальными формами* невозмущённой системы (2). Их правые части будем обозначать CF и называть *каноническими формами.*

В п. 2 приведены структурные и нормировочные принципы, на основании которых получены следующие невырожденные канонические формы (под невырожденностью понимается отсутствие в матрице M нулевых строк) системы (2):

$$CF_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad CF_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (\sigma = \pm 1);$$

$$CF_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad CF_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \big(u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]\big),$$

$$CF_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad u \in (0, \sqrt{2}); \quad CF_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Кроме того, в теореме 1 для каждой канонической формы CF из (3) в явном виде найдены условия на коэффициенты системы (2) и квазилинейные замены, приводящие при данных условиях правую часть (2) к выбранной CF, а также получаемые при этом значения параметров u и σ.

Этап 2. При помощи формальных почти тождественных замен (нормализующих) последовательно приводятся системы (1), имеющие одну из канонических форм (3) в невозмущённой части. К настоящему моменту исследованы системы (1), имеющие в качестве невозмущённых частей следующие канонически формы: CF_1^2 [1], CF_2^2 [2], CF_3^2 [2], CF_4^2 [3–5], CF_2^3 [6], частный случай CF_3^3 [7].

В продолжение этих исследований в п. 3 выделены все возможные структуры ОНФ для системы (1) с достаточно простой канонической формой CF_1^3 в невозмущённой части и приведены примеры ОНФ с выбранными типами структур.

Нормализация, как и в предшествующих случаях, осуществляется так называемым *методом резонансных уравнений и наборов* (см., например, [2, 3, 8]). В этих же работах даётся определение используемого здесь понятия ОНФ, которое фактически соответствует определению ОНФ первого порядка из статьи [7].

К сожалению, аналогичные результаты для систем с CF_3^3 в невозмущённой части пока отсутствуют из-за того, что в линейной алгебраической связующей системе возникает пятидиагональная матрица, у которой не удаётся оценить собственные числа.

Как было отмечено, в работе [7] осуществлена нормализация системы (1) вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1^3 + X_2(x_1, x_2) \quad (\alpha, \beta \neq 0), \tag{4}$$

невозмущённая часть которой относится к одному из неисследованных критических случаев классификации Богданова–Такенса (см. [9]). При серьёзном предположении о том, что число $\alpha^{-2}\beta$ не является алгебраическим (не позволяет обращаться в нуль собственным числам связующей системы), была получена одна из возможных структур ОНФ:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = \alpha y_1 y_2 + \beta y_1^3 + \sum_{n=4}^{\infty} a_n y_1^n. \tag{5}$$

В п. 4 предложен и реализован один из возможных способов нормализации системы в критическом случае Богданова–Такенса, а в замечании 4 исправлена ошибка, допущенная в [7] при описании членов младшего порядка возмущения полученной ОНФ (5).

Дело в том, что классификация Богданова–Такенса, относящаяся к системам (1), отличается от классификации, предложенной в настоящей работе. Простейшая нормализация для двумерных систем $\dot{x} = Ax + X(x)$ с вырожденной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, задающей линейную невозмущённую часть, была осуществлена Ф. Такенсом в [10]. В свою очередь, именно полученная им нормальная форма, имеющая вид $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = f(x) + yg(x)$, точнее вся её правая часть, была выбрана в статье [9] в качестве невозмущённой и использована для создания классификации, названной авторами классификацией Богданова-Такенса, поскольку её основы были заложены в работах Р.И. Богданова [11] и Ф. Такенса [10].

Недостаток такой классификации заключается в том, что нормализации не подвергается квазилинейная часть системы (4), а с её помощью происходит нормализация членов более высокого порядка.

Действительно, матрица $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, введённая для невозмущённой системы (2), является не канонической, а структурной формой из класса SF_4^3 (см. определения 1, 2 и (13) в п. 2), и поэтому допускает упрощения.

Оказывается, что в случае когда у системы (4)

$$\beta \geqslant -\alpha^2/8, \tag{6}$$

её квазилинейная часть квазиоднородной заменой нулевой степени сводится по теореме 1 к более простой форме CF_2^3. Системы с CF_2^3 в невозмущённой части исследованы в [6] и для них методом резонансных наборов и уравнений в явном виде выписаны все структуры ОНФ.

Таким образом, нормализация матрицы M позволяет существенно продвинуться в исследовании критических случаев классификации Богданова–Такенса и, в частности, не требовать трансцендентности числа $\alpha^{-2}\beta$.

Что касается случая, когда неравенство (6) не выполняется, то SF_4^3 может быть сведена только к CF_3^3, для неё сохраняется пока не решённая проблема с оценкой собственных чисел матрицы связующей системы.

Следует отметить, что полученные в п. 4 результаты не полностью решают проблему нормализации в критическом случае Богданова–Такенса, поскольку в полученных ОНФ в квазилинейной части вместо слагаемого βy_1^3 во втором уравнении появляется слагаемое uy_1^2 в первом уравнении, а его отсутствие может требоваться при решении конкретных задач, связанных с нормализацией системы. В конечном счёте всё упирается в одну из ключевых проблем, связанных с обобщёнными нормальными формами: какие слагаемые в правой части системы использовать в качестве невозмущённой части.

2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВЕСОМ (1,2)

Рассмотрим двумерную вещественную квазилинейную систему (2), правая часть которой является невырожденным квазиоднородным многочленом первой степени с весом $(1,2)$. Этот многочлен обозначается $P_{(1,2)}^{[1]}(x)$ и отождествляется, как и сама система, с матрицей M. Напомним, что невырожденность $P_{(1,2)}^{[1]}$ означает отсутствие в матрице M нулевых строк, т.е. наличие ограничения $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

Структура системы (2) сохраняется при выполнении произвольной вещественной обратимой квазиоднородной замены нулевой степени с весом $(1,2)$, которая имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_1 z_1, \\ x_2 &= \tau_2 z_2 + \delta z_1^2 \end{aligned} \quad \text{или} \quad L = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ \delta & \tau_2 \end{pmatrix} \quad (\tau_1, \tau_2 \neq 0). \tag{7}$$

Замену (7), отождествляемую с матрицей L, удобно записать в виде композиции двух замен: нормированной и нормирующей.

Структурирующая замена

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + \gamma y_1^2 \tag{8}$$

преобразует (2) в квазилинейную систему

$$\begin{aligned} \dot y_1 &= a\, y_2 + (b + a\gamma)\, y_1^2, \\ \dot y_2 &= (c - 2a\gamma)\, y_1 y_2 + (d + (c-2b)\gamma - 2a\gamma^2)\, y_1^3 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde a & \tilde b \\ \tilde c & \tilde d \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\tilde a = a,\ \tilde b = b + a\gamma,\ \tilde c = c - 2a\gamma,\ \tilde d = d + (c-2b)\gamma - 2a\gamma^2.$

В свою очередь, нормирующая замена

$$y_1 = \tau_1 z_1, \quad y_2 = \tau_2 z_2 \qquad (\tau_1, \tau_2 \neq 0) \tag{10}$$

преобразует систему (9) в квазилинейную систему

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= \tau_1^{-1}\tau_2 \tilde a\, z_2 + \tau_1 \tilde b\, z_1^2, \\ \dot z_2 &= \tau_1 \tilde c\, z_1 z_2 + \tau_1^3 \tau_2^{-1} \tilde d\, z_1^3 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} \hat a & \hat b \\ \hat c & \hat d \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Утверждение 1. *1. В замене (7), являющейся композицией замен (8) и (10),* $\delta = \tau_1^2\gamma$. *2. Условие* $a = 0$ *инвариантно относительно замены (7).*

Обозначим через D дискриминант выражения $a\gamma^2 - (c/2 - b)\gamma - d/2$, тогда

$$D = (c/2 - b)^2 + 2ad \quad \text{или} \quad D = (c/2 + b)^2 + 2 \det M. \tag{12}$$

Аналогичным образом введём дискриминанты $\widetilde D$ и $\widehat D$.

Утверждение 2. *Для дискриминантов систем (9) и (11), полученных из системы (2), справедливы следующие равенства:* $\widetilde D = D,\ \widehat D = \tau_1^2 \widetilde D$.

Следуя [12], введём формальное понятие структурной формы, упорядочим множество структурных форм, основываясь на должным образом выбранном структурном принципе, разобьём их на классы эквивалентности относительно замены (7) и выделим в каждом классе образующую — простейшую с учётом выбранного нормировочного принципа структурную форму, называемую канонической.

Определение 1. Вещественную матрицу M из (2) будем называть *структурной m-формой* ($m = 2, 3, 4$) и обозначать SF^m, если какие-либо m её элементов отличны от нуля, а остальные равны нулю.

Очевидно, что структурные m-формы отличаются одна от другой различным расположением ненулевых элементов и имеется всего девять структурных форм.

Вполне упорядочим множество структурных форм при помощи следующего структурного принципа: SF^m предшествует SF^k, если $m < k$, а среди форм с одинаковым m порядок предшествования таков: $a = 0,\ d = 0,\ c = 0.$

Для каждого m ($m = 2, 3, 4$) расставим структурные формы SF^m в соответствии с введённым порядком и присвоим каждой соответствующий ей номер i, вводя обозначение SF_i^m:

$$\begin{gathered} SF_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad SF_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad SF_3^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad SF_4^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; \\ SF_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad SF_2^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad SF_3^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad SF_4^3 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}; \quad SF_1^4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $a, b, c, d \neq 0$. Каждую SF_i^m из (13) нормируем при помощи замены (10) в соответствии с нормировочным принципом: из элементов, расположенных в порядке a, d, c, b, первый ненулевой нормируется к 1, а второй, если возможно, — к 1 или -1.

Нормированную SF_i^m будем обозначать NSF_i^m, а её оставшиеся ненормированными элементы, если такие имеются, будем называть *параметрами.*

Определение 2. Нормированную каноническую форму NSF_i^m будем называть *канонической формой* и обозначать CF_i^m, если выделено такое минимальное множество допустимых значений её параметров, называемое *каноническим* и обозначаемое cs_i^m, что CF_i^m ни при каких значениях параметров из cs_i^m не может быть сведена заменой (7) к какой-либо предшествующей структурной форме. Под минимальностью cs_i^m понимается максимальное ограничение значений его параметров по модулю или по знаку при помощи должным образом подобранной замены (7).

Разумеется, в CF_i^m параметры могут не иметь ограничений или, наоборот, могут оказаться константами. В этих случаях каноническое множество не указывается, оно тривиально.

Замечание 1. Предложенные структурный и нормировочный принципы введены таким образом, что позволяют максимально сократить технические трудности, связанные с нормализацией возмущённых систем, имеющих в невозмущённой части какую-либо из выделенных форм CF. А требование невырожденности CF или, что то же самое, отсутствия нулевой строки у матрицы M вызвано желанием полноценно нормализовать возмущённую систему, т.е. иметь возможность при помощи почти тождественных преобразований получать максимальное число нулевых коэффициентов в возмущении.

Докажем, что матрица M системы (2) сводится к одной из восьми форм CF в (3), и покажем, что матрица M в ряде случаев заменой (7) может быть сведена не только к каноническим, но и к вырожденным (с нулевой второй строкой) каноническим формам, обозначаемым $CF_{d,\iota}^{\mu}$.

Три вырожденные канонические формы системы (2) имеют вид

$$CF_{d,1}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_{d,2}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CF_{d,1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для случая когда в (12) дискриминант $D \geqslant 0$, введём константы

$$\gamma_1 = \frac{c/2 - b - \sqrt{D}}{2a}, \quad \gamma_2 = \frac{c/2 - b + \sqrt{D}}{2a}; \quad \eta_1 = \frac{c/2 + b - \sqrt{D}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{c/2 + b + \sqrt{D}}{2}. \tag{14}$$

Теорема 1. *С помощью замен (8) и (10) правая часть системы (2) сводится к одной из восьми попарно неэквивалентных друг другу относительно замен (7) канонических форм (3).*

Ниже для каждой CF из (3) приведены: a) условия на коэффициенты системы (2); b) замены (8) и (10), приводящие при данных условиях правую часть системы (2) к выбранной CF; c) получаемые при этом значения параметров и и σ:

CF_2^2: *a)* $a = 0,\ c = 0$; *b)* $\gamma = 0,\ \tau_1 = b^{-1},\ \tau_2 = b^{-3}d$;

CF_1^3: *a)* $a = 0,\ c = 2b,\ d \neq 0$; *b)* $\gamma = 0,\ \tau_1 = b^{-1},\ \tau_2 = b^{-3}d$;

CF_1^2: *a)* $a = 0,\ c \neq 0$ ($c \neq 2b$ *или* $c = 2b,\ d = 0$); *b)* $\gamma = (2b - c)^{-1}d,\ \tau_1 = c^{-1}$ *или* $\gamma = 0$, $\tau_1 = (2b)^{-1}$; $\tau_2 = 1$; *c)* $u = bc^{-1}$;

CF_4^2: *a)* $a \neq 0,\ c = -2b,\ ad + 2b^2 \neq 0$; *b)* $\gamma = -a^{-1}b,\ \tau_1 = |d + 2a^{-1}b^2|^{-1/2}\operatorname{sign} a,\ \tau_2 = a^{-1}\tau_1$; *c)* $\sigma = \operatorname{sign}(d + 2a^{-1}b^2)$;

CF_1^4: *a)* $a \neq 0,\ c = -2b,\ d = -2a^{-1}b^2$; *b)* $\gamma = 0,\ \tau_1 = b^{-1},\ \tau_2 = (ab)^{-1}$;

CF_3^2: *a)* $a \neq 0,\ c + 2b \neq 0,\ d = a^{-1}bc$ $(D > 0)$; *b)* $\gamma = \gamma_1$ *при* $c + 2b > 0$ *или* $\gamma = \gamma_2$ *при* $c + 2b < 0$, $\tau_1 = (c + 2b)^{-1},\ \tau_2 = a^{-1}\tau_1$;

CF_2^3: *a)* $a\neq 0,\ c+2b\neq 0,\ d\neq a^{-1}bc\ (D\geqslant 0)$; *b)* $\gamma=\gamma_\iota,\ \tau_1=(c-2a\gamma_\iota)^{-1},\ \tau_2=a^{-1}\tau_1$; *c)* $u= =(b+a\gamma_\iota)(c-2a\gamma_\iota)^{-1}$, *где* $\iota=1$ *при* $c+2b>0$, $\iota=2$ *при* $c+2b<0$;

CF_3^3: *a)* $a\neq 0,\ c+2b\neq 0\ (D<0)$; *b)* $\gamma=(2a)^{-1}c,\ \tau_1=(bc-ad)^{-1/2}\operatorname{sign}(c+2b),\ \tau_2=a^{-1}\tau_1$; *c)* $u=|c/2+b|(bc-ad)^{-1/2}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим случай $a=0$ $(b\neq 0)$, т.е. в (2) $M=\begin{pmatrix}0 & b\\ c & d\end{pmatrix}$. В результате замены (8) получаем систему (9) с $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0 & b\\ c & d+(c-2b)\gamma\end{pmatrix}$.

1.1. Пусть $c=0$ $(d\neq 0)$. Выбирая, например, $\gamma=0$, чтобы сохранить невырожденность, имеем $M=\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$ и после нормировки (10) с $\tau_1=b^{-1}$, $\tau_2=b^{-3}d$ получаем CF_2^2, а при $\gamma=(2b)^{-1}d$ и $\tau_1=b^{-1}$ $(\tau_2=1)$ получаем $CF_{d,1}^1$.

1.2. Если $c=2b$, то при любом γ, например при $\gamma=0$, матрица $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0 & b\\ 2b & d\end{pmatrix}$.

1.2.1. При $d=0$ нормировка (10) с $\tau_1=(2b)^{-1}$ $(\tau_2=1)$ даёт CF_1^2 с $u=1/2$.

1.2.2. При $d\neq 0$ нормировка (10) с $\tau_1=b^{-1}$, $\tau_2=b^{-3}d$ даёт CF_1^3.

1.3. Пусть $c\neq 0, 2b$. Тогда при $\gamma=(2b-c)^{-1}d$ матрица $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix}$ и её нормировка (10) с $\tau_1=c^{-1}$ $(\tau_2=1)$ даёт CF_1^2 с $u=bc^{-1}\neq\{0,1/2\}$.

2. Случай $a\neq 0$. Из системы (2) с помощью замены (8) получаем систему (9).

2.1. Пусть $c=-2b$. Это условие позволяет при желании аннулировать в (9) элементы $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$, так как в этом случае $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}a & b+a\gamma\\ -2(b+a\gamma) & d-4b\gamma-2a\gamma^2\end{pmatrix}$.

2.1.1. Пусть $\psi_1=d+2a^{-1}b^2\neq 0$. При $\gamma=-a^{-1}b$ имеем матрицу $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \psi_1\end{pmatrix}$ и её нормировка (10) с $\tau_1=|\psi_1|^{-1/2}\operatorname{sign}a$, $\tau_2=a^{-1}\tau_1$ даёт CF_4^2 с $\sigma=\operatorname{sign}\psi_1$.

2.1.2. Если $d=-2a^{-1}b^2$ $(\psi_1=0)$, то $\widetilde{M}=\begin{pmatrix}a & b+a\gamma\\ -2(b+a\gamma) & -2a^{-1}(b+a\gamma)^2\end{pmatrix}$.

Теперь при $\gamma=0$ имеем $M,\widetilde{M}=\begin{pmatrix}a & b\\ -2b & -2a^{-1}b^2\end{pmatrix}$ и нормировка (10) с $\tau_1=b^{-1}$, $\tau_2=(ab)^{-1}$ даёт CF_1^4, а при $\gamma=-a^{-1}b$ и $\tau_1=a$ $(\tau_2=1)$ получаем $CF_{d,2}^1$.

2.2. При $c+2b\neq 0$ в матрице $\widetilde{M}$ из (9) предпочтительнее всего согласно структурному принципу аннулировать элемент $\tilde{d}=-2(a\gamma^2-(c/2-b)\gamma-d/2)$. Это возможно сделать, если дискриминант D из (12) неотрицательный.

2.2.1. $D=(c/2+b)^2+2(ad-bc)\geqslant 0$. Тогда в (14) γ_1, γ_2 — нули элемента $\tilde{d}$ из $\widetilde{M}$, $\eta_1=b+a\gamma_1= =(c-2a\gamma_2)/2$, $\eta_2=b+a\gamma_2=(c-2a\gamma_1)/2$.

Пусть в замене (8) $\gamma=\gamma_i$, тогда в системе (9) $\widetilde{M}_i=\begin{pmatrix}a & b+a\gamma_i\\ c-2a\gamma_i & 0\end{pmatrix}$ $(i=1,2)$.

2.2.1.1. Условие $d=a^{-1}bc$ равносильно условию $D=(c/2+b)^2>0$ $(\gamma_1\neq\gamma_2)$.

i) Если $c+2b>0$, то выбираем $\gamma=\gamma_1$. Тогда в $\widetilde{M}_1$ согласно (14) элемент $\tilde{b}=b+a\gamma_1=\eta_1=0$, элемент $\tilde{c}=c-2a\gamma_1=2\eta_2=c+2b$, т.е. $\widetilde{M}_1=\begin{pmatrix}a & 0\\ c+2b & 0\end{pmatrix}$.

ii) Если $c+2b<0$, то выбираем $\gamma=\gamma_2$. Тогда в $\widetilde{M}_2$ согласно (14) элемент $\tilde{b}=b+a\gamma_2=\eta_2=0$, элемент $\tilde{c}=c-2a\gamma_2=2\eta_1=c+2b$, т.е. $\widetilde{M}_2=\begin{pmatrix}a & 0\\ c+2b & 0\end{pmatrix}$.

После нормировки (10) с $\tau_1=(c+2b)^{-1}$, $\tau_2=a^{-1}\tau_1$ $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ превращаются в CF_3^2.

Если в случае 1 взять $\gamma=\gamma_2$, а в случае 2 — $\gamma=\gamma_1$, то будет получена матрица $\begin{pmatrix} a & c+2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, которую та же нормировка сведёт к $CF^2_{d,1}$.

2.2.1.2. Условие $d\neq a^{-1}bc$ равносильно условиям $\eta_1,\eta_2\neq 0$.

i) При $c+2b>0$ выбираем $\gamma=\gamma_1$, тогда в $\widetilde{M}_1$ согласно (14) $\tilde d=0$, поскольку γ_1 — корень уравнения $2\gamma^2-\alpha\gamma-\beta=0$, далее, $\tilde b=\eta_1$, $\tilde c=2\eta_2$, причём $\eta_2>|\eta_1|$ при $D>0$ и $\eta_2=\eta_1$ при $D=0$. После нормировки (10) с $\tau_1=(2\eta_2)^{-1}$, $\tau_2=a^{-1}\tau_1$ в системе (11) $\widehat{M}=CF^3_2$ с $u=\eta_1(2\eta_2)^{-1}=(b+a\gamma_1)(c-2a\gamma_1)^{-1}$, причём $u\in(-1/2,0)\cup(0,1/2]$.

ii) При $c+2b<0$ выбираем $\gamma=\gamma_2$, тогда в $\widetilde{M}_2$ согласно (14) $\tilde b=\eta_2$, $\tilde c=2\eta_1$, причём $-\eta_1>|\eta_2|$ при $D>0$ и $\eta_1=\eta_2$ при $D=0$. После замены (10) с $\tau_1=(2\eta_1)^{-1}$, $\tau_2=a^{-1}\tau_1$ получаем CF^3_2 с $u=\eta_2(2\eta_1)^{-1}=(b+a\gamma_2)(c-2a\gamma_2)^{-1}$, при этом $u\in(-1/2,0)\cup(0,1/2]$.

2.2.2. Пусть $D=(c/2+b)^2+2(ad-bc)<0$ $(ad-bc<0)$. Тогда при $\gamma=(2a)^{-1}c$ в (9) матрица $\widetilde{M}=\begin{pmatrix} a & c/2+b \\ 0 & a^{-1}(ad-bc) \end{pmatrix}$ и её нормировка (10) с $\tau_1=(bc-ad)^{-1/2}\operatorname{sign}(c+2b)$, $\tau_2=a^{-1}\tau_1$ даёт CF^3_3 с $u=|c/2+b|(bc-ad)^{-1/2}$. При этом $0<u<\sqrt{2}$, так как равносильны неравенства $D<0$ и $\widehat{D}=u^2-2<0$. Теорема доказана.

Замечание 2. В случае 2.2.2 при $\gamma=-a^{-1}b$ в (9) $\widetilde{M}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c+2b & a^{-1}(ad-bc) \end{pmatrix}$ и та же нормировка приводит эту матрицу к NSF^3_4 вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & -1 \end{pmatrix}$ с $\theta=|c+2b|(bc-ad)^{-1/2}$ $(0<\theta<\sqrt{8})$. Очевидно, что такая NSF^3_4 для любого $\theta\in(0,\sqrt{8})$ заменой (8) с $\gamma=\theta/2$ сводится к предшествующей ей CF^3_3, у которой $u=\theta/2$.

Замечание 3. В случаях 1.1, 2.1.2 и 2.2.1.1 установлено, что вместо CF^2_2, CF^4_1 и CF^2_3 можно получить соответственно $CF^1_{d,1}$, $CF^1_{d,2}$ и $CF^2_{d,1}$. Нормализацию возмущённых систем с CF_d в невозмущённой части имеет смысл проводить в тех случаях, когда эквивалентная CF достаточно сложна, как, например, CF^4_1. Тогда для получения полноценной нормализации из правой части второго уравнения возмущённой системы в нулевую невозмущённую часть выделяют некоторые члены возмущения, позволяющие ввести новый вес и определить степень созданного невырожденного квазиоднородного многочлена.

3. ОБОБЩЁННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ С CF^3_1 В НЕВОЗМУЩЁННОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим систему (1), невозмущённая часть которой представлена канонической формой CF^3_1:

$$\dot x_1=x_1^2+X_1(x_1,x_2),\quad \dot x_2=2x_1x_2+x_1^3+X_2(x_1,x_2), \tag{15}$$

в которой $X_i=\sum_{n=2}^{\infty}X_i^{[n]}(x_1,x_2)$ $(i=1,2)$, а $X_i^{[n]}=\sum_{q_1+2q_2-i=n}X_i^{[q_1,2q_2]}x_1^{q_1}x_2^{q_2}$.

Пусть вещественная почти тождественная замена

$$x_i=y_i+h_i(y_1,y_2)\quad (i=1,2) \tag{16}$$

преобразует систему (15) в формально эквивалентную ей систему

$$\dot y_1=y_1^2+Y_1(y_1,y_2),\quad \dot y_2=2y_1y_2+y_1^3+Y_2(y_1,y_2), \tag{17}$$

здесь $h_i=\sum_{n=2}^{\infty}h_i^{[n-1]}(y_1,y_2)$, $h_i^{[n-1]}=\sum_{q_1+2q_2-i=n-1}h_i^{[q_1,2q_2]}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$ и Y_i аналогичны X_i.

Дифференцируя по t равенства (16) в силу систем (15) и (17), получаем тождества

$$(y_1+h_1)^2+X_1(y_1+h_1,y_2+h_2)=y_1^2+Y_1+\frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y_1^2+Y_1)+\frac{\partial h_1}{\partial y_2}(2y_1y_2+y_1^3+Y_2),$$

$$2(y_1+h_1)(y_2+h_2)+(y_1+h_1)^3+X_2(y_1+h_1,y_2+h_2)=$$

$$=2y_1y_2+y_1^3+Y_2+\frac{\partial h_2}{\partial y_1}(y_1^2+Y_1)+\frac{\partial h_2}{\partial y_2}(2y_1y_2+y_1^3+Y_2).$$

Для любого $n\geqslant 2$ компоненты КОМ степени n из этих тождеств запишем в виде

$$y_1^2\frac{\partial h_1^{[n-1]}}{\partial y_1}+(2y_1y_2+y_1^3)\frac{\partial h_1^{[n-1]}}{\partial y_2}-2y_1h_1^{[n-1]}=\widetilde{Y}_1^{[n]}-Y_1^{[n]},$$

$$y_1^2\frac{\partial h_2^{[n-1]}}{\partial y_1}+(2y_1y_2+y_1^3)\frac{\partial h_2^{[n-1]}}{\partial y_2}-(3y_1^2+2y_2)h_1^{[n-1]}-2y_1h_2^{[n-1]}=\widetilde{Y}_2^{[n]}-Y_2^{[n]}, \qquad (18)$$

где $\widetilde{Y}_1^{[n]}=\big\{X_1(y_1+h_1,y_2+h_2)+h_1^2-Y_1\partial h_1/\partial y_1-Y_2\partial h_1/\partial y_2\big\}^{[n]}$, $\widetilde{Y}_2^{[n]}=\big\{X_2(y_1+h_1,y_2+h_2)+$ $+h_1h_2+3y_1h_1^2+h_1^3-Y_1\partial h_2/\partial y_1-Y_2\partial h_2/\partial y_2\big\}^{[n]}$, причём квазиоднородный многочлен $\widetilde{Y}^{[n]}=$ $=(\widetilde{Y}_1^{[n]},\widetilde{Y}_2^{[n]})$ уже известен, поскольку содержит только слагаемые из предшествующих КОМ $Y^{[s]}$ и $h^{[s-\varkappa]}$ $(\varkappa+1\leqslant s\leqslant n-1)$.

Приравнивая в выписанном КОМ коэффициенты при $y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, где по определению $q_1,q_2\in\mathbb{Z}_+$, $q_1+2q_2=n+i$, $n\geqslant 2$, а $i\in\{1,2\}$ — номер компоненты КОМ в (18), и приводя подобные члены, получаем линейную связующую систему

$$(q_2+1)h_1^{[q_1-3,2q_2+2]}+(q_1+2q_2-3)h_1^{[q_1-1,2q_2]}=\widetilde{Y}_1^{[q_1,2q_2]}-Y_1^{[q_1,2q_2]},$$

$$3h_1^{[q_1-2,2q_2]}-2h_1^{[q_1,2q_2-2]}+(q_2+1)h_2^{[q_1-3,2q_2+2]}+(q_1+2q_2-3)h_2^{[q_1-1,2q_2]}=\widetilde{Y}_2^{[q_1,2q_2]}-Y_2^{[q_1,2q_2]}.$$

Для чисел n, q_1, q_2 введём следующие разложения:

$$n=2r+\nu \quad (r\in\mathbb{N},\quad \nu=0,1),\quad q_1=2\tau+\nu+i,\quad q_2=r-\tau\quad (i=1,2).$$

Тогда связующая система примет вид

$$(r-\tau+1)h_1^{[2(\tau-1)+\nu,2(r-\tau+1)]}+(2r-2+\nu)h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]}=\widehat{Y}_1^{[2\tau+1+\nu,2(r-\tau)]}\quad(-\nu\leqslant\tau\leqslant r),$$

$$(r-\tau+1)h_2^{[2(\tau-1)+1+\nu,2(r-\tau+1)]}+(2r-1+\nu)h_2^{[2\tau+1+\nu,2(r-\tau)]}-3h_1^{[2\tau+\nu,2(r-\tau)]}-2h_1^{[2(\tau+1)+\nu,2(r-\tau-1)]}=$$

$$=\widehat{Y}_2^{[2(\tau+1)+\nu,2(r-\tau)]}\quad(-1\leqslant\tau\leqslant r), \qquad (19)$$

где $\widehat{Y}_i^{[2\tau+i+\nu,2(r-\tau)]}=\widetilde{Y}_i^{[2\tau+i+\nu,2(r-\tau)]}-Y_i^{[2\tau+i+\nu,2(r-\tau)]}$ $(i=1,2)$.

Здесь и в дальнейшем договоримся считать нулевым любой коэффициент, у которого один из верхних индексов окажется отрицательным.

При $\nu=0$, $r=1$ система (19) принимает вид

$$0\cdot h_1^{[0,2]}=\widehat{Y}_1^{[1,2]},\quad h_1^{[0,2]}+0\cdot h_1^{[2,0]}=\widehat{Y}_1^{[3,0]},\quad -2h_1^{[0,2]}=\widehat{Y}_2^{[0,4]},$$

$$h_2^{[1,2]}=\widehat{Y}_2^{[2,2]}+2h_1^{[2,0]}+3h_1^{[0,2]},\quad h_2^{[3,0]}=\widehat{Y}_2^{[4,0]}+3h_1^{[2,0]}-h_2^{[1,2]}.$$

Она однозначно разрешима при выполнении следующих двух резонансных связей:

$$\widehat{Y}_1^{[1,2]}=0, \quad 2\widehat{Y}_1^{[3,0]}+\widehat{Y}_2^{[0,4]}=0 \quad (h_1^{[2,0]} \text{ — любое}). \tag{20}$$

Пусть $\nu=0$, $r\geqslant 2$. Выделим из системы (19_2) первое уравнение ($i=2$, $\tau=-1$):

$$-2h_1^{[0,2r]}=\widehat{Y}_2^{[0,2r+2]}. \tag{21}$$

Оставшиеся после этого уравнения системы (19_i), у которых $\tau=\overline{1,r}$, являются линейными неоднородными с двухдиагональными $(r+1)\times(r+1)$-матрицами линейной части, на главных диагоналях которых расположены элементы $2r-3+i>0$ ($i=1,2$), а поддиагональ образует вектор $(r,r-1,\ldots,1)$. Поэтому при $r\geqslant 2$ обе системы однозначно разрешимы.

В системе (19_1) уравнение с $\tau=0$ имеет вид $2(r-1)h_1^{[0,2r]}=\widehat{Y}_1^{[1,2r]}$ и вместе с уравнением (21) задаёт единственную резонансную связь

$$\widehat{Y}_1^{[1,2r]}+(r-1)\widehat{Y}_2^{[0,2r+2]}=0 \qquad (r\geqslant 2), \tag{22}$$

совпадающую при $r=1$ со связью (20_1).

Пусть $\nu=1$, $r\geqslant 1$. Выделим из системы (19_1) первое уравнение ($i=1$, $\tau=-1$)

$$\widehat{Y}_1^{[0,2(r+1)]}=0, \tag{23}$$

а остальные уравнения системы (19) запишем в виде

$$(r-\tau+1)h_1^{[2(\tau-1)+1,2(r-\tau+1)]}+(2r-1)h_1^{[2\tau+1,2(r-\tau)]}=\widehat{Y}_1^{[2(\tau+1),2(r-\tau)]} \quad (0\leqslant\tau\leqslant r),$$
$$(r-\tau+1)h_2^{[2\tau,2(r-\tau+1)]}+2rh_2^{[2(\tau+1),2(r-\tau)]}=$$
$$=\widehat{Y}_2^{[2(\tau+1)+1,2(r-\tau)]}+3h_1^{[2\tau+1,2(r-\tau)]}+2h_1^{[2(\tau+1)+1,2(r-\tau-1)]} \quad (-1\leqslant\tau\leqslant r). \tag{24}$$

В результате (24_1) и (24_2) — это линейные неоднородные системы с двухдиагональными $(r+i)\times(r+i)$-матрицами линейной части, на главных диагоналях которых стоят элементы $2r-2+i>0$ ($i=1,2$), а поддиагональ образует вектор $(r-1+i,r-2+i,\ldots,1)$, поэтому при $r\geqslant 1$ они последовательно однозначно разрешимы.

Переходя к формулировке полученных результатов, запишем резонансные связи (20), (22) ($n=2r$) и (23) ($n=2r+1$) в виде следующих резонансных уравнений (используя введённые в (19) и (18) обозначения):

$$2Y_1^{[3,0]}+Y_2^{[0,4]}=\widetilde{c} \quad (r=1); \quad Y_1^{[1,2r]}+(r-1)Y_2^{[0,2r+2]}=\widetilde{c}, \quad Y_1^{[0,2r+2]}=\widetilde{c} \quad (r\geqslant 1), \tag{25}$$

при этом в замене (16) коэффициент $h_1^{[2,0]}$ не имеет ограничений.

Теорема 2. *Любая ОНФ, полученная из произвольной системы (15) почти тождественной заменой (16), имеет вид*

$$\dot{y}_1=y_1^2+Y_1^{[1,2]}y_1y_2+Y_1^{[0,4]}y_2^2+\sigma_1Y_1^{[3,0]}y_1^3+\sum_{j=2}^{\infty}(\sigma_jY_1^{[1,2j]}y_1y_2^j+Y_1^{[0,2j+2]}y_2^{j+1}),$$
$$\dot{y}_2=2y_1y_2+(1-\sigma_1)Y_2^{[0,4]}y_2^2+y_1^3+\sum_{j=2}^{\infty}(1-\sigma_j)Y_2^{[0,2j+2]}y_2^{j+1}, \tag{26}$$

причём её коэффициенты удовлетворяют уравнениям (25), а $\sigma_\iota\in\{0,1\}$ $(\iota\in\mathbb{N})$.

Пример. ОНФ (26) может иметь, например, такие две структуры:

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + Y_1^{[3,0]} y_1^3 + \sum_{j=1}^{\infty} (Y_1^{[1,2j]} y_1 y_2^j + Y_1^{[0,2j+2]} y_2^{j+1}), \quad \dot{y}_2 = 2y_1 y_2 + y_1^3;$$

$$\dot{y}_1 = y_1^2 + Y_1^{[1,2]} y_1 y_2 + \sum_{j=2}^{\infty} Y_1^{[0,2j]} y_2^j, \qquad \dot{y}_2 = 2y_1 y_2 + y_1^3 + \sum_{j=2}^{\infty} Y_2^{[0,2j]} y_2^j.$$

В ОНФ первой структуры во втором уравнении отсутствует возмущение (в (26) все $\sigma_\iota = 1$), а в ОНФ второй структуры возмущение не зависит от y_1, кроме слагаемого $Y_1^{[1,2]} y_1 y_2$ (в (26) все $\sigma_\iota = 0$).

4. ОБОБЩЁННАЯ НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ БОГДАНОВА–ТАКЕНСА

В работе [7] рассматривается система (4) $\dot{x}_1 = x_2 + X_1(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1^3 + X_2(x_1, x_2)$, невозмущённая часть которой относится к одному из неисследованных критических случаев классификации Богданова–Такенса. При условии, что число $\alpha^{-2}\beta$ не является алгебраическим для системы (4), была получена система (5) — одна из возможных ОНФ, называемая в [7] обобщённой нормальной формой первого порядка.

Нормализуем систему (4) при условии (6), означающем, что введённый в (12) дискриминант $D = (\alpha/2)^2 + 2\beta \geqslant 0$. Тогда согласно (14)

$$\gamma_{1,2} = \eta_{1,2} = (\alpha \mp (\alpha^2 + 8\beta)^{1/2})/4 \neq 0, \quad \text{или} \quad \beta = -2\gamma_1\gamma_2. \tag{27}$$

Как установлено в теореме 1, матрица M системы (4) при условии (6) сводится к CF_2^3. Найдём коэффициенты замены и значение параметра u, учитывая (27) и утверждение 1. При $\alpha > 0$ имеем $\gamma = \gamma_1$, $\tau_1 = \tau_2 = (\alpha - 2\gamma_1)^{-1} = (2\gamma_2)^{-1} = -\beta^{-1}\gamma_1$. Тогда в замене (7) $\delta = \tau_1^2\gamma_1 = \beta^{-2}\gamma_1^3 = \gamma_1(2\gamma_2)^{-2}$ и в CF_2^3 параметр $u = \gamma_1(2\gamma_2)^{-1} = -\beta^{-1}\gamma_1^2$. При $\alpha < 0$ нужно во всех полученных формулах поменять местами γ_1 и γ_2.

Теорема 3. *Система (4) при условии (6) заменой (7) вида*

$$x_1 = \rho_\iota z_1, \quad x_2 = \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2 \quad (\iota = 1 \quad \textit{при} \quad \alpha > 0 \quad \textit{и} \quad \iota = 2 \quad \textit{при} \quad \alpha < 0), \tag{28}$$

где $\rho_\iota = -\beta^{-1}\gamma_\iota$, $\delta_\iota = \beta^{-2}\gamma_\iota^3 = \rho_\iota^2\gamma_\iota$, *сводится к системе*

$$\dot{z}_1 = u z_1^2 + z_2 + Z_1(z_1, z_2), \quad \dot{z}_2 = z_1 z_2 + Z_2(z_1, z_2) \quad (u \in (-1/2, 0) \cup (0, 1/2]), \tag{29}$$

невозмущённая часть которой представляет собой CF_2^3 *с* $u = -\beta^{-1}\gamma_\iota^2$, *а в возмущении* $Z_1 = 2\gamma_{3-\iota} X_1(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2)$, $Z_2 = 2\gamma_{3-\iota} X_2(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) - 2\gamma_\iota \rho_\iota z_1 X_1(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2)$. *При этом* $|u| < 1/2$ *при* $D > 0$ *и* $u = 1/2$, $\gamma_{1,2} = \alpha/4$ *при* $D = 0$.

Доказательство. Подставим в производные по t равенств (28) $\dot{x}_1 = \rho_\iota \dot{z}_1$, $\dot{x}_2 = 2\delta_\iota z_1 \dot{z}_1 + \rho_\iota \dot{z}_2$ правые части систем (4) и (29):

$$\delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2 + X_1(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) = \rho_\iota(u z_1^2 + z_2) + \rho_\iota Z_1(z_1, z_2),$$

$$\alpha \rho_\iota z_1(\delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) + \beta \rho_\iota^3 z_1^3 + X_2(\rho_\iota z_1, \delta_\iota z_1^2 + \rho_\iota z_2) =$$

$$= 2\delta_\iota z_1(u z_1^2 + z_2) + 2\delta_\iota z_1 Z_1(z_1, z_2) + \rho_\iota z_1 z_2 + \rho_\iota Z_2(z_1, z_2).$$

Приравнивая коэффициенты при z_1^2 в первом тождестве и при z_1^3, $z_1 z_2$ во втором, получаем три равенства: $\delta_\iota = \rho_\iota u$, $\alpha\rho_\iota\delta_\iota + \beta\rho_\iota^3 = 2\delta_\iota u$, $\alpha\rho_\iota^2 = 2\delta_\iota + \rho_\iota$. Они верны в силу выбора в теореме констант ρ_ι, δ_ι и u с учётом того, что γ_ι является корнем уравнения $2\gamma^2 - \alpha\gamma - \beta = 0$. Возмущения также имеют указанный в теореме вид, поскольку при $\iota = 1$, например, $\rho_1^{-1} = -2\gamma_2$, а $\delta_1\rho_1^{-2} = \gamma_1$. Теорема доказана.

Утверждение 3. *В системе (29), полученной из системы (4) заменой (28), для любого* $n\geqslant 2$

$$Z_1^{[n]}=2\gamma_{3-\iota}X_1^{[n]}(\rho_\iota z_1,\delta_\iota z_1^2+\rho_\iota z_2),$$

$$Z_2^{[n]}=2\gamma_{3-\iota}X_2^{[n]}(\rho_\iota z_1,\delta_\iota z_1^2+\rho_\iota z_2)-2\gamma_\iota\rho_\iota z_1X_1^{[n]}(\rho_\iota z_1,\delta_\iota z_1^2+\rho_\iota z_2).$$

Выпишем для примера коэффициенты КОМ $Z^{[2]}$ системы (29) через коэффициенты КОМ $X^{[2]}$ системы (4) в случае, когда $\alpha>0$, т.е. $\iota=1$.

Выполнив замену $x_1=\rho_\iota z_1$, $x_2=\delta_\iota z_1^2+\rho_\iota z_2$ в $X_1^{[2]}=X_1^{[3,0]}x_1^3+X_1^{[1,2]}x_1x_2$, $X_2^{[2]}=X_2^{[4,0]}x_1^4+$ $+X_2^{[2,2]}x_1^2x_2+X_2^{[0,4]}x_2^2$ в (29) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях z_1, z_2 в тождествах для $Z_1^{[2]}$ и $Z_2^{[2]}$ системы (29), будем иметь

$$Z_1^{[3,0]}=2\gamma_2\big(\rho_1^3X_1^{[3,0]}+\rho_1\delta_1X_1^{[1,2]}\big),\quad Z_1^{[1,2]}=2\gamma_2\big(\rho_1^2X_1^{[1,2]}\big);$$

$$Z_2^{[4,0]}=2\gamma_2\big(\rho_1^4X_2^{[4,0]}+\rho_1^2\delta_1X_2^{[2,2]}+\delta_1^2X_2^{[0,4]}\big)-2\big(\rho_1^4X_1^{[3,0]}+\rho_1^2\delta_1X_1^{[1,2]}\big),$$

$$Z_2^{[2,2]}=2\gamma_2\big(\rho_1^2X_2^{[2,2]}+2\rho_1\delta_1X_2^{[0,4]}\big)-2\gamma_1\big(\rho_1^3X_1^{[1,2]}\big),\quad Z_2^{[0,4]}=2\gamma_2\big(\rho_1^2X_2^{[0,4]}\big).$$

В работе [6] для системы (29) методом резонансных уравнений и наборов в явном виде получены все возможные структуры ОНФ, что фактически позволяет получить их и для системы (4) при условии (6).

Рассмотрим формальную почти тождественную замену

$$z_i=y_i+h_i(y_1,y_2)\quad (i=1,2),\tag{30}$$

где $h_i=\sum_{n=2}^\infty h_i^{[n-1]}(y_1,y_2)$, а $h_i^{[n-1]}=\sum_{q_1+2q_2-i=n-1}h_i^{[q_1,2q_2]}y_1^{q_1}y_2^{q_2}$, преобразующую (29) в систему (17) с $Y_i=\sum_{n=2}^\infty Y_i^{[n]}(y_1,y_2)$.

В [6] ключевую роль играют семейство $\{\alpha,r\}_1^d$, отвечающее ему число τ_1^d и последовательность $\{s_n\}_{n=2}^\infty$, которые в текущих обозначениях можно записать в виде

$$u_{kl}=-k/(2k+2l),\quad r_{kl}^m=(2k+l)m+1\geqslant 4,\quad \tau_{kl}^m=(k+l)m+1;$$

$$s_n=\begin{bmatrix}1,\quad \text{если}\quad 1)\ u\neq 1/4,\ n=3,\quad 2)\ (u,n)\neq(u_{kl},2r_{kl}^m),\ n\geqslant 3,\\ 2,\quad \text{если}\quad 1)\ n=2,\quad 2)\ (u,n)=(1/4,3),\quad 3)\ (u,n)=\big(u_{kl},2r_{kl}^m\big),\end{bmatrix}\tag{31}$$

где $k,l,m\in\mathbb{N}$, k и l — взаимно простые, при этом $u_{kl}\in(-1/2,0)$.

Согласно теореме 1 из [6] система (29) формально эквивалентна системе (17), если для всякого $n\geqslant 2$ коэффициенты КОМ $Y^{[n]}$ удовлетворяют s_n резонансным уравнениям. Например, резонансные уравнения для младших степеней возмущения имеют вид

$$n=2:\quad (3u-1)Y_1^{[3,0]}+Y_2^{[4,0]}=\tilde c,\quad Y_1^{[1,2]}+6Y_1^{[3,0]}+(1-2u)Y_2^{[0,4]}+2Y_2^{[2,2]}=\tilde c;$$

$$n=3:\quad u^2Y_1^{[0,4]}-Y_1^{[4,0]}+u^2Y_2^{[1,4]}-uY_2^{[3,2]}+Y_2^{[5,0]}=\tilde c,\quad Y_2^{[5,0]}=\tilde c\quad\text{при}\quad u=1/4.\tag{32}$$

Но система (29) получена из системы (4) при помощи квазиоднородной замены нулевой степени (28). Поэтому, чтобы сформулировать теорему о формальной эквивалентности для системы (4), нужно установить связь параметров α и β с параметром u. Для этого положим

$$v=\beta/\alpha^2\quad (v\in[-1/8,0)\cup(0,+\infty)),\tag{33}$$

тогда $\gamma_{1,2}=\alpha(1\mp(1+8v)^{1/2})/4$, причём условие на v в (33) равносильно условию (6).

Параметры u из (29) и v из (33) связаны следующим образом:

$$u=u(v)=\frac{(1+8v)^{1/2}-4v-1}{8v} \quad \Leftrightarrow \quad v=v(u)=-\frac{u}{(2u+1)^2} \quad (u\in(-1/2,0)\cup(0,1/2]), \tag{34}$$

причём $v_{kl}=v(u_{kl})=k(k+l)l^{-2}/2$, где u_{kl} из (31).

Очевидно, что $u(0)=0$, $u(v)$ возрастает от $-1/2$ до $1/2$, $v(u)$ убывает от $+\infty$ до $-1/8$.

Используя композицию замен (28), (30) и теорему 1 [6], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Система (4) при условии (33), равносильном условию (6) для системы (29), формально эквивалентна системе (17), если для всякого $n\geqslant 2$ коэффициенты КОМ $Y^{[n]}$ удовлетворяют s_n резонансным уравнениям (см. [6]). При этом в замене (30) не имеют ограничений коэффициенты $h_1^{[0,2]}$ при любом $v\neq 0$, $h_1^{[3,0]}$ при $v=-1/9$ $(u=1/4)$ и $h_1^{[2(k+l)m+2,2km]}$ $(m\in\mathbb{N})$ при $v=v_{kl}$ из (34) $(u=u_{kl}$ из (31)).*

Разберём подробнее три наиболее интересных случая, когда в (31) $s_n=2$, а значит, для системы (29) возникает второе резонансное уравнение.

Пусть $v\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n=2$. Тогда система (4) всегда имеет два резонансных уравнения, получаемых подстановкой в оба уравнения (32_1) $u(v)=u(\beta/\alpha^2)$ из (34).

Если $v=-1/9$, $n=3$, то, наряду с первым резонансным уравнением, имеющимся при любых u и получаемым подстановкой в первое уравнение (32_2) $u(-1/9)=1/4$, система (4) при $\beta=-\alpha^2/9$ имеет второе резонансное уравнение $Y_2^{[5,0]}=\tilde{c}$.

Пусть $v=v_{kl}\,(>0)$ из (34), $n=2r_{kl}^m\,(\geqslant 6)$ из (31), а значит, в системе (29) $u=u_{kl}=-k/(2l)$. Тогда для любого $m\in\mathbb{N}$ два резонансных уравнения имеют вид

$$\sum_{j=0}^{r_{kl}^m+1}\big(\xi_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+\zeta_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\big)=\widetilde{c}, \quad \sum_{j=lm+2}^{r_{kl}^m+1}\big(\breve{\xi}_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+\breve{\zeta}_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\big)=\widetilde{c},$$

где $\xi_0^0=0$, $\zeta_{lm+2}^0=0$, а остальные $\xi_j^0,\zeta_j^0\neq 0$, и все $\breve{\xi}_j^0,\breve{\zeta}_j^0\neq 0$ (см. [6, лемма 5]).

Выпишем также при $v=v_{kl}$ единственные резонансные уравнения для $n\neq 2r_{kl}^m$ $(n\geqslant 3)$. При $n=2r$, где $r\geqslant 2$, $r\neq(k+l)m+1$, имеем (см. [6, лемма 4])

$$\zeta_0^0Y_2^{[0,2(r+1)]}+\sum_{j=1}^{r+1}\big(\xi_j^0Y_1^{[2j-1,2(r-j+1)]}+\zeta_j^0Y_2^{[2j,2(r-j+1)]}\big)=\widetilde{c}, \quad \xi_j^0,\zeta_j^0\neq 0.$$

При $n=2r+1$ резонансное уравнение в зависимости от r имеет один из двух видов:

– при $r=(k+l)m$ (см. [6, лемма 11])

$$Y_2^{[2lm+1,2(r-lm+1)]}+\sum_{j=lm+1}^{r+1}\big(\xi_j^1Y_1^{[2j,2(r-j+1)]}+\zeta_j^1Y_2^{[2j+1,2(r-j+1)]}\big)=\widetilde{c}, \quad \text{все} \quad \xi_j^1,\zeta_j^1\neq 0,$$

– при $r\neq(k+l)m$ (см. [6, лемма 9])

$$\sum_{j=0}^{r+1}\big(\xi_j^1Y_1^{[2j,2(r-j+1)]}+\zeta_j^1Y_2^{[2j+1,2(r-j+1)]}\big)=\widetilde{c}, \quad \xi_0^1,\xi_1^1,\zeta_0^1,\zeta_1^1,\zeta_2^1\neq 0,$$

остальные ξ_j^1, ζ_j^1 могут равняться нулю.

В следствии к теореме 1 из [6] для каждого $n\geqslant 2$ приведены все резонансные наборы, состоящие из s_n коэффициентов КОМ $Y^{[n]}(y_1,y_2)$, относительно которых можно разрешить резонансные уравнения.

Таким образом, если для любого $n\geqslant 2$ в КОМ $Y^{[n]}$ выбрать нулевыми все коэффициенты, не входящие в произвольным образом зафиксированный резонансный набор, то система (17) окажется ОНФ с заданной структурой, формально эквивалентной системе (29).

Но система (29) получена из исходной системы (4) при помощи квазиоднородной замены нулевой степени (28). Тем самым все структуры ОНФ для системы (4) также найдены. Поэтому для системы (4) верна теорема об ОНФ, аналогичная теореме 2 из [6].

Теорема 5. *Пусть система (4) при выполнении условия (5) композицией замен (28) и (30) сводится к системе (17) и для всякого $n\geqslant 2$ зафиксированы обобщённые порядки тех s_n членов КОМ $Y^{[n]}$ системы (17), коэффициенты которых входят в один из резонансных наборов (указанных в следствии 1 [6]), а также в замене (30) зафиксированы коэффициенты $h_1^{[0,2]}$ при любом $v\neq 0$, $h_1^{[3,0]}$ при $v=-1/9$ и $h_1^{[2(k+l)m+2,2km]}$ $(m\in\mathbb{N})$ при $v=v_{kl}$ из (34), где $v=\beta/\alpha^2$. Тогда существует и единственна нормализующая замена, преобразующая систему (4) к ОНФ (17) с выбранной структурой.*

Другими словами, последовательно для каждого $n\geqslant 2$ коэффициенты системы (17) из выбранного резонансного набора однозначно находятся из тех резонансных уравнений, в которые они входят, при условии, что остальные коэффициенты выбираются нулевыми.

Замечание 4. Вычисления показывают, что квазиоднородный многочлен второго порядка в ОНФ (5) должен содержать два отличных от нуля члена, а не один член $a_1y_1^4$, стоящий во второй компоненте (он как раз может отсутствовать). Точнее, для младшего порядка возмущения ОНФ (5) системы (4) все резонансные наборы задаются системой резонансных уравнений $2\alpha Y_1^{[3,0]}-3\beta Y_1^{[1,2]}-2Y_2^{[4,0]}-\beta Y_2^{[0,4]}=\widetilde{c}_1$, $6Y_1^{[3,0]}+\alpha Y_1^{[1,2]}+2Y_2^{[2,2]}+\alpha Y_2^{[0,4]}=\widetilde{c}_2$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басов, В.В. Обобщённая нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением. I / В.В. Басов, А.В. Скитович // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 8. — С. 1016–1029.
2. Басов, В.В. Обобщённая нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // В.В. Басов, А.А. Федотов / Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2007. — Т. 1, № 1. — С. 13–33.
3. Басов, В.В. Обобщённая нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами / В.В. Басов // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 154–170.
4. Басов, В.В. Обобщённые нормальные формы систем ОДУ с линейно-кубической невозмущенной частью / В.В. Басов, Л.С. Михлин // Дифференц. уравнения и процессы управления. — 2012. — № 2. — С. 129–153.
5. Басов, В.В. Обобщённые нормальные формы систем ОДУ с невозмущенной частью $(x_2,\pm x_1^{2n-1})$ / В.В. Басов, Л.С. Михлин // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2015. — Т. 2 (60), № 1. — С. 14–22.
6. Басов, В.В. Обобщённые нормальные формы систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородным многочленом $(\alpha x_1^2+x_2,x_1,x_2)$ в невозмущенной части / В.В. Басов, А.В. Зефиров // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2021. — Т. 8 (66), № 1. — С. 12–28.
7. Kokubu, H. Linear grading function and further redaction of normal forms / H. Kokubu, H. Oka, D. Wang // J. Differ. Equat. — 1996. — V. 132, № 2. — P. 293–318.
8. Басов, В.В. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I / В.В. Басов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2016. — Т. 3 (61), № 2. — С. 181–195.

9. Baider, A. Further reduction of the Takens–Bogdanov normal form / A. Baider, J. Sanders // J. Differ. Equat. — 1992. — V. 99. — P. 205–244.
10. Takens, F. Singularities of vector fields / F. Takens // IHES. — 1974. — V. 43, № 2. — P. 47–100.
11. Богданов, Р.И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел / Р.И. Богданов // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, № 2. — С. 37–65.
12. Басов, В.В. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II / В.В. Басов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. — 2016. — Т. 3 (61), № 3. — С. 355–371.

CLASSIFICATION OF THE QUASILINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ITS APPLICATION FOR NORMALIZATION OF SYSTEMS IN CRITICAL CASE OF BOGDANOV–TAKENS

 V. V. Basov

Saint Petersburg State University, Russia
e-mail: vlvlbasov@rambler.ru

Two-dimensional autonomous system with a quasihomogenous polynomial of a first degree and weight $(1,2)$ in an unperturbed part is considered. The classification of an unperturbed parts is provided. According to it, the set of polynomials is constructively divided into eight equivalence classes with respect to quasihomogenuos zero degree substitutions. In each class the respresentatives, called the canonical forms, are determined. All structures of the generalized normal forms for the so far unstudied system with one of the canonical forms in its unperturbed part are obtained. Normalization in the system with unperturbed part $(x_2, ax_1x_2+bx_1^3)$ is performed using method of the resonant equations and sets. This significantly improves the already obtained results of the research in one of the critical cases of Bogdanov–Takens classification.

Keywords: generalized normal form, quasihomogenous polynomial, resonant equation

REFERENCES

1. Basov, V.V. and Skitovich, A.V., A generalized normal form and formal equivalence of two-dimensional systems with quadratic zero approximation. I, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1067–1081.
2. Basov, V.V. and Fedotov, A.A., Generalized normal forms for two-demensional systems of ordinary differential equations with linear and quadratic unperturbed parts, *Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2007, vol. 40, no. 1, pp. 6–26.
3. Basov, V.V., Generalized normal forms and formal equivalence of systems of differential equations with zero eigenvalues, *Differ. Equat.*, 2003, vol. 39, no. 2, pp. 154–170.
4. Basov, V.V. and Mikhlin, L.S., Generalized normal forms of systems of ODE with linear-cubic unperturbed part, *Differ. Uravn. i Protsesy Upravlenia* (Differential Equations and Control Processes), 2012, no. 2, pp. 129–153.
5. Basov, V.V. and Mikhlin, L.S., Generalized normal forms of ODE systems with unperturbed part $(x_2, \pm x_1^{2n-1})$, *Vestn. S.-Peterb. un-ta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2015, vol. 2 (60), no. 1, pp. 14–22.
6. Basov, V.V. and Zefirov, A.V., Generalized normal forms of the systems of ordinary differential equations with a quasi-homogeneous polynomial $(ax_1^2+x_2, x_1x_2)$ in the unperturbed part, *Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2021, vol. 54, no. 1, pp. 8–21.
7. Kokubu, H., Oka, H., and Wang, D., Linear grading function and further reduction of normal forms, *J. Differ. Equat.*, 1996, vol. 132, no. 2, pp. 293–318.
8. Basov, V.V., Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms. I, *Vestnik St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2016. vol. 49, no. 2, pp. 99–110.
9. Baider, A. and Sanders, J., Further reduction of the Takens–Bogdanov normal form, *J. Differ. Equat.*, 1992, vol. 99, pp. 205–244.
10. Takens, F., Singularities of vector fields, *IHES*, 1974, vol. 43, no. 2, pp. 47–100.
11. Bogdanov, R.I., Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1975, vol. 9, no. 2, pp. 37–65.
12. Basov, V.V., Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms. II, *Vestn. St. Petersburg Univ., Mathematics*, 2016. vol. 49, no. 3, pp. 204–218.