

УДК 519.63

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© А. А. Самсонов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

e-mail: anton.samsonov.kpfu@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г., после доработки 14.06.2024 г.; принята к публикации 02.07.2024 г.

Исследована параметрическая задача на собственные значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве, возникающая в механике нагруженных тонкостенных конструкций. Установлены асимптотические свойства решений в зависимости от параметров нагружения. Исходная бесконечномерная задача аппроксимируется в конечномерном подпространстве. Получены теоретические оценки погрешности приближённых решений. Предложены эффективные численные методы вычисления основной резонансной частоты и соответствующей резонансной формы колебаний, основанные на асимптотических формулах.

Ключевые слова: собственное значение, собственный элемент, задача на собственные значения, гильбертово пространство, асимптотическая формула, конечномерная аппроксимация.

DOI: 10.31857/S0374064124080093, EDN: KCJMSST

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathbb{R}$ обозначает числовую прямую, $\Lambda = (0, +\infty)$, $\bar{\Lambda} = [0, +\infty)$, V — вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Определим симметричные билинейные формы $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

1) для любого элемента $v \in V$ и фиксированных положительных констант α_1 и α_2 справедливы соотношения положительной определённости и ограниченности

$$\alpha_1 \|v\|^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2 \|v\|^2;$$

2) для любого ненулевого элемента $v \in V$ выполняется неравенство положительности $b(v, v) > 0$;

3) для слабо сходящейся последовательности v_i в пространстве V при $i \rightarrow \infty$ к некоторому элементу $v \in V$ ($v_i \rightharpoonup v$) имеет место сходимость $b(v_i, v_i) \rightarrow b(v, v)$ при $i \rightarrow \infty$;

4) справедливо представление $c(u, v) = f(u)f(v)$ для любых элементов $u, v \in V$, где $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал, такой что $\text{codim } V_0 = 1$, $V_0 = \{v: v \in V, f(v) = 0\}$.

В работе изучается класс математических моделей нагруженных механических систем [1–3], которые формулируются в виде следующей параметрической задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве.

Задача 1. При фиксированных $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ найти $\lambda = \lambda(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $u = u(\xi, \mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u, v) + \xi c(u, v) = \lambda(b(u, v) + \mu c(u, v)), \quad v \in V.$$

Для данного класса математических моделей гильбертово пространство V определяется как прямое произведение пространств Соболева [4, 5]. Физические параметры задачи $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ задают параметры нагружения механической системы конструкция–груз–опора, μ — масса присоединённого груза, ξ — коэффициент упругости опоры присоединённого груза. Собственные значения задачи $\lambda = \lambda(\xi, \mu)$ определяют резонансные частоты колебаний, а собственные элементы задачи $u = u(\xi, \mu)$ — резонансные формы колебаний.

Чтобы исследовать асимптотические свойства решений на границе интервала Λ , введём следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. Найти число $\nu \in \mathbb{R}$ и элемент $w \in V_0 \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w, v) = \nu b(w, v), \quad v \in V_0.$$

Задача 3. При фиксированных значениях $\xi \in \bar{\Lambda}$ и $\mu \in \Lambda$ найти $\nu_0 = \nu_0(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $w_0 = w_0(\xi, \mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w_0, v) + \xi c(w_0, v) = \nu_0 \mu c(w_0, v), \quad v \in V.$$

Задача 4. Найти элемент $v_0 \in V$ такой, что

$$a(v_0, v) = f(v), \quad v \in V. \quad (1)$$

Существуют [6] конечнократные собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots$, задачи 1, занумерованные в порядке неубывания ($\lambda_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$), и соответствующие ортонормированные собственные элементы $u_k = u_k(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots$, такие, что $a(u_i, u_j) + \xi c(u_i, u_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(u_i, u_j) + \mu c(u_i, u_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 0, 1, \dots$.

Существуют [6] конечнократные собственные значения ν_k , $k = 1, 2, \dots$, задачи 2, занумерованные в порядке неубывания ($\nu_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$), и соответствующие ортонормированные собственные элементы w_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что $a(w_i, w_j) = \nu_i \delta_{ij}$, $b(w_i, w_j) = \delta_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots$.

Единственное простое собственное значение $\nu_0(\xi, \mu)$ и единственный нормированный собственный элемент $w_0(\xi, \mu)$, такой что $f(w_0(\xi, \mu)) = 1/\sqrt{\mu}$, задачи 3 определяются [5] формулами

$$\nu_0(\xi, \mu) = \frac{\xi}{\mu} + \frac{1}{\mu f(v_0)}, \quad w_0(\xi, \mu) = \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0)}, \quad (2)$$

где v_0 — единственное решение вариационного уравнения (1).

Для $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ введём следующие обозначения:

$$a(\xi, u, v) = a(u, v) + \xi c(u, v), \quad b(\mu, u, v) = b(u, v) + \mu c(u, v), \quad u, v \in V,$$

$$R(\xi, \mu, v) = \frac{a(\xi, v, v)}{b(\mu, v, v)}, \quad v \in V \setminus \{0\},$$

$$W^\perp(\mu) = \{v: v \in V, \quad b(\mu, v, w) = 0, \quad w \in W\},$$

где W — подпространство пространства V .

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для фиксированного $\xi \in \bar{\Lambda}$ справедлива сходимость $0 < \nu_0(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $w_0(\xi, \mu) - u_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$ в V при $\mu \rightarrow \infty$, если $f(u_0(\xi, \mu)) > 0$.

Доказательство. Применяя принцип минимума теоремы 2 из работы [6], получаем

$$\lambda_0(\xi, \mu) = R(\xi, \mu, u_0(\xi, \mu)) = \min_{v \in V \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \leq R(\xi, \mu, w_0(\xi, 1)) < \frac{1}{\mu} \nu_0(\xi, 1) = \nu_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow \infty$, $f(w_0(\xi, 1)) = 1$. Кроме того, выполняется неравенство $\mu\lambda_0(\xi, \mu) < \nu_0(\xi, 1)$, а также $\lambda_0(\xi, \mu) < \nu_0(\xi, \mu)$ и $\lambda_0(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Полагая $\tilde{u}_0(\xi, \mu) = \sqrt{\mu} u_0(\xi, \mu)$, будем иметь

$$\alpha_1 \|\tilde{u}_0(\xi, \mu)\|^2 \leq a(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) + \xi c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) = \mu\lambda_0(\xi, \mu) < \nu_0(\xi, 1).$$

Поэтому из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$ такую, что $\tilde{u}_0(\xi, \mu) \rightharpoonup \tilde{w}$ в V , $f(\tilde{u}_0(\xi, \mu)) \rightarrow f(\tilde{w})$, $\mu\lambda_0(\xi, \mu) \rightarrow \tilde{\nu}$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, где $\tilde{w} \in V$. С учётом условия нормировки $b(u_0(\xi, \mu), u_0(\xi, \mu)) + \mu c(u_0(\xi, \mu), u_0(\xi, \mu)) = 1$ получим $\mu^{-1}b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) + c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) = 1$. Переходя здесь к пределу при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, выводим $c(\tilde{w}, \tilde{w}) = 1$, следовательно, $f(\tilde{w}) = 1$.

Совершая для любого элемента $v \in V$ предельный переход в вариационном уравнении

$$a(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v) + \xi c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v) = \lambda_0(\xi, \mu)(b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v) + \mu c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), v))$$

при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, получаем равенство $a(\tilde{w}, v) + \xi c(\tilde{w}, v) = \tilde{\nu}c(\tilde{w}, v)$ для любого элемента $v \in V$, где $\tilde{w} \in V \setminus \{0\}$. Следовательно, $\tilde{\nu}$ и $\tilde{w}$ являются решениями задачи 3 при $\mu = 1$, $\tilde{\nu} = \nu_0(\xi, 1)$, $\tilde{w} = w_0(\xi, 1)$, $f(w_0(\xi, 1)) = 1$. Установлено также, что $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$.

Пусть для последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ существует положительная константа c такая, что $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \geq c$ при $\mu = \mu' \rightarrow \infty$. Тогда из последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ выделим, как и выше, подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$, которая приводит к противоречию $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. Теперь для произвольной последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ имеем $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu = \mu' \rightarrow \infty$, т.е. $\nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Обозначим $\varepsilon(\xi, \mu) = \nu_0(\xi, 1) - \lambda_0(\xi, \mu)\mu$, тогда $\varepsilon(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Так как $\varepsilon(\xi, \mu)\mu^{-1} = \nu_0(\xi, 1)\mu^{-1} - \lambda_0(\xi, \mu) = \nu_0(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu)$, выводим $0 < \nu_0(\xi, \mu) - \lambda_0(\xi, \mu) = \varepsilon(\xi, \mu)\mu^{-1} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Сходимость $\tilde{u}_0(\xi, \mu) \rightarrow \tilde{w}$ в V при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$ ($\tilde{w} = w_0(\xi, 1)$) вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|\tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}\|^2 &\leq a(\tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}, \tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}) + \xi c(\tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}, \tilde{u}_0(\xi, \mu) - \tilde{w}) = \\ &= \lambda_0(\xi, \mu)b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) + \lambda_0(\xi, \mu)\mu c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{u}_0(\xi, \mu)) - 2\lambda_0(\xi, \mu)b(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{w}) - \\ &\quad - 2\lambda_0(\xi, \mu)\mu c(\tilde{u}_0(\xi, \mu), \tilde{w}) + \nu_0(\xi, 1) \rightarrow \nu_0(\xi, 1) - 2\nu_0(\xi, 1) + \nu_0(\xi, 1) = 0 \end{aligned}$$

при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. В силу простоты $\nu_0(\xi, 1)$ имеем $\|\tilde{u}_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, 1)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Поэтому $\delta(\xi, \mu) = \|\tilde{u}_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, 1)\| = \sqrt{\mu} \|u_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|u_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| = \delta(\xi, \mu)\mu^{-0.5} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $f(u_0(\xi, \mu)) > 0$, $\mu \in \bar{\Lambda}$. Теорема доказана.

Отметим, что согласно теореме 1 основная собственная частота (основной тон) системы конструкция–груз–опора приближается с ростом массы груза μ к собственной частоте $\omega(\xi, \mu)$ системы опора–груз–опора $\omega(\xi, \mu) = \sqrt{\nu_0(\xi, \mu)} = \sqrt{(\xi + \varkappa)/\mu}$, $\varkappa = (f(v_0))^{-1}$, где $\varkappa$ и ξ — коэффициенты упругости опор [4].

Теорема 2. Для фиксированного $\xi \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \lambda_k(\xi, \mu) - \nu_k \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы w_k , $u_k(\xi, \mu)$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_k$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, $b(w_k, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Для простого ν_k выполняется сходимость $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_k$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu \rightarrow \infty$, $b(w_k, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $k = 1$. Для подпространства $E_k(\xi, \mu) = \text{span}\{u_0(\xi, \mu), u_1(\xi, \mu), \dots, u_{k-1}(\xi, \mu)\}$ имеем $(E_k(\xi, \mu))^\perp(\mu) = \text{span}\{u_k(\xi, \mu), u_{k+1}(\xi, \mu), \dots\}$. Из условия ортогональности $b(u_i(\xi, \mu), u_j(\xi, \mu)) + \mu c(u_i(\xi, \mu), u_j(\xi, \mu)) = \delta_{ij}$ для $i, j = 0, 1, \dots, k$ вытекает линейная

независимость системы элементов $u_0(\xi, \mu)$, $u_1(\xi, \mu)$, $\dots$, $u_k(\xi, \mu)$ из $E_{k+1}(\xi, \mu)$. Введём систему элементов $v_i(\xi, \mu) = u_i(\xi, \mu) - c_i u_0(\xi, \mu)$, $c_i = f(u_i(\xi, \mu))/f(u_0(\xi, \mu))$, $i = 1, 2, \dots, k$, принадлежащую $E_{k+1}(\xi, \mu)$. Так как $f(v_i(\xi, \mu)) = 0$, то элементы $v_i(\xi, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, k$, принадлежат V_0 . Покажем, что система элементов $v_i(\xi, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, k$, является линейно независимой системой из подпространства $E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0$. Действительно, из равенств $\alpha_1 v_1(\xi, \mu) + \dots + \alpha_k v_k(\xi, \mu) = \alpha_0 u_0(\xi, \mu) + \alpha_1 u_1(\xi, \mu) + \alpha_2 u_2(\xi, \mu) + \dots + \alpha_k u_k(\xi, \mu) = 0$, где $\alpha_0 = -\alpha_1 c_1 - \alpha_2 c_2 - \dots - \alpha_k c_k$, следует $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, k$. А это означает выполнение требуемого свойства линейной независимости.

Поскольку в подпространстве $E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0$ содержится линейно независимая система элементов $v_i(\xi, \mu)$, $i = 1, 2, \dots, k$, то размерность подпространства $E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0$ не меньше, чем k . Следовательно, при $\mu \in \Lambda$ согласно теоремам 2 и 3 из работы [6] выводим

$$\lambda_k(\xi, \mu) = \max_{v \in E_{k+1}(\xi, \mu) \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \geq \max_{v \in E_{k+1}(\xi, \mu) \cap V_0 \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \geq \nu_k,$$

$$\lambda_k(\xi, \mu) = \min_{v \in (E_k(\xi, \mu))^\perp(\mu) \setminus \{0\}} R(\xi, \mu, v) \leq R(\xi, \mu, \tilde{w}(\xi, \mu)),$$

где $\tilde{w}(\xi, \mu) = w_k - \sum_{i=0}^{k-1} b(w_k, u_i(\xi, \mu)) u_i(\xi, \mu) \in (E_k(\xi, \mu))^\perp(\mu) \setminus \{0\}$ при $\mu \rightarrow \infty$, $\tilde{w}(\xi, \mu) \rightarrow w_k$ в V , $\beta_k(\xi, \mu) = R(\xi, \mu, \tilde{w}(\xi, \mu)) \rightarrow \nu_k$ при $\mu \rightarrow \infty$. Поэтому получим $\nu_k \leq \lambda_k(\xi, \mu) \leq \beta_k(\xi, \mu) \rightarrow \nu_k$ при $\mu \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что $\lambda_k(\xi, \mu) \rightarrow \nu_k$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Поскольку $\alpha_1 \|u_k(\xi, \mu)\|^2 \leq a(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) + \xi c(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) = \lambda_k(\xi, \mu) \leq \lambda_k(\xi, 0)$, то $\|u_k(\xi, \mu)\|^2 \leq \lambda_k(\xi, 0)/\alpha_1$. Следовательно, из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$ такую, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) \rightarrow f(w)$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, где $w \in V$. Поэтому из равенства $a(u_k(\xi, \mu), v) + \xi c(u_k(\xi, \mu), v) - \lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), v) = \lambda_k(\xi, \mu) \mu f(u_k(\xi, \mu)) f(v)$ для $v \in V$, $f(v) \neq 0$, получим $f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. Отсюда $f(w) = 0$ и $w \in V_0$. Из равенства $b(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) + \mu c(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) = 1$ выводим $b(w, w) = 1$ и $w \neq 0$.

Итак, существует элемент $w \in V_0$ такой, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) \rightarrow 0$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$. Предельный переход в уравнении $a(u_k(\xi, \mu), v) = \lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), v)$ для любого элемента $v \in V_0$ при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$ приводит к равенству $a(w, v) = \nu_k b(w, v)$ для любого элемента $v \in V_0$, поэтому ν_k и $w = w_k$ являются решениями задачи 2.

Сходимость $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w$ в V при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, $w = w_k$ вытекает из соотношений

$$\alpha_1 \|u_k(\xi, \mu) - w\|^2 \leq a(u_k(\xi, \mu) - w, (\xi, \mu) - w) + \xi c(u_k(\xi, \mu) - w, u_k(\xi, \mu) - w) =$$

$$= \lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) + \lambda_k(\xi, \mu) \mu c(u_k(\xi, \mu), u_k(\xi, \mu)) - 2\lambda_k(\xi, \mu) b(u_k(\xi, \mu), w) + \nu_k \rightarrow 0.$$

Повторив предыдущие рассуждения для номеров $k \geq 2$, получим утверждение теоремы.

Теорема 3. Для фиксированного $\mu \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \nu_{k+1} - \lambda_k(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, $k = 0, 1, \dots$. Из любой последовательности $\xi' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\xi'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы w_k , $k = 1, 2, \dots$, и $u_k(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots$, такие, что $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi = \xi'' \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k = 0, 1, \dots$. Для простого числа ν_{k+1} выполняется сходимость $u_k(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}$ в V ($f(u_k(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}, u_k(\xi, \mu)) > 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. При достаточно малых $|\xi - \zeta|$ и $|\mu - \eta|$ ортонормированные собственные элементы $u_k(\xi, \mu)$ и $u_k(\zeta, \eta)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие оценки возмущения:

$$|\lambda_k(\xi, \mu) - \lambda_k(\zeta, \eta)| \leq c(|\xi - \zeta| + |\mu - \eta|), \quad \|u_k(\xi, \mu) - u_k(\zeta, \eta)\| \leq c(|\xi - \zeta| + |\mu - \eta|),$$

где константа c не зависит от величин $|\xi - \zeta|$ и $|\mu - \eta|$, направления собственных элементов выбраны согласно неравенству $b(u_k(\xi, \mu), u_k(\zeta, \eta)) > 0$, $\xi, \mu, \zeta, \eta \in \bar{\Lambda}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательствам лемм 1 и 2 из работы [7].

Теорема 5. Пусть $M = [\alpha, \beta]$, $0 \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Пусть при фиксированном $\xi \in \bar{\Lambda}$ собственное значение $\lambda_k(\xi, \mu)$ является простым для всех $\mu \in M$. Тогда $\lambda_k(\xi, \mu)$, $\mu \in M$, будет либо непрерывной убывающей функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) \neq 0$, $\mu \in M$, либо постоянной функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $\mu \in M$.

Пусть при фиксированном $\mu \in \bar{\Lambda}$ собственное значение $\lambda_k(\xi, \mu)$ является простым для всех $\xi \in M$. Тогда $\lambda_k(\xi, \mu)$, $\xi \in M$, будет либо непрерывной возрастающей функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) \neq 0$, $\xi \in M$, либо постоянной функцией при $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $\xi \in M$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3 из работы [5].

Результаты теорем 1–5 обобщают результаты работ [4, 5] на случай задачи 1 в абстрактном гильбертовом пространстве V .

Введём конечномерные подпространства V_h гильбертова пространства V размерности $N = N_h$, удовлетворяющие следующему условию:

5) имеет место сходимость $\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и для любого элемента v из пространства V .

Обозначим $E_h(W) = \sup_{w \in W, \|w\|=1} \varepsilon_h(w)$, где W — подпространство пространства V .

Задачи 1–4 будем аппроксимировать следующими конечномерными задачами.

Задача 1_h. При фиксированных $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$ найти $\lambda^h = \lambda^h(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $u^h = u^h(\xi, \mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u^h, v^h) + \xi c(u^h, v^h) = \lambda^h(b(u^h, v^h) + \mu c(u^h, v^h)), \quad v^h \in V_h. \quad (3)$$

Задача 2_h. Для $V_{0h} = V_0 \cap V_h$ найти $\nu^h \in \mathbb{R}$ и $w^h \in V_{0h} \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w^h, v^h) = \nu^h b(w^h, v^h), \quad v^h \in V_{0h}. \quad (4)$$

Задача 3_h. Для заданных $\xi \in \bar{\Lambda}$ и $\mu \in \Lambda$ найти $\nu_0^h = \nu_0^h(\xi, \mu) \in \mathbb{R}$ и $w_0^h = w_0^h(\xi, \mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(w_0^h, v^h) + \xi c(w_0^h, v^h) = \nu_0^h \mu c(w_0^h, v^h), \quad v^h \in V_h.$$

Задача 4_h. Найти элемент $v_0^h \in V_h$ такой, что

$$a(v_0^h, v^h) = f(v^h), \quad v^h \in V_h. \quad (5)$$

Существуют [6] собственные значения $\lambda_k^h = \lambda_k^h(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, задачи 1_h, занумерованные в порядке неубывания, и соответствующие собственные элементы $u_k^h = u_k^h(\xi, \mu)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, такие, что $a(u_i^h, u_j^h) + \xi c(u_i^h, u_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}$, $b(u_i^h, u_j^h) + \mu c(u_i^h, u_j^h) = \delta_{ij}$ при $i, j = 0, 1, \dots, N-1$.

Существуют [6] собственные значения ν_k^h , $k = 1, 2, \dots, N-1$, задачи 2_h, занумерованные в порядке неубывания, и соответствующие собственные элементы w_k^h , $k = 1, 2, \dots, N-1$, такие, что $a(w_i^h, w_j^h) = \nu_i^h \delta_{ij}$, $b(w_i^h, w_j^h) = \delta_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \dots, N-1$.

Единственное простое собственное значение $\nu_0^h(\xi, \mu)$ и единственный нормированный собственный элемент $w_0^h(\xi, \mu)$ ($f(w_0^h(\xi, \mu)) = 1/\sqrt{\mu}$) задачи 3_h определяются [5] формулами

$$\nu_0^h(\xi, \mu) = \frac{\xi}{\mu} + \frac{1}{\mu f(v_0^h)}, \quad w_0^h(\xi, \mu) = \frac{v_0^h}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)}, \quad (6)$$

где v_0^h — единственное решение вариационного уравнения (5). Формулы (6) являются конечномерными аналогами формул (2).

Теорема 6. Для заданного $\xi \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 < \nu_0^h(\xi, \mu) - \lambda_0^h(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $w_0^h(\xi, \mu) - u_0^h(\xi, \mu) \rightarrow 0$ в V_h при $\mu \rightarrow \infty$, если $f(u_0^h(\xi, \mu)) > 0$.

Теорема 7. Для фиксированного $\xi \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \lambda_k^h(\xi, \mu) - \nu_k^h \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, N-1}$. Из любой последовательности $\mu' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\mu'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы $w_k^h, u_k^h(\xi, \mu)$, $k = \overline{1, N-1}$, такие, что $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_k^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu = \mu'' \rightarrow \infty$, $b(w_k^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-1}$. Для простого числа ν_k^h выполняется сходимость $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_k^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\mu)$) при $\mu \rightarrow \infty$, $b(w_k^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-1}$.

Теорема 8. Для фиксированного $\mu \in \bar{\Lambda}$ имеет место сходимость $0 \leq \nu_{k+1}^h - \lambda_k^h(\xi, \mu) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, $k = \overline{1, N-2}$. Из любой последовательности $\xi' \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $\xi'' \rightarrow \infty$, для которой существуют ортонормированные собственные элементы w_k^h , $k = \overline{1, N-1}$, и $u_k^h(\xi, \mu)$, $k = \overline{1, N-2}$, такие, что $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi = \xi'' \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-2}$. Для простого ν_{k+1}^h выполняется сходимость $u_k^h(\xi, \mu) \rightarrow w_{k+1}^h$ в V_h ($f(u_k^h(\xi, \mu)) = O(1/\xi)$) при $\xi \rightarrow \infty$, $b(w_{k+1}^h, u_k^h(\xi, \mu)) > 0$, $k = \overline{1, N-2}$.

Теоремы 6–8 являются конечномерными аналогами теорем 1–3 и доказываются аналогично.

Через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от h .

Теорема 9. Предположим, что собственное значение $\lambda_k(\xi, \mu)$ задачи 1 имеет кратность r , т.е. $\lambda_{k-1}(\xi, \mu) < \lambda_k(\xi, \mu) = \lambda_{k+1}(\xi, \mu) = \dots = \lambda_{k+r-1}(\xi, \mu) < \lambda_{k+r}(\xi, \mu)$, $u_i(\xi, \mu)$, $i = \overline{k, k+r-1}$, — соответствующие собственные элементы, $\lambda_i^h(\xi, \mu)$, $u_i^h(\xi, \mu)$, $i = \overline{k, k+r-1}$, — приближения по конечномерной схеме (3).

Тогда при достаточно малых h ортонормированные собственные элементы $u_i(\xi, \mu)$ и $u_i^h(\xi, \mu)$, $i = \overline{k, k+r-1}$, можно выбрать так, чтобы выполнялись оценки погрешности

$$0 \leq \lambda_i^h(\xi, \mu) - \lambda_i(\xi, \mu) \leq cE_h^2(U_k(\xi, \mu)), \quad \|u_i^h(\xi, \mu) - u_i(\xi, \mu)\| \leq cE_h(U_k(\xi, \mu)),$$

где $U_k(\xi, \mu)$ — собственное подпространство, соответствующее $\lambda_k(\xi, \mu)$, $b(u_i^h(\xi, \mu), u_i(\xi, \mu)) > 0$, $i = \overline{k, k+r-1}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательствам теорем 8 и 9 из работы [8].

Теорема 10. Предположим, что собственное значение ν_k задачи 2 имеет кратность r ($\nu_{k-1} < \nu_k = \nu_{k+1} = \dots = \nu_{k+r-1} < \nu_{k+r}$), w_i , $i = \overline{k, k+r-1}$, — соответствующие собственные элементы, ν_i^h , w_i^h , $i = \overline{k, k+r-1}$, — приближения по конечномерной схеме (4).

Тогда при достаточно малых h ортонормированные собственные элементы w_i и w_i^h , $i = \overline{k, k+r-1}$, можно выбрать так, чтобы выполнялись оценки погрешности

$$0 \leq \nu_i^h - \nu_i \leq cE_h^2(W_k), \quad \|w_i^h - w_i\| \leq cE_h(W_k),$$

где W_k — собственное подпространство, соответствующее ν_k , $b(w_i^h, w_i) > 0$, $i = \overline{k, k+r-1}$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательствам теорем 8 и 9 из работы [8].

Теорема 11. Выполняются оценки погрешности

$$0 \leq \nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu) \leq c\varepsilon_h^2(w_0(\xi, \mu)), \quad \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \leq c\varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)),$$

если h достаточно мало.

Доказательство. При фиксированном $\mu \in \bar{\Lambda}$ обозначим $c(\mu, u, v) = \mu c(u, v)$ для любых элементов $u, v \in V$. По теореме 2 из [6] выполняются соотношения

$$\nu_0(\xi, \mu) = \min_{v \in V, f(v) \neq 0} \frac{a(\xi, v, v)}{c(\mu, v, v)} \leq \min_{v^h \in V_h, f(v^h) \neq 0} \frac{a(\xi, v^h, v^h)}{c(\mu, v^h, v^h)} = \nu_0^h(\xi, \mu).$$

Применив формулы (2) и (6), получим

$$0 \leq \nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu) = \frac{1}{\mu f(v_0^h)} - \frac{1}{\mu f(v_0)} = \frac{f(v_0) - f(v_0^h)}{\mu f(v_0^h) f(v_0)} \leq c \|v_0^h - v_0\| \leq c \varepsilon_h(v_0) \leq c \varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| &= \left\| \frac{v_0^h}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} - \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0)} \right\| \leq \left\| \frac{v_0^h - v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} \right\| + \left\| \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} - \frac{v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0)} \right\| = \\ &= \left\| \frac{v_0^h - v_0}{\sqrt{\mu} f(v_0^h)} \right\| + \left\| \sqrt{\mu} v_0 \left(\frac{1}{\mu f(v_0^h)} - \frac{1}{\mu f(v_0)} \right) \right\| \leq \\ &\leq c \|v_0^h - v_0\| + c(\nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu)) \leq c \|v_0^h - v_0\| \leq c \varepsilon_h(v_0) \leq c \varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)). \end{aligned}$$

Пусть $P_h: V \rightarrow V_h$ — ортопроектор, задаваемый равенством $a(\xi, u - P_h u, v^h) = 0$ для любого элемента $v^h \in V_h$ при $u \in V$. Тогда справедлива оценка погрешности проектирования $\|u - P_h u\| \leq c \varepsilon_h(u)$ для элемента $u \in V$.

Проведём следующие преобразования:

$$\begin{aligned} &(\nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu)) c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) = \\ &= a(\xi, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) - \nu_0(\xi, \mu) c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) = \\ &= a(\xi, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) - \nu_0(\xi, \mu) c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)). \end{aligned}$$

С помощью оценки погрешности проектирования для выражений в правой и левой частях установим оценки

$$\begin{aligned} &|a(\xi, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu))| \leq \\ &\leq c \|P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \leq c \varepsilon_h^2(v_0), \\ &|c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu))| \leq \\ &\leq c \|P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \leq c \varepsilon_h^2(v_0), \\ &c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) = c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) + c(\mu, w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) = \\ &= c(\mu, P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu)) + c(\mu, w_0(\xi, \mu), w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)) + c(\mu, w_0(\xi, \mu), w_0(\xi, \mu)) \geq \\ &\geq 1 - c \|P_h w_0(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| - c \|w_0^h(\xi, \mu) - w_0(\xi, \mu)\| \geq 1 - c \varepsilon_h(v_0) \geq c. \end{aligned}$$

В результате получаем, что $0 \leq \nu_0^h(\xi, \mu) - \nu_0(\xi, \mu) \leq c \varepsilon_h^2(v_0) \leq c \varepsilon_h^2(w_0(\xi, \mu))$. Теорема доказана.

Резонансными кривыми для исходной задачи 1 будем называть функции $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, при фиксированном первом или втором аргументе. Теоретические исследования свойств резонансных кривых привели к разбиению класса математических моделей, определяемого задачей 1, на следующие три группы.

Группа 1 характеризуется строго монотонным поведением всех резонансных кривых без точек пересечения. К этой группе относятся задачи, в которых собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, являются простыми, а соответствующие собственные элементы удовлетворяют условию $f(u_k(\xi, \mu)) \neq 0$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$.

В *группе 2* дополнительно могут возникать отдельные резонансные кривые, описываемые постоянными функциями. К этой группе относятся задачи, в которых собственные значения

$\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, являются простыми, а некоторые соответствующие собственные элементы могут удовлетворять условию $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$.

В группе 3 различные резонансные кривые могут иметь общие точки пересечения и состоять из участков со строго монотонным поведением и участков с постоянными значениями резонансных частот. К этой группе относятся задачи, в которых некоторые собственные значения $\lambda_k = \lambda_k(\xi, \mu)$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$, могут быть кратными, а некоторые соответствующие собственные элементы могут удовлетворять условию $f(u_k(\xi, \mu)) = 0$, $k \geq 0$, $\xi, \mu \in \bar{\Lambda}$.

Типичные представители одномерных и двумерных математических моделей этих трёх групп указаны в работе [4]. Асимптотические формулы (2) и их конечномерные аналоги (6) позволяют строить эффективные численные методы вычисления основной резонансной частоты и основной резонансной формы колебаний нагруженной механической системы. Высокая эффективность в реализации этих численных методов [4] достигается за счёт того, что решение задачи 1 на собственные значения или её конечномерного аналога 1_h заменяется решением краевой задачи 4 или её конечномерного аналога 4_h . При этом время решения конкретных прикладных задач на ЭВМ сокращается в 10–15 раз [4].

3. ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве примера использования полученных теоретических результатов обратимся к задаче механики тонкостенных конструкций. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях изотропной квадратной пластины с жёстко присоединённым грузом на упругой опоре с граничными условиями защемления по контуру пластины.

Пусть $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ — область срединной поверхности пластины с границей Γ , $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$, $E(x)$ — модуль Юнга, $\nu(x)$ — коэффициент Пуассона, $d(x)$ — толщина пластины,

$$D(x) = \frac{E(x)(d(x))^3}{12(1 - (\nu(x))^2)}$$

— цилиндрическая жёсткость, $\rho(x)$ — плотность в точке $x \in \bar{\Omega}$.

В точке $z \in \Omega$ жёстко присоединён груз массой μ , который опирается на опору с коэффициентом упругости ξ . Обозначим через $g(x, t)$ нормальные отклонения точки $x \in \bar{\Omega}$ в момент времени t . Тогда собственные вибрации системы пластина–груз–опора описываются функцией

$$g(x, t) = u(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad (7)$$

где ω и φ — постоянные величины. При этом выполняются дифференциальное уравнение

$$Lg(x, t) + \rho(x)d(x)g_{tt}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (8)$$

и краевое условие

$$g(x, t) = \frac{\partial g(x, t)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (9)$$

где $\partial/\partial n$ — производная вдоль внешней нормали к границе Γ квадратной области Ω , L обозначает дифференциальный оператор теории изотропных пластин вида

$$Lg = \partial_{11}D(\partial_{11}g + \nu\partial_{22}g) + \partial_{22}D(\partial_{22}g + \nu\partial_{11}g) + 2\partial_{12}D(1 - \nu)\partial_{12}g,$$

$\partial_{ij} = \partial_i \partial_j$, $i, j = 1, 2$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $g_{tt}(x, t) = \partial^2 g(x, t)/\partial t^2$, воздействие на пластину груза и упругой опоры моделируется функцией в правой части вида $f(x, t) = -(\xi g(z, t) + \mu g_{tt}(z, t))\delta(x - z)$ с дельта-функцией $\delta(x - z)$, сосредоточенной в точке z [1–3, 9, 10].

Подставляя функцию (7) в уравнение (8) и условие (9), приходим при $\lambda = \omega^2$ к задаче: найти собственные значения λ и собственные функции $u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, такие, что

$$Lu + \xi \delta(x-z)u = \lambda(\rho d + \mu \delta(x-z))u, \quad x \in \Omega; \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (10)$$

Если пластина закреплена в точке z , то для нахождения собственных колебаний сформулируем задачу: найти собственные значения ν и собственные функции $w(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, такие, что

$$Lw = \nu \rho dw, \quad x \in \Omega \setminus \{z\}, \quad w(z) = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (11)$$

Для относительно большой массы груза μ будем пренебрегать плотностью пластины $\rho(x)$. В этом случае для нахождения частот и форм собственных колебаний невесомой пластины с жёстко присоединённым грузом на упругой опоре получим следующую задачу: найти собственные значения ν_0 и собственные функции $w_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющие равенствам

$$Lw_0 + \xi \delta(x-z)w_0 = \nu_0 \mu \delta(x-z)w_0, \quad x \in \Omega; \quad w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (12)$$

Введём также краевую задачу: найти функцию $v_0(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющую соотношениям

$$Lv_0 = \delta(x-z), \quad x \in \Omega; \quad v_0 = \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (13)$$

Пусть $L_2(\Omega)$ — вещественное пространство Лебега [11, с. 22] с нормой

$$|v|_0 = \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

$W_2^2(\Omega)$ — вещественное пространство Соболева [11, с. 44] с нормой

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=0}^2 |v|_i^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_1 = \left(\sum_{i=1}^2 |\partial_i v|_0^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{ij} v|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Введём [11, с. 45] пространство $\dot{W}_2^2(\Omega)$, включающее все функции u из пространства $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющие граничным условиям $u(x) = \partial u(x)/\partial n = 0$, $x \in \Gamma$. Через $W_2^\alpha(\Omega)$ при $\alpha \in (0, 4]$ будем обозначать пространства Соболева дробного порядка с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ [11, с. 214]. Для краткости обозначим $H = L_2(\Omega)$, $V = \dot{W}_2^2(\Omega)$, $V_0 = \{v : v \in \dot{W}_2^2(\Omega), v(z) = 0\}$. Известно [11, с. 144], что пространство V компактно вложено в пространство H , любая функция из пространства V обладает свойством непрерывности на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$. В пространстве V введём норму $|\cdot|_2$, эквивалентную [11, с. 158] исходной норме $\|\cdot\|_2$.

Множество существенно ограниченных на Ω функций u образует [11, с. 24] пространство $L_\infty(\Omega)$ с нормой $|u|_{0,\infty} = \text{ess. sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$. Известно [11, с. 144], что существует постоянная c_0 , для которой выполнено соотношение $|v|_{0,\infty} \leq c_0 |v|_2$ при любых $v \in \dot{W}_2^2(\Omega)$.

Функции ρ , d , E и ν будем считать заданными функциями из пространства $L_\infty(\Omega)$. Предположим, что для некоторых положительных постоянных ρ_1 , ρ_2 , d_1 , d_2 , E_1 , E_2 выполнены соотношения $\rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2$, $d_1 \leq d(x) \leq d_2$, $E_1 \leq E(x) \leq E_2$, $0 < \nu(x) < 1/2$ при почти всех $x \in \Omega$. Введём линейный ограниченный функционал $f(v) = v(z)$ для $v \in V$. Определим симметричные билинейные формы $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$a(u, v) = \int_{\Omega} D(\partial_{11}u + \partial_{22}u)(\partial_{11}v + \partial_{22}v) dx + \int_{\Omega} D(1-\nu)(2\partial_{12}u\partial_{12}v - \partial_{11}u\partial_{22}v - \partial_{22}u\partial_{11}v) dx, \quad u, v \in V,$$

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \rho du dv dx, \quad u, v \in H; \quad c(u, v) = u(z)v(z), \quad u, v \in V.$$

Для заданных симметричных билинейных форм выполняются [10, с. 211; 12, с. 196] следующие свойства:

$$\alpha_1|v|_2^2 \leq a(v, v) \leq \alpha_2|v|_2^2, \quad v \in V,$$

$$\beta_1|v|_0^2 \leq b(v, v) \leq \beta_2|v|_0^2, \quad v \in H,$$

$$0 \leq c(v, v) \leq \gamma_2|v|_2^2, \quad v \in V,$$

при $\alpha_k = D_k$, $\beta_k = \rho_k d_k$, $k = 1, 2$, $D_1 = E_1 d_1^3/12$, $D_2 = E_2 d_2^3/6$, $\gamma_2 = c_0^2$.

Дифференциальным задачам (10)–(13) соответствуют эквивалентные вариационные задачи 1–4. Так как заданные симметричные билинейные формы $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $c: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям 1)–4), то для вариационной постановки задачи (10) справедливы результаты теорем 1–5.

На замкнутом квадрате $\bar{\Omega}$ определим равномерную сетку узлов $x_{ij} = (t_i, t_j)$, $t_i = ih$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = 1/n$, с квадратными ячейками $e_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через V_h пространство конечных элементов Богнера–Фокса–Шмита [13, с. 82], построенное на заданном разбиении квадрата $\bar{\Omega}$. Размерность подпространства V_h равна $2(n-1)$. Известно [13, с. 83], что V_h является подпространством исходного гильбертова пространства V . Предположим, что точка z совпадает с одним из внутренних узлов конечно-элементной сетки, т.е. $z = x_{k_1 k_2}$, $0 < k_1 < n$, $0 < k_2 < n$. Задачи (10)–(13) будем аппроксимировать конечномерными задачами 1_h – 4_h .

Поскольку свойство 5) выполнено [13, с. 137], то справедливы результаты теорем 6–11 при $E_h(U_k(\xi, \mu)) \leq ch^\alpha$, $E_h(W_k) \leq ch^\alpha$, $\varepsilon_h(u_k(\xi, \mu)) \leq ch^\alpha$, $\varepsilon_h(w_k) \leq ch^\alpha$, $\varepsilon_h(w_0(\xi, \mu)) \leq ch^\alpha$ [14, с. 379], если собственные функции принадлежат пространству $W_2^{2+\alpha}(\Omega)$ при некотором $\alpha \in (0, 2]$ [15, 16]. Теоретические результаты настоящей статьи обобщают и развивают результаты работ [4, 5, 17–20]. Результаты численных экспериментов для задачи (10) приведены в работе [4].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета в рамках реализации Программы стратегического академического лидерства “Приоритет–2030”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев, Л.В. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. — М. : Машиностроение, 1988. — 200 с.
2. Базаров, М.Б. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем / М.Б. Базаров, И.И. Сафаров, Ю.И. Шокин. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, Студия Дизайн ИНФОЛИО, 1996. — 189 с.
3. Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко — М. : Издательство МАИ, 2012. — 214 с.
4. Samsonov, A.A. Mathematical modeling of the eigenvibrations for the loaded shallow shell / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // E3S Web of Conferences. — 2023. — V. 431. — Art. 05013.
5. Investigation of the problem on eigenvibrations of a bar with mechanical resonator / D.M. Korosteleva, A.A. Samsonov, P.S. Solov'ev, S.I. Solov'ev // Lobachevskii J. Math. — 2021. — V. 42, № 7. — P. 1697–1705.
6. Соловьев, С.И. Аппроксимация вариационных задач на собственные значения / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 1022–1032.

7. Соловьев, С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.
8. Соловьев, С.И. Аппроксимация знаконеопределённых спектральных задач / С.И. Соловьев // Дифференц. уравнения. — 2012. — Т. 48, № 7. — С. 1042–1055.
9. Жигалко, Ю.П. К вопросу о колебаниях тонких пластин и оболочек, несущих сосредоточенные массы / Ю.П. Жигалко, А.К. Шалабанов // Исследования по теории пластин и оболочек. — Казань : КГУ, 1970. — Вып. 6–7. — С. 511–530.
10. Литвинов, В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике / В.Г. Литвинов. — М. : Наука, 1987. — 368 с.
11. Adams, R.A. Sobolev Spaces / R.A. Adams. — New York : Academic Press, 1975. — 268 p.
12. Соловьёв, С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.
13. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле ; пер. с англ. Б.И. Квасова ; под ред. Н.Н. Яненко. — М. : Мир, 1980. — 512 с.
14. Brenner, S.C. The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S.C. Brenner, L.R. Scott. — New York : Springer, 2008. — 398 p.
15. Blum, H. On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners / H. Blum, R. Rannacher // Math. Meth. Appl. Sci. — 1980. — V. 2. — P. 556–581.
16. Bacuta, C. Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem / C. Bacuta, J.H. Bramble, J.E. Pasciak // Recent Progress in Computational and Applied PDEs / eds. T.F. Chan, Y. Huang, T. Tang [et al.]. Zhangjiajie, 2001. — New York : Kluwer/Plenum, 2002. — P. 1–26.
17. Samsonov, A.A. Eigenvibrations of a beam with load / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // Lobachevskii J. Math. — 2017. — V. 38, № 5. — P. 849–855.
18. Samsonov, A.A. Eigenvibrations of a bar with load / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev, P.S. Solov'ev // MATEC Web of Conferences. — 2017. — V. 129. — Art. 06013.
19. Samsonov, A.A. Investigation of eigenvibrations of a loaded bar / A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // MATEC Web of Conferences. — 2018. — V. 224. — Art. 04013.
20. Approximation of the problem on eigenvibrations of a string with attached load / D.M. Korosteleva, L.N. Koronova, A.A. Samsonov, S.I. Solov'ev // Lobachevskii J. Math. — 2022. — V. 43, № 4. — P. 996–1005.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF PARAMETRIC EIGENVALUE PROBLEMS IN THE HILBERT SPACE

A. A. Samsonov

*Kazan (Volga region) Federal University, Russia
e-mail: anton.samsonov.kpfu@mail.ru*

The parametric eigenvalue problem in infinite-dimensional Hilbert space arising in the mechanics of loaded thin-walled structures is investigated. Asymptotic properties of solutions depending on loading parameters are established. The initial infinite-dimensional problem is approximated in a finite-dimensional subspace. Theoretical error estimates of approximate solutions are obtained. Effective numerical methods for calculating the main resonance frequency and the corresponding resonance form of vibrations based on asymptotic formulas are proposed.

Keywords: eigenvalue, eigenelement, eigenvalue problem, Hilbert space, asymptotic formula, finite-dimensional approximation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from Kazan (Volga region) Federal University within the framework of the strategic academic leadership program “Priority—2030”.

REFERENCES

1. Andreev, L.V., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* (Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses), Moscow: Mashinostroenie, 1988.
2. Bazarov, M.B., Safarov, I.I., and Shokin, Yu.I., *Chislennoe modelirovanie kolebaniy dissipativno odnorodnykh i neodnorodnykh mekhanicheskikh sistem* (Numerical Modelling of Vibrations of Dissipative Homogeneous and Nonhomogeneous Mechanical Systems), Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN, Studio Design INFOLIO, 1996.
3. Andreev, L.V., Stankevich, A.I., Dyshko, A.L., and Pavlenko, I.D., *Dinamika tonkostennykh konstruksiy s prisoedinennymi massami* (Dynamics of Thin-Walled Constructions with Attached Masses), Moscow: Izdatel'stvo MAI, 2012.
4. Samsonov, A.A. and Solov'ev, S.I., Mathematical modeling of the eigenvibrations for the loaded shallow shell, *E3S Web of Conferences*, 2023, vol. 431, art. 05013.
5. Korosteleva, D.M., Samsonov, A.A., Solov'ev, P.S., and Solov'ev, S.I., Investigation of the problem on eigenvibrations of a bar with mechanical resonator, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 7, pp. 1697–1705.
6. Solov'ev, S.I., Approximation of variational eigenvalue problems, *Differ. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041.
7. Solov'ev, S.I., Approximation of nonlinear spectral problems in the Hilbert space, *Differ. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 934–947.
8. Solov'ev, S.I., Approximation of sign-indefinite spectral problems, *Differ. Equat.*, 2012, vol. 48, no. 7, pp. 1028–1041.
9. Zhigalko, Yu.P. and Shalabanov, A.K., K voprosu o kolebaniyakh tonkikh plastin i obolochek, nesushchikh sosredotochennye massy (To the question of vibrations of thin plates and shells carrying concentrated masses), *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* (Studies on the Theory of Plates and Shells), Kazan: KSU, 1970, no. 6–7, pp. 511–530.
10. Litvinov, V.G., *Optimizatsiya v ellipticheskikh granichnykh zadachakh s prilozheniyami k mekhanike* (Optimisation in Elliptic Boundary Value Problems with Applications to Mechanics), Moscow: Nauka, 1987.
11. Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, New York: Academic Press, 1975.
12. Solov'ev, S.I., *Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennyye metody* (Nonlinear Eigenvalue Problems. Approximate Methods), Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2011.
13. Ciarlet, Ph.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1978.
14. Brenner, S.C. and Scott, L.R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, New York: Springer, 2008.
15. Blum, H. and Rannacher, R., On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, vol. 2, pp. 556–581.
16. Bacuta, C., Bramble, J.H., and Pasciak, J.E., Shift theorems for the biharmonic Dirichlet problem, in *Recent Progress in Computational and Applied PDEs, Zhangjiajie, 2001*, eds. T.F. Chan, Y. Huang, T. Tang [et al.], New York: Kluwer/Plenum, 2002, pp. 1–26.
17. Samsonov, A.A. and Solov'ev, S.I., Eigenvibrations of a beam with load, *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 849–855.
18. Samsonov, A.A., Solov'ev, S.I., and Solov'ev, P.S., Eigenvibrations of a bar with load, *MATEC Web of Conferences*, 2017, vol. 129, art. 06013.
19. Samsonov, A.A. and Solov'ev, S.I., Investigation of eigenvibrations of a loaded bar, *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 224, art. 04013.
20. Korosteleva, D.M., Koronova, L.N., Samsonov, A.A., and Solov'ev, S.I., Approximation of the problem on eigenvibrations of a string with attached load, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 4, pp. 996–1005.