

УДК 517.977.1

КАСКАДНЫЙ СУПЕР-СКРУЧИВАЮЩИЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ БЕЗ КОММУНИКАЦИИ

В. В. Фомичев¹, А. И. Самарин²

¹Электротехнический университет, г. Ханчжоу, Китай

¹Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, г. Москва

^{1,2}Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: ¹fomichev@cs.msu.su, ²samarin_aleksei@icloud.com

Поступила в редакцию 29.11.2023 г., после доработки 29.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Рассмотрена задача о консенсусе (т.е. о согласовании фазовых векторов) для мульти-агентной системы, состоящей из однотипных линейных агентов. Изучен случай, когда между агентами нет коммуникации, т.е. нет обмена информацией, а управление агентами осуществляется за счёт собственных датчиков агентов, дающих неполную информацию о фазовых векторах агента и его соседей, при этом информация может быть зашумлена. Для решения задачи применён линейный протокол на основе данных от наблюдателей для систем в условиях неопределённости. В качестве таких наблюдателей предложено использовать каскадные наблюдатели на основе метода “super-twisting” (супер-скручивающий каскадный наблюдатель). Получены достаточные условия существования регулятора, при которых ошибка наблюдения стремится к нулю при ограниченных возмущениях. Приведён пример, иллюстрирующий предложенный подход.

Ключевые слова: мультиагентные системы, супер-скручивающий наблюдатель, консенсус, линейные агенты.

DOI: 10.31857/S0374064124020089, EDN: QFWROK

ВВЕДЕНИЕ

Мультиагентные системы, состоящие из агентов со своим входом, выходом и регулятором, находят широкое применение в роевой робототехнике, управлении электроэнергией, а также в описании транспортных систем [1]. Особый интерес представляют системы, в которых все агенты стандартизированы. Такие системы легко масштабировать, они демонстрируют высокую устойчивость к отказам отдельных агентов, при этом остаются экономически выгодными [2].

В контексте нашего исследования будем рассматривать агенты как линейные однородные SISO (Single-Input Single-Output) объекты, подвергаемые ограниченному возмущению и обладающие информацией только об относительном выходе. Например, если динамика агентов описывается координатой и скоростью, то агенту известно только расстояние до соседей, в то время как относительная скорость остаётся неизвестной.

Основная задача исследования — децентрализованный консенсус, или синхронизация состояний между агентами, полагаясь только на информацию от непосредственных соседей [3–5].

Многие существующие протоколы [6] для достижения консенсуса требуют обмена дополнительной информацией между агентами. Но его, как было показано в статье [7], можно до-

стичь и без коммуникации между агентами. Однако численное моделирование, выполненное нами, показывает, что этот подход уступает в точности при наличии внешних возмущений.

В работе [8] был предложен нелинейный наблюдатель для линейных систем, дающий асимптотически точную оценку. Возникает вопрос, возможно ли адаптировать этот наблюдатель для использования в протоколе [7], чтобы улучшить его точность? Хотя подобный подход уже был рассмотрен для агентов второго порядка [9], наша цель — обобщить его для агентов любого порядка.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Задача консенсуса состоит в синхронизации состояния агентов. Под агентами понимаются объекты одинаковой природы. В нашей работе *агенты* — линейные стационарные динамические системы. Уравнения агента имеют вид

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i, \quad y_i = \frac{1}{|N_i|} C \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad (1)$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния i -го агента; $i \in \{1, \dots, N\}$ — номер агента; N — число агентов; $u_i \in \mathbb{R}$ — управление; $y_i \in \mathbb{R}$ — измеряемый выход, равный среднему отклонению от соседей; N_i — множество соседей агента (если множество соседей пусто, то считаем, что $y_i \equiv 0$); A , B , C — одинаковые для всех агентов матрицы. Считаем, что множество соседей не изменяется с течением времени. В классической задаче консенсуса требуется в асимптотике достигнуть равенства состояния агентов:

$$\|x_i(t) - x_j(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{для любых } i, j.$$

Мультиагентную систему можно описать в виде графа G , вершинами которого являются агенты. Направленные ребра означают, что один агент получает информацию о другом, например, агенту i из (1) соответствуют ребра $\{(j, i) : j \in N_i\}$.

Другим представлением информации о связях между агентами является матрица Лапласа — матрица размера $N \times N$ с элементами

$$L_{ii} = \begin{cases} 1, & |N_i| > 0, \\ 0, & |N_i| = 0, \end{cases} \quad L_{ij} = \begin{cases} -1/|N_i|, & j \in N_i, \\ 0, & j \notin N_i. \end{cases}$$

Мы рассматриваем не меняющуюся во времени топологию агентов. Задачу консенсуса для всей системы имеет смысл рассматривать, когда в графе G существует остовное направленное дерево (для ненаправленного графа это требование означает, что граф является связным). В этом случае матрица Лапласа имеет ровно одно собственное значение, равное нулю, а у остальных собственных значений положительная вещественная часть.

1.1. ПРОТОКОЛ С КОММУНИКАЦИЕЙ

В работе [6] был предложен следующий распределённый протокол управления:

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKv_i, \quad \dot{v}_i = Av_i + BKv_i + F \left(C \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (v_i - v_j) - y_i \right), \quad y_i = \frac{1}{|N_i|} C \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad (2)$$

где $u_i = Kv_i$, v_i — состояние регулятора. Расчёт v_i зависит от v_j , что требует передачи информации между агентами. В протоколе (2) F и K — это матрицы коэффициентов регулятора, одинаковые для всех агентов.

для которой строится каскадный наблюдатель

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_i = -l_i \tilde{y} + \bar{\varepsilon}_{i+1} + k_i \operatorname{sgn}(\bar{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_i) |\bar{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_i|^{1/2}, \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{i+1} = -l_{i+1} \tilde{y} + \mu_i \operatorname{sgn}(\bar{\varepsilon}_i - \tilde{\varepsilon}_i), \quad i = \overline{1, r-1}, \quad (7)$$

где $\bar{\varepsilon}_i(t)$ — оценка сигнала $\varepsilon_i(t)$, построенная на предыдущем шаге каскада; $\bar{\varepsilon}_{i+1}(t)$ — оценка сигнала $\varepsilon_{i+1}(t)$, вырабатываемая наблюдателем (7) на текущем шаге каскада. В качестве оценки $\bar{\varepsilon}_1$ используется выход $\tilde{y}$ системы (6).

Алгоритм поиска коэффициентов k_i , μ_i описан в работе [8].

2. СРАВНЕНИЕ ПРОТОКОЛОВ

Покажем, что протокол без коммуникации проигрывает в точности, когда на систему действуют ограниченные возмущения. Для этого рассмотрим задачу консенсуса (1), когда на агенты действуют два вида помехи — в управлении и в измерении:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + Bu_i + B\xi_i, & y_i &= Cv_i + \omega_i, & v_i &= \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \\ \|\xi_i\| &\leq \xi_0, & \|\omega_i\| &\leq \omega_0, \end{aligned}$$

где $\xi_i(t)$, $\omega_i(t)$ — неизвестные кусочно-непрерывные функции с известными мажорантами, одинаковыми для всех агентов.

Векторы v_i описывают локальную ошибку консенсуса. Будем обозначать через v , ξ , ω конкатенацию v_i , ξ_i , ω_i :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nN}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N.$$

Рассмотрим две нормы H_∞ , которые отражают зависимость ошибки консенсуса от возмущений ξ , ω : чем больше норма, тем хуже управление подавляет помеху. Для расчёта норм используют нулевые начальные условия для всех агентов:

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_2} &= \left(\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \\ H_\infty(\xi \rightarrow v) &= \max_{\xi \neq 0} \frac{\|v\|_{L_2}}{\|\xi\|_{L_2}}, & H_\infty(\omega \rightarrow v) &= \max_{\omega \neq 0} \frac{\|v\|_{L_2}}{\|\omega\|_{L_2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сравним, насколько хорошо оба протокола могут подавлять помехи ξ , ω . Для анализа будем использовать следующий численный эксперимент.

1. Зафиксируем число агентов, связи между ними и уравнение динамики.
2. Сгенерируем 50 000 разных пар матриц (K, F) , удовлетворяющих теореме 1.
3. Для каждой пары посчитаем нормы (8) для двух протоколов.
4. Для каждого протокола выберем множество оптимальных по Парето пар (K, F) . *Пара оптимальна по Парето*, если не существует другой пары, для которой значение обеих норм было бы меньше.
5. Сравним полученные оптимальные пары двух протоколов.

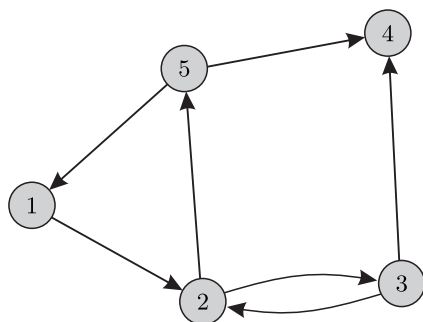


Рис. 1. Граф коммуникации.

Далее опишем один набор параметров эксперимента, так как при других параметрах результаты качественно не отличались. Для эксперимента выберем систему из пяти агентов третьего порядка. Граф коммуникации агентов представлен на рис. 1. Мы выбрали матрицы A , B , C минимального порядка, для которых имеет смысл рассматривать каскадный наблюдатель:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Далее мы сгенерировали 50 000 разных пар матриц (K, F) , посчитали нормы (8), используя пакет ControlSystems.jl [12], затем выбрали множество оптимальных по Парето пар для каждого протокола. Каждой паре (K, F) соответствует пара норм $(H_\infty(\xi \rightarrow v), H_\infty(\omega \rightarrow v))$. Оптимальные пары показаны на рис. 2. Сравнив оптимальные пары для двух протоколов, получили ожидаемый результат: протокол без коммуникации менее устойчив к возмущениям, чем протокол с коммуникацией.

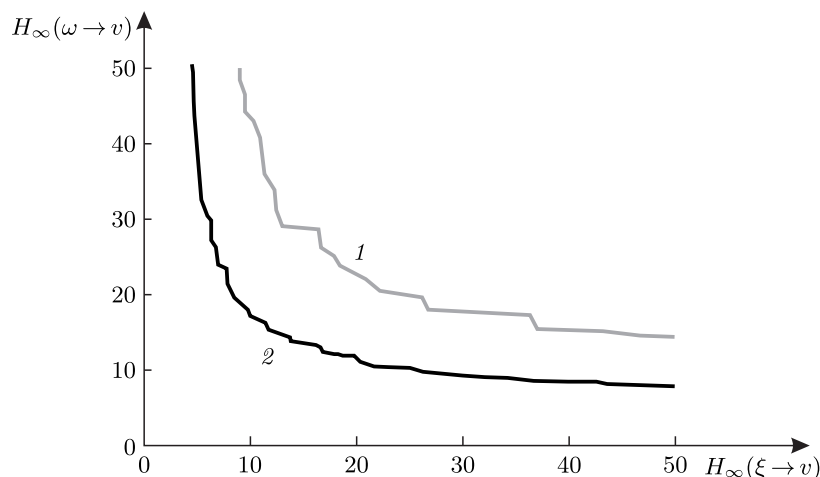


Рис. 2. Сравнение протоколов (линии соединяют точки, соответствующие оптимальным по Парето парам (K, F)). Видно, что для каждой пары (K, F) протокола без коммуникации (1) существует пара (K, F) протокола с коммуникацией (2), которая лучше подавляет обе помехи.

Так как эксперимент численный, то нельзя с уверенностью утверждать, что протокол с коммуникацией всегда будет лучше. Однако результаты показывают, что такие системы существуют, следовательно, для них требуется улучшить протокол без коммуникации. Мы предлагаем сделать это путём добавления нелинейного наблюдателя, основанного на каскадном супер-скручивающемся наблюдателе.

3. ПЕРЕХОД К ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ

В п. 2 было показано, что протокол без коммуникации менее устойчив к возмущениям, чем протокол с коммуникацией. Ниже покажем, как неизвестное управление влияет на ошибку наблюдателя и как можно построить нелинейный наблюдатель, который даст асимптотически точную оценку.

Рассмотрим ошибку наблюдателя, возникающую из-за помехи ξ для протокола (3). Протокол (3) с добавлением помехи примет вид

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = Cv_i, \quad v_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j).$$

Будем считать z_i оценкой для v_i :

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= Av_i + BK \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (z_i - z_j) + B \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (\xi_i - \xi_j) = Av_i + BKz_i - \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} z_j + B \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (\xi_i - \xi_j), \\ \dot{z}_i &= Az_i + BKz_i + F(Cz_i - Cv_i). \end{aligned}$$

Рассмотрим ошибку оценки $e_i = v_i - z_i$:

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i - BK \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} z_j + B \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (\xi_i - \xi_j). \quad (9)$$

Выделим два типа возмущений: внешнее возмущение $(\tilde{\xi}_i)$ и неизвестное управление соседей (δ_i) :

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + BK\delta_i + B\tilde{\xi}_i, \quad \delta_i = -\frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} z_j, \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (\xi_i - \xi_j). \quad (10)$$

Обозначим суммарное возмущение как $f_i = K\delta_i + \tilde{\xi}_i$. Заметим, что мы знаем Ce_i . Таким образом, требуется рассмотреть асимптотические свойства следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + Bf_i, \quad y_i^e = Ce_i. \quad (11)$$

3.1. ЛОКАЛЬНЫЙ КАСКАДНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Система (11) повторяет структуру системы (5) из теоремы 2 о каскадном наблюдателе. Предположим, что выполняются другие условия теоремы, в частности устойчивость нулевой динамики и ограниченность входа f_i . Тогда можно построить каскадный наблюдатель типа (7), позволяющий получить асимптотически точную оценку e_i . Обозначим эту оценку как $\hat{e}_i$, а систему каскадных наблюдателей через оператор $S_{\sigma, \mu}$. Тогда $\hat{e}_i$ будет результатом применения оператора $S_{\sigma, \mu}$ к известному входу Ce_i :

$$\hat{e}_i = S_{\sigma, \mu}(Ce_i),$$

где $\sigma \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ — векторы коэффициентов каскадного наблюдателя, одинаковые для всех агентов. Оператор $S_{\sigma, \mu}$ состоит из $n-1$ систем (7) второго порядка, а также (если относительный порядок системы $r < n$) из наблюдателя для нулевой динамики порядка $(n-r)$.

3.2. ТЕОРЕМА О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим семейство систем достижения консенсуса с протоколом, при котором агенты не обмениваются информацией. Докажем теорему о достаточных условиях, когда можно построить локальный каскадный наблюдатель $S_{\sigma, \mu}$, чтобы оценить разницу между линейным наблюдателем z_i и средним отклонением от соседей v_i :

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = Cv_i,$$

$$v_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad e_i = v_i - z_i, \quad \hat{e}_i = S_{\sigma, \mu}(Ce_i). \quad (12)$$

Теорема 3. Пусть для системы (12) выполнены предположения:

- 1) для матриц F, K выполнено условие (4);
- 2) ξ_i — ограниченные помехи с общей для всех агентов мажорантой;
- 3) матрица $A+BK+FC$ гурвицева;
- 4) матрица $A+FC$ гурвицева;
- 5) система (A, B, C) обладает устойчивой нулевой динамикой.

Тогда существуют коэффициенты $\sigma \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, одинаковые для всех агентов, такие, что каскадный наблюдатель $\hat{e}_i$ даёт асимптотически точную оценку $e_i = v_i - z_i$.

Доказательство. Согласно классическому подходу к изучению устойчивости консенсуса необходимо выделить подсистему, отвечающую за ошибку консенсуса. Пусть $r^T \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ — левый собственный вектор матрицы Лапласа L и $r^T 1_N = 1$, где $1_N \in \mathbb{R}^N$ и состоит из единиц. Пусть $\Delta \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ — матрица полного ранга, ортогональная к 1_N . Тогда матрица T , составленная из r^T, Δ , является невырожденной. Можно показать, что обратная матрица будет состоять из $1_N, \Delta^+$, т.е.

$$T = \begin{bmatrix} r^T \\ \Delta \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1_N & \Delta^+ \end{bmatrix}.$$

Более того, известно, что можно выбрать матрицу Δ так, чтобы матрица $J = TLT^{-1}$ имела жорданову форму:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & * & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \Delta L \Delta^+.$$

Известно, что консенсус в системе достигается тогда и только тогда, когда

$$\bar{x} = (\Delta \otimes I_n)x = 0,$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n(N-1)}$ описывает ошибку консенсуса, т.е. любой вектор v_i можно выразить через $\bar{x}$; с другой стороны, $\bar{x}$ можно выразить через $v = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N)$. Поэтому нам достаточно рассмотреть динамику $(\Delta \otimes I_n)x$.

Пусть x, z, ξ — конкатенация x_i, z_i, ξ_i . Перепишем систему (12) для x, z, ξ и матрицы Лапласа L :

$$\dot{x} = (I_N \otimes A)x + (I_N \otimes BK)z + (I_N \otimes B)\xi, \quad \dot{z} = (I_N \otimes (A+BK+FC))z - (L \otimes C)x.$$

Согласно [7] после ряда вычислений получим, что динамика $\bar{x} = (\Delta \otimes I_n)x$, $\bar{z} = (\Delta \otimes I_n)z$ замкнута относительно себя:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (I_{N-1} \otimes A)\bar{x} + (I_{N-1} \otimes BK)\bar{z} + (\Delta \otimes B)\xi, \quad \dot{\bar{z}} = (I_{N-1} \otimes (A+BK+FC))\bar{z} - (\Lambda \otimes C)\bar{x}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{z}} \end{pmatrix} &= \bar{A} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \bar{B}\xi, \quad \bar{A} = \left(I_{N-1} \otimes \begin{bmatrix} A & BK \\ 0 & A+BK+FC \end{bmatrix} \right) + \left(\Lambda \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -FC & 0 \end{bmatrix} \right), \quad \bar{B} = \Delta \otimes \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если выполняются условия (4), то матрица $\bar{A}$ гурвицева. По условию теоремы ξ_i ограничены общей мажорантой. Это означает, что $\bar{x}$, $\bar{z}$ ограничены в установившемся режиме.

Ошибка линейного наблюдателя (9) зависит от z . Покажем, что вектор $\dot{z}$ тоже ограничен:

$$\dot{z} = (I_N \otimes (A + BK + FC))z - (L \otimes C)x. \quad (13)$$

Домножим L на $T^{-1}T$ и воспользуемся тем, что $L1_N = 0$:

$$L = LT^{-1}T = L \begin{bmatrix} 1_N & \Delta^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^T \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L\Delta^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^T \\ \Delta \end{bmatrix} = L\Delta^+\Delta.$$

Используем полученное выражение для анализа $(L \otimes C)x$:

$$(L \otimes C)x = (L\Delta^+\Delta \otimes C)x = (L\Delta^+ \otimes C)(\Delta \otimes I_n)x = (L\Delta^+ \otimes C)\bar{x}.$$

Тогда (13) преобразуется в равенство

$$\dot{z} = (I_N \otimes (A + BK + FC))z - (L\Delta^+ \otimes C)\bar{x}. \quad (14)$$

Это означает, что z зависит не от всего вектора x , а только от ошибки консенсуса $\bar{x}$. А мы показали выше, что в установившемся режиме ошибка консенсуса ограничена. Матрица $A + BK + FC$ гурвицева по условию теоремы, поэтому согласно (14) вектор z тоже ограничен в установившемся режиме.

Вернёмся к ошибке линейного наблюдателя (10):

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= (A + FC)e_i + BK\delta_i + B\tilde{\xi}_i = (A + FC)e_i + Bf_i, \\ \delta_i &= -\frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} z_j, \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (\xi_i - \xi_j). \end{aligned}$$

Мы уже показали, что z_i ограничены в установившемся режиме, ξ_i ограничены по условию теоремы, поэтому δ_i , $\tilde{\xi}_i$ также ограничены, а значит, ограничена и помеха f_i в системе

$$\dot{e}_i = (A + FC)e_i + Bf_i, \quad y_i^e = Ce_i.$$

По условию теоремы 3 матрица $A + FC$ гурвицева, а система (A, B, C) обладает устойчивой нулевой динамикой. Мы доказали, что, начиная с некоторого момента времени, f_i ограничена известной мажорантой, поэтому справедлива теорема 2 о супер-скручивающем наблюдателе. Значит, существуют параметры σ_i , μ_i , при которых каскадный наблюдатель $\hat{e}_i = S_{\sigma_i, \mu_i}(e_i)$ даёт асимптотически точную оценку e_i .

Если выбрать f_0 как максимальную мажоранту для f_i : $\|f_i\| \leq f_0$, то существуют параметры σ , μ , соответствующие f_0 и одинаковые для всех агентов, при которых $\hat{e}_i = S_{\sigma, \mu}(e_i)$ даёт асимптотически точную оценку e_i . Теорема доказана.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОВОЙ ОЦЕНКИ В УПРАВЛЕНИИ

Мы определили, при каких условиях можно построить наблюдатель, дающий асимптотически точную оценку. Обычно при построении наблюдателя стараются компенсировать управление, чтобы оно не влияло на оценку. Это невозможно, когда агент не знает управление соседей, поэтому использование оценки в управлении влияет на наблюдатель: управление становится новой помехой в наблюдателе. Далее покажем, когда можно использовать полученную оценку в управлении.

Рассмотрим систему (12), добавив новое управление g , которое учитывает новую оценку:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + B(Kz_i + g(z_i, \hat{e}_i)) + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad y_i = Cv_i, \\ v_i &= \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad e_i = v_i - z_i, \quad \hat{e}_i = S_{\sigma, \mu}(Ce_i). \end{aligned} \quad (15)$$

Следствие. Пусть для системы (15) выполняются условия теоремы 3. Пусть дополнительно функция g ограничена известной мажорантой. Тогда существуют коэффициенты $\sigma \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, одинаковые для всех агентов, такие, что каскадный наблюдатель $\hat{e}_i$ даёт асимптотически точную оценку $e_i = v_i - z_i$.

Доказательство. Пусть функция g ограничена мажорантой g_0 . Пусть помеха ξ_i ограничена мажорантой ξ_0 . Тогда, если считать g новой помехой и соединить её с ξ , суммарная помеха не будет превышать $g_0 + \xi_0$. Далее нужно использовать теорему 3, заменив ξ на суммарную помеху. Так как условия теоремы 3 выполняются, то существуют коэффициенты наблюдателя, гарантирующие асимптотически точную оценку.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ

Покажем работу нового подхода на примере задачи из п. 3 про сравнение протоколов. Рассмотрим линейный протокол без коммуникации

$$\dot{x}_i = Ax_i + BKz_i + B\xi_i, \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \quad v_i = \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad y_i = Cv_i$$

и новый подход, где добавляется каскадный наблюдатель и ограниченное управление

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + BKz_i + B\xi_i + Bg(z_i, \hat{e}_i), \quad \dot{z}_i = Az_i + BKz_i + F(Cz_i - y_i), \\ v_i &= \frac{1}{|N_i|} \sum_{j \in N_i} (x_i - x_j), \quad y_i = Cv_i, \quad e_i = v_i - z_i, \quad \hat{e}_i = S_{\sigma, \mu}(Ce_i). \end{aligned}$$

Чтобы сравнить прежний и новый подходы, проведём следующий численный эксперимент.

1. Зафиксируем число агентов, связи между ними (N_i) и уравнение динамики (A, B, C).
2. Выберем пару (K, F) , одинаковую для двух подходов и удовлетворяющую теоремам 1 и 3.
3. Выберем вид помехи и ее мажоранту: $|\xi_i(t)| \leq \xi_0$ для любых i, t .
4. Выберем ограниченное управление g .
5. Выберем коэффициенты каскадного наблюдателя (σ, μ) .
6. Сгенерируем 1000 траекторий системы при разных помехах на промежутке времени $[0, T]$ (в эксперименте $T = 100$).
7. Сравним ошибку консенсуса для линейного протокола и нового подхода.

5.1. ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ

Как и при сравнении протоколов в п. 3 рассмотрим систему из пяти агентов третьего порядка. Граф коммуникации агентов представлен на рис. 1. Матрицы агентов заданы в каноническом виде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0].$$

Матрицы A, B, C образуют систему с максимальным относительным порядком. Нулевая динамика отсутствует.

5.2. ВЫБОР МАТРИЦ K , F

Условия теоремы 3 включают в себя условия теоремы 1, поэтому можно выбрать одинаковые матрицы в обоих подходах. Мы зафиксировали одну пару матриц из множества пар, удовлетворяющих теоремам:

$$K = [-18.292 \quad -47.217 \quad -35.483], \quad F = [-50.009 \quad -32.640 \quad -45.849]^T.$$

5.3. ВЫБОР ПОМЕХИ

Все помехи в эксперименте имеют мажоранту, равную единице. Рассматривались три вида помехи.

I. Сумма синусов и косинусов

$$\xi_i(t) = \sum_{n=0}^5 a_{ni} \cos 2nt + \sum_{n=0}^5 b_{ni} \sin(2n+1)t, \quad (16)$$

где коэффициенты a_{ni} , b_{ni} выбраны случайно для каждого эксперимента; ограничены сами коэффициенты $|a_{ni}| \leq 1$, $|b_{ni}| \leq 1$ и их сумма $\sum_{n=0}^5 |a_{ni}| + \sum_{n=0}^5 |b_{ni}| \leq 1$.

II. Синусы с разной частотой

$$\xi_i(t) = \sin(\omega_i t), \quad (17)$$

где ω_i выбраны случайно для каждого эксперимента из равномерного распределения $U(-1, 1)$.

III. Постоянный сигнал

$$\xi_i(t) = c_i = \text{const}, \quad (18)$$

где c_i выбраны случайно для каждого эксперимента из равномерного распределения $U(-1, 1)$.

5.4. ВЫБОР ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

В качестве ограниченного управления g мы выбрали $g(z_i, \hat{e}_i) = \text{sat}(K \hat{e}_i)$, где

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -1, & x < -1. \end{cases}$$

Хотя сатурация не является идеальным способом получения ограниченного управления, она даёт уменьшение ошибки консенсуса и проста в реализации. Существуют более продвинутые методы синтеза ограниченного управления, но они в данной работе не рассматриваются.

5.5. КАСКАДНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ

Каскадный наблюдатель будет состоять из двух этапов:

$$\begin{aligned} y_e &= y - C z_i; \\ \varepsilon_1 &= y_e - \hat{e}_{11}, \quad \dot{\hat{e}}_{11} = f_1 y_e + \hat{e}_{12} + k_1 \text{sign}(\varepsilon_1) \sqrt{|\varepsilon_1|}, \quad \dot{\hat{e}}_{12} = f_2 y_e + \mu_1 \text{sign}(\varepsilon_1); \\ \varepsilon_2 &= \hat{e}_{12} - \hat{e}_{21}, \quad \dot{\hat{e}}_{21} = f_2 y_e + \hat{e}_{22} + k_2 \text{sign}(\varepsilon_2) \sqrt{|\varepsilon_2|}, \quad \dot{\hat{e}}_{22} = f_3 y_e + \mu_2 \text{sign}(\varepsilon_2). \end{aligned}$$

Коэффициенты $k=2$, $\mu=3$ выбраны одинаковыми для всех агентов и этапов каскада.

5.6. ТРАЕКТОРИИ СИСТЕМЫ

Для каждого вида помехи из п. 5.3 мы рассчитали 1000 траекторий. Для каждой траектории выбрали нулевые начальные условия. Результат моделирования для одной траектории представлен на рис. 3, а. На рис. 3, б изображен пример помехи (16).

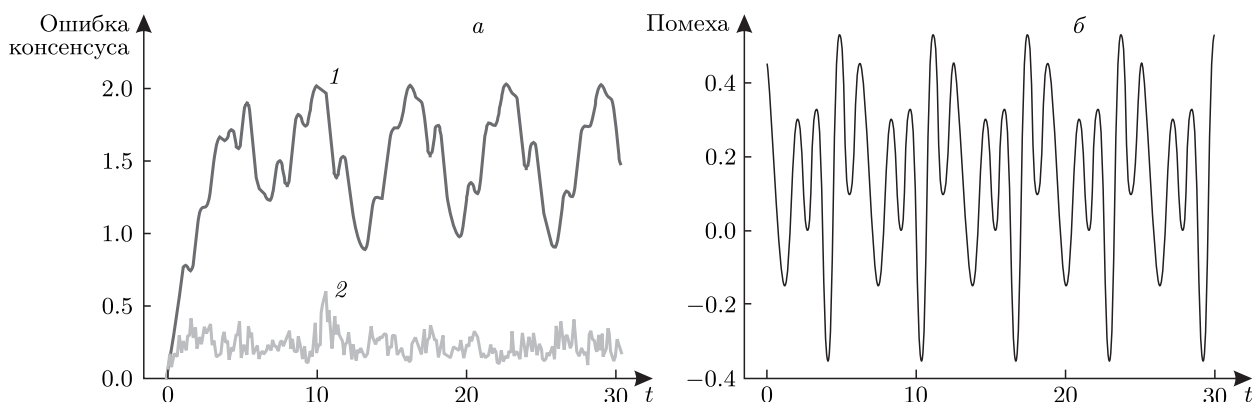


Рис. 3. Сравнение ошибки консенсуса при применении линейного протокола (1) и нового подхода (2) — а, и пример внешнего возмущения ξ_1 для одного агента — б.

5.7. СРАВНЕНИЕ ПОДХОДОВ

Для каждой траектории мы посчитали норму L_2 ошибки консенсуса v и помехи ξ :

$$\|x\|_{L_2} = \left(\int_0^{100} \|x(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы определить, насколько хорошо управление подавляет помеху, среднее отношение нормы ошибки консенсуса к норме помехи взяли равным

$$\frac{1}{1000} \sum_1^{1000} \frac{\|v\|_{L_2}}{\|\xi\|_{L_2}}. \quad (19)$$

Результаты экспериментов приведены в таблице. Эксперименты отличаются коэффициентами помехи, которые выбираются случайным образом. Видно, что новый подход снизил среднюю ошибку консенсуса примерно в 10 раз.

Среднее отношение нормы ошибки консенсуса к норме помехи на основе 1000 экспериментов

Вид помехи	Линейный протокол	Новый подход
I (16)	3.04	0.33
II (17)	3.90	0.44
III (18)	3.93	0.35

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях действия ограниченных возмущений на мультиагентную систему линейный протокол консенсуса без коммуникации становится уязвимым из-за необходимости больших коэффициентов обратной связи для сокращения ошибки консенсуса. Для решения этой проблемы можно использовать нелинейные наблюдатели для каждого агента, оценивающие

ошибку линейного наблюдателя. Мы выбрали каскадный наблюдатель на основе супер-скручивания, который эффективно оценивает устойчивые системы с ограниченной помехой.

Доказаны достаточные условия существования нелинейного наблюдателя и установлено, что его оценку возможно применять внутри ограниченного управления.

Моделирование показало, что наш подход позволяет снизить ошибку консенсуса для систем без коммуникации. Интересно, возможно ли полностью компенсировать помеху, используя более продвинутые методы ограниченного управления? Поиск ответа на этот вопрос может стать предметом будущих исследований.

В нашей работе мы рассматриваем агентов как SISO системы с устойчивой нулевой динамикой, поэтому другим возможным направлением продолжения исследований является расширение допустимого класса агентов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-00288).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dorri, A. Multi-agent systems: a survey / A. Dorri, S.S. Kanhere, R. Jurdak // IEEE Access. — 2018. — V. 6. — P. 28573–28593.
2. Hamann, H. Swarm Robotics: A Formal Approach / H. Hamann. — Cham : Springer, 2018.
3. Saber, R.O. Consensus protocols for networks of dynamic agents / R.O. Saber, R.M. Murray // Proceed. of the 2003 American Control Conf. — Denver, Colorado, USA : IEEE, 2003. — V. 2. — P. 951–956.
4. Li, Z. Dynamic consensus of linear multi-agent systems / Z. Li, Z. Duan, G. Chen // IET Control Theory Appl. — 2011. — V. 5, № 1. — Art. 19.
5. Adaptive consensus control of linear multiagent systems with dynamic event-triggered strategies / W. He, D. Xu, Q.-L. Han, F. Qian // IEEE Trans. Cybern. — 2020. — V. 50, № 7. — P. 2996–3008.
6. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint / Z. Li, Z. Duan, G. Chen, L. Huang // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 2010. — V. 57, № 1. — P. 213–224.
7. A new observer-type consensus protocol for linear multi-agent dynamical systems / Y. Zhao, G. Wen, Z. Duan [et al.] // Asian J. Control. — 2013. — V. 15, № 2. — P. 571–582.
8. Фомичёв, В.В. Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком / В.В. Фомичёв, А.О. Высоцкий // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 567–573.
9. Sliding mode fault tolerant consensus control for multi-agent systems based on super-twisting observer / P. Yang, X. Hu, Z. Wang, Z. Zhang // J. of Syst. Engineer. and Electron. — 2022. — V. 33, № 6. — P. 1309–1319.
10. Емельянов, С.В. Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка / С.В. Емельянов, С.К. Коровин, Л.В. Левантовский // Мат. моделирование. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 89–100.
11. Seeber, R. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm / R. Seeber, M. Horn // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). Graz : IEEE, 2018. — P. 120–125.
12. Bagge Carlson, F. ControlSystems.jl: a control toolbox in Julia / F. Bagge Carlson, M. Fält, A. Heimerson, O. Troeng // 60th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). Austin, TX, USA : IEEE, 2021. — P. 4847–4853.

CASCADE SUPER-TWISTING OBSERVER FOR LINEAR MULTI-AGENT SYSTEMS WITHOUT COMMUNICATION

V. V. Fomichev¹, A. I. Samarin²

¹*Department of Mathematics, School of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang, China*

¹*Federal Research Center "Informatics and Control" of RAS, Moscow, Russia*

^{1,2}*Lomonosov Moscow State University, Russia*

e-mail: ¹fomichev@cs.msu.su, ²samarin_aleksei@icloud.com

The paper addresses the consensus problem (i.e., the agreement of phase vectors) for a multi-agent system consisting of identical linear agents. The study focuses on the case where there is no communication between agents, meaning there is no exchange of information, and agent control is achieved through the agents' own sensors, providing incomplete information about the phase vector of the agent and its neighbors, with the information possibly being noisy. To solve this problem, a linear protocol based on observer data for systems under uncertainty is proposed. Cascade observers based on the "super-twisting" method are suggested as such observers. Sufficient conditions for the existence of a controller are obtained, where the observation error converges to zero under limited disturbances. An example illustrating the proposed approach is provided.

Keywords: multiagent systems, super-twisting observer, consensus, linear agents.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00288).

REFERENCES

1. Dorri, A. Multi-agent systems: a survey / A. Dorri, S.S. Kanhere, R. Jurdak // IEEE Access. — 2018. — V. 6. — P. 28573–28593.
2. Hamann, H. Swarm Robotics: A Formal Approach / H. Hamann. — Cham : Springer, 2018.
3. Saber, R.O. Consensus protocols for networks of dynamic agents / R.O. Saber, R.M. Murray // Proceed. of the 2003 American Control Conf. — Denver, Colorado, USA : IEEE, 2003. — V. 2. — P. 951–956.
4. Li, Z. Dynamic consensus of linear multi-agent systems / Z. Li, Z. Duan, G. Chen // IET Control Theory Appl. — 2011. — V. 5, № 1. — Art. 19.
5. Adaptive consensus control of linear multiagent systems with dynamic event-triggered strategies / W. He, D. Xu, Q.-L. Han, F. Qian // IEEE Trans. Cybern. — 2020. — V. 50, № 7. — P. 2996–3008.
6. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint / Z. Li, Z. Duan, G. Chen, L. Huang // IEEE Trans. Circuits Syst. I. — 2010. — V. 57, № 1. — P. 213–224.
7. A new observer-type consensus protocol for linear multi-agent dynamical systems / Y. Zhao, G. Wen, Z. Duan [et al.] // Asian J. Control. — 2013. — V. 15, № 2. — P. 571–582.
8. Fomichev, V.V. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order / V.V. Fomichev, A.O. Vysotskii // Differ. Equat. — 2019. — V. 55, № 4. — P. 553–560.
9. Sliding mode fault tolerant consensus control for multi-agent systems based on super-twisting observer / P. Yang, X. Hu, Z. Wang, Z. Zhang // J. of Syst. Engineer. and Electron. — 2022. — V. 33, № 6. — P. 1309–1319.
10. Emelyanov, S.V. A new class of second-order sliding mode algorithms / S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, L.V. Levantovsky // Matematicheskoye modelirovaniye. — 1990. — V. 2, № 3. — P. 89–100. [in Russian]
11. Seeber, R. Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm / R. Seeber, M. Horn // 15th Intern. Workshop on Variable Structure Systems (VSS). Graz : IEEE, 2018. — P. 120–125.
12. Bagge Carlson, F. ControlSystems.jl: a control toolbox in Julia / F. Bagge Carlson, M. Fält, A. Heimerson, O. Troeng // 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). Austin, TX, USA: IEEE, 2021. — P. 4847–4853.