ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 2, с. 175–186

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ В ПОЛУПОЛОСЕ В КВАДРАТУРАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

О. М. Джохадзе[1], С. С. Харибегашвили[2]

[1]*Тбилисский государственный университет имени Иване Джавахишвили, Грузия*
[2]*Грузинский технический университет, г. Тбилиси*
e-mail: [1]ojokhadze@yahoo.com, [2]kharibegashvili@yahoo.com

Поступила в редакцию 13.07.2023 г., после доработки 24.11.2023 г.; принята к публикации 07.12.2023 г.

Для неоднородного линейного уравнения колебаний струны рассмотрены периодическая по пространственной переменной и смешанная задачи в полуполосе, решения которых выписаны в квадратурах в виде конечных сумм. Для решения этих задач использованы тождество характеристического прямоугольника, инварианты Римана и метод характеристик.

Ключевые слова: уравнение колебания струны, периодическая и смешанные задачи, полуполоса, тождество характеристического прямоугольника, инварианты Римана, метод характеристик.

DOI: 10.31857/S0374064124020038, EDN: QNOYED

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В полуполосе $D:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<l,\ t>0\}$ рассмотрим задачу определения решения $u(x,t)$ уравнения колебаний струны

$$\Box u=f(x,t),\quad (x,t)\in D, \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным по переменной t условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{2}$$

и одному из следующих граничных условий по переменной x:

периодическим условиям

$$u(0,t)=u(l,t),\quad u_x(0,t)=u_x(l,t),\quad t\geqslant 0; \tag{3}$$

условиям Дирихле

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t),\quad t\geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь f, φ, ψ и μ_i, $i=1,2$, — заданные, а u — искомая действительные функции, $\Box:=\partial^2/\partial t^2-\partial^2/\partial x^2$ — волновой оператор.

Всюду ниже при рассмотрении в классической постановке этих задач в классе $C^2(\overline{D})$ будем предполагать выполненными следующие условия гладкости, наложенные на данные рассматриваемых задач, а также необходимые условия согласования до второго порядка включительно в угловых точках $(0,0)$ и $(l,0)$:

$$f\in C^1(\overline{D}),\quad \varphi\in C^2([0,l]),\quad \psi\in C^1([0,l]),$$

$$f(0,0)+\varphi''(0)=f(l,0)+\varphi''(l),$$

$$\varphi(0)=\varphi(l),\quad \varphi'(0)=\varphi'(l),\quad \psi(0)=\psi(l),\quad \psi'(0)=\psi'(l) \tag{5}$$

для задачи (1)–(3) и

$$f\in C^1(\overline{D}),\quad \varphi\in C^2([0,l]),\quad \psi\in C^1([0,l]),\quad \mu_i\in C^2([0,\infty)),\quad i=1,2,$$

$$f(0,0)+\varphi''(0)=\mu_1''(0),\quad f(l,0)+\varphi''(l)=\mu_2''(l),$$

$$\mu_1(0)=\varphi(0),\quad \mu_1'(0)=\psi(0),\quad \mu_2(l)=\varphi(l),\quad \mu_2'(0)=\psi(l) \tag{6}$$

для задачи (1), (2), (4).

Периодические и смешанные задачи для гиперболических уравнений и систем были предметом исследований многих авторов. Для них рассматривались вопросы существования, отсутствия единственности и представления в явном виде решений (см., например, работы [1–24] и приведённую в них литературу).

В данной статье, используя тождество характеристического прямоугольника, инварианты Римана, методы характеристик и априорных оценок, для неоднородного линейного уравнения колебаний струны рассмотрены периодическая по пространственной переменной и смешанная задачи в полуполосе, решения которых выписаны в квадратурах в виде конечных сумм слагаемых, зависящих от граничных и начальных значений этих решений и правой части рассматриваемого уравнения. Авторы надеются, что полученные представления решений найдут приложения при исследовании других начально-краевых задач как для линейных, так и для нелинейных гиперболических уравнений и систем.

2. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Рассмотрим прямоугольную область $D_T:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<l,\ 0<t<T\}$. Имеет место следующая

Лемма. *Для решения $u\in C^2(\overline{D})$ задачи (1)–(3) в области D_T при любом фиксированном $T>0$ справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{D}_T)}\leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)}+c_2\|\varphi\|_{C^1([0,l])}+c_3\|\psi\|_{C([0,l])} \tag{7}$$

с положительными постоянными $c_i=c_i(l,T)$, $i=1,2$, не зависящими от функций u, f, φ и ψ.

Доказательство. Умножив обе части уравнения (1) на $2u_t$ и проинтегрировав его затем по области D_τ, $0<\tau\leqslant T$, получим равенство

$$\int\limits_{D_\tau}(u_t^2)_t\,dx\,dt-2\int\limits_{D_\tau}u_{xx}u_t\,dx\,dt=2\int\limits_{D_\tau}fu_t\,dx\,dt. \tag{8}$$

Положим $\omega_\tau:=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant l,\ t=\tau,\ 0\leqslant\tau\leqslant T\}$; $\Gamma:=\Gamma_1\cup\omega_0\cup\Gamma_2$, где $\Gamma_1:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$; $\Gamma_2:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:x=l,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$. Пусть $\nu:=(\nu_x,\nu_t)$ — единичный вектор внешней нормали к границе ∂D_τ. Легко видеть, что

$$\nu_x\big|_{\omega_\tau}=0,\quad 0\leqslant\tau\leqslant T,\quad \nu_t\big|_{\omega_\tau}=1,\quad 0<\tau\leqslant T,$$

$$\nu_x\big|_{\Gamma_1}=-1,\quad \nu_x\big|_{\Gamma_2}=1,\quad \nu_t\big|_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}=0,\quad \nu_t\big|_{\omega_0}=-1. \tag{9}$$

Применяя интегрирование по частям, с учётом (2), (3) и (9) будем иметь

$$\int\limits_{D_\tau}(u_t^2)_t\,dx\,dt=\int\limits_{\partial D_\tau}u_t^2\nu_t\,ds=\int\limits_{\omega_\tau}u_t^2\,dx-\int\limits_{\omega_0}\psi^2\,dx,$$

$$-2\int\limits_{D_\tau} u_{xx}u_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{D_\tau}\big[u_x u_{tx}-(u_x u_t)_x\big]\,dx\,dt = \int\limits_{D_\tau}(u_x^2)_t\,dx\,dt - 2\int\limits_{\partial D_\tau} u_x u_t \nu_x\,ds =$$

$$= \int\limits_{\partial D_\tau} u_x^2\nu_t\,ds + 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u_x u_t\,dt = \int\limits_{\omega_\tau} u_x^2\,dx - \int\limits_{\omega_0}\varphi'^2\,dx, \tag{10}$$

где $\Gamma_{i,\tau} := \Gamma_i \cap \{t \leqslant \tau\},\ i=1,2.$

Равенство (8) в силу (10) перепишем в виде

$$w(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau}(u_x^2+u_t^2)\,dx = \int\limits_{\omega_0}(\varphi'^2+\psi^2)\,dx + 2\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt. \tag{11}$$

Принимая во внимание очевидные неравенства

$$2\bigg|\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt\bigg| \leqslant \int\limits_{D_\tau} f^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_\tau} u_t^2\,dx\,dt \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\omega_t} u_t^2\,dx\bigg)dt \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau w(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{\omega_0}(\varphi'^2+\psi^2)\,dx \leqslant l\big(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}\big) \leqslant l\big(\|\varphi\|^2_{C^1(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}\big),$$

из (11) получаем соотношение

$$w(\tau) \leqslant \int\limits_0^\tau w(t)\,dt + \alpha, \tag{12}$$

где

$$\alpha := l\big(T\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \|\varphi\|^2_{C^1(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}\big). \tag{13}$$

Применив лемму Гронуолла к неравенству (12), будем иметь

$$w(\tau) \leqslant \alpha e^T, \quad 0 < \tau \leqslant T. \tag{14}$$

Далее, поскольку в силу (2)

$$u(x,\tau) = \varphi(x) + \int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt,$$

можем записать

$$|u(x,\tau)|^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\bigg(\int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt\bigg)^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\tau\int\limits_0^\tau u_t^2(x,t)\,dt.$$

Отсюда, интегрируя по переменной x и учитывая (11), получаем неравенства

$$\int\limits_{\omega_\tau} u^2\,dx \leqslant 2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau\bigg(\int\limits_{\omega_t} u_t^2\,dx\bigg)\,dt \leqslant 2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{15}$$

При $(x,t) \in \overline{D}_T$, проинтегрировав очевидное соотношение

$$|u(x,t)|^2 = \bigg|u(\xi,t) + \int\limits_\xi^x u_x(x_1,t)\,dx_1\bigg|^2 \leqslant 2|u(\xi,t)|^2 + 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx$$

по переменной $\xi \in [0,l]$ (аналогично тому как было получено неравенство (15)), будем иметь

$$|u(x,t)|^2 \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^l |u(\xi,t)|^2\,d\xi + 2lw(t) = \frac{2}{l}\int\limits_{\omega_t} u^2\,dx + 2lw(t). \tag{16}$$

Из (14)–(16) следует, что

$$|u(x,t)|^2 \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma + 2lw(t) \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2\alpha\left(\frac{2T^2}{l}+l\right)e^T, \quad (x,t)\in \overline{D}_T,$$

откуда с учётом очевидного неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|$$

и (13) получим оценку (7), где

$$c_1 = c_0\sqrt{T}, \quad c_2 = 2+c_0, \quad c_3 = c_0, \quad c_0^2 = 2(2T^2+l^2)e^T.$$

Лемма доказана.

В частности, из этой леммы следует единственность решения задачи (1)–(3). Действительно, если $u_1, u_2 \in C^2(\overline{D})$ — два различных решения этой задачи, то для произвольного фиксированного $T>0$ функция $u := (u_2-u_1)|_{D_T} \in C^2(\overline{D}_T)$ будет решением соответствующей однородной задачи с тождественно равными нулю функциями f, φ и ψ, для которого справедлива априорная оценка (7). Отсюда следует, что $u_1 = u_2$ в области D_T, и поскольку T — произвольное положительное число, то $u_1 = u_2$ во всей области D.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3) В КВАДРАТУРАХ В ПОЛУПОЛОСЕ D В ВИДЕ КОНЕЧНОЙ СУММЫ

Пусть $u \in C^2(\overline{D})$ — классическое решение задачи (1)–(3). Рассмотрим новые неизвестные функции

$$v_1 := u_t - u_x, \quad v_2 := u_t + u_x, \tag{17}$$

являющиеся инвариантами Римана уравнения (1). Легко видеть, что в силу (2) и (17) имеет место формула

$$u(x,t) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (v_1+v_2)(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,t)\in\overline{D}. \tag{18}$$

С учётом (1)–(3) и (17) очевидно, что функции v_1 и v_2 являются решениями следующих задач:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)v_1 = f(x,t), \quad (x,t)\in D, \tag{19}$$

$$v_1(x,0) = \varphi_1(x) := \psi(x) - \varphi'(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{20}$$

$$v_1(0,t) = v_1(l,t), \quad t\geqslant 0, \tag{21}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)v_2 = f(x,t), \quad (x,t)\in D, \tag{22}$$

$$v_2(x,0) = \varphi_2(x) := \psi(x) + \varphi'(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{23}$$

$$v_2(0,t) = v_2(l,t), \quad t\geqslant 0. \tag{24}$$

Замечание 1. В силу (18) для нахождения решения задачи (1)–(3) достаточно решить задачи (19)–(21) и (22)–(24).

Обозначим через G_1 треугольник, ограниченный прямыми $t=0$, $t=x$ и $x=l$, а через G_n — параллелограмм, ограниченный прямыми $x=0$, $x=l$, $t=x+(n-2)l$ и $t=x+(n-1)l$, $n\geqslant 2$.

Проинтегрировав уравнение (19) вдоль характеристики $t-x=\mathrm{const}$ с учётом начального условия (20) в замкнутой области $\overline{G}_1$, получим для функции v_1 представление

$$v_1(x,t)=\varphi_1(x-t)+\int\limits_{x-t}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_1. \tag{25}$$

Аналогично в случае $(x,t)\in\overline{G}_2$, интегрируя уравнение (19) вдоль характеристического отрезка с концами в точках $(0,t-x)$ и (x,t), будем иметь

$$v_1(x,t)=v_1(0,t-x)+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_2. \tag{26}$$

Поскольку в силу (21) $v_1(0,t-x)=v_1(l,t-x)$ и точка $(l,t-x)\in\overline{G}_1$, то согласно (25) запишем

$$v_1(l,t-x)=\varphi_1(l+x-t)+\int\limits_{l+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi,$$

откуда, учитывая (26), получаем для функции v_1 в замкнутой области $\overline{G}_2$ представление

$$v_1(x,t)=\varphi_1(l+x-t)+\int\limits_{l+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_2. \tag{27}$$

Аналогичные рассуждения для точки $(x,t)\in\overline{G}_3$ приводят к следующей формуле для функции v_1:

$$v_1(x,t)=\varphi_1(2l+x-t)+\int\limits_{2l+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-2l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi.$$

С помощью этих процедур индукцией по $n>3$ для функции v_1 можно показать, что имеет место представление

$$\begin{gathered}v_1(x,t)=\varphi_1\big((n-1)l+x-t\big)+\int\limits_{(n-1)l+x-t}^{l} f\big(\xi,\xi+t-x-(n-1)l\big)\,d\xi+\\+\sum_{k=1}^{n-2}\int\limits_{0}^{l} f(\xi,\xi+t-x-kl)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{G}_n,\quad n\geqslant 3.\end{gathered} \tag{28}$$

Действительно, предположим, что равенство (28) справедливо для $n=m$, $m\geqslant 3$, и покажем его справедливость для $n=m+1$. Если точка (x,t) принадлежит области G_{m+1}, то аналогично (26) с учётом (21) и нашего предположения (28) при $n=m$, $m\geqslant 3$, будем иметь

$$\begin{gathered}v_1(x,t)=v_1(0,t-x)+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=v_1(l,t-x)+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=\\=\varphi_1(ml+x-t)+\int\limits_{ml+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-ml)\,d\xi+\sum_{k=1}^{m-2}\int\limits_{0}^{l} f\big(\xi,\xi+t-x-(k+1)l\big)\,d\xi+\\+\int\limits_{0}^{l} f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_{0}^{x} f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=\end{gathered}$$

$$
=\varphi_1(ml+x-t)+\int\limits_{ml+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-ml)\,d\xi+\sum_{k=2}^{m-1}\int\limits_0^l f(\xi,\xi+t-x-kl)\,d\xi+
$$
$$
+\int\limits_0^l f(\xi,\xi+t-x-l)\,d\xi+\int\limits_0^x f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi=
$$
$$
=\varphi_1(ml+x-t)+\int\limits_{ml+x-t}^{l} f(\xi,\xi+t-x-ml)\,d\xi+\sum_{k=1}^{m-1}\int\limits_0^l f(\xi,\xi+t-x-kl)\,d\xi+\int\limits_0^x f(\xi,\xi+t-x)\,d\xi.
$$

Теперь рассмотрим задачу (22)–(24). Обозначим через E_1 треугольник, ограниченный прямыми $t=0$, $t=-x+l$ и $x=0$, а через E_n — параллелограмм, ограниченный прямыми $x=0$, $x=l$, $t=-x+(n-1)l$ и $t=-x+nl$, $n\geqslant 2$.

Проинтегрировав уравнение (22) вдоль характеристики $t+x=\mathrm{const}$ с учётом начального условия (23) в замкнутой области $\overline{E}_1$, получим для функции v_2 представление

$$
v_2(x,t)=\varphi_2(x+t)+\int\limits_x^{x+t} f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_1. \tag{29}
$$

Аналогично для случая $(x,t)\in\overline{E}_2$, интегрируя уравнение (23) вдоль характеристического отрезка с концами в точках (x,t) и $(l,x+t-l)$, найдём

$$
v_2(x,t)=v_2(l,x+t-l)+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_2. \tag{30}
$$

Поскольку $v_2(l,x+t-l)=v_2(0,x+t-l)$ в силу (24) и точка $(0,x+t-l)\in\overline{E}_1$, то согласно (29) будем иметь равенство

$$
v_2(0,x+t-l)=\varphi_2(x+t-l)+\int\limits_0^{x+t-l} f(\xi,-\xi+x+t-l)\,d\xi,
$$

откуда и из (30) следует, что для функции v_2 в замкнутой области $\overline{E}_2$ справедливо представление

$$
v_2(x,t)=\varphi_2(x+t-l)+\int\limits_0^{x+t-l} f(\xi,-\xi+x+t-l)\,d\xi+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_2. \tag{31}
$$

Аналогичные рассуждения для точки $(x,t)\in\overline{E}_3$ приводят к следующей формуле для функции v_2:

$$
v_2(x,t)=\varphi_2(x+t-2l)+\int\limits_0^{x+t-2l} f(\xi,-\xi+x+t-2l)\,d\xi+\int\limits_0^l f(\xi,-\xi+x+t-l)\,d\xi+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi.
$$

Выполнив эти же процедуры, индукцией по $n>3$ (как и в случае нахождения формулы (28)) получим для функции v_2 следующее представление:

$$
v_2(x,t)=\varphi_2\big(x+t-(n-1)l\big)+\int\limits_0^{x+t-(n-1)l} f\big(\xi,-\xi+x+t-(n-1)l\big)\,d\xi+
$$
$$
+\sum_{k=1}^{n-2}\int\limits_0^l f(\xi,-\xi+x+t-kl)\,d\xi+\int\limits_x^l f(\xi,-\xi+x+t)\,d\xi,\quad (x,t)\in\overline{E}_n,\quad n\geqslant 3. \tag{32}
$$

Замечание 2. Для нахождения значения функций v_1 или v_2 в произвольной точке $(x,t)\in\overline{D}$ сначала следует определить какой области (G_n или E_n) эта точка принадлежит. Легко видеть, что число $n=n(x,t)$, определяющее область G_n или E_n, вычисляется по формуле

$$n=\left[\frac{t-x}{l}\right]+2\left(\left[\frac{t+x}{l}\right]+1\right),$$

где $[\,\cdot\,]$ — целая часть действительного числа, и по найденному числу значения функций v_1 и v_2 определяются, соответственно, по формулам (25), (27), (28) и (29), (31), (32). В свою очередь решение u задачи (1)–(3) определяется по формуле (18).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (5). Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение класса $C^2(\overline{D})$, которое представимо в квадратурах формулами (25), (27)–(29), (31), (32) и (18).*

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2), (4) В КВАДРАТУРАХ В ПОЛУПОЛОСЕ D В ВИДЕ КОНЕЧНОЙ СУММЫ

Разобьём полуполосу D на квадраты $K_m:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x<l,\ ml<t<(m+1)l\}$, $m=0,1,2,\ldots$, с вершинами в точках $A_m(0,ml)$, $B_m(0,(m+1)l)$, $C_m(l,(m+1)l)$, $F_m(l,ml)$ и на четыре прямоугольных треугольника $K_m^1:=\Delta A_mO_mF_m$, $K_m^2:=\Delta A_mO_mB_m$, $K_m^3:=\Delta F_mO_mC_m$, $K_m^4:=\Delta B_mO_mC_m$, где точка $O_m(l/2,(m+1/2)l)$ — центр квадрата K_m.

Пусть сначала $(x,t)\in K_0$. В треугольнике K_0^1 в силу условий (2) и формулы Даламбера справедливо равенство [17, стр. 59]

$$u(x,t)=A_1(\varphi,\psi,f)(x,t):=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-t)+\varphi(x+t)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{x,t}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\ \ (x,t)\in K_0^1, \tag{33}$$

где $\Omega^1_{x,t}$ — треугольник с вершинами в точках (x,t), $(x-t,0)$ и $(x+t,0)$.

Как известно, для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции v и характеристического для уравнения (1) прямоугольника $PP_1P_2P_3$ из области её определения имеет место тождество характеристического прямоугольника [24, стр. 173]

$$v(P)=v(P_1)+v(P_2)-v(P_3)+\frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3}\Box v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{34}$$

где P и P_3, а также P_1 и P_2 соответственно — противоположные вершины этого прямоугольника, причём ордината точки P больше значений ординат остальных точек.

Пусть теперь $(x,t)\in K_0^2$. Тогда, применяя равенство (34) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0,t-x)$, $P_2(t,x)$ и $P_3(t-x,0)$ и формулу (33) для точки $P_2(t,x)\in K_0^1$, с учётом (1) и (4) получаем

$$u(x,t)=A_2(\varphi,\psi,\mu_1,f)(x,t):=\mu_1(t-x)+\frac{1}{2}\left[\varphi(t+x)-\varphi(t-x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^2_{x,t}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in K_0^2. \tag{35}$$

Здесь $\Omega^2_{x,t}$ — четырехугольник $P\widetilde{P}_2P_3P_1$, $\widetilde{P}_2:=\widetilde{P}_2(t+x,0)$.

Аналогично будем иметь

$$u(x,t)=A_3(\varphi,\psi,\mu_2,f)(x,t):=\mu_2(x+t-l)+\frac{1}{2}\left[\varphi(x-t)-\varphi(2l-x-t)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{2l-x-t}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^3_{x,t}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in K^3_0, \tag{36}$$

и

$$u(x,t)=A_4(\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2,f)(x,t):=\mu_1(t-x)+\mu_2(x+t-l)-\frac{1}{2}\left[\varphi(t-x)+\varphi(2l-t-x)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{2l-t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^4_{x,t}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in K^4_0. \tag{37}$$

В формулах (36) и (37) соответственно $\Omega^3_{x,t}$ — четырехугольник с вершинами $P^3(x,t)$, $P^3_1(l,x+t-l)$, $P^3_2(x-t,0)$ и $P^3_3(2l-x-t,0)$, а $\Omega^4_{x,t}$ — пятиугольник с вершинами $P^4(x,t)$, $P^4_1(0,t-x)$, $P^4_2(t-x,0)$, $P^4_3(2l-x-t,0)$ и $P^4_4(l,x+t-l)$.

Пусть теперь $P_0:=P_0(x,t)\in\overline{D}\setminus\overline{K}_0$. Легко видеть, что $P_0\in K_m$, $m\geqslant 1$, где

$$m=m(t):=[t/l],\quad t>0. \tag{38}$$

Обозначим через $P_0M_1P_1N_1$ характеристический относительно уравнения (1) прямоугольник, вершины M_1 и N_1 которого лежат соответственно на прямых $x=0$ и $x=l$, т.е. $M_1(0,t-x)$, $N_1(l,t+x-l)$, $P_1(l-x,t-l)$. Поскольку $P_1\in K_{m-1}$, то аналогичным образом построим характеристический прямоугольник $P_1M_2P_2N_2$, вершины M_2 и N_2 которого лежат соответственно на прямых $x=0$ и $x=l$. Продолжив этот процесс, получим характеристический прямоугольник $P_{i-1}M_iP_iN_i$ с вершинами M_i и N_i соответственно на прямых $x=0$ и $x=l$, причём так как $P_0\in K_m$, то

$$P_m\in K_0, \tag{39}$$

где $P_m=(l-x,t-ml)$, если m — нечётное число, и $P_m=(x,t-ml)$, когда m — чётное. При этом если точка $P_0\in K^1_m(K^4_m)$, то $P_m\in K^1_0(K^4_0)$ для любого $m\geqslant 1$, а если точка $P_0\in K^2_m(K^3_m)$, то $P_m\in K^3_0(K^2_0)$ для нечётного числа m и $P_m\in K^2_0(K^3_0)$ для чётного m. Координаты точек M_i и N_i следующие:

$$M_i(0,t-x-(i-1)l),\quad N_i(l,t+x-il),\quad i=1,3,5,\ldots,$$
$$M_i(0,t+x-il),\quad N_i(l,t-x-(i-1)l),\quad i=2,4,6,\ldots$$

Легко видеть, что если $P_0\in K_1$, то, используя тождество (34), будем иметь равенства

$$u(P_0)=u(M_1)+u(N_1)-u(P_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$
$$=\mu_1(M_1)+\mu_2(N_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau-u(P_1). \tag{40}$$

Индукцией по числу m доказывается справедливость следующего представления для решения $u\in C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), (4) в полуполосе D:

$$u(P_0)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\left(\mu_1(M_i)+\mu_2(N_i)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_{i-1}M_iP_iN_i}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right)+(-1)^m u(P_m),\quad P_0\in K_m, \tag{41}$$

где в силу (39) для нечётного числа m

$$u(P_m)=\begin{cases} A_1(\varphi,\psi,f)(P_m), & P_0\in K_m^1,\\ A_3(\varphi,\psi,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^2,\\ A_2(\varphi,\psi,\mu_1,f)(P_m), & P_0\in K_m^3,\\ A_4(\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^4,\end{cases} \tag{42}$$

а для чётного m

$$u(P_m)=\begin{cases} A_1(\varphi,\psi,f)(P_m), & P_0\in K_m^1,\\ A_2(\varphi,\psi,\mu_1,f)(P_m), & P_0\in K_m^2,\\ A_3(\varphi,\psi,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^3,\\ A_4(\varphi,\psi,\mu_1,\mu_2,f)(P_m), & P_0\in K_m^4.\end{cases} \tag{43}$$

Здесь операторы A_i, $i=\overline{1,4}$, определены формулами (33), (35)–(37), а число m — равенством (38).

Действительно, в силу (39) формула (40) имеет место при $m=1$. Предположим теперь, что представление (40) справедливо для $m=k$, $k\geqslant 2$, покажем его справедливость и для $m=k+1$. Если $P_0\in K_{k+1}$, то очевидно, что $P_1\in K_k$, тогда в силу (34) и равенства (40) будем иметь

$$u(P_0)=u(M_1)+u(N_1)-u(P_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\mu_1(M_1)+\mu_2(N_1)-\bigg[\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\bigg(\mu_1(M_{i+1})+\mu_2(N_{i+1})+\frac{1}{2}\int\limits_{P_iM_{i+1}P_{i+1}N_{i+1}} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\bigg)+$$

$$+(-1)^k u(P_{k+1})\bigg]+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\mu_1(M_1)+\mu_2(N_1)+\sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j-1}\bigg(\mu_1(M_j)+\mu_2(N_j)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_{j-1}M_jP_jN_j} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\bigg)+$$

$$+(-1)^{k+1}u(P_{k+1})+\frac{1}{2}\int\limits_{P_0M_1P_1N_1} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\bigg(\mu_1(M_i)+\mu_2(N_i)+\frac{1}{2}\int\limits_{P_{i-1}M_iP_iN_i} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\bigg)+(-1)^{k+1}u(P_{k+1}).$$

Отметим, что другие представления решения задачи (1), (2), (4) в виде бесконечных рядов можно найти, например, в работах [17–24].

Замечание 3. Аналогичные результаты справедливы и для уравнения $w_{\tau\tau}-a^2w_{\xi\xi}=$ $=F(\xi,\tau)$, где $a:=\mathrm{const}>0$, так как преобразованием переменных $x=\xi$ и $t=a\tau$ это уравнение переходит в уравнение (1) при $F(\xi,\tau)=a^2f(\xi,a\tau)$, а полоса $\{\xi,\tau\in\mathbb{R}^2: 0<\xi<l,\ \tau>0\}$ переходит в полосу D.

Замечание 4. Вопрос единственности классического решения $u\in C^2(\overline{D})$ задачи (1), (2), (4) раскрыт в учебнике [20, с. 482].

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1), (2), (4) имеет единственное классическое решение класса $C^2(\overline{D})$, которое представимо в квадратурах формулами (33), (35)–(37), (41)–(43), где число m определяется равенством (38).*

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда имени Шота Руставели (проект FR-21-7307).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rabinowitz, P. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Aple. Math. — 1984. — V. 37. — P. 189–206.
2. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term / E. Feireisl // Chechosl. Math. J. — 1988. — V. 38, № 1. — P. 78–87.
3. Brezis, H. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles / H. Brezis // Bull. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 8, № 3. — P. 409–426.
4. Vejvoda, O. Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions / O. Vejvoda. — Leiden : Martinus Nijhoff Publishers, 1982. — 358 p.
5. Рудаков, И.А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле / И.А. Рудаков // Изв. вузов. Математика. — 2007. — № 2. — С. 46–55.
6. Рудаков, И.А. Нетривиальное периодическое решение нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями / И.А. Рудаков // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 10. — С. 1392–1399.
7. Kiguradze, T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations / T. Kiguradze // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. — 2000. — V. 39, № 2. — P. 173–185.
8. Kiguradze, T. On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations / T. Kiguradze // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — V. 259, № 1. — P. 253–276.
9. Асанова, А.Т. Периодические на плоскости решения системы гиперболических уравнений второго порядка / А.Т. Асанова // Мат. заметки. — 2017. — Т. 101, № 1. — Р. 20–30.
10. Колесов, А.Ю. Влияние квадратичной нелинейности на динамику периодических решений волнового уравнения / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 1. — Р. 93–118.
11. Корзюк, В.И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В.И. Корзюк, И.И. Столярчук // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 77–88.
12. Корзюк, В.И. Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения / В.И. Корзюк // Докл. НАН Беларуси. — 2017. — Т. 61, № 3. — С. 7–13.
13. Корзюк, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Корзюк. — М. : Ленанд, 2021. — 480 с.
14. Харибегашвили, С.С. Периодическая по времени задача для слабо нелинейного телеграфного уравнения с наклонной производной в краевом условии / С.С. Харибегашвили, О.М. Джохадзе // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 10. — С. 1376–1392.
15. Харибегашвили, С.С. О разрешимости периодической задачи для слабо нелинейного телеграфного уравнения / С.С. Харибегашвили, О.М. Джохадзе // Сибирский мат. журн. — 2016. — Т. 57, № 4. — С. 735–743.
16. Джохадзе, О.М. Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны / О.М. Джохадзе // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 591–606.

17. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учеб. пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
18. Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. — 5-е изд. — М. : Наука, 1979. — 686 с.
19. Бицадзе, А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко. — 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1985. — 310 с.
20. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — 4-е изд. — М. : Наука, 1981.
21. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова [и др.]. — М. : Физматлит, 2003. — 288 с.
22. Смирнов, М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М.М. Смирнов. — 2-е изд., доп. — М. : Наука, 1975. — 127 с.
23. Кошляков, Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. — 2-е изд. — М. : Высшая школа, 1970. — 710 с.
24. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1982.

SOLUTION OF SOME HALF-STRIP PROBLEMS IN QUADRATURES FOR THE STRING VIBRATION EQUATION

O. M. Jokhadze[1], S. S. Kharibegashvili[2]

[1] *Andrea Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia*
[2] *Georgian Technical University, Department of Mathematics, Tbilisi*
e-mail: [1] ojokhadze@yahoo.com, [2] kharibegashvili@yahoo.com

In this paper, for an inhomogeneous string vibration equation, we consider a periodic in spatial variable and a mixed half-strip problems, the solutions of which are written in quadratures in the form of finite sums. When solving these problems we use the characteristic rectangle identity, Riemann invariants and the method of characteristics.

Keywords: string vibration equation, periodic and mixed problems, half-strip, characteristic rectangle identity, Riemann invariants, method of characteristics.

FUNDING

This work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (project FR-21-7307).

REFERENCES

1. Rabinowitz, P. Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equations / P. Rabinowitz // Comm. Pure Aple. Math. — 1984. — V. 37. — P. 189–206.
2. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term / E. Feireisl // Chechosl. Math. J. — 1988. — V. 38, № 1. — P. 78–87.
3. Brezis, H. Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles / H. Brezis // Bull. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 8, № 3. — P. 409–426.
4. Vejvoda, O. Partial Differential Equations: Time-Periodic Solutions / O. Vejvoda. — Leiden : Martinus Nijhoff Publishers, 1982. — 358 p.
5. Rudakov, I.A. Periodic solutions of the nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions / I.A. Rudakov // News of Higher Educational Institutions. Mathematics. — 2007. — № 2. — P. 46–55. [in Russian]
6. Rudakov, I.A. Nontrivial periodic solution of a nonlinear wave equation with homogeneous boundary conditions / I.A. Rudakov // Differ. Equat. — 2005. — V. 41, № 10. — P. 1467–1475.
7. Kiguradze, T. On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations / T. Kiguradze // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. — 2000. — V. 39, № 2. — P. 173–185.
8. Kiguradze, T. On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations / T. Kiguradze // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — V. 259, № 1. — P. 253–276.

9. Asanova, A.T. Periodic solutions in the plane of systems of second-order hyperbolic equations / A.T. Asanova // Math. Notes. — 2017. — V. 101, № 1. — P. 39–47.
10. Kolesov, A.Yu. The influence of quadratic nonlinearity on the dynamics of periodic solutions of the wave equation / A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov // Math. Collection. — 2002. — V. 193, № 1. — P. 93–118.
11. Korzyuk, V.I. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Differ. Equat. — 2017. — V. 53, № 1. — P. 74–87.
12. Korzyuk, V.I. The characteristic parallelogram method using the example of the first mixed problem for a one-dimensional wave equation / V.I. Korzyuk // Reports of the National Academy of Sciences of Belarus. — 2017. — V. 61, № 3. — P. 7–13.
13. Korzyuk, V.I. Equations of mathematical physics / V.I. Korzyuk. — Moscow : Lenand, 2021. — 480 p. [in Russian]
14. Kharibegashvili, S.S. Time-periodic problem for a weakly nonlinear telegraph equation with directional derivative in the boundary condition / S.S. Kharibegashvili, O.M. Dzhokhadze // Differ. Equat. — 2015. — V. 51, № 10. — P. 1369–1386.
15. Kharibegashvili, S.S. On solvability of a periodic problem for a nonlinear telegraph equation / S.S. Kharibegashvili, O.M. Dzhokhadze // Siberian Math. J. — 2016. — V. 57, № 4. — P. 735–743.
16. Dzhokhadze, O.M. Mixed problem with a nonlinear boundary condition for a semilinear wave equation / O.M. Dzhokhadze // Differ. Equat. — 2022. — V. 58, № 5. — P. 593–609.
17. Tikhonov, A.N. Equations of mathematical physics / A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. — Moscow : Nauka, 1977. — 736 p. [in Russian]
18. Budak, B.M. Collection of problems in mathematical physics / B.M. Budak, A.A. Samarsky, A.N. Tikhonov. — Moscow : Nauka, 1979. — 686 p. [in Russian]
19. Bitsadze, A.V. Collection of problems on the equations of mathematical physics / A.V. Bitsadze, D.F. Kalinichenko. Moscow : Nauka, 1985. — 310 p. [in Russian]
20. Vladimirov, V.S. Equations of mathematical physics / V.S. Vladimirov. — Moscow : Nauka, 1981. [in Russian]
21. Collection of problems on the equations of mathematical physics / V.S. Vladimirov, A.A. Vasharin, Kh.Kh. Karimova [et al.]. — Moscow : Fizmatlit, 2003. — 288 p. [in Russian]
22. Smirnov, M.M. Problems on the equations of mathematical physics / M.M. Smirnov. — Moscow : Nauka, 1975. — 127 p. [in Russian]
23. Koshlyakov, N.S. Partial differential equations of mathematical physics / N.S. Koshlyakov, E.B. Gliner, M.M. Smirnov. — Moscow : Vyschaya Schkola, 1970. — 710 p. [in Russian]
24. Bitsadze, A.V. Equations of mathematical physics / A.V. Bitsadze. — Moscow : Nauka, 1982. [in Russian]