ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2024, том 60, № 3, с. 365–374

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.925.75

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ МАЛОГО НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Д. П. Емельянов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

e-mail: emelianov@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 04.10.2023 г., после доработки 04.10.2023 г.; принята к публикации 26.12.2023 г.

Рассмотрена краевая задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с нерегулярным вырождением в прямоугольнике с нецелым порядком вырождения и аналитическими коэффициентами. Методом спектрального выделения особенностей построено формальное решение задачи в виде ряда, характер неаналитической зависимости решения от переменной y в окрестности $y=0$ выписан явно. Методом функции Грина доказана сходимость построенного ряда к классическому решению задачи.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, вырождающееся эллиптическое уравнение, нецелое вырождение, аналитическая теория дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064124030069, EDN: PMAFMB

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольной области $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<b\}$:

$$u_{xx}+y^m u_{yy}+c(y)u_y-a(y)u=f(x,y), \quad (x,y)\in D,$$
$$u(x,y)=0, \quad (x,y)\in\partial D. \tag{1}$$

Здесь $a(y), c(y)$ и $f(x,y)$ — некоторые аналитические функции переменной y в комплексной области G такой, что $[0,b]\subset G$. Также потребуем, чтобы были выполнены условия $a(y)\geqslant 0$ при $y\in[0,b]$ и $c(0)=0$. Порядок вырождения уравнения в (1) определяется постоянной m. Будем полагать, что $0<m<1$, $m\notin\mathbb{Q}$.

Классическое решение задачи (1) будем искать в классе $C^2(D)\cap C(\overline{D})$. Покажем, что такое решение существует и единственно. Получим представление решения задачи в виде сходящегося ряда, в котором характер неаналитической зависимости решения от переменной y в окрестности $y=0$ будет выписан явно. Таким образом, будет предложен аналог теоремы Коши–Ковалевской для случая эллиптических уравнений с вырождением нецелого порядка.

Данная работа продолжает цикл публикаций, в которых аналогичные результаты получены при других порядках вырождения уравнения: $m=2$ [1; 2; 3, гл. X; 4; 5], $m=1$ [6] и $1<m<2$ [7].

Уравнения данного типа исследовались разными авторами. Отметим некоторые результаты. В работах М.В. Келдыша [8; 9, с. 299–301] рассмотрены различные краевые задачи вида (1) для однородного уравнения в области с гладкой границей, доказаны теоремы существования и единственности. Результаты в рамках аналитической теории дифференциальных уравнений получены А.И. Янушаускасом [10, гл. 3–5]. Также следует отметить работы [11; 12, с. 88–94; 13, с. 73–88; 14–17].

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема. *Пусть правая часть $f(x,y)$ уравнения задачи (1) аналитична в области G как функция переменной y при каждом фиксированном $x\in[0,1]$, имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, при каждом фиксированном $y\in(0,b)$ принадлежит классу Гёльдера как функция переменной x. Тогда существует классическое решение задачи (1) в виде ряда*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\eta_k(y)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\overline{D},$$

который сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$, допускает двукратное почленное дифференцирование по x и по y внутри области D, функции $\eta_k(y)\in A(G\setminus\{0\})$ в достаточно малой окрестности U точки $y=0$ представимы в виде

$$\eta_k(y)=\psi_{k,0}(y)+\sum_{n=1}^{+\infty}y^{n(2-m)}\psi_{k,n}(y),\quad y\in U\subset G, \tag{2}$$

где функции $\psi_{k,n}(y)$ аналитичны в U, $\psi_{k,0}(0)=0$, ряд (2) сходится в $A(U\setminus\{0\})$.

Доказательство данной теоремы будет приведено ниже после доказательств лемм.

3. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решение задачи (1) будем искать в виде ряда по системе функций $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}Y_k(y)\sin(\pi kx),\quad (x,y)\in\overline{D}, \tag{3}$$

где функции $Y_k(y)$ являются решениями одномерных краевых задач

$$\begin{gathered}y^mY_k''+c(y)Y_k'-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k=f_k(y),\quad 0<y<b,\quad k\in\mathbb{N},\\ Y_k(0)=Y_k(b)=0,\quad k\in\mathbb{N}.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $f_k(y)$ — коэффициенты разложения функции $f(x,y)$ в ряд по системе $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0,1]$.

Решения задачи (4) будем искать в виде $Y_k(y)=\hat{Y}_k(y)+C_1Y_k^0(y)$, где

$$y^m\hat{Y}_k''+c(y)\hat{Y}_k'-(a(y)+\pi^2k^2)\hat{Y}_k=f_k(y),\quad \hat{Y}_k(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

$$y^mY_k^{0\,\prime\prime}+c(y)Y_k^{0\,\prime}-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k^0=0,\quad Y_k^0(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Также рассмотрим ещё один набор вспомогательных задач для функций $Y_k^b(y)$:

$$y^mY_k^{b\,\prime\prime}+c(y)Y_k^{b\,\prime}-(a(y)+\pi^2k^2)Y_k^b=0,\quad Y_k^b(b)=0,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Зафиксируем произвольное $k\in\mathbb{N}$ и построим частное решение задачи (5) явно в некоторой окрестности $U\equiv\{y\in\mathbb{C}:|y|<\varepsilon\}$ точки $y=0$, где $\varepsilon>0$ таково, что $U\subset G$.

Пусть функция $z_0(y)$ — единственное решение задачи

$$y^mz_0''=f_k(y),\quad z_0(0)=z_0'(0)=0. \tag{8}$$

В предположении аналитичности функции $f(x,y)$ по переменной $y\in G$ все коэффициенты $f_k\in A(G)$. Тогда в окрестности U имеет место разложение

$$f_k(y)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_{k,n}y^n, \quad y\in U, \quad k\in\mathbb{N},$$

а функция $z_0(y)$ примет вид

$$z_0(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f_{k,n}y^{n+2-m}}{(n-m+1)(n-m+2)}\equiv y^{2-m}\sum_{n=0}^{+\infty} z_{0,n}y^n, \quad y\in U, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Построим новые функции $z_j(y)$, $j\in\mathbb{N}$, по индукции. Пусть функция $z_{j-1}(y)$ представима в виде

$$z_{j-1}(y)=y^{j(2-m)}\sum_{n=0}^{+\infty} z_{j-1,n}y^n, \quad y\in U, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Потребуем, чтобы функция $z_j(y)$ была решением задачи Коши

$$y^m z_j''+c(y)z_{j-1}'-(a(y)+\pi^2k^2)z_{j-1}=0, \quad z_j(0)=z_j'(0)=0, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Принимая во внимание соотношения (9), (10) для $z_{j-1}(y)$ и аналитичность коэффициентов $a(y)$, $c(y)$ в U, получаем представление

$$z_j(y)=y^{(j+1)(2-m)}\sum_{n=0}^{+\infty} z_{j,n}y^n, \quad y\in U, \quad k\in\mathbb{N}, \quad j\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Все ряды сходятся в $A(U)$. Коэффициенты $z_{j,n}$ зависят только от коэффициентов $z_{j-1,n}$ и коэффициентов Тейлора функций $a(y)$ и $c(y)$.

Лемма 1. *Для любого $k\in\mathbb{N}$ существует аналитическое в $G\setminus\{0\}$ решение $\hat{Y}_k(y)$ задачи (5). При этом в окрестности U точки $y=0$ оно представимо рядом*

$$\hat{Y}_k(y)=\sum_{j=0}^{+\infty} z_j(y),$$

который сходится в классах $A(U\setminus\{0\})$ и $C(K)$ для любого множества $K\equiv\{y\in\mathbb{C}:|y|\leqslant\varepsilon'\}\subset G$, где $\varepsilon'>0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольное компактное множество $K\subset U\subset G$. Выберем индекс $j_0\in\mathbb{N}$ такой, что $(j_0+1)(2-m)\geqslant 2$. Тогда для функции $z_j(y)$, $j\geqslant j_0$, при $y\in K$ имеет место интегральное представление

$$z_j(y)=\int_0^y (y-\eta)\eta^{-m}((a(\eta)+\pi^2k^2)z_{j-1}(\eta)-c(\eta)z_{j-1}'(\eta))d\eta. \tag{11}$$

Так как функции $a(y)$, $c(y)y^{-1}$ и $z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}$ аналитичны в U, то они принадлежат классу $C^1(K)$. Значит, можно выбрать постоянные $M, M_{j_0}\geqslant 0$ такие, что

$$|a(y)+\pi^2k^2|\leqslant M, \quad |c(y)y^{-1}|\leqslant M, \quad y\in K,$$

$$|z_{j_0}(y)y^{-(j_0+1)(2-m)}|\leqslant M_{j_0}, \quad y\in K,$$

$$|(z_{j_0}(y)y^{-(j_0+1)(2-m)})'|\leqslant M_{j_0}\frac{(j_0+1)(2-m)}{|y|}, \quad y\in K\setminus\{0\}.$$

Покажем по индукции, что в общем случае имеют место оценки

$$|z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}| \leqslant M_j, \quad y \in K, \quad j \geqslant j_0,$$

$$|(z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)})'| \leqslant M_j \frac{(j+1)(2-m)}{|y|}, \quad y \in K \setminus \{0\}, \quad j \geqslant j_0,$$

$$M_{j+1} = M_j \frac{12M}{(j+1)(2-m)}, \quad j \geqslant j_0.$$

Подставив оценки для $z_{j-1}(y)$ в формулу (11), получим

$$|z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}| \leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^y |y-\eta|\,|\eta|^{-m}(M|z_{j-1}(\eta)| + \eta M|z'_{j-1}(\eta)|)\,|d\eta| \leqslant$$

$$\leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^y |\eta|^{j(2-m)}|y-\eta|\,|\eta|^{-m}(MM_{j-1} + |\eta| M|z'_{j-1}(\eta)||\eta|^{-j(2-m)})\,|d\eta| \leqslant$$

$$\leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^y |\eta|^{j(2-m)}|y-\eta|\,|\eta|^{-m}(MM_{j-1} + 2jMM_{j-1}(2-m))\,|d\eta| =$$

$$= (MM_{j-1} + 2jMM_{j-1}(2-m))|y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^{|y|} \int\limits_0^{\eta} \zeta^{j(2-m)-m}\,d\zeta d\eta \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)|y|^{-(j+1)(2-m)} \frac{|y|^{(j+1)(2-m)}}{(j+1)(2-m)((j+1)(2-m)-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3MM_{j-1}}{(j+1)(2-m)-(2-m)} = \frac{3MM_{j-1}}{j(2-m)} \leqslant \frac{12MM_{j-1}}{j(2-m)} \equiv M_j, \quad y \in K.$$

Аналогично будем иметь

$$|(z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)})'| \leqslant$$

$$\leqslant |y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^{|y|} \zeta^{j(2-m)-m} 3jMM_{j-1}(2-m)\,d\zeta + |z_j(y)y^{-(j+1)(2-m)}| \frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)|y|^{-(j+1)(2-m)} \int\limits_0^{|y|} \zeta^{j(2-m)-m}\,d\zeta + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)|y|^{-(j+1)(2-m)} \frac{|y|^{j(2-m)+1-m}}{j(2-m)+1-m} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant 3jMM_{j-1}(2-m)\frac{1}{|y|}\,\frac{1}{(j+1)(2-m)-1} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_j}{4}\,\frac{j(2-m)}{|y|}\,\frac{j(2-m)}{(j+1)(2-m)-1} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_j}{2}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} + \frac{M_j}{4}\,\frac{(j+1)(2-m)}{|y|} \leqslant M_j \frac{(j+1)(2-m)}{|y|}.$$

Обе оценки доказаны.

В круге K при $j \geqslant j_0$

$$|z_j(y)| \leqslant M_j |y|^{(j+1)(2-m)} \leqslant (\varepsilon')^{(j+1)(2-m)} M_0 \prod_{l=j_0}^{j} \frac{12M}{(l+1)(2-m)} \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon')^{(j+1)(2-m)} M_0 \prod_{l=0}^{j} \frac{12M}{(l+1)(2-m)} = M_0 \left((\varepsilon')^{(2-m)} \frac{12M}{2-m} \right)^{j+1} \prod_{l=1}^{j+1} \frac{1}{l} = M_0 \frac{p^{j+1}}{(j+1)!},$$

$$p = (\varepsilon')^{(2-m)} \frac{12M}{2-m},$$

следовательно, ряд $\sum_{j=0}^{+\infty} z_j(y)$ сходится равномерно на любом множестве $K \subset G$, а значит, и в $A(U \setminus \{0\})$. Кроме того, он допускает дифференцирование под знаком суммы любое число раз внутри U. Подставим этот ряд в (5):

$$y^m \sum_{j=0}^{+\infty} z_j''(y) + c(y) \sum_{j=0}^{+\infty} z_j'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2) \sum_{j=0}^{+\infty} z_j(y) =$$

$$= y^m z_0''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} y^m z_j''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} (c(y) z_{j-1}'(y) - (a(y) + \pi^2 k^2) z_{j-1}(y)) =$$

$$= y^m z_0''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} y^m z_j''(y) + \sum_{j=1}^{+\infty} (-y^m z_j''(y)) = f_k(y), \quad \sum_{j=0}^{+\infty} z_j(0) = 0,$$

т.е. построенный ряд действительно является решением задачи (5) в области U.

Коэффициенты и правая часть уравнения задачи (5) не имеют иных особенностей в области G, кроме точки $y = 0$, значит построеное решение $\hat{Y}(y)$ может быть единственным образом аналитически продолжено [18, с. 102–103] во всю область G. Лемма доказана.

Аналогично построим функции $\hat{z}_j(y)$:

$$\hat{z}_0 = y,$$

$$y^m \hat{z}_j'' + c(y) \hat{z}_{j-1}' - (a(y) + \pi^2 k^2) \hat{z}_{j-1} = 0, \quad \hat{z}_j(0) = \hat{z}_j'(0) = 0, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Соответствующие функции будут иметь следующие разложения в области U:

$$\hat{z}_j(y) = y^{j(2-m)} \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{z}_{j,n} y^n, \quad y \in U, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует аналитическое в $G \setminus \{0\}$ решение $Y_k^0(y)$ задачи (6). При этом в окрестности U точки $y = 0$ оно представимо рядом*

$$Y_k^0(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{z}_j(y),$$

который сходится в классах $A(U \setminus \{0\})$ и $C(K)$ для любого множества $K \equiv \{y \in \mathbb{C} : |y| \leqslant \varepsilon'\} \subset G$, где $\varepsilon' > 0$.

Доказательство данной леммы полностью повторяет доказательство леммы 1.

Построим решение задачи (4) в виде

$$Y_k(y) = \hat{Y}_k(y) - \frac{\hat{Y}_k(b)}{Y_k^0(b)} Y_k^0(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} y^{j(2-m)} \varphi_{k,j}(y), \quad y \in G,$$

разложение в ряд имеет место при $y\in U$, функции $\varphi_{k,j}\in A(U)$, ряд сходится в классах $A(U\setminus\{0\})$ и $C[0,\varepsilon/2]$. Указанная формула корректна и даёт единственное решение задачи (4) в силу лемм 1 и 2 из работы [5].

4. ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РЯДА

Покажем, что ряд (3) сходится к классическому решению задачи (1) при некоторых ограничениях на функцию $f(x,y)$. Доказательство этого факта в целом повторяет рассуждения из работ [2–7], поэтому ограничимся его основными моментами.

Аналогично [7] сведём задачу (6) к задаче с линейным вырождением следующей заменой:

$$y=((2-m)t)^{\alpha},\quad Y_k^0(t)=t^{\alpha}z_k(t),\quad \alpha=\frac{1}{2-m}.$$

Тогда для новой неизвестной функции $z_k(t)$ и новой независимой переменной t получим задачи

$$tz_k''(t)+d(t)z_k'(t)-\left[\bar a(t)+\pi^2\left(\frac{k}{\sqrt{2-m}}\right)^2\right]z_k(t)=0,\quad t\in(0,\bar b),\quad \bar b=\alpha b^{2-m},\quad k\in\mathbb{N},$$
$$z_k(0)=1,\quad k\in\mathbb{N},$$

причём новые коэффициенты $d(t)$ и $\bar a(t)$ в некоторой окрестности точки $t=0$ имеют следующие разложения:

$$d(t)=(1+\alpha)+c_1t+c_2(2-m)^{\alpha(3-m)-1}t^{\alpha(3-m)}+\ldots+c_j(2-m)^{\alpha(1+j-m)-1}t^{\alpha(1+j-m)}+\ldots,$$
$$\bar a(t)=\frac{a_0+\ldots+a_j((2-m)t)^{j\alpha}+\ldots}{2-m}-\alpha^3[c_1+\ldots+c_j((2-m)t)^{\alpha(1+j-m)-1}+\ldots],$$

здесь a_0, a_1, … и c_1, c_2, … — коэффициенты разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $y=0$ исходных коэффициентов $a(y)$ и $c(y)$. Кроме того, коэффициенты $\bar a(t),d(t)\in C^1[0,\bar b]$, а производная функции $\bar D(t)\equiv(d(t)-d(0))/t$ непрерывна на $(0,\bar b]$ и интегрируема на $[0,\bar b]$.

Тогда с учётом теорем 1–3 [6] получим двусторонние оценки для функций $z_k(t)$ при больших индексах $k\in\mathbb{N}$:

$$0<B_1\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}}\leqslant z_k(t)\leqslant B_2\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}},\quad 0\leqslant t\leqslant\bar b,$$
$$0<B_1k\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}}\leqslant z_k'(t)\leqslant B_2\frac{k}{\sqrt{\alpha t}}\frac{e^{2\pi k\sqrt{\alpha t}}}{1+(\pi k\sqrt{\alpha t})^{\alpha+1/2}},\quad 0<t\leqslant\bar b,$$

где B_1 и B_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от t и k. Обратная замена приводит нас к следующему утверждению.

Лемма 3. *Можно выбрать такие нетривиальные решения $Y_k^0(y)$ задач (6) и постоянные $0<C_1<C_2$, не зависящие от y и $k\in\mathbb{N}$, что будут выполнены соотношения*

$$0<C_1y\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\leqslant Y_k^0(y)\leqslant C_2y\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},\quad 0\leqslant y\leqslant b,$$

$$0<C_1ky^{1/\alpha}\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}\leqslant\frac{dY_k^0}{dy}(y)\leqslant C_2k\frac{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}},\quad 0<y\leqslant b.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 1 из работы [7].

Аналогичные оценки можно получить для серии частных решений задач (7). Зафиксируем функции $Y_k^0(y)$ из леммы 3 и определим $Y_k^b(y)$ следующим образом:

$$Y_k^b(y)\equiv -Y_k^0(y)\int\limits_b^y \exp\biggl\{-\int\limits_b^\eta \xi^{-m}c(\xi)\,d\xi\biggr\}\bigg/(Y_k^0(\eta))^2\,d\eta,\quad y\in[0,b].$$

Справедлива следующая

Лемма 4. *Найдутся такие постоянные $0<C_3<C_4$, не зависящие от y и $k\in\mathbb{N}$, что*

$$0<C_3\frac{1}{k}\frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}}\leqslant Y_k^b(y),\quad \frac{b}{4}\leqslant y\leqslant\frac{3b}{4},$$

$$Y_k^b(y)\leqslant C_4\frac{1}{k}\frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}},\quad 0\leqslant y\leqslant b,$$

$$0\leqslant -\frac{dY_k^b}{dy}(y)\leqslant C_4\frac{1}{y}\,\frac{1+(\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\alpha y^{1/(2\alpha)}}},\quad 0<y\leqslant b.$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательствам теоремы 3 из работы [5], теоремы 5 из [6] и леммы 2 из [7].

Рассмотрим определители Вронского систем функций $Y_k^0(y)$, $Y_k^b(y)$:

$$w_k(y)=Y_k^0(y)\frac{dY_k^b}{dy}(y)-Y_k^b(y)\frac{dY_k^0}{dy}(y),\quad y\in[0,b],\quad k\in\mathbb{N},$$

и функции Грина задач (4):

$$G_k(y,\eta)=\begin{cases}\dfrac{Y_k^0(y)Y_k^b(\eta)}{\eta^m w_k(\eta)}, & 0\leqslant y<\eta\leqslant b,\\[2mm] \dfrac{Y_k^b(y)Y_k^0(\eta)}{\eta^m w_k(\eta)}, & 0\leqslant \eta<y\leqslant b,\end{cases}\qquad k\in\mathbb{N}.$$

Лемма 5. *Существует не зависящая от $k\in\mathbb{N}$ и y постоянная $W>0$ такая, что*

$$w_k(y)\leqslant -W,\quad y\in[0,b].$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательствам леммы 4 из работы [5], теоремы 7 из [6] и леммы 3 из [7].

Лемма 6. *Существует постоянная $C>0$, не зависящая от $k\in\mathbb{N}$ и y, такая, что*

$$\int\limits_0^b |G_k(y,\eta)|\,d\eta\leqslant\frac{C}{k^2},\quad y\in[0,b].$$

Для любого $\varepsilon>0$ найдётся постоянная $C'(\varepsilon)>0$, не зависящая от $k\in\mathbb{N}$ и y, такая, что

$$\int\limits_0^b \left|\frac{\partial G_k}{\partial y}(y,\eta)\right| d\eta \leqslant \frac{C'}{k}, \quad y\in[\varepsilon,b].$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательствам теоремы 4 из работы [5], теоремы 8 из [6] и леммы 4 из [7].

Из утверждений лемм 3, 4 и 6 следует

Лемма 7. *Пусть правые части $f_k(y)$ уравнений задач (4) ограничены по норме пространства $C^2[0,b]$. Тогда имеет место следующая равномерная по $y\in[0,b]$ оценка:*

$$Y_k(y)=O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Для любого $\varepsilon>0$ справедлива асимптотическая формула

$$Y_k^{(p)}(y)=-\frac{f_k^{(p)}(y)}{\pi^2k^2}+O\left(\frac{1}{k^{4-p}}\right), \quad y\in[\varepsilon,b-\varepsilon], \quad k\in\mathbb{N}, \quad p=0,1,2,$$

равномерная по y.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательствам леммы 5 из работы [5], теоремы 9 из [6] и теоремы 2 из [7].

Лемма 8. *Пусть правая часть $f(x,y)$ уравнения задачи (1) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{D}$, при каждом фиксированном $y\in(0,b)$ принадлежит классу Гёльдера как функция переменной x. Тогда существует классическое решение задачи (1). Оно представляется рядом (3), который сходится абсолютно и равномерно в $\overline{D}$, допускает двукратное почленное дифференцирование по x и по y внутри области D.*

Утверждение данной леммы следует из леммы 7 и известных свойств рядов Фурье. Подробное доказательство приведено, например, в работе [5, теорема 5].

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Правая часть уравнения задачи (1) допускает разложение в ряд Фурье по системе $\{\sin(\pi kx)\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)\sin(\pi kx), \quad (x,y)\in D.$$

Коэффициенты разложения могут быть найдены по формулам

$$f_k(y)=2\int\limits_0^1 f(x,y)\sin(\pi kx)\,dx, \quad k\in\mathbb{N}, \quad y\in G,$$

из которых следует, что функции $f_k\in A(G)$. Таким образом, выполнены все условия лемм 1 и 2, задача (4) имеет единственное решение $\eta_k(y)$, аналитическое в $G\setminus\{0\}$, и общий член ряда (3) определён.

Выполнены все условия леммы 8, следовательно, ряд (3) сходится равномерно в $\overline{D}$ к решению задачи (1). Разложение (2) следует из утверждений лемм 1 и 2. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. И.С. Ломову за постановку задачи и полезные обсуждения полученных результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломов, И.С. Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений / И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 2079–2089.
2. Ломов, И.С. Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов / И.С. Ломов // Докл. РАН. — 2001. — Т. 376, № 5. — С. 593–596.
3. Ломов, И.С. Основы математической теории пограничного слоя / И.С. Ломов, С.А. Ломов. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2011. — 453 с.
4. Емельянов, Д.П. Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 1. — С. 45–58.
5. Емельянов, Д.П. Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов / Д.П. Емельянов, И.С. Ломов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 5. — С. 655–672.
6. Емельянов, Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с аналитическими коэффициентами и линейным вырождением / Д.П. Емельянов // Дифференц. уравнения. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 607–627.
7. Емельянов, Д.П. Эллиптические дифференциальные операторы с вырождением нецелого порядка / Д.П. Емельянов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. — 2023. — № 2. — С. 12–22.
8. Келдыш, М.В. О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области / М.В. Келдыш // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.
9. Келдыш, М.В. Избранные труды. Математика / М.В. Келдыш. — М. : Наука, 1985. — 447 с.
10. Янушаускас, А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений / А.И. Янушаускас. — Новосибирск : Наука, 1979. — 190 с.
11. Олейник, О.А. О гладкости решений вырождающихся эллиптических и параболических уравнений / О.А. Олейник // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 163, № 3. — С. 577–580.
12. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. — М. : Высшая школа, 1985. — 304 с.
13. Моисеев, Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 149 с.
14. Петрушко, И.М. Краевые задачи для уравнений смешанного типа / И.М. Петрушко // Тр. ордена Ленина Мат. института им. В.А. Стеклова. Т. 103. Краевые задачи для дифференциальных уравнений. — 1968. — С. 181–200.
15. Петрушко, И.М. О фредгольмовости некоторых краевых задач для уравнения $u_{xx}+yu_{yy}+\alpha(x,y)u_y+\beta(x,y)u_x+\gamma(x,y)u=f(x,y)$ в смешанной области / И.М. Петрушко // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 1. — С. 123–135.
16. Ивакин, В.М. Видоизменённая задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем / В.М. Ивакин // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. — Новосибирск : Наука, 1982. — С. 12–21.
17. Фурсиков, А.В. О глобальной гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений / А.В. Фурсиков // Успехи мат. наук. — 1971. — Т. 26, № 5. — С. 227–228.
18. Коддингтон, Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон ; пер. с англ. Б.М. Левитана. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1958. — 474 с.

SOLUTION OF A BOUNDARY PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH A SMALL NONINTEGER ORDER DEGENERACY

D. P. Emel'yanov

Lomonosov Moscow State University, Russia
e-mail: emelianov@cs.msu.ru

We consider a Dirichlet boundary problem for an elliptic type equation with a non-regular degeneracy of noninteger order in a rectangle. The coefficients of the differential operator are supposed to be analytic. We build a formal solution by using the method for spectral separation of the singularities. The solution is series where its non-analytic dependency on y near point $y=0$ is written explicitly. We proof the convergence of the series to the classical solution using the Green's function method.

Keywords: elliptic equation, degenerate elliptic equation, noninteger degeneracy, analytic theory of differential equation.

FUNDING

This work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the program for the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement no. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Lomov, I.S., Small denominators in analitic theory of degenerate differential equations, *Differ. Equat.*, 1993, vol. 29, no. 12, pp. 1811–1820.
2. Lomov, I.S., Method of spectral separation of variables for irregularly degenerating elliptic differential operators, *Dokl. RAN*, 2001, vol. 376, no. 5, pp. 593–596.
3. Lomov, I.S. and Lomov, S.A., *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya* (Fundamentals of the Mathematical Theory of a Boundary Layer), Moscow: MSU Press, 2011.
4. Emel'yanov, D.P. and Lomov, I.S., Construction of exact solutions of irregularly degenerate elliptic equations with analytic coefficients, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 46–59.
5. Emel'yanov, D.P. and Lomov, I.S., Using poisson series in the analytic theory of irregularly degenerate elliptic differential operators, *Differ. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 5, pp. 636–653.
6. Emel'yanov, D.P., Elliptic differential operators with analytic coefficients and linear degeneracy, *Differ. Equat.*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 610–630.
7. Emel'yanov, D.P., Elliptic differential operators with noninteger order degeneration, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2023, vol. 47, no. 2, pp. 71–81.
8. Keldysh, M.V., On some cases of equations of elliptic type degenerate on the boundary of a domain, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.
9. Keldysh, M.V., *Izbrannye trudy. Matematika* (Selected Works. Mathematics), Moscow: Nauka, 1985.
10. Yanushauskas, A.I., *Analiticheskaya teoriya ellipticheskikh uravnenii* (Analytic Theory of Elliptic Equations), Novosibirsk: Nauka, 1979.
11. Oleinik, O.A., On the smoothness of solutions of degenerate elliptic and parabolic equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1965, vol. 163, no. 3, pp. 577–580.
12. Smirnov, M.M., *Uravneniya smeshannogo tipa* (Mixed Type Equations), Moscow: Vyssh. Shkola, 1985.
13. Moiseev, E.I., *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* (Mixed Type Equations with Spectral Parameter), Moscow: MSU Press, 1988.
14. Petrushko, I.M., Boundary value problems for equations of mixed type, *Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova*, 1968, vol. 103, pp. 181–200.
15. Petrushko, I.M., On the Fredholm property of some boundary value problems for the equation $u_{xx}+yu_{yy}+$ $+\alpha(x,y)u_y+\beta(x,y)u_x+\gamma(x,y)u=f(x,y)$ in a mixed domain, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 123–135.
16. Ivakin, V.M., A modified Dirichlet problem for elliptic equations and systems degenerate on the boundary, in *Analiticheskiye metody v teorii ellipticheskikh uravneniy* (Analytical Methods in the Theory of Elliptic Equations), Novosibirsk: Nauka, 1982, pp. 12–21.
17. Fursikov, A.V., The global smoothness of the solutions of a class of degenerating elliptic equations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1971, vol. 26, no. 5, pp. 227–228.
18. Coddington, E.A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York; Toronto; London: McGraw-Hill, 1955.