ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2023, том 59, № 4, с. 446–455

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926

К ИССЛЕДОВАНИЮ РОБАСТНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2023 г. О. Г. Антоновская

Предложена методика получения достаточных условий робастной экспоненциальной устойчивости параметрически неопределённой системы. Данная методика применяется для исследования как непрерывных, так и дискретных параметрически неопределённых систем. Общая функция Ляпунова выбрана в виде положительно определённой квадратичной формы, которая является функцией Ляпунова для системы при конкретном значении параметра и удовлетворяет ограничениям на первую производную (первую разность). Применение предложенной методики проиллюстрировано на конкретных примерах.

DOI: 10.31857/S0374064123040027, EDN: AMNDUT

Введение. Важное место в теории систем занимает проблема робастной устойчивости, т.е. устойчивости систем при наличии неопределённости. В этом случае задача состоит в получении условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем [1, 2]. Параметрическая неопределённость означает, что структура системы известна, а параметры могут отличаться от номинальных. В некоторых специальных случаях робастная устойчивость может быть установлена эффективно. Одним из них является случай интервальности параметров непрерывной системы [1, с. 187–189]. К семейству таких систем применима теорема Харитонова [3], согласно которой робастная устойчивость эквивалентна устойчивости четырёх так называемых угловых систем (вернее, угловых полиномов, которые называют полиномами Харитонова) [1, с. 189]. Однако в общем случае, когда параметрическая неопределённость является более сложной, непосредственная проверка робастной устойчивости семейства систем сложна. Кроме того, задача получения условий робастной устойчивости дискретных систем оказалась достаточно сложной [4] даже в случае интервальности коэффициентов. (В работе [4] в качестве одной из причин возникновения трудностей в дискретном случае указывается несовместимость между областью устойчивости (единичный круг) и областью изменения коэффициентов (прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат).) Поэтому, наряду с необходимыми и достаточными условиями робастной устойчивости, часто используются подходы, основанные на определении достаточных условий робастной устойчивости. В частности, известен подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределённых семейств [2, с. 117]. При этом следует отметить и тот факт, что может представлять интерес и сама задача построения общей квадратичной функции Ляпунова семейства систем.

1. О существовании общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределённой непрерывной системы. Рассмотрим автономную линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(q)x, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где q – параметр, изменяющийся на заданном множестве $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$, и квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$V(x) = x^{\mathrm{т}} K x \quad (K^{\mathrm{т}} = K). \tag{2}$$

Элементы $n \times n$-матриц $A(q)$ и K вещественные. Первая производная $\dot{V}(x)$ квадратичной формы (2) в силу системы (1) также является квадратичной формой:

$$\dot{V}(x) = x^{\mathrm{т}}(A^{\mathrm{т}}(q)K + KA(q))x. \tag{3}$$

В дальнейшем матрицу $A^{\mathrm{т}}(q)K + KA(q)$ квадратичной формы (3) будем обозначать через $A_K(q)$. Очевидно, что матрица $A_K(q)$ симметрична: $A_K(q) = A_K^{\mathrm{т}}(q)$. Пусть $A_K(q) = (A_{km}(q))_{k,m=1}^n$. Если $A(q) = (a_{ik}(q))_{i,k=1}^n$ и $K = (K_{ik})_{i,k=1}^n$, то для элементов матрицы $A_K(q)$ очевидны равенства

$$A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n (K_{im}a_{ik}(q) + K_{ik}a_{im}(q)), \quad k, m = \overline{1, n},$$

в которых учтена симметричность матрицы K ($K_{ik} = K_{ki}$ для всех $k, i = \overline{1, n}$).

Предположим, что при некотором значении параметра $q = q_0$ из множества $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$ корни λ_1, λ_2, ..., λ_n характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ системы (1), имеют отрицательные действительные части. Тогда, согласно теоремам работ [5, 6], если положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой производной (3) на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ равно $\delta_0 V_0$, то $2\max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \delta_0 < 0$ и параметры (2) удовлетворяют уравнению

$$\det\,(A_{km}(q_0) - \mu K_{km})_{k,m=1}^n = 0, \tag{4}$$

где $\mu = \delta_0$.

Все корни уравнения (4) действительны [7, гл. 10, § 6], причём наибольший из них [6, 8] есть $\mu_n = \max\limits_{x\neq 0}(\dot V(x)/V(x))$.

Левая часть уравнения (4) представляет собой определитель, все элементы которого линейны относительно μ, поэтому её можно записать в виде многочлена степени n относительно μ. Запишем уравнение (4) в виде $P_n(\mu) = 0$, где

$$P_n(\mu) = \mu^n + a_1(q_0)\mu^{n-1} + a_2(q_0)\mu^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(q_0)\mu + a_n(q_0), \tag{5}$$

$$a_k(q_0) = (-1)^k(\det K)^{-1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \det K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$a_n(q_0) = (-1)^n(\det K)^{-1}\det A_K(q_0), \tag{6}$$

матрица $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами i_1, i_2, ..., i_k на одноимённые столбцы матрицы $A_K(q_0)$. Многочлен (5), (6) получается из (4), если раскрыть определитель и разделить полученный многочлен на коэффициент при старшей степени μ.

Пусть значение параметра изменилось. Тогда и коэффициенты системы изменятся, а система запишется как

$$\dot x = (A(q_0) + \Delta A(q))x, \tag{7}$$

где $\Delta A(q) = (\Delta a_{ij}(q))_{i,j=1}^n$, $\Delta a_{ij}(q) = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)$, $i, j = \overline{1, n}$. Если считать функцию (2) неизменной, то уравнение (4) примет вид

$$\det\,(A_K(q_0) + (\Delta A)_K(q) - \mu K) = 0, \tag{8}$$

где $(\Delta A)_K(q) = (\Delta A_{km}(q))_{k,m=1}^n$,

$$\Delta A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n (K_{ik}\Delta a_{im}(q) + K_{im}\Delta a_{ik}(q)) \quad (k, m = \overline{1, n}), \tag{9}$$

а вместо многочлена (5) получим многочлен

$$P_n^\Delta(\mu)(q) = \mu^n + (a_1(q_0) + \Delta a_1(q))\mu^{n-1} + (a_2(q_0) + \Delta a_2(q))\mu^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1}(q_0) + \Delta a_{n-1}(q))\mu + a_n(q_0) + \Delta a_n(q), \tag{10}$$

где $\Delta a_k(q)$ – сумма произведений всех миноров матрицы $(\Delta A)_K(q)$ до порядка k включительно на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. В частности, коэффициент $\Delta a_n(q)$ равен

$$\Delta a_n(q) = \frac{(-1)^n}{\det K}\sum_{p=1}^{n}\omega_p(q), \tag{11}$$

здесь

$$\omega_1(q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta A_{ij}(q)A_j^i, \quad \omega_n = \det(\Delta A)_K(q)$$

и

$$\omega_p(q) = \sum_{i_1<\ldots<i_p}\sum_{j_1<\ldots<j_p}\begin{vmatrix}\Delta A_{i_1,j_1}(q) & \Delta A_{i_1,j_2}(q) & \ldots & \Delta A_{i_1,j_p}(q)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta A_{i_p,j_1}(q) & \Delta A_{i_p,j_2}(q) & \ldots & \Delta A_{i_p,j_p}(q)\end{vmatrix} A_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_p}, \quad p=\overline{2,n-1},$$

где A_j^i – алгебраическое дополнение элемента $A_{ij}(q_0)$ в матрице $A_K(q_0)$, $A_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ – алгебраическое дополнение минора матрицы $A_K(q_0)$, построенного на строках с номерами i_1, … …, i_k и столбцах с номерами j_1, …, j_k. Многочлен (10), (11) получается из уравнения (8) при учёте (9), если раскрыть определитель и разделить полученный многочлен на коэффициент при старшей степени μ.

Задача состоит в определении условий, при которых квадратичная функция Ляпунова, построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (7) при всех значениях параметра из отрезка $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$.

Следует отметить, что все корни уравнения (4) действительны, наибольший и наименьший из них соответствуют наибольшему и наименьшему значениям величины $\dot V/V$ [6, 8], т.е. отрицательность их подтверждает отрицательность первой производной в силу системы, а значит, и тот факт, что положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова. При этом в случае когда все корни характеристического уравнения различны, для любого $\delta_0 \in [2\max\limits_{i=\overline{1,n}}\operatorname{Re}\lambda_i, 0)$ можно построить функцию (2), удовлетворяющую ограничению $\max\limits_{V=V_0}(\dot V/V) = \delta_0$ (см. [9, 10]). Например, если все корни характеристического уравнения действительны и различны, причём $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 0$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x = B\xi, \quad \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^n, \tag{12}$$

приводящее систему к каноническому виду

$$\dot\xi = A\xi, \quad i=\overline{1,n}, \quad A = \operatorname{diag}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n].$$

(У матрицы B её k-й столбец является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ_k, $k=\overline{1,n}$.) Тогда в канонических переменных квадратичную функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0}(\dot V/V) = \delta_0$, где $2\lambda_n \leqslant \delta_0 < 0$, можно искать в виде

$$V(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \sum_{i=1}^{n-2}K_{ii}\xi_i^2 + K_{n-1,n-1}\xi_{n-1}^2 + 2K_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n + K_{nn}\xi_n^2, \tag{13}$$

где $K_{ii} > 0$, $i=\overline{1,n}$, а

$$K_{n-1,n}^2 = (1-R(\delta_0))K_{n-1,n-1}K_{nn}, \quad R(\delta_0) = (\lambda_{n-1}-\lambda_n)^2(\lambda_{n-1}+\lambda_n-\delta_0)^{-2},$$

при этом корнями уравнения (4) будут числа $\mu_1 = 2\lambda_1,\ldots,\mu_{n-2} = 2\lambda_{n-2}$, $\mu_{n-1} = 2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) - \delta_0$, $\mu_n = \delta_0$, причём $\mu_{\max} = \delta_0$.

Если все корни характеристического уравнения различны, но имеющие наибольшие действительные части корни $\lambda_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$ являются комплексно-сопряжёнными, то функцию Ляпунова для канонической системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющую условию $\max\limits_{V=V_0}(\dot{V}/V) = \delta_0,$ можно искать в виде (13) [8], где

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta_0)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2), \quad C(\delta_0) = (\delta_0 - 2\alpha)^2\beta^{-2} + 4,$$

считая равными между собой коэффициенты $K_{i-1,i-1} = K_{ii},$ если переменные $\xi_{i-1},$ ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, для которых $\operatorname{Re}\lambda_{i-1,i} < \alpha.$ Аналогично можно рассмотреть и другие случаи для корней характеристического уравнения [10]. Возвращаясь к исходным переменным, получаем искомую функцию Ляпунова.

В дальнейшем будем предполагать, что квадратичная функция Ляпунова для значения параметра $q = q_0$ построена (неважно каким способом). Получить условия отрицательности корней уравнения (8) с построенной функцией Ляпунова при всех $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$ можно как непосредственным анализом корней этого уравнения, так и применяя метод D-разбиений [11, с. 86–107; 12], различные критерии устойчивости [1, с. 76–84]. Другим методом получения условия отрицательности корней уравнения (8) при $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$ может быть применение теоремы Харитонова [1, с. 188].

Рассмотрим интервальный полином

$$P(\mu) = \mu^n + [a_1]\mu^{n-1} + [a_2]\mu^{n-2} + \ldots + [a_{n-1}]\mu + [a_n], \tag{14}$$

в котором $[a_k] = [\underline{a}_k, \overline{a}_k],$ $\underline{a}_k \leqslant a_k + \Delta a_k(q) \leqslant \overline{a}_k$ при $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q},$ $k = \overline{1,n},$ и четыре “угловых” полинома (полиномы Харитонова)

$$P_I(\mu) = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\mu + \overline{a}_{n-2}\mu^2 + \overline{a}_{n-3}\mu^3 + \ldots, \tag{15}$$

$$P_{II}(\mu) = \overline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\mu + \underline{a}_{n-2}\mu^2 + \overline{a}_{n-3}\mu^3 + \ldots, \tag{16}$$

$$P_{III}(\mu) = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\mu + \underline{a}_{n-2}\mu^2 + \underline{a}_{n-3}\mu^3 + \ldots, \tag{17}$$

$$P_{IV}(\mu) = \underline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\mu + \overline{a}_{n-2}\mu^2 + \underline{a}_{n-3}\mu^3 + \ldots \tag{18}$$

Коэффициенты в полиномах P_I–P_{IV} являются крайними возможными значениями интервальных коэффициентов; при этом они чередуются парами (пара нижних – пара верхних), начиная с коэффициента a_n для полиномов $P_I,$ P_{III} и с коэффициента a_{n-1} для полиномов $P_{II},$ $P_{IV}.$

В силу теоремы Харитонова если все корни полиномов (15)–(18) имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (14) тоже имеют отрицательные действительные части. В частности, все действительные корни полиномов (14) отрицательны, первая производная функции (2) в силу системы при всех рассматриваемых значениях параметра отрицательно определена, и квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова систем вида (7) с определёнными выше $\Delta a_k.$ А это означает, что получены условия робастной экспоненциальной устойчивости системы.

Теорема 1. *Если действительные части всех корней полиномов (15)–(18) отрицательны, то положительно определённая квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова параметрически неопределённой непрерывной системы (1). В частности, семейство (1) робастно экспоненциально устойчиво.*

Замечание 1. Таким образом, для установления робастной экспоненциальной устойчивости интервального семейства (1) достаточно:

1) при некотором фиксированном q_0 для системы семейства (1) построить квадратичную функцию Ляпунова V;

2) отыскать границы изменения коэффициентов полиномов (10);

3) для полученного интервального семейства полиномов проверить, что корни всех четырёх “угловых” полиномов Харитонова имеют отрицательные действительные части.

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = (-3+q)x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + (-3+q)x_2, \quad \dot{x}_3 = (-1+q)x_3, \tag{19}$$

имеющую состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Будем предполагать, что параметр изменяется на отрезке $-0.25 \leqslant q \leqslant 0.25$. При $q = 0$ система (19) принимает вид

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2, \quad \dot{x}_3 = -x_3. \tag{20}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (20), равны $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$. Для матрицы B преобразования координат, приводящего систему (20) к каноническому виду

$$\dot{\xi}_1 = -4\xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = -2\xi_2, \quad \dot{\xi}_3 = -\xi_3,$$

имеем

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Квадратичную функцию Ляпунова для системы (20), удовлетворяющую условию

$$\max_{V=V_0>0} \dot{V}/V = \delta_0 = -1 \quad (-2 = 2\max_i \lambda_i < \delta_0 < 0),$$

будем искать в виде

$$\tilde{V}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = K_{11}\xi_1^2 + K_{22}\xi_2^2 + K_{23}\xi_2\xi_3 + K_{33}\xi_3^2, \quad K_{23}^2 = (1 - R(-1))K_{22}K_{33}, \tag{21}$$

где

$$R(-1) = \frac{(-2+1)^2}{(-2-1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

При $K_{11} = 2$, $K_{22} = 6$, $K_{33} = 8$ получаем $K_{23} = 6$, а в переменных x_1, x_2, x_3 – квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + 8x_3^2. \tag{22}$$

Проверим, будет ли функция (22) функцией Ляпунова для всех значений параметра $-0.25 \leqslant q \leqslant 0.25$.

Первая производная (22) в силу системы (19) есть

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = (-10+4q)x_1^2 + (-4+4q)x_1x_2 + (-10+4q)x_2^2 +$$

$$+ (-18+12q)x_1x_3 + (-18+12q)x_2x_3 + (-16+16q)x_3^2.$$

Таким образом, уравнение (8) в этом случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -10+4q-2\mu & -2+2q-\mu & -9+6q-3\mu \\ -2+2q-\mu & -10+4q-2\mu & -9+6q-3\mu \\ -9+6q-3\mu & -9+6q-3\mu & -16+16q-8\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Следует отметить, что это уравнение может быть также записано в виде

$$P_3(\mu) = \mu^3 + 2(7-3q)\mu^2 + (53 - 56q + 12q^2)\mu + (40 - 106q + 56q^2 - 8q^3) = 0. \tag{23}$$

Корнями этого уравнения являются $\mu_1 = -8 + 2q$, $\mu_2 = -5 + 2q$, $\mu_3 = -1 + 2q$. Все они отрицательны при $-0.25 \leqslant q \leqslant 0.25$, т.е. функция (22) будет оставаться функцией Ляпунова системы (19) при этих значениях параметра. (Следует отметить, что $\mu_3 = -1$ при $q = 0$.)

Эта же задача может быть решена с помощью теоремы Харитонова. “Угловые” полиномы в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$P_I(\mu) = 16.875 + 39.75\mu + 15.5\mu^2 + \mu^3, \quad P_{II}(\mu) = 70.125 + 39.75\mu + 12.5\mu^2 + \mu^3,$$

$$P_{III}(\mu) = 70.125 + 67.25\mu + 12.5\mu^2 + \mu^3, \quad P_{IV}(\mu) = 16.875 + 67.25\mu + 15.5\mu^2 + \mu^3.$$

Рассмотрим полином $P_I(\mu)$. Условиями того, что полином третьей степени имеет все корни с отрицательной действительной частью, являются соотношения [1, с. 80]

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 > a_3 \tag{24}$$

(следствие критерия Эрмита–Билера для полиномов степени $n = 3$). В случае полинома $P_I(\mu)$ все коэффициенты положительны и $39.75 \cdot 15.5 > 16.875 \cdot 1$. Значит, действительные части всех корней полинома $P_I(\mu)$ отрицательны в силу (24). Все остальные полиномы исследуются аналогично. Но если все корни рассмотренных полиномов имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (23) тоже имеют отрицательные действительные части. Таким образом, все (действительные) корни полиномов (23) отрицательны, и квадратичная форма (22) является общей функцией Ляпунова систем вида (19), т.е. получены условия робастной экспоненциальной устойчивости системы.

Замечание 2. Квадратичная функция Ляпунова, удовлетворяющая ограничению на её первую производную в силу линеаризованной системы, как правило, строится для получения различных оценок для нелинейной системы [13]. Поэтому актуальной будет и задача построения общей квадратичной функции Ляпунова множества систем, обладающей определённым “запасом” знакоотрицательности, т.е. также удовлетворяющей ограничению на первую производную, скажем $\dot V/V \leqslant \tilde{\tilde\delta}$ $(2\max\limits_{i=\overline{1,n}} \operatorname{Re}\lambda_i < \tilde{\tilde\delta} < 0)$. Для решения этой задачи заменой $w = \mu - \tilde{\tilde\delta}$ приведём полином (5) к виду

$$\tilde P_n(w) = w^n + \tilde a_1 w^{n-1} + \tilde a_2 w^{n-2} + \ldots + \tilde a_{n-1} w + \tilde a_n \tag{25}$$

и будем исследовать его по описанной выше методике. Но тогда из условия $\operatorname{Re} w_i < 0$ для корней полинома (25) будет следовать, что $\operatorname{Re}\mu_i < \tilde{\tilde\delta}$ для корней полинома $P_n(\mu)$.

2. О существовании общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределённой дискретной системы. Рассмотрим параметрически неопределённую дискретную систему (линейное точечное отображение)

$$\bar x = A(q)x, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^n, \tag{26}$$

где q – параметр, изменяющийся на заданном множестве $[\underline{q}, \overline{q}]$, и квадратичную форму с постоянными коэффициентами (2).

Элементы $n\times n$-матриц $A(q)$ и K вещественные. Первая разность $\Delta V(x)$ квадратичной формы (2) при $q = q_0$ в силу системы (26) также является квадратичной формой:

$$\Delta V(x) = x^{\mathrm{т}}(A^{\mathrm{т}}(q)KA(q) - K)x. \tag{27}$$

В дальнейшем матрицу $A^{\mathrm{т}}(q)KA(q) - K$ квадратичной формы (27) будем обозначать через $A_K(q)$. Очевидно, что матрица $A_K(q)$ симметрична: $A_K(q) = A_K^{\mathrm{т}}(q)$. Пусть $A_K(q) = (A_{km}(q))_{k,m=1}^n$. Если $A(q) = (a_{ik}(q))_{i,k=1}^n$ и $K = (K_{ik})_{i,k=1}^n$, то для элементов матрицы $A_K(q)$ очевидны равенства

$$A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} a_{ik}(q) a_{jm}(q) - K_{km}, \quad k, m = \overline{1, n}, \tag{28}$$

в которых учтена симметричность матрицы K $(K_{ij} = K_{ji}$ для всех $j, i = \overline{1,n})$.

Предположим, что при некотором значении параметра $q = q_0$ из множества $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$ корни $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ отображения (26), лежат внутри единичного круга. Тогда, согласно теореме работы [5], если положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова отображения (26) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой разности (27) на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ равно $\delta_0 V_0$, то $\max\limits_i |z_i|^2 - 1 \leqslant \delta_0 < 0$ и параметры (2) удовлетворяют уравнению (4), в котором $\mu = \delta_0$.

Пусть значение параметра изменилось. Тогда и коэффициенты отображения (26) изменятся и оно примет вид

$$\bar{x} = (A(q_0) + \Delta A(q))x, \tag{29}$$

где $\Delta A = (\Delta a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\Delta a_{ij}(q) = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)$ $(i, j = \overline{1,n})$. И если считать функцию (2) неизменной, уравнение (4) примет вид (8), где $(\Delta A)_K = (\Delta A_{km})_{k,m=1}^n$, а

$$\Delta A_{km}(q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}(a_{ik}(q_0)\Delta a_{jm}(q) + a_{jm}(q_0)\Delta a_{ik}(q) + \Delta a_{jm}(q)\Delta a_{ik}(q)), \quad k, m = \overline{1,n}.$$

Подобно предыдущему случаю запишем уравнение (4) в виде $P_n(\mu) = 0$, где многочлен P_n определяется в силу (5), (6), а уравнение (8) – в виде $P_n^\Delta(\mu)(q) = 0$, где многочлен P_n^Δ определён в (10). Задача состоит в определении условий, при которых квадратичная функция Ляпунова, построенная для отображения (26), будет оставаться функцией Ляпунова и для отображения (29) при $\underline{q} \leqslant q \leqslant \overline{q}$.

Следует отметить, что все корни уравнения (4) действительны, причём наибольший и наименьший корни (4) соответствуют наибольшему и наименьшему значениям $\Delta V/V$ [8], т.е. отрицательность всех корней (4) подтверждает отрицательность первой разности в силу функций последования отображения, а значит, и тот факт, что положительно определённая квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова. При этом, если все корни характеристического уравнения различны, для любого $\delta_0 \in [\max\limits_{\overline{1,n}}(|z_i|^2 - 1), 0)$ можно построить функцию (2), удовлетворяющую ограничению $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V) = \delta_0$ [9, 10]. Например, если все корни характеристического уравнения действительны и различны, причём $|z_1| < |z_2| < \ldots < |z_n| < 1$, всегда существует линейное невырожденное преобразование координат (12), приводящее отображение к каноническому виду

$$\bar{\xi} = A\xi, \quad i = \overline{1,n}, \quad A = \operatorname{diag}[z_1, \ldots, z_n].$$

(Столбцы матрицы B являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственным значениям $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$.) Тогда в канонических переменных квадратичную функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V) = \delta_0$ можно искать в виде (13), где $(z_n^2 - 1 \leqslant \delta_0 < 0)$

$$K_{n-1,n}^2 = (1 - R(\delta_0))K_{n-1,n-1}K_{nn}, \quad R(\delta_0) = (1 + \delta_0)(z_{n-1} - z_n)^2(z_{n-1}z_n - 1 - \delta_0)^{-2}.$$

При этом (см. [10, 14]) корнями уравнения (4) будут числа $\mu_1 = z_1^2 - 1,\ \ldots,\ \mu_{n-2} = z_{n-2}^2 - 1$, $\mu_{n-1} = (z_{n-1}^2 + z_n^2 - 2) - \delta_0$, $\mu_n = \delta_0$, т.е. в данном случае $\mu_{\max} = \delta_0$.

Если все корни характеристического уравнения различны, но наибольшие по модулю корни $z_{n-1,n} = \alpha \pm i\beta$ являются комплексно-сопряжёнными, то для канонической системы дифференциальных уравнений функцию Ляпунова с $\max\limits_{V=V_0}(\Delta V/V) = \delta_0$ можно искать в виде (13) [9], где

$$(K_{n-1,n-1} + K_{nn})^2 = C(\delta_0)(K_{n-1,n-1}K_{nn} - K_{n-1,n}^2),$$

а $C(\delta_0) = (\delta_0 + 1 - (\alpha^2 + \beta^2))^2(1 + \delta_0)^{-1}\beta^{-2} + 4$, считая равными между собой коэффициенты $K_{i-1,i-1} = K_{ii}$, если переменные ξ_{i-1}, ξ_i соответствуют паре комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, для которых $|z_i| < \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Аналогично можно рассмотреть и другие случаи корней характеристического уравнения. Возвращаясь к исходным переменным, получаем искомую функцию Ляпунова.

В дальнейшем будем предполагать, что квадратичная функция Ляпунова для значения параметра $q = q_0$ построена. Подобно случаю непрерывной динамической системы рассмотрим интервальный полином (14) и четыре "угловых" полинома (полиномы Харитонова) (15)–(18), где коэффициенты A_{km} определяются равенствами (28). В силу теоремы Харитонова если все корни полиномов (15)–(18) имеют отрицательные действительные части, то корни всего параметрически неопределённого семейства полиномов имеют отрицательные действительные части, т.е. все действительные корни полиномов (14) отрицательны, первая разность функции (2) в силу функций последования отображения при всех рассматриваемых значениях параметра отрицательно определена, квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова отображений вида (26), значит, получены условия робастной экспоненциальной устойчивости дискретной динамической системы.

Теорема 2. *Если действительные части всех корней полиномов (15)–(18) отрицательны, то положительно определённая квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова параметрически неопределённой линейной автономной дискретной системы (26). В частности, семейство (26) робастно экспоненциально устойчиво.*

Замечание 3. Таким образом, для установления робастной экспоненциальной устойчивости интервального семейства (26) достаточно:

1) при некотором фиксированном q_0 для отображения семейства (26) построить квадратичную функцию Ляпунова V;

2) отыскать границы изменения коэффициентов полиномов (10);

3) для полученного интервального семейства полиномов проверить, что у всех четырёх "угловых" полиномов Харитонова корни имеют отрицательные действительные части.

Пример 2. Рассмотрим точечное отображение

$$\bar{x}_1 = (0.3+q)x_1 + 0.1x_2, \quad \bar{x}_2 = 0.1x_1 + (0.3+q)x_2, \quad \bar{x}_3 = (0.1+q)x_3, \tag{30}$$

имеющее неподвижную точку $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Будем предполагать, что параметр изменяется на отрезке $-0.05 \leqslant q \leqslant 0.05$. При $q = 0$ отображение (30) принимает вид

$$\bar{x}_1 = 0.3x_1 + 0.1x_2, \quad \bar{x}_2 = 0.1x_1 + 0.3x_2, \quad \bar{x}_3 = 0.1x_3. \tag{31}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ отображения (31), равны $z_1 = 0.1$, $z_2 = 0.2$, $z_3 = 0.4$. Для матрицы B преобразования координат, приводящего отображение (31) к каноническому виду

$$\bar{\xi}_1 = 0.1\xi_1, \quad \bar{\xi}_2 = 0.2\xi_2, \quad \bar{\xi}_3 = 0.4\xi_3,$$

имеем

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратичную функцию Ляпунова для системы (31), удовлетворяющую условию

$$\max_{V=V_0} \Delta V/V = \delta_0 = -0.76 \quad (-0.84 = \max_i (z_i^2 - 1) < \delta_0 < 0),$$

будем искать в виде (21), где

$$R(-0.76) = \frac{(-0.76+1)(0.4-0.2)^2}{(0.4\cdot 0.2 - 1 + 0.76)^2} = 0.375.$$

При $K_{11} = 4$, $K_{22} = 4\sqrt{10}$, $K_{33} = 4\sqrt{10}$ получаем $K_{23} = 10$, а в переменных x_1, x_2, x_3 – форму

$$V(x_1,x_2,x_3) = (2\sqrt{10}+5)x_1^2 + (2\sqrt{10}-5)x_2^2 + 4x_3^2. \tag{32}$$

Проверим, будет ли функция (32) функцией Ляпунова для всех значений параметра $-0.05 \leqslant q \leqslant 0.05$. Первая разность формы (32) в силу системы (30) есть

$$\Delta V(x_1, x_2, x_3) = [(2\sqrt{10}+5)((0.3+q)^2-1)+0.01(2\sqrt{10}-5)]x_1^2 + 8\sqrt{10}0.1(0.3+q)x_1x_2 +$$

$$+ [(2\sqrt{10}-5)((0.3+q)^2-1)+0.01(2\sqrt{10}+5)]x_2^2 + 4[(0.1+q)^2-1]x_3^2.$$

Уравнение (8) в таком случае может быть переписано в виде уравнения

$$P_3(\mu) = 15\mu^3 + [15(1-(0.1+q)^2)+30(1-(0.3+q)^2)-1.3]\mu^2 +$$

$$+ [(1-(0.1+q)^2)(30(1-(0.3+q)^2)-1.3)+15(30((0.3+q)^2)-0.01)^2]\mu +$$

$$+ (1-(0.1+q)^2)[15-30(0.3+q)^2-1.3+15(30((0.3+q)^2)-0.01)^2] = 0 \tag{33}$$

с корнями

$$\mu_1 = (0.1+q)^2-1, \quad \mu_2 = \frac{1}{3}[3(0.3+q)^2+0.13-\sqrt{6(0.3+q)^2+0.1}]-1,$$

$$\mu_3 = \frac{1}{3}[3(0.3+q)^2+0.13+\sqrt{6(0.3+q)^2+0.1}]-1.$$

Все они являются отрицательными при $-0.05 \leqslant q \leqslant 0.05$, т.е. функция (32) будет оставаться функцией Ляпунова системы (30) при этих значениях параметра. (Следует отметить, что $\mu_3 = -0.76$ при $q = 0$.)

Эта задача может быть решена и с помощью теоремы Харитонова. Поскольку при $-0.05 \leqslant q \leqslant 0.05$ для коэффициентов полинома $P_3(\mu)$ будут иметь место ограничения

$$a_0(q) = 15, \quad 39.68 \leqslant a_1(q) \leqslant 41.78, \quad 24.65 \leqslant a_2(q) \leqslant 26.80, \quad 9.985 \leqslant a_3(q) \leqslant 11.837,$$

“угловыми” полиномами в рассматриваемом случае будут

$$P_I(\mu) = 9.985 + 24.65\mu + 41.78\mu^2 + 15\mu^3, \quad P_{II}(\mu) = 11.837 + 24.65\mu + 39.68\mu^2 + 15\mu^3,$$

$$P_{III}(\mu) = 11.837 + 26.80\mu + 39.68\mu^2 + 15\mu^3, \quad P_{IV}(\mu) = 9.985 + 26.80\mu + 41.78\mu^2 + 15\mu^3.$$

Рассмотрим полином $P_I(\mu)$. Как уже указывалось, условиями того, что полином третьей степени имеет все корни с отрицательной действительной частью, являются соотношения (24). В случае полинома $P_I(\mu)$ все коэффициенты положительны и $24.65 \cdot 41.78 > 9.985 \cdot 15$. Значит, действительные части всех корней полинома $P_I(\mu)$ отрицательны в силу (24). Все остальные полиномы исследуются аналогично. Но если все корни рассмотренных полиномов имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (33) отрицательны и квадратичная форма (32) является общей функцией Ляпунова семейства дискретных систем (30). Таким образом, получены условия робастной экспоненциальной устойчивости дискретной системы (30).

Замечание 4. Задача построения общей квадратичной функции Ляпунова множества систем, обладающей определённым “запасом” знакоотрицательности первой разности, для семейства дискретных динамических систем (26) также решается аналогично непрерывному случаю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М., 2002.
2. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М., 2014.
3. *Харитонов В.Л.* Об устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.
4. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1990. Вып. 5. С. 5–38.

5. *Антоновская О.Г.* О максимальном ограничении знакоотрицательности первой производной (первой разности) квадратичной функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 11. С. 1562–1563.
6. *Антоновская О.Г.* О сохранении квадратичной функции Ляпунова линейной дифференциальной автономной системы при стационарных возмущениях её коэффициентов // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 3. С. 295–302.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967.
8. *Антоновская О.Г.* Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Математика. 2004. № 2 (501). С. 19–23.
9. *Антоновская О.Г.* О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1220–1224.
10. *Антоновская О.Г.* Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 275–281.
11. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М., 2010.
12. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и Д-разбиение // Автоматика и телемеханика. 1992. Вып. 7. С. 10–18.
13. *Антоновская О.Г., Горюнов В.И.* Об одном способе оценки размеров области притяжения неподвижной точки нелинейного точечного отображения произвольной размерности // Изв. вузов. Математика. 2016. № 12. С. 12–18.
14. *Антоновская О.Г.* О пределах изменения первой разности квадратичной функции Ляпунова на заданном её сечении // Мат. моделирование и оптимальное управление. Вестн. Нижегородского гос. ун-та. 2001. № 1 (26). С. 65–70.

Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет

Поступила в редакцию 17.03.2020 г.
После доработки 28.02.2023 г.
Принята к публикации 22.03.2023 г.