ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. Н. Б. Керимов

Исследуются спектральные свойства дифференциального оператора L_0, порождённого дифференциальным выражением $l_0(y) = (-1)^m y^{2m} + q(x)y$, $0 < x < 1$, и краевыми условиями $y^{(s)}(1) - y^{(s)}(0) = 0$ $(s = \overline{0, 2m-1})$, где $m \in \mathbb{N}$, $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1^+(0,1) = \{q(x) \in L_1(0,1) : \int_0^1 q(t)e^{-2\pi ikt}\,dt = 0,\ \ k \leqslant 0\}$.

DOI: 10.31857/S0374064123030032, EDN: QUDPJS

1. Введение. Постановка задачи. Известно [1; 2; 3, гл. XIX], что система корневых функций дифференциального оператора произвольного чётного порядка с усиленно регулярными краевыми условиями образует безусловный базис пространства L_2.

В работе [4] доказано, что система корневых функций дифференциального оператора чётного порядка с не усиленно регулярными краевыми условиями образует базис в пространстве L_2. Существуют примеры дифференциальных операторов с не усиленно регулярными краевыми условиями, системы корневых функций которых не образуют базис в пространстве L_2 (см., например, [2, 5, 6]).

Через L обозначим дифференциальный оператор

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y' - (-1)^\sigma y'(0) = 0, \quad y(1) - (-1)^\sigma y(0) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0,1)$ и $\sigma = 0, 1$. Отметим, что краевые условия (2) (так называемые периодические и антипериодические краевые условия) регулярны, но не усиленно регулярны.

В статьях [7–10] исследованы различные спектральные свойства оператора (1), (2) при $\sigma = 0$. В основном в этих работах рассматриваются такие комплекснозначные потенциалы $q(x)$, что соответствующие системы корневых функций содержат конечное число присоединённых функций (для дифференциальных операторов высокого порядка см., например, [11–15]).

Базисность в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора с не усиленно регулярными краевыми условиями (особенно в случае, когда система корневых функций содержит бесконечное число присоединённых функций) исследована сравнительно мало.

В [16] была изучена одна неклассическая задача распространения тепла в однородном стрежне. Методом разделения переменных она сводится к краевой задаче

$$-y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1),$$

краевые условия которой являются регулярными, но не усиленно регулярными. Все собственные значения этой задачи, начиная со второго, двукратны, а общее число присоединённых функций бесконечно. Тем не менее в работе было установлено, что специальным образом выбранная система корневых функций образует безусловный базис в $L_2(0,1)$.

В работе [17] исследуются спектральные свойства дифференциального оператора (1), (2) при $q(x) = Ae^{2\pi irx}$, где $A \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ – произвольные ненулевые постоянные. Установлено, что система корневых функций оператора L содержит бесконечное число присоединённых функций. Доказано, что специальным образом выбранная система корневых функций этого оператора образует базис пространства $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, причём при $p=2$ этот базис является безусловным.

Отметим также статьи [18] и [19], посвящённые исследованию спектральных свойств некоторых несамосопряжённых дифференциальных операторов и операторов с периодическими коэффициентами.

Пусть $q(x)$ – произвольная комплекснозначная функция из класса $L_2(0,1)$ и

$$q_k = \int\limits_0^1 q(t)e^{-2\pi ikt}\,dt, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Класс $L_1^+(0,1)$ определим следующим образом:

$$L_1^+(0,1) = \{q(x)\in L_1(0,1) : q_k = 0, \quad k\leqslant 0\}.$$

В дальнейшем через L_0 будем обозначать дифференциальный оператор, порождённый дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^m y^{(2m)} + q(x)y, \tag{3}$$

заданным на интервале $(0,1)$, и краевыми условиями

$$y^{(s)}(1) - y^{(s)}(0) = 0, \quad s=\overline{0,2m-1}, \tag{4}$$

где $m\in\mathbb{N}$ и $q(x)$ – произвольная функция из класса $L_1^+(0,1)$.

Данная работа посвящена исследованию спектральных свойств (структуры) множества собственных значений и системы корневых функций, базисных свойств в пространствах $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, дифференциального оператора L_0 при условии $q(x)\in L_1^+(0,1)$.

2. Основные результаты. Введём некоторые обозначения. Пусть $\{T_{2n}\}_{n=1}^{n=\infty}$ – произвольная фиксированная числовая последовательность, $\nu(l)=(\nu_1,\ldots,\nu_e)\in\mathbb{Z}^l$,

$$\mathbb{Z}_k^l(r) = \{\nu(l)\in\mathbb{Z}^l : k>\nu_1>\ldots>\nu_l>r, \quad |\nu_j|\neq n, \quad j=\overline{1,l}\},$$

$$A_{k,n} = q_{k-n} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_k^l(r)} \frac{q_{k-\nu_1}\cdots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\cdots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}, \tag{5}$$

$$B_{k,n} = q_{k-n} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_k^l(r)} \frac{q_{k-\nu_1}\cdots q_{k_{l-1}-k_e}q_{k_l+n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\cdots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}, \tag{6}$$

$$B_n = B_{n,n}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

$$\mathbb{N}_1 = \{n\in\mathbb{N} : B_n = 0\}, \quad \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}/\mathbb{N}_1, \tag{8}$$

$$\Phi_{k,1}^{(n)} = \frac{A_{k,n}}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})}, \quad k\geqslant n+1, \quad n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{9}$$

$$\Phi_{k,2}^{(n)} = \frac{A_{k,n}}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})}, \quad k\geqslant -n+1, \quad k\neq n, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{10}$$

$$\Phi_{k,1}(n) = 0, \quad \Phi_{n,1}(n) = 1, \quad k<n, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{11}$$

$$\Phi_{k,2}(n) = 0, \quad \Phi_{n,2}(n) = 0, \quad \Phi_{-n,2}(n) = 1, \quad k<-n, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

$$D_k(n) = \left[\Phi_{k,1}^{(n)} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in z_k^l(n)} \frac{q_{k-\nu_1}\ldots q_{k_{\nu-1}-\nu_l}\Phi_{\nu_{l,1}}^{(n)}}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\ldots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})}, \quad k\geqslant n+1, \quad k\in\mathbb{N}, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

$$D_k(n) = 0, \quad k \leqslant n, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

$$\Psi_k(n) = \Phi_{k,1}(n)T_{2n} - \frac{1}{B_n}\Phi_{k,2}(n) + D_k(n), \quad k \geqslant -n+1, \quad k \neq n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$\Psi_k(n) = 0(k < -n+1), \quad \Psi_n(n) = T_{2n}, \quad \Psi_{-n}(n) = -B_n^{-1}, \tag{16}$$

$$W_{2n}(x) = e^{-2\pi inx} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} \Phi_{k,2}(n)e^{2\pi ikx}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$u_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{k,1}(0)e^{2\pi ikx}, \tag{18}$$

$$u_{2n-1}(x) = e^{2\pi inx} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n)e^{2\pi ikx}, \quad n \in \mathbb{N}_1, \tag{19}$$

$$u_{2n}(x) = W_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}_1, \tag{20}$$

$$u_{2n-1}(x) = (-B_n)^{1/2}\left[e^{2\pi inx} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{k,1}(n)e^{2\pi ikx}\right], \quad k \in \mathbb{N}_2, \tag{21}$$

$$u_{2n}(x) = (-B_n)^{1/2} \sum_{k=-n}^{\infty} \Psi_k(n)e^{2\pi ikx}, \quad n \in \mathbb{N}_2. \tag{22}$$

Заметим, что согласно (13)–(17) имеет место равенство

$$u_{2n}(x) = T_{2n}u_{2n-1}(x) + (-B_n)^{-1/2}W_{2n}(x) + (-B_n)^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k(n)e^{2\pi ikx}, \quad n \in \mathbb{N}_2. \tag{23}$$

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ – последовательность всех собственных значений дифференциального оператора L_0, пронумерованных в порядке возрастания абсолютных величин и без учёта кратностей.

Теорема 1. *Пусть $q(x) \in L_1^+(0,1)$. Тогда последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ дифференциального оператора L_0 обладает следующими свойствами:*

(a) $\lambda_n = (2\pi n)^{2m}$, $n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$;

(b) λ_0 – простое собственное значение, а λ_n – двукратное собственное значение при любом $n \in \mathbb{N}$;

(c) собственному значению λ_0 соответствует собственная функция $u_0(x)$, определённая равенством (18);

(d) при $n \in \mathbb{N}_1$ собственному значению λ_n соответствуют собственная функция $u_{2n-1}(x)$, определённая равенством (19), и собственная функция $u_{2n}(x)$, определённая равенством (20);

(e) при $n \in \mathbb{N}_2$ собственному значению λ_n соответствуют собственная функция $u_{2n-1}(x)$, определённая равенством (21), и присоединённая функция $u_{2n}(x)$, определённая равенством (22).

Теорема 2. *Пусть $p \in (1,\infty)$ – произвольное фиксированное число и $q(x) \in L_1^+(0,1)$. Тогда система корневых функций дифференциального оператора L_0 обладает следующими свойствами:*

(a) если $|\mathbb{N}_2| < \infty$, то система корневых функций дифференциального оператора L_0 образует базис пространства $L_p(0,1)$, и при $p=2$ этот базис является безусловным;

(b) если $|\mathbb{N}_2| = \infty$, то специальным образом выбранная система корневых функций дифференциального оператора L_0 образует базис пространства $L_p(0,1)$, и при $p=2$ этот базис является безусловным.

Теорема 3. *Пусть $p \in (1, \infty)$ – произвольное фиксированное число и $|\mathbb{N}_2| = \infty$. Тогда необходимым и достаточным условием базисности в $L_p(0,1)$ системы корневых функций дифференциального оператора L_0 является существование постоянной C_1, обеспечивающей для всех $n \in \mathbb{N}_2$ справедливость неравенства*

$$|T_{2n}B_n| \leqslant C_1. \tag{24}$$

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Пусть $q(x) \in L_1^+(0,1)$ и L_0 – дифференциальный оператор (3), (4).

Лемма 1. *Пусть $\Phi_{k,1}(n)$, $\Phi_{k,2}(n)$, $D_k(n)$ – числа, определённые равенствами (9), (10), (13). Тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| \leqslant C_2, \qquad \sum_{\substack{k=n+1\\k\neq n}}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| \leqslant C_1(n), \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty} |D_{k,n}| \leqslant C_3, \tag{25}$$

где C_2, C_3 – некоторые постоянные, а $C_1(n)$ – постоянная, зависящая только от n.

Доказательство. Предположим, что

$$P_{n,s} = \sum_{\nu=n+s}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}}, \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Пусть $s \geqslant 2$, $\nu \geqslant n+s$ и $x \in [\nu-1, \nu]$. Имеем $1/(\nu^{2m} - n^{2m}) \leqslant 1/(x^{2m} - n^{2m})$. Следовательно,

$$P_{n,s} = \sum_{\nu=n+s}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}} \leqslant \sum_{\nu=n+s}^{\infty} \int_{\nu-1}^{\nu} \frac{dx}{x^{2m} - n^{2m}} = \int_{n+s-1}^{\nu} \frac{dx}{x^{2m} - n^{2m}} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{s-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m}}, & n = 0, \\ \displaystyle\frac{1}{n^{2m-1}} \int_{1+(s-1)/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m} - 1}, & n \geqslant 1 \end{cases} \leqslant \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{(2m-1)(s-1)^{2m-1}}, & n = 0, \\ \displaystyle\frac{1}{n^{2m} - 1} \int_{1+(s-1)/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}, & n \geqslant 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{(2m-1)(s-1)^{2m-1}}, & n = 0, \\ \displaystyle\frac{1}{2n^{2m-1}} \ln\left(1 + \frac{2n}{s-1}\right), & n \geqslant 1 \end{cases} \leqslant \frac{1}{s-1}.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$P_{n,s} \geqslant \frac{1}{s-1}, \quad n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \quad S \leqslant 2. \tag{27}$$

Кроме того, заметим, что

$$P_{n,1} = P_{n,2} + \frac{1}{(n+1)^{2m} - n^{2m}} \leqslant 1 + 1 = 2. \tag{28}$$

Пусть

$$R_0 = \int_0^1 |q(x)|\, dx. \tag{29}$$

Очевидно, что справедлива оценка

$$|q_k| = \left|\int\limits_0^1 q(x)e^{-2\pi ikx}\,dx\right| \leqslant R_0. \tag{30}$$

Заметим, что если $\nu(l) \in \mathbb{Z}_k^l(n)$, то $k > \nu_1 \ldots \nu_l > n$ и, следовательно, имеет место неравенство $\nu_r \geqslant n + l - r + 1$, $r = \overline{1, l}$. Отсюда и из (5), (26)–(30) получим соотношения

$$|A_{k,n}| \leqslant R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}(\nu_1^{2m} - n^{2m})\cdots(\nu_l^{2m} - n^{2m})} \leqslant$$

$$\leqslant R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}}(P_{n,1}\ldots P_{n,l}) \leqslant R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}(l-1)!} = C_4,$$

где C_4 – некоторая постоянная. Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|A_{k,n}|}{k^{2m} - n^{2m}} \leqslant \frac{C_4 P_{n,1}}{(2\pi)^{2m}} \leqslant \frac{2C_4}{(2\pi)^{2m}} = C_2.$$

Первое из неравенств (25) доказано.

Ввиду (6) и (30) получим

$$|B_{k,n}| \leqslant R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}|\nu_1^{2m} - n^{2m}|\cdots|\nu_l^{2m} - n^{2m}|} \leqslant$$

$$\leqslant R_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_0^{l+1}}{(2\pi)^{2ml}} \left(\sum_{|\nu|\neq n}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|}\right)^l + \sum_{l=2n+2}^{\infty} \frac{R_0^{l+1}E_{k,n}^{(l)}}{(2\pi)^{2ml}}, \tag{31}$$

где

$$E_{k,n}^{(l)} = \sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_k^l(n)} \frac{R_0^{l+1}}{\|\nu_1^{2m} - n^{2m}\|\cdots|\nu_l^{2m} - n^{2m}|}.$$

Отсюда в силу (27) вытекает, что для всех $l \geqslant 2n+2$ имеет место оценка

$$E_{k,n}^{(l)} = \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \sum_{\substack{\nu=-n+2\\ \nu\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \cdots \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|}\right)^{2n} (P_{n,2}\ldots P_{n,l-2n}) \leqslant \left(\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|}\right)^{2n} \frac{1}{(l-2n-1)!}.$$

Следовательно, используя (31), легко получим неравенство $|B_{k,n}| \leqslant C_2(n)$, $k \geqslant -n+1$, $k \neq n$, где $C_2(n)$ – некоторая постоянная, зависящая только от n. Тогда ввиду (10) имеем

$$\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| \leqslant \frac{C_2(n)}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\substack{\nu=-n+2\\ \nu\neq n}}^{\infty} \frac{1}{|\nu^{2m} - n^{2m}|} = C_1(n).$$

Третье из неравенств (25) доказывается аналогично первому. Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Phi_{k,1}(n)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n),\quad n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{32}$$

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Phi_{k,2}(n)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}q_{k-\nu}\Phi_{\nu,2}(n),\quad n\in\mathbb{N}_1,\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{33}$$

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Psi_{k}(n)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}q_{k-\nu}\Psi_{\nu}(n)+\Phi_{k,1}(n),\quad n\in\mathbb{N}_2,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{34}$$

Доказательство. Докажем (32). Сходимость ряда в правой части равенства (32) следует из леммы 1 и из (11), (30).

Пусть $k\leqslant n$. В этом случае в силу (11) равенство (32) равносильно $\sum_{\nu\in Z}q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n)=0$. Поскольку $q(x)\in L_1^+(0,1)$, то из соотношения $q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n)\neq 0$ и (11) следует неравенство $k>\nu\geqslant n$. Таким образом, (32) справедливо при $k\leqslant n$.

Пусть $k>n$. Тогда согласно (5), (9) и (11) имеем

$$\sum_{\nu\in Z}q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n)=q_{k-n}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n)=q_{k-n}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}q_{k-\nu}\times$$

$$\times\left[q_{\nu-n}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_\nu^l(n)}\frac{q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\right]\frac{1}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu^{2m})}=$$

$$=q_{k-n}+\sum_{\nu=n+1}\frac{q_{k-\nu}q_{\nu-n}}{(2\pi)^{2m(l+1)}(n^{2m}-\nu_1^{2m})}+$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_\nu^l(n)}\frac{q_{k-\nu}q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2m(l+1)}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})(n^{2m}-\nu^{2m})}=$$

$$=q_{k-n}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_\nu^l(n)}\frac{q_{k-\nu}q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1-\nu_l}}q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}=(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Phi_{k,1}(n).$$

Равенство (32) доказано.

Докажем равенство (33). Сходимость ряда в правой части (33) следует из леммы 1 и из (30).

Пусть $k\leqslant -n$. В этом случае в силу (12) равенство (33) равносильно $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n)=$ $=0$. Как и в первом случае из соотношения $q_{k-\nu}\Phi_{\nu,1}(n)=0$ и из (12) следует неравенство $k>\nu\geqslant -n$. Следовательно, (33) справедливо при $k\leqslant -n$.

Если $k=n$, то (33) равносильно $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n)=0$. Заметим, что согласно (12), (6)–(8) при $n\in\mathbb{N}_1$ имеем

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n)=q_0\Phi_{n,2}(n)+q_{2n}\Phi_{-n,2}(n)+\sum_{|\nu|\neq n}^{\infty}q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n)=$$

$$=q_{2n}+\sum_{|\nu|\neq n}^{\infty}q_{n-\nu}\left[q_{\nu+n}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in\mathbb{Z}_\nu^l(-n)}\frac{q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_e+n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu^{2m})}=B_n=0.$$

Пусть $k > -n$ и $k \neq n$. Используя (10), (6) и (12), получим

$$\sum_{\nu\in Z} q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n) = q_{k-n}\Phi_{n,2}(n) + q_{k+n}\Phi_{-n,2}(n) + \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu|\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\Phi_{\nu,2}(n) = q_{k+n} +$$

$$+ \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu|\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\left[q_{\nu+n} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in Z^l_\nu(-n)} \frac{q_{\nu-\nu_1}\ldots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_e+n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\ldots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\right]\frac{1}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu^{2m})} =$$

$$= q_{k+n} + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu(l)\in Z^l_\nu(-n)} \frac{q_{k-\nu_1}\ldots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_e+n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\ldots(n^{2m}-\nu_l^{2m})} = (2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Phi_{k,2}(n).$$

Равенство (33) доказано.

Сходимость ряда в правой части (33) следует из леммы 1 и из (15), (30). В силу (16), (11) и (12) при $k \leqslant -n$ равенство (34) равносильно $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} q_{n-\nu}\Psi_\nu(n) = 0$. Как и в предыдущих случаях из соотношения $q_{k-\nu}\Psi_\nu(n) \neq 0$ получим $k > \nu \leqslant -n$. Таким образом, (34) справедливо при $k \leqslant -n$.

При $k = n$ (34) в силу (11) равносильно равенству

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} q_{n-\nu}\Psi_\nu(n) + 1 = 0. \tag{35}$$

Ввиду (15) и (16) получим

$$\sum_{\nu\in Z} q_{n-\nu}\Psi_\nu(n) + 1 = \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\Psi_\nu(n) + 1 - \frac{q_{2n}}{B_n} =$$

$$= T_{2n}\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}\Phi_{\nu,1}(n) - \frac{1}{B_n}\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n) + \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}D_\nu(n) + 1 - \frac{q_{2n}}{B_n}. \tag{36}$$

В силу (11) и (14) имеем

$$\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}\Phi_{\nu,1}(n) = \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}D_\nu(n) = 0.$$

Отсюда и из (36) следует равенство

$$\sum_{\nu\in Z} q_{n-\nu}\Psi_\nu(n) + 1 = 1 - \frac{1}{B_n}\left(q_{2n} + \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n)\right). \tag{37}$$

С другой стороны, в силу формул (6), (7) и (10) имеем

$$q_{2n} + \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}\Phi_{\nu,2}(n) = 0. \tag{38}$$

Равенство (35) является следствием (37) и (38).

Докажем (34) при $k \geqslant -n+1$, $k \neq n$. В данном случае (34) равносильно равенству

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Psi_k(n) = \sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{n-\nu}\Psi_\nu(n) + T_{2n}q_{k-n} - \frac{1}{B_n}q_{k+n} + \Phi_{k,1}(n).$$

Согласно обозначениям (5)–(15) имеем

$$\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\Psi_\nu(n)+T_{2n}q_{k-n}-\frac{1}{B_n}q_{k+n}+\Phi_{k,1}(n)=$$

$$=T_{2n}\bigg(q_{k-n}+\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\bigg(q_{\nu-n}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^l_\nu(n)}\frac{q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_l-n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\bigg)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-\nu^{2m})}\bigg)-\frac{1}{B_n}\bigg(q_{k+n}+\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\times$$

$$\times\bigg(q_{\nu+n}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^l_\nu(n)}\frac{q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}q_{\nu_l+n}}{(2\pi)^{2ml}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\bigg)\frac{1}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-\nu^{2m})}\bigg)+$$

$$+\bigg(\Phi_{k,1}(n)+\sum_{\substack{\nu=-n+1\\ \nu\neq n}}^{\infty} q_{k-\nu}\bigg(\Phi_{\nu,1}(n)+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^l_\nu(n)}\frac{q_{\nu-\nu_1}\dots q_{\nu_{l-1}-\nu_l}\Phi_{\nu_l,1}(n)}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-\nu_1^{2m})\dots(n^{2m}-\nu_l^{2m})}\bigg)\times$$

$$\times\frac{1}{(2\pi)^{2m}(n^{2m}-\nu^{2m})}\bigg)=T_{2n}A_{k,n}-\frac{1}{B_n}B_{k,n}+D_k(n)(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})=$$

$$=\bigg(T_{2n}\Phi_{k,1}(n)-\frac{1}{B_n}\Phi_{k,2}(n)+D_k(n)\bigg)(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})=(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\Psi_k(n).$$

Равенство (34) доказано. Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы следующие оценки:*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|\Phi_{k,1}(n)|=O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg), \tag{39}$$

$$\sum_{k=-n+1}^{\infty}|\Phi_{k,2}(n)|=O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg), \tag{40}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|D_k(n)|=O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg). \tag{41}$$

Доказательство. Пусть $n\geqslant 3$ и

$$E(n)=\sum_{\nu\neq n}\frac{1}{|n^{2m}-\nu^{2m}|}. \tag{42}$$

Заметим, что

$$E(n)=\frac{1}{n^{2m}}+E_1(n)+E_2(n), \tag{43}$$

где

$$E_1(n)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{1}{n^{2m}-\nu^{2m}},\quad E_2(n)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2m}-n^{2m}}. \tag{44}$$

Если $x \in [\nu, \nu+1]$, $\nu = \overline{1, n-2}$, то имеем

$$\frac{1}{n^{2m} - \nu^{2m}} \leqslant \frac{1}{n^{2m} - x^{2m}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{n^{2m} - \nu^{2m}} \leqslant \sum_{\nu=1}^{n-2} \int\limits_{\nu}^{\nu+1} \frac{dx}{n^{2m} - x^{2m}} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}.$$

Отсюда и из (44) легко вывести неравенство

$$E_1(n) \leqslant \frac{2\ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \tag{45}$$

Как и выше, при $x \in [\nu-1, \nu]$, $\nu \geqslant n+2$, имеем $1/(\nu^{2m} - n^{2m}) \leqslant 1/(x^{2m} - n^{2m})$, откуда следует неравенство

$$\sum_{\nu=n+2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2m} - n^{2m}} \leqslant \sum_{\nu=n+2}^{\infty} \int\limits_{\nu-1}^{\nu} \frac{dx}{x^{2m} - n^{2m}} = \int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^{2m} - n^{2m}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{2m-1}} \int\limits_{1+1/n}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n^{2m-1}} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}.$$

Отсюда и из (44) приходим к оценке

$$E_2(n) \leqslant \frac{1}{(n+1)^{2m} - n^{2m}} + \frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \leqslant \frac{2\ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \tag{46}$$

В силу (42)–(46) имеем

$$E(n) \leqslant \frac{5\ln(n+1)}{n^{2m-1}}. \tag{47}$$

Пусть $n_0 \geqslant 3$ – фиксированное целое число такое, что при всех $n \geqslant n_0$ имеют место неравенства

$$\frac{R_0 E(n)}{(2\pi)^{2m}} \leqslant \frac{5R_0 \ln(n+1)}{(2\pi)^{2m} n^{2m-1}} \leqslant \frac{1}{2},$$

где R_0 – число, определённое равенством (29). Тогда в силу (5), (9), (42) и (47) при $n \geqslant n_0$ получим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| \leqslant R_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v \in \mathbb{Z}_\nu^l(n)} \frac{R_0^l}{(2\pi)^{2ml} |n^{2m} - \nu_1^{2m}| \cdots |n^{2m} - \nu_l^{2m}|}\right] \frac{1}{(2\pi)^{2m} |n^{2m} - k^{2m}|} \leqslant$$

$$\leqslant R_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R_0 E(n)}{(2\pi)^{2m}}\right)^l\right] \frac{1}{(2\pi)^{2m} |n^{2m} - k^{2m}|} \leqslant \frac{2R_0 E(n)}{(2\pi)^{2m}} \leqslant \frac{10 R_0 \ln(n+1)}{(2\pi)^{2m} n^{2m-1}}.$$

Оценка (39) доказана.

Оценки (40) и (41) доказываются совершенно аналогично. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если существует присоединённая функция дифференциального оператора* L_0, *соответствующая собственной функции* $y_0(x)$, *то справедливо равенство* $\int_0^1 y_0^2(x)\, dx = 0$.

Это утверждение доказывается аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [17].

Лемма 5 [17]. *Пусть выполнены следующие условия:*

a) y_0, y_1 *– функции из класса* $L_2(0,1)$ *и* $\int_0^1 y^2(x)\,dx = 0$, $\int_0^1 y_0(x)y_1(x)\,dx = 1$;

b) функции ψ_0 *и* ψ_1 *определены равенствами* $\psi_0 = -(\overline{a} + c_0)\overline{y}_0 + \overline{y}_1$, $\psi_1 = \overline{y}_0$, *где* a *– произвольное фиксированное число и* $c_0 = \int_0^1 y_1^2(x)\,dx$.

Тогда справедливы равенства $(y_0, \psi_0) = (ay_0 + y_1, \psi_1) = 1$, $(y_0, \psi_1) = (ay_0 + y_1, \psi_1) = 0$.

Элементы системы $\{\nu_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ определим следующим образом:

$$\overline{v_0(x)} = u_0(x), \quad \overline{v_{2n-1}(x)} = u_{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}_1, \tag{48}$$

$$\overline{v_{2n}(x)} = u_{2n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{49}$$

$$\overline{v_{2n-1}(x)} = -T_{2n}^* u_{2n-1}(x) + \frac{1}{(-B_n)^{1/2}} W_{2n}(x) + (-B_n)^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} D_k(n) e^{2\pi ikx}, \quad n \in \mathbb{N}_2, \tag{50}$$

$$T_{2n}^* = T_{2n} \frac{1}{B_n} \left(\Phi_{0,2}^2(n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k,2}(n) \Phi_{-k,2}(n) \right). \tag{51}$$

Лемма 6. *Справедливы асимптотические формулы*

$$u_{2n-1}(x) = \overline{v_{2n}(x)} = e^{2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \tag{52}$$

$$u_{2n}(x) = \overline{v_{2n-1}(x)} = e^{-2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \tag{53}$$

$$u_{2n-1}(x) = \overline{v_{2n}(x)} = (-B_n)^{1/2} e^{2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} u_{2n}(x) = T_{2n}(-B_n)^{1/2} e^{2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right) + \\ + (-B_n)^{-1/2} e^{2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{2n-1}(x)} = -T_{2n}(-B_n)^{1/2} e^{2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right) + \\ + (-B_n)^{-1/2} e^{2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty. \end{aligned} \tag{56}$$

Доказательство. Формулы (52)–(54) являются простыми следствиями обозначений (17)–(21), (48), (49) и леммы 3.

Докажем формулу (56) (формула (55) доказывается совершенно аналогично).

Заметим, что согласно лемме 3 и равенству (17) справедливы равенства

$$\Phi_{0,2}^2(n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_{k,2}(n) \Phi_{-k,2}(n) = O\left(\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-1}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty,$$

$$W_{2n}(x) = e^{-2\pi inx} \left(1 + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, в силу (6) и (7) имеем

$$B_n = q_{2n} + O\left(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}} \right) = O(1), \quad n \in \mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty.$$

Равенство (55) является следствием последних трёх равенств и (50), (51), (54).

В дальнейшем норму в пространстве $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, будем обозначать через $\|\cdot\|_p$. Лемма доказана.

Пусть запись $b_n = O^*(1)$, где $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная числовая последовательность, означает выполнение неравенства $d_1 \leqslant |b_n| \leqslant d_2$, $n\in\mathbb{N}$, где d_1 и d_2 – некоторые положительные постоянные.

Лемма 7. *При $p\in(1,\infty)$ имеют место соотношения*

$$\|u_{2n-1}\|_p = \|v_{2n}\|_p = 1 + O\biggl(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr), \quad n\in\mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \tag{57}$$

$$\|u_{2n}\|_p = \|v_{2n-1}\|_p = 1 + O\biggl(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr), \quad n\in\mathbb{N}_1, \quad |\mathbb{N}_1| = \infty, \tag{58}$$

$$\|u_{2n-1}\|_p = \|v_{2n}\|_p = |B_n|^{1/2}\biggl(1 + O\biggl(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr)\biggr), \quad n\in\mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \tag{59}$$

$$\|u_{2n}\|_p = |B_n|^{-1/2}[|T_{2n}B_n|+1]O^*(1), \quad n\in\mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty, \tag{60}$$

$$\|v_{2n-1}\|_p = |B_n|^{-1/2}[|T_{2n}B_n|+1]O^*(1), \quad n\in\mathbb{N}_2, \quad |\mathbb{N}_2| = \infty. \tag{61}$$

Доказательство данной леммы дословно повторяет доказательство леммы 3.5 из [17].

Лемма 8 [17]. *Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ – ортонормированный базис гильбертова пространства H и $\{a_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ – произвольная ограниченная числовая последовательность. Тогда система $\{\psi_n\}_{n=0}^{n=\infty}$, где $\psi_0=\varphi_0$, $\psi_{2n-1}=\varphi_{2n-1}$ и $\psi_{2n}=a_n\varphi_{2n-1}+\varphi_{2n}$, $n\in\mathbb{N}$, является базисом Рисса пространства H.*

Лемма 9. *Пусть n – фиксированное целое неотрицательное число, $R(x)\in L_1(0,1)$, $F(x)\in L_1(0,1)$, $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_1$, $r_k=\int_0^1 R(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$, $k\in\mathbb{Z}$, $F_k=\int_0^1 F(x)e^{-2\pi ikx}\,dx$, $k\in\mathbb{Z}$,*

$$(2\pi)^{2m}(n^{2m}-k^{2m})\theta_k = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} r_{k-\nu}\theta_\nu + F_k, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{62}$$

Тогда функция

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\theta_k e^{2\pi ikx} \tag{63}$$

принадлежит классу $W_1^{2m}(0,1)$ и является решением краевой задачи

$$(-1)^m u^{(2m)}(x) + R(x)u(x) = (2\pi n)^{2m}u(x) - F(x), \tag{64}$$

$$u^{(s)}(1) - u^{(s)}(0) = 0, \quad s=\overline{0,2m-1}. \tag{65}$$

Доказательство. В силу условия $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in l_1$ функциональный ряд в правой части (63) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,1]$. Следовательно,

$$\int_0^1 R(x)u(x)e^{-2\pi ikx}\,dx = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\theta_\nu\int_0^1 R(x)e^{-2\pi i(k-\nu)}\,dx = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} z_{k-\nu}\theta_\nu, \quad k\in\mathbb{Z}. \tag{66}$$

Из (62) и (66) находим, что при $k\in\mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$(-1)^m(2\pi ik)^{2m}\theta_k = \int_0^1 [(2\pi k)^{2m}u(x) - R(x)u(x) - F(x)]e^{-2\pi ikx}\,dx, \tag{67}$$

т.е. числа $(-1)^m(2\pi ik)^{2m}\theta_k$, $k\in\mathbb{Z}$, являются коэффициентами Фурье функции

$$Q(x) = (2\pi n)^{2m}u(x) - R(x)u(x) - F(x). \tag{68}$$

Пусть

$$Q_k = \int\limits_0^1 Q(x) e^{-2\pi ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{69}$$

Согласно [20, п. 10.1.5] ряд

$$\sum_{k\neq 0} \frac{Q_k}{2\pi ik} e^{2\pi ikx} \tag{70}$$

равномерно сходится при $x \in [0,1]$. Заметим также, что ряды

$$\sum_{k\neq 0} \frac{Q_k}{(2\pi ik)^s} e^{2\pi ikx}, \quad s = \overline{2, 2m-1},$$

сходятся абсолютно и равномерно при $x \in [0,1]$.

Ввиду (67)–(69)

$$Q_k = (-1)^m (2\pi ik)^{2m} \theta_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{71}$$

Отсюда и из рассуждений выше следует, что ряды

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi ik)^{2m} \theta_k e^{2\pi ikx}, \quad s = \overline{0, 2m-1},$$

сходятся равномерно на отрезке $[0,1]$. Следовательно, $u(x) \in C^{2m-1}[0,1]$, при $s = \overline{0, 2m-1}$

$$u^{(s)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi ik)^s \theta_k e^{2\pi ikx}, \tag{72}$$

и ряд в правой части (72) сходится равномерно на $[0,1]$. Отсюда также следует, что функция $u(x)$ удовлетворяет краевым условиям (65).

Используя интегрирование по частям, находим

$$\int\limits_0^1 \biggl(\int\limits_0^x Q(t)\,dt\biggr) e^{-2\pi ikx}\,dx = \frac{Q_k}{2\pi ik}, \quad k \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^1 \biggl(\int\limits_0^x Q(t)\,dt\biggr)\,dx = -\int\limits_0^1 xQ(x)\,dx = d_0.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $\int_0^x Q(t)\,dt$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеет вид

$$\int\limits_0^x Q(t)\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Q_k e^{2\pi ikx}}{2\pi ik} + d_0$$

и равномерно сходится при $x \in [0,1]$. Следовательно, ряд (70), или согласно (71) ряд

$$(-1)^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} (2\pi ik)^{2m-1} \theta_k e^{2\pi ikx},$$

является рядом Фурье функции $\int_0^x Q(t)\,dt - d_0$ при $x \in [0,1]$. Отсюда и из (72) получим равенство

$$(-1)^m u^{(2m-1)}(x) = \int\limits_0^x Q(t)\,dt - d_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

которое означает, что $(-1)^m u^{(2m-1)}(x) \in W_1^1(0,1)$ и при почти всех $x \in (0,1)$ имеет место $(-1)^m u^{(2m-1)}(x) = Q(x)$. Отсюда и из (68) следует, что уравнение (64) удовлетворяется при почти всех $x \in (0,1)$. Лемма доказана.

4. Доказательство основных результатов. Докажем, что функция $u_{2n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, является собственной функцией дифференциального оператора L_0, соответствующей собственному значению $\lambda = (2\pi n)^{2m}$.

Введём обозначения $R(x) = q(x)$, $F(x) = 0$, $\theta_k = \Phi_{k,1}(n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что согласно (25) и (32) выполняются все условия леммы 9. Следовательно, функция $u(x) = u_{2n-1}(x)$ принадлежит классу $W_1^{2m}(0,1)$ и является решением краевой задачи (64), (65) при $R(x) = q(x)$, $F(x) = 0$.

Используя леммы 1, 2 и 9, совершенно аналогичным образом доказывается, что функция $u_{2n}(x)$, $n \in \mathbb{N}_1 \bigcup \{0\}$, является собственной функцией дифференциального оператора L_0, соответствующей собственному значению $\lambda = (2\pi n)^{2m}$.

Заметим, что $\int_0^1 u_0^2(x)\,dx = 1$. Тогда в силу леммы 4 не существует присоединённой функции, соответствующей собственной функции $u_0(x)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}_2$ – фиксированное число, $R(x) = q(x)$, $F(x) = u_{2n-1}(x)$, $\theta_k = (-B_n)^{1/2}\psi_k(n)$. Ввиду (15), (16), (11), (12), (14) и (25) имеем соотношения

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\theta_k| \leqslant |T_{2n}||B_n|^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\Phi_{k,1}(n)| + |B_n|^{-1/2} \sum_{k=-n}^{\infty} |\Phi_{k,2}(n)| + |B_n|^{1/2} \sum_{k=n+1}^{\infty} |D_k(n)| < \infty.$$

Следовательно, удовлетворяются все условия леммы 9.

Таким образом, функция

$$u(x) = u_{2n}(x) = (-B_n)^{1/2} \sum_{k=-n}^{\infty} \psi_k(n) e^{2\pi i k x}, \quad n \in \mathbb{N}_2,$$

принадлежит классу $W_1^{2m}(0,1)$ и является решением краевой задачи (64), (65) при $R(x) = q(x)$, $F(x) = u_{2n-1}(x)$, т.е. функция $u_{2n}(x)$ $(n \in \mathbb{N}_2)$ является присоединённой функцией дифференциального оператора L_0, соответствующей собственному значению $(2\pi n)^{2m}$ и собственной функции $u_{2n-1}(x)$.

Тем самым доказано, что каждое из чисел $(2\pi n)^{2m}$, $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, является собственным значением дифференциального оператора L_0, причём при $n \geqslant 1$ число $(2\pi n)^{2m}$ является по меньшей мере двукратным собственным значением.

Пусть L_0^* – дифференциальный оператор, сопряжённый к L_0, оператор L_0^* порожден дифференциальным выражением $l_0^*(v) = (-1)^m v(2m) + \overline{q(x)}v(x)$ и краевыми условиями $v^{(s)}(1) - v^{(s)}(0) = 0$, $s = \overline{0, 2m-1}$.

Предположим, что $\{v_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ – система, определённая равенствами (47)–(50). Очевидно, что каждое из чисел $(2\pi n)^{2m}$, $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, является собственным значением оператора L_0^* и при $n \geqslant 1$ число $(2\pi n)^{2m}$ – двукратное, по меньшей мере, собственное значение этого оператора. Нетрудно заметить, что функция $v_0(x)$ является собственной функцией оператора L_0^*, соответствующей простому собственному значению $\lambda = 0$; при $n \in \mathbb{N}_1$ каждая из функций $v_{2n-1}(x)$ и $v_{2n}(x)$ является собственной функцией оператора L_0^*, соответствующей собственному значению $(2\pi n)^{2m}$; при $n \in \mathbb{N}_2$ функция $v_{2n}(x)$ является собственной функцией оператора L_0^*, соответствующей собственному значению $(2\pi n)^{2m}$; при $n \in \mathbb{N}_2$ функция $v_{2n-1}(x)$ является присоединённой функцией оператора L_0^*, соответствующей собственной функции $v_{2n}(x)$ и собственному значению $(2\pi n)^{2m}$.

Докажем, что система $\{v_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ биортогонально сопряжена к системе $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ или, что то же самое, имеет место равенство

$$(u_n, v_\nu) = \int_0^1 u_n(x)\overline{v(x)}\,dx = \delta_{n,\nu}, \quad n, \nu \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

где $\delta_{n,\nu}$ – символ Кронекера.

Заметим, что $u_{2n-1}(x)$, $u_{2n}(x)$ – корневые функции оператора L_0, соответствующие собственному значению $\lambda=(2\pi n)^{2m}$; $v_{2\nu-1}(x)$, $v_{2\nu}(x)$ – корневые функции оператора L_0^*, соответствующие значению $\mu=(2\pi\nu)^{2m}$. Поскольку при $n\ne\nu$ имеет место $\lambda\ne\mu=\overline{\mu}$, то отсюда и из сказанного выше следует справедливость равенств $(u_{2n-1},v_{2\nu-1})=0$, $(u_{2n},\nu_{2\nu-1})=0$, $(u_{2n-1},v_{2\nu})=0$, $(u_{2n},v_{2\nu})=0$, где $n\ne v$, $n,\nu\in\mathbb{N}$. По той же причине $(u_0,v_\nu)=0$, $(u_n,v_0)=0$, где $\nu,n\in\mathbb{N}$.

Таким образом, нужно доказать выполнение равенств

$$(u_0,v_0)=1,\quad (u_{2n-1},v_{2n-1})=1,\quad (u_{2n-1},v_{2n})=0,\quad n\in\mathbb{N},\tag{73}$$

$$(u_{2n},v_{2n-1})=0,\quad (u_{2n},v_{2n})=1,\quad n\in\mathbb{N}.\tag{74}$$

Согласно (17)–(19) и (48), (49) при $n\in\mathbb{N}_1$ имеем

$$(u_0,v_0)=\int\limits_0^1 u_0^2(x)\,dx=1,$$

$$(u_{2n-1},v_{2n-1})=\int\limits_0^1 u_{2n-1}(x)u_{2n}(x)\,dx=\int\limits_0^1\biggl[1+\sum_{k=-n+1}^{\infty}\Phi_{k,2}(n)e^{2\pi i(k+n)x}+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Phi_{k,1}(n)e^{2\pi i(k-n)x}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{\nu=-n+1}^{\infty}\Phi_{k,1}(n)\Phi_{\nu,2}(n)e^{2\pi i(k+\nu)x}\,dx\biggr]=0,$$

$$(u_{2n-1},v_{2n})=\int\limits_0^1 u_{2n-1}^2(x)\,dx=\int\limits_0^1\biggl[e^{4\pi inx}+2\sum_{k=n+1}^{\infty}\Phi_{k,1}(n)e^{2\pi i(k+n)x}+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{k=\nu+1}^{\infty}\Phi_{k,1}(n)\Phi_{\nu,1}(n)e^{2\pi i(k+\nu)x}\,dx\biggr]=0.$$

Равенства (74) при $n\in\mathbb{N}_1$ доказываются совершенно аналогично.

Для доказательства равенств (73) и (74) в случае $n\in\mathbb{N}_2$ используем лемму 5. Пусть $n\in\mathbb{N}_2$ и

$$y_0=u_{2n-1}(x),\quad y_1=\frac{1}{(-B_n)^{1/2}}W_n(x)+(-B_n)^{1/2}\sum_{k=n+1}^{\infty}D_k(n)e^{2\pi ikx},\tag{75}$$

$$a=T_{2n},\quad c_0=\int\limits_0^1 y_1^2(x)\,dx.\tag{76}$$

Используя (17), нетрудно убедиться в том, что имеет место равенство

$$c_0=-\frac{1}{B_n}\biggl(\Phi_{0,2}^2(n)+2\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{k,2}(n)\Phi_{-k,2}(n)\biggr).\tag{77}$$

Таким образом, согласно (21)–(23) и (49)–(51) при $n\in\mathbb{N}_2$ имеем

$$u_{2n-1}=y_0,\quad u_{2n}=ay_0+y_1,\quad \overline{v_{2n-1}}=-(a+c_0)y_0+y_1,\quad \overline{v_{2n}}=y_0.\tag{78}$$

Кроме того, легко убедиться в том, что в рассматриваемом случае справедливы равенства

$$\int\limits_0^1 y_0^2(x)\,dx=0,\quad \int\limits_0^1 y_0(x)y_1(x)\,dx=1.$$

Отсюда и из (75)–(78) с учётом леммы 5 следуют равенства (73), (74) при $n\in\mathbb{N}_2$.

Заметим, что периодические краевые условия регулярны. Следовательно [21, с. 74], достаточно большие по абсолютной величине собственные значения дифференциального оператора L_0 лежат в $O(n^{2m-3/2})$ окрестностях точек $(2\pi n)^{2m}$, где $n = n_0, n_0+1, \ldots$ и n_0 – некоторое достаточно большое натуральное число; кроме того, в каждой такой окрестности лежат или два простых собственных значения, или одно двукратное собственное значение. Отсюда и из сказанного выше следует, что если S_0 – система корневых функций дифференциального оператора L_0, содержащая систему $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$, то имеет место равенство

$$S_0 = \{U_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty} = S_1 \bigcup \{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty},$$

где S_1 – либо пустое множество, либо содержит только конечное число корневых функций.

Так как периодические краевые условия регулярны, то система S_0 полна и минимальна в пространстве $L_2(0,1)$ (см., например, [4]). Если S_0^* – система, биортогонально сопряжённая в $L_2(0,1)$ к системе S_0, хорошо известно, что S_0^* является системой всех корневых функций дифференциального оператора L_0^* и в данном случае справедливо равенство

$$S_0^* = \{V_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty} = S_1^* \bigcup \{v_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty},$$

где S_1^* – либо пустое множество, либо содержит конечное число корневых функций дифференциального оператора L_0^*. Заметим, что $|S_1| = |S_1^*|$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $|\mathbb{N}_1| = |\mathbb{N}_2| = \infty$. Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично.

Из леммы 7 легко получим соотношение

$$\|u_{2n-\gamma}\|_2 \|v_{2n-\gamma}\|_2 = \begin{cases} 1 + O\left(\dfrac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\right), & \text{если } \gamma = 1 \text{ и } n \in \mathbb{N}_1, \\ (|T_{2n}B_n| + 1)O^*(1), & \text{если } \gamma = 0 \text{ и } n \in \mathbb{N}_2. \end{cases} \tag{79}$$

Пусть выполняется неравенство (24). Отсюда и из (79) следует существование постоянной C, обеспечивающей для всех $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ выполнение неравенства

$$\|U_n\|_2 \|V_n\|_2 \leqslant C. \tag{80}$$

Докажем, что каждая из систем S_0 и S_0^* является безусловным базисом пространства $L_2(0,1)$. Поскольку S_0 и S_0^* полны в пространстве $L_2(0,1)$, биортогонально сопряжены и $|S_1| = |S_1^*| < \infty$, то достаточно доказать [22, с. 375], что каждая из систем

$$\left\{\frac{u_n(x)}{\|u_n\|_2}\right\}_{n=0}^{n=\infty} \quad \text{и} \quad \left\{\frac{v_n(x)}{\|v_n\|_2}\|u_n\|_2\|v_n\|_2\right\}_{n=0}^{n=\infty}$$

является бесселевой, т.е. для всех $f \in L_2(0,1)$ выполняются условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f,u_n)|^2}{\|u_n\|^2} < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f,u_n)|^2}{\|v_n\|^2}\|u_n\|^2\|v_n\|^2 < \infty. \tag{81}$$

Согласно (80) последнее неравенство в (81) может быть заменено условием

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(f,v_n)|^2}{\|v_n\|^2} < \infty.$$

Для доказательства первого неравенства из (81) достаточно доказать сходимость рядов

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_j} \frac{|(f,u_{2n-1})|^2}{\|u_{2n-1}\|_2^2}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}_j} \frac{|(f,u_{2n})|^2}{\|u_{2n}\|_2^2}, \tag{82}$$

где $f \in L_2(0,1)$ и $j = 1, 2$.

Пусть
$$\varphi_0(x)=1,\quad \varphi_{2n-1}(x)=e^{2\pi inx},\quad \varphi_{2n}(x)=e^{-2\pi inx},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{83}$$
Так как система (83) образует ортонормированный базис пространства $L_2(0,1),$ то она также является бесселевой.

Всюду в дальнейшем через C (с нижним индексом) будем обозначать некоторые положительные постоянные.

Пусть n_0 – некоторое достаточно большое целое число. Согласно (56)–(59) имеем
$$\|u_{2n-1}\|_2\geqslant C_3,\quad \|u_{2n}\|_2\geqslant C_4,\quad n\geqslant n_0,\quad n\in\mathbb{N}_1, \tag{84}$$
$$\|u_{2n-1}\|_2\geqslant C_5|B_n|^{1/2},\quad \|u_{2n}\|_2\geqslant C_6|B_n|^{-1/2},\quad n\geqslant n_0,\quad n\in\mathbb{N}_2. \tag{85}$$
Кроме того, при всех $f\in L_2(0,1)$ в силу (52)–(55) и (24) находим
$$|(f,u_{2n-1})|^2\leqslant C_7\biggl(|(f,\varphi_{2n-1})|^2+\|f\|_2^2\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}}\biggr),\quad n\geqslant n_0,\quad n\in\mathbb{N}_1, \tag{86}$$
$$|(f,u_{2n})|^2\leqslant C_8\biggl(|(f,\varphi_{2n})|^2+\|f\|_2^2\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}}\biggr),\quad n\geqslant n_0,\quad n\in\mathbb{N}_1, \tag{87}$$
$$|(f,u_{2n-1})|^2\leqslant C_9|B_n|^{-1}\biggl(|(f,\varphi_{2n-1})|^2+\|f\|_2^2\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}}\biggr),\quad n\geqslant n_0,\quad n\in\mathbb{N}_2, \tag{88}$$
$$|(f,u_{2n})|^2\leqslant C_{10}|B_n|^{-1}\biggl(|(f,\varphi_{2n-1})|^2+|(f,\varphi_{2n})|^2+\|f\|_2^2\frac{\ln^2(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr),\quad n\geqslant n_0,\quad n\in\mathbb{N}_2. \tag{89}$$
Сходимость рядов (82) следует из оценок (84)–(89). Например, ввиду (85) и (89) при всех $n\geqslant n_0$ и $n\in\mathbb{N}_2$ имеем
$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_2\\ n\geqslant n_0}}^{\infty}\frac{|(f,u_{2n})|^2}{\|u_{2n}\|_2^2}\leqslant C_{11}\biggl[\sum_{n=n_0}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2+\|f\|_2^2\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr]<\infty.$$

Таким образом, доказано, что каждая из систем S_0 и S_0^* образует безусловный базис пространства $L_2(0,1)$.

Теперь докажем, что система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ содержит все корневые функции дифференциального оператора L_0 или, что то же самое, что $S_1=\varnothing$.

Пусть
$$\psi_0(x)=\varphi_0(x),\quad \psi_{2n-1}(x)=\varphi_{2n-1}(x),\quad \psi_{2n}(x)=\varphi_{2n}(x),\quad n\in\mathbb{N}_1,$$
$$\psi_{2n-1}(x)=\varphi_{2n-1}(x),\quad \psi_{2n}(x)=-T_{2n}B_n,\quad \varphi_{2n-1}(x)+\varphi_{2n}(x),\quad n\in\mathbb{N}_2.$$
Так как система (83) является ортонормированным базисом пространства $L_2(0,1)$ и выполняется условие (24), то в силу леммы 8 система $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ является базисом Рисса этого же пространства.

Заметим, что при выполнении условия (24) в силу (52)–(55) имеем равенства
$$u_{2n-1}(x)=\psi_{2n-1}(x)+O\biggl(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr),\quad u_{2n}(x)=\psi_{2n}(x)+O\biggl(\frac{\ln^2(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr),\quad n\in\mathbb{N}_1,\quad |\mathbb{N}_1|=\infty,$$
$$(-B_n)^{-1/2}u_{2n-1}(x)=\psi_{2n-1}(x)+O\biggl(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr),$$
$$(-B_n)^{1/2}u_{2n}(x)=\psi_{2n}(x)+O\biggl(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\biggr),\quad n\in\mathbb{N}_2,\quad |\mathbb{N}_2|=\infty.$$

Согласно этим соотношениям соответствующая перестановка системы

$$\{u_0(x)\}\bigcup\{u_{2n-1}(x),u_{2n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_1}\bigcup\{(-B_n)^{1/2}u_{2n-1}(x),(-B_n)^{1/2}u_{2n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}_2} \tag{90}$$

является квадратично близкой к системе $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$. Кроме того, система (90) также минимальна. Следовательно (см. [22, с. 374]), эта система образует базис пространства $L_2(0,1)$. Поскольку $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ есть часть базиса S_0, то $S_1=\varnothing$. Таким образом, система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ содержит все корневые функции дифференциального оператора L_0.

Теорема 1 и часть теоремы 2, относящаяся к базисности в $L_2(0,1)$, доказаны.

Предположим, что $1<p<2$ и p фиксировано. Поскольку система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ полна в пространстве $L_2(0,1)$, то эта система полна и в пространстве $L_p(0,1)$. Следовательно (см. [23, с. 19]), для базисности в $L_p(0,1)$ этой системы необходимо и достаточно существование постоянной $M_1>0$, обеспечивающей при всех $l\in\mathbb{N}$ справедливость неравенства

$$\bigg\|\sum_{n=0}^{l}(f,v_n)u_n\bigg\|_p\leqslant M_1\|f\|_q, \tag{91}$$

где $f(x)$ – произвольная функция из $L_p(0,1)$.

Пусть выполняется неравенство (24). Отсюда и из леммы 7 получим, что имеет место оценка

$$\|u_n\|_p\|v_n\|_q\leqslant C_{12}, \tag{92}$$

где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Отсюда следует, что неравенство (91) равносильно существованию постоянной $M_2>0$, обеспечивающей при всех $l\in\mathbb{N}$ выполнение неравенства

$$\bigg\|\sum_{n=1}^{2l}(f,v_n)u_n\bigg\|_p\leqslant M_2\|f\|_p, \tag{93}$$

где $f(x)$ – произвольная функция из $L_p(0,1)$.

Положим

$$J_l(f)=\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathbb{N}_1}}^{l}\sum_{j=0}^{1}(f,v_{2n-j})u_{2n-j}+\sum_{\substack{n=1\\ n\in\mathbb{N}_2}}^{l}\sum_{j=0}^{1}(f,v_{2n-j})u_{2n-j}. \tag{94}$$

Тогда неравенство (93) примет вид $\|J_l(f)\|_p\leqslant M_2\|f\|_p$. Непосредственное вычисление с использованием леммы 6 показывает, что при $n\in\mathbb{N}$ (случаи $n\in\mathbb{N}_1$ и $n\in\mathbb{N}_2$ рассматриваются отдельно) имеет место равенство

$$\sum_{j=0}^{1}(f,v_{2n-j})u_{2n-j}=$$

$$=(f,\varphi_{2n-1})\varphi_{2n-1}+(f,\varphi_{2n})\varphi_{2n}+(f,\varphi_{2n-1})O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)+(f,\varphi_{2n})O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)+$$
$$+\bigg(f,O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)\bigg)\varphi_{2n-1}+\bigg(f,O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)\bigg)\varphi_{2n}+\bigg(f,O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)\bigg)O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg).$$

Отсюда и из (94) следует

$$J_l(f)=J_{l,1}(f)+J_{l,2}(f)+J_{l,3}(f)+J_{l,4}(f),$$

где

$$J_{l,1}(f)=\sum_{n=1}^{2l}(f,\varphi_n)\varphi_n,\quad J_{l,2}(f)=\sum_{n=1}^{2l}\bigg(f,O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)\bigg)\varphi_n,$$

$$J_{l,3}(f)=\sum_{n=1}^{2l}(f,\varphi_n)O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg),\quad J_{l,4}(f)=\sum_{n=1}^{2l}\bigg(f,O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)\bigg)O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg).$$

Заметим, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$, определённая равенствами (83), является равномерно ограниченным базисом пространства $L_p(0,1)$ [24, с. 594]. Следовательно, существует постоянная $M_3>0$, обеспечивающая при всех $l\in\mathbb{N}$ справедливость неравенства

$$\Big\|\sum_{n=1}^{2l}(f,\varphi_n)\varphi_n\Big\|_p\leqslant M_3\|f\|_p$$

или, что то же самое,

$$\|J_{l,1}(f)\|_p\leqslant M_3\|f\|_p. \tag{95}$$

Далее, поскольку $1<p<2$, справедливы соотношения

$$\|J_{l,2}(f)\|_p\leqslant\|J_{l,2}(f)\|_2=\bigg(\sum_{n=1}^{2l}\bigg|\bigg(f,O\bigg(\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\bigg)\bigg)\bigg|^2\bigg)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_{13}\|f\|_1\bigg(\sum_{n=1}^{2l}\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}}\bigg)^{1/2}\leqslant C_{14}\|f\|_p. \tag{96}$$

Из теоремы Рисса (см. [25, с. 154]) следует, что

$$\|J_{l,3}(f)\|_p\leqslant C_{15}\sum_{n=1}^{2l}|(f,\varphi_n)|\frac{\ln(n+1)}{n^{2m-1}}\leqslant C_{15}\bigg(\sum_{n=1}^{2l}|(f,\varphi_n)|^q\bigg)^{1/q}\bigg(\sum_{n=1}^{2l}\frac{\ln^p(n+1)}{n^{(2m-1)p}}\bigg)^{1/p}\leqslant C_{16}\|f\|_p. \tag{97}$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\|J_{l,4}(f)\|_p\leqslant C_{17}\|f\|_1\sum_{n=1}^{2l}\frac{\ln^2(n+1)}{n^{4m-2}}\leqslant C_{18}\|f\|_p. \tag{98}$$

Неравенство (94) является следствием (95)–(98).

Пусть $2<p<\infty$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$. Заметим, что $1<q<2$ и система $\{v_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ является системой корневых функций дифференциального оператора L_0. Как доказано выше, система корневых функций такого оператора образует базис пространства $L_r(0,1)$ при любом $r\in(1,2)$, в частности при $r=q$. Таким образом, система $\{\overline{v_n(x)}\}_{n=0}^{n=\infty}$ является базисом пространства $L_q(0,1)$. Следовательно, биортогонально сопряжённая система $\{\overline{u_n(x)}\}_{n=0}^{n=\infty}$ является базисом пространства $L_p(0,1)$. Последнее означает, что система $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ также образует базис пространства $L_p(0,1)$. Теорема 2 и часть теоремы 3 (достаточность условия (24) для базисности) доказаны.

Пусть $1<p<\infty$ и $\{u_n(x)\}_{n=0}^{n=\infty}$ является базисом пространства $L_p(0,1)$. Хорошо известно, что в этом случае имеет место неравенство (92). Для завершения доказательства теоремы 3 достаточно заметить, что в силу (59)–(61) неравенства (24) и (92) равносильны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михайлов В.П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984.
2. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. Т. 2. № 39. С. 82–83.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Т. 3. М., 1974.
4. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными условиями // Вестн. Московского гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 1982. Т. 6. С. 12–21.
5. *Макин А.С.* Об одном классе краевых задач для оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1058–1068.

6. *Джаков П.Б., Митягин Б.С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шрёдингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61. № 4 (370). С. 77–182.
7. *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Мат. заметки. 1988. Т. 64. № 4. С. 558–563.
8. *Макин А.С.* О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи // Докл. РАН. 2006. Т. 406. № 4. С. 452–457.
9. *Шкаликов А.А., Велиев О.А.* О базисности Рисса собственных и присоединённых функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 671–676.
10. *Джаков П.Б., Митягин Б.С.* Сходимость спектральных разложений операторов Хилла с тригонометрическими многочленами как потенциалы // Докл. РАН. 2011. Т. 436. № 1. С. 11–13.
11. *Kerimov N.B., Kaya U.* Spectral properties of some regular boundary value problems for fourth order differential operators // Central Eur. J. of Math. 2013. V. 11. № 1. P. 94–111.
12. *Kerimov N.B., Kaya U.* Some problems of spectral theory of fourth order differential operators with regular boundary conditions // Arabian J. of Math. 2014. V. 3. № 1. P. 49–61.
13. *Kerimov N.B., Kaya U.* Spectral asymptotics and basis properties of fourth order differential operators with regular boundary conditions // Math. Methods in the Appl. Sci. 2014. V. 37. № 5. P. 609–779.
14. *Gunes H., Kerimov N.B., Kaya U.* Spectral properties of fourth order differential operators with periodic and antiperiodic boundary conditions // Results in Math. 2015. V. 68. № 3–4. P. 501–518.
15. *Керимов Н.Б.* О спектральных свойствах некоторых краевых задач для дифференциальных операторов высокого порядка // Докл. РАН. 2013. Т. 453. № 2. С. 131.
16. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
17. *Керимов Н.Б* Об одной краевой задаче типа задачи Н.И. Ионкина // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1267–1280.
18. *Гасымов М.Г.* Спектральный анализ одного класса несамосопряжённых дифференциальных операторов второго порядка // Функц. анализ и его приложения. 1980. Т. 14. Вып. 1. С. 14–19.
19. *Гасымов М.Г.* Спектральный анализ одного класса обыкновенных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 2. С. 277–280.
20. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М., 1985.
21. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
22. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
23. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М., 1984.
24. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М., 1961.
25. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., 1965.

Университет Хазар,
г. Баку, Азербайджан,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку

Поступила в редакцию 04.12.2022 г.
После доработки 04.12.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.