

Обобщенная модель сверхпроводникового сигма-нейрона<sup>1)</sup>Н. С. Шуравин<sup>+2)</sup>, Л. Н. Карелина<sup>+</sup>, А. С. Ионин<sup>+\*×</sup>, Ф. А. Разорёнов<sup>+</sup>, М. С. Сидельников<sup>+</sup>, С. В. Егоров<sup>+</sup>,  
В. В. Больгинов<sup>+</sup><sup>+</sup>Институт физики твердого тела им. Ю. А. Осипьяна РАН, 142432 Черноголовка, Россия<sup>\*</sup>Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия<sup>×</sup>ООО “СП “Квант”, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 сентября 2024 г.

После переработки 24 октября 2024 г.

Принята к публикации 30 октября 2024 г.

Сверхпроводниковый сигма-нейрон представляет собой одноконтактный интерферометр, часть контура которого шунтирована дополнительной индуктивностью, используемой также для генерации выходного сигнала. Ранее было предсказано, что передаточная функция этого устройства будет близка к сигмоидальной при определенном соотношении между значениями индуктивностей его частей. Такой интерферометр может быть изготовлен в виде многослойной тонкопленочной структуры над сверхпроводящим экраном, что позволяет измерить выходной магнитный поток в отдельно взятом элементе. Анализ экспериментальных данных показал, что использование сверхпроводящего экрана все же не обеспечивает полной независимости элементов сигма-нейрона, предполагавшейся в теоретической модели. В данной работе представлена обобщенная модель стационарного состояния сигма-нейрона, учитывающая взаимодействие всех его частей, включая задающий и считывающий элементы.

DOI: 10.31857/S0370274X24120076, EDN: ENJUWT

**1. Введение.** Технологии и алгоритмы нейроморфных вычислений активно применяются в современной жизни. Распирение круга задач и количества обрабатываемой информации актуализирует вопрос о переходе к сверхпроводниковой элементной базе, обладающей преимуществами быстродействия и энергоэффективности [1–3]. К настоящему времени разработано несколько семейств сверхпроводниковых логических элементов с целью понижения статической и динамической диссипации энергии [4]. Наиболее энергоэффективным является семейство “адиабатических” устройств [5], удовлетворяющих требованию физической обратимости, когда в каждый момент времени система находится в квазистационарном состоянии [6]. Это семейство содержит в том числе два сверхпроводниковых нейрона, представляющих собой одно- и двухконтактные интерферометры, шунтированные дополнительной индуктивностью, используемой для измерения выходного сигнала. Основной характеристикой таких нейронов является передаточная функция (ПФ), т.е. зависимость выходного сигнала от входного. Для реализации сверхпроводникового персеп-

трона [7] ПФ должна принадлежать к классу сигмоид, например, быть близкой к логистической функции вида  $1/[1 + \exp(-qx)]$ , гиперболическому тангенсу, функции ошибок и т.д. Таким свойством может обладать шунтированный одноконтактный интерферометр при определенном соотношении между индуктивностями его элементов, как было показано в работе [8]. Экспериментальная реализация сверхпроводникового сигма-нейрона была представлена в работе [9]. В статье [10] рассматривалась возможность использования сигма-нейронов в квантовом режиме. В статье [11] была рассмотрена задача об объединении сигма-нейронов в единую нейросеть.

Концептуально адиабатический сигма-нейрон [7, 8, 12] представляет собой совокупность трех плеч (показаны сплошными линиями на рис. 1), имеющих общую точку соединения О, а другими концами подключенных к общему электроду “Gnd”<sup>3)</sup>. На рисунке 1 три плеча нейрона обозначены как “J” (джозефсоновское плечо с индуктивностью  $L$  и джозефсоновским контактом с критическим током  $I_c$ ), “a” (индуктивное плечо с индуктивностью  $L_a$ ) и “out” (выходное плечо с индуктивностью  $L_{out}$ ). Входным сигналом нейрона являлся магнитный поток  $\Phi_{in}$  (задава-

<sup>1)</sup>См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru)<sup>2)</sup>e-mail: [shuravin@issp.ac.ru](mailto:shuravin@issp.ac.ru)<sup>3)</sup>От англ. “Ground” (земля, заземление).

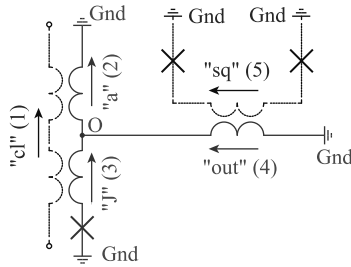


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема экспериментального сигма-нейрона. Сигма-нейрон показан сплошными синими линиями и содержит три плеча: “a” (2), “J” (3) и “out” (4). Штриховыми черными линиями показаны контрольная линия “cl” (1) и петля считывающего СКВИДа “sq” (5). Стрелками показано положительное направление обхода элементов нейрона и протекающих в образце токов. Крестами обозначены контакты Джозефсона

емый одновременно в плечи “J” и “a”), а выходным – магнитный поток  $\Phi_{\text{out}}$  (создаваемый током  $I_{\text{out}}$ , протекающим через плечо “out”). Ранее было показано [7, 8, 12], что сигмоидальная ПФ получается в случае одинаковой индуктивности приемных плеч нейрона [9] с учетом джозефсоновской индуктивности  $L_J = \Phi_0/2\pi I_c$  контакта:

$$L_a = L + L_J. \quad (1)$$

Предметом рассмотрения данной работы является сверхпроводниковый сигма-нейрон (см. рис. 1), пригодный для экспериментального измерения передаточной функции (“экспериментальный сигма-нейрон”). Последнее требует наличие схемы задания входного сигнала и считывания выходного (показаны штриховыми линиями на рис. 1). Входной магнитный поток создается “управляющим” током, протекающим по контрольной линии “cl”, которая индуктивно связана с приемными элементами нейрона “J” и “a”. Измерение  $\Phi_{\text{out}}$  производится при помощи датчика СКВИДа “sq”, включенного в схему обратной связи [9]. Поэтому ПФ экспериментального сигма-нейрона представляет собой зависимость тока в цепи обратной связи от управляющего тока.

Задание и измерение магнитного потока, принимаемого и создаваемого элементами схемы по отдельности, определяет реализацию сигма-нейрона в виде многослойной тонкопленочной структуры, расположенной над сверхпроводящим экраном [9]. В этом случае магнитное поле локализуется в зазоре между экраном и сверхпроводящим полоском с током (см., например, [13], § 9.4), не влияя, на первый взгляд, на остальные индуктивные элементы. Однако анализ экспериментальных данных показал, что исполь-

зование сверхпроводящего экрана все же не обеспечивает полной независимости элементов сигма-нейрона, предполагавшейся в теоретических моделях [7–9, 12]. В частности, была обнаружена прямая передача магнитного потока в измерительную цепь посредством кольцевых токов, возникающих в сверхпроводящем экране в качестве отклика на входной магнитный поток. В работе [14] паразитная связь между элементами экспериментальных нейронов была подтверждена путем численного моделирования дизайна исследованных в [9] образцов. Целью данной работы является обобщение теории стационарного состояния сигма-нейрона для учета всех взаимных индуктивностей его элементов.

**2. Обобщенная модель.** Построение обобщенной модели начинается с перехода к матричному представлению. Индуктивные элементы экспериментального сигма-нейрона, реализованного в работе [9] удобно перечислить в следующем порядке:

- 1) контрольная линия “cl”;
- 2) индуктивное плечо “a”;
- 3) джозефсоновское плечо “J”;
- 4) выходное плечо “out”;
- 5) петля измерительного СКВИДа “sq”.

Они могут быть охарактеризованы матрицей индуктивностей  $\|L\|$  размером  $5 \times 5$ , содержащей 15 различных компонент в силу симметричности  $L_{pq} = L_{qp}$ :

$$\|L\| = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При выбранном порядке перечисления элементов, компоненты  $L_{pq}$ , относящиеся непосредственно к сигма-нейрону, сосредоточены в центральном блоке  $3 \times 3$  (см. ур. (2)), а во внешнем кольце содержатся компоненты, описывающие взаимодействие элементов нейрона со считывающей и задающей схемами. Компоненты  $L_{22}$ ,  $L_{33}$  и  $L_{44}$  задают собственные индуктивности плеч “a”, “J” и “out” соответственно;  $L_{55}$  – собственную индуктивность петли СКВИДа “sq”;  $L_{12} = L_{21}$  и  $L_{13} = L_{31}$  – взаимные индуктивности контрольной линии “cl” с плечами “a” и “J”,  $L_{45} = L_{54}$  – взаимную индуктивность плеча нейрона “out” с измерительным СКВИДом “sq”. Элемент  $L_{11}$  (собственная индуктивность контрольной линии) не

входит ни в одно уравнение, поскольку не является частью какого-либо замкнутого сверхпроводящего контура. Остальные элементы матрицы  $\|L\|$  задают паразитные взаимные индуктивности, которые ранее (см., например, [7, 8]) не учитывались. В частности, непосредственная передача входного сигнала в измерительную цепь, упомянутая выше, определяется компонентой  $L_{15} = L_{51}$ .

Согласно ранее разработанным подходам (см., например, [8]), состояние сигма-нейрона определяется системой уравнений, состоящей из двух условий баланса фаз и закона Кирхгофа в точке соединения О (см. рис. 1). Непосредственно в сигма-нейроне можно выделить три замкнутых сверхпроводящих контура. В частности, совокупность плеч “а” и “J” дает “приемный” контур интерферометра, содержащий оба элемента, индуктивно связанных с контрольной линией “cl”. Для выбранных направлений обхода элементов нейрона (показаны синими стрелками на рис. 1) магнитный поток через “приемный” контур выражается как сумма потоков через каждый из его элементов, а условие баланса фаз имеет вид<sup>4)</sup>:

$$\phi_2 + \phi_3 = -\varphi, \quad (3)$$

где  $\varphi$  – разность фаз на берегах джозефсоновского контакта (“джозефсоновская фаза”), а  $\phi_q$  – магнитный поток через  $q$ -й элемент. “Выходной” контур получается при объединении плеч “out” и “а” (контур “out-a”), и для него условие баланса фаз может быть записано в виде:

$$\phi_2 + \phi_4 = 2\pi n, \quad (4)$$

где  $n$  – количество квантов потока, “захваченных” в этом контуре. Условие баланса фаз для оставшегося “джозефсоновского” контура “J-out” получается вычитанием ур. (3)–(4) и не дает новой информации.

С использованием величин  $l_{pq}$  магнитный поток  $\phi_p$  может быть записан в виде линейной комбинации токов  $i_q$  в индуктивных элементах нейрона как

$$\phi_p = \sum_q l_{pq} i_q. \quad (5)$$

Подставляя определение (5) в ур. (3), получаем после перегруппировки слагаемых первое уравнение обобщенной системы:

$$\sum_q (l_{2q} + l_{3q}) i_q = -\varphi. \quad (6)$$

<sup>4)</sup>Здесь и далее используется естественная нормировка, в которой магнитный поток измеряется в единицах  $\Phi_0/2\pi$ , ток в единицах  $I_c$ , а индуктивность в единицах  $L_J = \Phi_0/2\pi I_c$ . Нормированные величины, например,  $\Phi_q$ ,  $I_q$ ,  $L_{pq}$  при этом обозначаются строчными буквами  $\phi_q$ ,  $i_q$ ,  $l_{pq}$ .

Аналогично имеем для выходного контура “out-a”:

$$\sum_q (l_{2q} + l_{4q}) i_q = 2\pi n. \quad (7)$$

Для экспериментального сигма-нейрона система должна быть дополнена условием постоянства магнитного потока  $\phi_{sq}$  в измерительной цепи в силу выбранного в [9] метода измерения магнитного потока с использованием отрицательной обратной связи:

$$\phi_5 = \sum_q l_{5q} i_q = \phi_{sq}. \quad (8)$$

Закон Кирхгофа в точке О для выбранных направлений тока (см. рис. 1) имеет вид:

$$-i_2 + i_3 + i_4 = 0. \quad (9)$$

Последнее уравнение системы записывается для тока  $i_3$ , протекающего в джозефсоновском плече. Заметим, что джозефсоновское плечо состоит из последовательно подключенной индуктивности и контакта Джозефсона, ток в котором определяется токовыми соотношением. Предполагая последнее синусоидальным, получаем связь между током  $i_3$  и джозефсоновской фазой в виде:

$$i_3 = \sin \varphi. \quad (10)$$

Получившаяся система (6)–(10) состоит из пяти линейных уравнений относительно пяти токовых переменных и может быть записана в матричном виде:

$$\|A\| \cdot \|i\| = \|f\|, \quad (11)$$

где  $\|A\|$  – матрица системы

$$\begin{pmatrix} l_{21} + l_{31} & l_{22} + l_{32} & l_{23} + l_{33} & l_{24} + l_{34} & l_{25} + l_{35} \\ l_{21} + l_{41} & l_{22} + l_{42} & l_{23} + l_{43} & l_{24} + l_{44} & l_{25} + l_{45} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\|i\|$  – столбец токов  $i_p$ , а  $\|f\|$  – столбец свободных членов:

$$\|f\| = \begin{pmatrix} -\varphi & 2\pi n & \phi_{sq} & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix}^T.$$

Для невырожденной матрицы  $\|A\|$  общее решение может быть выражено через обратную матрицу:

$$\|i\| = \|A^{-1}\| \cdot \|f\|, \quad (12)$$

поэтому выражение для каждого тока  $i_p$  представляет собой линейную комбинацию компонент столбца свободных членов:

$$i_p = -A_{p1}^{-1}\varphi + A_{p5}^{-1}\sin\varphi + [A_{p3}^{-1}\phi_{sq} + A_{p2}^{-1}2\pi n]. \quad (13)$$

В ходе эксперимента входным сигналом является  $i_{cl} = i_1$  (ток контрольной линии). Начальное состояние нейрона определяется нулевым значением тока  $i_1$  и некоторым начальным током  $i_5^{(0)}$ , протекающим по петле измерительного СКВИДа (см. подробнее в [9]). Также начальное состояние можно характеризовать некоторой джозефсоновской фазой  $\varphi_0$ , удовлетворяющей двум условиям:

$$0 = -A_{11}^{-1}\varphi_0 + A_{15}^{-1}\sin\varphi_0 + [A_{13}^{-1}\phi_{sq} + A_{12}^{-1}2\pi n], \quad (14)$$

$$i_5^{(0)} = -A_{51}^{-1}\varphi_0 + A_{55}^{-1}\sin\varphi_0 + [A_{53}^{-1}\phi_{sq} + A_{52}^{-1}2\pi n]. \quad (15)$$

Условия (14)–(15) являются совместными, поскольку определяют фактически начальную джозефсоновскую фазу  $\varphi_0$  и величину  $\phi_{sq}$  при заданном токе  $i_5^{(0)}$  и числе захваченных квантов  $n$ . Выходным сигналом является  $i_{fb}$  (ток обратной связи), представляющий собой разность текущего и начального значения тока  $i_5$ :  $i_{fb} = i_5 - i_5^{(0)}$ . Поэтому ПФ  $i_{fb}(i_{cl})$  можно записать в наглядной параметрической форме, используя решение (13) и подставив в него условия (14)–(15):

$$i_{cl} = \frac{t_{cl}}{2\pi}(\varphi + \alpha \sin\varphi) + \delta_{cl}, \quad (16)$$

$$i_{fb} = \frac{t_{fb}}{2\pi}(\varphi + \sigma \sin\varphi) + \delta_{fb}. \quad (17)$$

Здесь множители

$$t_{cl} = -2\pi A_{11}^{-1}, \quad t_{fb} = -2\pi A_{51}^{-1} \quad (18)$$

определяют нормированные периоды<sup>5)</sup> ПФ по входному и выходному току соответственно, а коэффициенты

$$\alpha = -A_{15}^{-1}/A_{11}^{-1}, \quad \sigma = -A_{55}^{-1}/A_{51}^{-1} \quad (19)$$

определяют форму ПФ (см. примеры на вставках к рис. 2). Слагаемые  $\delta_{cl} = A_{11}^{-1}\varphi_0 - A_{15}^{-1}\sin\varphi_0$  и  $\delta_{fb} = A_{51}^{-1}\varphi_0 - A_{55}^{-1}\sin\varphi_0$  определяют сдвиг ПФ. Это проиллюстрировано на рис. 2, где представлены три ПФ с одинаковыми  $\alpha$  и  $\sigma$ , но разными  $\varphi_0$ . При  $\varphi_0 = 0$

<sup>5)</sup>Периоды  $T_{cl}$  и  $T_{fb}$  определяются как изменение токов контрольной линии и обратной связи при изменении джозефсоновской фазы нейрона на  $2\pi$ . Нормированные на критический ток величины обозначены как  $t_{cl}$  и  $t_{fb}$  соответственно.

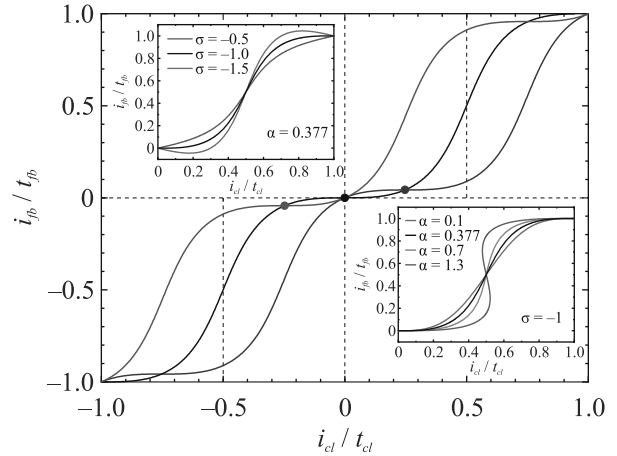


Рис. 2. (Цветной онлайн) Примеры ПФ сигма-нейрона согласно ур. (16)–(17) для разных значений начальной джозефсоновской фазы. Черная кривая соответствует  $\varphi_0 = 0$ , синяя –  $\varphi_0 = -1.2$ , а красная –  $\varphi_0 = +1.2$ . Точками соответствующих цветов отмечены центральные точки  $\varphi = 0$  каждой ПФ. Коэффициенты  $\alpha = 0.377$ ,  $\sigma = -1$ . На вставках показана оптимальная ПФ (черная), удовлетворяющая условиям (21)–(23), а также другими цветами ПФ, не удовлетворяющие условиям (21) (вверху) или (23) (внизу)

центральная ( $\varphi = 0$ ) и начальная ( $i_{cl} = 0$ ) точки передаточной функции совпадают (черная кривая на рис. 2), а точка максимального нарастания выходного сигнала расположена строго по центру периода. В противном случае кривая ПФ смещается на плоскости  $(i_{cl}, i_{fb})$ , проходя через начало координат и сохраняя свою форму (см. красную и синюю кривые на рис. 2).

Рассмотрение произвольной матрицы индуктивностей  $\|L\|$  требует также и обобщения требований к нейронам. Вначале рассмотрим условие сигмоидальности ПФ  $i_{fb}(i_{cl})$ , которое в данной модели следует сформулировать как нулевую производную в центральной точке ПФ ( $\varphi = 0$ ):

$$\left. \frac{di_{fb}}{di_{cl}} \right|_{\varphi=0} = \frac{di_{fb}/d\varphi|_{\varphi=0}}{di_{cl}/d\varphi|_{\varphi=0}} = \frac{t_{fb}}{t_{cl}} \frac{1+\sigma}{1+\alpha} = 0. \quad (20)$$

При ненулевом знаменателе это условие эквивалентно более простому:

$$\sigma = -1. \quad (21)$$

Ненулевое значение знаменателя в ур. (20) обеспечивается вторым требованием, а именно однозначностью ПФ сигма-нейрона. Это условие может быть сформулировано как требование непрерывного изменения джозефсоновской фазы при изменении входного сигнала  $|d\varphi/di_{cl}| < \infty$ . Следовательно, для об-

ратной величины при любой фазе  $\varphi$  должно выполняться  $di_{cl}/d\varphi \neq 0$ . Дифференцируя (16), получаем простое условие:

$$|\alpha| < 1. \quad (22)$$

Третье условие заключается в близости формы ПФ к логистической функции. Минимизация среднеквадратичного отклонения функции, заданной ур. (16)–(17), от функции вида  $i_{fb}/t_{fb} = 1/(1 + \exp[-(i_{cl}/t_{cl} - 0.5)/\gamma])$  при варьировании коэффициентов  $\alpha$  и  $\gamma$  дает условие:

$$\alpha \approx 0.377 = \alpha_{\text{opt}}. \quad (23)$$

Среднеквадратичное отклонение при этом составляет  $3.1 \cdot 10^{-3}$ , а величина  $\gamma = 0.081$ .

**3. Обсуждение и применение.** Полученные в разделе 2 результаты позволяют построить ПФ для сколь угодно сложной матрицы индуктивностей  $\|L\|$  экспериментального сигма-нейрона. Параметрическая форма записи ПФ имеет вид ур. (16)–(17), где периоды (18) определяют масштаб изменения входного и выходного сигналов, а коэффициенты (19) определяют форму ПФ. Величины (18)–(19) выражаются через компоненты матрицы  $\|A^{-1}\|$ , которые можно найти стандартными методами (см., например, [15]) или при помощи доступных в настоящее время матричных калькуляторов. Общий вид необходимых величин приведен нами для справки в дополнительных материалах (см. раздел I).

Целевая форма ПФ достигается при соблюдении условий (21), (23). При нарушении (21) производная на краях периода становится отличной от нуля, а при нарушении (23) ПФ отклоняется от логистической в центральной части периода (см. вставки к рис. 2). Нарушение условия (22) приводит к неоднозначности ПФ (см. пурпурную кривую на нижней вставке к рис. 2). Также необходимо добиваться роста отношения  $t_{fb}/t_{cl}$  в силу проблемы ослабления сигнала при объединении нейронов в нейросеть [11]. Баланс между соблюдением этих условий является предметом творчества разработчиков сверхпроводниковых нейронных сетей.

Оптимизацию конструкции образца с использованием полученных результатов целесообразно проводить итерационным способом. Такая процедура включает в себя создание дизайна образца, расчет его матрицы индуктивностей, вычисление коэффициентов (18)–(19), анализ произошедших изменений и корректировку дизайна (т.е. переход в начало процедуры). Это весьма трудоемкий и длительный процесс, поскольку не для всех компонент  $\|L\|$  можно заранее предсказать, как на них повлияют те или иные

изменения геометрии образца. При этом получение каждой матрицы индуктивностей численными методами занимает много времени. Поэтому важно представлять функциональную связь между компонентами матрицы  $\|L\|$  и коэффициентами (18)–(19), чтобы выявить перспективные направления корректировки дизайна. Это также непростая задача, поскольку количество слагаемых в выражениях для компонент  $\|A^{-1}\|$  может достигать нескольких десятков (см. дополнительные материалы, раздел I). Поэтому представляет интерес постепенное усложнение матрицы индуктивностей и анализ происходящих изменений. Далее этот процесс будет проиллюстрирован на примере относительно простой матрицы вида:

$$\|L^{(\text{simp})}\| = \begin{pmatrix} l_{cl} & m_a & m_J & 0 & m_{sq} \\ m_a & l_a & 0 & 0 & 0 \\ m_J & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{\text{out}} & m_{\text{out}} \\ m_{sq} & 0 & 0 & m_{\text{out}} & l_{sq} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

отражающей наиболее важные особенности матрицы индуктивностей, рассчитанной в работе [14].

**3.1 Идеальное экранирование.** Сначала необходимо убедиться, что ур. (16)–(17) воспроизводят ранее полученные результаты [7–9, 12] для случая симметричного задания входного сигнала  $m_a = m_J = m_{\text{in}}/2$  и идеального экранирования (отсутствия паразитных компонент, включая  $m_{sq}$ ), но с учетом взаимодействия с измерительной схемой ( $m_{\text{out}} \neq 0$ ). Вычисления необходимых компонент обратной матрицы представлены в дополнительных материалах, раздел II. Выражения (18)–(19) принимают вид:

$$\alpha^{(1)} = l + \frac{l_a l_{\text{out}}^*}{l_a + l_{\text{out}}^*}, \quad (25)$$

$$\sigma^{(1)} = l - l_a, \quad (26)$$

$$\frac{t_{cl}^{(1)}}{2\pi} = -\frac{2}{m_{\text{in}}} \frac{l_a + l_{\text{out}}^*}{l_a + 2l_{\text{out}}^*}, \quad (27)$$

$$\frac{t_{fb}^{(1)}}{2\pi} = -\frac{m_{\text{out}}}{l_{sq}(l_a + 2l_{\text{out}}^*)}, \quad (28)$$

где введено обозначение

$$l_{\text{out}}^* = l_{\text{out}} - \frac{m_{\text{out}}^2}{l_{sq}}. \quad (29)$$

Однако сравнение представляет некоторые сложности, поскольку ранее предлагалась другая форма записи ПФ. В частности, в работе [9] ПФ записывалась как:

$$i_{cl} = k_1(\psi + k_2 \sin \psi - \varepsilon), \quad (30)$$

$$i_{fb} = k_3(k_4 i_{cl} - \sin \psi + \zeta), \quad (31)$$

где  $\psi = -\varphi$  при текущем выборе положительного направления джозефсоновского тока. Эта форма обобщала полученную в [8] с целью аппроксимации экспериментальных данных. Уравнение (30) практически идентично (16), и легко видеть, что

$$k_1 = -\frac{t_{cl}}{2\pi}, \quad k_2 = \alpha. \quad (32)$$

Уравнение (31) отличается от (17), однако можно показать их эквивалентность и получить (см. дополнительные материалы, раздел III):

$$k_3 = -\frac{t_{fb}}{2\pi}(\alpha - \sigma), \quad k_4 = -\frac{2\pi}{t_{cl}} \frac{1}{\alpha - \sigma}. \quad (33)$$

При подстановке коэффициентов (25)–(28) в (33) воспроизводятся выражения для  $k_1$ – $k_4$  из работы [9] с учетом замены  $l_{out} \rightarrow l_{out}^*$ . По сути, воспроизводятся результаты предыдущих работ [7, 8, 12], в частности, условие (21) принимает форму (1). Таким образом, ур. (25)–(28) обобщают и уточняют ранее полученные формулы на случай произвольного соотношения величин  $l_{out}$ ,  $m_{out}$  и  $l_{sq}$ , определяющих эффективную индуктивность выходного плеча (29) с учетом взаимодействия с измерительным СКВИДом. Детали алгебраических преобразований представлены в дополнительных материалах, раздел III.

**3.2 Асимметричное задание входного сигнала.** Далее рассмотрим случай асимметричного задания входного сигнала  $m_a \neq m_J$ . В этом случае имеем (см. вычисления в дополнительных материалах, раздел IV):

$$\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} = l + \frac{l_a l_{out}^*}{l_a + l_{out}^*}, \quad (34)$$

$$\sigma^{(2)} = l - l_a \frac{m_J}{m_a}, \quad (35)$$

$$\frac{t_{cl}^{(2)}}{2\pi} = -\frac{l_a + l_{out}^*}{m_J(l_a + l_{out}^*) + m_a l_{out}^*}, \quad (36)$$

$$\frac{t_{fb}^{(2)}}{2\pi} = -\frac{m_{out} m_a}{l_{sq}(m_J(l_a + l_{out}^*) + m_a l_{out}^*)}. \quad (37)$$

В целях сравнения с результатами раздела 3.1 можно использовать обобщение величины  $m_{in} = m_a + m_J$  и преобразовать уравнения (36)–(37) как:

$$\frac{t_{cl}^{(2)}}{2\pi} = -\frac{(m_{in}/m_J)}{m_{in}} \frac{l_a + l_{out}^*}{l_a + (m_{in}/m_J)l_{out}^*},$$

$$\frac{t_{fb}^{(2)}}{2\pi} = -\frac{m_a}{m_J} \frac{m_{out}}{l_{sq}[l_a + (m_{in}/m_J)l_{out}^*]}.$$

Произошедшие изменения можно описать следующими словами: множитель 2 в ур. (27)–(28) заменяется на отношение  $m_{in}/m_J$ , а период  $t_{fb}$  в ур. (28) умножается на отношение  $m_a/m_J$ , равное единице в симметричном случае. Важным обстоятельством является появление множителя  $m_J/m_a$  в ур. (35) (ср. ур. (26)). Как следствие, условие сигмоидальности (21) принимает вид:

$$l_a = \frac{m_a}{m_J}(l + 1). \quad (38)$$

Видно, что при уменьшении  $m_a/m_J$  (преимущественное задание входного сигнала в джозефсоновское плечо) уменьшается необходимая  $l_a$ . Это благоприятствует миниатюризации сигма-нейронов, поскольку плечо “а” является самым большим элементом экспериментально исследованных образцов (см. рис. 3) и по большей части не участвует в приеме

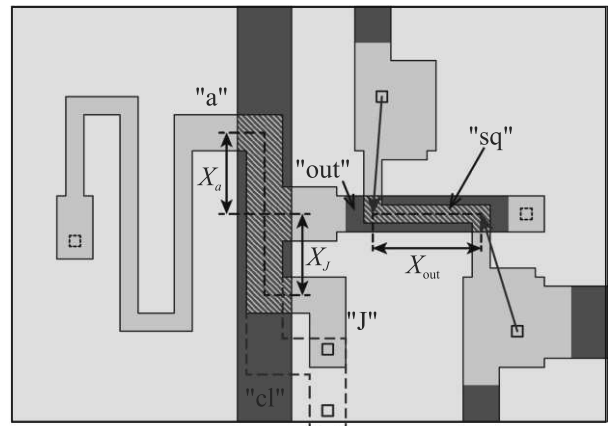


Рис. 3. (Цветной онлайн) Схематическое изображение (вид сверху) конструкции сигма-нейрона, реализованного в [9]. Оранжевым цветом показаны участки образца, лежащие над экраном на одном слое изоляции, а красным – на двух слоях изоляции. Синими штриховыми линиями показано предложенное удлинение области  $X_J$ , а синими стрелками – изменение положения джозефсоновских контактов СКВИДа (см. раздел 3.3)

входного сигнала. Однако использование асимметрии  $m_J > m_a$  ограничено несколькими условиями. Во-первых, увеличение  $m_J$  на практике производится путем удлинения участка джозефсоновского плеча  $X_J$  (см. рис. 3), вызывая также увеличение  $l$ , а значит и  $\alpha$  (см. ур. (34)) с возможным нарушением условий (22), (23). С другой стороны, уменьшение величины  $m_a$  (за счет уменьшения длины участка  $X_a$ , см. рис. 3) будет приводить к ослабеванию выходного

сигнала, поскольку для отношения периодов  $t_{fb}/t_{cl}$  в данном случае имеем:

$$\frac{t_{fb}^{(2)}}{t_{cl}^{(2)}} = m_a \frac{m_{out}}{l_{sq}(l_a + l_{out}^*)}. \quad (39)$$

Но еще более существенные ограничения возникают при учете прямой передачи входного сигнала в измерительную цепь, которая была обнаружена в [9, 16] и рассматривается далее.

**3.3. Прямая передача входного потока в измерительный СКВИД.** Прямое взаимодействие элементов “cl” и “sq” описывается компонентой  $l_{15} = m_{sq}$  в матрице (24). При  $m_{sq} \neq 0$  в формулах для компонент  $\|A^{-1}\|$  появляется множество слагаемых, пропорциональных  $m_{sq}$ . Однако мы обнаружили (см. дополнительные материалы, раздел V), что все коэффициенты ПФ могут быть по-прежнему записаны в компактной форме (34)–(39) при замене величин  $m_a$  и  $m_J$  на следующие эффективные значения:

$$m_a^* = m_a - (l_a + l_{out})\mu, \quad m_J^* = m_J + l_{out}\mu, \quad (40)$$

где  $\mu = m_{sq}/m_{out}$ . Таким образом, паразитное взаимодействие входной и считывающей схем перенормирует входные взаимные индуктивности, тогда как взаимодействие нейрона с измерительной схемой (см. раздел 3.1) перенормирует выходную собственную индуктивность. При этом сохраняются в силе все рассуждения об оптимизации отношения  $m_a/m_J$  из раздела 3.2. Условие сигмоидальности (21) записывается в форме (38) с точностью до подстановки  $m_a^*$  и  $m_J^*$ . Однако в силу зависимости  $m_a^*$  от  $l_a$  (см. ур. (40)) выражение для необходимой  $l_a$  нуждается в преобразовании:

$$l_a = \frac{m_a - \mu l_{out}}{m_J + \mu l_{out} + \mu(l + 1)}(l + 1). \quad (41)$$

Из этого уравнения можно заметить, что изменение длины элемента “а” (т.е. подбор величины  $l_a$ ) может обеспечить сигмоидальную форму ПФ лишь при выполнении условия:

$$-\frac{m_J}{1 + l + l_{out}} < \mu < \frac{m_a}{l_{out}}, \quad (42)$$

поскольку собственная индуктивность  $l_a$  не может быть отрицательной в отличие от взаимных индуктивностей (т.е. недиагональных компонент  $l_{pq}$ ). В этом качественное отличие условия (41) от (1) (и даже (38)), где для любых значений остальных индуктивностей можно подобрать необходимое значение  $l_a$ .

Интересно проверить выполнение критериев (42) в ранее проведенных экспериментах. С использованием оценок из статьи [9] получаем диапазон  $-0.05 < \mu < 0.14$  и экспериментальное значение  $\mu$

около  $-0.06$ . Оценки с использованием данных численного моделирования [14] дают допустимый диапазон  $-0.04 < \mu < 0.13$  и расчетное значение  $\mu = -0.05$ . Таким образом, невозможно подобрать длину плеча “а”, обеспечивающую целевую форму ПФ, при неизменной форме остальных элементов. Решить эту проблему можно либо увеличив по абсолютной величине нижнюю границу диапазона (42), либо уменьшив величину  $|\mu|$ . Первое достигается увеличением величины  $m_J$ , а второе – увеличением величины  $m_{out}$  или уменьшением  $m_{sq}$ . Для достижения целевой формы ПФ можно также подбирать джозефсоновскую индуктивность  $L_J = \Phi_0/2\pi I_c$ .

Наиболее простым в реализации является увеличение  $m_J$ . Первичные оценки показывают, что для выполнения условий (21) и (22) достаточно уменьшить критический ток  $I_c$  на 12 % и увеличить  $X_J$  на 75 %, оставив неизменными все остальные элементы нейрона (см. синие штриховые линии на рис. 3). Для достижения целевой формы (т.е. одновременного выполнения условий (21) и (23)) требуются более значительные изменения: необходимо уменьшить  $I_c$  в 4.4 раза и увеличить  $X_J$  в 3.6 раз при сохранении геометрии остальных плеч. Увеличение  $m_{out}$  выглядит бесперспективным, поскольку оно производится путем увеличения участка  $X_{out}$  с сопутствующим увеличением величин  $l_{sq}$  и  $l_{out}$ . Рост  $l_{out}$ , в свою очередь, приводит к сужению диапазона (42) и в итоге к необходимости увеличения  $X_{out}$  в десятки раз. Дальнейшая оптимизация, связанная с увеличением  $t_{fb}/t_{cl}$  и миниатюризацией образца в целом, требует варьирования геометрии всех плеч нейрона и численного моделирования матриц индуктивностей.

Наконец, третий путь предполагает совершенствование конструкции сигма-нейрона с целью подавления компоненты  $m_{sq}$ . Это может быть сделано, например, увеличением размеров экрана [9] или изменением формы контрольной линии [14]. Еще одним способом может быть изготовление петли СКВИДа перпендикулярно контрольной линии путем исключения параллельных “cl” участков элемента “sq”, ответственных за паразитное взаимодействие [9, 14]. Это может быть достигнуто при перемещении джозефсоновских контактов СКВИДа под выходное плечо нейрона (см. синие стрелки на рис. 3), что потребует изменения технологического процесса. В этом случае можно ожидать уменьшения поправок к  $m_a$  и  $m_J$  на два порядка (см. ур. (40)), т.е. до уровня технологической погрешности. Действительно, компонента  $l_{14}$ , описывающая взаимодействие с контрольной линией плеча “out”, примерно в сто раз меньше, чем  $l_{15}$  согласно расчетам [14]. Это достигается за счет

расположения выходного плеча на оси симметрии экрана перпендикулярно контрольной линии. Экспериментальная проверка предложенных путей оптимизации будет предметом наших следующих работ на эту тему.

**4. Заключение.** Таким образом, модель стационарного состояния сверхпроводникового сигма-нейрона была обобщена на случай произвольной матрицы индуктивностей составляющих его элементов. Записана система уравнений состояния сигма-нейрона в матричной форме и получено параметрическое выражение для его ПФ через компоненты обратной матрицы системы. Показано влияние взаимодействия элементов нейрона на условия достижения целевой ПФ. Рассмотрены методы улучшения конструкции сигма-нейрона для компенсации или устранения паразитной передачи входного сигнала через сверхпроводящий экран.

**5. Финансирование работы.** Работа выполнена в Институте физики твердого тела им. Ю. А. Осипяна Российской академии наук при поддержке гранта Российского научного фонда # 23-72-00053. Раздел 3.1 (а также разделы I и II в дополнительных материалах) подготовлены в рамках производственной практики аспирантов Московского физико-технического института А. С. Ионина и Ф. А. Разорёнова. Условие (23), а также раздел III в дополнительных материалах получены в рамках сотрудничества А. С. Ионина с «Совместное предприятие «Квантовые технологии»».

**6. Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. V. Semenov, E. Golden, and S. Tolpygo, IEEE Trans. Appl. Supercond. **32**, 1 (2021).
2. A. E. Schegolev, N. V. Klenov, G. I. Gubochkin, M. Yu. Kupriyanov, and I. I. Soloviev, Nanomaterials **13**, 2101 (2023).
3. D. S. Pashin, P. V. Pikunov, M. V. Bastrakova, A. E. Schegolev, N. V. Klenov, and I. I. Soloviev, Beilstein J. Nanotechnol. **14**, 1116 (2023).
4. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, S. V. Bakurskiy, M. Yu. Kupriyanov, A. L. Gudkov, and A. S. Sidorenko, Beilstein J. Nanotechnol. **8**, 2689 (2017).
5. N. Takeuchi, D. Ozawa, Y. Yamanashi, and N. Yoshikawa, Supercond. Sci. Technol. **26**, 035010 (2013).
6. И. И. Соловьев, Г. С. Хисматуллин, Н. В. Кленов, А. Е. Щеголев, Радиотехника и электроника **67**, 1232 (2022).
7. A. E. Schegolev, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, and M. V. Tereshonok, Beilstein J. Nanotechnol. **7**, 1397 (2016).
8. I. I. Soloviev, A. E. Schegolev, N. V. Klenov, S. V. Bakurskiy, M. Yu. Kupriyanov, M. V. Tereshonok, A. V. Shadrin, V. S. Stolyarov, and A. A. Golubov, J. Appl. Phys. **124**, 152113 (2018).
9. А. С. Ионин, Н. С. Шуравин, Л. Н. Карелина, А. Н. Россоленко, М. С. Сидельников, С. В. Егоров, В. И. Чичков, М. В. Чичков, М. В. Жданова, А. Е. Щеголев, В. В. Больгинов, ЖЭТФ **164**, 1008 (2023).
10. M. V. Bastrakova, D. S. Pashin, D. A. Rybin, A. E. Schegolev, N. V. Klenov, I. I. Soloviev, A. A. Gorchavkina, and A. M. Satanin, Beilstein J. Nanotechnol. **13**, 653 (2022).
11. D. S. Pashin, M. V. Bastrakova, D. A. Rybin, N. V. Klenov, and A. E. Schegolev, Nanomaterials **14**, 854 (2024).
12. M. Bastrakova, A. Gorchavkina, A. Schegolev, N. Klenov, I. Soloviev, A. Satanin, and M. Tereshonok, Symmetry **13**, 1735 (2021).
13. В. В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, 2-е изд., МЦНМО, М. (2000).
14. А. С. Ионин, С. В. Егоров, М. С. Сидельников, Л. Н. Карелина, Н. С. Шуравин, М. М. Хапаев, В. В. Больгинов, Физика твердого тела **66**, 1019 (2024).
15. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, 5-е изд., Физматлит, М. (2004).
16. А. С. Ионин, Л. Н. Карелина, Н. С. Шуравин, М. С. Сидельников, Ф. А. Разоренов, С. В. Егоров, В. В. Больгинов, Письма в ЖЭТФ **118**, 761 (2023).