

УДК 521.31; 629.78

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЙЛЕРА–ЛАМБЕРТА НА ОСНОВЕ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ОХОЦИМСКОГО–ЕГОРОВА

© 2024 г. А. В. Иванюхин^{a,b,*}, В. В. Ивашкин^{c,a}

^aНаучно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики
Московского авиационного института, Москва, Россия

^bРоссийский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва, Россия

^cИнститут прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: ivanyukhin.a@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.

После доработки 05.04.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

В работе рассматривается метод решения задачи Эйлера–Ламберта, предложенный В.А. Егоровым и основанный на работах Д.Е. Охочимского, посвященных анализу множества траекторий перелета между двумя заданными точками в центральном ньютоновском поле. Рассматривая задачу Эйлера–Ламберта как обратную задачи баллистики (динамики) удалось построить новый эффективный метод определения орбиты, соответствующей заданному времени перелета. Такой подход логично называть методом Охочимского–Егорова. В рассмотренном подходе параметром множества перелетов является траекторный угол в начальной точке. К преимуществам предлагаемого метода относятся ограниченность и понятная структура области определения решений, простота и наглядность алгоритма, явная зависимость получаемого решения от направления скорости в начальной точке. Это позволяет проводить качественный анализ траекторий перелета и конструировать эффективные численные методы. В данной работе для решения задачи Эйлера–Ламберта использовался численный метод Галлея, был проведен анализ вычислительной сложности алгоритма, показавший высокую эффективность его использования.

Ключевые слова: определение орбит, задача Эйлера–Ламберта, обратная задача баллистики

DOI: 10.31857/S0320930X24060124, EDN: NGXWFZ

ВВЕДЕНИЕ

Задача Эйлера–Ламберта является классической проблемой небесной механики, служащей для определения орбит небесных тел (Субботин, 1968; Эскобал, 1970). Традиционно эта задача формулируется как двухточечная краевая задача в рамках модели двух тел, в которой известны векторы положения в два разных момента времени.

В практической космонавтике эта задача приобрела новое значение и часто является основой для проектирования перелетов космических аппаратов. В частности, задача Эйлера–Ламберта

активно используется для проектирования перелетов с большой и малой тягой (Белецкий, Егоров, 1964; Ивашкин, Аньци, 2020; Ottesen, Russell, 2021), организации тура с многочисленными гравитационными маневрами (Овчинников и др., 2018; Эйсмонт и др., 2013; Голубев и др., 2020) и облета группы целей (Григорьев, Заплетин, 2013). В этом случае предполагается, что орбита, соединяющая два заданных положения, является траекторией перелета, затраты на который определяются суммой двух импульсов скорости. Часто для проведения проектно-баллистического анализа при оптимизации импульсных перелетов требует решения

большого числа подобных задач. В связи с этим получение эффективного алгоритма решения с явным определением скорости на перелетной орбите является актуальной задачей.

Разработано много методов ее решения, сравнительный анализ некоторых из них приведен в работах (Субботин, 1968; Эскобал, 1970; Arora, Russell, 2013; Torre, Fantino, 2015; Суханов, 2010). Большинство методов основано на том, что траектории между двумя точками пространства образуют однопараметрическое семейство орбит, соответствующих перелету между заданными точками за некоторое время.

Настоящая статья является продолжением работ Ивашкина (2023; 2024).

УРАВНЕНИЕ КЛЕРО ДЛЯ ЗАДАЧИ КЕПЛЕРА

В частности, однопараметрическое семейство траекторий перелета между двумя заданными положениями описывается уравнением орбиты в обратных радиусах, определяющем изменение радиуса от угловой дальности перелета при известных начальных радиусе, скорости и траекторном угле (наклон скорости к трансверсали) (Clairaut, 1765; Охочимский, 1968; Охочимский, Сихарулидзе, 1990; Wheelon, 1959; Godal, 1961), соответствующие переменные приведены на рис. 1.

Рассмотрим обратную задачу баллистики, следя подходу Охочимского к решению уравнения Клеро (Clairaut, 1765; Охочимский, 1968). Переидем к переменной, обратной радиусу

$$u = \frac{1}{r}, \quad (1)$$

где $r = |\mathbf{r}|$ – модуль радиус-вектора.

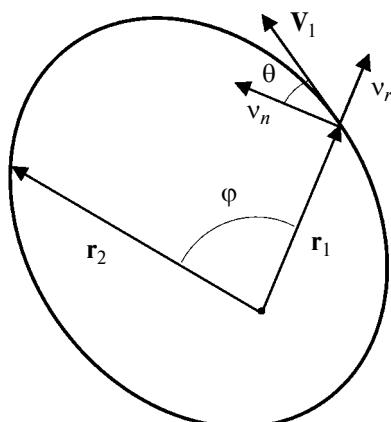


Рис. 1. Орбита движения небесного тела.

Радиальная v_r и нормальная v_n компоненты скорости могут быть представлены следующим образом:

$$v_r = \frac{dr}{d\psi} \frac{dv}{dt} = -c \frac{du}{d\psi}, \quad v_n = r \frac{dv}{dt} = cu, \quad (2)$$

где ψ – истинная аномалия, $c = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ – константа площадей, $v = |\mathbf{v}|$ – скорость.

Подставляя эти компоненты скорости в интеграл энергии получим

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r} = c^2 \left(\left(\frac{du}{d\psi} \right)^2 + u^2 \right) - 2\mu u, \quad (3)$$

где μ – гравитационный параметр.

Дифференцируя это выражение по истинной аномалии и предполагая, что

$$\frac{du}{d\psi} \neq 0,$$

получаем уравнение Клеро для задачи Кеплера (Clairaut, 1765), описывающее движение по орбите как линейный осциллятор. Учитывая, что производные u по истинной аномалии ψ и угловой дальности перелета ϕ равны, перейдем к уравнению относительно последней

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}, \quad (4)$$

решение которого может быть записано в виде

$$u(\phi) = \frac{\mu}{c^2} + c_1 \cos(\phi) + c_2 \sin(\phi), \quad (5)$$

или эквивалентной форме:

$$u(\phi) = \frac{\mu}{c^2} + c_0 \cos(\phi + \psi_0), \quad (6)$$

где константы интегрирования c_1 , c_2 и c_0 , ψ_0 определяются по начальным условиям

$$c_1 = c_0 \cos(\psi_0) = \frac{1}{r_1} - \frac{\mu}{c^2},$$

$$c_2 = -c_0 \sin(\psi_0) = \frac{\operatorname{tg}(\theta)}{r_1}. \quad (7)$$

На основе полученного решения может быть получена связь между начальным траекторным углом и скоростью (Охочимский, 1968; Охочимский, Сихарулидзе, 1990):

$$v_1(\theta) = \sqrt{\frac{\mu r_2 (1 - \cos(\phi))}{r_1 (r_1 \cos^2(\theta) - r_2 \cos(\phi + \theta) \cos(\theta))}}, \quad (8)$$

где r_1 , r_2 – радиусы начального и конечного положения, ϕ – угол между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , v_1 – величина

начальной скорости, θ – начальный траекторийный угол (наклон скорости к трансверсали).

Тогда радиальная и трансверсальная компоненты скорости в начальный точке могут быть получены как

$$v_{1r} = v_1 \sin(\theta), \quad v_{1n} = v_1 \cos(\theta), \quad (9)$$

На основе равенств , и могут быть получены общие выражения для определения компонент скорости в любой точке траектории

$$\begin{aligned} v_r(\phi) &= \left(\frac{c}{r_1} - \frac{\mu}{c} \right) \sin(\phi) + \frac{c}{r_1} \operatorname{tg}(\theta) \cos(\phi), \\ v_n(\phi) &= \frac{\mu}{c} + \left(\frac{c}{r_1} - \frac{\mu}{c} \right) \cos(\phi) - \frac{c}{r_1} \operatorname{tg}(\theta) \sin(\phi). \end{aligned} \quad (10)$$

где константа площадей может быть определена как $c = r_1 v_1 \cos(\theta)$.

ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТА

При заданном угле θ по уравнению Охочимского определяется величина начальной скорости v_1 и может быть определен весь начальный вектор состояния \mathbf{r}_1 , \mathbf{v}_1 . Это, на основе уравнений Кеплера, позволяет определить расчетное время перелета между начальным \mathbf{r}_1 и конечным \mathbf{r}_2 положением по найденной траектории. Подбирая угол θ_1 так, чтобы это расчетное время равнялось заданному (Ивашкин, 2023; 2024), получим решение с заданным временем перелета. Эта схема Егорова поиска решения на основе уравнения Охочимского определяет общую идею метода Охочимского–Егорова решения задачи Эйлера–Ламберта (Ивашкин, 2024).

Недостатком выражения для решения задачи Эйлера–Ламберта является отсутствие явной простой связи со временем перелета. В работе (Wheelon, 1959) получено соотношение, связывающее угол θ , начальную скорость и время перелета, в (Nelson, Zarchan, 1992; Arlulkar, Naik, 2011; Zhang, 2020), оно используется для решения задачи Эйлера–Ламберта для эллиптических орбит. Однако это соотношение довольно сложно и мало подходит для построения эффективного алгоритма.

Зная большую полуось орбиты перелета, время перелета можно вычислить с помощью уравнения в форме Лагранжа (Lagrange, 1778; Prussing, Conway, 1993; Эльяшберг, 1965; Zhang и др., 2010), используя компоненты начального вектора скорости как дополнительную информацию.

Так, время перелета для эллиптического движения можно определить следующим образом

$$\Delta t_{\text{ell}} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (2\pi N + (\alpha - \sin(\alpha)) - (\beta - \sin(\beta))), \quad (11)$$

где N – число целых витков, параметры Лагранжа α и β имеют область определения $\alpha \in [0; 2\pi]$, $\beta \in [-\pi; \pi]$ и связаны с большой полуосью следующим образом:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{s}{2a}}, \quad \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s-d}{2a}}, \\ s &= \frac{r_1 + r_2 + d}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $d = |\mathbf{d}|$ – длина хорды $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, соединяющей начальную и конечную точки.

Компоненты скорости вдоль вектора, соединяющего начальную и конечную точку, а также вдоль радиуса могут быть найдены следующим образом (Battin, 1999):

$$v_d = \frac{d\sqrt{\mu p}}{r_1 r_2 \sin(\phi)}, \quad v_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{1 - \cos(\phi)}{\sin(\phi)}, \quad (13)$$

где фокальный параметр равен

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad (14)$$

или через параметры A и B (Prussing, Conway, 1993):

$$v_d = B + A, \quad v_r = B - A, \quad (15)$$

где константы A и B определяются как

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{4a}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B = \sqrt{\frac{\mu}{4a}} \operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}\right). \quad (16)$$

Из равенства можно получить A и B :

$$A = \frac{v_d - v_r}{2}, \quad B = \frac{v_d + v_r}{2}, \quad (17)$$

учитывая соотношение можно дополнить и однозначно определить параметры α и β

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = A \sqrt{\frac{2s}{\mu}}, \quad \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = B \sqrt{\frac{2(s-d)}{\mu}}. \quad (18)$$

Для гиперболического движения выражения (12), (13), (17) и (18), остаются справедливы, а длительность перелета определяется как

$$\Delta t_{\text{hyp}} = \sqrt{\frac{|a|^3}{\mu}} ((\operatorname{sh}(\alpha) - \alpha) - (\operatorname{sh}(\beta) - \beta)), \quad (19)$$

раскладывая выражение в ряд Тейлора и устремля $a \rightarrow \infty$ (Эльясберг, 1965) получаем время для перелета по параболической траектории

$$\Delta t_{\text{par}} = \frac{1}{6\sqrt{\mu}} \left((r_1 + r_2 + d)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - d)^{\frac{3}{2}} \right), \quad (20)$$

где “–” соответствует случаю $\phi < \pi$, а “+” – $\phi > \pi$.

Такой подход обладает значительно меньшей трудоемкостью, чем использование уравнения Кеплера в классических переменных.

АНАЛИЗ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ

Одним из важных преимуществ рассматриваемого решения является возможность проведения на его основе качественного анализа всех возможных траекторий перелета между двумя заданными точками.

Так, среди всех возможных ориентаций вектора начальной скорости наибольший интерес вызывают решения, соответствующие следующим случаям:

- перелет по прямой (предельной гиперболе) и перелет через бесконечность, ограничивающие всю область возможных значений,
- параболическая траектория, разделяющая гиперболические и эллиптические траектории,
- эллиптическая траектория с минимальной величиной большой полуоси.

Проанализируем подробнее эти варианты.

Предельным случаем движения по гиперболе является ориентация вектора скорости в направлении конечной точки, если угловая дальность не превосходит π , и ориентация на притягивающий центр, если угловая дальность больше π . То есть минимальный начальный траекторный угол равен:

$$\theta_{\min} = \begin{cases} \operatorname{sign}(\mathbf{r}_1^T \mathbf{d}) \arccos \left(\sqrt{\frac{d^2 r_1^2 - (\mathbf{r}_1^T \mathbf{d})^2}{d^2}} \right), & \phi < \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & \phi \geq \pi. \end{cases} \quad (21)$$

Начальный траекторный угол для параболического случая определяется из равенства

подстановкой величины скорости, соответствующей нулевому значению константы энергии, которое после преобразования приводит к двум решениям

$$\theta_{\text{par}\mp} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\phi) \mp \sqrt{2 \frac{r_1}{r_2} (1 - \cos(\phi))}}{1 - \cos(\phi)} \right), \quad (22)$$

где для решений с угловой дальностью меньше одного витка “–” соответствует решению, разделяющему гиперболические и эллиптические семейства, а “+” – решение с перелетом через бесконечность (за бесконечное время). Для угловой дальности перелета больше витка гиперболических решений не существует, и оба случая соответствуют двум разным вариантам перелета через бесконечность. В любом случае эти параболы ограничивают область возможных эллиптических решений.

Решение с минимальным значением большой полуоси можно получить на основе обратной задачи – максимизации угловой дальности перелета при фиксированной величине начальной скорости (Охочимский, Сихарулидзе, 1990), подставив туда минимальное значение начальной скорости

$$\theta_{\min a} = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_1 v_{\min}^2 \sin(\phi)}{2\mu (1 - \cos(\phi))} \right), \quad (23)$$

где минимальная начальная скорость может быть определена с помощью минимального значения большой полуоси (Эльясберг, 1965; Battin, 1999)

$$v_{\min}^2 = \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a_{\min}}, \quad a_{\min} = \frac{s}{2}. \quad (24)$$

Хотя траектории с минимальной энергией имеют самостоятельный интерес (Leeghim, Jagooh, 2010), основной результат приведенного анализа заключается в точной локализации области решений и возможности ее качественного исследования (Ивашкин, 2023).

Анализ зависимости скорости от траекторного угла в начальной точке показывает, что график возможной скорости представляет собой ветвь гиперболы с асимптотами, направленными вдоль хорды, соединяющей начальное и конечное положение, и начального радиус-вектора (Охочимский, 1968; Godal, 1961). Разные ветви гиперболы соответствуют разной угловой дальности перелета $\phi < \pi$ и $\phi > \pi$, как это показано

на рис. 2. Можно получить уравнение этой гиперболы в аналитическом виде, наиболее удобная форма записи использует в качестве параметров характеристики решения с минимальной энергией перелета (Охочимский, 1968):

$$v_1(\Delta\theta) = \frac{v_{\min} \cos(\theta_{\min a})}{\sqrt{\cos^2(\theta_{\min a}) - \sin^2(\Delta\theta)}}, \quad (25)$$

где $\Delta\theta = \theta - \theta_{\min a}$.

Кроме того, ветвь гиперболы, соответствующая множеству возможных решений, ограничена с одной из сторон асимптотическим решением — перелетом через бесконечность за бесконечное время по параболе, так как последующие варианты решения лишены физического смысла.

Очевидно, что выражение (25) проще и предпочтительнее для определения скорости при различных траекторных углах, чем (8).

График зависимости начальной скорости от траекторного угла с отметкой характерных точек и асимптот гиперболы для случаев $\phi < \pi$ и $\phi > \pi$ приведен на рис. 2. На рис. 3 приведены зависимости начальной скорости и большой полуоси от траекторного угла, на которых также отмечены характерные точки, разделяющие типы возможных решений. Эти зависимости имеют аналогичный вид для всех вариантов исходных данных и отличаются только длиной отрезков локализации решений, определяемых соотношениями (21)–(23). Множество эллиптических решений симметрично относительно точки минимальной энергии перелета.

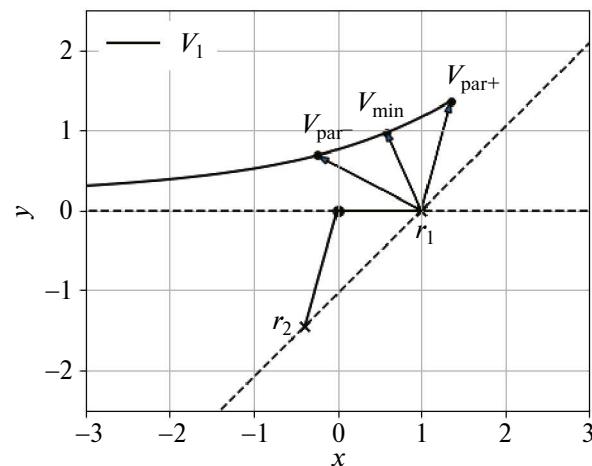
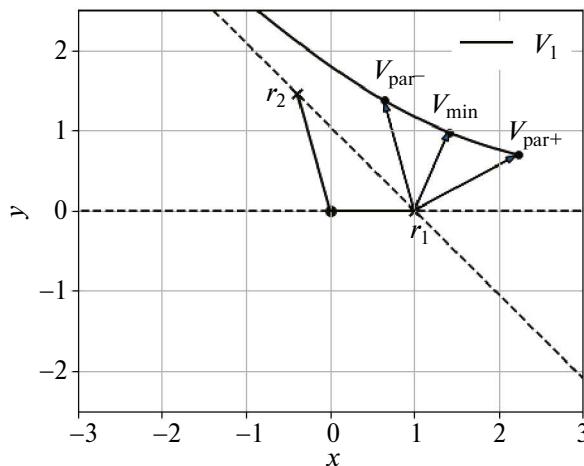


Рис. 2. Множество возможных направлений вектора начальной скорости для $r_1 = 1$ и $r_2 = 1.5$, $\phi = 105^\circ$ (слева) и $\phi = 255^\circ$ (справа).

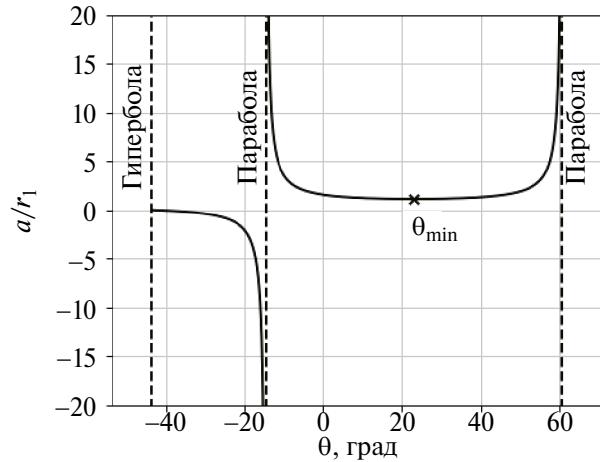
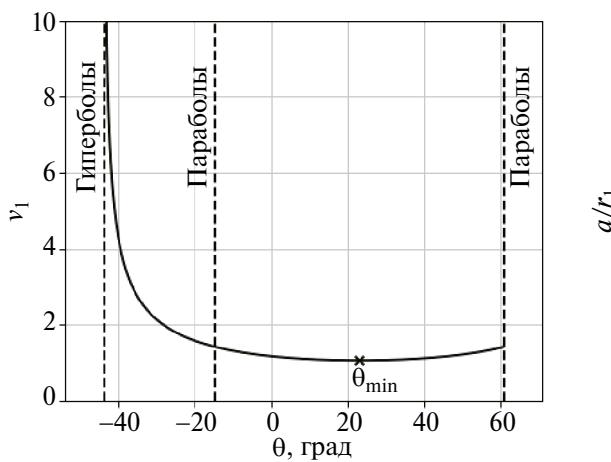


Рис. 3. Зависимость начальной скорости (слева) и большой полуоси (справа) от начального наклона скорости.

Всем приведенным решениям соответствуют характерные времена перелета:

- минимальному гиперболическому перелету с θ_{\lim} соответствует мгновенный перелет по прямой,
- время перелета по параболе, разделяющей эллиптическое и гиперболические решения и соответствующей значению угла $\theta_{\text{par-}}$,
- перелет по параболе, определенной углом $\theta_{\text{par+}}$, происходит через бесконечность за бесконечное время,
- время перелета по орбите с минимальной энергией, соответствующее $\theta_{\min a}$, может быть определено для любого числа витков из общей формулы, однако минимум энергии и минимум времени перелета, очевидно, не совпадают, хотя и находятся достаточно близко друг к другу (т.е. время перелета по орбите с минимальной энергией может служить хорошим начальным приближением для поиска минимального времени перелета для многооборотного решения).

Для определения времени перелета по траектории с минимальной энергией выражение допускает упрощение (Эльяшберг, 1965; Battin, 1999; Thompson, Rostowske, 2020). Подстановка выражения для большой полуоси в показывает, что параметр α всегда равен π , и выражение принимает вид

$$\Delta t_{\min a} = \sqrt{\frac{s^3}{8\mu}} (\pi - \beta + \sin(\beta)) + 2\pi N \sqrt{\frac{s^3}{8\mu}}. \quad (26)$$

К сожалению, не удалось получить аналитическую формулу, определяющую

минимальное время перелета для многооборотного решения. Однако определить это решение часто бывает полезно, так как оно разделяет семейство левых и правых решений (коротких и длинных).

Графики зависимости длительности перелета от большой полуоси и от начальной скорости приведены на рис. 4, маркерами отмечены точки, соответствующие минимальной энергии орбиты перелета и минимуму времени.

Легко видеть, что поиск решения задачи Эйлера–Ламберта на основе уравнений и с большой полуосью в качестве независимой переменной затруднен несколькими особенностями, проиллюстрированными на приведенном графике:

- область определения бесконечна и совпадает практически со всей числовой осью, запрещенным является только небольшой отрезок в окрестности нуля;
- эллиптические и гиперболические типы решений смыкаются через бесконечность, что затрудняет гладкий переход между ними в процессе итерационного поиска решения;
- на кривых, соответствующих многооборотным решениям, производная в большинстве случаев имеет одинаковый знак на левом и правом решениях (коротком и длинном), что требует для их разделения достаточно точных начальных приближений и затрудняет контроль полученного типа решения.

При переходе от большой полуоси к начальной скорости в качестве независимой переменной область определения становится более

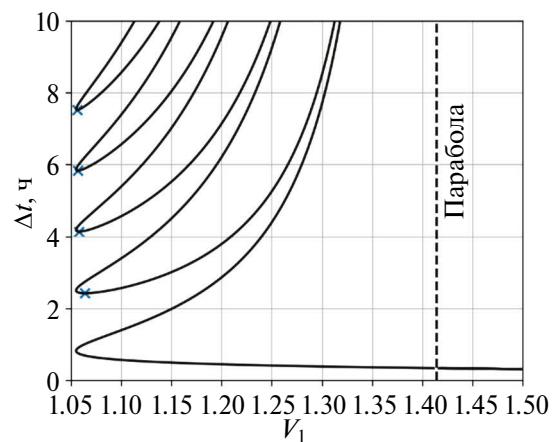
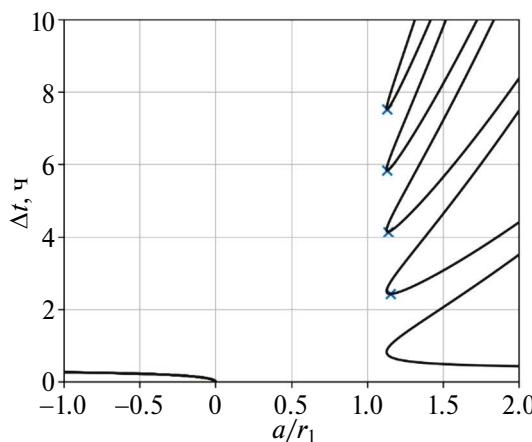


Рис. 4. Длительность перелета от большой полуоси (слева) и величины начальной скорости (справа).

связанной, в частности происходит гладкий переход от эллиптических решений к параболическим.

На рис. 5 приведена зависимость длительности перелета от начального траекторного угла, маркерами отмечены точки, соответствующие минимальной энергии орбиты перелета и минимуму времени перелета. Переход к этой независимой переменной хотя и несколько усложняет вычисление длительности перелета, однако при этом заметно улучшается и структурируется область определения решений. В частности, отсутствуют все перечисленные выше недостатки: область решения компактна, происходит гладкий переход между разными типами решения, левые и правые решения разделены точкой минимума по времени перелета и имеют производную разного знака.

Проведенный качественный анализ позволяет получить достаточно эффективный метод решения задачи Эйлера–Ламберта, используя в его основе физически значимые параметры перелета.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим подробнее алгоритмы решения двух задач: поиска минимума времени перелета для многооборотного решения и определения решения с заданным временем перелета (задача Эйлера–Ламберта).

Следует отметить несколько особенностей исследуемой задачи, проиллюстрированных на рис. 5:

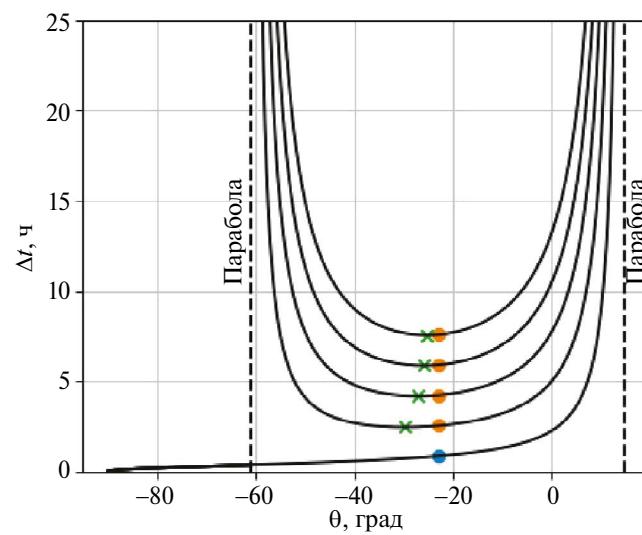


Рис. 5. Длительность перелета как функция начального траекторного угла.

- область определения решений по начальному траекторному углу представляет собой отрезок с известными границами;
- знак производной функции разделяет две ветви решений в многооборотном случае;
- функция оказывается пологой на большей части практически значимых случаев.

Первые два свойства позволяют строить алгоритмы решения на основе двухточечных методов поиска корня и минимума функции, а также использовать метод доверительных областей. Последнее свойство указывает на необходимость использования на каждом шаге итерации нелинейной аппроксимации рассматриваемой функции для получения быстросходящегося метода. В частности, к потенциально подходящим относятся методы, основанные на параболической интерполяции исследуемой функции и методы, использующие вторую производную исследуемой функции. Последние обладают наибольшей скоростью сходимости, поэтому далее будут рассмотрены они.

В частности, для поиска минимума времени перелета для многооборотного решения

$$\Delta t_{\text{ell}}(\theta, N) \rightarrow \min, \quad (27)$$

рассмотрим применение квазиньютоновского метода, основанного на следующих рассуждениях. Необходимым условием минимума является

$$\Delta t'_{\text{ell}}(\theta_{\min N}) = 0, \quad (28)$$

это нелинейное уравнение можно решить методом Ньютона, тогда итерационный процесс будет выглядеть следующим образом

$$\theta_{\min N}^{i+1} = \theta_{\min N}^i - \frac{\Delta t'_{\text{ell}}(\theta_{\min N}^i)}{\Delta t''_{\text{ell}}(\theta_{\min N}^i)}, \quad (29)$$

при этом для вычисления второй производной применим конечно-разностную аппроксимацию, используя значения первой производной на двух последовательных итерациях. Тогда окончательно имеем:

$$\theta_{\min N}^{i+1} = \theta_{\min N}^i - \frac{\Delta t'_{\text{ell}}(\theta_{\min N}^i)(\theta_{\min N}^i - \theta_{\min N}^{i-1})}{\Delta t'_{\text{ell}}(\theta_{\min N}^i) - \Delta t'_{\text{ell}}(\theta_{\min N}^{i-1})}, \quad (30)$$

полученный метод эквивалентен решению уравнения методом секущих.

В качестве начального приближения для поиска минимума времени перелета используется

решение с минимальной энергией, (соответствующие точки отмечены маркером на рис. 5)

$$\theta_{\min N}^0 = \theta_{\min a}. \quad (31)$$

Для поиска решения с заданным временем перелета (задачи Эйлера–Ламберта)

$$\Delta t(\theta, N) = \Delta t^*, \quad (32)$$

используем метод Галлея (Traub, 1964; Alefeld, 1981), итерации которого имеют следующий вид

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \frac{2\Delta t(\theta^i)\Delta t'(\theta^i)}{2\Delta t'^2(\theta^i) - \Delta t(\theta^i)\Delta t''(\theta^i)}, \quad (33)$$

вычисление второй производной будем делать аналогично.

Для применения описанных формул необходима производная длительности перелета по траекторному углу, в случае эллиптической траектории она может быть представлена как

$$\Delta t'_{\text{ell}}(\theta) = \frac{d\Delta t_{\text{ell}}}{da} \frac{da}{dv_1} \frac{dv_1}{d\theta}, \quad (34)$$

где производные могут быть получены из и :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta t_{\text{ell}}}{da} &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[2\pi N + (\alpha - \sin(\alpha)) - \right. \\ &\quad \left. - (\beta - \sin(\beta)) - \frac{4\sin^3(\alpha/2)}{3\cos(\alpha/2)} + \frac{4\sin^3(\beta/2)}{3\cos(\beta/2)} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

$$\frac{da}{dv_1} = \frac{2\mu v_1}{(-2\mu/r_1 + v_1^2)^2}, \quad (36)$$

$$\frac{dv_1}{d\theta} = \frac{v_1 \sin(\Delta\theta) \cos(\Delta\theta)}{\cos^2(\theta_{\min}) - \sin^2(\Delta\theta)}. \quad (37)$$

В случае гиперболы производная длительности перелета по траекторному углу записывается аналогично

$$\Delta t'_{\text{hyp}}(\theta) = \frac{d\Delta t_{\text{hyp}}}{da} \frac{da}{dv_1} \frac{dv_1}{d\theta}, \quad (38)$$

и отличается только одной составляющей

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta t_{\text{hyp}}}{da} &= -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{|a|}{\mu}} \left[(\text{sh}(\alpha) - \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - (\text{sh}(\beta) - \beta) - \frac{4\text{sh}^3(\alpha/2)}{3\text{ch}(\alpha/2)} + \frac{4\text{sh}^3(\beta/2)}{3\text{ch}(\beta/2)} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

В качестве начальных приближений для решения задачи Эйлера–Ламберта достаточно

использовать характерные точки, разделяющие множество возможных решений, полученные ранее. Например, следующим образом:

- для гиперболических решений $\Delta t < \Delta t_{\text{par}}$

$$\theta_{\text{hyp}}^0 = \theta_{\text{par}} - \varepsilon, \quad (40)$$

- для эллиптических решений $\Delta t > \Delta t_{\text{par}}$ с угловой дальностью меньше витка, $N < 1$

$$\theta_{\text{ell}}^0 = \theta_{\min a}, \quad (41)$$

- для многооборотных эллиптических решений $\Delta t > \Delta t_{\text{par}}$, $N > 0$, левого и правого соответственно

$$\theta_{\text{ell}N-}^0 = \theta_{\text{par}-} + \varepsilon, \quad \theta_{\text{ell}N+}^0 = \theta_{\text{par}+} - \varepsilon, \quad (42)$$

где ε – точность вычислений.

Однако такое правило определения начального приближения не использует значение длительности перелета искомого решения, т.е. близость начального приближения к решению не гарантирована, а сходимость обусловлена только свойствами области определения и свойствами функции (как видно на рис. 5). Это приводит к излишнему количеству итераций в процессе решения.

Можно построить более эффективное правило получения начальных приближений, основанное на аппроксимации зависимости времени перелета по характерным точкам множества решений. Для получения начальных приближений для решения задачи с временем перелета Δt будем пользоваться следующими предположениями:

- для гиперболических решений зависимость $\Delta t_{\text{hyp}}(\theta)$ – прямая, проходящая через точки $(\theta_{\text{lim}}, 0)$ и $(\theta_{\text{par}-}, \Delta t_{\text{par}})$,
- для эллиптических решений (меньше одного витка) $\Delta t_{\text{ell}}(\theta)$ – гипербола, проходящая через точки $(\theta_{\text{par}-}, \Delta t_{\text{par}})$ и $(\theta_{\min a}, \Delta t_{\min a})$ с асимптотой $(\theta_{\text{par}+}, \infty)$.
- для многооборотных эллиптических решений $\Delta t_{\text{ell}}(\theta, N)$ – парабола, проходящая через точки $(\theta_{\text{par}-}, 10\Delta t/\Delta t_{\min N})$, $(\theta_{\text{par}+}, 10\Delta t/\Delta t_{\min N})$ и $(\theta_{\min N}, \Delta t_{\min N})$.

Тогда начальные приближения для решения задачи с временем перелета Δt в соответствующих случаях определяются так:

- для гиперболических решений

$$\theta_{\text{hyp}}^0 = \theta_{\text{lim}} + \frac{(\theta_{\text{par}-} - \theta_{\text{hyp}})}{\Delta t_{\text{par}}} \Delta t, \quad (43)$$

- для эллиптических решений (при полете на дуге менее одного витка, $N = 0$)

$$\theta_{\text{ell}}^0 = \theta_{\text{par+}} - \frac{k}{\Delta t - b},$$

$$k = \frac{\Delta t_{\min a} - \Delta t_{\text{par}}}{1/(\theta_{\text{par-}} - \theta_{\text{par+}}) - 1/(\theta_{\min a} - \theta_{\text{par+}})},$$

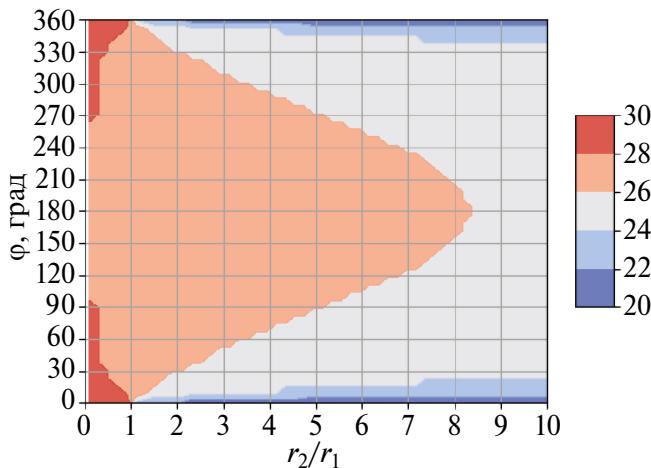
$$b = \Delta t_{\text{par}} + \frac{k}{\theta_{\text{par-}} - \theta_{\text{par+}}} \quad (44)$$

- для многооборотных эллиптических решений ($N > 0$)

$$\theta_{\text{ell}N-}^0 = -\sqrt{\frac{\Delta t}{10\Delta t_{\min N}}} - 0.1(\theta_{\min} - \theta_{\text{par-}}),$$

$$\theta_{\text{ell}N+}^0 = \sqrt{\frac{\Delta t}{10\Delta t_{\min N}}} - 0.1(\theta_{\text{par+}} - \theta_{\min}). \quad (45)$$

Как видно, наиболее трудоемким является получение начального приближения для многооборотных решений, так как оно связано с определением точки $(\theta_{\min N}, \Delta t_{\min N})$, что требует решения вспомогательной задачи, рассмотренной ранее. Однако следует отметить, что эта проблема связана с особенностью множества многооборотных решений и появляется во многих других методах решения задачи Эйлера–Ламберта. В данном случае вычисление точки минимума дает дополнительную информацию о множестве решений и позволяет эффективно получать начальные приближения.



ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

Проведенный качественный анализ множества возможных решений позволяет получить область определения решений задачи Эйлера–Ламберта для гиперболических и эллиптических решений.

Если использовать для решения метод бисекции, то количество итераций, необходимых для достижения заданной точности ε , определяется выражением

$$n = \log(\Delta\theta_0/\varepsilon)/\log(2), \quad (46)$$

где $\Delta\theta_0$ – длина отрезка локализации корня гиперболических $\Delta\theta_0 = |\theta_{\text{par-}} - \theta_{\text{lim}}|$ и эллиптических $\Delta\theta_0 = |\theta_{\text{par+}} - \theta_{\text{par-}}|$ решений.

Поскольку длина отрезка начальной локализации корня зависит только от отношения r_2/r_1 и угла ϕ , можно определить максимальное количество итераций при решении задачи с заданной длительностью перелета методом бисекции. Такая оценка приведена на рис. 6 для случая эллиптических и гиперболических решений при заданной точности решения $\varepsilon = 10^{-8}$. При этом отношение радиусов r_2/r_1 варьировалось от 0.1 до 10, а угловая дальность перелета от 1° до 359° , что в значительной степени покрывает область практически значимых задач, возникающих при проектировании перелетов в околоземном пространстве или для анализа гелиоцентрических участков межпланетных перелетов.

Проведен анализ вычислительных затрат при использовании метода Галлея с начальными приближениями – внутри каждой области определения

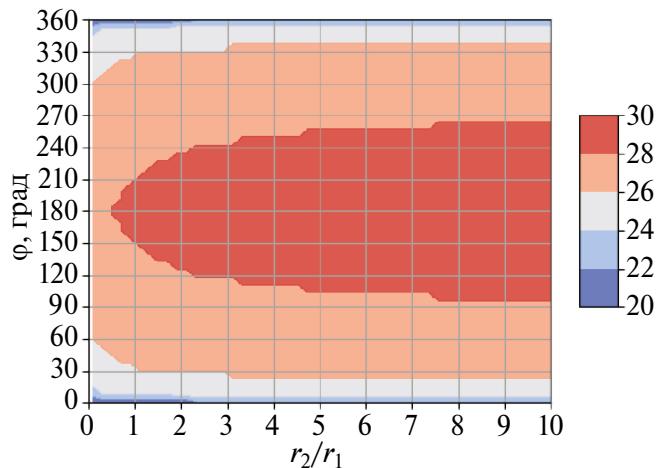


Рис. 6. Оценка максимального количества итераций метода бисекции для эллиптического (слева) и гиперболического (справа) случаев.

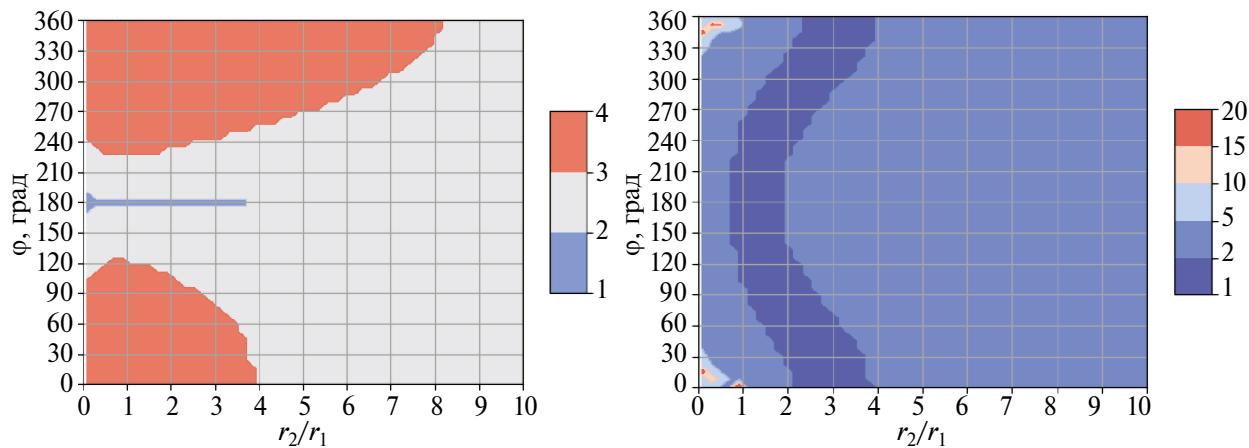


Рис. 7. Оценка максимального количества итераций метода Галлея для гиперболического (слева) и эллиптического $N = 0$ (справа) случаев.

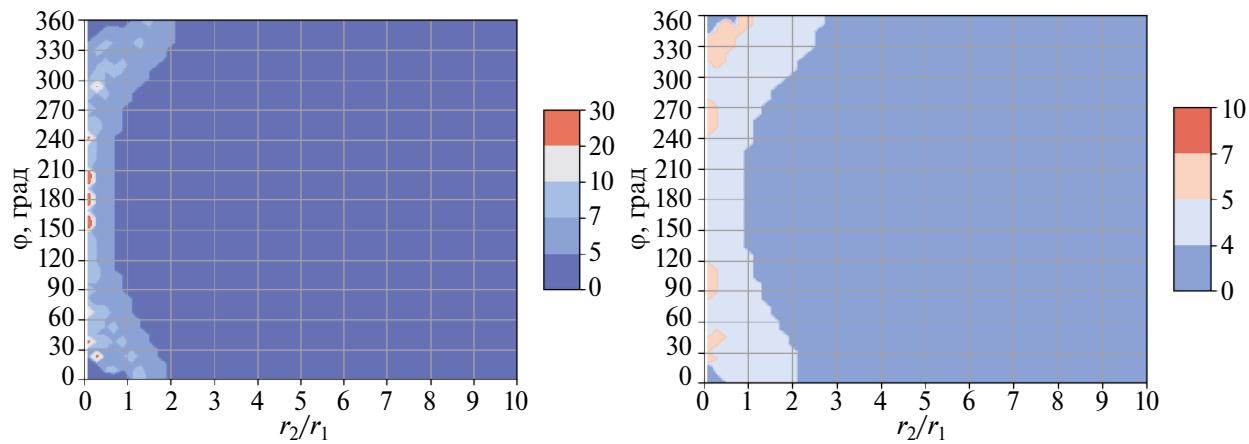


Рис. 8. Оценка максимального количества итераций метода Галлея для многооборотных решений ($N = 1$): левого (слева) и правого (справа) семейств.

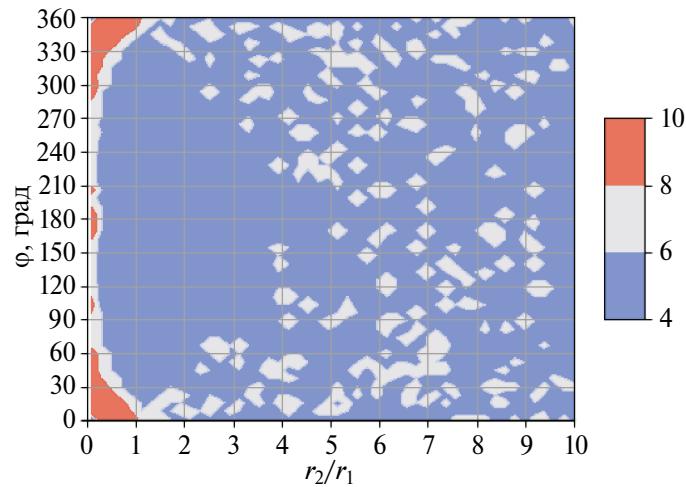


Рис. 9. Оценка максимального количества итераций квазиньютоновского метода для нахождения минимума времени перелета многооборотного решения ($N = 1$).

заданного типа решения. При этом равномерно распределялись точки по траекторному углу для получения времени перелета в тестовых задачах, и среди них определялось максимальное значение итераций. Точность полученных решений при этом была не хуже 10^{-12} . Результаты приведены на рис. 7 для гиперболического и эллиптического ($N = 0$) случая, и на рис. 8 для левого и правого семейств многооборотного эллиптического решения ($N = 1$). Как видно, для перелетов с угловой дальностью меньше витка типичное количество итераций не превосходит 5, а для многооборотного случая 5–7. Что соответствует лучшим результатам аналогичных методов, приведенных, например, в (Agora, Russell, 2013; Torre, Fantino, 2015).

Количество итераций, необходимое для поиска минимума длительности перелета с помощью квазиньютоновского метода с начальным приближением для самого трудоемкого случая $N = 1$ приведено на рис. 9. Типичное количество итераций для поиска минимума равно 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено решение задачи Эйлера–Ламберта на основе баллистического подхода Охочимского–Егорова как обратной задачи динамики. Проведен качественный анализ решений. Разработан оригинальный метод определения длительности перелета.

Предложен эффективный алгоритм решения задачи Эйлера–Ламберта. Оценка скорости сходимости показывает, что при использовании метода Галлея с оценкой второй производной с помощью конечно-разностной аппроксимации на двух последовательных приближениях типичное количество итераций составляет около 5–7 для всех типов решений, что является очень хорошим результатом для алгоритмов решения задачи Эйлера–Ламберта.

К достоинствам самого подхода относится ограниченность и понятная структура области определения решений. Общая наглядность метода, обусловленная использованием физически понятных параметров траектории, и явная зависимость решения от вектора начальной скорости позволяют эффективно включать эту схему решения в процесс оптимизации импульсных траекторий и проектирования межпланетных миссий.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206, <https://rscf.ru/project/22-79-10206/>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 3. С. 360–391.
2. Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Тучин А.Г., Тучин Д.А. Адаптивные методы построения перелетов в системе Юпитера с выходом на орбиту спутника галилеевой Луны // Астрон. вестн. 2020. Т. 54. № 4. С. 349–359. (Golubev Y.F., Grushevskii A.V., Koryanov V.V., Lavrenov S.M., Tuchin A.G., Tuchin D.A. Adaptive methods of the flybys constructing in the Jovian system with the orbiter insertion around the Galilean Moon // Sol. Syst. Res. 2020. V. 54. № 4. P. 318–328.)
3. Григорьев И.С., Заплетин М.П. Выбор перспективных последовательностей астероидов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 65–79.
4. Ивашик В.В., Аньци Л. Построение оптимальных траекторий для экспедиции Земля–Астероид–Земля при полете с большой тягой // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 2. С. 138–148.
5. Ивашик В.В. Задача Эйлера–Ламберта и ее решение с помощью метода Охочимского–Егорова // XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: СПб, 21–25 августа 2023 г. Сб. тезисов докладов в 4 томах. Т. 1. Общая и прикладная механика. Спб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. 668 с.
6. Ивашик В.В. О применении метода Охочимского–Егорова для решения задачи Эйлера–Ламберта // Докл. РАН. Физика. Технические науки. 2024. Т. 514. С. 58–62.
7. Овчинников М.Ю., Трофимов С.П., Широбоков М.Г. Проектирование межпланетных траекторий с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе // Космич. исслед. 2018. Т. 56. № 4. С. 337–350.
8. Охочимский Д.Е. Динамика космических полетов. Конспект лекций. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. 158 с.
9. Охочимский Д.Е., Сухарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 445 с.
10. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
11. Суханов А.А. Астродинамика. М.: Институт космических исследований РАН, 2010. 202 с.
12. Эйсмонт Н.А., Боярский М.Н., Ледков А.А., Назиров Р.Р., Данхэм Д., Шустов Б.М. О возможности наведения малых астероидов на опасные небесные объекты с использованием гравитационного маневра // Астрон. вестн. 2013. Т. 47. № 4.

- C. 352–360. (*Eismont N.A., Boyarskii M.N., Ledkov A.A., Nazirov R.R., Dunham D.W., Shustov B.M.* On the possibility of the guidance of small asteroids to dangerous celestial bodies using the gravity-assist maneuver // *Sol. Syst. Res.* 2013. V. 47. № 4 . P. 325–333.)
13. Эльяшберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
14. Эскобал П. Методы определения орбит. М.: Мир, 1970. 471 с.
15. Alefeld G. On the convergence of Halley's Method // *Am. Mathemat. Mon.* 1981.V. 88. № 7. P. 530–536.
16. Arulkumar P.V., Naik S.D. Solution based on dynamical approach for multiple-revolution Lambert problem // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* 2011. V. 34. № 3. P. 920–923.
17. Arora N., Russell R.P. A fast and robust multiple revolution Lambert algorithm using a cosine transformation // *Paper AAS.* 2013. V. 13. № 728. P. 162.
18. Battin R.H. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics. AIAA Education Ser. New York: AIAA, 1999. 826 c.
19. Clairaut A.C. Théorie de la lune, déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances. Paris: Chez Dessaint & Saillant, 1765. 176 c.
20. Godal T. Conditions of compatibility of terminal positions and velocities // 11th Int. Astronaut. Congress. Proc. V. 1. 1961. P. 40–44.
21. Lagrange J.-L. Sur le Problème de la détermination des orbites des comètes d'après trois observations. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin. 1778. Auteur du texte. Oeuvres de Lagrange. T. 4. Paris: Gauthier-Villars, 1869. pp. 439–451.
22. Leeghim H., Jaroux B.A. Energy-optimal solution to the Lambert problem // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* 2010. V. 33. № 3. P. 1008–1010.
23. Nelson S.L., Zarchan P. Alternative approach to the solution of Lambert's problem // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* 1992. V. 15. № 4. P. 1003–1009.
24. Ottesen D., Russell R.P. Unconstrained direct optimization of spacecraft trajectories using many embedded Lambert problems // *J. Optimization Theory and Appl.* 2021. V. 191. P. 634–674.
25. Prussing J.E., Conway B.A. Orbital mechanics. USA: Oxford Univ. Press, 1993. 207 p.
26. Thompson B.F., Rostowfske L.J. Practical constraints for the applied Lambert problem // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* 2020. V. 43. № 5. P. 967–974.
27. Torre S.D., Fantino E. Review of Lambert's problem // ISSFD 2015: 25th Int. Symp. Space Flight Dyn. 2015. P. 1–15.
28. Traub J.F. Iterative methods for the solution of equations. N.J.: Prentice-Hall, 1964. 310 p.
29. Wheelon A.D. Free flight of a ballistic missile // *ARS J.* 1959. V. 29. № 12. P. 915–926.
30. Zhang G., Mortari D., Zhou D. Constrained multiple-revolution Lambert's problem // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* 2010. V. 33. № 6. P. 1779–1786.
31. Zhang G. Terminal-velocity-based Lambert algorithm // *J. Guidance, Control, and Dynamics.* 2020. V. 43. № 8. P. 1529–1539.