

УДК 523.43

ВЛИЯНИЕ НЕУПРУГОСТИ МАНТИИ НА МОДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПЕРИОДА ЧАНДЛЕРОВСКОГО КОЛЕБАНИЯ МАРСА

© 2024 г. Е. А. Кулик^{a,*}, Т. В. Гудкова^{a,**}

^aИнститут физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия
e-mail: *kulik.ea@ifz.ru; **gudkova@ifz.ru

Поступила в редакцию 01.03.2024 г.

После доработки 22.04.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

Представлены результаты численного моделирования значений периода чандлеровского колебания Марса для набора моделей внутреннего строения, удовлетворяющих всем имеющимся на сегодняшний день наблюдаемым данным: геодезическим (среднему радиусу, массе, моменту инерции, приливному числу Лява k_2) и полученным из обработки сейсмических данных значений толщины коры и радиуса ядра. Для учета неупругости при расчете модельных значений приливного числа Лява k_2 и периода чандлеровского колебания использована реология Андраде. Показано, как модельные значения числа Лява k_2 и чандлеровского периода зависят от реологического параметра Андраде и принятого распределения вязкости.

Ключевые слова: Марс, чандлеровское колебание, модели внутреннего строения, вязкоупругость, приливные числа Лява, реология Андраде

DOI: 10.31857/S0320930X24060039, EDN: NIDCRA

ВВЕДЕНИЕ

Чандлеровское колебание (ЧК) (или свободная нутация) – это свободное движение полюса планеты. Американский астроном С. Чандлер в 1891 г. установил, что на Земле изменения широты имеют периодический характер (Chandler, 1891) и выделил характерные периоды. Такие колебания возникают из-за того, что ось вращения Земли слегка наклонена к оси наибольшего момента инерции, и ее ось вращения, оставаясь неподвижной в пространстве, описывает конус вокруг оси наибольшего момента инерции. Наблюдаемый период чандлеровского колебания полюса 434 дня оказался намного больше, чем значение, предсказанное для модели твердой Земли, 305 дней, полученное из известных уравнений Эйлера, описывающих свободное вращение твердого тела. Источниками большого расхождения в полученных теоретических значениях периода были неучет неупругости мантии, размера и сжатия ядра, а также приливные

движения в океане в реальной планете под действием переменной центробежной силы. Влияние этих эффектов на значение чандлеровского периода Земли подробно изложено в работах (Zharkov, Molodensky, 1996; Молоденский, 2004).

Ось вращения Марса также слегка наклонена к оси наибольшего момента инерции. Для Марса возбуждение ЧК связано с сезонным обменом масс между полярными шапками. Регистрация периода ЧК Марса ожидалась в течение длительного времени. Сначала период ЧК Марса был определен теоретически (Жарков, Молоденский, 1994; 1995; Zharkov, Molodensky, 1996; Van Hoolst и др., 2000; Dehant и др., 2003; 2006; Жарков, Гудкова, 2005; Zharkov, Gudkova, 2009). В работе (Жарков, Молоденский, 1995) были выполнены оценки вклада от учета жидкого ядра и неупругости недр планеты, и рассчитано влияние слабой трехосности фигуры Марса на чандлеровский период. Оценочное значение периода ЧК Марса для различных моделей внутреннего строения варьировались от 203.8 до 204.8 сут.

(Zharkov, Gudkova, 2009) и от 201 до 208 сут. (Van Hoolst и др., 2000). Экспериментально оценка периода ЧК была получена в (Konopliv и др., 2006), затем уточнена в (Konopliv и др., 2011), но эти попытки не смогли точно отделить сигнатуру на частоте ЧК от периода перераспределения массы за 1/3 марсианского года из-за малой амплитуды колебаний. Благодаря радионаблюдениям с космических аппаратов Mars Odyssey, Mars Reconnaissance Orbiter и Mars Global Surveyor, вращающихся вокруг Марса почти два десятилетия, это колебание впервые с достаточно хорошей точностью было измерено и на Марсе (Konopliv и др., 2020). Период ЧК Марса равен 206.9 ± 0.5 сут., движение происходит против часовой стрелки, если смотреть с Северного полюса, и его амплитуда составляет около 10 см на поверхности. Использование этого колебания как дополнительного граничного условия может дать новую информацию о недрах Марса и, в частности, может улучшить наше понимание диссипативных свойств мантии для временного интервала, близкого к периоду колебаний.

Вопрос о частотной зависимости диссипативного фактора недр Марса является предметом многих исследований. В сейсмической области периодов $\sim(1$ с – 1 ч) диссипативный фактор Q_μ практически не зависит от частоты (Жарков, 2012). Однако в области длинных периодов (приливы, чандлеровское колебание) имеет место слабая зависимость Q_μ от частоты (Zharkov, Molodensky, 1979; Молоденский, Жарков, 1982; Anderson, Minster, 1979; Smith, Dahlen, 1981). Упругие модули в диссипативной среде также оказываются функциями частоты. Влияние неупругости недр Марса на приливы и ЧК планеты изучалось в работах (Жарков, Гудкова, 1993; 2005; Zharkov, Gudkova, 1997; Жарков, Молоденский, 1994; Zharkov, Molodensky, 1996), в которых совокупность неупругих процессов в высокотемпературной мантии Марса или Земли описывалась с помощью степенной функции крипа, которая относится к стадии неуставновившейся ползучести, но показатель степени в ней точно не определен.

Знания о диссипативных свойствах Марса основаны на значении постоянной запаздывания его самого большого спутника Фобоса, который вызывает приливы на планете. Размер деформации поверхности (высота приливного горба) зависит от упругих свойств недр Марса, кроме этого, вязкость и неупругость недр планеты приводят к смещению приливного горба относительно положения Фобоса на его орбите, и вызывают

ускорение спутника. Тем самым, ускорение Фобоса и размер приливного горба дают информацию о внутреннем строении планеты.

С использованием набора моделей внутреннего строения Марса, основанных на минерологии Wänke и Dreibus (Wänke, Dreibus, 1994), в работе (Жарков и др., 2017) был построен профиль диссипативного фактора для силикатной оболочки Марса. Для этого использовалось предположение, что температурные профили Земли и Марса на плоскости $P-T$ похожи, и профиль диссипативного фактора в Марсе на плоскости $P-T$ принимался таким же, как и для Земли. В этом исследовании подбирался упрощенный кусочно-постоянный профиль затухания с относительно низким значением показателя частотной зависимости диссипативного фактора, для того чтобы удовлетворить значению векового ускорения Фобоса.

В более поздних работах (Khan и др., 2018; Vagheri и др., 2019) использовались лабораторные модели вязкоупругой диссипации. Авторы исследовали допустимый диапазон показателя степени для мантийной неупругости, используя различные химические составы мантии и реологические законы, и получили, что этот диапазон составляет 0.22–0.42. В работе (Konopliv и др., 2020) приводится оценка 0.07–0.35 для случая степенного закона, принимаемого при расчетах для Земли. В работе (Harada, 2022) проведена оценка параметров неупругости марсианской мантии с учетом степенной реологии (0.22 ± 0.13) и диссипативного фактора на основе данных наблюдений о приливных параметрах и параметрах вращения, с использованием модели внутреннего строения, полученных в результате инверсии как геодезических данных, так и данных сейсмического эксперимента, а также рассчитан период чандлеровского колебания для различных моделей.

Оценки параметров неупругости для уточненных на основе сейсмических данных моделей были получены в работе (Роу и др., 2022). Профили затухания в недрах Марса на частоте прилива схожи для ряда рассмотренных моделей, и дают величину приливного затухания $Q_2 = 93.0 \pm 8.40$, но расходятся на сейсмических частотах. Хотя все модели внутреннего строения Марса соответствовали значению числа Лява k_2 , имелось некоторое расхождение с наблюдаемым периодом ЧК. Для моделей с наиболее близкими теоретическими и наблюдаемыми значениями ЧК, параметр частотной зависимости диссипативного фактора оказался в интервале 0.15–0.4. Период ЧК чувствителен не только к этому параметру,

но и к ряду других факторов, таких как реологические модели или размер зерен.

До сейсмического эксперимента модели внутреннего строения Марса опирались на измеряемые геодезические величины: масса, средний радиус планеты, момент инерции и число Лява k_2 . Эти данные были обновлены в работе (Konopliv и др., 2020). Модели внутреннего строения Марса (распределение плотности и сейсмических параметров) являются упругими, а реальные недра Марса диссипативны, и приливное число Лява планеты k_2 , так же как и модуль сдвига μ , является функцией частоты. Поэтому необходимо знание неупругих свойств недр планеты на периодах приливной деформации и ЧК. Без учета реологии полученные модельные значения числа Лява k_2 получаются заниженными. Однако распределение вязкости точно не определено даже для Земли, при этом вязкость среды сильно зависит от температуры. Современные исследования (см., например, Hargitay и др., 2010; Čížková и др., 2012) дают интервалы значений вязкости в верхней мантии Земли $\sim 10^{20}$ Па·с, в переходной зоне $\sim 10^{21}–10^{22}$ Па·с, а в нижней $\sim 10^{22}–10^{23}$ Па·с.

Сейсмические данные, полученные в ходе проведения успешного сейсмического эксперимента SEIS (Seismic Experiment for Interior Structure) (Lognonné и др., 2019) на Марсе миссией InSight (Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport) (Banerdt и др., 2020; Giardini и др., 2020; Ceylan и др., 2022; InSight Marsquake Service, 2023), наложили ряд существенных ограничений на модели внутреннего строения планеты. Анализ этих данных предоставил первое прямое сейсмическое измерение толщины коры под посадочным модулем (Knapmeyer-Endrun и др., 2021), который был расположен в северных низменностях, где считается, что кора тоньше, чем в среднем. Сейсмическим данным удовлетворяют две модели: двухслойная, с толщиной коры 20 ± 5 км и с плотностью до 2850 кг/м 3 , и трехслойная, с толщиной коры 39 ± 8 км и с плотностью до 3100 кг/м 3 , эти модели продолжают уточняться. С учетом данных гравитационного поля и топографии установлено, что средняя толщина коры Марса составляет от 32 до 70 км, а средняя плотность не более 3100 кг/м 3 (Wieczorek и др., 2022). Впервые по сейсмическим данным была определена граница марсианского ядра (Stähler и др., 2021) (1830 ± 40 км). В средней мантии на глубине 1006 ± 40 км был обнаружен скачок сейсмических скоростей, что соответствует ожидаемой глубине и резкости постоливинового перехода

(Huang и др., 2022). Марсианская мантия более богата железом, чем земная, и обе планеты имеют одинаковую потенциальную температуру 1605 ± 100 К. Разброс значений скоростей в мантии в результате инверсии сейсмических данных можно найти в работе (Khan и др., 2021).

Анализ сейсмических данных, зарегистрированных на Марсе после удара метеорита, произошедшего в декабре 2021 года (Samuel и др., 2023), несколько изменил представление о внутренней структуре планеты и привел к выводу о наличии расплавленного силикатного слоя у основания марсианской мантии, над металлическим ядром. Наличие расплавленного слоя приводит к более низким сейсмическим скоростям на этой глубине. Эта область сильно диссипативна, а твердая часть мантии над этим слоем является более жесткой и менее ослабляет сейсмические сигналы, как и предполагал ранее анализ волн, связанных с сейсмическими событиями небольшой величины. Наличие этого расплавленного слоя в основании мантии указывает на то, что металлическое ядро на $150–170$ км меньше (т.е. радиус ядра Марса составляет 1650 ± 20 км) и на $5–8\%$ плотнее (т.е. 6500 кг/м 3), чем давали предыдущие сейсмические оценки.

План статьи следующий. Сначала будут построены упругие модели внутреннего строения Марса, удовлетворяющие всем имеющимся данным. Затем, используя реологию Андраде, для пробных значений вязкости в недрах Марса мы рассчитали модельные числа Лява с учетом вязкоупругости, и продемонстрировано, как учет неупругости мантии влияет на значения числа Лява k_2 и период ЧК.

УПРУГИЕ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ МАРСА

Модели внутреннего строения рассчитываются по геодезическим параметрам (масса и средний радиус планеты, момент инерции, число Лява k_2) и данным, полученным в ходе сейсмического эксперимента на Марсе (толщина и плотность коры, радиус ядра). Значение нормализованного момента инерции составляет 0.3640 ± 0.0006 , $k_2 = 0.174 \pm 0.008$, средняя толщина коры $32–70$ км со средней плотностью не более 3100 кг/м 3 (Wieczorek и др., 2022), радиус марсианского ядра 1830 ± 40 км (Stähler и др., 2021), 1650 ± 20 км (Samuel и др., 2023). Геодезические данные и значения, полученные из анализа сейсмических данных, представлены в табл. 1.

За нулевое приближение для мантии Марса в данной работе мы принимаем модель минералогического состава DW (Dreibus, Wänke, 1985), которая не устарела и выдержала испытание временем (Taylor, 2013). Построение упругой модели внутреннего строения Марса выполнено по методу, изложенному в работе (Жарков, Гудкова, 2005). Толщина коры полагается равной 50 км, что соответствует значению, полученному по сейсмическим данным. Базовый профиль распределения плотности в мантии находится по экспериментальным данным, полученным в работах (Bertka, Fei, 1997; 1998), где авторы подвергали образцы, соответствующие химическому составу DW, условиям, которые предположительно существуют в недрах Марса.

Для расчета чисел Лява численно решается система из шести дифференциальных уравнений первого порядка, часто называемая “системой y_{in} ”, с граничными условиями на поверхности планеты и на границе ядро-мантия (Alterman и др., 1959; Молоденский, 2001). Система уравнений сводится к безразмерным переменным и решается методом Рунге–Кутта четвертого порядка (см., например, Michel, Boy, 2022).

Значение числа Лява k_2 , приведенное в табл. 1, включает в себя как упругую, так и неупругую составляющую, а рассчитанные модели внутреннего строения являются априори упругими. Величина вклада неупругости, полученная в работе (Жарков, Гудкова, 2005), составляет около 0.005. С учетом этой оценки поправки за неупругость результат отбора моделей представлен на рис. 1.

Варьируемыми параметрами моделей являются: железистое число мантии $Fe\#$ ($Fe\# = Fe^{+}/(Fe^{2+}+Mg) \times 100$), которое составляет 18–25, плотность и радиус ядра, плотность коры. На графике точками обозначены отдельные модели, варьируются плотность коры и ядра. Границы допустимых значений среднего нормированного момента инерции I/MR^2 и числа Лява k_2 показаны толстыми линиями, а линии средних значений плотности коры и ядра – тонкими. На рис. 1 представлен результат отбора моделей с железистым числом $Fe\# = 18–25$. Как можно заметить, модели с железистым числом $Fe\# = 25$, которые одновременно удовлетворяют наблюдаемым значениям момента инерции I и числа Лява k_2 , имеют слишком низкую плотность коры $\rho_{кора} = 2100–2300 \text{ кг}/\text{м}^3$. Отметим, что модели с $Fe\# = 20$ и $Fe\# = 18$ удовлетворяют допустимым значениям плотности коры. Кроме того, они также попадают в интервал допустимых значений радиуса ядра $r_{ядра} = 1830 \pm 40 \text{ км}$.

На рис. 2 приводятся модельные распределения плотности, давления, температуры и скоростей продольных и поперечных сейсмических волн как функции радиуса планеты. Модельное значение числа Лява k_2 с принятой поправкой на неупругость около 0.005, полученной в работе (Жарков, Гудкова, 2005), удовлетворяет значению из (Konopliv и др., 2020).

Далее, используя реологию Андраде, для пробных значений вязкости в недрах Марса, получим модельные оценки вклада неупругой части в число Лява k_2 с учетом вязкоупругости.

Таблица 1. Данные наблюдений для Марса

Параметр	Значение	Источник
Масса Марса, M (кг)	6.4185×10^{23}	Konopliv и др., 2020
Средний радиус Марса, R (км)	3389.5	
Средний момент инерции I/MR^2	0.3640 ± 0.0006	
Число Лява, k_2	0.174 ± 0.008	
Главные моменты инерции		
A/MR^2	0.362976	Konopliv и др., 2020
B/MR^2	0.363229	
C/MR^2	0.365067	
Угловая скорость вращения Марса $\omega, 10^5 (\text{с}^{-1})$	7.088191	Lemoine и др., 2001; Yuan и др., 2001
$T = 2\pi/\omega (\text{с})$	8.8643×10^4	
Толщина коры, $l_{кора}$ (км)	24–70	Knapmeyer-Endrun и др., 2021; Wieczorek и др., 2022
Средняя плотность коры, $\rho_{кора}$ ($\text{кг}/\text{м}^3$)	2700–3100	
Радиус ядра, $r_{ядра}$ (км)	1830 ± 40	
Период чандлеровского колебания (дни)	1650 ± 20	Stähler и др., 2021 Samuel и др., 2023
	206.9 ± 0.5	Konopliv и др., 2020

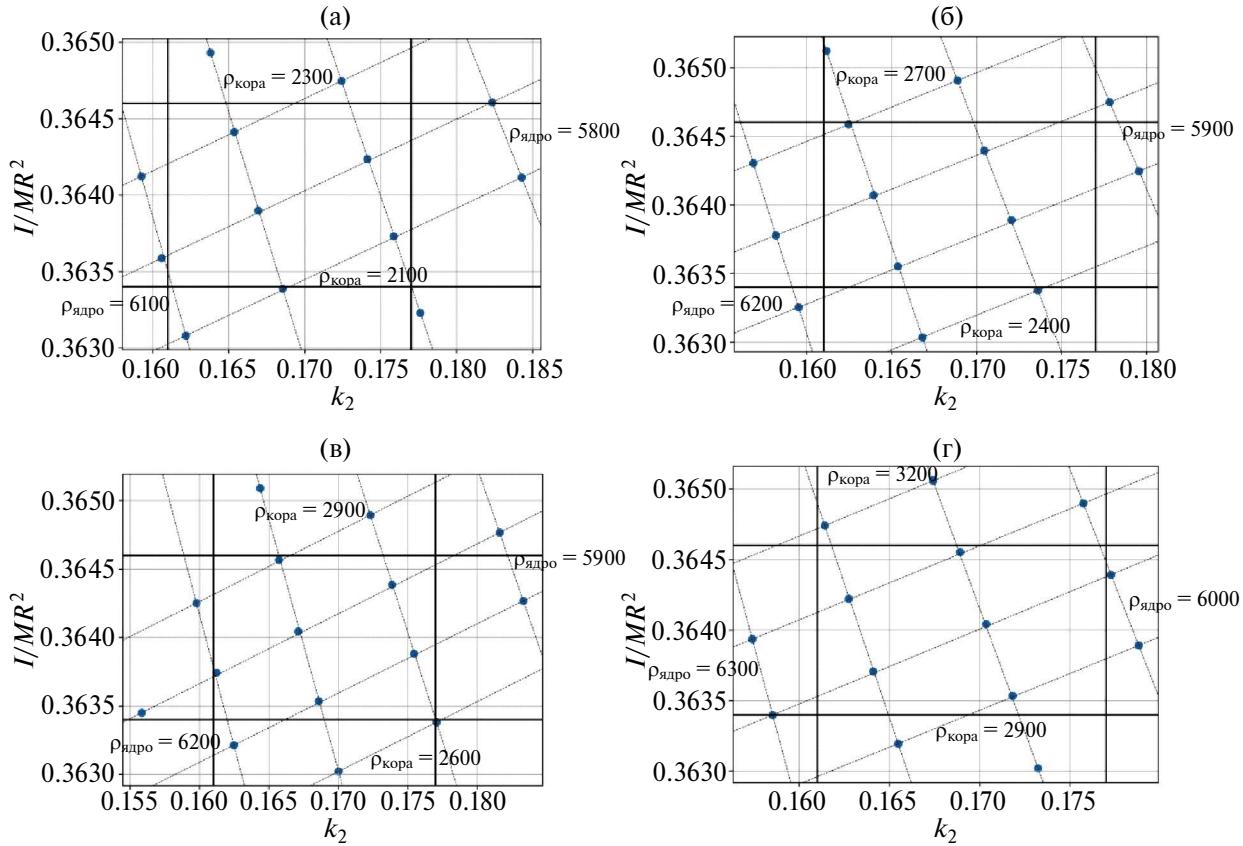


Рис. 1. Отбор моделей внутреннего строения Марса (поправка за неупругость для числа Лява k_2 принята равной 0.005): по оси X – модельные значения числа Лява k_2 , по оси Y – модельные значения среднего нормированного момента инерции. Горизонтальные сплошные линии указывают на интервал допустимых значений момента инерции, вертикальные сплошные линии – предельные значения наблюдаемых значений числа Лява k_2 . Тонкие наклонные линии – средние значения плотности коры и ядра в $\text{кг}/\text{м}^3$. Варьируемое железистое число в мантии Марса ($\text{Fe}\# = 18–25$) составляет: (а) – 25; (б) – 22; (в) – 20; (г) – 18.

УЧЕТ НЕУПРУГОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛИ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ МАРСА

Как отмечено выше, реологическое поведение мантийных пород на приливных периодах частотно зависимо. Реология Максвелла плохо описывает поведение оливинов и других минералов, присутствующих как в мантии Земли, так и в других телах Солнечной системы (см., например, Gribb, Cooper, 1998; Jackson, Faul, 2010; Jackson, 2015). Считается, что для описания вязкоупругого поведения недр планет и спутников больше всего подходит реология Андраде (Castillo-Rogez и др., 2011; Bierson, Nimmo, 2016; Renaud, Henning, 2018; Bagheri и др., 2022). Поэтому для учета неупругости в недрах Марса мы будем использовать реологию Андраде.

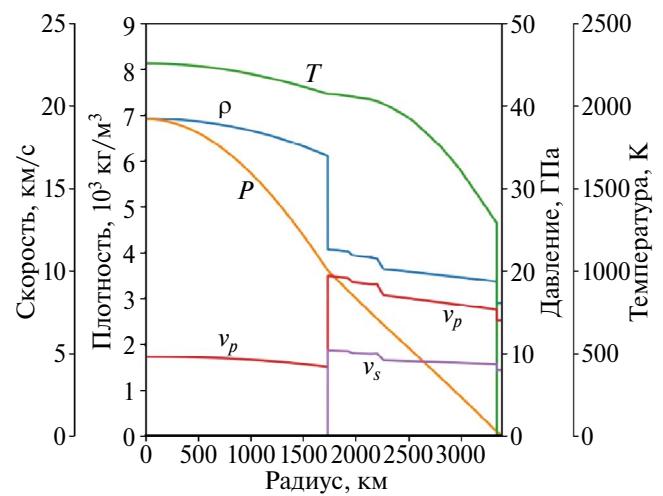


Рис. 2. Плотность ρ , давление P , температура T и сейсмические скорости V_p и V_s в зависимости от радиуса для одной из тестовых моделей Марса.

При описании вязкоупругой реологии Андраде, комплексный модуль сдвига \tilde{J} равен $1/\tilde{J}$, где \tilde{J} называется “комплексная податливость материала” (complex compliance) и задается формулой (Castillo-Rogez и др., 2011)

$$\tilde{J}(\chi) = J[1 + (i\tau_M \chi)^{-\alpha} \Gamma(1 + \alpha)] - \frac{i}{\eta \chi}, \quad (1)$$

$J = 1/\mu, \tau_M = \eta/\mu$ – время Максвелла, χ – частота прилива, Γ – гамма-функция и α – параметр Андраде.

Проблема в том, что параметр Андраде α точно не определен, и обычно принимается равным 0.2–0.5 (Gribb, Cooper, 1998; Castillo-Rogez и др., 2011), при этом для мантийного вещества часто используется $\alpha = 0.3$.

Модели внутреннего строения Марса, построенные выше, упругие. Без учета реологии модельные значения числа Лява k_2 получаются заниженными.

Для учета неупругих свойств планеты рассмотрим многослойную модель с кусочно-постоянным распределением вязкости. Поскольку значения вязкости в недрах Марса точно не определены, в качестве пробных значений примем величины из модели Земли PREM (Dziewonski, Anderson, 1981) с некоторым разбросом. В качестве параметра данной модели положим вязкость коры со значением η_0 .

- В коре вязкость положим равной параметру модели η_0 ,
- в верхнем слое мантии (оливин-содержащий слой) $-10^{-2}\eta_0$,
- в среднем слое мантии (β -слой) $-10^{-1}\eta_0$,
- в нижнем слое мантии (γ -слой) $-\eta_0$.

В расплавленном слое, недавно обнаруженному над границей ядро-мантия (Samuel и др., 2023), примем вязкость равной $10^9 \text{ Па} \times \text{с}$, что отвечает неупругому состоянию. Толщину данного слоя примем равной 200 км, в соответствии с полученными данными. Считаем, что вязкость ядра равна нулю.

Распределение диссипативного фактора для одного из пробных распределений вязкости с параметром модели $\eta_0 = 10^{22} \text{ Па} \times \text{с}$ и со значением параметра Андраде $\alpha = 0.3$ показано на рис. 3.

Неупругость мантии определяет не только запаздывание приливов и величину затухания чандлеровского движения, но и вносит поправку в значение чисел Лява и период чандлеровского колебания. Выше, при решении системы “ y_{in} ” для расчета приливных чисел Лява считалось, что планета является идеально упругим телом, что не соответствует реальности.

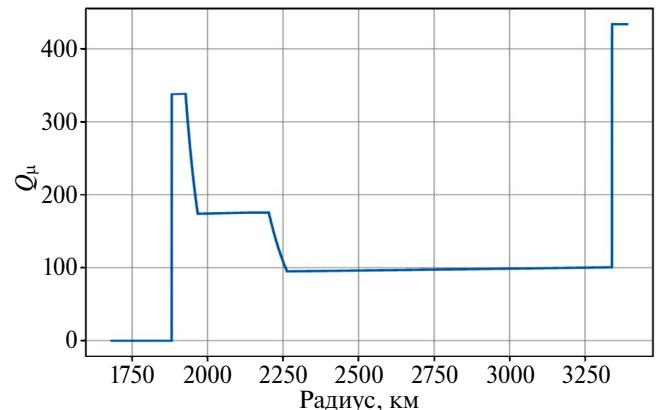


Рис. 3. Распределение диссипативного фактора Q_μ в недрах Марса для тестовой многослойной неупругой модели при значениях параметра Андраде $\alpha = 0.3$ и параметра модели $\eta_0 = 10^{22} \text{ Па} \times \text{с}$.

Обычно переход к неупругой среде сопровождается заменой действительного модуля сдвига комплексным модулем, и так как число Лява k является функционалом от модуля сдвига, то частотно-зависимые числа Лява выражаются в комплексной форме $\delta k = \text{Re}(\delta k) + i\text{Im}(\delta k)$, где $\text{Re}(\delta k)$, $\text{Im}(\delta k)$ – реальная и мнимая части. В системе уравнений для расчета чисел Лява вводится комплексная форма модуля сдвига и коэффициента Ламе в соответствии с формулой реологии Андраде. Для численного решения полученной системы написана программа на языке Python.

На рис. 4 показан вклад в число Лява k_2 за счет неупругости мантии Марса для интервала тестовых значений параметра η_0 и разных значений параметра Андраде α . Как видно на рис. 4, принятый тестовый интервал неопределенности в распределении вязкости и значений параметра Андраде α (0.2–0.5) приводят к большому разбросу возможных значений чисел Лява при учете неупругости в модели внутреннего строения. Поправка за неупругость в модельное число Лява k_2 может доходить до 0.014 в зависимости от принимаемой вязкости недр и модели реологии (параметра Андраде).

Рис. 5 демонстрирует отбор моделей внутреннего строения Марса с учетом неупругости для разных значений железистого числа мантии $Fe\#$ и параметра Андраде. На каждом отдельном графике модели отличаются значениями вязкости в мантии и содержанием FeS в ядре. На самом деле в ядре Марса входит не только сера, но и другие легкие элементы. Отметим, что

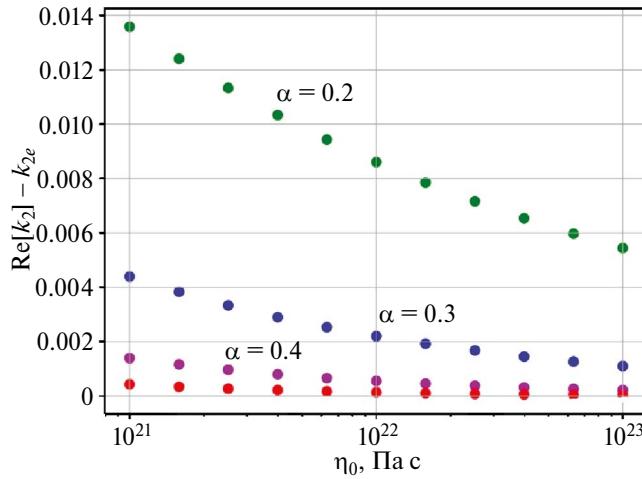


Рис. 4. Отклонение реальной части числа Лява k_2 от упругого значения в зависимости от распределения вязкости и значения параметра Андраде α для тестовой многослойной неупругой модели (в коре вязкость принята η_0 , в оливиновой мантии $10^{-2}\eta_0$, в слое $\beta = 10^{-1}\eta_0$, в слое $\gamma = \eta_0$). Цветом показаны модели с разными значениями параметра α : зеленым $\alpha = 0.2$, синим $\alpha = 0.3$, фиолетовыми $\alpha = 0.4$ и красным $\alpha = 0.5$.

целью данной работы не был подбор конкретного состава ядра, поэтому модельный состав ядра можно считать гипотетическим. Реальное содержание FeS в модели должно быть меньше, и частично заменено на кислород, углерод и водород.

Для моделей с железистым числом в мантии Марса $Fe\# = 21$, удовлетворяющих наблюдаемым значениям чандлеровского периода и числа Лява k_2 , возможные значения вязкости составляют от $\eta_0 = 10^{18}$ Па·с и выше, вплоть до чисто упругой модели; для $Fe\# = 23$ параметр $\eta_0 = 10^{16.5}$ Па·с и выше; для $Fe\# = 25$ параметр вязкости η_0 лежит в интервале $10^{16.4} - 10^{19.6}$ Па·с. Мы предполагаем, что значения вязкости в мантии меньше, чем 10^{15} Па·с (что соответствует $\eta_0 = 10^{17}$ Па·с), не подходят по физическим соображениям: при этих значениях упругие свойства минералов пропадают. Следовательно, многие модели с железистым числом в мантии $Fe\# = 23$ и 25 не подходят, исходя из этого ограничения.

ЧАНДЛЕРОВСКИЙ ПЕРИОД

Любое осесимметричное твердое тело обладает собственной частотой свободной нутации

(эйлеровской частотой), которая определяется из теории свободного вращения твердого тела по формуле (Ландау, Либшиц, 1988)

$$\sigma = \frac{C - \bar{A}}{\bar{A}} \omega, \quad (2)$$

где A , B и C – главные моменты инерции планеты, $\bar{A} = (A + B)/2$, ω – угловая скорость вращения.

В случае жесткого слаботрехосного эллипсоида вращения (Zharkov, Molodensky, 1996)

$$\sigma = \omega (\pm^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

где $\alpha = (C - B)/A$, $\beta = (C - A)/B$.

Для значения эйлеровского периода в двухосной модели Марса $T_E = \frac{2\pi}{\sigma}$ получаем 189.63 дней (в трехосной 190.02 дней). Но Марс не является абсолютно жестким телом. Он обладает упругими и неупругими свойствами. Наличие жидкого ядра также вносит поправку в значения эйлеровской частоты. В работе (Молоденский, 1961) было показано, что частота чандлеровского колебания σ_w для планеты с жидким ядром и упругой оболочкой может быть рассчитана с достаточной точностью по формуле

$$\sigma_w = \frac{C - \bar{A}}{\bar{A} - \bar{A}_c} \left(1 - \frac{k}{k_0} \right) \omega, \quad (4)$$

где $\bar{A}_c = (A_c + B_c)/2$ – момент инерции жидкого ядра, A_c , B_c – главные моменты инерции жидкого ядра, k – число Лява, k_0 – так называемое вековое (или секулярное) число Лява, которое определяет упругие деформации при условии полной релаксации сдвиговых напряжений в мантии планеты (другими словами, соответствует модели целиком жидкой планеты с теми же распределениями плотности и модулей объемного сжатия, что для реальной планеты).

Значение k_0 определяется как

$$k_0 = \frac{3G(C - \bar{A})}{R^5 \omega^2}, \quad (5)$$

где R – средний радиус планеты, $G = 6.672 \times 10^{-11}$ Н·м²·кг⁻² – гравитационная постоянная.

Кроме этого, из-за гигантского поднятия Фарсида более правильно моделировать Марс как слаботрехосный эллипсоид, и поправка за трехосность Марса составляет значимую величину, которую следует учитывать (Жарков, Молоденский, 1995). Период чандлеровского колебания для трехосного упругого тела с жидким

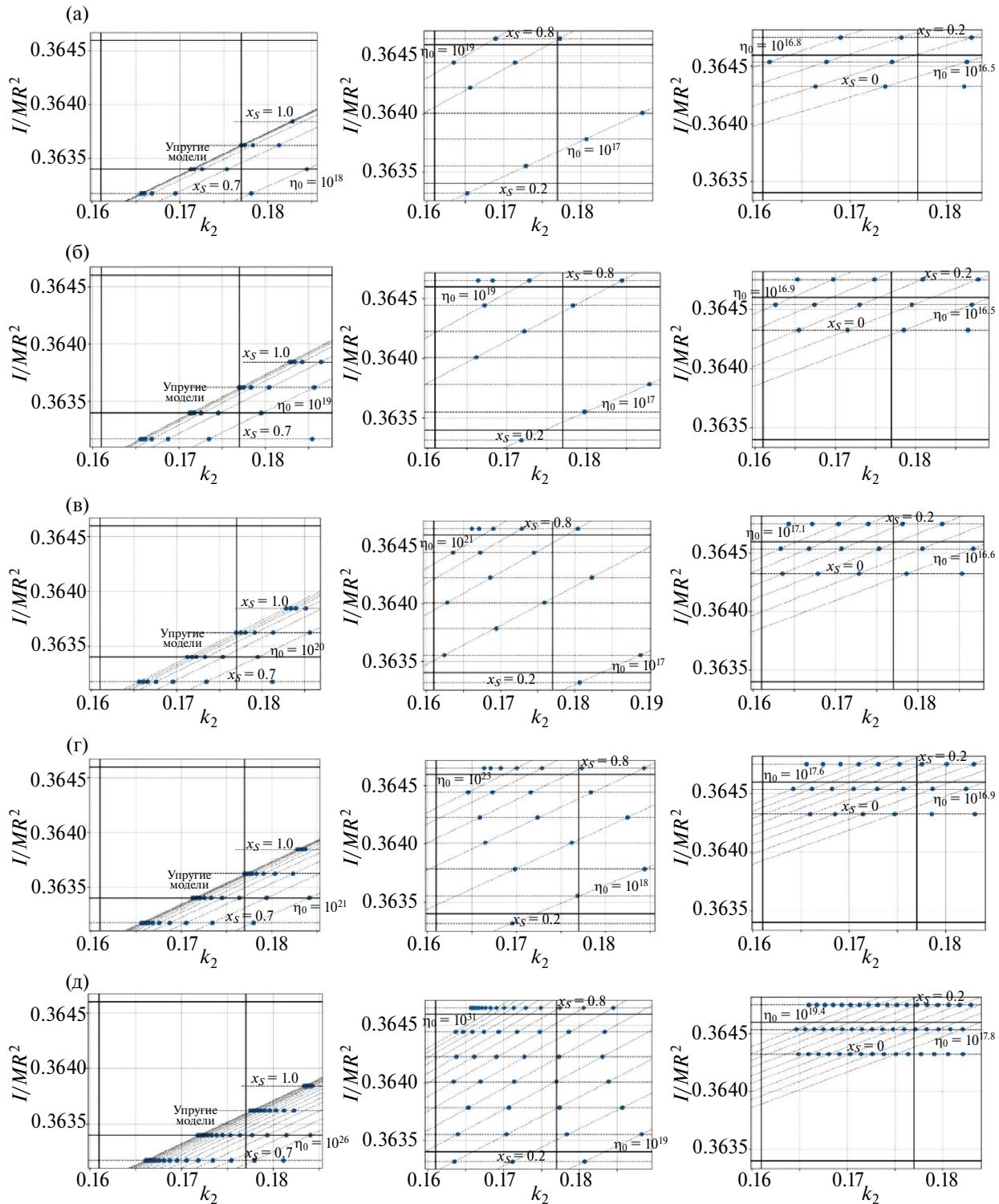


Рис. 5. Отбор моделей внутреннего строения Марса по моменту инерции и числу Лява k_2 с учетом неупругости для разных значений железистого числа мантии $Fe\#$ (колонки 1 – $Fe\# = 21$, 2 – $Fe\# = 23$, 3 – $Fe\# = 25$) и параметра Андраде α ((а) – 0.5; (б) – 0.4; (в) – 0.3; (г) – 0.2; (д) – 0.1). Точками изображены отдельные модели. По оси X – модельные значения числа Лява k_2 , по оси Y – модельные значения среднего нормированного момента инерции. Горизонтальные толстые линии указывают на интервал допустимых значений момента инерции, вертикальные толстые линии – предельные значения наблюдаемых значений числа Лява k_2 . Наклонные тонкие линии отражают значения вязкости ($\text{Па} \times \text{с}$) с шагом 1 в значениях степеней для колонок 1 и 2, и с шагом 0.1 для колонки 3. Горизонтальные тонкие линии соответствуют изменению содержания серы в ядре (молекулярная доля) от $x_S = 0$ (состав ядра –Fe) до $x_S = 1$ (FeS) с шагом 0.1. На тонких горизонтальных и наклонных линиях проставлены крайние значения.

ядром задается формулой (Zharkov, Gudkova, 2009)

$$T_w = T_E \left(1 - \frac{(A_c B_c)^{1/2}}{(AB)^{1/2}} \right) / (1 - k / k_0), \quad (6)$$

где T_E – эйлеровский период, k – число Лява с учетом зависимости от частоты (число Лява для неупругой модели).

Если принять эллиптичность Марса гидростатической на границе ядро-мантия, тогда значение момента инерции для ядра получается из уравнения Клеро, т.е. определяется по профилю плотности. Эффекты отклонения границы ядро-мантия от состояния гидростатического равновесия изучались в работах (Zharkov и др., 2009; Wieczorek и др., 2019). В работе (Wieczorek и др., 2019) было отмечено, что несоответствие негидростатического Марса в целом и гидростатически равновесной границы ядро-мантия незначительно.

Чандлеровский период – еще один параметр, полученный из данных наблюдений, который служит дополнительным ограничением на распределение упругих параметров в недрах планеты. Он представляет собой меру деформации тела на длинных периодах, и его значение определяется главным образом температурой, реологией и составом мантии. Рассмотрим влияние эффектов неупругости мантии на модельные значения чандлеровского периода Марса.

Неупругое поведение мантии уменьшает ее жесткость и приводит к увеличению числа Лява k_2 и периода ЧК. Одной из неопределенностей при расчете периода ЧК Марса служит неопределенность параметров реологической модели. Для согласования наблюдаемого периода ЧК Земли с рассчитанным теоретическим значением при учете неупругости Земли (Smith, Dahlen, 1981; Молоденский, Жарков, 1982; Zharkov и др., 1996) показатель степени в законе неуставновившейся ползучести принимался равным 0.15. Оценки периода ЧК, основанные на степенном законе, который обычно принимается для прилива твердой Земли, для хондритовой

модели Марса были выполнены нами в (Kulik, Gudkova, 2022). Согласно полученным модельным оценкам, для значения периода около 206 дней требовалось использование показателя степени 0.4, что выше, чем принято для Земли. Выбор этого значения в степенной функции ползучести остается открытым вопросом. Оценка для Марса составляет 0.07–0.35 в (Konopliv и др., 2020) и 0.09–0.35 в (Harada, 2022). В работе (Kulik, Gudkova, 2022) было показано, что при значениях 0.15–0.2 существует расхождение между модельными и экспериментальными значениями чандлеровского периода для моделей этого типа, если не делать дополнительных допущений для модели внутреннего строения. Одной из возможностей удовлетворить наблюдаемому значению периода ЧК при значениях 0.15–0.2 было введение частично расплавленного слоя в нижней части мантии (около 200 км), что, как оказалось позже, не противоречит данным, полученным в ходе сейсмического эксперимента.

Из формулы (6) видно, что период ЧК зависит как от момента инерции ядра, так и от числа Лява k_2 на чандлеровском периоде. Изменение радиуса ядра дает двойной эффект. Большое ядро приводит к большей деформации, или большему k_2 , и, следовательно, могло бы привести к большему периоду ЧК. Но, в то же время, при увеличении радиуса ядра становится больше и момент инерции ядра, что ведет к уменьшению значения периода ЧК. Периоды ЧК для ряда моделей с учетом неупругости, показанных на рис. 5, приведены в табл. 2. Модели с $Fe\# = 23$ и 25 не приведены, для большинства из них чандлеровский период получился завышенным, что объясняется слишком низким значением вязкости в моделях, которое вряд ли может быть реализовано в реальной планете. На основании проделанного численного моделирования можно сделать вывод, что ограничению на чандлеровский период удовлетворяют модели с $Fe\# = 21$. Для указанных моделей значения вязкости составляют 10^{22} Па×с и выше.

Таблица 2. Оценки периода чандлеровского колебания T_w для ряда моделей внутреннего строения Марса, удовлетворяющих наблюдаемым данным по моменту инерции и числу Лява k_2

Fe#	$R_{\text{ядро}}, \text{км}$	$T_w, \text{сут.}$				
		Параметр Андраде				
		$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$
21	1654–1734	206.0–209.4	205.9–211.0	205.9–215.6	205.9–232.6	205.9–233.9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из задач исследования внутреннего строения Марса связана с космогоническим аспектом проблемы – насколько модель Марса может быть использована для подтверждения или опровержения фундаментальной гипотезы о хондритовом составе планет земной группы. Выше было исследовано, можно ли модели внутреннего строения Марса с минерологией Dreibus и Wanke (DW) согласовать с экспериментальным значением чандлеровского периода.

В настоящей работе модели внутреннего строения Марса были построены на основе метода, изложенного в работе (Жарков, Гудкова, 2005), при этом значения толщины коры и радиус ядра контролировались по данным сейсмического эксперимента. Наблюдаемым данным удовлетворяют упругие модели со значениями $Fe\# = 20$ и $Fe\# = 18$ в мантии Марса и значениями плотности в коре $\rho_{\text{кора}} = 2700–3100 \text{ кг}/\text{м}^3$. Для учета неупругости недр использовалась модель Андраде. При изменении параметров Андраде от значений $\alpha = 0.5$, $\eta_0 = 10^{23} \text{ Па}\times\text{с}$ до $\alpha = 0.2$, $\eta_0 = 10^{21} \text{ Па}\times\text{с}$ вклад неупругости в число Лява k_2 вырастает от нуля до 0.014. Для наиболее часто используемого значения $\alpha = 0.3$ и $\eta_0 = 10^{21} \text{ Па}\times\text{с}$ вклад неупругости составляет 0.005, что соответствует оценкам из работы (Жарков, Гудкова, 2005).

В нашем предыдущем исследовании (Kulik, Gudkova, 2022) было отмечено, что модели с минерологией DW могут быть согласованы с экспериментальным значением чандлеровского периода, если в нижней части мантии присутствует частично расплавленный слой, что не противоречит данным сейсмического эксперимента. Однако параметры неупругости не определены точно, и в данной работе был исследован вопрос – как выбор реологического параметра Андраде и распределение вязкости в мантии Марса влияет на значение периода чандлеровского колебания. Для ряда тестовых моделей внутреннего строения рассчитаны значения чандлеровского периода. Значения чандлеровского периода для моделей с $Fe\# = 23$ и 25 получились завышенными, что связано с нереально низкими значениями вязкости в этих моделях. Лучше всего удовлетворяют наблюдаемому значению чандлеровского периода модели с $Fe\# = 21$.

Результаты проведенного численного моделирования показывают, что требуется дальнейшее подробное исследование влияния реологических параметров и минералогического состава

мантии Марса на значения числа Лява и чандлеровского колебания. Это могло бы значительно улучшить наше понимание поведения реологии мантии Марса на длинных периодах.

Работа выполнена за счет темы госзадания ИФЗ им О.Ю. Шмидта РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жарков В.Н., Гудкова Т.В. О диссипативном факторе недр Марса // Астрон. вестн. 1993. Т. 27. № 4. С. 3–15. (Zharkov V.N., Gudkova T.V. Dissipative factor of the interiors of Mars // Sol. Syst. Res. 1993. V. 27. P. 3–15.)
2. Жарков В.Н., Молоденский С.М. Об определении физических параметров ядра Марса по данным о его вращении // Астрон. вестн. 1994. Т. 28. № 4–5. С. 86–97. (Zharkov V.N., Molodenksky S.M. On determination of physical parameters of the Martian core by data of its rotation // Sol. Syst. Res. 1994. V. 28. P. 86–97.)
3. Жарков В.Н., Молоденский С.М. Чандлеровский период слаботрехосных моделей Марса // Астрон. вестн. 1995. Т. 29. № 4. С. 341–344. (Zharkov V.N., Molodenksii S.M. Chandler's period of weakly triaxial models of Mars // Sol. Syst. Res. 1995. V.29. № 4. P. 341–344.)
4. Жарков В.Н., Гудкова Т.В. Построение модели внутреннего строения Марса // Астрон. вестн. 2005. Т. 39 (5). С. 387–418. (Zharkov V.N., Gudkova T.V. Construction Of Martian interior model // Sol. Syst. Res. 2005. V. 39 (5). P. 343–373.)
5. Жарков В.Н. Физика земных недр. М.: ООО Наука и образование, 2012. 386с.
6. Жарков В.Н., Гудкова Т.В., Батов А.В. О диссипативном факторе недр Марса // Астрон. вестн. 2017. Т. 51 (6). С. 512–523. (Zharkov V.N., Gudkova T.V., Batov A.V. On estimating the dissipative factor of the Martian interior // Sol. Syst. Res. 2017. V. 51 (6). P. 479–490.)
8. Ландау Л.Д., Лишинец Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.
9. Молоденский М.С. Теория нутации и суточных земных приливов // Земные приливы и нутация Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 3–25.
10. Молоденский С.М., Жарков В.Н. О чандлеровском колебании и частотной зависимости Q_μ мантии Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 4. С. 3–16.
11. Молоденский М.С. Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Земли. М.: Наука, 2001. 569 с.

12. Молоденский С.М. Приливы и нутация Земли. I. Модели Земли с неупругой мантией и однородным невязким жидким ядром // Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 6. С. 542–558. (*Moloden-sky S. M. Tides and Nutation of the Earth: I. Models of an Earth with an Inelastic Mantle and Homoge-neous, Inviscid, Liquid Core* // Sol. Syst. Res. 2004. V.38. № 6. P. 476–490.)
13. Alterman Z., Jarosch H., Pekeris C.L. Oscillations of the Earth // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1959. V. 252 (1268). P. 80–95.
14. Anderson D.L., Minster J.B. The frequency dependence of Q in the Earth and implications for mantle rheology and Chandler wobble // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1979. V. 58. P. 431–440.
15. Bagheri A., Khan A., Al-Attar D., Crawford O., Giardini D. Tidal response of Mars constrained from laboratory-based viscoelastic dissipation models and geophysical data // J. Geophys. Res.: Planets. 2019. V. 124. P. 2703–2727.
16. Bagheri A., Efroimsky M., Castillo-Rogez J., Goossens S., Plesa A.-C., Rambaux N., Rhoden A., Walterova M., Khan A., Giardini D. Tidal insights into rocky and icy bodies: An introduction and overview // Adv. Geophys. 2022. V. 63. Ch. 5. P. 231–320.
17. Banerdt W.B., Smrekar S.E., Banfield D., Giardini D., Golombek M., Johnson C.L., Lognonné P., Spiga A., Spohn T., Perrin C., and 59 co-authors. Initial results from the InSight mission on Mars // Nature Geosci. 2020. V. 13. C. 183–189.
18. Bertka C.M., Fei Y. Mineralogy of the Martian interior up to core-mantle boundary pressures // J. Geophys. Res. 1997. V. 102 (3). P. 5251–5264.
19. Bertka C.M., Fei Y. Density profile of an SNC model Martian interior and the moment-of-inertia factor of Mars // Earth and Planet. Sci. Lett. 1998. V. 157. P. 79–88.
20. Bierson C.J., Nimmo F. A test for Io's magma ocean: Modeling tidal dissipation with a partially molten mantle // J. Geophys. Res. 2016. V. 121. P. 2211–2224.
21. Castillo-Rogez J.C., Efroimsky M., Lainey V. The tidal history of Japetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model // J. Geophys. Res.: Planets. 2011. V. 116. Id. E9.
22. Ceylan S., Clinton J.F., Giardini D., Stähler S.C., Horleston A., Kawamura T., Böse M., Charalambous C., Dahmen N.L., van Driel M., and 17 co-authors. The Marsquake catalogue from InSight, sols 0–1011 // Phys. Earth and Planet. Inter. 2022. V. 333 (3). P. 106943.
23. Chandler S. On the variation of latitude // Astron. J. 1891. V. 11. P. 83.
24. Čížková H., van den Berg A.P., Spakman W., Matyska C. The viscosity of Earth's lower mantle inferred sinking speed of subducted lithosphere // Phys. Earth and Planet. Inter. 2012. V. 200. P. 56–62.
25. Dehant V., Van Hoolst T., de Viron O., Greff-Lefftz M., Legros H., Defraigne P. Can a solid inner core of Mars be detected from observations of polar motion and nutation of Mars? // J. Geophys. Res.: Planets. 2003. V. 108(12). P. 5127.
26. Dehant V., de Viron O., Karatekin O., Van Hoolst T. Excitation of Mars polar motion // Astron. and Astrophys. 2006. V. 446. P. 345–355.
27. Dreibus G., Wanke H. Mars, a volatile-rich planet // Meteoritics. 1985. V. 20. P. 367–381.
28. Dziewonski A.M., Anderson Don L. Preliminary reference Earth model // Phys. Earth and Planet. Inter. 1981. V. 25 (4). P. 297–356.
29. Giardini D., Lognonné P., Banerdt W.B., Pike W.T., Christensen U., Ceylan S., Clinton J., van Driel M., Stähler S., Böse M., and 54 co-authors. The seismicity of Mars // Nature Geosci. 2020. V. 13. № 3. P. 205–212.
30. Gribb T.T., Cooper R.F. Low-frequency shear attenuation in polycrystalline olivine: Grain boundary diffusion and the physical significance of the Andrade model for viscoelastic rheology // J. Geophys. Res.: Solid Earth. 1998. V. 103. № B11. P. 27267–27279.
31. Harada Y. Reconsideration of the anelasticity parameters of the Martian mantle: Preliminary estimates based on the latest geodetic parameters and seismic models // Icarus. 2022. V. 383. Id. 114917.
32. Harig C., Zhong S., Simons F.J. Constraints on upper mantle viscosity from the flow-induced pressure gradient across the Australian continental keel // Geochem., Geophys., Geosyst. 2010. V. 11. Id. Q06004. DOI: 10.1029/2010GC00303.
33. Huang Q., Schmerr N.C., King S.D., Kim D., Rivoldini A., Plesa A.-C., Samuel H., Maguire R.R., Karakostas F., Lekić V., and 29 co-authors. Seismic detection of a deep mantle discontinuity within Mars by InSight // PNAS. 2022. V. 119 (42). Id.e2204474119. InSight Marsquake Service. Mars Seismic Catalogue, InSight Mission 2023. V. 14 2023-04-01. ETHZ, IPGP, JPL, ICL, Univ. Bristol. <https://doi.org/10.12686/a21>
34. Jackson I., Faul U.H. Grainsize-sensitive viscoelastic relaxation in olivine: Towards a robust laboratory-based model for seismological applications // Phys. Earth and Planet. Inter. 2010. V. 183. P. 151–164.
35. Jackson I. Properties of rock and minerals-physical origins of anelasticity and attenuation in rock // Treatise on Geophysics (Second Edition). Amsterdam: Elsevier, 2015. V. 2. P. 539–571.
36. Khan A., Liebske C., Rozel A., Rivoldini A., Nimmo F., Connolly J.A.D., Plesa A.C., Giardini D. A geophysical perspective on the bulk composition of Mars // J. Geophys. Res.: Planets. 2018. V. 123. P. 575–611.

37. Khan A., Ceylan S., van Driel M., Giardini D., Lognonné P., Samuel H., Schmerr N.C., Stähler S.C., Duran A.C., Huang Q., and 20 co-authors. Upper mantle structure of Mars from InSight seismic data // Science. 2021. V. 373. P. 434–438.
38. Knapmeyer-Endrun B., Panning M.P., Bissig F., Joshi R., Khan A., Kim D., Lekic V., Tauzin B., Tharimena S., Plasman M., and 28 co-authors. Thickness and structure of the Martian crust from insight seismic data // Science. 2021. V. 373. P. 438–443.
39. Konopliv A.S., Yoder C.F., Standish E.M., Yuan D.N., Sjogren W.L. A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris // Icarus. 2006. V. 182. P. 23–50.
40. Konopliv A.S., Asmar S.W., Folkner W.M., Karatekin Ö., Nunes D.C., Smrekar S.E., Yoder C.F., Zuber M.T. Mars high resolution gravity fields from MRO, Mars seasonal gravity, and other dynamical parameters // Icarus. 2011. V. 211. P. 401–428.
41. Konopliv A.S., Park R.S., Rivoldini A., Baland R.M., Le Maistre S., Van Hoolst T., Yseboodt M., Dehant V. Detection of the Chandler wobble of Mars from orbiting spacecraft//Geophys. Res. Lett. 2020. V. 47. Id. e2020GL090568.
42. Kulik G.A., Gudkova T.V. On model values of Chandler wobble period for Mars // The Thirteenth Moscow Sol. Syst. Symp. 2022. IKI RAS. P. 13MS3-MS-16.
43. Lemoine F.G., Smith D.E., Rowlands D.D., Zuber M.T., Neumann G.A., Chinn D.S., Pavlis D.E. An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2b) from Mars Global Surveyor // J. Geophys. Res. 2001. V.106 (E10). P. 23359–23376.
44. Lognonné P., Banerdt W.B., Giardini D., Pike W.T., Christensen U., Lauder P., de Raucourt S., Zweifel P., Calcutt S., Bierwirth M., and 170 co-authors. SEIS: Insight's seismic experiment for internal structure of Mars // Space Sci. Rev. 2019. V. 215:12 (170 pp). <https://doi.org/10.1007/s11214-018-0574-6>
45. Michel A., Boy J.-P. Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects // Geophys. J. Int. 2022. V.228 (2). P. 1191–1212.
46. Pou L., Nimmo F., Rivoldini A., Khan A., Bagheri A., Gray T., Samuel H., Lognonne P., Plesa A.-C., Gudkova T., Giardini D. Tidal constraints on the Martian interior // J. Geophys. Res.: Planets. 2022. V. 127. Id. e2022JE007291.
47. Renaud J.P., Henning W.G. Increased tidal dissipation using advanced rheological models: Implications for Io and tidally active exoplanets //Astrophys. J. 2018. V. 857(2): 98 (29 pp).
48. Samuel H., Drilleau M., Rivoldini A., Xu Z., Huang Q., Garsia R.F., Lekic V., Irving J.C.E., Badro J., Lognonne P.H., Connolly J.A.D., Kawamura T., Gudkova T., Banerdt W.B. Geophysical evidence for an enriched molten silicate layer above Mars's core // Nature. 2023. V. 622. P. 712–717.
49. Smith M. L., Dahlen F. A. The period and Q of the Chandler wobble // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1981. V. 64. P. 223–284.
50. Stähler S.C., Khan A., Banerdt W.B., Lognonné P., Giardini D., Ceylan S., Drilleau M., Duran A.C., Garcia R.F., Huang Q., and 31 co-authors. Seismic detection of the martian core // Science. 2021. V. 373. P. 443–448.
51. Taylor G.J. The bulk composition of Mars // Chem. Erde – Geochem. 2013. V. 73. P. 401–420.
52. Van Hoolst T., Dehant V., Defraigne P. Chandler wobble and free core nutation for Mars // Planet. and Space Sci. 2000. V. 48 (12–14). P. 1145–1151.
53. Yuan D.-N., Sjogren W.L., Konopliv A.S., Kucinskas A.B. Gravity field of Mars: A 75th degree and order model // J. Geophys. Res. 2001. V. 106 (E10). P. 23359–23376.
54. Wänke H., Dreibus G. Chemistry and accretion history of Mars // Philos. Trans. Roy. Soc. A . 1994. V. 349. P. 285–293.
55. Wieczorek M.A., Beuthe M., Rivoldini A., Van Hoolst T. Hydrostatic interfaces in bodies with nonhydrostatic lithospheres//J. Geophys. Res.: Planets. 2019. V.124. P. 1410–1432.
56. Wieczorek M.A., Broquet A., McLennan S.M., Rivoldini A., Golombek M., Antonangeli D., Beghein C., Giardini D., Gudkova T., Gyalay S., and 16 co-authors.
57. InSight constraints on the global character of the Martian crust // J. Geophys. Res.: Planets. 2022. V.127. Id. e2022JE007298.
58. Zharkov V.N., Molodensky S.M. Corrections to Love numbers and Chadler period for anelastic Earth's models // Phys. Solid Earth. 1979. V. 6. P. 88–89.
59. Zharkov V.N., Molodensky S.M. On the Chandler wobble of Mars // Planet. and Space Sci. 1996. V. 44. P. 1457–1462.
60. Zharkov V.N., Molodensky S.M., Brzezinski A., Groten E., Varga P. The Earth and its rotation. Heidelberg: WichmanVerlag, 1996. XIII+501p.
61. Zharkov V.N., Gudkova T.V. On the dissipative factor of the Martian interiors // Planet. and Space Sci. 1997. V. 45. P. 401–407.
62. Zharkov V.N., Gudkova T.V., Molodensky S.M. On models of Mars' interior and amplitudes of forced nutations.1. The effects of deviation of Mars from its equilibrium state on the flattening of the core-mantle boundary// Phys. Earth and Planet. Int. 2009. V. 172. P. 324–334.
63. Zharkov V.N., Gudkova T.V. The period and Q of the Chandler wobble of Mars // Planet. and Space Sci. 2009. V. 57. P. 288–295.