

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.2

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ С РЕЗОНАНСНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ДИПОЛЬНОГО ТИПА

© 2024 г. Н. Г. Канев^{a,b,*}, М. А. Миронов^{a,b}^aАкустический институт им. акад. Н.Н. Андреева, ул. Шверника 4, Москва, 117036 Россия^bМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская 5, стр. 1, Москва, 105005 Россия

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 19.06.2024 г.

Рассмотрена упругая среда с малыми по сравнению с длиной звуковой волны включениями, отличающимися плотностью. Если включения являются резонаторами, одинаково реагирующими на воздействие волн, приходящих с разных направлений, то эффективная плотность среды в некоторой полосе частот становится отрицательной. Если направление дипольного момента резонаторов зафиксировано, то среда с включениями имеет анизотропную эффективную плотность. Получено уравнение Гельмгольца для такой среды, исследовано поле точечного источника.

Ключевые слова: акустические метаматериалы, отрицательная плотность, дипольный резонатор, поляризация

DOI: 10.31857/S0320791924040029 EDN: XFYCKC

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1869 г. Максвелл предложил экзаменационную задачу о колебании атомов в упругой среде эфира [1] и получил решение, из которого следует известная формула Зельмейера, опубликованная в работе 1872 г. [2], для диэлектрической проницаемости непоглощающей среды

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 4\pi N \frac{e^2}{M} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (1)$$

где n — показатель преломления, N — число атомов в единице объема, e и M — их заряд и масса, ω — частота колебаний волн, распространяющихся в эфире, ω_0 — частота свободных колебаний атомов в среде. Формула (1) допускает область частот, в которой показатель преломления отрицателен, а в среде существуют только затухающие волны. Однако в реальных средах из-за механизмов поглощения этот эффект не проявляется, тем не менее формула Зельмейера позволила описать явление аномальной дисперсии света [3].

В начале 2000-х гг. появились композитные искусственные кристаллы, построенные из элементов макроскопического размера и погруженные в однородную среду, при этом характерный период

решетки кристаллов меньше длин волн электромагнитного излучения, обладающих отрицательным коэффициентом преломления [4]. Под термином «метаматериалы» или «метасреды» стали понимать синтетически созданные микронеоднородные структуры, макроскопические свойства которых могут описываться некоторыми эффективными параметрами сплошной среды, имеющими необычные свойства, не встречающиеся в природе у обычных веществ. Несколько позже большинство результатов электродинамики и оптики были распространены на акустику [5].

В качестве одного из первых примеров метасред в акустике можно привести бездиссипативную жидкость, заполненную газовыми пузырьками. Зависимость волнового числа k от частоты ω распространяющейся волны в пузырьковой жидкости имеет вид [6]:

$$k^2 = k^2 + 4\pi NR \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (2)$$

где R — радиус пузырьков, N — их концентрация, $k = \omega/c$ — волновое число среды без пузырьков, c — скорость звука в жидкости, ω_0 — собственная частота радиальных пульсаций пузырька. В некотором

диапазоне частот скорость звука и волновое число становятся комплексными — среда оказывается затертой, волны в ней не распространяются.

Приведенные случаи показывают общие свойства сред с включениями-резонаторами: дисперсия света в среде Максвелла и дисперсия звука в пузырьковой жидкости имеют одинаковые частотные зависимости в окрестности резонанса. Экзаменационную задачу Максвелла, возможно, следует считать первой постановкой задачи о резонаторных метасредах, а пузырьковую жидкость первым акустическим метаматериалом.

Сегодня проводятся интенсивные исследования в области акустических метаматериалов, недавние обзоры [7–10] демонстрируют их преимущества по сравнению с традиционными материалами. Метасреды конструируются из однотипных элементов — метаатомов, имеющих, как правило, резонансные свойства. Метаатомы взаимодействуют друг с другом через среду-носитель, а также могут иметь дополнительно и специфические механизмы взаимодействия. В большинстве исследований в качестве метаатомов применяются резонаторы монопольного типа, гораздо реже резонаторы более высокого порядка мультипольности.

Среды с включениями, отличающимися сжимаемостью, могут быть охарактеризованы эффективной сжимаемостью. Если включения являются резонаторами, то в некотором диапазоне частот эффективная сжимаемость может быть отрицательной. Несжимаемые включения, отличающиеся плотностью, изменяют эффективную плотность среды, которая при некоторых условиях может быть отрицательной. В литературе отмечено [11], что среды с отрицательными сжимаемостью и плотностью могут быть созданы с помощью монопольных и дипольных резонаторов, например, в виде полостей в упругой среде [12], однако существенное отличие между ними не принимается во внимание. Дело в том, что движение монопольных резонаторов возбуждается звуковым давлением, поэтому их влияние на звуковое поле заведомо изотропно. А движение дипольных резонаторов возбуждается градиентом давления, что в общем случае приводит к анизотропии акустических свойств среды с включениями. В настоящей работе исследованы акустические свойства среды с включениями, отличающимися плотностью, которые могут смещаться из положения равновесия под действием звуковой волны и притягиваться к нему под действием силы, пропорциональной

смещению. Механическое устройство дипольных резонаторов рассмотрено в работах [13, 14].

СРЕДА С НЕРЕЗОНАНСНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В упругой среде с плотностью ρ , скоростью звука c и сжимаемостью β равномерно распределены включения такой же сжимаемости с плотностью $\rho_1 \neq \rho$ и объемом V в количестве N на единицу объема. Средняя плотность среды составляет

$$\rho_{av} = \rho(1 - NV) + \rho_1 NV. \quad (3)$$

Будем считать, что размеры включений и расстояния между ними много меньше длины звуковой волны. Кроме этого, включения занимают малый объем, т.е. $NV \ll 1$. Волновое движение среды вызывает движение включений со скоростью, отличной от скорости среды, которые являются источниками силы для среды, т.е. диполями. Состояние среды с диполями описывается следующей системой уравнений

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad (5)$$

где p — звуковое давление, $\mathbf{v}$ — скорость среды, t — время, $\mathbf{f}$ — сила, действующая со стороны диполей на единицу объема.

Уравнение движения диполя имеет вид [15]:

$$\rho_1 V \dot{\mathbf{u}} = -\mu (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) + \rho V \dot{\mathbf{v}}, \quad (6)$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — скорость диполя и среды в его окрестности, μ — присоединенная масса диполя. Отметим, что в (6) не содержится члена, явно учитывающего влияние соседних включений. В случае регулярного расположения диполей их влияние друг на друга можно учесть, рассматривая каждое включение находящимся в ячейке [12].

Полагаем, что скорости диполя и среды в его окрестности имеют одинаковое направление, т.е. векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны. Из (6) находим силу диполей

$$\mathbf{f} = \mu N (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{v}}) = \mu NV \frac{\rho - \rho_1}{\rho + \rho_1 V} \dot{\mathbf{v}}. \quad (7)$$

Сила диполей более легких по сравнению со средой, т.е. $\rho_1 < \rho$, противофазна ускорению среды, а сила тяжелых ($\rho_1 > \rho$) диполей синфазна ускорению.

Подставляя (7) в (5), запишем уравнение Эйлера (5) в следующем виде

$$\left(\rho - \mu NV \frac{\rho - \rho_1}{\mu + \rho_1 V} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (8)$$

Уравнения (4) и (8) описывают состояние обычной упругой среды с эффективной плотностью

$$\rho' = \rho - \mu NV \frac{\rho - \rho_1}{\mu + \rho_1 V}. \quad (9)$$

Для безмассовых диполей $\rho_1 = 0$ эффективная плотность равна $\rho' = \rho (1 - NV)$ и совпадает с физической плотностью ρ_{av} . Для тяжелых диполей $\rho_1 \rightarrow \infty$ эффективная плотность достигает максимального значения $\rho' = \rho + \mu N$, при этом физическая плотность среды становится бесконечной.

На рис. 1 приведены зависимости физической и эффективной плотностей среды со сферическими диполями ($\mu = \rho V/2$) с концентрацией $NV = 0.1$ от плотности диполей.

НЕПОЛЯРИЗОВАННАЯ МЕТАСРЕДА

Теперь перейдем к среде с дипольными резонаторами, называя далее ее метасредой. Сначала рассмотрим случай, когда резонаторы одинаково реагируют на звуковые волны, приходящие с любого направления. По аналогии с электродинамикой будем считать метасреду неполяризованной. Для учета силы, возвращающей диполь к положению равновесия, добавим в правую часть (6) слагаемое $-K \int u dt$, где K — упругость резонатора.

Отсюда находим силу диполя для гармонического случая, полагая зависимость всех параметров метасреды от времени равной $e^{-i\omega t}$, где ω — частота,

$$\mathbf{f} = \mu N \frac{\rho V - \rho_1 V + K/\omega^2}{\mu + \rho_1 V - K/\omega^2} \dot{\mathbf{v}}. \quad (10)$$

Подставим (10) в (5) и найдем эффективную плотность метасреды

$$\rho' = \rho + \mu N \frac{A\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad A = \frac{(\rho_1 - \rho)V}{\mu + \rho_1 V}, \quad (11)$$

где введена резонансная частота $\omega_0^2 = K/(\mu + \rho_1 V)$. Отметим, что частотная зависимость (11) имеет такой же вид, как и частотные зависимости эффективных параметров среды Максвелла (1) и пузырьковой жидкости (2).

На рис. 2 приведена зависимость эффективной плотности метасреды от частоты для значений параметров $\mu N/\rho = 0.1$ и $A = -1$. Из рис. 2 следует, что в области частот $\omega_0 < \omega < \omega_1$ эффективная плотность принимает отрицательные значения. На этих частотах в метасреде могут существовать только затухающие звуковые волны, т.е. среда оказывается запертой.

Верхняя граница полосы запираения может быть найдена из (11)

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \Omega N}{1 + \Omega N A}}, \quad (12)$$

где $\Omega = \mu/\rho$ — присоединенный объем диполя.

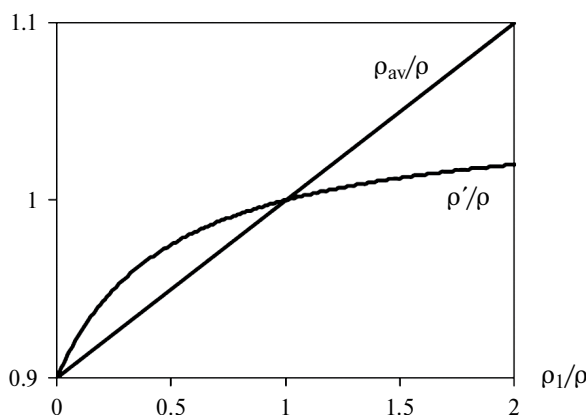


Рис. 1. Физическая и эффективная плотности среды со сферическими диполями с концентрацией $NV = 0.1$.

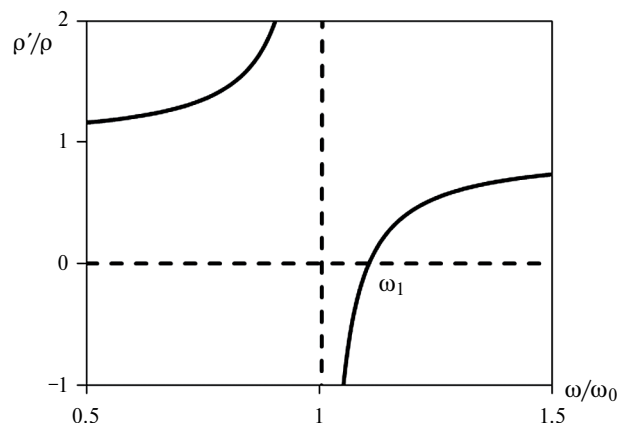


Рис. 2. Эффективная плотность метасреды.

Считая, что плотность диполей ρ_1 может принимать значения от 0 до ∞ , из (11) получаем диапазон возможных значений $-V/\Omega < A < 1$. Из (12) следует, что значение ω_1 тем выше, чем меньше значения параметра A , минимальное значение которого соответствует нулевой плотности ρ_1 . Таким образом, безмассовые дипольные резонаторы обеспечивают максимальную ширину полосы запираания.

Подставляя в (12) минимальное значение $A = -V/\Omega$, находим для резонаторов с нулевой массой

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \Omega N}{1 - V N}}. \quad (13)$$

Ширина полосы запираания зависит от объема диполей, их присоединенного объема и концентрации. Если концентрация диполей мала, т.е. $V N \ll 1$, то из (13) получаем простую оценку для относительной ширины полосы запираания

$$\delta = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} N (\Omega + V). \quad (14)$$

В неполяризованной метасреде диполь одинаково реагирует на звуковую волну, пришедшую с любых направлений, для этого он должен иметь сферическую форму. В этом случае $\Omega = V/2$, и из (14) получаем $\delta \approx 3NV/4$.

Случай $V N \rightarrow 1$, когда резонаторы достаточно плотно заполняют пространство, рассмотрен в работе [16] для метасреды в узкой трубе, где продемонстрирована возможность запираания трубы в неограниченной полосе частот.

ПОЛЯРИЗОВАННАЯ МЕТАСРЕДА

В поляризованной метасреде дипольные резонаторы могут колебаться только вдоль одного выделенного направления [14]. Пусть для определенности это направление совпадает с осью z . Тогда компонента силы диполя согласно (10) равна

$$f_z = \mu_z N \frac{\rho V - \rho_1 V + K/\omega^2}{\mu_z + \rho_1 V - K/\omega^2} v_z. \quad (15)$$

где μ_z — присоединенная масса диполя при колебаниях вдоль оси z .

Резонаторы не колеблются вдоль осей x и y , поэтому соответствующие компоненты силы находим из (9)

$$f_x = -\mu_x N v_x, f_y = -\mu_y N v_y, \quad (16)$$

где μ_x и μ_y — присоединенные массы диполя при колебаниях вдоль осей x и y .

Из уравнений (4), (5), (15) и (16) находим уравнение Гельмгольца

$$\beta \omega^2 p + \frac{1}{\rho'_x} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho'_y} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho'_z} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (17)$$

где $\rho'_x, \rho'_y, \rho'_z$ — эффективные плотности метасреды при колебании вдоль соответствующих осей, которые находятся из (9) и (11) и равны для безмассовых диполей

$$\begin{aligned} \rho'_x &= \rho(1 + \Omega_x N), \rho'_y = \rho(1 + \Omega_y N), \\ \rho'_z &= \rho \left(1 + N \frac{V\omega^2 + \Omega_z \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Omega_x = \mu_x/\rho$, $\Omega_y = \mu_y/\rho$, $\Omega_z = \mu_z/\rho$.

Таким образом, уравнение (17) описывает гармоническое волновое движение в поляризованной метасреде. В общем случае анизотропные свойства метасреды можно описать безразмерной векторной величиной — отношением эффективной фазовой скорости метасреды к скорости звука среды-носителя

$$\mathbf{n} = \frac{1}{c} \left(1/\sqrt{\beta \rho'_x}, 1/\sqrt{\beta \rho'_y}, 1/\sqrt{\beta \rho'_z} \right). \quad (19)$$

Тогда уравнение Гельмгольца (17) запишется в следующем виде

$$k^2 p + \Delta' p = 0, \quad (20)$$

где $k = \omega/c$, $\Delta' = n_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + n_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + n_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Далее рассмотрим двумерную среду. Введем относительную эффективную плотность среды $\gamma = \rho'_z/\rho'_x$, характеризующую отличие между эффективными плотностями метасреды при колебаниях в перпендикулярных направлениях. Для неподвижных диполей плотность ρ'_x принимает только положительные значения и при малой концентрации резонаторов приближенно равна ρ . Относительная плотность γ , как следует из (18) и рис. 2, принимает любые действительные значения за исключением небольшой области в окрестности 1.

Расположим точечный источник в начале координат и запишем уравнение (20) в следующем виде

$$k^2 p + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 2\pi i Q \delta(x, z), \quad (21)$$

где Q – производительность источника. Методом Фурье находим из (21) поле давления

$$p = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi x + i\kappa|z|}}{\kappa} d\xi, \quad (22)$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma(k^2 - \xi^2)}$.

Найдем поле для различных значений γ . Обратим внимание, что по оси x (при $z = 0$) распространяется гармоническое возмущение со скоростью c .

На рис. 3 приведены линии нулевой фазы $\arg p = 0$ для $\gamma = 2$ и $\gamma = 0.5$. Линии нулевых значений показывают фронты волны, которые отличаются от круговых: кривые фронтов вытянуты вдоль оси, фазовая скорость вдоль которой максимальна.

На рис. 4 приведен расчет $\arg p = 0$ для $\gamma = 0.01$ и $\gamma = -1$. Поле при $\gamma = 0.01$ качественно

демонстрирует предел $\gamma \rightarrow 0$, откуда следует, что оно является плоской волной, распространяющейся вдоль оси x . Другими словами, в дипольной метасреде с $\gamma = 0$ монополю является источником плоской волны. Нестрого это также следует из (21): при подстановке $\gamma \rightarrow 0$ должно выполняться $\partial^2 p / \partial z^2 \rightarrow 0$, что и дает плоскую волну, бегущую вдоль оси x .

Если эффективная плотность γ отрицательна, то возникает область, в которой отсутствует звуковое поле. На рис. 4 она находится выше линии $x = z$. При этом фронты волны принимают необычный вид – фронты не охватывают источник, что происходит в обычных средах (круговые фронты с центром в точке расположения источника) и в метасреде с $\gamma > 0$ (рис. 3).

Угловое распределение поля на большом расстоянии R может быть найдено из (22) подстановкой $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$. Диаграмма направленности для величины $|p(\theta)/p(0)|$, независимой от R , приведена на рис. 5.

Вычисление интеграла (22) для больших расстояний можно выполнить методом перевала. Найдем точку перевала

$$\xi_0 = k \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \tan^2 \theta}}. \quad (23)$$

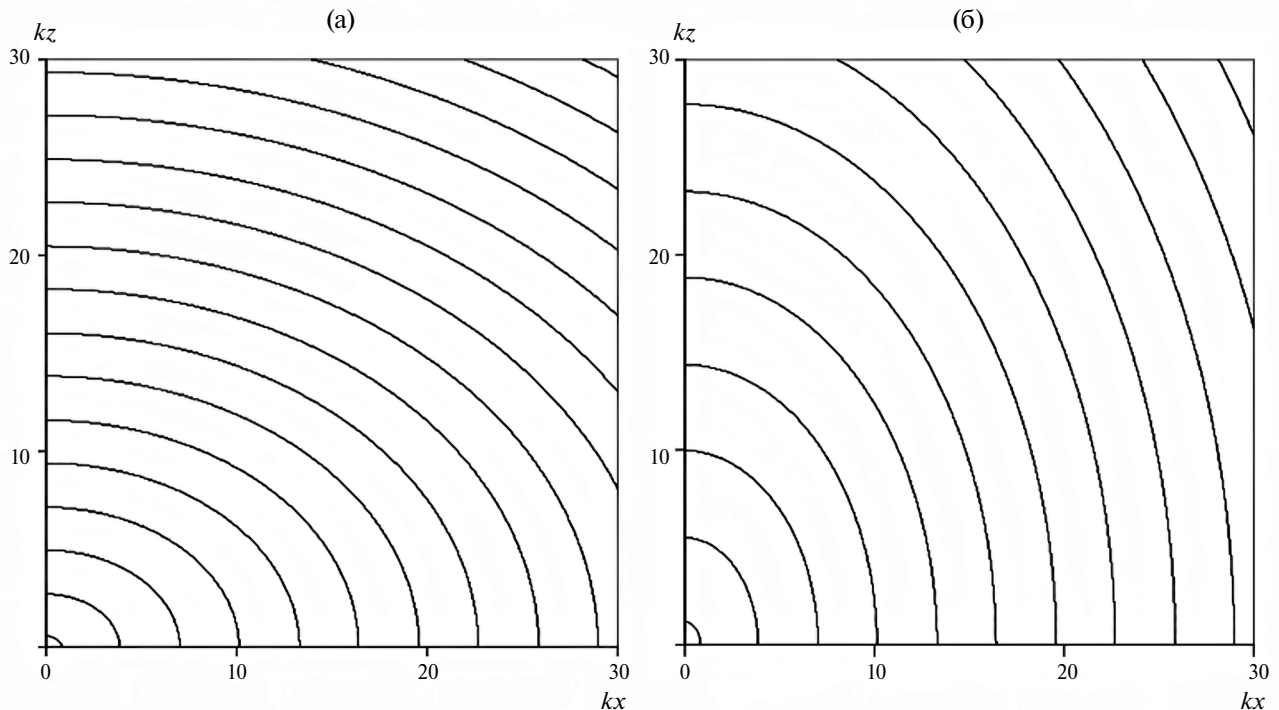


Рис. 3. Линии нулевой фазы $\arg p = 0$ для (а) — $\gamma = 2$ и (б) $\gamma = 0.5$.

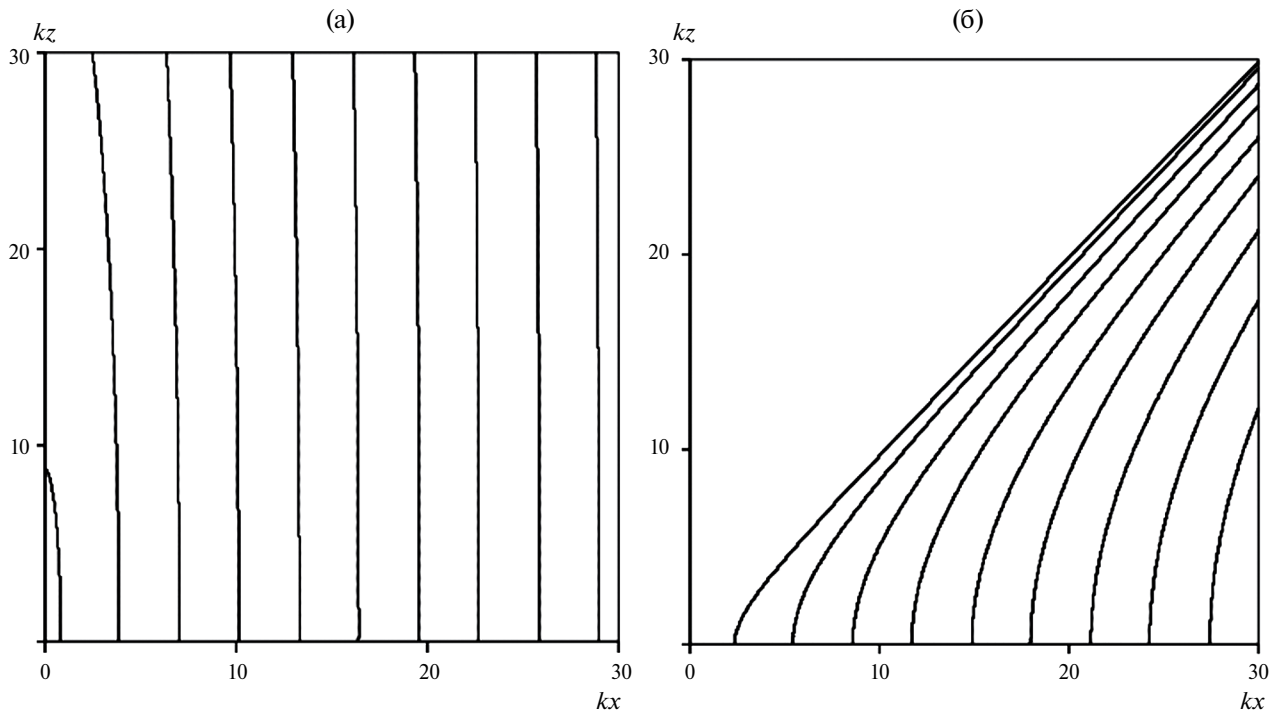


Рис. 4. Линии нулевой фазы $\arg p = 0$ для (а) — $\gamma = 0.01$ и (б) — $\gamma = -1$.

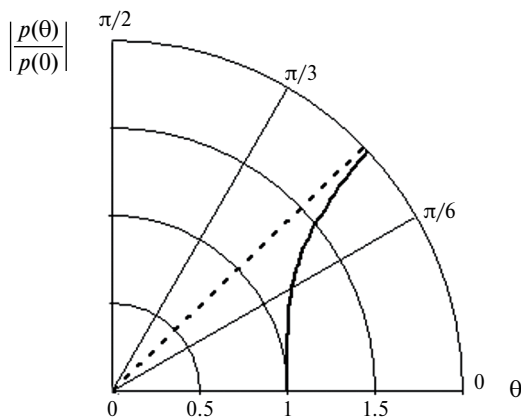


Рис. 5. Диаграмма направленности точечного источника в дипольной метасреде с $\gamma = -1$.

Волновой вектор $\left(\xi_0, \sqrt{\gamma(k^2 - \xi_0^2)}\right)$ задает плоскую волну, которая, в основном, определяет звуковое поле в точке наблюдения. Для $\gamma > 0$ величина ξ_0 принимает только действительные положительные значения, что соответствует однородным волнам.

Для отрицательных γ волны, задаваемые направлениями $\theta_0 < \theta < \pi/2$, где $\tan \theta_0 = -\gamma$, являются неоднородными. В пределе $\gamma \rightarrow -\infty$ однородные волны в метасреде исчезают полностью, как и в

неполяризованной метасреде на частотах, находящихся в полосе заграждения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среда, заполненная дипольными резонаторами, как хорошо известно, может быть описана эффективной плотностью, которая на некоторых частотах принимает отрицательные значения. В этом случае говорят об отрицательной среде. Такая модель метасреды справедлива только, если дипольный момент резонатора коллинеарен скорости среды. Однако, если резонатор имеет фиксированное направление момента (пример конструкции приведен в [13]), то метасреда является анизотропной, что принципиально отличает ее от среды с включениями-резонаторами монопольного типа, имеющей изотропные макроскопические свойства и характеризуемой эффективной сжимаемостью.

Получено уравнение, описывающее гармонические волны в среде с анизотропной эффективной плотностью. Показано, что в некоторой полосе частот существует область пространства, в которую волны точечным источником не излучаются. В другой области пространства фронты распространяющихся волн имеют необычный вид — они обращены в обратную сторону от источника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh L.* The theory of anomal dispersion // *Phil. Mag.* 1899. V. 48. P. 151.
2. *Sellmeier W.* Ueber die durch die Aetherschwingungen erregten Mitschwingungen der Körpertheilchen und deren Rückwirkung auf die ersteren, besonders zur Erklärung der Dispersion und ihrer Anomalien // *Annal. Phys. Chem.* 1872. V. 223. P. 386–403.
3. *Сивухин Д.В.* Оптика. М.: Наука, 1985. 752 с.
4. *Веселаго В.Г.* Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // *Успехи физ. наук.* 2011. Т. 181. № 11. С. 1201–1205.
5. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Поглощение звука и метаматериалы (Обзор) // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.
6. *Foldy L.L.* Multiple scattering of waves // *Phys. Rev.* 1945. V. 67. № 3/4. P. 107–119.
7. *Ma G., Sheng P.* Acoustic metamaterials: From local resonances to broad horizons // *Sci. Adv.* 2016. V. 2. № 2. P. 1501595.
8. *Li J., Wen X., Sheng P.* Acoustic metamaterials // *J. Appl. Phys.* 2021. V. 129. P. 171103.
9. *Gao N., Zhang Z., Deng J., Guo X., Cheng B., Hou H.* Acoustic metamaterials for noise reduction: A review // *Adv. Mater. Technol.* 2022. V. 7. № 6. P. e2100698.
10. *Zhang J., Hu B., Wang S.* Review and perspective on acoustic metamaterials: From fundamentals to applications // *Appl. Phys. Lett.* 2023. V. 123. P. 010502.
11. *Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н.* Акустические «дважды отрицательные» среды // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 3. С. 292–306.
12. *Федотовский В.С.* Пористая среда как акустический метаматериал с отрицательными инерционными и упругими свойствами // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 547–553.
13. *Канев Н.Г., Миронов М.А.* Дипольный резонансный рассеиватель звука // *Акуст. журн.* 2003. Т. 49. № 3. С. 372–375.
14. *Канев Н.Г.* Тангенциальный импеданс // *Акуст. журн.* 2023. Т. 69. № 2. С. 270–274.
15. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
16. *Mironov M.* The dipole resonator and dipole waveguide insulator in dense liquid medium // *Acoustics.* 2022. V. 4. № 2. P. 469–478.

SOUND WAVES IN A MEDIUM WITH RESONANT INCLUSIONS OF A DIPOLE TYPE

N. G. Kanev^{a,b,*}, M. A. Mironov^{a,b}

^a*Acoustic Institute named after. acad. N.N. Andreeva, st. Shvernika 4, Moscow, 117036, Russia*

^b*Moscow State Technical University named after. N.E. Bauman, st. 2-ya Baumanskaya 5, building 1, Moscow, 105005 Russia*

*e-mail: nikolay.kanev@mail.ru

An elastic medium with inclusions that are small compared to the sound wavelength and differ in density is considered. If the inclusions are resonators that respond equally to the influence of waves coming from different directions, then the effective density of the medium in a certain frequency band becomes negative. If the direction of the dipole moment of the resonators is fixed, then the medium with inclusions has an anisotropic effective density. The Helmholtz equation for such a medium was obtained, and the field of a point source was studied.

Keywords: acoustic metamaterials, negative density, dipole resonator, polarization