

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В ГЛУБОКОМ МОРЕ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ “ГЛУБИНА–УГОЛ–ВРЕМЯ”

© 2023 г. А. Л. Вировлянский^a*, А. Ю. Казарова^a

^aИнститут прикладной физики Российской Академии наук, ул. Ульянова, 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

*e-mail: viro@ipfran.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023 г.

После доработки 14.06.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

Рассмотрен переход от традиционного представления волнового поля в вертикальном сечении подводного звукового канала в виде функции глубины и времени к распределению данного поля в 3D фазовом пространстве “глубина–угол–время”. Для этой цели используется развитый в квантовой теории метод когерентных состояний. Смысл предложенного перехода заключается в том, что распределение интенсивности поля в указанном фазовом пространстве менее чувствительно к флуктуациям скорости звука, чем в исходном 2D пространстве “глубина–время”. Это обстоятельство может быть использовано при решении обратных задач. В качестве примера рассмотрена реконструкция координат источника в волноводе по данным измерений распределения интенсивности поля этого источника в фазовом пространстве.

Ключевые слова: подводный звуковой канал, лучи, когерентные состояния, локализация источника

DOI: 10.31857/S0320791923600142, **EDN:** NELTPN

1. ВВЕДЕНИЕ

Фактором, серьезно осложняющим расчет звуковых полей в подводных волноводах, является многолучевость [1, 2]. Она приводит к тому, что интенсивность поля в волноводе выражается функцией со множеством локальных экстремумов, которая чувствительна к слабым вариациям параметров среды. В условиях неизбежной неточности математической модели среды первостепенной задачей становится отыскание и анализ таких характеристик волновых полей, которые даже в условиях многолучевого распространения относительно устойчивы к возмущениям параметров волновода.

Известными примерами таких характеристик в акустике океана являются времена пробега звуковых импульсов вдоль лучевых траекторий [1, 3, 4], а также наклоны полос в интерферограммах широкополосных источников [5–8].

В работах [9, 10] показано, что устойчивыми к влиянию флуктуаций скорости звука являются компоненты поля, формируемые узкими пучками лучей. Вклады отдельных пучков в полное поле на апертуре приемной вертикальной антенны могут быть выделены с использованием развитого в квантовой теории разложения по когерентным состояниям [11–13]. Использование этих устойчивых компонент поля в согласованной со средой обработке сигналов позволяет снизить

требования к точности модели подводного звукового канала [10, 14, 15].

В данной статье продолжено развитие описания звукового поля на основе разложения по когерентным состояниям. Рассматривается применение этого разложения для перехода от традиционного представления поля тонального источника на дистанции наблюдения в виде функции глубины к распределению поля в фазовой плоскости “глубина–угол”. Аналогично, при анализе поля импульсного источника рассматривается переход от распределения поля в 2D пространстве “глубина–время” к его распределению в 3D фазовом пространстве “глубина–угол–время”. Смысл этих переходов заключается в том, что благодаря отсутствию в фазовом пространстве многолучевости и проблем с каустиками, распределение поля в нем менее чувствительно к вариациям параметров среды, чем исходное распределение в координатном пространстве.

Исследование общих вопросов в данной работе выполняется на примере модели глубоководного волновода со слабыми флуктуациями скорости звука. Наше основное внимание сосредоточено на изучении распределения интенсивности поля импульсного источника в пространстве “глубина–угол–время”. В приближении геометрической оптики для этого распределения получено явное аналитическое выражение. Из него следует, что распределение локализовано внутри

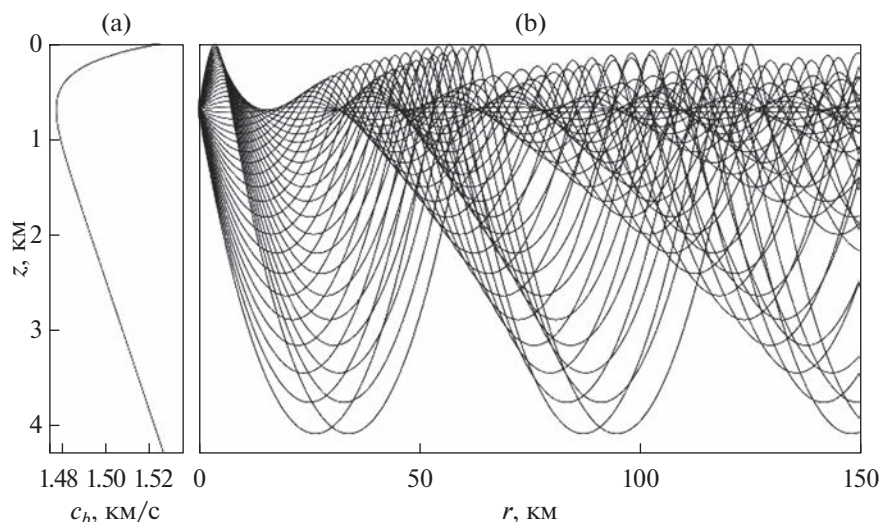


Рис. 1. (а) — Невозмущенный профиль скорости звука и (б) — лучевые траектории в невозмущенном волноводе, вышедшие из источника на глубине $z_0 = 0.7$ км.

некоторой компактной области σ , которая в нашем примере имеет форму спирали. Основным результатом работы является вывод о том, что в присутствии флуктуаций область σ почти не меняется, т.е. области повышенной интенсивности поля остаются примерно в тех же частях фазового пространства, что и в невозмущенном волноводе. Это обстоятельство может быть использовано при решении обратных задач. В качестве примера рассмотрено применение обсуждаемого метода описания поля при решении задачи локализации источника звука в случайно-неоднородном волноводе.

Материалы статьи расположены в следующем порядке. В разд. 2 представлена модель подводного звукового канала, используемая далее для иллюстрации основных идей обсуждаемого подхода. Процедура разложения по когерентным состояниям описана в разд. 3. Здесь же она применена для анализа распределений амплитуды и интенсивности поля тонального источника. В разд. 4 в приближении геометрической оптики получено явное аналитическое выражение для распределения интенсивности звукового поля в фазовом пространстве. В разд. 5 аналитически и численно исследованы свойства распределения интенсивности поля импульсного источника, а в разд. 6 рассмотрен пример использования полученных результатов для решения задачи локализации источника. Итоги работы подведены в разд. 7.

2. МОДЕЛЬ ПОДВОДНОГО ЗВУКОВОГО КАНАЛА В ГЛУБОКОМ МОРЕ

В этом разделе описана идеализированная модель подводного звукового канала в глубоком мо-

ре, которая далее будет использована для тестирования и иллюстрации общих утверждений.

Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , где r — дистанция, z — глубина, φ — азимут. Ось z направлена вертикально вниз и поверхность воды находится в плоскости $z = 0$. Полагаем, что поле возбуждается точечным источником, расположенным в точке $r = 0, z = z_0$. Пренебрегая горизонтальной рефракцией, будем считать, что поле скорости звука c не зависит от азимутальной координаты и имеет вид $c(r, z) = c_b(z) + \delta c(r, z)$, где $c_b(z)$ — невозмущенный профиль, а $\delta c(r, z)$ — случайная функция, задающая слабые флуктуации скорости звука. Профиль $c_b(z)$, используемый далее для численного моделирования, показан на рис. 1а. В правой части изображены траектории лучей в невозмущенном волноводе ($\delta c = 0$), которые выходят из источника на глубине $z_0 = 0.7$ км.

Флуктуации скорости звука представлены реализациями случайного поля $\delta c(r, z)$ с нулевым средним $\delta c = 0$ и функцией корреляции

$$\begin{aligned} \langle \delta c(r, z) \delta c(r', z') \rangle &= \\ &= (\delta c_{\text{rms}})^2 \exp \left(-\frac{\pi (r - r')^2}{l_r^2} - \frac{\pi (z - z')^2}{l_z^2} \right), \end{aligned}$$

где $\delta c_{\text{rms}} = 0.25$ м/с, $l_r = 5$ км, $l_z = 0.5$ км. Здесь и далее символ $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по ансамблю случайных реализаций. Эта простейшая модель отличается от более реалистичных моделей, используемых в акустике океана для описания флуктуаций скорости звука в глубоком море [16, 17]. Однако в работе [18] показано, что она

пригодна для анализа интересующих нас компонент звуковых полей.

Комплексные амплитуды звукового поля точечного источника на сетке частот f , заполняющих интервал от 300 до 500 Гц с шагом 0.5 Гц, рассчитывались методом широкоугольного параболического уравнения [19]. Дно моделировалось жидким полупространством $z > z_b$, где $z_b = 5$ км, с плотностью равной плотности воды и скоростью звука равной $c_b(z_b)$. В этой модели среды волны, достигающие дна, высвечиваются из волновода, и рассчитанное поле формируется лишь волнами, захваченными подводным звуковым каналом. Поле на каждой из указанных частот f рассчитывалось для источника с одной и той же объемной скоростью.

Далее мы будем рассматривать звуковые поля в двух вертикальных сечениях волновода: на дистанциях 50 и 150 км. Функцию, представляющую распределение комплексной амплитуды поля тонального источника на несущей частоте f в заданном вертикальном сечении, обозначим $u(z, f)$. Поле импульсного источника синтезируется из полей тональных источников. Для источника, излучающего сигнал $\exp(-2\pi i f_0 t) s(t)$, где f_0 — центральная частота, а $s(t)$ — огибающая, поле в вертикальном сечении равно

$$v(z, t) = \int df u(z, f) \tilde{s}(f - f_0) e^{-2\pi i f t}, \quad (1)$$

где

$$\tilde{s}(f) = \frac{1}{2\pi} \int dt s(t) e^{2\pi i f t}.$$

При моделировании будет использован импульсный сигнал на центральной частоте $f_0 = 400$ Гц с огибающей

$$s(t) = e^{-\frac{\pi t^2}{2\tau^2}}, \quad \tilde{s}(f) = \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi\tau^2 f^2}, \quad (2)$$

где $\tau = 0.03$ с.

Как отмечено во Введении, в условиях многолучевого распространения влияние слабых флуктуаций δc на поле тонального источника быстро накапливается с дистанцией. На рис. 2 мы видим, что на дистанции 50 км глубинные зависимости амплитуды тонального поля $|u(z, f_0)|$ на центральной частоте в невозмущенном ($\delta c = 0$) и возмущенном ($\delta c \neq 0$) волноводах кардинально различаются.

При работе с импульсными сигналами влияние флуктуаций проявляется слабее из-за того, что вклады некоторых лучей разрешаются во времени. На рис. 3 показано распределение амплитуды поля $|v(z, t)|$ на дистанции 150 км. Расчет выполнен для одной из реализаций возмущения δc .

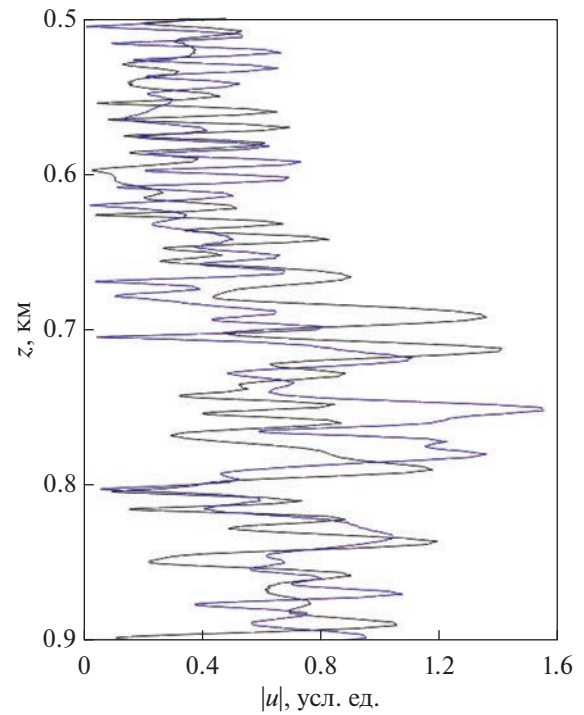


Рис. 2. Зависимость от глубины амплитуды поля точечного тонального источника на дистанции 50 км в невозмущенном волноводе (синяя кривая) и в присутствии одной из реализаций случайного возмущения δc (черная кривая). Частота $f_0 = 400$ Гц.

Фиолетовые ломаные линии образуют так называемый временной фронт, точки которого изображают приходы лучей в плоскости (z, t) в невозмущенном волноводе. Хорошо известно, что в глубоком море звуковые импульсы, приходящие по крутым лучам, слабо искажаются под влиянием флуктуаций скорости звука [1, 3, 17]. Поэтому в присутствии флуктуаций начальная часть звукового поля, формируемая крутыми лучами, выглядит почти также, как и в невозмущенном волноводе. Области повышенной интенсивности здесь локализованы в окрестностях сегментов невозмущенного временного фронта. Белой линией показан горизонт $z_a = 500$ м. Ее пересечения с временным фронтом отвечают временам прихода на этот горизонт восьми собственных лучей. Каждому из них присвоен номер, указанный на рисунке.

На рис. 4 показаны сигналы, принимаемые на глубине $z_a = 0.5$ км на дистанции 150 км, для пяти реализаций возмущения δc . Каждый сигнал представляет функцию $|v(z_a, t)|$, т.е. сечение одного из пяти распределений $|v(z, t)|$ горизонтальной белой прямой $z = z_a$, показанной на рис. 3. Один из этих сигналов получен для распределения $|v(z, t)|$ на рис. 3. В области $t < t_s$, где $t_s = 101.3$ с, разрешаются импульсы, пришедшие по первым

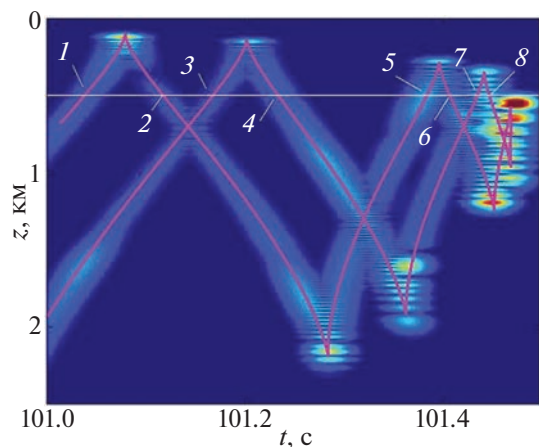


Рис. 3. Распределение амплитуды звукового поля в плоскости (t, z) на дистанции 150 км. Фиолетовыми ломаными линиями показан временной фронт. Пронумерованные цифрами от 1 до 8 точки пересечения временного фронта белой линией $z = z_a$ показывают времена прихода собственных лучей на горизонт z_a .

четырем собственным лучам. Это крутые лучи, которым на рис. 3 присвоены номера 1, 2, 3 и 4. Таким образом, в области $t < t_s$ мы видим четыре группы импульсов, в каждую из которых входят по пять импульсов, пришедших по одному и тому же собственному лучу в разных реализациях возмущенного волновода. Этот график показывает, что флуктуации могут сильно изменить амплитуду импульса, приходящего по крутому лучу, но слабо влияют на время его прихода.

На рис. 4 мы ясно видим, что в области $t > t_s$, формируемой пологими лучами, вклады оставшихся собственных лучей с номерами 5, 6, 7 и 8 не разрешаются и зависимость амплитуды от времени здесь становится нерегулярной. Это вызвано тем, что импульсы, приходящие по разным пологим лучам, перекрываются, т.е. здесь имеет место многолучевость.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ТОНАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ПО КОГЕРЕНТНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Переход от глубинной зависимости тонального поля $u(z)$ к его распределению в плоскости “глубина–угол” выполняется с помощью заимствованного из квантовой теории метода когерентных состояний [11–13]. Разложение по когерентным состояниям устанавливает взаимосвязь между волновым полем и его лучевой структурой, выраженной в терминах гамильтоновой формулировки геометрической оптики [20, 21].

В рамках гамильтонова формализма траектория луча на дистанции r задается своей вертикальной координатой (глубиной) z и импульсом

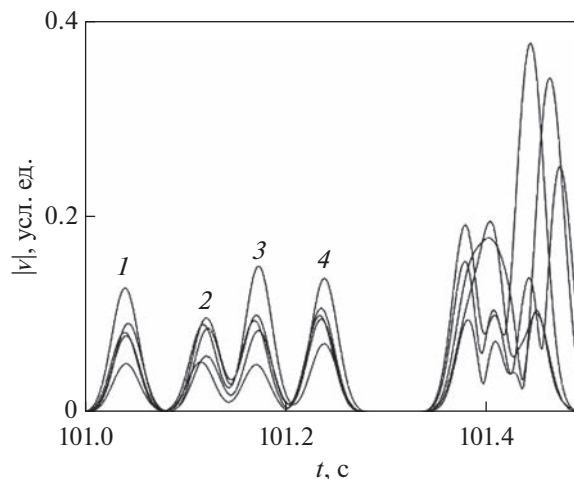


Рис. 4. Амплитуды сигналов, принимаемых на дистанции $r = 150$ км на глубине $z_a = 0.5$ км. Каждая кривая представляет сигнал, отвечающий одной из пяти реализаций возмущения. Цифрами 1–4 отмечены группы разрешающихся во времени импульсов, приходящих по крутым лучам.

$p = n(r, z) \sin \chi$, где χ — угол скольжения в точке (r, z) ,

$$n(r, z) = \frac{c_0}{c(r, z)} \quad (3)$$

— показатель преломления, c_0 — опорная скорость звука. Лучевые уравнения принимают форму уравнений Гамильтона [20, 21] $dz/dr = -\partial H / \partial p$, $dp/dr = -\partial H / \partial z$, где $H = -\sqrt{n^2(r, z) - p^2}$ — гамильтониан. Мы рассматриваем лучи, которые при $r = 0$ выходят из точечного источника на глубине z_0 с разными начальными углами скольжения χ_0 и, следовательно, с разными начальными импульсами $p_0 = n(0, z_0) \sin \chi_0$. Траектории таких лучей описываются решениями уравнений Гамильтона $p(r, p_0)$ и $z(r, p_0)$.

В данной работе мы используем значение опорной скорости звука $c_0 = 1.5$ км/с. При этом значения показателя преломления n , заданного (3), близки к единице. Для рассматриваемых нами малых углов скольжения $p \approx \chi$. Поэтому фазовую плоскость (z, p) мы будем называть плоскостью “глубина–угол”.

Приход луча на дистанцию наблюдения изображается точкой в этой плоскости. Приходы всех лучей, вышедших из источника, образуют кривую, которую мы называем **геометрической лучевой линией** или просто лучевой линией. Она параметрически задается уравнениями $p = p(r, p_0)$ и $z = z(r, p_0)$ с фиксированным r и представляет пример лагранжева многообразия [21].

Примеры лучевых линий в нашей модели среды приведены на рис. 5. На рис. 5а пунктирной и сплошной кривыми изображены лучевые линии на дистанции 50 км в невозмущенном волноводе и в присутствии реализации случайного возмущения δc соответственно. На рис. 5б аналогичные лучевые линии построены для дистанции 150 км.

Когерентным состоянием называется функция вида

$$Y(z'; z, p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_z}} \exp \left[ikp(z' - z) - \frac{\pi(z' - z)^2}{2\Delta_z^2} \right], \quad (4)$$

где Δ_z — пространственный масштаб состояния, а

$$k = 2\pi f / c_0$$

— опорное волновое число. Аргументы z и p задают точку фазовой плоскости “глубина—угол (импульс)”, с которой ассоциировано данное состояние. В квантовой механике выражение (4) с z и p , рассматриваемыми как постоянные параметры, задает волновую функцию с минимально возможным произведением дисперсий координаты и импульса [23]. В акустике (4) можно интерпретировать как вертикальное сечение звукового пучка шириной Δ_z с некоторым средним углом скольжения $\chi = \arcsin p$. Для оценки угловой ширины пучка представим $Y(z'; z, p)$ в виде суперпозиции плоских волн

$$Y(z'; z, p) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \Delta_p}} \int dp' \exp \left[-\frac{\pi(p' - p)^2}{2\Delta_p^2} + ikp'(z' - z) \right], \quad (5)$$

где $\Delta_p = \lambda / (2\Delta_z)$, $\lambda = 2\pi / k$ — длина волны. В малоугловом приближении интервал углов скольжения этих волн по порядку величины равен Δ_p . Отметим, что $Y(z'; z, p)$ через параметр k зависит и от частоты f . Однако при анализе тональных сигналов этот аргумент функций Y и u мы для краткости опускаем.

Проекцию поля $u(z')$ на когерентное состояние $Y(z'; p, z)$, представленную интегралом

$$a(p, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' u(z') Y^*(z', z, p), \quad (6)$$

естественно интерпретировать как суммарный вклад волн, приходящих в интервал глубин $z \pm \Delta_z/2$ с импульсами из интервала $p \pm \Delta_p/2$. При этом $Y(z'; p, z)$ играет роль выкалывающей функции. Она выделяет вклад компоненты поля, ассоциированной с ячейкой фазовой плоскости минимально возможной площади

$$\Delta_z \Delta_p = \lambda / 2. \quad (7)$$

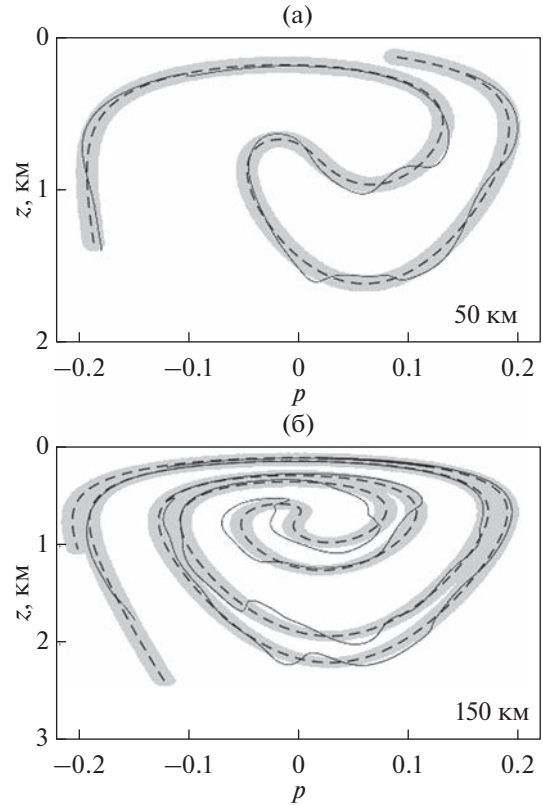


Рис. 5. Геометрические лучевые линии в невозмущенном (пунктир) и возмущенном (сплошные кривые) волноводе на дистанциях (а) — 50 и (б) — 150 км. Серым цветом выделены размытые лучевые линии.

Тем самым обеспечивается наилучшее разрешение одновременно по координате и углу, совместимое с соотношением неопределенности (7).

Хотя когерентные состояния не ортогональны, они образуют полную систему функций. Произвольное поле $u(z)$ может быть представлено в виде разложения [24]

$$u(z) = \lambda^{-1} \int dp' dz' a(z', p') Y(z; z', p'), \quad (8)$$

где интегрирование идет по всей фазовой плоскости.

Скалярное произведение когерентных состояний, ассоциированных с точками фазовой плоскости (p_1, z_1) и (p_2, z_2) , равно

$$\left| \int dz' Y_{\mu_1}(z; z_1, p_1) Y_{\mu_2}^*(z'; z_2, p_2) \right| = e^{-d/2}, \quad (9)$$

где

$$d = \pi \frac{(p - p_1)^2}{\Delta_p^2} + \pi \frac{(z - z_1)^2}{\Delta_z^2}. \quad (10)$$

Величину d можно трактовать как безразмерное расстояние между точками (p_1, z_1) и (p_2, z_2) . Рас-

стоянием от произвольной точки плоскости до лучевой линии назовем расстояние до ближайшей точки этой линии.

Функция

$$I(z, p) = |a(z, p)|^2 \quad (11)$$

представляет распределение интенсивности звукового поля в фазовой плоскости “глубина—угол”. Отметим, что для фиксированного z величину $I(z, p)$, согласно (5), (6) и (11), можно интерпретировать как интенсивность выходного сигнала лепестка диаграммы направленности антенны с эффективной апертурой Δ_z , ориентированного в направлении p .

Интенсивность $I(z, p)$ принимает максимальные значения на лучевой линии и уменьшается при удалении от нее [9, 10]. Из (6) и (9) следует, что область повышенной интенсивности образована точками (p, z) , расположенными на расстояниях $d < 1$ от лучевой линии. Эту область мы обозначаем символом σ , называем ее **размытой лучевой линией** и ожидаем, что распределение интенсивности I локализовано преимущественно внутри нее.

На рис. 5 размытые лучевые линии σ , построенные для **невозмущенного** волновода, выделены серым цветом. Площадь σ , а значит и эффективная “толщина” размытой серой линии, зависит от масштаба Δ_z . В работе [10] исследован вопрос о выборе Δ_z , минимизирующего площадь σ . Показано, что такой масштаб пропорционален $\lambda^{1/2}$ (при этом, согласно (7), Δ_p тоже пропорционален $\lambda^{1/2}$). Серые области на рис. 5 построены для $\Delta_z = 100$ м. Этот масштаб — в данной работе он использован во всех численных расчетах — близок к значениям Δ_z , минимизирующим площади σ для рассматриваемых нами частот и дистанций.

Фундаментальным свойством гамильтоновой динамики является отсутствие многолучевости: в точку фазового пространства приходит не более одной траектории [22]. Поэтому геометрическая лучевая линия, имеющая в нашем примере форму спирали, не имеет самопересечений. На дистанции 50 км размытая лучевая линия σ повторяет форму геометрической. Соседние звенья этой размытой спирали не перекрываются. На рис. 5 мы также видим, что геометрическая лучевая линия в возмущенном волноводе почти не выходит из области σ невозмущенного волновода. Поэтому области σ в невозмущенном и возмущенном волноводе сильно перекрываются и, соответственно, мало различаются. С увеличением дистанции r лучевая линия все плотнее заполняет доступную для лучей область фазовой плоскости Σ . При этом толщина дуги размытой спирали σ не уменьшается и ее соседние звенья начинают перекрываться (рис. 5б). С

ростом r область локализации распределения интенсивности $I(p, z)$ постепенно заполняет всю область Σ и лучевая структура поля на дистанции наблюдения перестает “разрешаться”.

На рис. 6 и 7 показаны результаты расчета распределения $I(z, p)$ на дистанциях 50 и 150 км соответственно на основе численного решения уравнения Гельмгольца в невозмущенном волноводе (рис. 6а и 7а) и в присутствии одной из реализаций случайного возмущения (рис. 6б и 7б). Фиолетовые линии на этих рисунках изображают границы размытых лучевых линий в **невозмущенном** волноводе. Численные расчеты показывают, что распределение интенсивности в плоскости “глубина—угол” не только в отсутствие, но и в присутствии возмущения действительно локализовано преимущественно внутри невозмущенной размытой лучевой линии.

Далее мы увидим, что ситуация с разрешением лучевой структуры поля на длинных трассах существенно улучшается при переходе к анализу распределения интенсивности поля импульсного источника в 3D фазовом пространстве “глубина—угол—время”. Интенсивность поля в точке (z, p, t) мы определим выражением

$$J(z, p, t) = |b(z, p, t)|^2, \quad (12)$$

где

$$b(z, p, t) = \int df a(z, p, f) \tilde{s}(f - f_0) e^{-2\pi i f t} \quad (13)$$

— комплексная амплитуда поля в данной точке. Фигурирующие в (13) амплитуды $a(z, p, f)$ задаются разложением звукового поля в вертикальном сечении волновода по когерентным состояниям на всех частотах f в полосе излученного сигнала.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ КОГЕРЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Использование классического выражения для комплексной амплитуды поля $u(z)$ в приближении геометрической оптики позволяет получить явные аналитические оценки введенных выше интенсивностей $I(z, p)$ и $J(z, p, t)$.

4.1. Поле тонального источника

В приближении геометрической оптики

$$u(z) = A(z) e^{ikS(z)}, \quad (14)$$

где $A(z)$ и $S(z)$ — соответственно амплитуда и эйконал луча, приходящего на глубину z , т.е. попа-

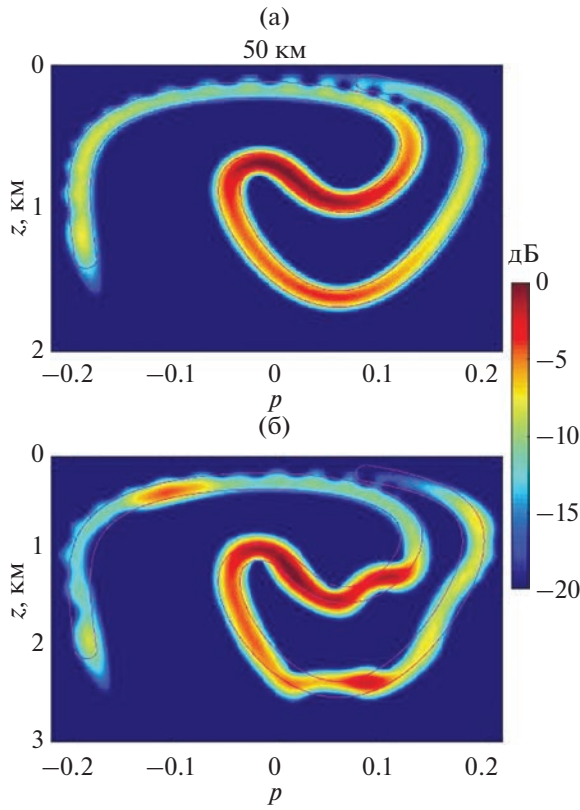


Рис. 6. Распределение интенсивности I поля тонального источника на частоте 400 Гц в фазовой плоскости (p, z) на дистанции 50 км в (а) — невозмущенном и (б) — возмущенном волноводе. Фиолетовые кривые изображают границы размытых лучевых линий в невозмущенном волноводе.

дающего в точку (r, z) [1]. Эйконал является аналогом механического действия и в наших обозначениях выражается интегралом [20, 21]

$$S = \int_{\Gamma} (pdz - Hdr)$$

вдоль траектории Γ , соединяющей точки $(0, z_0)$ и (r, z) . Известное выражение для амплитуды луча A мы представим в виде [20, 21]

$$A(z) = \left| H \frac{\partial z}{\partial p_0} \right|^{-1} e^{-i\mu\pi/2},$$

где μ — количество касаний каустик траекторией луча.

Подставив (14) в (6), находим

$$a(z, p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_z}} \int dz' A(z') e^{\Phi(z')}, \quad (15)$$

где

$$\Phi(z') = ikS(z') - ikp(z' - z) - \frac{\pi(z' - z)^2}{2\Delta_z^2}. \quad (16)$$

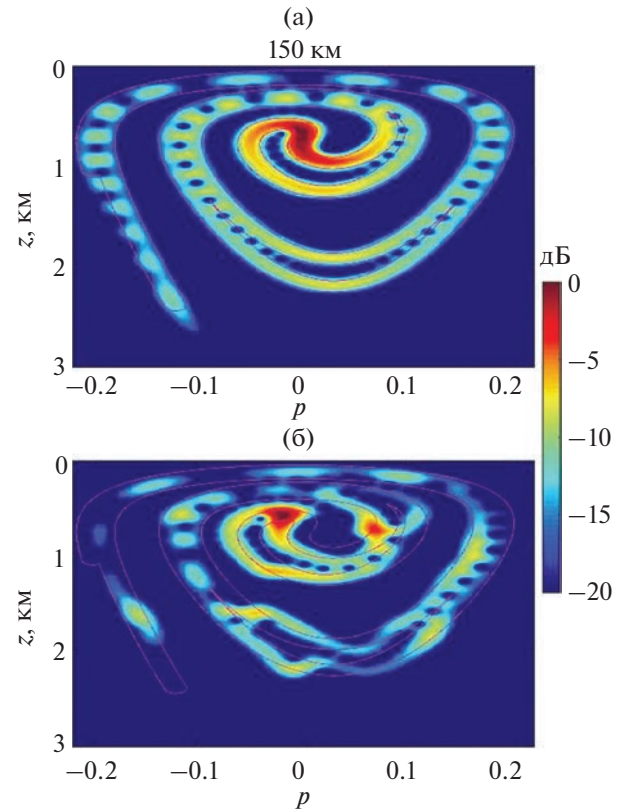


Рис. 7. То же самое, что на рис. 6, но для дистанции 150 км.

В следующем отсюда выражении для интенсивности (11)

$$I(z, p) = \frac{1}{\Delta_z} \int dz' dz'' A(z') A^*(z'') e^{\Phi(z') + \Phi^*(z'')} \quad (17)$$

перейдем к новым переменным интегрирования $\zeta = z' - z''$ и $\bar{z} = \frac{1}{2}(z' + z'')$. При этом

$$\begin{aligned} \Phi(z') + \Phi^*(z'') &= ik[S(\bar{z} + \zeta/2) - S(\bar{z} - \zeta/2)] - \\ &- ikp\zeta - \frac{\pi\zeta^2}{4\Delta_z^2} - \frac{\pi(\bar{z} - z)^2}{\Delta_z^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что интегрирование по ζ фактически ведется по интервалу глубин шириной порядка Δ_z . Воспользуемся известным соотношением [21, 25]

$$\frac{\partial S(z)}{\partial z} = p(z), \quad (18)$$

где $p(z)$ — импульс луча, попадающего в точку (r, z) . Из (18) следует, что

$$S(\bar{z} + \zeta/2) - S(\bar{z} - \zeta/2) = \bar{p}\zeta + \delta S, \quad (19)$$

где $\bar{p}$ – импульс луча, попадающего в точку $\bar{z}$, а $\delta S \sim \xi^3 \sim \Delta_z^3$. Мы выбираем масштаб Δ_z , минимизирующий площадь размытой лучевой линии. В этом случае, как указано в разд. 3, $\Delta_z \sim \lambda^{1/2}$ и, следовательно, $k|\delta S| \sim \lambda^{1/2}$. В высокочастотном приближении выполняется условие

$$k|\delta S| \ll \pi \quad (20)$$

и слагаемым δS в правой части (19) можно пренебречь.

Пользуясь малостью ξ , приближенно заменяем $A(z')A(z'')$ на $A^2(\bar{z})$. С учетом всего сказанного (17) переходит в

$$I(z, p) = \frac{1}{\Delta_z} \int d\bar{z} d\xi A^2(\bar{z}) \times \\ \times \exp \left[ik(\bar{p} - p)\xi - \frac{\pi(\bar{z} - z)^2}{\Delta_z^2} - \frac{\pi\xi^2}{4\Delta_z^2} \right].$$

Вычисляя гауссов интеграл по ξ , учитывая соотношение $A^2(\bar{z}) = \left| H \frac{\partial \bar{z}}{\partial p_0} \right|^{-1}$ и переходя от интегрирования по $\bar{z}$ к интегрированию по p_0 , получаем

$$I(z, p) = 2 \int \frac{dp_0}{|H(p_0)|} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\pi(z - z(p_0))^2}{\Delta_z^2} - \frac{\pi(p - p(p_0))^2}{\Delta_p^2} \right], \quad (21)$$

где $z(p_0)$, $p(p_0)$ и $H(p_0)$ – соответственно глубина, импульс и гамильтониан луча на дистанции наблюдения (аргумент r для краткости опущен), отвечающие траектории с начальным импульсом p_0 . Другой вывод этого соотношения приведен в [20].

4.2. Поле импульсного источника

Амплитуда луча A и его эйконал S выражаются через не зависящую от частоты траекторию луча. Согласно (14), зависимость от частоты в выражении для вклада луча в комплексную амплитуду поля $u(z)$ входит лишь через волновое число k . Подстановка (14) в (1) дает выражение для вклада луча в поле импульсного источника на заданной дистанции наблюдения

$$v(z, t) = A(z) \int df \exp[2\pi i f (S/c_0 - t)] \tilde{s}(f - f_0).$$

Отсюда следует, что на горизонте z вклад луча представлен звуковым импульсом, приходящим с задержкой S/c_0 . Суммарное поле на горизонте z образовано суперпозицией таких импульсов. Пример такой суперпозиции показан на рис. 4.

Альтернативной формой представления поля импульсного источника в рассматриваемом вертикальном сечении волновода является функция $b(z, p, t)$, заданная соотношением (13). При фиксированных z и p она описывает звуковой импульс, который можно интерпретировать как сигнал, приходящий на горизонт z под углом скольжения $\arcsin p$. Интенсивность этого сигнала в приближении геометрической оптики можно выразить аналитически. Для этого поступим следующим образом.

Подставляя (15) в (13), находим

$$b(z, p, t) = \int dz' A(z') \exp \left(-\frac{\pi(z' - z)^2}{2\Delta_z^2} \right) \times \\ \times \int df \tilde{s}(f - f_0) \exp[ikS - ikp(z' - z) - 2\pi i f t]. \quad (22)$$

Интегрирование по z' и f здесь фактически ведется по точкам, удовлетворяющим условиям $|z - z'| = O(\Delta_z)$ и $|f - f_0| = O(\tau^{-1})$ соответственно. В предположении, что длительность излученного импульса τ не слишком мала и выполняется неравенство

$$p\Delta_z/c_0 \ll \tau, \quad (23)$$

слагаемое $-ikp(z' - z)$ в показателе экспоненты в (22) можно приближенно заменить на $-ik_0 p(z' - z)$, где $k_0 = 2\pi f_0/c_0$. Тогда получаем

$$b(z, p, t) = \int dz' A(z') s(t - t(z')) \times \\ \times \exp \left(ik_0 S(z') - ik_0 p(z' - z) - \frac{\pi(z' - z)^2}{2\Delta_z^2} \right),$$

где $t(z) = S(z)/c_0$ – время прихода луча на глубину z . Подставляя это выражение в (12) и повторяя преобразования, использованные при выводе (21), находим

$$J(z, p, t) = 2 \int \frac{dp_0}{|H(p_0)|} s^2(t - t(p_0)) \times \\ \times \exp \left[-\frac{\pi(z - z(p_0))^2}{\Delta_z^2} - \frac{\pi(p - p(p_0))^2}{\Delta_p^2} \right], \quad (24)$$

$t(p_0)$ – время прихода на дистанцию наблюдения луча с начальным импульсом p_0 , Δ_p – масштаб, отвечающий центральной частоте f_0 .

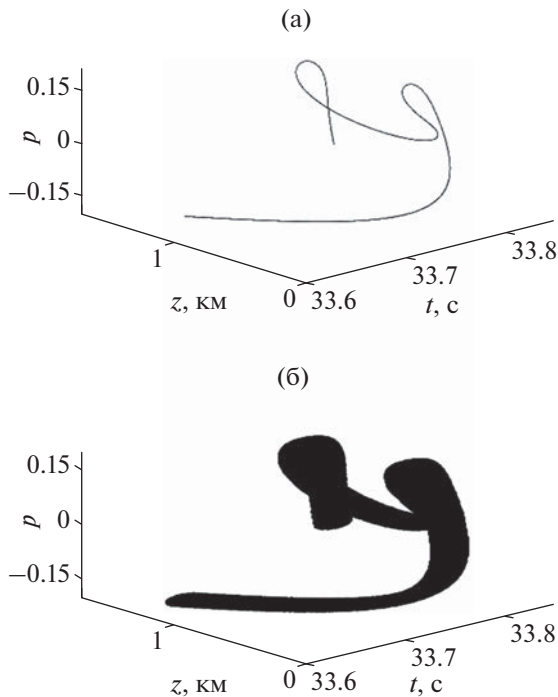


Рис. 8. (а) — Геометрическая и (б) — размытая лучевые линии на дистанции 50 км.

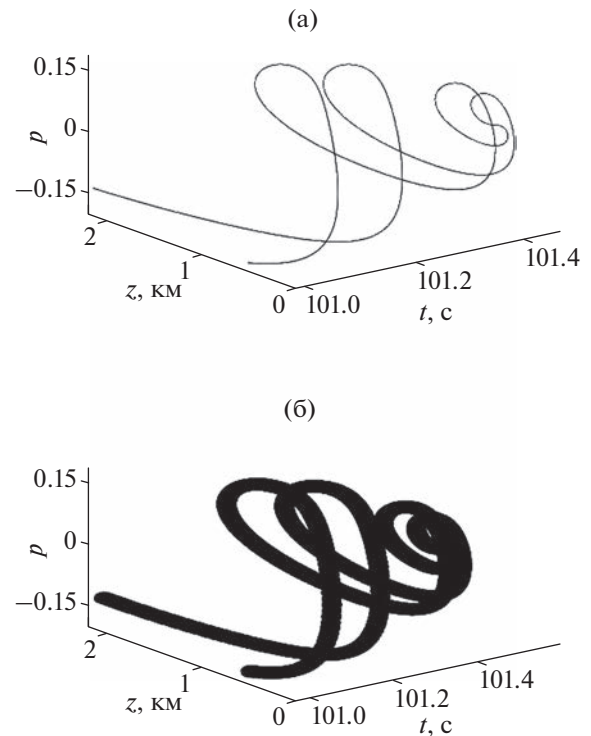


Рис. 9. То же самое, что на рис. 8, но для дистанции 150 км.

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ “ГЛУБИНА–УГОЛ–ВРЕМЯ”

5.1. Лучевая линия в пространстве “глубина–угол–время”

Полагая, что излучается импульс (2), и подставляя это выражение в (24), видим, что интенсивность J принимает максимальные значения на кривой, параметрически заданной уравнениями $z = z(p_0)$, $p = p(p_0)$ и $t = t(p_0)$. Эту кривую мы называем геометрической лучевой линией в 3D фазовом пространстве (z, p, t) . Лучевые линии на дистанциях 50 и 150 км в невозмущенном волноводе для источника на глубине 0.7 км показаны на рис. 8а и 9а. Их проекции на плоскость (p, z) представлены пунктирными линиями, изображенными на рис. 5а и 5б соответственно. Проекция показанной на рис. 9а геометрической лучевой линии на плоскость (t, z) представляет временной фронт, изображенный на рис. 3.

Введем безразмерное расстояние между точками (z_1, p_1, t_1) и (z_2, p_2, t_2) , обобщающее выражение (10) на случай 3D фазового пространства “глубина–угол–время”:

$$D = \pi \frac{(p_2 - p_1)^2}{\Delta_p^2} + \pi \frac{(z_2 - z_1)^2}{\Delta_z^2} + \pi \frac{(t_2 - t_1)^2}{\tau^2}. \quad (25)$$

Как и в фазовой плоскости, интенсивность $J(z, p, t)$ в 3D фазовом пространстве спадает при удалении точки (z, p, t) от лучевой линии. Распределение интенсивности локализовано в области, образованной точками, расположенными на расстояниях $D < 1$ от лучевой линии. Эту область мы будем называть размытой лучевой линией в пространстве “глубина–угол–время” и тоже обозначать σ . На рис. 8б и 9б приведены примеры размытых лучевых линий σ на дистанциях 50 и 150 км.

В разд. 3 мы видели, что расстояния между соседними звеньями спирали, представляющей лучевую линию в 2D пространстве (плоскости “глубина–угол”), уменьшаются с дистанцией. В 3D пространстве “глубина–угол–время” ситуация принципиально меняется. С увеличением длины трассы протяженность вдоль оси t участка спирали, формируемого в плоскостном волноводе лучами с начальными импульсами p_0 из фиксированного интервала, растет пропорционально дистанции r . Количество звеньев спирали тоже растет пропорционально r . При этом временная задержка между соседними звеньями примерно сохраняется. Данное свойство времен прихода лучей детально обсуждается в работе [26]. Таким образом, если соседние звенья размытой 3D лучевой линии в невозмущенном волноводе не пере-

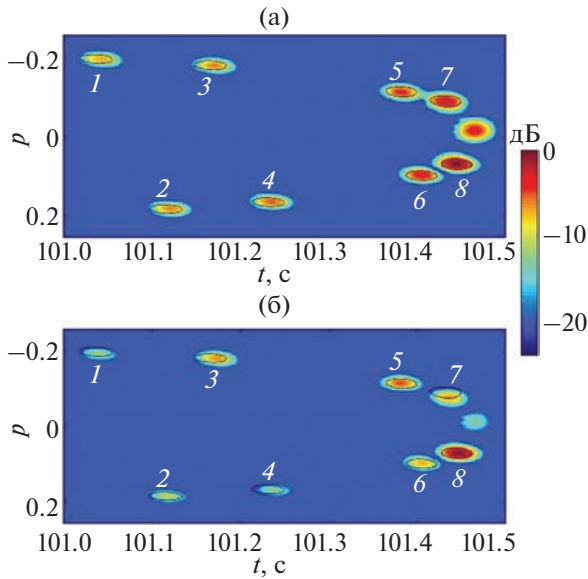


Рис. 10. Сечение распределения интенсивности $J(z, p, t)$ на дистанции 150 км в (а) – невозмущенном и (б) – возмущенном волноводе плоскостью $z = z_a$. Черными линиями показаны границы пересечения данной плоскости и размытой лучевой линии.

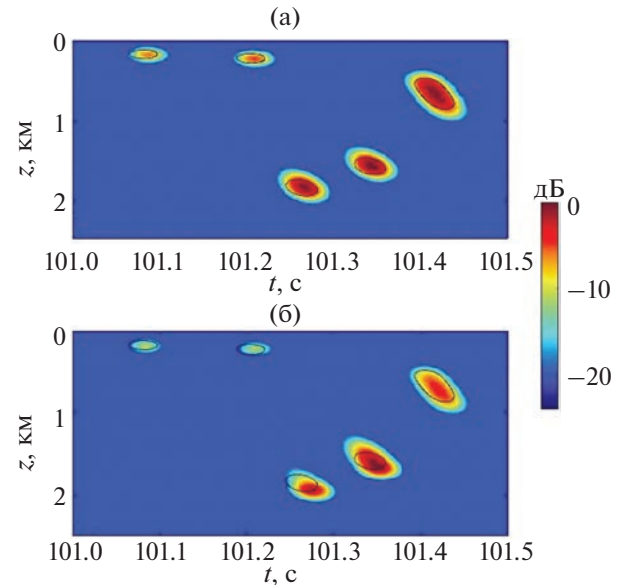


Рис. 11. То же самое, что на рис. 10, но показаны сечения функции $J(z, p, t)$ плоскостью $p = p_a$.

крываются на короткой трассе, они не будут перекрываться с ростом r .

Согласно (24), область повышенной интенсивности $J(z, p, t)$ в пространстве “глубина–угол–время”, как и в плоскости “глубина–угол”, примерно совпадает с размытой лучевой линией σ . В 3D фазовом пространстве, так же как и в фазовой плоскости геометрическая лучевая линия в присутствии возмущения δc относительно мало отклоняется от своего положения в невозмущенном волноводе и почти не выходит за пределы области σ . Поэтому размытые лучевые линии в невозмущенном и возмущенном волноводе на дистанции 150 км мало различаются, и область повышенной интенсивности (область локализации распределения интенсивности) при $\delta c \neq 0$ примерно совпадает с размытой лучевой линией в невозмущенном волноводе. Поскольку соседние звенья этой спирали на дистанции 150 км не перекрываются, в распределении $J(z, p, t)$ отчетливо проявляются характерные детали невозмущенной лучевой структуры поля. В следующем разделе это утверждение проиллюстрировано данными численного моделирования.

5.2. Проявления лучевой структуры поля в распределении интенсивности $J(z, p, t)$

На рис. 10, 11 и 12 показаны сечения распределения интенсивности $J(z, p, t)$ плоскостями $z = z_a$, $p = p_a$ и $t = t_a$ соответственно, где $z_a = 0.5$ км, $p_a =$

$= 0.11$ и $t_a = 101.445$ с. В верхних частях рисунков представлены результаты для поля в невозмущенном волноводе, а в нижних частях для поля в присутствии одной из реализаций возмущения δc . На этих рисунках мы видим пятна овальной формы, представляющие области повышенной интенсивности в окрестностях пиков распределения интенсивности $J(z, p, t)$. В соответствии со сказанным в предыдущем разделе, каждое пятно в плоскости, представленной на рисунке, примерно совпадает с областью пересечения данной плоскости и одного из звеньев размытой лучевой линии в **невозмущенном** волноводе. Границы этих областей изображены черными линиями.

Сравнение графиков в верхних (а) и нижних (б) частях каждого из рис. 10–12 подтверждает устойчивость распределения $J(z, p, t)$ к флуктуациям скорости звука. Области повышенной интенсивности в присутствии возмущения находятся примерно в тех же местах, что и в невозмущенном волноводе. Похожая картина наблюдается для других реализаций δc .

Остановимся подробнее на рис. 10. Цифрами от 1 до 8 здесь пронумерованы восемь пиков распределения интенсивности, представляющих приходы на глубину $z = z_a$ тех же самых восьми лучей, приходы которых в плоскость (t, z) отмечены на рис. 3. На рис. 4 мы видели, что по времени прихода разрешаются вклады лишь первых четырех (крутых) лучей. Переход в фазовое пространство позволяет разрешить приходы всех восьми лучей.

Отметим, что сигналы, приходящие на дистанцию наблюдения последними, фокусируются вблизи оси волновода и формируют там область высокой интенсивности (см. рис. 3). На рис. 10 эта область проявляется в виде самого правого (непронумерованного) пятна, которое не ассоциируется с пересечением плоскости $z = z_a$ размытой лучевой линией. То же относится к области повышенной интенсивности в центре рис. 12.

6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА

В работе [10] показано, что устойчивость распределения интенсивности тонального поля к флуктуациям скорости звука может быть использована при решении задачи локализации тонального источника в случайно-неоднородном волноводе. Идея этого подхода заключается в сопоставлении областей повышенной интенсивности измеренного распределения $I(z, p)$ и аналогичных областей для распределений интенсивности, теоретически рассчитанных для разных положений источника и/или разных значений неизвестных параметров среды. В качестве оценок неизвестных координат источника и/или параметров среды принимаются их значения, отвечающие наилучшему совпадению данных измерений и расчета. В этом разделе мы покажем, что аналогичным образом можно поступить и в случае импульсного источника.

Рассмотрим ситуацию, когда звуковое поле регистрируется протяженной антенной, апертура которой хотя бы в 2–3 раза превышает масштаб когерентного состояния Δ_z . Из (5) и (6) понятно, что для нахождения распределения интенсивности регистрируемого поля $J(p, z, t)$ в интервале глубин $z_1 < z < z_2$, антенна должна перекрывать интервал $(z_1 - \Delta_z/2, z_2 + \Delta_z/2)$. На значения p и t ограничений не накладывается.

Полагая, что параметры невозмущенного волновода известны, проанализируем возможность реконструкции неизвестного расстояния от антенны до источника r_s и глубины источника z_s . Ключевым моментом нашего подхода является введение вспомогательной функции $G(z, p, t; r_s, z_s)$, значение которой равно единице для точек (z, p, t) внутри размытой лучевой линии и нулю вне этой области. Расчет этой функции для набора пробных точек возможного расположения источника (r_s, z_s) выполняется в невозмущенном волноводе с использованием лучевой программы.

Функция $G(z, p, t; r_s, z_s)$ используется для оценки близости расположения области повышенной интенсивности измеренного распределения $J(z, p, t)$ и аналогичных распределений, отвечающих

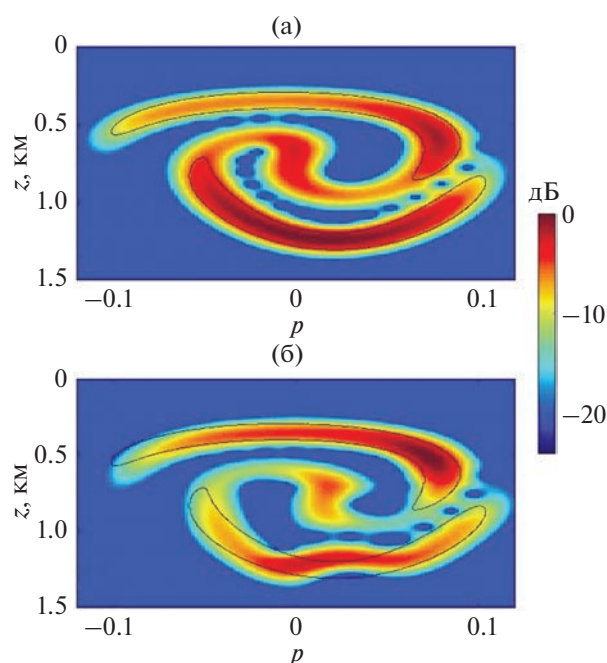


Рис. 12. То же самое, что на рис. 10, но показаны сечения функции $J(z, p, t)$ плоскостью $t = t_a$.

пробным положениям источника. Количественной оценкой близости служит функция неопределенности

$$K(r_s, z_s) = \max_{\tau} \int dp dz dt G(z, p, t + \tau; r_s, z_s) I(z, p, t),$$

где интегрирование по z ведется от z_1 до z_2 , а интегрирование по p и t идет по всем допустимым значениям этих переменных. Дополнительная задержка τ вводится потому, что точное время излучения сигнала предполагается неизвестным. Естественно ожидать, что функция $K(r_s, z_s)$ примет максимальное значение при r_s и z_s , задающих истинное положение источника. Ведь в этом случае весовая функция $G(z, p, t + \tau; r_s, z_s)$ обеспечивает интегрирование по тем областям фазового пространства, в которых интенсивность принимает наибольшие значения. В качестве оценки координат источника принимаются значения r_s и z_s , отвечающие максимальному значению функции неопределенности.

На рис. 13 представлен пример применения данного метода локализации. Предполагается, что источник, излучающий импульс (2), расположен на глубине $z_s = 0.7$ км и дистанции $r_s = 150$ км. Функция неопределенности рассчитана для ситуации, когда распределение интенсивности измеренного поля $J(z, p, t)$ известно для глубин в интервале от 600 до 800 м. Результаты расчета функции неопределенности K в невозмущенном волноводе и в присутствии одной реализации

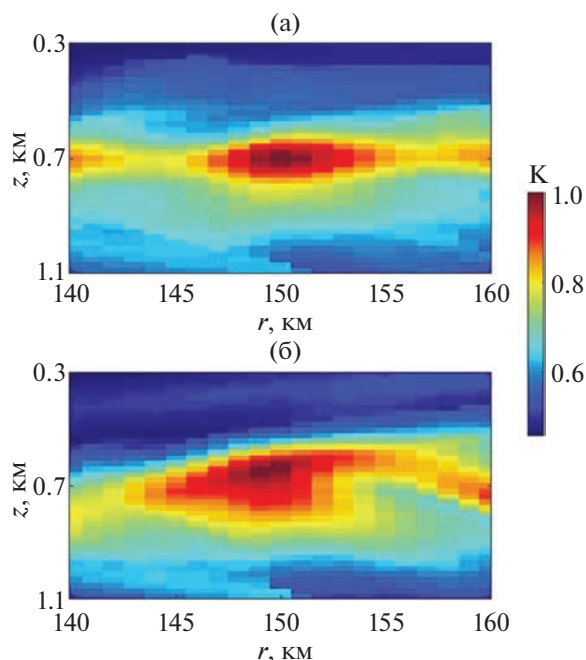


Рис. 13. Функция неопределенности в (а) — невозмущенном волноводе и (б) — в присутствии реализации возмущения, нормированная на максимальное значение.

возмущения δc показаны на рис. 13а и 13б соответственно. В обоих случаях функция K принимает максимальные значения в окрестностях точки истинного расположения источника.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко суммируя сказанное, отметим основные моменты проведенного исследования.

От функции $u(z)$, задающей зависимость от глубины комплексной амплитуды поля тонального источника, мы перешли к функции $a(z, p)$, задающей распределение поля в фазовой плоскости “глубина–угол”. Принципиальное для нас различие этих двух представлений одного и того же поля, которые переводятся друг в друга соотношениями (6) и (8), заключается в следующем.

Если значения интенсивности поля $|u|^2$ на всех глубинах z обычно имеют примерно одинаковый порядок величины, то в фазовой плоскости распределение интенсивности $I = |a|^2$ локализовано лишь внутри размытой лучевой линии σ . На коротких трассах σ занимает небольшую часть участка плоскости Σ , доступного для лучей. Вне σ интенсивность I пренебрежимо мала. В присутствии слабого возмущения δc обе интенсивности, как $|u|^2$, так и I (внутри σ), заметно изменяются. Однако область локализации распределе-

ния в фазовой плоскости — размытая лучевая линия σ — при этом почти не меняется и может быть рассчитана с использованием **невозмущенной** модели волновода. Именно это свойство интенсивности I мы имеем ввиду, когда говорим об устойчивости распределения поля в фазовой плоскости по отношению к вариациям параметров среды.

Аналогичная ситуация имеет место и для поля импульсного источника. В этом случае от распределения поля в плоскости “глубина–время” $v(z, t)$ мы переходим к его распределению в фазовом пространстве “глубина–угол–время” $b(z, p, t)$.

Интенсивность $J = |b|^2$ в этом пространстве локализована внутри компактной 3D области σ , которая тоже слабо меняется в присутствии флуктуаций.

Распределения интенсивностей $I(z, p)$ и $J(z, p, t)$ могут быть найдены экспериментально по данным измерений поля в волноводе с помощью протяженной вертикальной решетки. По расположению областей повышенной интенсивности этих функций можно реконструировать размытые лучевые линии σ , т.е. реконструировать распределения приходов лучей в плоскости (z, p) и пространстве (z, p, t) . Сравнение областей σ , найденных по данным измерений и рассчитанных для разных положений источника и/или разных значений параметров волновода, может быть использовано при решении обратных задач. В разд. 6 это проиллюстрировано на примере решения задачи локализации источника.

В разд. 3 и 5 установлено важное отличие в изменениях распределений интенсивностей I и J с увеличением дистанции наблюдения r . Для поля тонального источника размеры и, соответственно, площадь доступного для лучей участка фазовой плоскости Σ не зависят от r . Масштабы Σ по координате и импульсу задаются соответственно глубиной и углом захвата подводного звукового канала. Вместе с тем площадь размытой лучевой линии σ с ростом r увеличивается (разд. 3). На тех дистанциях, где площадь σ уже нельзя считать малой по сравнению с площадью Σ , лучевая структура поля в распределении I перестает “проявляться”. В случае импульсного источника области σ и Σ приобретают дополнительное измерение по оси t . Размер области Σ в этом направлении равен длительности принимаемого сигнала, которая растет пропорционально r . Площадь σ растет по тому же закону и, как показано в разд. 5, отдельные звенья размытой лучевой линии в распределении J могут разрешаться на гораздо больших дистанциях, чем в распределении I .

Хорошо известно, что при работе с короткими импульсами приходы отдельных крутых лучей могут разрешаться во времени [1, 3, 17]. Сравнение рис. 4 и 10 показывает, что переход в фазовое пространство позволяет разрешать приходы не только крутых, но и пологих лучей.

Одним из результатов данной работы является полученное в приближении геометрической оптики аналитическое выражение (24) для функции $J(z, p, t)$. По смыслу вывода этой формулы она применима в тех ситуациях, когда соседние звенья размытой лучевой линии не перекрываются. Выполненные нами расчеты различных сечений распределения $J(z, p, t)$ по формуле (24) на дистанциях до 150 км дают результаты, близкие к полученным на основе численного решения уравнений Гельмгольца на необходимой сетке частот методом широкоугольного параболического уравнения. Это относится и к сечениям, показанным на рис. 10–12. Поэтому данных расчета интенсивности с помощью (24) мы не приводим.

Данное исследование поддержано грантом Российского научного фонда № 20-19-00383.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
2. Etter P.C. Underwater acoustic modality and simulation. Boca Raton: CRC Press, 2018. 638 p.
3. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: A scheme for large scale monitoring // Deep-Sea Res. 1979. V. 26. P. 123–161.
4. АТОС Consortium. Ocean climate change: Comparison of acoustic tomography, satellite altimetry, and modeling // Science. 1998. V. 281. P. 1327–1332.
5. Чупров С.Д. Интерференционная структура звукового поля в слоистом океане // Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 71–82.
6. Орлов Е.Ф., Шаронов Г.А. Интерференция звуковых волн в океане. Владивосток: Дальнаука, 1998. 196 с.
7. Harrison C.H. The relation between the waveguide invariant, multipath impulse response, and ray cycles // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129. № 5. P. 2863–2877.
8. Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Пересёлков С.А. Спектрограмма и локализация источника звука в мелком море // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 406–418.
9. Virovlyansky A.L. Stable components of sound fields in the ocean // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. № 2. P. 1180–1189.
10. Virovlyansky A.L., Kazarova A.Yu., Lyubavin L.Ya. Matched field processing in phase space // J. Ocean Eng. 2020. V. 45. № 4. P. 1583–1593.
11. Glauber R.J. Quantum Theory of Optical Coherence. Selected Papers and Lectures. Weinheim: Wiley-VCH, 2007. 639 p.
12. Klauder J.R., Sudarshan E.C.G. Fundamentals of quantum optics. N.Y.: W.A. Benjamin, 1968. 304 p.
13. Schleich W.P. Quantum Optics in Phase Space. Berlin: Wiley-VCH, 2001. 685 p.
14. Артельный П.В., Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Коротин П.И., Любавин Л.Я., Стуленков А.В. Наблюдение устойчивых компонент звуковых полей в Ладожском озере // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 174–185.
15. Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю. Устойчивые компоненты звукового поля на апертуре антенны в условиях многолучевого распространения // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 2. С. 190–203.
16. Flatte S.M., Dashen R., Munk W.M., Watson K.M., Zachariasen F. Sound transmission through a fluctuating ocean. London: Cambridge U.P., 1979.
17. Colosi J.A. Sound propagation through the stochastic ocean. N.Y.: Cambridge University Press, 2016. 420 p.
18. Virovlyansky A.L., Makarova Yu.M. On spatial structure of the wave field in a vertical section of a deep water acoustic waveguide // EPL. 2018. V. 123:54004. P. 54404-p1–54404-p6.
19. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H. Computational Ocean Acoustics. N.Y.: Springer, 2011.
20. Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G. Ray and wave chaos in ocean acoustics. New Jersey: World Scientific, 2010. 389 p.
21. Alonso M.A. Rays and waves. In Phase-space optics. Eds. Testorf M., Hennely B., and Ojeda-Castaneda J. N.Y.: McGraw-Hill, 2010. Chapter 8. P. 237–277.
22. Goldstein H., Poole C.P., Safko J.L. Classical mechanics. San Francisco: Addison-Wesley, 2000. 647 p.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1972. 752 с.
24. Сударшан Э., Клаудер Дж. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 430 с.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
26. Virovlyansky A.L. On general properties of ray arrival sequences in oceanic acoustic waveguides // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. P. 3180–3183.